HAL open science

Une approche discrète de la rupture dans les matériaux granulaires

Luc Sibille, Frédéric-Victor Donzé, Felix Darve, François Nicot

To cite this version:

Luc Sibille, Frédéric-Victor Donzé, Felix Darve, François Nicot. Une approche discrète de la rupture dans les matériaux granulaires. 17. Congrès français de mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-02586897

HAL Id: hal-02586897

https://hal.inrae.fr/hal-02586897v1

Submitted on 24 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche discrète de la rupture dans les matériaux granulaires

Luc Sibille*, Frédéric-Victor Donzé*, Félix Darve*, François Nicot**

** Laboratoire Sols, Solides, Structures - INPG, UJF, CNRS -*
BP 53 – 38041 Grenoble cedex 9
luc.sibille@hmg.inpg.fr

*** Cemagref de Grenoble, Unité ETNA*
BP 76 – 38402 Saint Martin d'Hères cedex

Résumé :

Dans l'objectif d'appliquer la Condition Suffisante de Stabilité de Hill aux matériaux granulaires, une approche basée sur une description discrète du milieu est proposée. Dans un premier temps, pour juger de sa possible pertinence, une forme discrète du travail du second ordre basée sur l'état de contrainte-déformation des contacts est appliquée à un problème simplifié d'avalanches de grains en 2D. Par la suite, un modèle 3D constitué d'un assemblage de sphères est considéré. Le tracé d'enveloppes réponses de Gudehus, pour différents états de contrainte triaxiaux, permet de mettre en relief le comportement de type "géomatériaux" de ce modèle. D'un point de vue continu, des directions instables de sollicitations sont alors recherchées pour délimiter un domaine de ruptures potentielles. A partir des ces mêmes résultats une comparaison est effectuée entre le travail du second ordre macroscopique et la somme des travaux du second ordre aux contacts au sein d'un "volume élémentaire représentatif".

Abstract :

In this paper a discrete approach using a Discrete Element Method is proposed to apply the Hill's Sufficient Condition of Stability to discrete media. First, a discrete form of the second order work based on the stress-strain state of each contact is applied to a 2D problem of grain avalanches. This is an easy way to estimate the relevance of a such approach. Then a 3D model made of spheres is considered. To validate this model and to highlight its incremental behaviour, the strain response envelopes are drawn for several triaxial stress states. In addition, by performing stress probes and studying the sign of the continuous form of the second order work, a potentially unstable domain of the stress space is exhibited. Finally, a comparison of the values of the second order work from a continuous description and a description by contacts is carried out.

Mots clefs :

MED ; enveloppe réponse ; travail du second ordre; instabilité; bifurcation.

1 Introduction

Les critères de plasticité, tels que le critère de Mohr-Coulomb largement utilisé pour les sols, ne permettent pas de prendre en compte l'ensemble des types de ruptures pouvant survenir dans un matériau granulaire. Pour des matériaux non associés, en utilisant la notion de perte de controlabilité, Imposimato et Nova [1] définissent dans le plan déviatoire un domaine dans lequel une perte d'unicité d'un état homogène de contrainte-déformation peut se rencontrer. Cette perte d'unicité est bien sûr conditionnée par le chemin de chargement suivi ainsi que les variables de contrôles utilisées. Les auteurs ont également montré qu'il y a équivalence entre cette perte d'unicité et l'annulation du travail du second ordre pour des lois de comportement élasto-plastiques à un potentiel. Darve et Louafa [2], en s'appuyant sur une loi incrémentale linéaire par morceaux et une loi Incrémentale Non Linéaire dégagent également, dans le plan d'axisymétrie un domaine de ruptures/bifurcations éventuelles pour des sables d'Hostun lâches ou denses. Pour ce faire les auteurs utilisent la Condition Suffisante de Stabilité de Hill basée sur le signe du travail du second ordre.

