Gestion patrimoniale des infrastructures d'alimentation en eau et hétérogénéité des préférences des usagers

Epiphane Assouan, Tina Rambonilaza, Bénédicte Rulleau

Gestion patrimoniale des infrastructures d'alimentation en eau et hétérogénéité des préférences des usagers *

Water infrastructure asset management when user's preferences are heterogeneous

Epiphane Assouan[a,b], Tina Rambonilaza[a], Bénédicte Rulleau[a]

[a]Irstea, UR ETBX, 50 avenue de Verdun, 33612 Cestas, France
[b]Gretha, Université de Bordeaux, Avenue Léon-Duguit, 33600 Pessac, France

April 30, 2018

Résumé

Cet article étudie la contribution qui sera demandée aux usagers des réseaux collectifs d'eau potable pour le financement de la gestion patrimoniale des infrastructures. Pour ce faire, nous caractérisons l'optimum de premier rang et nous le comparons à l'équilibre du planificateur social en présence d'hétérogénéités de préférences, afin de tenir compte des usages des techniques alternatives pour certains besoins en eaux domestiques. Ces usages alternatifs génèrent des externalités négatives pour le bon fonctionnement du réseau, l'optimum de premier rang requiert ainsi un transfert de la part des usagers exclusifs du réseau collectif vers les usagers des alternatives. Le raisonnement en équilibre de Nash montre par ailleurs que l'existence de ce transfert fait appel à d'autres motivations que les seules valeurs d'usages. Enfin, le cas de la GPIE montre comment une part essentielle des formes d'inégalités qui peuvent y être associée peut être attribuée à l'hétérogénéité des préférences.

JEL-Codes : C720, H410, H540, Q250

Mots clés : demande de services ; consentement à payer ; bien public pur; théorie des jeux

*Version provisoire à ne pas citer

Abstract

This paper studies the contribution required from the users of collective drinking water networks to finance asset management of infrastructures. We characterize the first-best optimum and we compare it to the social optimum in the presence of preferences heterogeneity, in order to take into account the uses of alternative techniques for certain household needs. These alternatives uses generate negative externalities for the good functioning of the water networks. The first-best optimum thus requires a transfer from the exclusive users of the collective network to the users of the alternatives. Furthermore, Nash equilibrium reveals that the existence of this transfer requires other motivations than the only usage values. Finally, the case of water infrastructure asset management emphasizes how an essential part of inequality that can be associated with it can be attributed to preferences heterogeneity.

Keywords : water services ; willigness to pay ; pur public good ; game theory

1 Introduction

En France comme ailleurs, les réseaux d'alimentation en eau potable doivent chaque année être réhabilités, remplacés ou renouvelés afin de répondre à l'usure du temps mais aussi à l'évolution des usages, de l'urbanisation, de la réglementation, des technologies, et aux contraintes de gestion durable des ressources. Cependant, malgré un rythme d'investissement annuel se situant entre 5 et 10 milliards d'euros, ces niveaux sont jugés insuffisants pour préserver un patrimoine infrastructurel estimé autour de 400 milliards d'euros (CGDD, 2017) et composé de 849 000 km de conduites et de 25,7 millions de branchements (Wittner, 2013). L'entretien et la conservation de ces infrastructures sont devenus un exercice difficile pour les collectivités locales et les opérateurs, qui disposent de peu de marge de manœuvre, en l'absence des transferts des Agences de l'eau qui récoltent et redistribuent les redevances à cet effet (Crespi Reghizzi, 2013).

Ainsi, la gestion patrimoniale des infrastructures liées à l'eau (GPIE)[1] requiert aujourd'hui une augmentation des recettes issues de la contribution des usagers. Cependant, les collectivités locales manquent encore de repères sur les conditions socio-économiques pour le faire. Cet article propose de s'appuyer sur la théorie des biens publics (Samuelson, 1954 ; Bergstrom et Cornes, 1983 ; Cornes et Sandler, 1994; Cornes et Sandler, 1985) pour comprendre la clé de répartition de la charge liée à la GPIE et son financement, quand on adopte un raisonnement qui donne une certaine priorité à la prise en compte des préférences des usagers qui seraient amenés à payer.

Abstraction faite des enjeux sociaux, i.e. l'accès pour tous à un service essentiel, le service d'alimentation en eau potable (SAEP), les bénéfices associés aux infrastructures collectives de l'eau possèdent les deux propriétés de non-rivalité et d'impossibilité d'exclusion des biens publics purs (Musgrave, 1959). En d'autres termes, il est toujours possible de fournir un accès en « quantités équivalentes » de cette infrastructure à tous les membres de la communauté. Et n'importe quel membre de la communauté peut toujours demander à bénéficier des infrastructures sans que le prix qu'il paie corresponde au coût réel de la mise à disposition du service fourni et de la quantité d'eau qu'il consomme. D'où l'intérêt d'une organisation centralisée et planifiée du dimensionnement des infrastructures publiques et leur financement via des contributions qui ne seraient pas proportionnelles à l'usage qu'en font les consommateurs d'eau du robinet.

Le cadre théorique permettant de réfléchir le financement de la GPIE invite ainsi à sortir d'une focalisation sur les différentes modalités de tarification de l'eau qui permettraient d'agencer les préoccupations de l'opérateur public (recouvrement des coûts), avec celles des usagers en termes de qualité de services

[1] La gestion patrimoniale des infrastructures liée à l'eau est une approche transversale qui vise à « assurer leur pérennité, au moindre coût, par une maintenance tout au long du cycle de vie, mais également pour assurer l'accès à un service donné » (Werey et al., 2012). Il s'agit donc de gérer au mieux ces équipements, i.e. de répondre aux besoins de leurs usagers, mais aussi et surtout d'assurer leur préservation (Vivien, 2009). Dans cette perspective, trois types d'actions sont mis en débat : rénover, réparer, remplacer (ONEMA et al., 2013).

ou de durabilité des ressources, des préoccupations qui s'avèrent souvent antagonistes voire contradictoires (Griffin et Meljde, 2011). En effet, même fondée sur un raisonnement de type bénéfice-coût, une telle approche ne permet pas de traiter de manière explicite la problématique du renouvellement ou du remplacement des infrastructures collectives, dans une perspective de préservation du patrimoine.

Par ailleurs, les réseaux collectifs de production et de distribution d'eau potable sont à l'origine d'externalités positives (Economides, 1996; Katz et Shapiro, 1985 ; Curien, 2000) appelées également effets-réseaux. La présence de ces externalités rend les coûts de production et la distribution des services qui empruntent les réseaux d'infrastructures très sensibles aux effets d'échelle. Le développement des usages de techniques alternatives d'approvisionnement en eau domestique (forages et puits, récupération d'eau de pluie, etc...), tend ainsi à fragiliser le bénéfice que chaque usager peut tirer du maintien d'un SAEP public, et le mécanisme de solidarité pour le financement d'un réseau collectif. Dit autrement, en deça d'un seuil de saturation, chaque utilisateur du réseau voit sa satisfaction diminuer avec le nombre d'utilisateurs car il devient difficile de partager à moindre coût les besoins de l'offre.

La suite de cet article s'organise en trois parties. Nous analysons dans un premier temps, la situation dite Pareto-efficace, lorsque la puissance publique intervient en tant que planificateur social dans un contexte où l'ensemble des usagers utilisent exclusivement le réseau collectif pour la fourniture de SAEP. Par la suite, la situation pour laquelle une partie de la population a recours aux techniques alternatives est étudiée en empruntant le modèle de Cornes et Rubbleke (2012). Il faut cependant souligner que le régulateur public ne dispose pas nécessairement de toutes les informations nécessaires pour définir et imposer un traitement uniforme du financement de la GPIE. C'est pourquoi, nous proposons aussi une réflexion en termes d'équilibre de Nash qui permet d'étudier l'ampleur de cette contribution, lorsqu'il est fait appel à la seule volonté de payer des usagers (étant donné leurs préférences). Nous étendons enfin cette analyse à la situation d'information incomplète (équilibre Bayes - Nash), pour aborder la GPIE qui serait marquée par une incertitude liée à l'évolution de la structure des préférences vis-à-vis des techniques alternatives.

2 Le modèle de référence

2.1 La demande de SAEP

Les infrastructures sont souvent qualifiées de biens économiques spécifiques, en leur qualité de biens publics. Cela signifie que leur consommation par un usager n'entraîne aucune réduction de la consommation des autres (non-rivalité) et qu'il est impossible d'exclure quiconque de la consommation de ce bien (non-exclusion). Il est par conséquent impossible de faire payer leur usage en fonction des unités consommées par chacun (Clarke, 1971). Ces deux caractéristiques, en entraînant une impossibilité de reposer sur des mécanismes de marché, justifient l'intervention du planificateur social (l'État ou les collectivités locales) pour garantir la production d'un bien public, notamment via l'impôt, permettant le paiement par « tous » de ce qui profite à tout le monde.

