



HAL
open science

Théorie de la viabilité et application à deux modèles d'évolution des langues

C. Bernard

► **To cite this version:**

C. Bernard. Théorie de la viabilité et application à deux modèles d'évolution des langues. Sciences de l'environnement. 2007. hal-02590919

HAL Id: hal-02590919

<https://hal.inrae.fr/hal-02590919>

Submitted on 15 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire d'Ingénierie pour
les Systèmes Complexes

Théorie de la Viabilité et Application à deux Modèles d'Evolution des Langues

Claire Bernard
Master Recherche Mathématiques appliquées
Stage encadré par Sophie Martin

31 juillet 2007

Remerciements

Je remercie Sophie Martin pour m'avoir encadrée pendant ces quatre mois de stage et pour m'avoir donné de nombreux conseils ; Guillaume Deffuant pour m'avoir accueillie au sein du Lisc ; Laëtitia Chapel pour m'avoir initiée au langage Java et pour ses explications sur son algorithme.

Et je remercie toute l'équipe pour la convivialité qui règne au Lisc.

Table des matières

1	Premières Notions de la Théorie de la Viabilité	4
1.1	Premières Définitions	4
1.2	Le Théorème de la Viabilité	5
1.3	Temps de Sortie et d'Atteinte du Noyau	5
1.4	Relation entre Noyau de Viabilité et Temps de Sortie	7
2	Semi-perméabilité des Frontières du Noyau de Viabilité	10
2.1	Tube de Sortie	10
2.2	Frontière du Noyau de Viabilité	13
3	Modèle de Dynamique des Langages	14
3.1	Modèle d'Abrams Strogatz	14
3.2	Modèle d'Abrams Strogatz en deux Dimensions	16
3.2.1	Calcul des Courbes Théoriques	16
3.2.2	Approximation du Noyau de Viabilité	17
3.3	Modèle Bilingue de Minett-Wang	21
3.4	Calcul de la Résilience pour le Modèle d'Abrams Strogatz	25

Introduction

La théorie de la viabilité est une théorie mathématique permettant d'étudier des évolutions gouvernées par un système complexe. Celles-ci doivent être maintenues dans un ensemble de contraintes donné. Ce type de problème possède de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'écologie, la théorie des jeux, les sciences économiques, les sciences cognitives,...

Un outil majeur de cette théorie est la notion de noyau de viabilité. Il s'agit de l'ensemble des états d'un système desquels partent au moins une évolution qui reste dans un ensemble de contraintes au cours du temps.

Nous allons ici présenter différentes façons de le caractériser. Nous verrons qu'il est possible de le faire grâce à la notion de cône tangent. Puis nous définirons de nouvelles fonctions, fonction de temps de sortie maximale, fonction de temps d'atteinte minimale que nous mettrons en relation avec le noyau de viabilité.

Dans une deuxième partie, nous nous attacherons à l'étude des frontières du noyau, nous démontrerons qu'il est semi-perméable.

Enfin, nous appliquerons cette théorie à un cas concret sur la dynamique des langages. Nous ferons une étude théorique partielle, puis nous utiliserons les algorithmes déjà développés pour obtenir des résultats sur l'évolution des langages.

Chapitre 1

Premières Notions de la Théorie de la Viabilité

1.1 Premières Définitions

Viabilité et Capturabilité

Soit X l'ensemble des états d'un système ($X \subset \mathbb{R}^n; n < \infty$).
On appelle évolutions les fonctions continues $x(\cdot) : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto x(t) \in X$ qui décrivent les différents états d'un système au cours du temps.

Définition 1.1.

Soit K un ensemble de contraintes, $K \subset X$.

Une évolution $x(\cdot)$ est dite viable dans K si $\forall t \geq 0, x(t) \in K$.

Soit C une cible, $C \subset K$.

On dit qu'une évolution $x(\cdot)$ atteint la cible C si

$$\exists T \geq 0 \text{ tq } \begin{cases} x(T) \in C \\ \forall t \in [0, T] \quad x(t) \in K \end{cases}$$

Système Evolutionnaire

Soit \mathcal{U} l'ensemble des rétroactions ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n; n < \infty$).

Soit une application $U : X \mapsto \mathcal{U}$ qui à un état $x \in X$ associe un ensemble $U(x)$ de contrôles qui rétroagissent en x .

Soit $f : X \times \mathcal{U} \mapsto X$ une application qui à toute paire (x, u) associe la vitesse de l'état x .

Définition 1.2.

Un système évolutionnaire $\mathcal{S} : X \longrightarrow \mathcal{C}(0, \infty; X)$ pour (f, U) est l'application qui à tout $x \in X$ associe l'ensemble $\mathcal{S}(x)$ des évolutions gouvernées par

$$\text{le système suivant : } \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \text{ et partant de } x.$$

Noyau de Viabilité et Bassin de Capture

Définition 1.3.

Soit K un ensemble de contraintes, $K \subset X$ et C une cible, $C \subset K$.

Le sous-ensemble $Viab_{\mathcal{S}}(K, C)$ des états initiaux $x_0 \in K$ desquels part au moins une évolution $x(\cdot)$ solution du système \mathcal{S} , viable dans K ou atteignant la cible C est appelé le noyau de viabilité de K avec une cible C .

Si la cible est réduite à l'ensemble vide ($C = \emptyset$), on dit que $Viab_{\mathcal{S}}(K) = Viab_{\mathcal{S}}(K, \emptyset)$ est le noyau de viabilité de K .

Définition 1.4.

Soit K un ensemble de contraintes, $K \subset X$ et C une cible, $C \subset K$.

Le sous-ensemble $Capt_{\mathcal{S}}(K, C)$ des états initiaux $x_0 \in K$ desquels part au moins une évolution $x(\cdot)$ solution du système \mathcal{S} , atteignant la cible C est appelé le bassin de capture de C dans K .

Remarque. Un sous-ensemble K est appelé un repeller si son noyau de viabilité est vide.

Un sous-ensemble C est dit isolé dans K si $Capt_{\mathcal{S}}(K, C) = C$.