Localement cette condition s'écrit de la façon suivante quels que soient $d\sigma$ et $d\varepsilon$ liés par la loi de comportement :

$$\text{Si } d^2W = d\sigma : d\varepsilon > 0 \rightarrow \text{Stabilité au sens de Hill (conditions de bifurcations exclues).} \quad (1)$$

Plus récemment Lancelot et al. [3] ont montré expérimentalement, sur un sable d'Hostun lâche sous faibles contraintes, une corrélation entre l'annulation du travail du second ordre et l'instabilité de l'échantillon.

Etant donné ces résultats aussi bien analytiques, numériques, qu'expérimentaux, on présente ici une approche basée sur la Méthode des Eléments Discret (MED) afin de pouvoir décrire à terme, à l'échelle "microscopique", la rupture des matériaux granulaires à l'intérieur du critère de plasticité de Mohr-Coulomb. Le code utilisé (SDEC) est basé sur une formulation semblable à celle proposée par Cundall [4; 5]. L'interaction entre deux grains est décrite par un frottement de Coulomb et des rigidités sont associées aux directions normales et tangentielles de contact.

Dans une première approche, une forme discrète du travail du second ordre est appliquée sur un cas purement discret d'avalanches de grains en 2D. Afin d'effectuer des comparaisons avec les résultats obtenus par Darve et al. [2; 6] à l'échelle macroscopique, des simulations 3D d'essais triaxiaux sont présentées. Ce traitement d'un problème homogène permet également une comparaison aisée entre le travail du second ordre macroscopique et une forme discrète exprimée à partir de variables liées aux contacts intergranulaires.

2 Avalanches de grains

Un essai de poussée sur une pente constituée d'environ 330 rouleaux de bois (matériau analogique type Schneebeli) a été modélisé. Les rouleaux sont placés dans une boite rectangulaire ouverte sur sa face supérieure, toutes les parois sont fixes, sauf la paroi aval dont le déplacement vers l'extérieur du massif constitue le paramètre de chargement. Pour un incrément de chargement, le travail du second ordre associé à chaque contact est calculé à partir de l'expression :

$$d^2W_{c1} = \left(d\vec{F}_c \cdot d\vec{l}_{c1}\right) \quad (2)$$

$d\vec{F}_c$ est l'incrément de la force de contact impliquant une variation du vecteur liant le centre des deux éléments en contact de $d\vec{l}_{c1}$. Cette expression revient en fait à représenter les contacts comme des éléments matériels au sein desquels il existe un champs de contraintes et un champs de déformations [7].

Dans ce cas bien spécifique d'avalanches de grains, les pics spatiaux (ou temporels) d'énergie cinétique locale (ou globale) sont considérés comme des indicateurs de la rupture de l'assemblage granulaire. Il est alors possible d'effectuer deux types de comparaisons :

- une comparaison entre la distribution spatiale de l'énergie cinétique de chaque rouleau et la distribution des valeurs négatives de d^2W_{c1} calculées entre 2 incréments de chargement consécutifs (Fig. 1),
- une comparaison entre l'évolution de l'énergie cinétique globale de l'ensemble du modèle et l'évolution de la somme de d^2W_{c1} sur les contacts, tous deux en fonction du déplacement de la paroi aval (Fig. 2).

A partir de la distribution spatiale de l'énergie cinétique, on remarque qu'un "bloc de rouleaux" glisse sur un

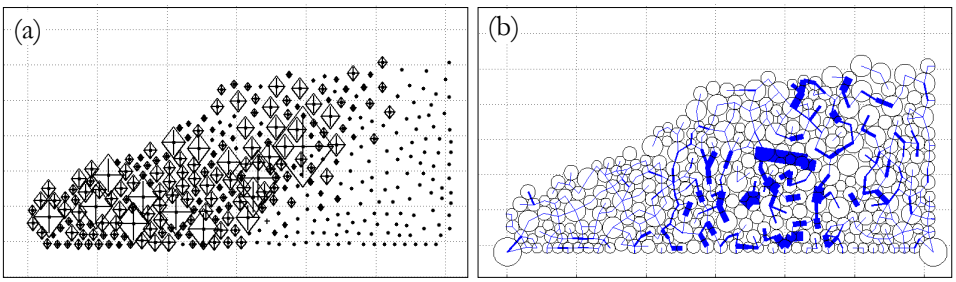

FIG. 1 – Distribution spatiale de l'énergie cinétique (a) et des valeurs négatives de d^2W_{c1} (b).

