



**HAL**  
open science

## Interprétation micro-mécanique de l'instabilité matérielle au sein des milieux granulaires

François Nicot, Félix Darve

► **To cite this version:**

François Nicot, Félix Darve. Interprétation micro-mécanique de l'instabilité matérielle au sein des milieux granulaires. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-7. hal-02586898

**HAL Id: hal-02586898**

**<https://hal.inrae.fr/hal-02586898v1>**

Submitted on 10 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Interprétation micro-mécanique de l'instabilité matérielle au sein des milieux granulaires

François NICOT <sup>1</sup>, Félix DARVE <sup>2</sup>

(1) Cemagref, Unité de Recherche ETNA, Grenoble  
francois.nicot@grenoble.cemagref.fr

(2) Institut National Polytechnique de Grenoble, Laboratoire 3S, Grenoble  
felix.darve@inpg.fr

## Résumé :

L'apparition d'instabilités dans les milieux granulaires a été examinée à partir de la simulation de chemins triaxiaux drainés, en utilisant le Modèle Micro-Directionnel. Les simulations ont confirmé l'existence de directions de sollicitation le long desquelles le travail du second ordre s'annulait. Une analyse micro-mécanique a permis de relier ceci à la nature du modèle local de contact.

## Abstract :

Existence of material instability was investigated from the simulation of drained triaxial paths and of Gudehus' envelopes-responses, by using the micro-directional model. These simulations have revealed that some loading directions along with the second order work vanishes can be exhibited. A micro-mechanical analysis has made it possible to relate this phenomenon to microscopic origins.

## Mots clés :

Instabilité matérielle, approches multi-échelles, micro-mécanique, matériaux granulaires.

## 1 Introduction

Différents modes de rupture coexistent dans les matériaux granulaires, caractérisés par des déformations plastiques non-associées. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, ces modes de rupture sont décrits par divers critères, comme par exemple :

$$\det \overline{\overline{M}}^{-1} = 0 \quad (\text{condition de limite plastique, avec } d\varepsilon_i = M_{ij} d\sigma_j)$$

$$\det \overline{\overline{n}} : \overline{\overline{L}} : \overline{\overline{n}} = 0 \quad (\text{condition de localisation, avec } d\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\varepsilon_{kl})$$

$$d^2W = d\overline{\overline{\sigma}} : d\overline{\overline{\varepsilon}} \leq 0 \quad (\text{condition nécessaire d'instabilité de Hill [1]})$$

Dans cet article, nous nous intéressons au critère d'instabilité matérielle de Hill [1]. Ce critère appliqué à un point matériel stipule qu'après une histoire de chargement donnée, ce point matériel est réputé instable s'il existe au moins une sollicitation incrémentale  $d\overline{\overline{\sigma}}$ , associée à une réponse  $d\overline{\overline{\varepsilon}}$  ( $d\overline{\overline{\sigma}}$  et  $d\overline{\overline{\varepsilon}}$  étant reliées par les équations constitutives), telle que  $d^2W = d\overline{\overline{\sigma}} : d\overline{\overline{\varepsilon}} \leq 0$ . Si l'on écarte les instabilités par flottement, il a été démontré que cette condition est la première que l'on rencontre le long d'un chemin de chargement à partir d'un état initial isotrope [2]. La preuve repose sur le fait que la condition de Hill est équivalente à l'annulation du déterminant de la partie symétrique de  $\overline{\overline{M}}^{-1}$  dans le cas de l'élasto-plasticité classique. Nous proposons dans ce qui suit d'analyser la variation directionnelle du travail du second ordre, à partir du modèle micro-directionnel : étant donné la sollicitation incrémentale  $d\overline{\overline{\varepsilon}}$  à laquelle est associée la réponse  $d\overline{\overline{\sigma}}$ , on s'intéresse à la distribution de  $d^2w = \frac{d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}}{\sqrt{d\sigma_{kk} d\varepsilon_{ll}}}$  en fonction de la direction  $\overline{\overline{v}} = d\overline{\overline{\varepsilon}} / \|d\overline{\overline{\varepsilon}}\|$ . En

particulier, on cherche à établir s'il existe des directions le long desquelles  $d^2w$  s'annule et change de signe. Dans de tels cas, la rupture (ou la non-controlabilité des déformations au sens de Nova [3]) peut se produire au cours d'un chargement à l'intérieur strictement de la limite plastique. Le modèle micro-directionnel, de par sa structure, permet de dégager une interprétation micro-mécanique de ce phénomène.