1.2 Le Théorème de la Viabilité

On rappelle la définition d'un cône tangent $T_K(\sigma)$:

Définition 1.5.

$$T_K(\sigma) = \left\{ x; \exists (\sigma_n)_n \in K \text{ tq } \sigma_n \rightarrow \sigma, \exists (h_n)_n \geq 0 \text{ tq } h_n \rightarrow 0, \frac{1}{h_n}(\sigma_n - \sigma) \rightarrow x \right\}$$

On peut maintenant énoncer une caractérisation du noyau de viabilité par le cône tangent.

Theorème 1.1.

K est viable $\iff \forall x \in K \quad F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$
où $F(x) = \{f(x, u) ; u(t) \in U(x(t))\}$

La preuve de ce théorème sera admise ici.

1.3 Temps de Sortie et d'Atteinte du Noyau

Fonction de Sortie et d'Atteinte

Définition 1.6.

Soit $K \subset X$ un ensemble.

La fonction $\tau_K : \mathcal{C}(0, \infty; X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ qui associe à $x(\cdot)$ son temps de sortie $\tau_K(x(\cdot))$ défini par :

$$\tau_K(x(\cdot)) = \inf \{ t \in [0, \infty[; x(t) \notin K \}$$

est appelée fonction de sortie.

Définition 1.7.

Soit $C \subset K$ une cible.

La fonction $\omega_{(K,C)} : \mathcal{C}(0, \infty; X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ qui associe à $x(\cdot)$ son temps d'atteinte $\omega_{(K,C)}(x(\cdot))$ défini par :

$$\omega_{(K,C)}(x(\cdot)) = \inf \{ t \in [0, \infty[; x(t) \in C \text{ et } \forall s \in [0; t], x(s) \in K \}$$

est appelée fonction d'atteinte.

Remarque. Par convention, $\inf \{\emptyset\} = +\infty$ et $\sup \{\emptyset\} = -\infty$.

Fonction de Sortie Maximale-Fonction d'Atteinte Minimale**Définition 1.8.**

On considère un système évolutionnaire $\mathcal{S} : X \longrightarrow \mathcal{C}(0, \infty; X)$.

Soit $C \subset K$ et K deux ensembles inclus dans X .

La fonction $\tau_K^\# : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\tau_K^\#(x) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{S}} \tau_K(x(\cdot))$$

est appelée fonction de sortie maximale.

La fonction $\omega_{(K,C)}^\flat : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\omega_{(K,C)}^\flat(x) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}} \omega_{(K,C)}(x(\cdot))$$

est appelée fonction d'atteinte minimale

Quelques Propriétés

On peut alors, grâce aux définitions précédentes, donner une caractérisation du noyau de viabilité et du bassin de capture :

Proposition 1.1.

$$Viab_{\mathcal{S}}(K) = \left\{ x \in K; \tau_K^\#(x) = +\infty \right\}$$

$$Capt_{\mathcal{S}}(K, C) = \left\{ x \in K; \omega_{(K,C)}^\flat(x) < +\infty \right\}$$

1.4 Relation entre Noyau de Viabilité et Temps de Sortie

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ y'(t) = -1 \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Theorème 1.2.

La fonction de temps de sortie maximale $\tau_K^\sharp(x)$ est en relation avec le noyau de viabilité par la formule suivante :

$$\tau_K^\sharp(x) = \sup_{(x,y) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})} y$$

La fonction d'atteinte minimale $\omega_{(K,C)}^\flat(x)$ est en relation avec le bassin de capture par la formule suivante :

$$\omega_{(K,C)}^\flat(x) = \inf_{(x,y) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)} y$$

Démonstration. • Montrons que

$$\tau_K^\sharp(x) = \sup_{(x,y) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})} y$$

Montrons dans un premier temps que :

$$\forall (x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\}) \quad \tau_K^\sharp(x) \geq T$$

Soit $(x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})$.

Alors, $\exists (x(\cdot), y(\cdot))$ solution de 1.1 tel que $x(0) = x$ et $y(0) = T$, viable dans $K \times \mathbb{R}_+$ définitivement ou avant d'atteindre la cible $K \times \{0\}$.

$y'(t) = -1$ et $y(0) = T$ donc $y(t) = T - t$.

Donc $\exists (x(\cdot), y(\cdot))$ solution de 1.1 tel que $x(0) = x$ et $y(0) = T$ tq :

$$\forall t \geq 0 \quad (x(t), T - t) \in K \times \mathbb{R}_+$$

ou

$$\exists t^* \geq 0 \text{ tq } \begin{cases} (x(t^*), T - t^*) \in K \times \{0\} \\ \forall t \in [0, t^*] \quad (x(t), T - t) \in K \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Or $T - t \geq 0$ si $t \leq T$ donc $x(t) \in K$ et $\forall t \in [0, T] \quad (x(t), T - t) \in K \times \mathbb{R}_+$.

Donc, $x(\cdot)$ est solution du système évolutionnaire viable dans K sur l'intervalle $[0, T]$. Donc,

$$\tau_K(x(\cdot)) \geq T$$

Or, $\forall x(\cdot)$ solution de 1.1 partant de x , $\tau_K^\sharp(x) \geq \tau_K(x(\cdot))$, donc :

$$\tau_K^\sharp(x) \geq T$$

Pour chaque $(x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})$, on peut trouver $x(\cdot)$ solution du système évolutionnaire tel que $x(0) = x$ et viable dans K sur $[0, T]$.

Donc, $\forall (x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})$, $\tau_K^\sharp(x) \geq T$. Donc :

$$\tau_K^\sharp(x) \geq \sup_{(x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})} T$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse par l'absurde :

Supposons que

$$\tau_K^\sharp(x) > \sup_{(x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})} T$$

$$\text{Comme } \tau_K^\sharp(x) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{S}} \tau_K(x(\cdot))$$

$$\exists x^*(\cdot) \text{ tel que } \tau_K(x^*(\cdot)) = T^* > \sup_{(x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})} T$$

Soit $u^*(\cdot)$ la rétroaction qui gouverne $x^*(\cdot)$. Si on applique cette rétroaction au système 1.1 partant de (x, T^*) , comme $x^*(\cdot)$ est viable dans K jusqu'à T^* , $(x, T^*) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})$, donc :

$$T^* \leq \sup_{(x, T) \in \text{Viab}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, K \times \{0\})} T$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale.