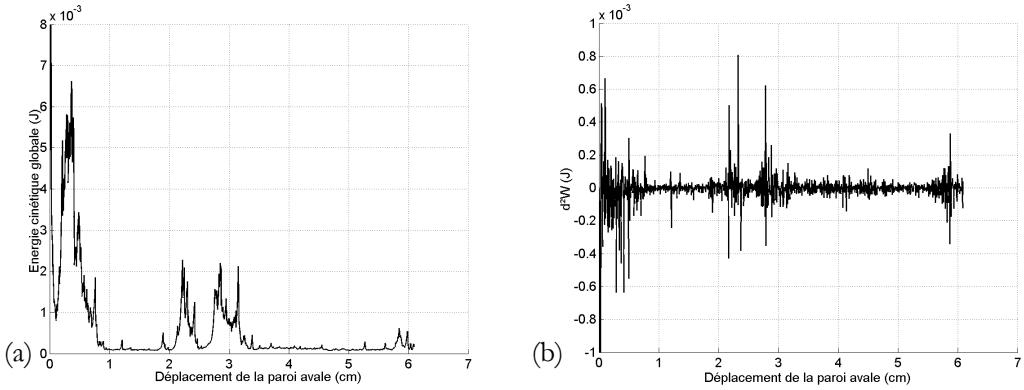

FIG. 2 – Evolution de l'énergie cinétique globale (a) et de d^2W_{c1} global (b) en fonction du déplacement de la paroi aval.

autre bloc en forme de coin peu perturbé par la sollicitation. Les valeurs négatives de d^2W_{c1}, représentées par des rectangles noirs, se localisent à l'interface de ces deux blocs. Il semblerait donc qu'il y ait une corrélation entre la distribution spatiale des valeurs négatives de d^2W_{c1} et ce que l'on pourrait appeler une "bande de rupture localisée". Sur la Figure 2a, on observe des pics d'énergie cinétique très marqués, les plus importants correspondent à des avalanches de grains en surface de la pente impliquant peu de rouleaux mais des vitesses importantes. En ce qui concerne l'évolution du travail du second ordre global on remarque également des pics (positifs ou négatifs) très marqués. Ainsi, on constate une corrélation importante entre les pics d'énergie cinétique et les pics négatifs du travail du second ordre global aux contacts.

D'après les résultats donnés ci-dessus, il semblerait que l'on puisse associer des valeurs négatives du travail du second ordre aux contacts à une rupture (ici localisée) au sein de l'empilement de rouleaux. Dans l'objectif d'étudier de manière plus rigoureuse ce lien possible, les auteurs se sont concentrés sur des essais triaxiaux de révolutions pour lesquels des résultats ont déjà été obtenus à partir d'une approche phénoménologique.

3 Problème homogène en 3 dimensions

Le modèle numérique utilisé est constitué d'un assemblage d'environ 10000 éléments sphériques dont la granulométrie s'étale entre 2 et 9.5 mm. L'ensemble forme un cube placé entre des plaques lisses et sans frottement permettant d'imposer sur chaque face de l'échantillon soit une vitesse de déformation soit une pression. On se limite dans cette étude à des états de contrainte triaxiaux ($\sigma_2 = \sigma_3$). A titre indicatif, pour un essai triaxial drainé à 100 kPa de confinement, le comportement du modèle s'apparente à celui d'un échantillon de sable d'Hostun dense, mis à part un angle de frottement macroscopique relativement faible ($\approx 24°$) dû à la forme sphérique des grains considérés.