Mais, dans la pratique, les infrastructures ne peuvent pas être consommées directement. Elles entrent dans la production d'un service qui lui peut être exclusif (appropriable par l'usager) ou rival c'est-à-dire présentant des problèmes d'accès en cas de congestion. Il est donc rare de voir dans la littérature micro-économique, une formulation d'une demande explicite d'infrastructures en lien avec l'usage qui en est fait au travers des services qui lui sont associés, à l'instar de la formulation de la demande en eau pour les usages domestiques. Depuis l'étude de Metcalf (1926), l'analyse économique s'inspire de la théorie standard du consommateur. Dans ce cadre, la demande de service d'eau domestique est posée comme une demande de consommation d'eau potable, qui résulterait de la maximisation de l'utilité dérivée de la consommation d'une quantité d'eau et d'autres biens, sous contrainte budgétaire, les prix étant fixés par le marché. Toutefois, afin d'intégrer les spécificités de la demande en SAEP en tant que service nécessaire, l'hypothèse de séparabilité implicite entre l'eau du robinet et les autres biens qui entrent dans la fonction d'utilité du consommateur doit être posée (Strotz, 1959). La demande en eau ne serait donc fonction que de son seul prix et du revenu du ménage, et non des prix des autres biens.

Cette formulation de la demande en eau possède cependant des limites, quand on sait par avance que les différents usages de l'eau du robinet (pour la boisson, lessive, hygiènes) font appel à des activités que les ménages entreprennent eux-mêmes pour mettre en adéquation la quantité d'eau qui leur est fournie au niveau du robinet et leur besoin en termes de qualité (Pattanayak et al., 2005 ; McConnell et Rosado, 2000). Cela revient à dire que les usagers sont responsables d'une grande partie de la qualité des services rendus conjointement par la quantité d'eau distribuée et les équipements collectifs dédiés à cet effet. Dans ce cadre, les opérateurs de SAEP public ont pour principal rôle de garantir à toute la population un accès identique à l'opportunité d'utiliser le réseau collectif qui permet d'accèder à l'eau pour les usages domestiques.

Pour tenir compte de ces activités entreprises par les ménages dans la production de SAEP qui leur conviennent, nous empruntons aux approches en termes de fonction de production des ménages (Bockstael et McConnell, 1983), les fondements conceptuels de la demande de SAEP. La consommation de SAEP S_i de chaque usager est fonction de la quantité d'eau du robinet w_i, qu'il mobilise, un bien devenu divisible et vendu à un prix unitaire fixé à p, et d'un bien public G, le réseau collectif c'est-à-dire un système formé d'ouvrages et de canalisations en bon état.

Nous posons que cette fonction de production de SAEP par le ménage est de type CES :

$$S_i(w_i, G) = \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \tag{1}$$

où le paramètre γ représente l'élasticité de substitution entre w_i et G. En posant, $0 < \gamma < 1$, nous pouvons considérer que ces deux variables sont complémentaires. La quantité d'eau du robinet consommée évolue simultanément avec la taille du réseau d'eau en bon état (qui a un impact direct sur un certain nombre de paramètres : débit, qualité physico-chimique, etc..). Le paramètre α représente le degré d'importance qu'accordent les usagers à la quantité d'eau potable par rapport aux infrastructures. Pour simplifier, nous posons l'hypothèse que ce degré d'importance est le même pour toute la communauté et que la quantité d'eau disponible donne une satisfaction plus importante que l'état du réseau ($\alpha > 1 - \alpha$).

2.2 La GPIE et les usagers de SAEP

Pour maintenir un réseau d'eau qui garantisse un SAEP de qualité aux usagers (présents et futurs), les collectivités doivent mettre en place un « effort annuel constant » de renouvellement, remplacement ou réhabilitation d'une partie du réseau dont le financement fait appel à la contribution des usagers. Cela revient à dire :

- que le réseau G est divisible en termes physique mais indivisible sur le plan technique et économique ;
- qu'il est possible à chaque début d'année d'identifier la portion du réseau G_0 qui ne nécessite pas de travaux et la partie dégradée du réseau sur laquelle l'intervention nécessite une contribution financière des usagers.

Nous considérons que chaque individu i doit décider de sa contribution à l'effort de GPIE en termes physique g_i d'abord. En effet, les collectivités locales élaborent une programmation annuelle des travaux (en linéaire de canalisations et ceux d'ouvrages). Nous pouvons donc envisager le fait qu'il est possible de communiquer sur ces actions publiques et de diviser l'effort entre l'ensemble des usagers. On pose c_i le consentement à payer marginal (CAPM) de i pour financer ces interventions qui vont servir à la fois ses propres usages actuels et futurs et les usages des autres membres de la société (dont les générations futures). Ainsi, le CAPM reflète les valeurs d'usage et de non-usage (valeur d'option, valeur patrimoniale) accordées au réseau collectif. Nous considérons que ce CAPM est différent pour chacun des individus, afin d'intégrer le fait que les individus qui ont recours aux techniques alternatives n'ont pas les mêmes coûts d'opportunité à l'égard du maintien dans son intégralité du réseau collectif.

On écrit alors $G = G_0 + \sum_i g_i$, pour donner une mesure physique du réseau en bon état après des travaux de renouvellement, pour une année de référence, étant donné les préférences des usagers pour le réseau collectif. Chaque usager pris isolément est appelé à définir :

- les quantités de biens marchands x_i qu'il consomme ;
- la quantité d'eau du robinet w_i delivrée par le réseau collectif G qu'il utilise pour ses usages domestiques S_i ;

- la portion du besoin de renouvellement g_i (le linéaire de canalisation) qu'il consent à financer.

  Pour formuler cette décision, nous considérons qu'il dérive une utilité $U_i(x_i, S_i(w_i, G))$ de ces différents biens et services.

La demande en SAEP est une demande séparable de la consommation des autres biens et services privatifs x_i, car nous considérons que l'alimentation en eau potable est un service essentiel. Nous pouvons alors définir les décisions de chaque usager à partir d'une fonction d'utilité quasi-linéaire (Samuelson, 1954 ; Varian, 1992) :

$$U_i(x_i, S_i(w_i, G)) = x_i + S_i(w_i, G) = \mathbf{x}_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \tag{2}$$

Cette décision est guidée par sa contrainte budgétaire, étant donné son revenu y_i :

$$\begin{array}{c} Max_{x_i, w_i, g_i} Ui = x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ s.c\ pw_i, +c_i g_i + x_i \leq y_i \\ G = g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0 \end{array} \tag{3}$$

2.3 La GPIE par le planificateur social

La résolution de ce programme de maximisation individuelle signifie que chaque individu va décider de manière unilatérale sa contribution à la GPIE sans prendre en considération (ou traiter de manière limitée) l'impact de sa décision sur l'utilité procurée aux autres membres de la société par un réseau collectif en bon état. C'est pourquoi, l'intervention d'un planificateur social est souvent nécessaire pour coordonner le financement des biens publics purs afin de satisfaire l'ensemble de la demande sociale G, en termes d'intérêt général, en mobilisant les ressources disponibles dans l'économie : $\sum_i y_i - \sum_i x_i \geq p(\sum_i w_i) + \sum_i c_i g_i$.

Le programme du planificateur social s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{c} B(w_i, G) = Max_{w_i, G} \left[\sum_i U(x_i, w_i, G)\right] \\ s.c\ \ \sum_i y_i - \sum_i x_i \geq p(\sum_i w_i) + \sum_i c_i g_i \\ G = G_0 + \sum_i g_i \end{array} \tag{4}$$

On peut par ailleurs se rapprocher de l'optimum de premier rang, c'est-à-dire arriver à maintenir G à un niveau qui maximise la somme des utilités de l'ensemble de la population, tout en satisfaisant la demande individuelle en SAEP définie sur l'allocation (w_i, G). Il suffit pour cela de considérer que :

- les individus ont des préférences homogènes et souhaitent maintenir leur branchement à un réseau collectif en bon état avec une contribution marginale fixée à c ;
- la technologie mobilisée pour les interventions sur le réseau correspond à la technologie au moindre coût ;
- il est possible de retrouver les conditions B-L-S (Bowen-Lindahl-Samuelson) qui stipulent que la somme des utilités marginales du bien public doit être égale aux coûts marginaux de sa production qui est égale au rapport des prix.

Dès lors, la réalisation d'une GPIE optimale nécessite une contribution financière marginale de la part de chaque usager d'un montant :

$$c^* = \frac{\left(\sum_i y_i - \sum_i x_i\right)}{\left(\frac{G^*}{(1-\alpha)}\right) - G_0} \tag{5}$$

et une contribution totale demandée de manière forfaitaire de montant :

$$c^* * \frac{G^* - G_0}{N} = \frac{G^* - G_0}{N} \frac{\left(\sum_i y_i - \sum_i x_i\right)}{\left(\left(\frac{G^*}{(1-\alpha)}\right) - G_0\right)} \tag{6}$$

avec $N = \sum i$ (*Voir les détails de la résolution en annexe 1).*

À l'optimum de pareto, la somme de la contribution demandée aux individus pour financer la GPIE afin de maintenir le réseau en bon état de manière efficace (i.e. en accord avec le besoin de l'offre) et optimale (i.e. en satisfaisant la demande sociale en matière de SAEP), est une fonction :

- croissante de l'importance que les ménages accordent aux infrastructures collectives pour disposer du niveau de SAEP qu'ils souhaitent $(1-\alpha)$;
- décroissante de G_0, la composante en bon état de l'infrastructure au début de chaque période ;
- croissante de la part de revenu disponible dans l'économie pour financer les dépenses de la GPIE ;
- décroissante du nombre d'usagers contributeurs N.