- Montrons que

$$\omega_{(K, C)}^b(x) = \inf_{(x, y) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)} y$$

Montrons dans un premier temps que :

$$\forall (x, T) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+) \quad \omega_{(K, C)}^b(x) \leq T$$

Soit $(x, T) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)$.

Alors $\exists (x(\cdot), y(\cdot))$ solution de 1.1 tel que $x(0) = x$ et $y(0) = T$, viable dans $K \times \mathbb{R}_+$ avant d'atteindre la cible $C \times \mathbb{R}_+$ à un temps fini.

$y'(t) = -1$ et $y(0) = T$ donc $y(t) = T - t$.

Donc $\exists (x(\cdot), y(\cdot))$ solution de 1.1 tel que $x(0) = x$ et $y(0) = T$ et

$$\exists t^* \geq 0 \text{ tq } \begin{cases} (x(t^*), T - t^*) \in C \times \mathbb{R}_+ \\ \forall t \in [0, t^*] \quad (x(t), T - t) \in K \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Or $T - t^* \geq 0$ si $t^* \leq T$.

Donc

$$\exists t^* \in [0, T] \text{ tq } \begin{cases} x(t^*) \in C \\ \forall t \in [0, t^*] \quad x(t) \in K \end{cases}$$

Donc $x(\cdot)$ est solution du système évolutionnaire tel que $x(0) = x$ et atteint la cible C avant T , donc

$$\omega_{(K, C)}(x(\cdot)) \leq T$$

Or pour toute solution $x(\cdot)$ de 1.1 partant de x , $\omega_{(K, C)}^b(x) \leq \omega_{(K, C)}(x(\cdot))$, donc

$$\omega_{(K, C)}^b(x) \leq T$$

Pour chaque $(x, T) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)$, on peut trouver $x(\cdot)$ solution du système évolutionnaire tel que $x(0) = x$ et atteignant la cible C avant T .

Donc $\forall (x, T) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+) \quad \omega_{(K, C)}^b(x) \leq T$ On a donc

$$\omega_{(K, C)}^b(x) \leq \inf_{(x, y) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)} y$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse par l'absurde :

Supposons que

$$\omega_{(K,C)}^b(x) < \inf_{(x,y) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)} y$$

$$\text{Or } \omega_{(K,C)}^b(x) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}} \omega_{(K,C)}(x(\cdot))$$

$$\text{Donc } \forall x(\cdot) \quad \omega_{(K,C)}(x(\cdot)) = R < \inf_{(x,y) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)} y$$

Alors, $\forall t \in [0, R]$ $x(t) \in K$ et $x(R) \in C$.

Soit $u(\cdot)$ la retroaction qui gouverne $x(\cdot)$. On l'applique au système 1.1 partant de (x, R) , on a : $(x, R) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)$.

$$\text{Donc } R \geq \inf_{(x,y) \in \text{Capt}_{(1.1)}(K \times \mathbb{R}_+, C \times \mathbb{R}_+)} y$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ.

□

Chapitre 2

Semi-perméabilité des Frontières du Noyau de Viabilité

Soit X un espace de dimension finie et K un sous-ensemble de X .
Soit $F : X \mapsto X$ une fonction.
On définit l'inclusion différentielle suivante :

$$\forall t \geq 0 \quad x'(t) \in F(x(t)) \quad (2.1)$$

On note $\mathcal{S}_F(x)$ l'ensemble des solutions $x(\cdot)$ de l'inclusion différentielle 2.1 partant de x .

2.1 Tube de Sortie

Pour la suite, nous avons besoin de définir l'ensemble des points de K viables sur l'intervalle $[0, T]$:

Définition 2.1.

Soit $T \geq 0$.

L'ensemble $Exit_F(K, T) = \left\{ x \in K; \quad \tau_K^\sharp(x) \geq T \right\}$ est appelé tube de sortie.

Propriétés.

$$Exit_F(K, 0) = K$$

$$\text{Si } T_1 \leq T_2, \text{ alors } Exit_F(K, T_2) \subset Exit_F(K, T_1).$$

Définition 2.2.

Soient X et Y deux espaces vectoriels de dimension finie.

On dit qu'une fonction $f : X \mapsto Y$ est Marchaud si :

- le graphe et le domaine de F sont non vides et fermés
- les images $F(x)$ sont convexes
- l'accroissement de F est linéaire, i.e. :

$$\exists c > 0 \forall x \in X \quad \|F(x)\| = \sup_{v \in F(x)} \|v\| \leq c(\|x\| + 1)$$

Remarque. Une fonction F est dite stricte si toutes ses images $F(x)$ sont non vides.

Remarque. Si $x \in \text{Exit}_F(K, T)$ alors $x(t) \in \text{Exit}_F(K, T - t)$
car si $x(0) = x$ viable sur $[0, T]$ alors $x(t)$ viable sur $[0, T - t]$

Définition 2.3.

Un sous-ensemble $K \subset X$ est dit (localement) invariant sous F si : il existe un $T \geq 0$ tel que pour tout état initial x_0 de K , toutes les solutions de l'inclusion différentielle 2.1 partant de x_0 sont viables dans K sur $[0, T]$.

Proposition 2.1.

Soient $F : X \mapsto X$ une fonction Marchaud stricte et $K \subset X$ un ensemble fermé.

Soient $0 < T_1 < T_2$ et $x \in \text{Exit}_F(K, T_1) \setminus \text{Exit}_F(K, T_2)$.

Alors toutes les solutions $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ viable dans K sur l'intervalle $[0, T_1]$ restent dans le complémentaire du tube de sortie :

$$\forall t \in [0, T_1] \quad x(t) \in \text{Exit}_F(K, T_1 - t) \setminus \text{Exit}_F(K, T_2 - t)$$

En particulier, $\forall x \in \text{Exit}_F(K, T) \setminus \text{Viab}(K)$, toutes les solutions $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ satisfont :

$$\forall t \in [0, T] \quad x(t) \in \text{Exit}_F(K, T - t) \setminus \text{Viab}(K)$$

Démonstration. On suppose que $x \in \text{Exit}_F(K, T_1) \setminus \text{Exit}_F(K, T_2)$ et que pour une solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ viable dans K sur $[0, T_1]$, $\exists \tau \in [0, T_1]$ tel que $x(\tau) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - \tau)$.

$$x(\tau) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - \tau) \text{ donc } \tau_K^\#(x(\tau)) \geq T_2 - \tau \text{ càd } \sup_{y(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x(\tau))} \tau_K(y(\cdot)) \geq T_2 - \tau$$

donc $\exists y(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x(\tau))$ tel que $\tau_K(y(\cdot)) \geq T_2 - \tau$ d'où $y(0) = x(\tau)$ viable sur $[0, T_2 - \tau]$

donc $y(s) = x(\tau + s)$ viable sur $[0, T_2 - \tau - s]$ d'après la remarque précédente.

donc $\exists y(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x(\tau))$ tel que $y(s) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - \tau - s)$

On définit ensuite la fonction suivante :

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, \tau] \\ y(t - \tau) & \text{si } t \in [\tau, T_2] \end{cases}$$

$\forall t \in [0, T_2] \quad \hat{x}(t) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - t)$.