## 2 Brefs rappels sur le modèle micro-directionnel

Le modèle micro-directionnel est fondé sur une approche multi-échelles, associée à une procédure d'homogénéisation au sein d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) supposé contenir un nombre « suffisant » de grains sphériques (ou contacts). Dans cette approche, la position de chaque grain est ignorée et seulement les directions de contact sont prises en compte ; la probabilité pour que des contacts existent dans une direction donnée est étudiée, et une moyenne des variables locales est calculée dans chaque direction de l'espace physique : des variables moyennes directionnelles sont ainsi générées. La procédure d'homogénéisation comporte trois phases : tout d'abord une procédure de localisation cinématique permet d'évaluer le champ de déplacement moyen directionnel  $\hat{d}\bar{u}$  en fonction du tenseur de déformation macroscopique  $d\bar{\varepsilon}$  ; ensuite, des relations constitutives locales sont introduites de manière à relier les déplacements et forces directionnels moyens ; et enfin une procédure d'homogénéisation statique est réalisée afin de déterminer le tenseur des contraintes macroscopiques  $d\bar{\sigma}$  en fonction du champ de forces locales  $d\hat{F}$ .

### 2.1 Tenseur des contraintes macroscopique

Considérons un VER autour d'un point matériel donné ; le tenseur  $\bar{\sigma}$  peut être déduit à partir des forces locales de contact  $\vec{F}^c$  entre les grains en contact au sein du volume. Cette procédure a été largement discutée ([4], [5], [6], [7]), et il semble désormais bien établi que  $\bar{\sigma}$  et  $\vec{F}^c$  peuvent être reliés par la formule d'homogénéisation de Love :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{v_e} \sum_c F_i^c l_j^c \quad (1)$$

où  $F_i^c$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de la force de contact  $\vec{F}^c$ ,  $l_j^c$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\vec{l}^c$  joignant les centres des particules au droit du contact  $c$ , et la somme est étendue à l'ensemble des contacts au sein du VER (volume  $v_e$ ). Eq. (1) est exprimée sous une forme discrète, mais elle peut être étendue de manière continue en intégrant sur l'ensemble des directions de contact  $\vec{n}(\theta, \varphi) = \cos \varphi \vec{x}_1 + \sin \varphi \cos \theta \vec{x}_2 + \sin \varphi \sin \theta \vec{x}_3$ , où  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  constitue un repère Cartésien direct de l'espace physique. Définissant par  $\omega_e(\theta, \varphi) = \omega(\theta, \varphi) v_e$  le nombre de contacts orientés le long d'une direction donnée, il vient finalement [8] :

$$\sigma_{ij} = \iint_{[0;\pi]} 2r_g \omega(\theta, \varphi) \hat{F}_i(\theta, \varphi) n_j(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi \quad (2)$$

où  $r_g$  est le rayon moyen des grains et  $\hat{F}$  la moyenne directionnelle de toutes les forces de contact  $\vec{F}^c$  associées à la direction de contact  $\vec{n}$ .