Ces résultats indiquent par ailleurs que pour disposer d'un financement suffisant de la GPIE via la contribution des usagers, le régulateur public devrait à la fois dissocier la contribution à la GPIE du prix de l'eau au m^3 et répartir la charge de la GPIE de manière uniforme sur l'ensemble des usagers. Une telle situation est un cas standard d'économie publique. L'efficacité productive et allocative peut être garantie par des prix dits de Lindahl, dissociés de la quantité d'eau consommée par chaque individu et de son niveau de revenu. Le principe du prix de Lindhal n'est pas sans rappeler ici la tarification binôme à savoir une prime fixe indépendante de la consommation mais fonction de l'importance du branchement, et une partie variable proportionnelle au volume d'eau consommé. Dans le domaine de l'eau, ce principe reste cependant controversé car il est considéré comme inéquitable (Smets, 2004). L'effort demandé est en effet le même pour tous les ménages, quels que soient leur taille, leur niveau de revenu, leur type de logement. Une deuxième modalité met en pratique le principe de prix du m^3 unique. Jugé comme plus équitable, elle expose cependant les collectivités locales à des difficultés financières pour assurer leur besoin en investissements, surtout dans un contexte marqué par une tendance à la baisse de la consommation d'eau du robinet.

3 La GPIE face à l'hétérogénéité des préférences

Même si l'abondement d'un budget «renouvellement et réhabilitation du réseau» via la contribution forfaitaire des usagers peut faire consensus, l'hypothèse d'une homogénéité des préférences pour contribuer à l'effort collectif en matière de GPIE n'est pas systématiquement vérifiée dans la réalité. Une partie des usagers peut s'équiper autrement pour satisfaire certains de ses besoins en eau domestique (arrosage du jardin, toilette, etc..). Les techniques alternatives sont très diverses. Elles peuvent être collectives et collaboratives (Ruiz-Mier et Van Ginenken, 2006), ou individualisées (Montginoul et al., 2005 ; Montginoul, 2013). L'adoption de certaines peut relever des motivations environnementales (Montginoul et al., 2005; Rinaudo et al., 2016) ; c'est le cas notamment des techniques de récupération d'eau de pluie visant à limiter les prélèvements sur la ressource. Pour d'autres, comme les forages d'eaux souterraines, c'est l'autonomie qui prime (Isnard, 2014).

Aussi, le fait qu'un usager soit connecté au réseau ne signifie pas nécessairement qu'il l'utilise de manière systématique pour l'ensemble de ses besoins en eau domestique. La présence de ces techniques d'approvisionnements alternatives remet en question le partage de la charge liée au financement de la GPIE par l'ensemble de ses usagers. Néanmoins, en supposant que le planificateur social puisse imposer de nouvelles règles de partage des coûts liés à la GPIE, il importe de préciser quel type de politique publique doit être mise en place pour accompagner les « transferts » (le « contrat social ») afin que celui-ci emporte l'adhésion des contributeurs.

Nous nous inspirons pour cette partie du modèle de Cornes et Rubbelke (2012) dont l'intérêt se trouve dans le fait de considérer deux types de préférences à l'égard du caractère public d'un bien ; ils distinguent en effet les individus qui tirent bénéfice du maintien de ce caractère public voire son amélioration, et sont prêts à y contribuer, et ceux qui au contraire considèrent ce caractère public comme contraignant. Nous faisons ici l'hypothèse que les individus ayant recours aux techniques alternatives présentent de telles préférences vis-à-vis du réseau collectif. Cela ne veut pas dire qu'ils ne vont pas utiliser le réseau collectif. Cependant, en adoptant les techniques alternatives pour une partie de leurs besoins, ils engendrent une externalité négative notée a_i sur le bon fonctionnement d'un réseau collectif (e.g. baisse de pression, des augmentations des fuites, risques de qualité sanitaire...).

Nous désignons par c_i^g le CAPM pour la GPIE et par c_i^a le CAPM pour basculer vers une technologie alternative. La contrainte budgétaire pour chaque usager prend donc la forme suivante : $x_i + pw_i + c_i^g g_i + c_i^a a_i \leq y_i$

Dans ce contexte, le problème du planificateur social se présente comme suit:

$$\begin{array}{c} B(w_i,G) = Max \sum_i \pi_i u_i(x_i, w_i, G) \\ s.c \quad \sum_i y_i - \sum_i x_i - \ \mathbf{p} \sum_i w_i + \sum_i c_i^g g_i + \sum_i c_i^a a_i \\ G = G_0 + \sum_i g_i - \sum_i a_i \end{array} \tag{7}$$

avec π_i la proportion de chaque type de préférence au sein de la population.

Comme précédemment, le réseau collectif est composé d'une partie en bon état G_0 à laquelle on ajoute la partie dépréciée mais renouvellée du fait de la participation au projet de renouvellement des usagers $\sum_i g_i$. Mais on en déduit les externalités négatives induites sur l'intégrité du réseau par le développement des techniques alternatives : $\sum_i a_i$.

On a ainsi :

$$G = -\sum a_i + \sum g_i + G_0 \tag{8}$$

Pour résoudre ce programme, on peut poser le Langrangien suivant :

$$\begin{array}{c} L = \sum_{i=1}^n \pi_i u_i(x_i, w_i, G_0 + \sum_{i=1}^n g_i - \sum_{i=1}^n a_i) \\ +\lambda(\sum_{i=1}^n y_i - \ \sum_{i=1}^n x_i - \mathbf{p} \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n c_i^g g_i - \sum_{i=1}^n c_i^a a_i) \end{array} \tag{9}$$

Considérons la résolution de ce programme de maximisation pour un individu représentatif k :

$$\begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial x_k} \Rightarrow \pi_k - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_k} \Rightarrow \left[\sum_k (\alpha G^{1-\alpha} w_k^{\alpha-1}) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} - p\right] w_k^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial g_k} \Rightarrow \left[\sum_k ((1-\alpha)(G^{-\alpha} w_k^{\alpha})) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} - c_k^g\right] g_k^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_k} \Rightarrow \left[-\sum_k ((1-\alpha)(G^{-\alpha} w_k^{\alpha})) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} - c_k^a\right] a_k^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Rightarrow Y - \sum_k x_k^* - p \sum_k w_k^* - \sum_k c_k^g g_k^* - \sum_k c_k^a a_k^* = 0 \end{array} \tag{10}$$

On peut démontrer qu'à l'optimum lorsque $g_k^* > 0$ alors $a_k^* = 0$. En d'autres termes, il est impossible pour un individu de continuer à financer la GPIE tout en s'engageant dans une technologie alternative, et *vice versa.* Une autre conséquence est qu'il n'est plus possible de faire coïncider l'efficacité technique (minimisation des coûts du renouvellement des infrastructures) et l'efficacité allocative (maximisation du bien-être de chaque individu, dont les usagers exclusifs du réseau collectif) car le financement de la GPIE sera sous-optimal. Une telle situation peut être illustrée en termes d'équilibre non-coopératif *(voir la résolution en annexe 2).*

En conséquence, pour égaliser les coûts marginaux de la GPIE avec les CAPM des usagers, le planificateur social doit imposer une augmentation de la contribution de la part des usagers exclusifs de l'infrastructure collective, ce qui garantirait l'accès de tous (y compris aux personnes utilisant des techniques alternatives) à ce réseau. Cela revient à dire que ces individus que nous qualifions de « conservateurs », prendront en charge le différentiel de coûts entre l'optimum de premier-rang et la situation en présence de techniques alternatives. Ce différentiel de coût se présente comme suit pour un usager conservateur k : $c_k^{g,-a} - c^{\mathrm{col}}$, où $c_k^{g,-a}$ représente la contribution qui lui sera demandée et qui intègre la part de la GPIE qui aurait du être prise en charge par les utilisateurs de techniques alternatives, et c^{col} représente le montant demandé à l'ensemble des usagers en l'absence de techniques alternatives.

On montre que le montant de cette contribution individuelle supplémentaire t_k est une fonction croissante de l'externalité liée aux usages alternatifs a et décroissante du coût marginal de ces techniques alternatives c^a :

$$t_k = \Phi_k(a, c^a) \tag{11}$$

avec Φ_k une fonction continue, concave et dérivable deux fois.

Cela signifie qu'au fur et à mesure que le recours aux techniques alternatives se développe, la réalisation du projet de GPIE tel qu'il a été programmé exige une augmentation des contributions de ceux qui utilisent exclusivement le réseau collectif. Par ailleurs, plus les usages alternatifs sont attractifs du fait d'un coût d'accès plus faible et inférieur au CAPM des individus, plus la contribution supplémentaire qui sera demandée aux usagers exclusifs du réseau collectif sera élevé. En effet, le développement trop important des techniques alternatives introduit une forme de surcapacité du réseau collectif qui doit retrouver son état initial, avec le renouvellement et le réhabilitation.

On en déduit alors que pour réaliser la GPIE, la présence de techniques alternatives conduit nécessairement à une augmentation plus importante de la contribution attendue des usagers exclusifs de l'infrastructure collective. De cette manière, la fourniture d'un SAEP public et le financement de la GPIE opèrent un transfert entre les usagers exclusifs du réseau collectif et ceux qui, toute chose étant égale par ailleurs, utilisent pour une partie de leur besoin les techniques alternatives. Un autre point important à retenir d'un tel résultat est que l'incitation à l'adoption des techniques alternatives introduit une forte inégalité entre les populations qui disposent de moins de possibilités techniques pour les utiliser (ceux qui vivent dans les immeubles de centre ville par exemple) et les autres catégories d'usagers (en zones périphériques pavillonaires) qui peuvent en outre être subventionnées pour le faire (Isnard, 2014)[2].