En effet,

$x(\cdot)$ viable dans K sur $[0, T_1]$.
 De plus, $\exists \tau \in [0, T_1]$ tq $x(\tau) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - \tau)$
 Donc $x(\cdot)$ viable dans K sur $[0, T_2 - \tau]$
 Donc $\forall t \in [0, \tau]$ $x(t) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - t)$
 $y(s) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - \tau - s)$ donc, $y(t - \tau) \in \text{Exit}_F(K, T_2 - t)$

Donc $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ et $x \in \text{Exit}_F(K, T_1)$
 Contradiction car $x \in \text{Exit}_F(K, T_1) \setminus \text{Exit}_F(K, T_2)$
 Donc $\forall x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ viable dans K sur $[0, T_1]$
 $\forall t \in [0, T_1]$ $x(t) \in \text{Exit}_F(K, T_1 - t) \setminus \text{Exit}_F(K, T_2 - t)$ □

Proposition 2.2.

Soit $F : X \mapsto X$ une fonction Marchaud stricte et $K \subset X$ un ensemble fermé.

Si $\text{Exit}_F(K, T)$ est contenu dans l'intérieur de K , alors son complémentaire est invariant sous F .

En particulier, si le noyau de viabilité de K est contenu dans l'intérieur de K , alors le complémentaire $X \setminus \text{Viab}_F(K)$ est invariant sous F .

Démonstration. Supposons que la conclusion est fautive, c'est-à-dire que $X \setminus \text{Exit}_F(K, T)$ n'est pas invariant sous F , c'est-à-dire : pour tout état initial $x \in X \setminus \text{Exit}_F(K, T)$ $\exists x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x) \exists \tau \in [0, T]$ tels que $x(\tau) \in \text{Exit}_F(K, T)$.

On pose alors :

$$t^* = \sup \{t \in [0, \tau]; x(t) \notin \text{Exit}_F(K, T)\}$$

Comme $\text{Exit}_F(K, T)$ est ouvert, $x(t^*) \in \text{Exit}_F(K, T)$.

Par hypothèse, $\text{Exit}_F(K, T)$ est contenu dans l'intérieur de K et $x(\cdot)$ est continue, donc on peut trouver α et η tels que $x(t) \in B(x(t^*), \alpha) \subset \text{Int}(K) \forall t \in [t^* - \eta, t^*]$ et $\exists t_0 \in]t^* - \eta, t^*[$ $x(t_0) \notin \text{Exit}_F(K, T)$.

Comme $x(\tau) \in \text{Exit}_F(K, T) \exists y(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x(\tau))$ telle que $y(t) \in \text{Exit}_F(K, T - t)$.

On définit ensuite $z(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x(t_0))$ par :

$$z(t) = \begin{cases} x(t_0 - t) & \text{si } t \in [0, t_0 - \tau] \\ y(t) & \text{si } t \in [t_0 - \tau, T] \end{cases}$$

$\forall t \in [0, T]$ $z(t) \in K$

Donc $\forall t \in [0, T]$ $z(t) \in \text{Exit}_F(K, T - t)$

Donc $z(0) = x(t_0) \in \text{Exit}_F(K, T)$ d'où la contradiction.

Donc $X \setminus \text{Exit}_F(K, T)$ est invariant sous F □

2.2 Frontière du Noyau de Viabilité

Theorème 2.1.

Soit $F : X \rightrightarrows X$ une fonction Marchaud stricte et $K \subset X$ un ensemble fermé.

On suppose que la fonction solution \mathcal{S}_F est semie-continue inférieurement de K dans $\mathcal{C}(0, \infty; X)$ et que $\text{Exit}_F(K, T)$ est contenue dans l'intérieur de K .

Alors : si $x \in \partial(\text{Exit}_F(K, T))$, toute solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F$ viable dans K sur $[0, T]$ reste sur la frontière du tube de sortie :

$$\forall t \in [0, T] \quad x(t) \in \partial(\text{Exit}_F(K, T - t))$$

Démonstration. Comme $x \in \partial(\text{Exit}_F(K, T))$, il existe $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F$ solution viable dans K sur $[0, T]$. Donc $\forall t \in [0, T] \quad x(t) \in \text{Exit}_F(K, T - t)$.

On suppose qu'il existe une suite $x_n \in X \setminus \text{Exit}_F(K, T)$ qui converge vers x . $\text{Exit}_F(K, T)$ est contenu dans l'intérieur de K donc d'après la proposition 2.2, $\forall t \in [0, T] \quad \exists x_n(t) \in X \setminus \text{Exit}_F(K, T - t)$ solution de l'inclusion différentielle 2.1.

On a alors $x_n(t)$ converge vers $x(t)$ pour chaque $t \in [0, T]$.
Donc $x(t) \in X \setminus \text{Exit}_F(K, T - t) \forall t \in [0, T]$.

Donc $x(t) \in \partial(\text{Exit}_F(K, T - t))$. □

En prenant $T = +\infty$ dans le théorème précédent, on obtient le théorème de semi-perméabilité suivant :

Theorème 2.2.

Soit $F : X \rightrightarrows X$ une fonction Marchaud stricte et $K \subset X$ un ensemble fermé.

On suppose que la fonction solution \mathcal{S}_F est semie-continue inférieurement de K dans $\mathcal{C}(0, \infty; X)$ et que $\text{Viab}_F(K)$ est contenue dans l'intérieur de K .