### 2.2 Relation de localisation cinématique

La relation de localisation cinématique est construite à partir de l'évaluation de l'énergie de déformation incrémentale exprimée d'une part avec les variables macroscopiques  $(\bar{\sigma}, d\bar{\varepsilon})$ , et d'autre part avec les variables directionnelles moyennes  $(\hat{F}(\theta, \varphi), d\hat{u}(\theta, \varphi))$ , où  $\hat{u}(\theta, \varphi)$  est la variable cinématique directionnelle moyenne duale de  $\hat{F}(\theta, \varphi)$ . Ainsi, si le VER peut être supposé macro-homogène au sens de Hill [9], alors on peut montrer que la variable cinématique directionnelle se déduit du champ de déformation macroscopique de la façon suivante [8] :

$$d\hat{u}_i(\theta, \varphi) = 2r_g d\varepsilon_{ij} n_j(\theta, \varphi) \quad (3)$$

### 2.3 Relations constitutives locales

Le comportement local du milieu est décrit par l'intermédiaire d'un modèle de contact reliant les forces normales de contact  $F_c^n$  et les forces tangentielles de contact  $F_c^t$  aux déplacements relatifs normaux  $u_c^n$  et tangentiels  $u_c^t$  au droit de chaque contact 'c'. De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature [10], le plus courant étant le modèle élasto-plastique ; celui-ci introduit une raideur élastique normale  $k_n$ , une raideur élastique tangentielle  $k_t$ , et un angle de frottement inter-grains  $\varphi_g$  :

$$dF_c^n = k_n du_c^n \quad (4a)$$

$$d\bar{F}_c^t = \min \left\{ \left\| \bar{F}_c^t + k_t d\bar{u}_c^t \right\|, \tan \varphi_g \left( F_c^n + k_n du_c^n \right) \right\} \frac{\bar{F}_c^t + k_t d\bar{u}_c^t}{\left\| \bar{F}_c^t + k_t d\bar{u}_c^t \right\|} - \bar{F}_c^t \quad (4b)$$

En première approximation, on supposera que les relations constitutives (4) s'appliquent également aux variables directionnelles  $\hat{u}(\theta, \varphi)$  et  $\hat{F}(\theta, \varphi)$ .

### 3 Mise en évidence de domaines instables

Limitons notre investigation au cas d'un matériau ayant subi une compression triaxiale axisymétrique. Afin d'explorer l'existence de domaines instables, les courbes enveloppes-réponses de Gudehus [11] ont été construites. Pour cela, à partir d'un état de chargement donné caractérisé par le rapport

$$\eta = \frac{q}{p} = 3 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}$$

et une contrainte mineure  $\sigma_2$ , un incrément de déformation  $d\bar{\varepsilon}$  est imposé dans toutes les directions (dans le premier plan bissecteur) avec la même norme ; la réponse incrémentale  $d\bar{\sigma}$  est alors calculée. Les paramètres utilisés lors de ces simulations sont résumés Tab. 1.

Tableau 1. Essai triaxial axisymétrique : paramètres matériels et conditions initiales.

Contrainte isotrope initiale (MPa)	Indice des vides initial	$k_n$ (kN.m)	$k_t$ (kN.m)	$\varphi_g$ (°)
0.125	0.66	15708	6830	15

Il a alors été possible d'évaluer la quantité  $d^2w = \frac{d^2W}{\sqrt{d\sigma_1^2 + 2d\sigma_2^2} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + 2d\varepsilon_2^2}}$  qui peut être interprétée comme le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs  $(\sqrt{2} d\varepsilon_2, d\varepsilon_1)$  et  $(\sqrt{2} d\sigma_2, d\sigma_1)$ . A partir d'une valeur critique  $\eta_c \approx 0.715$ , un cône à l'intérieur duquel  $d^2w$  est négatif apparaît (Fig. 1a). En outre, les directions  $\alpha_\sigma$  le long desquelles nous avons  $d^2w < 0$  sont très voisines de celles observées en utilisant des modèles de comportement phénoménologiques (par exemple, loi incrémentalement non-linéaire ou loi octo-linéaire [12]) et en suivant la même procédure de chargement (Fig. 1b)