En conséquence, disposer de financement suffisant pour la GPIE via la contribution des usagers exclusifs du réseau collectif, sans que cette dernière soit excessive, conduit le régulateur public à encadrer l'expansion des systèmes alternatifs. Celà passe notamment par des mécanismes de régulation qui viseraient *a minima* à égaliser les coûts marginaux des deux systèmes, en limitant notamment les subventions à l'adoption des techniques alternatives.

4 Faire appel à la volonté de payer des usagers

Le raisonnement avec le planificateur social conduit à considérer que les usagers appelés à contribuer au financement des infrastructures collectives seront prêts à le faire et à opérer le transfert qui leur est demandé. Dans la réalité, cette situation peut ne pas être réalisable, pour des raisons politiques par exemple. En l'absence d'une forme de consensus social, l'opérateur ne pourrait plus organiser de manière centralisée et obligatoire le financement de la GPIE; ce qui s'apparente à une situation dite non-coopérative car chaque membre de la communauté décide individuellement de sa contribution à la GPIE. L'idée que l'on puisse faire appel à la volonté de payer des usagers suppose ainsi que ces derniers ont d'autres motivations que la satisfaction de leur demande de SAEP. Le raisonnement en termes de jeux va nous permettre de fixer les mécanismes à l'oeuvre, et leurs implications en termes de GPIE.

Aussi, nous considérons que la décision de contribuer à la GPIE peut être représentée sous la forme d'un jeu entre deux intervenants, l'usager i qui interagit avec le reste des usagers, représenté par un usager $-i$. Chaque usager i et $-i$ peut être « conservateur » et contribuer de manière volontaire au financement de la GPIE ou « alternatif » et choisir de se désolidariser en optant pour les techniques alternatives. Un conservateur, par principe, n'optera jamais pour une solution alternative individuelle.

Chaque agent doit décider de sa contribution au financement de la GPIE, en ayant une bonne vision de l'action de son partenaire. Cela revient à considérer deux cas possibles :

- l'usager est un utilisateur exclusif du réseau collectif et veut donc contribuer au maintien en bon état de ce réseau ;
- l'usager préfère utiliser une technique alternative à l'infrastructure collective.

Enfin, nous posons l'hypothèse que la majorité des usagers sont des conservateurs de telle sorte que chacun, quel que soit le type, pense que l'action de l'ensemble des autres est en faveur de l'infrastructure ($\sum_{-i} g_{-i} > 0$).

[2] En 2006, l'article 49 de la LEMA (Loi sur l'Eau et les Milieux Aquatiques) a modifié le code des impôts en introduisant un crédit d'impôt destiné à l'acquisition d'équipements de récuppération des eaux de pluie.

4.1 La décision des conservateurs

La part de la GPIE qu'un conservateur accepte de prendre en charge sera obtenue à l'issue du programme de maximisation suivant :

$$\begin{array}{c} Max_{x_i,w_i,g_i}\ U_i = \ x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha}w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ s.c\ \ x_i + pw_i + c_i g_i \leq y_\mathbf{i} \\ G = g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0 \end{array} \tag{12}$$

avec $\sum_{-i} g_{-i}$ la contribution des autres usagers.

En utilisant le Lagrangien, on écrit la relation :

$$\begin{array}{r} L = x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left((g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0)^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ + \lambda(\ y_i - \ x_i - pw_i - c_i g_i) \end{array} \tag{13}$$

Les conditions de premier ordre de ce programme de maximisation donnent les propriétés usuelles :

1. L'utilité marginale d'un usager par rapport à l'infrastructure est égale au coût de sa contribution individuelle ;
2. Son utilité marginale dérivée de sa consommation d'eau du robinet est égale au prix unitaire auquel il la paie.

Ainsi on en déduit que :

$$g_i(g_{-i}) = \frac{1-\alpha}{c_i}(y_\mathbf{i} - x_i) - \alpha\left(\sum_{-i} g_{-i} + G_0\right) \tag{14}$$

On peut alors voir que la part de la GPIE que l'on peut attribuer à un conservateur (étant donné son CAPM) est une fonction croissante de son revenu disponible. Mais elle décroit avec la taille initiale de l'infrastructure en bon état et avec la part de la GPIE prise en charge par les autres membres de la communauté. Ces deux phénomènes renveraient plutôt à la présence de comportement de « passager clandestin ». Il faut cependant préciser que par construction (i.e. du fait de leur préference pour le réseau collectif), les contributions des conservateurs à la GPIE sont toujours strictement positives. Il n'y a donc pas de comportement de passager clandestin à proprement parler en ce sens que la contribution individuelle n'est pas nulle mais moins importante qu'à l'optimum de premier rang.

On peut alors envisager deux situations. Si l'individu fait face à un ensemble d'autres usagers qui sont favorables à l'infrastructure collective, sa contribution aura tendance à diminuer et ce, même s'il est conservateur. En revanche, s'il fait face à des usagers tous alternatifs, alors il aura tendance à augmenter sa contribution dans le but d'atténuer les effets négatifs des actions des autres.

(Voir les détails de la résolution en annexe 3.1.1)

4.2 La décision des alternatifs

Considérons maintenant un usager j qui va privilégier l'usage des techniques alternatives pour tout ou partie de ses besoins en eau domestique. Son programme de maximisation s'écrit :

$$\begin{array}{c} Max_{x_i,w_i,a_i}\ U_j = \ x_j + \ \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha}w_j^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ s.c \ \ x_j + pw_j + c_j^{a}a_j \leq y_{\mathbf{j}} \\ G = a_j + \sum_{-i} g_{-j} + G_0 \\ a_j = -g_j \end{array} \tag{15}$$

Le langrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L = & x_j + \tfrac{1}{1-\gamma}\left(\left(a_j + \textstyle\sum_{-j} g_{-j} + G_0\right)^{1-\alpha} w_j^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ & + \lambda(\ y_j - \ x_j - pw_j - c_j a_j) \end{aligned} \tag{16}$$

En tirant les conditions de premier ordre et en procédant comme précédement, on obtient la fonction de réaction d'un alternatif *(Voir les détails de la résolution en annexe 3.1.2)*:

$$a_j(g_{-j}) = \frac{1-\alpha}{c_j^{a}}(y_{\mathbf{j}} - x_j) - \alpha\left(\sum_{-j} g_{-j} + G_0\right) \tag{17}$$

Avec cette expression, on constate que l'acquisition d'une technique alternative est une fonction croissante du revenu des individus, et une fonction décroissante de la taille initiale du réseau en bon état. On en déduit que l'externalité négative générée $g_i = -a_i$ sur le réseau est une fonction croissante du revenu des individus et décroissante de la taille initiale du réseau.

Comme précédement, on peut alors envisager deux situations. Si l'individu fait face à un ensemble d'autres usagers qui sont favorables à l'infrastructure collective, ses dépenses en techniques alternatives auront tendance à diminuer, car tout le réseau en système alternatif ne semble pas socialement plus efficace. En revanche, s'il fait face à des usagers tous alternatifs, alors il aura tendance à augmenter sa contribution pour rendre le système alternatif le plus efficace.

4.3 La GPIE en situation d'information complète

Nous considérons que les joueurs (i.e. les usagers) ont des stratégies pures (chacun est soit conservateur soit alternatif). Par ailleurs, chaque joueur est bien informé sur la décision des autres de telle sorte qu'il considère leurs actions comme une donnée. Pour retrouver les conditions d'équilibre du jeu non-coopératif (Nash, 1953), nous empruntons la notion de fonction de remplacement (Cornes et Hartley, 2007) qui représente la fonction de meilleure réponse non pas d'un seul individu mais de la totalité de la communauté. Cette fonction de remplacement $R(G)$ est formalisée comme suit :

$$R(G) = \sum g_i(g_{-i}) \tag{18}$$

À l'équilibre de Nash, elle doit être égale à la contribution totale de sorte qu'on ait l'égalité :

$$R(\hat{G}) = \sum g_i(g_{-i}) = \hat{G} - G_0 \tag{19}$$

avec $\hat{G}$ la contribution globale à l'équilibre de Nash. Nous pouvons avoir deux équilibres selon que le réseau soit exclusivement collectif ou qu'il intègre des utilisateurs de techniques alternatives.