Alors $\text{Viab}_F(K)$ est semiperméable, c'est-à-dire :

si $x \in \partial(\text{Viab}_F(K))$, toute solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ viable dans K reste sur la frontière du noyau de viabilité.

Chapitre 3

Modèle de Dynamique des Langages

3.1 Modèle d'Abrams Strogatz

On considère une population parlant deux langues différentes. On note :

- σ_A la densité de personnes parlant la langue A
- σ_B la densité de personnes parlant la langue B

L'évolution du nombre de personnes parlant A ou B est régie par le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A)\sigma_A(\sigma_A^{a-1}s - (1 - \sigma_A)^{a-1}(1 - s)) \\ \sigma_A \in K \end{cases}$$

s est un paramètre appartenant à $[0, 1]$. Il correspond au statut social, au prestige d'une langue, ou aux politiques engagées en sa faveur. On considère que si $s = 0$, le prestige de la langue A est nul et celui de la langue B est à son maximum, et inversement si $s = 1$.

a est une valeur qu'on prendra égale à 1,31.

K est un ensemble de contraintes tq $K \subset [0, 1]$.

Ce système admet 2 points fixes stables qui correspondent à l'extinction du langage A ou du langage B.

On cherche les états initiaux à partir desquels il existe une évolution qui permet de maintenir des personnes parlant A et d'autres parlant B.

On exclut donc les cas $\sigma_A = 0$ et $\sigma_A = 1$.

On pose donc : $K = [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ où $0 < \underline{\sigma} < \bar{\sigma} < 1$

De plus, on fait l'hypothèse que le paramètre s varie entre deux paramètres s^- et s^+ tels que $0 \leq s^- \leq s^+ \leq 1$. On pose : $\Sigma = [s^-, s^+]$.

On pose aussi :

$$\begin{aligned} f(\sigma, s) &= (1 - \sigma)\sigma(\sigma^{a-1}s - (1 - \sigma)^{a-1}(1 - s)) \\ F(\sigma) &= \{f(\sigma, s); s \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Afin de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que K soit viable, on cherche le cône tangent à l'ensemble K .

On a : $\forall \sigma \in \overset{\circ}{K} \quad T_K(\sigma) = \mathbb{R}$.

Il reste à trouver $T_K(\underline{\sigma})$ et $T_K(\bar{\sigma})$.

Démonstration. Montrons que $T_K(\underline{\sigma}) = \mathbb{R}_+$

$$T_K(\underline{\sigma}) \subset \mathbb{R}_+$$

Soit $x \in T_K(\underline{\sigma})$.

Alors, $\exists(\sigma_n)_n \in K$ tq $\sigma_n \rightarrow \underline{\sigma}$ et $\exists(h_n)_n \geq 0$ tq $h_n \rightarrow 0$ tq $\frac{1}{h_n}(\sigma_n - \underline{\sigma}) \rightarrow x$.

Or, $\sigma_n - \underline{\sigma} \geq 0 \quad \forall n$ et $\frac{1}{h_n} \geq 0$ donc $x \geq 0$.

$$T_K(\underline{\sigma}) \supset \mathbb{R}_+$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

On pose $\sigma_n = \underline{\sigma} + (\frac{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}{n}) \quad \forall n \geq 1$. On a bien $\sigma_n \in K \quad \forall n$ et $\sigma_n \rightarrow \underline{\sigma}$.

On pose ensuite $h_n = (\frac{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}{xn})$. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, $h_n \geq 0 \quad \forall n$ et $h_n \rightarrow 0$.

Et $\frac{1}{h_n}(\sigma_n - \underline{\sigma}) = x$ donc $x \in T_K(\underline{\sigma})$.

De la même façon, on montre que $T_K(\bar{\sigma}) = \mathbb{R}_-$. □

D'après le théorème 1.1, on obtient la condition suivante :

$$K \text{ est viable} \iff \begin{cases} \exists s \in \Sigma \text{ tq } f(\underline{\sigma}, s) \geq 0 \\ \exists s \in \Sigma \text{ tq } f(\bar{\sigma}, s) \leq 0 \end{cases}$$

$$K \text{ est viable} \iff \begin{cases} \exists s \in \Sigma \text{ tq } (\frac{\sigma}{1-\sigma})^{a-1} \geq \frac{1-s}{s} \\ \exists s \in \Sigma \text{ tq } (\frac{\sigma}{1-\bar{\sigma}})^{a-1} \leq \frac{1-s}{s} \end{cases}$$

La fonction $s \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1-s}{s} \in \mathbb{R}$ est décroissante, donc pour que la première inégalité soit vraie, il faut qu'elle le soit au moins pour $s = s^+$. De même, la deuxième inégalité doit être vérifiée au moins pour $s = s^-$. On a alors :

$$K \text{ est viable} \iff \begin{cases} \underline{\sigma} \geq 1 - \frac{1}{1 + (\frac{1-s^+}{s^+})^{a-1}} \\ \bar{\sigma} \leq 1 - \frac{1}{1 + (\frac{1-s^-}{s^-})^{a-1}} \end{cases}$$

Remarque. Si $s^- = 0$ et $s^+ = 1$, alors K est viable $\forall \underline{\sigma}$ et $\forall \bar{\sigma}$.

Dans cette partie, nous avons donc un modèle régi par une dynamique ($\sigma'_A = (1 - \sigma_A)\sigma_A(\sigma_A^{a-1}s - (1 - \sigma_A)^{a-1}(1 - s))$) et un ensemble de contraintes ($\sigma_A \in K$). Le paramètre de contrôle s n'est soumis qu'à une seule condition : appartenir à l'ensemble $[s^-, s^+]$. Il n'y a donc aucune exigence sur ses variations. Mais cela pose un problème. En effet, le prestige d'une langue évolue lentement, il ne peut pas passer brutalement d'un statut à un statut opposé en un temps très court. Pour cette raison, nous introduisons dans la partie suivante une dynamique sur le contrôle ($s'(t) = u$ avec u appartenant à un ensemble borné) qui permet de limiter les variations de s . On se retrouve donc avec un modèle en deux dimensions.

3.2 Modèle d'Abrams Strogatz en deux Dimensions

Dans cette partie, on considère le modèle d'Abrams-Strogatz en dimension 2.