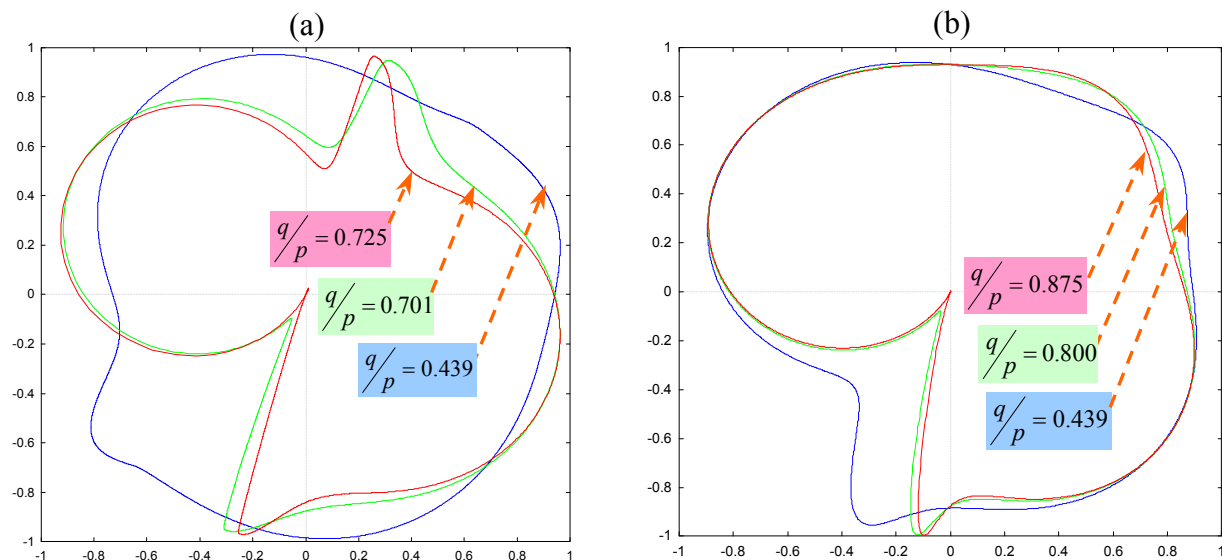


FIG. 1 – Evolution du travail du second ordre en fonction de  $\alpha_\sigma$ , en utilisant le modèle micro-directionnel (a) et la loi incrémentalement non-linéaire (b) [12].

#### 4 Interprétation micro-mécanique

Le critère d'instabilité matérielle de Hill, bien qu'il ne soit pas clairement établi sur des bases thermodynamiques indiscutables, a été largement discuté et utilisé. Ce critère peut être considéré comme une généralisation du postulat introduit par Drucker [13]. Mandel a appliqué le postulat de Drucker au cas des matériaux granulaires et a montré que ce postulat est violé si un modèle frictionnel est introduit pour décrire le contact entre les grains [14]. Le fait que le modèle micro-directionnel soit construit essentiellement à partir d'une description locale est intéressant car on peut espérer trouver des arguments micro-structuraux à l'existence de couples  $(d\bar{\sigma}, d\bar{\varepsilon})$  vérifiant  $d^2W < 0$ .

Prenant avantage des relations constitutives (4), on peut montrer que le travail du second ordre macroscopique se décompose sous la forme canonique suivante :

$$d^2W = d^2W_l + d^2W_v + d^2W_f \quad (5)$$

Le terme  $d^2W_l = \frac{3}{2\pi N_g r_g^2} \frac{\rho_o}{\rho_g} \iint_{[0;\pi]} \frac{d\hat{F}_i(\theta, \varphi) d\hat{u}_i(\theta, \varphi) \omega_e(\theta, \varphi)}{1 - \varepsilon_{kk}} \sin \varphi d\theta d\varphi$  s'interprète comme la

moyenne des travaux du second ordre locaux  $d^2\hat{W} = d\hat{F}_i d\hat{u}_i$  dans chaque direction. Le terme  $d^2W_v$  prend en compte la variation de volume de l'échantillon, et le troisième terme  $d^2W_f$  est lié à l'évolution de la texture du milieu. L'équation (5) permet de relier d'une part le travail du second ordre macroscopique à des considérations micro-structurales, et d'autre part révèle que celui-ci ne peut pas être réduit à la seule moyenne des travaux du second ordre locaux. Par conséquent, le travail du second ordre macroscopique, qui se fonde sur un concept d'instabilité matérielle, est gouverné localement non seulement par les travaux locaux (terme  $d^2W_l$ ), mais aussi par d'autres effets (termes  $d^2W_v$  et  $d^2W_f$ ).