- Si nous considérons que tous les usagers sont des conservateurs et sont prêts à contribuer étant donné les coûts de la GPIE, alors:

$$\begin{gathered} R(\hat{G}) = \textstyle\sum_i g_i(g_{-i}) + \sum_j g_j(g_{-j}) \\ = \textstyle\sum_i \left[\frac{1-\alpha}{c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i) - \alpha\left(\sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)\right] \\ + \textstyle\sum_j \left[\frac{1-\alpha}{c_j}(y_{\mathbf{j}} - x_j) - \alpha\left(\sum_{-j} g_{-j} + G_0\right)\right] \\ = \hat{G} - G_0 \end{gathered} \tag{20}$$

On peut ainsi écrire :

$$\begin{gathered} \tfrac{1-\alpha}{c}\left[\textstyle\sum_i (y_{\mathbf{i}} - x_i) + \sum_j (y_{\mathbf{j}} - x_j)\right] \\ -\alpha \textstyle\sum_{i,j}(\sum_{-i} g_{-i} + \sum_{-j} g_{-j}) - \alpha \sum_i G_0 - \alpha \sum_j G_0 \\ = \hat{G} - G_0 \end{gathered} \tag{21}$$

avec $c_i = c_j = c$. En remplaçant dans cette expression $(\sum_{-i} g_{-i} + \sum_{-j} g_{-j})$ par $(\hat{G} - G_0)$ à l'optimum car la contrainte sociale donne $G = \sum_i g_i + \sum_j g_j + G_0$ et $(\sum_{-i} g_{-i} = \sum_j g_j\ ; \sum_{-j} g_{-j} = \sum_i g_i)$, on obtient :

$$\frac{1-\alpha}{c}\left[\sum_i (y_{\mathbf{i}} - x_i) + \sum_j y_{\mathbf{j}} - x_j)\right] + G_0 = (1 + \alpha N)\hat{G} \tag{22}$$

avec N la taille de la population. La contribution globale à la GPIE à l'équilibre de Nash est donnée par :

$$\hat{G} - G_0 = \frac{1-\alpha}{c(1+\alpha N)}\left[\sum_{i,j}(y_{\mathbf{i,j}} - x_{i,j})\right] - \left[\frac{\alpha N}{(1+\alpha N)}\right] G_0 \tag{23}$$

- Si nous considérons qu'une partie des usagers a recours aux techniques alternatives (par préférence car les coûts des deux technologies sont identiques), alors :

$$\begin{aligned} R(\hat{G}) &= \textstyle\sum_i g_i(g_{-i}) - \sum_j a_j(g_{-j}) \\ &= \textstyle\sum_i \left[\frac{1-\alpha}{c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i) - \alpha\left(\sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)\right] \\ &\quad - \textstyle\sum_j \left[\frac{1-\alpha}{c_j^a}(y_{\mathbf{j}} - x_j) - \alpha\left(\sum_{-j} g_{-j} + G_0\right)\right] \\ &= \hat{G} - G_0 \end{aligned} \tag{24}$$

En procédant comme précédemment, on obtient la contribution à la GPIE à l'équilibre de Nash avec présence des alternatifs j dans le réseau :

$$\hat{G} - G_0 = \frac{1-\alpha}{c(1+\alpha N)}\left[\sum_i (y_{\mathbf{i}} - x_i) - \sum_j (y_{\mathbf{j}} - x_j)\right] - \left[\frac{\alpha(I-J)}{(1+\alpha N)}\right] G_0 \tag{25}$$

avec $I = \sum_i$, et $J = \sum_j$.

On peut observer dans cette expression que le financement de la GPIE est positif si et seulement si $\sum_i (y_{\mathbf{i}} - x_i) > \sum_j (y_j - x_j)$. En d'autres termes, la contribution globale à la GPIE croît avec la dotation en revenu disponible des conservateurs, et décroit avec le revenu disponible et le nombre des alternatifs. Par ailleurs, la GPIE serait une fonction décroissante de la taille du réseau en bon état G_0, seulement quand le nombre d'usagers conservateurs dans la population globale I est plus élevé que le nombre d'usagers alternatifs J.

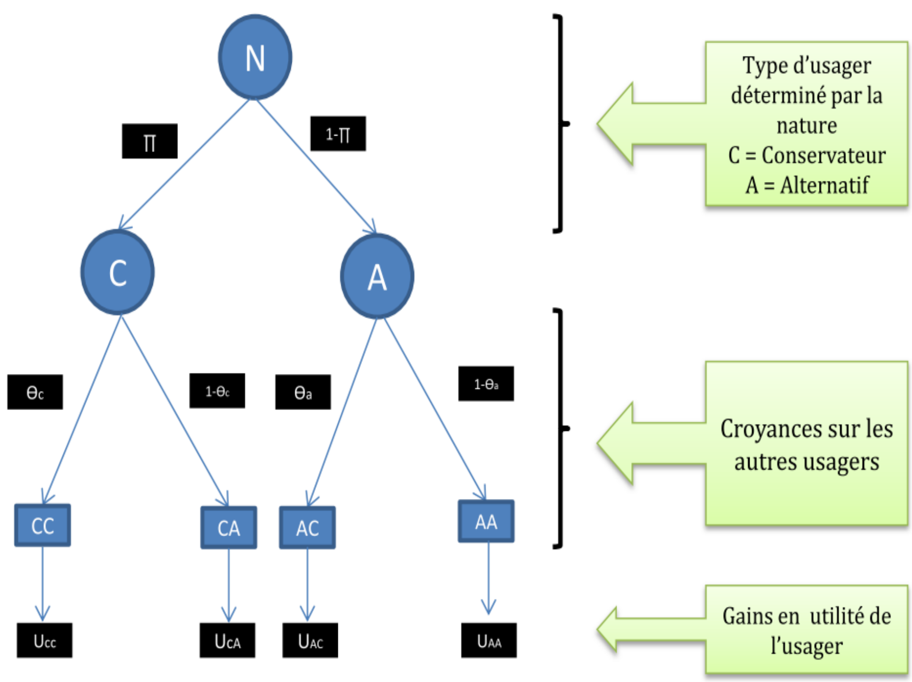
Ainsi, la GPIE ne peut pas faire abstraction de la distribution des revenus dans la communauté. Cependant, la problématique des inégalités sociales de revenu ne peut pas être traitée indépendamment des préférences en matière d'infrastructure. La question du financement de la GPIE en présence de techniques alternatives ouvre alors sur une autre interrogation : Ces techniques alternatives sont-elles à l'avantage des plus pauvres, toutes choses étant égales par ailleurs, afin que la GPIE ne vienne pas accentuer les inégalités sociales?

Il faut par ailleurs souligner que la question de l'efficience productive (le renouvellement et la réhabilitation du réseau de manière optimale) n'est pas réglée, et qu'elle ne peut être obtenue qu'à la condition que les conservateurs acceptent d'opérer un transfert vers les alternatifs. Du point de vue économique, un tel résultat suggère que le financement de la GPIE par la contribution volontaire des usagers ne peut avoir réellement lieu que si les usagers dits conservateurs portent des valeurs qui dépassent le seul usage du réseau collectif, voire même que les valeurs d'option et les préoccupations intergénérationnelles dominent leurs motivations.

4.4 La GPIE en situation d'incertitude

Reste que les préférences des individus, et notamment de ceux qui sortent du réseau collectif pour utiliser les techniques alternatives, ne sont pas connues à l'avance. Elles sont liées au changement technologique, aux incitations publiques, ou encore aux normes sociales. On cherchera dans cette section à évaluer l'ampleur de la perte d'efficacité (allocative et productive) due à l'absence d'information complète sur les préférences. Nous proposons pour ce faire de développer un jeu baysien permettant de déterminer la contribution à la GPIE à l'équilibre de Bayes-Nash et de comparer ces résultats à ceux obtenus en situation d'information compléte (voire l'optimum de premier rang).

Un équilibre de Bayes-Nash correspond à un ensemble de stratégies pour chaque type de joueur qui maximise la valeur espérée des gains compte tenu des stratégies poursuivies par les autres types de joueurs (Varian, 1992). Dans ce modèle, on considère d'après la transformation de Harsanyi (1967)[3] qu'il existe un troisième acteur nommé « *Nature* » qui détermine en amont les types des deux autres joueurs. Cela revient à dire que des mécanismes d'incitations (sensibilisation du public par exemple) sont à l'origine d'une évolution des préférences vers les techniques alternatives, puisque leur coût marginal est supposé identique à celui de l'infrastructure collective. Chaque type d'usager prend sa décision de manière simultanée, en disposant juste d'une certaine croyance sur les décisions des autres. L'objectif de chacun est de maximiser l'espérance d'utilité issue des décisions de chaque membre de la société. Le jeu bayésien de notre modèle peut être illustré par la forme extensive présentée dans la figure suivante :



[3]La transformation de Harsanyi permet de remplacer une situation à information incomplète en un environnement incertain.

U_{CC} = Utilité d'un conservateur lorsque l'ensemble des autres usagers utilise le réseau collectif

U_{CA} = Utilité d'un conservateur lorsque l'ensemble des autres usagers utilise les techniques alternatives

U_{AC} = Utilité d'un alternatif lorsque l'ensemble des autres usagers utilise le réseau collectif

U_{AA} = Utilité d'un alternatif alternatif lorsque l'ensemble des autres usagers utilise les techniques alternatives

$\pi \in [0, 1]$ = la probabilité que l'usager soit un conservateur

$\theta \in [0, 1]$ = le degré de croyance (qui constitue une probabilité conditionnelle donc qui intègre indirectement π)

θ_c = croyance conditionnelle d'un conservateur sur la contribution des autres

θ_a = croyance conditionnelle d'un alternatif sur la contribution des autres

Nous considérerons dans notre modèle que $\theta_c = \theta_a = \theta$

Le modèle en équilibre de Bayes-Nash nous révèle que l'incertitude entraîne une disposition à prendre en charge une part moins importante de la GPIE de la part des conservateurs que dans la situation à information complète. On montre en effet qu'en aucun cas les gains issus d'une stratégie mixte ne peuvent être supérieurs aux gains issus d'une stratégie pure (Dequiedt et al., 2011). L'information et la transparence sur l'adoption des techniques alternatives facilitent les décisions des usagers conservateurs, qui dans tous les cas ont une préférence pour le maintien du réseau collectif, à augmenter leur contribution.

(*Voir l'annexe 3.2 pour les détails du modèle*).