On considère l'ensemble de contraintes $K = [\underline{\sigma}; \bar{\sigma}] \times [0, 1]$ où $\underline{\sigma} > 0$ et $\bar{\sigma} < 1$.

On a le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A)\sigma_A(\sigma_A^{a-1}s - (1 - \sigma_A)^{a-1}(1 - s)) \\ s' = u \text{ où } u \in [-0.1; 0.1] \end{cases}$$

On va chercher le noyau de viabilité de K pour ce système. Dans un premier temps, on cherche à connaître les courbes théoriques de frontière du noyau. Puis, on utilise l'algorithme d'approximation du noyau de viabilité à l'aide de support vector machine (Laetitia Chapel) pour trouver une approximation du noyau de viabilité que l'on pourra comparer aux courbes théoriques.

3.2.1 Calcul des Courbes Théoriques

On cherche la frontière théorique du noyau de viabilité. Pour cela, on cherche les coordonnées du point d'abscisse $\bar{\sigma}$ situé sur la frontière supérieure noté M et du point d'abscisse $\underline{\sigma}$ situé sur la frontière inférieure noté N . On pourra alors chercher les trajectoires permettant d'atteindre ce point.

Au point M , on sait que $\sigma'_A = 0$ et $s' = -0, 1$. En effet, si $\sigma'_A \neq 0$, alors le point M ne serait plus dans l'ensemble K au pas de temps suivant et donc M ne serait plus viable.

On a donc : $\exists s_1 \in [0, 1]$ tq $(1 - \bar{\sigma})\bar{\sigma}(\bar{\sigma}^{a-1}s - (1 - \bar{\sigma})^{a-1}(1 - s)) = 0$
Ce qui donne :

$$s_1 = \frac{(1 - \bar{\sigma})^{a-1}}{\bar{\sigma}^{a-1} + (1 - \bar{\sigma})^{a-1}}$$

Pour $\bar{\sigma} = 0, 8$ et $a = 1.31$, $s_1 \approx 0, 39$.

De la même façon, on cherche les coordonnées du point N . Au point N , $\sigma'_A = 0$ et $s' = 0, 1$. Donc, on a :

$$s_2 = \frac{(1 - \underline{\sigma})^{a-1}}{\underline{\sigma}^{a-1} + (1 - \underline{\sigma})^{a-1}}$$

Pour $\underline{\sigma} = 0, 2$ et $a = 1.31$, $s_2 \approx 0, 61$.

On obtient l'équation différentielle classique suivante :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A)\sigma_A(\sigma_A^{a-1}s - (1 - \sigma_A)^{a-1}(1 - s)) \\ s' = -0.1 \\ \exists T \text{ tel que } \sigma_A(T) = \bar{\sigma} \text{ et } s(T) = s_1 \end{cases}$$

La solution de ce système nous donnerait l'équation de la frontière supérieure du noyau de viabilité. Comme c'est trop compliqué à calculer, on se contentera de chercher une approximation plus tard grâce à la méthode d'Euler.

De la même façon, on cherchera une approximation de la courbe de la frontière inférieure du noyau en s'appuyant sur le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A)\sigma_A(\sigma_A^{a-1}s - (1 - \sigma_A)^{a-1}(1 - s)) \\ s' = 0.1 \\ \exists T \text{ tel que } \sigma_A(T) = \underline{\sigma} \text{ et } s(T) = s_2 \end{cases}$$

On obtient alors les courbes suivantes calculées par Sophie Martin :

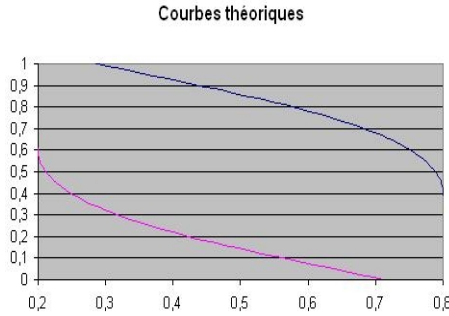


FIG. 3.1 – Courbes théoriques de la frontière du noyau de viabilité du modèle sans bilingues ; en abscisse σ_A , en ordonnée s

3.2.2 Approximation du Noyau de Viabilité

Dans cette partie, nous allons calculer le noyau de viabilité grâce à l'algorithme de Laetitia Chapel.

Principe de Fonctionnement de l'Algorithme

On considère un ensemble de contraintes K ainsi que le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases}$$

On définit une grille finie de points de pas h qui discrétise l'ensemble K . On appelle K_h l'ensemble des points de K définis par la grille.

Afin de calculer le noyau de viabilité de K pour le système dynamique précédent, on utilise une méthode de classification dite méthode des SVMs. Il s'agit de construire une fonction qui associe à chaque état $x_h \in K_h$ le label $+1$ ou -1 selon que le point $x_h + f(x_h(t), u(t))$ se trouve ou non dans le noyau au temps $t + dt$ suivant. On obtient ainsi un nouveau noyau à chaque étape constitué des points assignés du label $+1$. Au temps $t = 0$, tous les points sont marqués par $+1$. L'algorithme s'arrête quand tous les points du noyau gardent le même label à l'étape suivante. On peut montrer que l'algorithme termine en un nombre fini d'itérations.

On peut choisir une grille plus ou moins fine. L'approximation du noyau de viabilité sera plus précise pour un pas h petit, mais le temps de calcul sera plus long. On peut montrer que dans ce cas, l'algorithme converge vers le noyau de viabilité réel. Le contrôle $u(t)$ est soumis à certaines conditions : il doit être compris entre $-c$ et $+c$ avec $c > 0$ constante donnée.

Résultats

On introduit ici l'ensemble $K = [0.3, 0.7] \times [0, 1]$. L'intervalle $[0.3, 0.7]$ indique que l'on considère qu'il est nécessaire d'avoir au moins 30% de la population qui parle la langue A ou B pour que celle-ci ne s'éteigne pas. L'intervalle $[0, 1]$ correspond au prestige de la langue. On rappelle que si $s = 0$, cela signifie que le prestige de la langue A est nul et celui de la langue B maximal.

On choisit ensuite de borner le contrôle u par la constante $c = 0.1$. Cela permet de prendre en compte le fait que le prestige d'une langue ne peut pas varier brutalement, qu'il évolue lentement. On décide d'avancer d'un pas de temps $dt = 0.1$ à chaque étape. Et on prend une grille de *resolution* = $31 * 31$.