Sur la base des courbes reportées Fig. 2, on peut postuler que le terme  $d^2W_f$  demeure négligeable par rapport aux termes  $d^2W_l$  et  $d^2W_v$ . Au contraire, cette figure révèle que le terme  $d^2W_v$  ne peut pas être négligé et contribue de manière significative à la valeur du travail du second ordre macroscopique. Par ailleurs, le terme  $d^2W_l$  seul ne s'annule jamais (au moins dans les conditions de chargement considérées), même si l'allure de la courbe de  $d^2W_l$  est très voisine de celle de  $d^2W$ . Dans ce qui suit, nous nous intéressons seulement au terme  $d^2W_l$ , et nous montrons qu'une corrélation très forte peut être mise en

évidence entre le travail du second ordre directionnel  $d^2\hat{W}$  (évalué dans une direction donnée avec les variables directionnelles moyennes) et le terme moyenné  $d^2W_l$ .

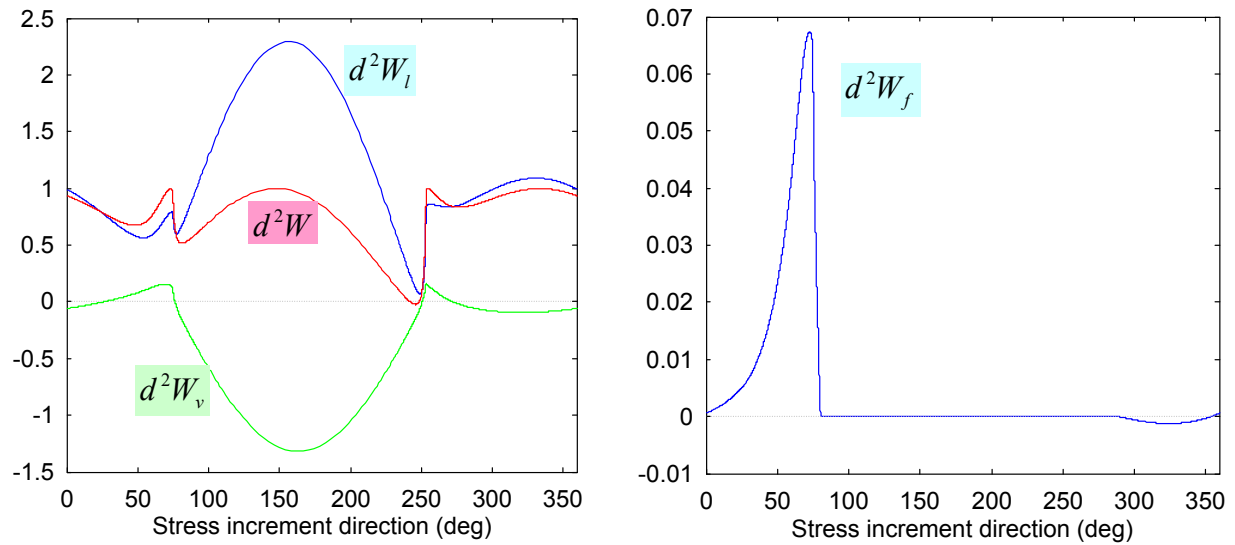


FIG. 2 – Décomposition du travail du second ordre macroscopique.