Dans un premier temps, les auteurs se sont employés à retrouver des résultats macroscopiques afin d'apporter une certaine validation au modèle.

3.1 Comportement incrémental

Afin d'appréhender le comportement de ce modèle numérique constitué de sphères, les enveloppes réponses de Gudehus [8] ont été recherchées pour différents états de contrainte de l'échantillon caractérisés par la contrainte latérale σ_3 et le rapport q/p. Pour obtenir ces enveloppes réponses, une recherche directionnelle a été effectuée dans le plan d'axisymétrie des incréments de contraintes ($\Delta\sigma_1$, $\sqrt{2}\,\Delta\sigma_3$). La norme du vecteur sollicitation est fixée à 1 kPa alors que sa direction est variable de 0 à 360° par rapport à l'axe $\sqrt{2}\,\Delta\sigma_3$ par pas de 5° ou 10°. On s'intéresse alors à la réponse du modèle dans le plan d'axisymétrie des incréments de déformation ($\Delta\varepsilon_1$, $\sqrt{2}\,\Delta\varepsilon_3$). Sur les Figures 3a et 3b sont présentées les enveloppes réponses du modèle numérique pour un état de contrainte isotrope de 100 kPa (Fig. 3a) et pour q/p = 0.85 et σ_3 = 100 kPa (Fig. 3b).

Pour un état de contrainte isotrope, on observe une ellipse centrée sur l'origine du repère ce qui est caractéristique d'un comportement incrémental linéaire élastique [8]. Plus on s'éloigne d'un état isotrope en contrainte en augmentant la valeur du déviateur q, plus l'ellipse s'allonge. Il est ainsi possible d'obtenir une

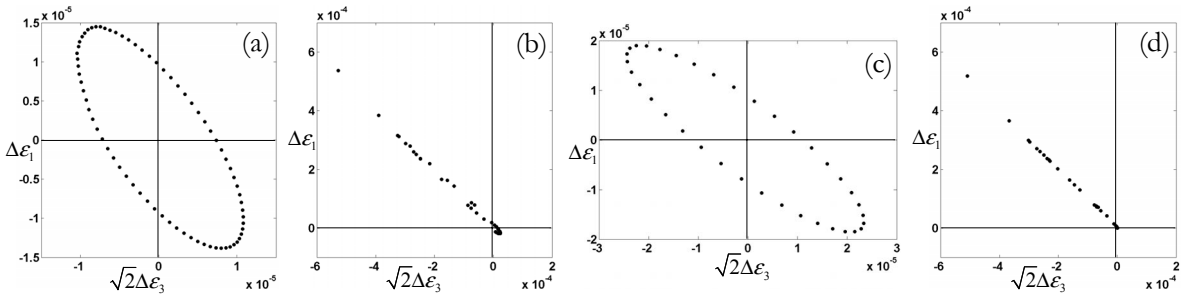

FIG. 3 – Enveloppes réponses de Gudehus pour σ_3 = 100 kPa et : q/p = 0 (a), q/p = 0.85 réponse totale (b), élastique (c), plastique (d).

dégénérescence de l'ellipse en une droite. C'est ce qui est observé pour q/p = 0.85 (Fig. 3b). Cette enveloppe réponse peut être décomposée en 2 enveloppes réponses : l'une correspondant aux déformations élastiques (Fig. 3c) l'autre correspondant aux déformations plastiques (Fig. 3d). La réponse élastique du modèle a été obtenue en affectant un angle de frottement inter-granulaire très élevé empêchant ainsi le glissement entre particules. On retrouve pour la partie élastique une ellipse semblable à celle obtenue dans le cas isotrope. En ce qui concerne la partie plastique seule une droite apparaît ce qui signifie que quelle que soit la direction de sollicitation, la direction du vecteur réponse $\Delta\varepsilon$ reste inchangée. On obtient donc une règle d'écoulement en condition axisymétrique pour cet assemblage de sphères [9].
Les enveloppes réponses présentées ci-dessus sont typiques de celles obtenues pour les sols [10]. Le comportement de ce modèle numérique (modèle ED) est qualitativement semblable à celui des géomatériaux, même si l'angle de frottement macroscopique s'avère relativement faible. De ce fait, même si ce modèle représente une approche simplifiée, il constitue un outil adéquat pour améliorer la compréhension, à l'échelle des grains, de la rupture dans les géomatériaux.