Pour ces paramètres, on obtient la figure 3.2 au premier pas de temps, puis les figures 3.3 et 3.4 aux pas suivants et enfin, on a la figure 3.5 à la fin de l'approximation.

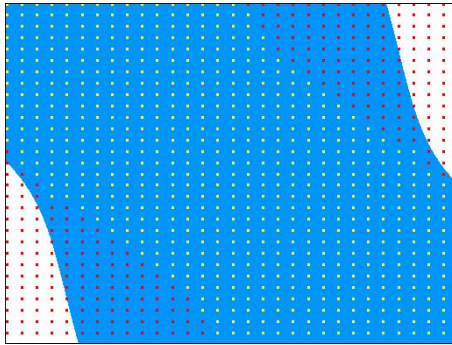


FIG. 3.2 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues; en abscisse σ_A , en ordonnée s

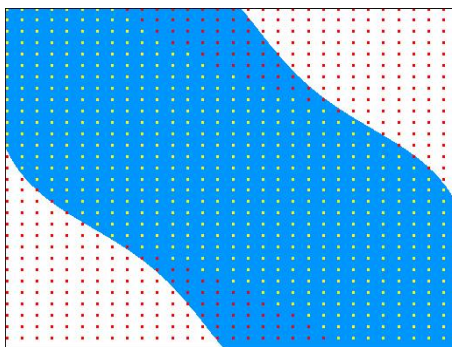


FIG. 3.3 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues; en abscisse σ_A , en ordonnée s

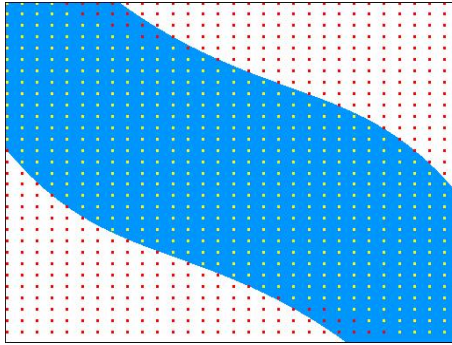


FIG. 3.4 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues; en abscisse σ_A , en ordonnée s

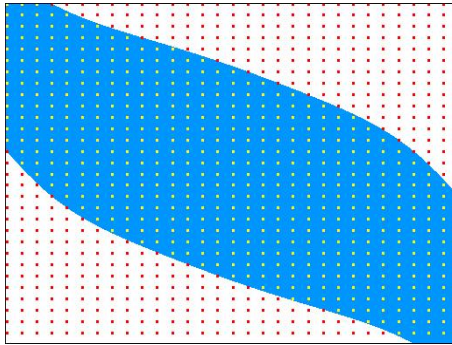


FIG. 3.5 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues; en abscisse σ_A , en ordonnée s

Ce résultat était prévisible. En effet, si une langue est très peu parlée (par exemple $\sigma_A = 0.3$) et qu'elle n'a aucun prestige ou qu'aucune politique n'est engagée en sa faveur ($s = 0$), il est naturel que la langue ne progresse pas, voire même qu'elle disparaisse. Quand les deux langues sont autant parlées l'une que l'autre, elles vont coexister à condition que l'on ne favorise pas l'une au dépend de l'autre. On constate par ailleurs que ce résultat est conforme à ce que l'on avait prévu par le calcul des courbes théoriques dans la partie 3.2.1.

On constate que si l'on choisit une résolution de la grille plus grossière (11 * 11 par exemple), la précision est moindre (cf 3.6).

On peut afficher les trajectoires suivies par chaque point comme dans la figure 3.7.

Si on choisit une constante plus grande ($c = 0.5$) pour borner le contrôle, le noyau est plus gros (cf 3.8). En effet, cela revient à autoriser le prestige d'une langue à évoluer rapidement.

Et si on prend un pas de temps plus petit ($dt = 0.02$), l'approximation du noyau devient là aussi un peu moins précise (cf 3.9).

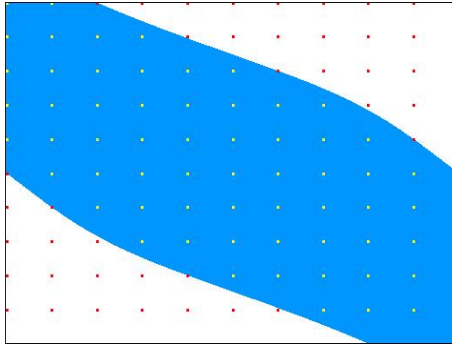


FIG. 3.6 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues avec une résolution $= 11 * 11$; en abscisse σ_A , en ordonnée s

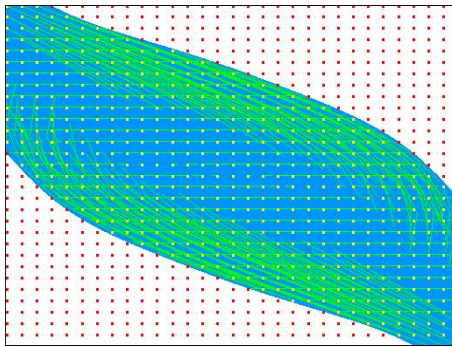


FIG. 3.7 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues avec une résolution $= 11 * 11$; en abscisse σ_A , en ordonnée s

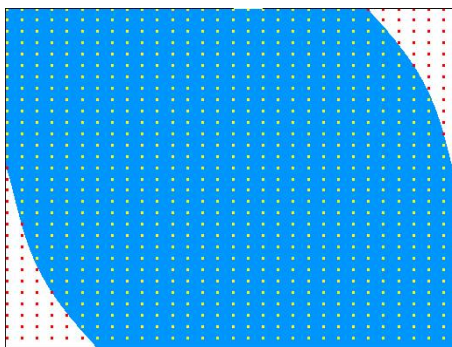


FIG. 3.8 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues avec un contrôle borné par une constante $c = 0.5$; en abscisse σ_A , en ordonnée s