5 Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à la gestion patrimoniale des infrastructures et au besoin de financement qui en résulte en mobilisant le cadre analytique proposé par la théorie des choix publics. En posant la demande en eau potable comme une demande de service qui serait à la fois produit et consommé par l'usager lui-même, en combinant ressource en eau et infrastructures en bon état, il nous a été possible de valider que le maintien de la partie fixe dans la tarification de l'eau est un mécanisme efficace pour financer la GPIE via la contribution des usagers.

Mais le développement des usages des techniques alternatives engendre des externalités négatives sur le bon état du réseau et induit une augmentation de la contribution demandée aux usagers dit conservateurs, qui utilisent exclusivement ce dernier. La présence de ces externalités négatives conduit le régulateur à moduler les usages de techniques alternatives, pour disposer d'un mécanisme de financement qui puisse obtenir l'adhésion des contributeurs. Cela revient à dire que financer la GPIE par la contribution des usagers du réseau collectif amène à modérer les subventions accordées aux usages alternatifs. En outre, une part essentielle des formes d'inégalités qui peuvent y être associée à la GPIE relève de l'hétérogénéité des préférences.

L'utilisation de la théorie des jeux non-coopératifs pour comprendre l'impact de l'hétérogénéité des préférences sur le financement de la GPIE met en évidence le fait que la GPIE dépend à la fois de la distribution de revenu dans l'économie et des motivations non économiques des usagers exclusifs du réseau collectif. La contribution qui leur sera demandée doit en effet être plus élevée que leur CAPM pour le SAEP.

Si à l'issue de cette modélisation, nous avons compris les mécanismes qui guident les comportements, on ne peut les valider pour l'aide à la décision publique qu'en les confrontant scrupuleusement aux données de terrain. Or, il manque à ce jour de travaux empiriques visant une compréhension fine de la demande en SAEP des usagers, et une analyse du lien que l'on puisse établir entre cette demande, les motivations éthiques et intergénérationnelles des usagers, et leur consentement à payer pour la GPIE.

6 Références

Bergstrom, T.C., Cornes, R.C., 1983. Independence of Allocative Efficiency from Distribution in the Theory of Public Goods. Econometrica 51, 1753–1765.

Bockstael Nancy E., K.E. McConnell , 1983. Welfare Measurement in the Household Production Framework. American Economic Review, 83 (1983), pp. 806-814.

Clarke, E.H., 1971. Multipart pricing of public goods. Public Choice 11, 17–33.

Cornes, R., Hartley, R., 2007. Aggregative public good games. Journal of Public Economic Theory 9, 201–219.

Cornes, R., Sandler, T., 1994a. The comparative static properties of the impure public good model. Journal of Public Economics 54, 403–421.

Cornes, R., Sandler, T., 1994b. Are Public Goods Myths? Journal of Theoretical Politics 6, 369–385.

Cornes, R., Sandler, T., 1985. The simple analytics of pure public good provision. Economica 52, 103–116.

Cornes, R.C., Rübbelke, D.T., 2012. On the private provision of contentious public characteristics. ANU Working Papers in Economics and Econometrics 2012-577.

Curien, N., 2000. Economie des réseaux. Editions La Découverte.

Dequiedt, V., Durieu, J., Solal, P., 2011. Théorie des jeux et applications.Economica.

Economides, N., 1996. The Economics of Networks. Int. J. Ind. Organ 14, 673–699.

Griffin, R.C., Mjelde, J.W., 2011. Distributing water's bounty. Ecological Economics 72, 116–128.

Harsanyi, J.C., 1967. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, I–III Part I. The basic model. Management Science 14, 159–182.

Isnard, L., 2014. Faut-il encourager les systèmes d'approvisionnement en eau alternatifs au réseau? Rapport ONEMA.

Katz, M.L., Shapiro, C., 1985. Network Externalities, Competition, and Compatibility. The American Economic Review 75, 424–440.

McConnell Kenneth E., Rosado Marcia A., 2000. Valuing discrete improvements in drinking water quality through revealed preferences. Water Resources Research 36, 1575–1582.

Metcalf, L., 1926. Effect of water rates and growth in population upon per capita consumption. Journal American Water Works Association 15, 1–21.

Montginoul, M., 2013. La consommation d'eau en France: historique, tendances contemporaines, déterminants. Sciences Eaux & Territoires 2013/1, 68–73.

Montginoul, M., Rinaudo, J.D., de Lajonquière, Y.L., Garin, P., Marchal, J.P., 2005. Simulating the impact of water pricing on households behaviour: the temptation of using untreated water. Water Policy 7, 523–541.

Musgrave, R.A., 1959. Theory of public finance; a study in public economy. McGraw-Hil.

Nash, J., 1953. Two-Person Cooperative Games. Econometrica 21, 128–140.

Pattanayak, S.K., Yang, J.-C., Whittington, D., Kumar, K.C.B., 2005. Coping with unreliable public water supplies: Averting expenditures by households in Kathmandu, Nepal. Water Resources Research 41(2).

Rapport annuel 2017 du Commissariat Général au Développement Durable.

Reghizzi, O.C., 2013. Institutions, comptabilité et financement des services d'eau et d'assainissement en Italie et en France (No. hal-01074913), Post-Print. HAL.

Rinaudo, J. , Calatrava, J. and De Byans, M. V. (2016), Tradable water saving certificates to improve urban water use efficiency: an ex-ante evaluation in a French case study. Aust J Agric Resour Econ, 60: 422-441.

Ruiz-Mier, F., van Ginneken, M., 2006. Consumer cooperatives: An alternative institutional model for delivery of urban water supply and sanitation services. Water Supply and Sanitation Board. no 5.

Samuelson, P., 1954. The Pure Theory of Public Expenditure. The Review of Economics and Statistics, 36(4), 387-389.

Smets H. 2004. La solidarité pour l'eau potable : Aspects économiques. Rapport pour l'Académie de l'Eau. Paris.

Strotz, R.H., 1959. The utility tree–a correction and further appraisal. Econometrica: Journal of the Econometric Society 482–488.

Varian, H.R., 1992. Microeconomic analysis, Third Edition. W.W. Norton & Company.

Wittner, C., 2013. Estimation des besoins de renouvellement des réseaux d'eau et d'assainissement collectif, 39 p.

7 Annexes

7.1 Le modèle de référence

Le problème du planificateur social se présente de la manière suivante lorsqu'il ya un consensus total qui est que tout le monde participe au réseau collectif en voulant financer le renouvellement de l'infrastructure G étant donné leurs consommations en quantité d'eau du robinet w_i et des autres biens x_i, les revenus individuels y_i, le réseau initial en bon état G_0 et p le prix de l'eau :

$$G = G_0 + \sum_i g_i \tag{26}$$

où g_i représente la contribution individuelle à l'infrastructure de chaque usager, c_i le coût financier lié à cette contribution et $\sum_i g_i$ l'ensemble des contributions des membres du réseau.

La résolution de ce programme peut emprunter la condition d'équilibre Pareto-optimal de Bowen-Lindhal-Samuelson (BLS), étant donné les propriétés des fonctions d'utilités et de la fonction de production des deux biens publics infrastructure et eau potable. Cette condition stipule que la somme des utilités marginales du bien public doit être égale aux coût marginal de ce bien public $(\sum TMS = TMT = T$ avec T le rapport des prix$)$.

$$Max_{w_i,G}\left[\sum_i U(x_i,w_i,G)\right] = x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha}w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \tag{27}$$

En utilisant la contrainte budgétaire nous pouvons substituer x_i par $y_{\mathbf{i}} - pw_i - c_i g_i$

La fonction objectif devient :

$$Max_{w_i,G}\left[\sum_i U(x_i,w_i,G)\right] = \sum_i \left[(\ y_{\mathbf{i}} - pw_i - c_i g_i) + \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha}w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma}\right] \tag{28}$$

Nous pouvons donc écrire les conditions de premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial G} = 0 \ &\rightarrow (\textstyle\sum_i ((1-\alpha)G^{-\alpha}w_i^{\alpha})\left(G^{1-\alpha}w_i^{\alpha}\right)^{-\gamma}) = c_i \\ \textstyle\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial w_i} = 0 &\rightarrow \left(\textstyle\sum_i (\alpha G^{1-\alpha}w_i^{\alpha-1})\left(G^{1-\alpha}w_i^{\alpha}\right)^{-\gamma}\right) = p \end{aligned} \tag{29}$$

BLS $\rightarrow \sum_i \frac{(1-\alpha)(w_i^{\alpha(1-\gamma)})}{\alpha G(w_i^{\alpha(1-\gamma)-1})} = \frac{c_i}{p}$ et $\sum_i w_i = \frac{c_i}{P}\frac{\alpha G}{1-\alpha}$

On peut maintenant remplacer $\sum_i w_i$ par son expression dans la contrainte budgétaire saturée :

$$\sum_i y_i = p\left(\frac{\alpha G}{p(1-\alpha)}c_i\right) + \sum_i c_i g_i + \sum_i x_i \tag{30}$$

En utilisant la contrainte sociale $G = \sum_i g_i + G_0$ on peut substituer $\sum_i g_i$ par $(G - G_0)$. En supposant de plus un coût de contribution unique c pour tout le monde on aura :

$$\sum_i y_i - \sum_i x_i = \left(\frac{\alpha G}{1-\alpha}\right)c + c(G - G_o) \tag{31}$$

La contribution globale à l'optimum est donnée par l'expression :

$$G^* - G_0 = \frac{(1-\alpha)}{c}\left[\sum_i y_i - \sum_i x_i\right] - \alpha G_0 \tag{32}$$

De cette équation, on peut tirer le coût marginal forfaitaire de la contribution qui peut être demandé à chaque individu pour avoir G^* :

$$c^* = \frac{\left(\sum_i y_i - \sum_i x_i\right)}{\left(\frac{G^*}{(1-\alpha)}\right) - G_0} \tag{33}$$

7.2 La GPIE face à l'hétérogénéité des préférences

En présence d'hétérogénéité entre usagers, le problème du planificateur social se présente comme suivant :

$$\begin{gathered} Max \sum_i {}_i \pi_i u_i(x_i, w_i, G) \\ S.C \quad \sum_i x_i + \mathbf{p} \sum_i w_i + \sum_i c_i^g g_i + \sum_i c_i^a a_i \leq Y \\ G = G_0 + \sum_i g_i - \sum_i a_i \end{gathered} \tag{34}$$

avec π_i un paramètre de préférence propre à chaque usager et $Y = \sum_i y_i$, l'ensemble des revenus de la communauté.

a_i représente l'externalité négative sur le bon état du réseau liée l'utilisation de techniques alternatives. c_i^a est le CPAM pour aller vers une technologie alternative et c_i^g le CPAM pour la GPIE.