3.2 Domaine de bifurcations (ruptures potentielles)

Comme cela a été fait dans le paragraphe précédent, il est possible d'effectuer une recherche directionnelle vis-à-vis du signe du travail du second ordre macroscopique. On présente ici, à partir de l'état de contrainte-déformation mesuré aux frontières de l'échantillon, les valeurs normées du travail du second ordre $d^2W_{normé}$:

$$d^2W_{normé} = \frac{d\sigma \cdot d\varepsilon}{\|d\sigma\| \, \|d\varepsilon\|} \tag{3}$$

$d^2W_{normé}$ correspond à la valeur du cosinus de l'angle entre les deux vecteurs dans le produit scalaire du vecteur sollicitation $d\sigma$ par le vecteur réponse $d\varepsilon$. Sur la Figure 4a sont données des représentations "circulaires" des valeurs de $d^2W_{normé}$ (on ajoute une constante aux valeurs polaires) en fonction de la direction de sollicitation, pour une pression de confinement de 100 kPa. Les valeurs comprises à l'intérieur du petit cercle noir sont négatives. On remarque, à partir et au-delà d'une certaine valeur du rapport q/p, des directions de sollicitations pour lesquelles les valeurs de $d^2W_{normé}$ sont négatives. L'ensemble de ces directions forme un cône de directions "instables" au sens de Hill.

La recherche de ces directions instables a été effectuée pour trois valeurs de confinement (100, 200 et 300 kPa). Une synthèse des résultats apparaît sur la Figure 4b, les ronds blancs correspondent aux états de contraintes pour lesquels l'ensemble des directions testées est stable et les points noirs les états dont une ou plusieurs directions sont instables. On obtient ainsi une limite, à l'intérieur du critère de plasticité, mais très proche de celui-ci dans ce cas, au-delà de laquelle une rupture de l'échantillon est possible, fonction du chemin de sollicitation suivi et des variables de contrôle du chargement.

Par comparaison avec les recherches directionnelles effectuées avec une loi Incrémentalement Non Linéaire (INL) pour un sable d'Hostun dense [2; 6] on observe une corrélation qualitative entre les résultats : un seul cône de directions instables apparaît et la direction de déchargement à déviateur constant ($d\sigma_1 = d\sigma_3 < 0$) n'est pas comprise dans ces cônes. Les directions instables se regroupent autour d'un angle de sollicitation d'environ 240°. La limite de rupture potentielle se situe à des valeurs du rapport q/p semblables (0.85 < q/p < 0.96 pour le modèle ED, q/p ≈ 0.85 pour la loi INL). Par contre dans ce cas présent cette