A l'échelle locale, nous avons  $d^2\hat{W} = d\hat{F}_n d\hat{u}_n + d\hat{F}_t d\hat{u}_t$ , qui, compte tenu des relations (4), est une forme quadratique. En régime élastique, cette forme est positive, mais en régime plastique son signe dépend des valeurs de  $d\tilde{u}_n$  et  $d\tilde{u}_t$ . Examinons ce dernier cas. Il vient :

$$d^2\hat{W} = k_n d\hat{u}_n^2 + \tan \varphi_g k_n d\hat{u}_n d\hat{u}_t \quad (6)$$

Par conséquent, le travail du second ordre local est négatif si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a)  $d\hat{u}_n \leq 0$  et (b)  $d\hat{u}_t \geq \frac{-d\hat{u}_n}{\tan \varphi_g}$ . On peut montrer que les conditions (a) et (b) sont équivalentes à :

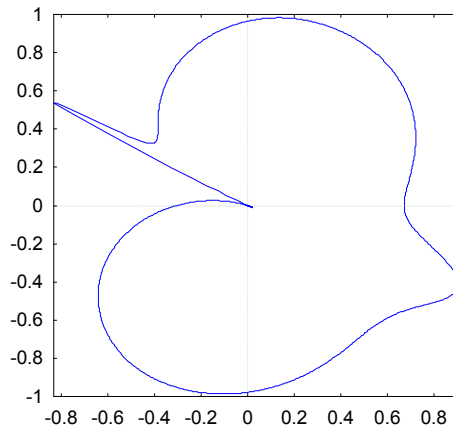
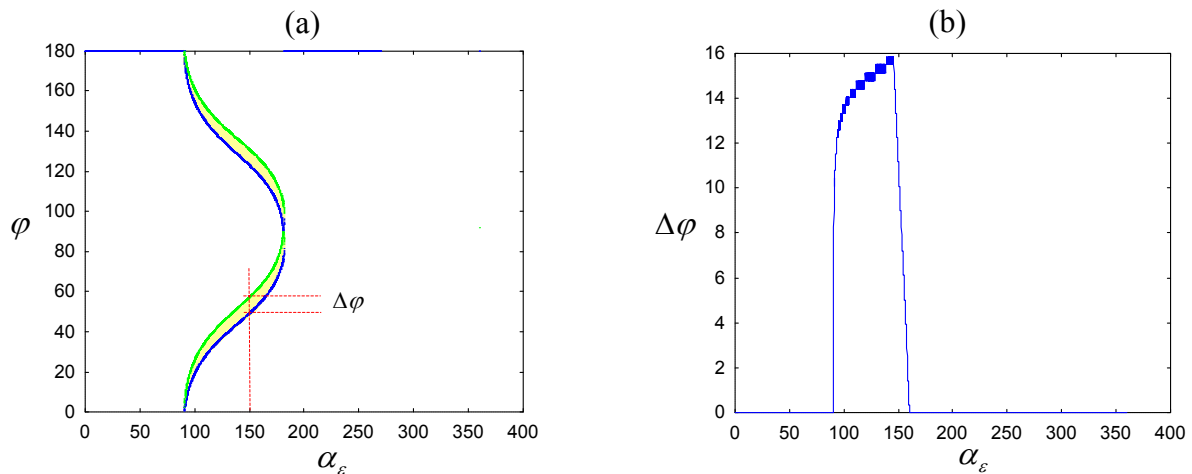
$$\cos \varphi \sin \varphi \left( \cos \alpha_\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha_\varepsilon \right) \geq -\frac{\cos^2 \varphi \cos \alpha_\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 \varphi \sin \alpha_\varepsilon}{\tan \varphi_g} \geq 0 \quad (7)$$

où  $\alpha_\varepsilon$  est la direction de la sollicitation de déformation incrémentale. Le domaine  $D_{(\alpha_\varepsilon, \varphi)}$  contenant tous les points  $(\alpha_\varepsilon, \varphi)$  satisfaisant les inégalités (7) est représenté Fig. 4a. Plus l'amplitude  $\Delta\varphi$  du domaine est grande pour une valeur de  $\alpha_\varepsilon$  donnée, plus le nombre de directions le long desquelles  $d^2\hat{W} < 0$  est élevé.

Il apparaît qu'il existe des directions de contact le long desquelles  $d^2\hat{W} < 0$  seulement si  $\alpha_\varepsilon \in \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ .

Considérons à nouveau la distribution directionnelle de  $d^2w$ , pour  $\eta = 0.725$  (Fig. 1a), et traçons ce diagramme en fonction maintenant de la direction  $\alpha_\varepsilon$  (Fig. 3). Nous observons que le travail du second ordre macroscopique est négatif à l'intérieur d'un cône inclus également dans le quadrant  $\left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ . Ce

résultat tend à montrer que le travail du second ordre macroscopique est fortement gouverné par le travail du second ordre local. Par ailleurs, il convient de souligner que l'amplitude  $\Delta\varphi$  est maximale pour les directions  $\alpha_\varepsilon$  correspondant à  $d^2W < 0$ , c'est-à-dire pour  $\alpha_\varepsilon$  appartenant à l'intervalle [135 deg – 150 deg.] (Fig. 4b).

FIG. 3 – Diagramme directionnel de  $d^2W$  en fonction de  $\alpha_\varepsilon$ .FIG. 4 – Représentation du domaine  $D_{(\alpha_\varepsilon, \varphi)}$  (a), et amplitude du domaine  $D_{(\alpha_\varepsilon, \varphi)}$  (b), en fonction de  $\alpha_\varepsilon$ .

Les simulations ont été réalisées avec  $\varphi_g = 15$  deg.

## 5 Conclusions

Le concept d'instabilité matérielle, développé par Hill, a été examiné d'un point de vue micro-structural. Nous avons établi qu'après un chemin de chargement triaxial axisymétrique, des directions instables de chargement existaient à l'intérieur d'un cône. L'usage du modèle micro-directionnel, fondé sur des bases micro-mécaniques, a permis d'établir que le travail du second ordre macroscopique était fortement gouverné par le travail du second ordre local, calculé pour chaque direction de contact. L'annulation du travail du second ordre local trouve par ailleurs une interprétation claire sur la base du modèle de contact frictionnel introduit. En outre, une remarquable analogie a pu être dégagée avec les résultats obtenus antérieurement avec les modèles octo-linéaire ou incrémentalement non-linéaire, tous deux de nature phénoménologique.

## Références

- [1] Hill, R. (1958): A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, pp. 236-249.
- [2] Bigoni, D, and Hueckel, T. (1991): Uniqueness and localization, I. Associative and non-associative elastoplasticity. Int. J. Solids Structures, Vol. 28, n° 2, pp. 197-213
- [3] Nova, R. (1994): Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programs. Journal of Mechanical behavior of Materials, Vol. 5, n° 2, pp. 193-201.

- [4] Love, A.E.H. (1927): A treatise of mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Weber, J. (1966): Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. Bull. Liaison P. et Ch., n° 20, pp. 1-20.
- [6] Christoffersen, J., Mehrabadi, M.M., and Nemat-Nasser, S. (1981): A micro-mechanical description of granular material behavior. Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 339-344.
- [7] Mehrabadi, M.M., Oda, M., and Nemat-Nasser, S. (1982) : On statistical description of stress and fabric in granular materials. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 6, pp. 95-108.
- [8] Nicot, F., and Darve, F. (2004): A multiscale approach to granular materials. Mechanics of Materials, *in press*.
- [9] Hill, R. (1967): The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 15, n° 2, pp. 79-95.
- [10] Bardet, J.P. (1998): Introduction to computational granular mechanics. *In* Behaviour of granular materials, Edited by B. Cambou, Springer Wien, New York, pp. 99-169.
- [11] Gudehus, G. (1979): A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *In* 3<sup>rd</sup> Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Aachen and Wittke Eds., Balkema Publisher, Vol. 4, pp. 1309-1324.
- [12] Darve, F., and Roguiez, X. (1998): Homogeneous bifurcation in soils. *In* Bifurcation and localization for soils and rocks, Adachi et al. Eds., Balkema Publisher, pp. 43-50.
- [13] Drucker, D. (1951): A more fundamental approach to stress-strain relations. 1<sup>st</sup> US Nat. Cong. of Applied Mech., ASME, pp. 487-491.
- [14] Mandel, J. (1966): Conditions de stabilité et Postulat de Drucker. *In* Rheology and soil Mechanics, Kravtchenko and Sirieys Eds., Springer Verlag Publisher, pp. 58-68.