Pour résoudre ce programme on peut poser le Langrangien suivant :

$$\begin{gathered} L = \sum_{i=1}^n \pi_i \left(x_i + \frac{1}{1-\gamma} \left(G^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \right) \\ +\lambda\left(\sum_i y_i - \sum_i x_i - p \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n c_i^g g_i - \sum_{i=1}^n c_i^a a_i \right) \end{gathered} \tag{35}$$

Les conditions de premier ordre donnent pour un individu représentatif k :

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial x_k} \Rightarrow \pi_k - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_k} \Rightarrow -\lambda p + \pi_k \sum_k \left(\alpha G^{1-\alpha} w_k^{\alpha-1}\right) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial g_k} \Rightarrow -\lambda c_k^g + \pi_k \sum_k \left((1-\alpha) G^{-\alpha} w_k^{\alpha}\right) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma}) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_k} \Rightarrow -\lambda c_k^a - \pi_k \sum_k \left((1-\alpha) G^{-\alpha} w_k^{\alpha}\right) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma}) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Rightarrow Y - \sum_k x_k^* - p \sum_k w_k^* - \sum_k c_k^g g_k^* - \sum_k c_k^a a_k^* = 0 \end{gathered} \tag{36}$$

Les asterisques désignant les actions à l'optimum.

En utilisant la première condition de première ordre :

$\frac{\partial L}{\partial x_k} \Rightarrow \pi_k - \lambda = 0 \to \pi_k = \lambda$

On peut réecrire ce système d'équation de la manière suivante :

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial w_k} \Rightarrow \left[\sum_k (\alpha G^{1-\alpha} w_k^{\alpha-1}) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} - p\right] w_k^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial g_k} \Rightarrow \left[\sum_k ((1-\alpha)(G^{-\alpha} w_k^{\alpha})) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} - c_k^g\right] g_k^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_k} \Rightarrow \left[- \sum_k ((1-\alpha)(G^{-\alpha} w_k^{\alpha})) \left(G^{1-\alpha} w_k^{\alpha}\right)^{-\gamma} - c_k^a\right] a_k^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Rightarrow Y - \sum_k x_k^* - p \sum_k w_k^* - \sum_k c_k^g g_k^* - \sum_k c_k^a a_k^* = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

Implications

1. Pour un individu k, lorsqu'il existe à l'optimum une action de contribution positive $g_k^* \geq 0$ alors $(a_k^* = 0)$ et inversement car un a_k^* non nul entrainerait l'égalité $c_k^g = -c_k^a$, ce qui est absurde, les coûts (c_k^g, c_k^a) étant définis toujours positifs .

On peut alors obtenir la relation suivante d'après les conditions B-L-S :

$$\sum_k \frac{\frac{\partial U}{\partial g_k}}{\frac{\partial U}{\partial w_k}} = \sum_k \frac{(1-\alpha)(w_k^{\alpha(1-\gamma)})}{\alpha G(w_k^{\alpha(1-\gamma)-1})} = \frac{c^g}{p} \tag{38}$$

et

$$\sum_k w_k = \frac{c^g}{P} \frac{\alpha G}{1-\alpha} \tag{39}$$

En remplaçant w_k dans la contrainte budgétaire par son expression on obtient :

$$Y - \sum_k x_k^* - p\left(\frac{c^g}{P}\frac{\alpha G}{1-\alpha}\right) - \sum_k c^g g_k^* = 0 \tag{40}$$

En remplaçant ensuite dans cette expression $\sum_k g_k$ par $G - G_0$ d'après la contrainte sociale $(G = \sum_k g_k + G_0)$, alors on obtient :

$$\sum_k y_k - \sum_k x_k = (\frac{\alpha G}{1-\alpha})c^g + c^g(G - G_o) \tag{41}$$

On peut ainsi tirer de l'expression précédente la contribution des conservateurs en l'absence de techniques alternatives :

$$G^{\mathrm{col}} - G_0 = \frac{(1-\alpha)}{c^{\mathrm{col}}}\left[\sum_k y_k - \sum_k x_k\right] - \alpha G_0 \tag{42}$$

2. Pour permettre aux 2 systèmes de cohabiter (avoir un réseau collectif pour tous et ne pas interdire l'utilisation de technologies alternatives), les conservateurs doivent internaliser un coût qui aurait dû être à la charge des alternatifs.

Pour un individu conservateur k, on peut définir une fonction de transfert :

$$t_k = \Phi_k(a, c^a) \tag{43}$$

Cette fonction est continue, concave et dérivable deux fois. Φ_k est croissant avec les usages alternatifs (a) et décroissante avec le coût marginal des technologies alternatives (c^a).

En procédant comme précédement, on obtient la contribution globale des conservateurs en cohabitation des usages de techniques alternatives :

$$G^{\mathrm{col},alt} - G_0 = \frac{(1-\alpha)}{(c^{\mathrm{col}} + t)}\left[\sum_k y_k - \sum_k x_k\right] - \alpha G_0 \tag{44}$$

On peut ainsi déterminer le coût forfaitaire supplémentaire à demander aux conservateurs pour compenser l'externalité négative des alternatifs:

$$t = \frac{\left[\sum_k y_k - \sum_k x_k\right]}{\frac{G^{\text{col},alt}}{(1-\alpha)} - G_0} - c^{\text{col}} \tag{45}$$

7.3 Faire appel à la volonté de payer des usagers

7.3.1 Information complète

1. La décision des conservateurs : L'objectif de chaque usager est de maximiser son utilité sous sa contrainte budgétaire et sous la contrainte sociale.

$$\begin{array}{c} Max\ U_i = \ x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ s.c\ \ x_i + pw_i + c_i g_i \leq y_\mathbf{i} \\ G = g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0 \end{array} \tag{46}$$

G_0 étant le niveau initial de l'infrastructure en bon état et $\sum_{-i} g_{-i}$ la contribution des autres individus. On peut alors réecrire la fonction d'utilité de la manière suivante :

$$U_i = x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \tag{47}$$

En utilisant le Lagrangien, on écrit la relation suivante:

$$\begin{array}{c} L = \ x_i + \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ +\lambda(\ y_i - \ x_i - pw_i - c_i g_i) \end{array} \tag{48}$$

On obtient des conditions de premier ordre le système suivant :

$$\begin{array}{c} \left(1-\alpha\right)(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0)^{-\alpha} w_i^{\alpha}\right)\left(\left(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{-\gamma} = c_i \\ \left(\ \alpha\left(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)^{1-\alpha} w_i^{\alpha-1}\left((g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0)^{1-\alpha} w_i^{\alpha}\right)^{-\gamma} = p \end{array} \tag{49}$$

Ainsi on en deduit que:

$$\frac{\left((1-\alpha)(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0)^{-\alpha} w_i^{\alpha}\right)}{\alpha(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0)^{1-\alpha} w_i^{\alpha-1}} = \frac{c_i}{p} \tag{50}$$

L'expression de la demande individuelle en eau du robinet peut être déduite de la précédente équation :

$$w_i = \frac{\alpha c_i\left(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)}{p(1-\alpha)} \tag{51}$$

En utilisant la contrainte budgétaire saturée avec le remplacement de la demande du robinet par son expression, on obtient l'expression suivante :

$$x_i + \frac{\alpha c_i \left(g_i + \sum_{-i} g_{-i} + G_0\right)}{(1-\alpha)} + c_i g_i = y_{\mathbf{i}} \tag{52}$$

La décision d'un conservateur s'exprime alors comme suit :

$$g_i(g_{-i}) = \frac{1-\alpha}{c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i) - \alpha\left(\sum_{-i} g_{-i} + G_0\right) \tag{53}$$

2. La décision des alternatifs : La décision d'un usager alternatif consiste à définir la quantité de bien marchand x_j, l'eau à consommer w_j,et la taille de l'infrastrucuture alternative à acquerir a_j.