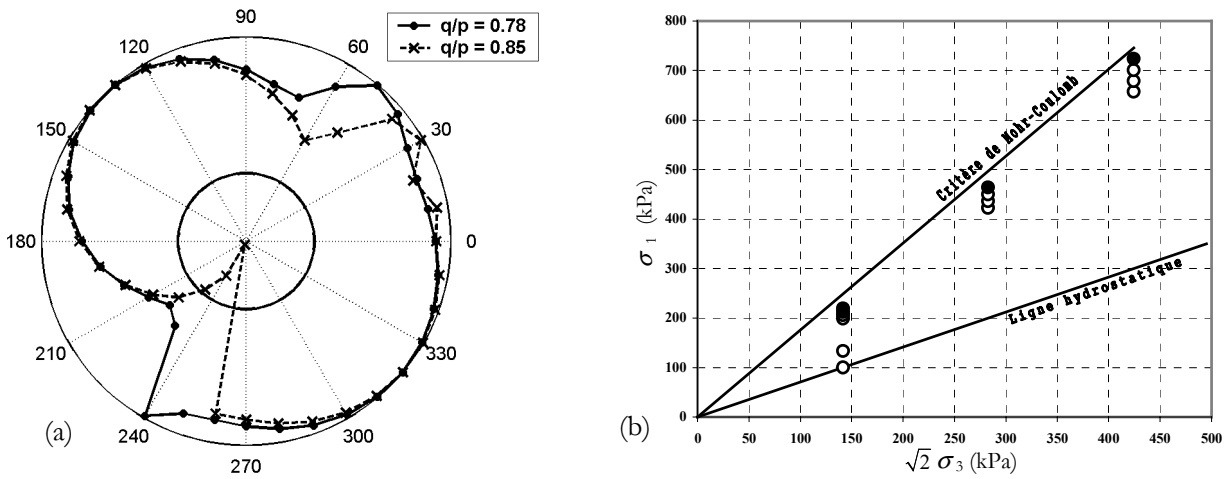

FIG. 4 – Représentation circulaire du travail du second ordre normalisé (a), domaine "instable" (b).

limite de rupture potentielle est beaucoup plus proche de la limite de plasticité.

3.3 Travail du second ordre aux contacts

Dans cette partie, l'expression donnant le travail du second ordre à partir des contacts est affinée dans le sens où la rotation des éléments est prise en compte dans la déformation de chaque contact :

$$d^2W_{c2} = \sum_{contacts} d\vec{F}_c \cdot d\vec{l}_{c2} \tag{4}$$

avec :

$$d\vec{l}_{c2} = d\vec{u}_i - d\vec{u}_j + \overrightarrow{C_{i,j}G_i} \wedge d\vec{\Omega}_i - \overrightarrow{C_{i,j}G_j} \wedge d\vec{\Omega}_j \tag{5}$$

$d\vec{u}_i$, $d\vec{\Omega}_i$, G_i sont respectivement la translation, la rotation, le centre de l'élément *i* et $C_{i,j}$ le point de contact entre les éléments *i* et *j*.

Sur la Figure 5 sont représentés les travaux du second ordre macroscopiques non normés d^2W_{macro} :

$$d^2W_{macro} = V\left(d\sigma : d\varepsilon\right) \tag{6}$$

ainsi que les valeurs de d^2W_{c2}, pour un état de contrainte isotrope (Fig. 5a) et pour σ_3 = 100 kPa et q/p = 0.85 (Fig. 5b). Pour un état de contrainte isotrope on observe une correspondance totale entre d^2W_{macro} et d^2W_{c2} ; rappelons que dans ce cas les déformations sont quasi élastiques (voir Fig. 3a). Pour q/p = 0.85 il y a correspondance entre d^2W_{macro} et d^2W_{c2} pour des directions de sollicitations comprises entre 0 et 20° et entre

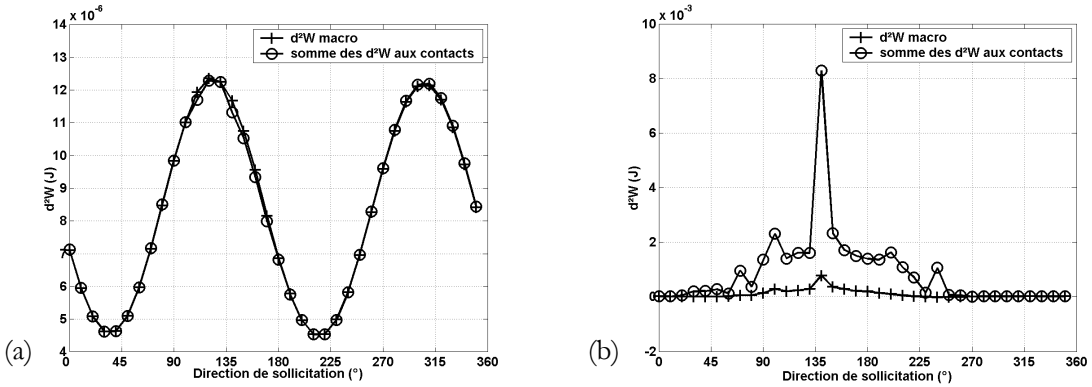

FIG. 5 – Travaux du second ordre macroscopiques et aux contacts pour q/p = 0 (a) et q/p = 0.85 (b).

260 et 360°, entraînant des réponses où les déformations plastiques sont négligeables (voir Fig. 3b). Il y a donc équivalence du travail du second ordre macroscopique et aux contacts, pour des déformations élastiques. Cela n'est pas le cas lorsque les déformations plastiques ne sont plus négligeables. Ces déformations plastiques sont principalement caractérisées par un réarrangement granulaire dont il faudrait sans doute tenir compte.

4 Conclusion

Le modèle ED présenté ici, est constitué d'un assemblage de sphères. Il ne permet pas de reproduire quantitativement l'ensemble du comportement d'un matériau de type sol (angle de frottement macroscopique en particulier). Cependant le comportement incrémental en est très proche et le souci de garder des mécanismes d'interactions aux contacts les plus "physiques possibles" devraient permettre, en remontant à l'échelle du grain ou de l'amas de grains, d'améliorer la compréhension de la rupture dans les matériaux granulaires.

Force est de constater, dans le cas présent, qu'il n'y a pas un lien direct entre le travail du second ordre macroscopique (continu) et aux contacts. D'autres mécanismes en lien avec l'évolution de la texture sont sans doute à prendre en compte (en particulier, création et pertes de contacts).

A terme, un critère basé sur le signe du travail du second ordre, pourrait permettre d'expliquer des ruptures difficiles à décrire dans le cadre de la plasticité classique, telles que les ruptures diffuses (par exemple, glissements de terrain sous très faible pente).

Remerciements

Ces travaux sont développés dans le cadre du projet européen DIGA (5ème PCRD, HPRN-CT-2002-00 220) et de la structure fédérative de recherche RNVO. Nous remercions ces deux programmes pour leurs soutiens.

Références

[1] S. Imposimato and R. Nova. An investigation on the uniqueness of the incremental response of elastoplastic models for virgin sand. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3:65-87, 1998.

[2] F. Darve, G. Servant, F. Laouafa, H.D.V. Khoa. Failure in geomaterials: continuous and discrete analyses. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.,* 193:3057-3085, 2004.

[3] L. Lancelot, I. Shahrour, and M.A. Mahmoud. Instability and static liquefaction on proportional strain paths for sand at low stresses. *J. of Engng. Mech.,* 130(11):1365-1372, 2004.

[4] F.V. Donzé and S.A. Magnier. Spherical Discrete Element Code. *Discrete Element Project Report* no. 2, GEOTOP, Université du Québec à Montréal, 1997.

[5] P.A. Cundall and O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47-65, 1979.

[6] F. Darve, F. Laouafa. Instabilities in granular materials and application to landslides. *Mech. Cohes-Fric. Mater.,* 5:627-652, 2000.

[7] F. Nicot. Personal communication. 2004.

[8] G. Gudehus. A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *Proc. 3rd Numer. Meth. in Geomech.*, Aachen, Wittke ed., Balkema, 4:1309-1323, 1979.

[9] J.P. Bardet. Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *Int. J. of Plasticity*, 10(8):879-908, 1994.

[10] P. Royis and T. Doanh. Theoretical analysis of the strain response envelopes using incrementally non-linear constitutive equations. *Int. Journ. Num. Anal. Methods in Geomechanics*, 22:97-132, 1998.