Le programme de maximisation de l'usager alternatif s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} Max\ U_j = \ x_j + \ \frac{1}{1-\gamma}\left(G^{1-\alpha} w_j^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ s.c \ \ x_j + p w_j + c_j^a a_j \leq y_{\mathbf{j}} \\ G = a_j + \sum_{-i} g_{-j} + G_0 \\ a_j = -g_j \end{array} \tag{54}$$

En intégrant les contraintes dans la fonction d'utilité on obtient :

$$U_j = x_j + \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(a_j + \sum_{-j} g_{-j} + G_0\right)^{1-\alpha} w_j^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \tag{55}$$

Le langrangien s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} L = x_j + \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(a_j + \sum_{-j} g_{-j} + G_0\right)^{1-\alpha} w_j^{\alpha}\right)^{1-\gamma} \\ +\lambda(\ y_j - \ x_j - p w_j - c_j a_j) \end{array} \tag{56}$$

On en déduit que :

$$w_j = \frac{\alpha c_j^a \left(a_j + \sum_{-j} g_{-j} + G_0\right)}{p(1-\alpha)} \tag{57}$$

La part w_j d'eau consommée issue de l'infrastructure collective sera ici moins importante que pour le cas d'un conservateur car on sait que l'acquisition d'alternative de quantité a_j revient à générer une externalité négative de quantité équivalente g_j sur les infrastrucutures collectives.

En procédant comme précédement on obtient la décision des alternatifs :

$$a_j(g_{-j}) = \frac{1-\alpha}{c_j^a}(y_{\mathbf{j}} - x_j) - \alpha\left(\sum_{-j} g_{-j} + G_0\right) \tag{58}$$

7.3.2 Information incomplète

1. La décision des conservateurs : Le programme de maximisation du contributeur dans l'incertitude se présente comme suivant :

$$\begin{aligned} Max\ EU_i = {} & \theta(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((g_i + g_{-i} + G_0)^{1-\alpha}(w_i)^{\alpha}\right)^{1-\gamma}) \\ & + (1-\theta)(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((g_i - g_{-i} + G_0)^{1-\alpha}(w_i)^{\alpha}\right)^{1-\gamma}) \\ & s.c\ \ x_i + pw_i + c_i g_i \leq y_\mathbf{i} \end{aligned} \tag{59}$$

Le lagrangien de ce programme s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L = {} & \theta(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((G)^{1-\alpha}(w_i)^{\alpha}\right)^{1-\gamma}) \\ & +(1-\theta)(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((G - 2g_{-i})^{1-\alpha}(w_i)^{\alpha}\right)^{1-\gamma}) \\ & +\lambda(\ y_i - x_i - pw_i - c_i g_i) \end{aligned} \tag{60}$$

avec $(G - 2g_{-i}) = (g_i - g_{-i} + G_0)$ et les conditions de premier ordre donnent pour g_i et w_i :

$$\begin{aligned} (1-\alpha)w_i^{\alpha(1-\gamma)} \left\{ \begin{array}{c} \left(\theta\left[(G)^{-\alpha-(1-\alpha)\gamma}\right]\right) \\ +(1-\theta)\left[(G - 2c_{-i}g_{-i})^{-\alpha-(1-\alpha)\gamma}\right] \end{array} \right\} = c_i \\ \alpha\ \ w_i^{\alpha-1-\alpha\gamma} \left\{ \begin{array}{c} \theta\left[(G)^{(1-\alpha)-(1-\alpha)\gamma}\right] \\ +(1-\theta)(G - 2c_{-i}g_{-i})^{(1-\alpha)-(1-\alpha)\gamma} \end{array} \right\} = p \end{aligned} \tag{61}$$

De ces deux équations on peut tirer l'expression de la demande de l'eau de robinet w_i.

$$w_i = \frac{\alpha c_i}{p(1-\alpha)} * \left[g_i^2 + 2g_i G_0 - g_{-i}^2 + G_0^2\right] \tag{62}$$

En remplacant ensuite dans la contrainte budgétaire saturée w_i par son expression on obtient :

$$y_\mathbf{i} - x_i - p\left[\frac{\alpha c_i}{p(1-\alpha)} * \left[g_i^2 + 2g_i G_0 - g_{-i}^2 + G_0^2\right]\right] - c_i g_i = 0 \tag{63}$$

Cette équation peut être transformée en un polynôme de second degré :

$$\begin{aligned} & \tfrac{\alpha c_i}{(1-\alpha)} g_i^2 + (c_i + 2\tfrac{\alpha c_i}{(1-\alpha)} G_0) g_i \\ & \quad - \left[(y_\mathbf{i} - x_i) - \left[\tfrac{\alpha c_i}{(1-\alpha)} * \left[-g_{-i}^2 + G_0^2\right]\right]\right] = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

La résolution de cette équation donne la fonction de réaction d'un usager conservateur:

$$\begin{aligned} g_i(g_{-i}) = & \sqrt{(\tfrac{1-\alpha}{2\alpha})^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha} G_0 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha c_i}(y_\mathbf{i} - x_i) + g_{-i}^2} \\ & \quad - (\tfrac{1-\alpha}{2\alpha} + G_0 \end{aligned} \tag{65}$$

2. La décision des alternatifs : Le programme de maximisisation d'un alternatif dans l'incertitude est le suivant :

$$\begin{aligned}Max\ EU_i = \ & \theta(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((-g_i + g_{-i} + G_0)^{1-\alpha}(w_i)^\alpha\right)^{1-\gamma}) \\ & + (1-\theta)(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((-g_i - g_{-i} + G_0)^{1-\alpha}(w_i)^\alpha\right)^{1-\gamma}) \\ & s.c\ \ x_i + pw_i + c_i g_i \leq y_{\mathbf{i}}\end{aligned} \tag{66}$$

On peut écrire le langrangien de ce programme comme suivant :

$$\begin{aligned}L = \ & \theta(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((G)^{1-\alpha}(w_i)^\alpha\right)^{1-\gamma}) \\ & +(1-\theta)(x_i + \tfrac{1}{1-\gamma}\left((G-2g_{-i})^{1-\alpha}(w_i)^\alpha\right)^{1-\gamma}) \\ & +\lambda(\ y_i - x_i - pw_i - c_i g_i)\end{aligned} \tag{67}$$

avec $G = -g_i + g_{-i} + G_0$ et $(G - 2g_{-i}) = (-g_i - g_{-i} + G_0)$

Les conditions de premier ordre donnent pour g_i et w_i :

$$\begin{aligned}(1-\alpha)w_i^{\alpha(1-\gamma)}\left\{\left(\theta\left[G^{-\alpha-(1-\alpha)\gamma}\right]\right) + (1-\theta)\left[(G-2c_{-i}g_{-i})^{-\alpha-(1-\alpha)\gamma}\right]\right\} = -c_i \\ \alpha w_i^{\alpha-1-\alpha\gamma}\left\{\theta\left[G^{(1-\alpha)-(1-\alpha)\gamma}\right] + (1-\theta)(G-2c_{-i}g_{-i})^{(1-\alpha)-(1-\alpha)\gamma}\right\} = p\end{aligned} \tag{68}$$

En procédant de la même manière que chez le conservateur on obtient la fonction de réaction d'un usager type alternatif qui est le suivant:

$$a_i(g_{-i}) = \sqrt{(\frac{1-\alpha}{2\alpha})^2 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}G_0 - \frac{(1-\alpha)}{\alpha c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i) + g_{-i}^2} - (\frac{1-\alpha}{2\alpha} + G_0) \tag{69}$$

avec $a_i = -g_i$

3. La GPIE en situation d'incertitude : 1. Considérons dans un premier temps

qu'il n'y a qu'un conservateur avec un coût unique. Dans ce cas l'action de l'individu doit être égale à la contribution globale $G - G_0$

$$g_i(0) = \sqrt{(\tfrac{1-\alpha}{2\alpha})^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha}G_0 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i) + 0} - (\tfrac{1-\alpha}{2\alpha} + G_0) = G - G_0 \tag{70}$$

En élevant au carré cette équation on peut obtenir une autre qui est :

$$G^2 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}G - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left[G_0 + \frac{1}{c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i)\right] = 0 \tag{71}$$

On obtient donc comme état de l'infrastructure :

$$G = \sqrt{\left(\tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha}\right)^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha}\left[G_0 + \tfrac{1}{c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i)\right]} - \tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha} \tag{72}$$

2. Considérons maintenant qu'il n'y a que l'alternatif et que les coûts sont toujours uniques :

$$g_j(0) = \sqrt{(\tfrac{1-\alpha}{2\alpha})^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha} G_0 - \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha c_i}(y_{\mathbf{j}} - x_j) + 0} \\ - (\tfrac{1-\alpha}{2\alpha} + G_0) = G - G_0 \tag{73}$$

En procédant de la même manière que chez le contributeur on obtient la taille globale du financement lorsqu'il n'y a que des alternatifs :

$$G = \sqrt{\left(\tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha}\right)^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha}\left[G_0 - \tfrac{1}{c_i}(y_{\mathbf{j}} - x_j)\right]} \\ - \tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha} \tag{74}$$

En situation d'incertitude, la taille de l'infrastructure à l'équilibre bayésien sera donnée par l'expression suivante:

$$\hat{G} = \pi \left[\sqrt{\left(\tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha}\right)^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha}\left[G_0 + \tfrac{1}{c_i}(y_{\mathbf{i}} - x_i)\right]} - \tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha}\right] \\ + (1-\pi)\left[\sqrt{\left(\tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha}\right)^2 + \tfrac{(1-\alpha)}{\alpha}\left[G_0 - \tfrac{1}{c_i}(y_{\mathbf{j}} - x_j)\right]} - \tfrac{(1-\alpha)}{2\alpha}\right] \tag{75}$$

avec π la part des conservateurs dans le réseau.