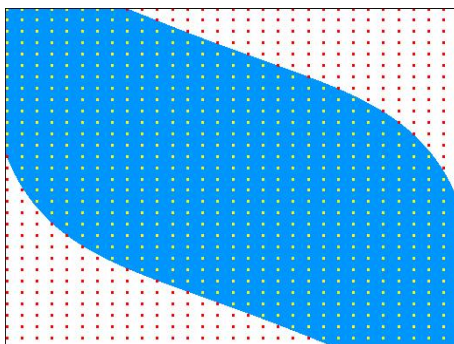


FIG. 3.9 – Noyau de Viabilité du modèle sans Bilingues avec un pas de temps $dt = 0.02$; en abscisse σ_A , en ordonnée s

3.3 Modèle Bilingue de Minett-Wang

Dans ce cas, on considère une population composée de personnes :

- parlant la langue A (densité σ_A)
- parlant la langue B (densité σ_B)
- parlant les deux langues A et B (densité σ_{AB})

Les interactions entre ces différents groupes de population sont gouvernées par le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s - \sigma_A \sigma_B^a (1 - s) \\ \sigma'_B = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a (1 - s) - \sigma_B \sigma_A^a s \\ (\sigma_A, \sigma_B) \in K \end{cases}$$

s est un paramètre appartenant à $[0, 1]$. Il correspond au prestige de la langue A par rapport à la langue B. Donc si $s = 1$, le prestige de la langue A est à son maximum et celui de la langue B à son minimum.

a est une valeur qu'on prendra égale à 1,31.

K est un ensemble de contraintes tel que $K \subset \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \text{ tels que } x + y \leq 1\}$.

On cherche les états initiaux à partir desquels il existe une évolution qui permet de maintenir des personnes parlant A et d'autres parlant B.

On exclut donc les cas $\sigma_A = 0$, $\sigma_A = 1$ et $\sigma_B = 0$, $\sigma_B = 1$.

Dans ce cas, il est trop compliqué de calculer les courbes théoriques de frontière du noyau de viabilité. Donc, on se contente de l'approximation donnée par l'algorithme. Pour cela, on associe au modèle de Minett-Wang, le système en 3 dimensions suivant :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s - \sigma_A \sigma_B^a (1 - s) \\ \sigma'_B = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a (1 - s) - \sigma_B \sigma_A^a s \\ s = u \end{cases}$$

La première équation correspond à la dynamique sur σ_A , la deuxième à celle de σ_B , et la dernière, à celle du contrôle s . Comme dans la partie 3.2, la dernière équation permet de s'assurer que le prestige d'une langue évolue de manière progressive.

On introduit l'ensemble :

$$K = \{(x, y, z) \in [0.3, 0.7] \times [0.3, 0.7] \times [0, 1] \text{ tels que } x + y \leq 1\}$$

c'est-à-dire que l'on considère qu'il est nécessaire d'avoir au moins 30% de personnes parlant la langue A et 30% parlant la langue B pour que les deux puissent co-exister.

On borne le contrôle u par 0.1 afin de limiter l'évolution du prestige de la langue à chaque pas de temps $dt = 0.1$. Afin d'obtenir une bonne précision dans l'affichage des résultats sans trop allonger les temps de calcul, on choisit une grille de $resolution = 11 * 11$. On obtient alors les images suivantes 3.10 et 3.11. La figure 3.10 permet de bien voir la forme de l'ensemble de contraintes K qui est un prisme triangulaire. Sur la figure 3.11, on distingue la forme du noyau de viabilité (en bleu).

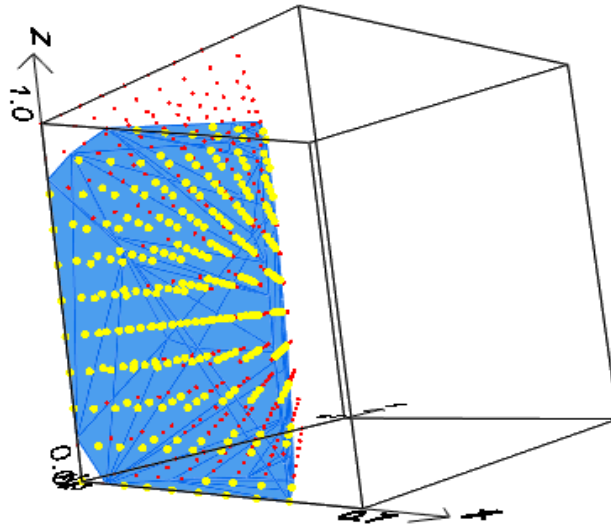


FIG. 3.10 – Noyau de Viabilité du Modèle Bilingue

Pour que le résultat soit plus lisible, on effectue des coupes. A $z = 0$, c'est-à-dire quand le prestige de la langue B est à son maximum, on constate qu'il est nécessaire qu'il y ait beaucoup de personnes parlant A pour que les deux langues survivent. A l'inverse, pour $z = 1$, c'est-à-dire quand le prestige de la langue A est à son maximum, les deux langues ne peuvent coexister que si un grand nombre de personnes parle B. Enfin, si on s'intéresse au cas où on favorise autant la langue A que la langue B ($z = 0.5$), il est alors nécessaire que les proportions de A et de B soient proches pour assurer leur survie.

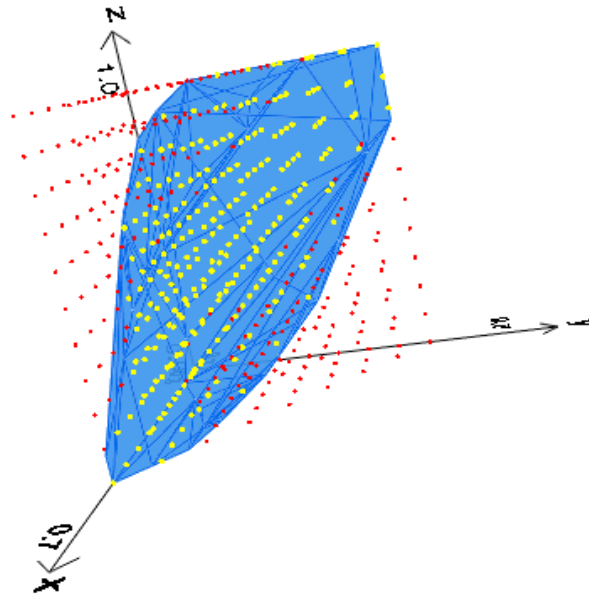


FIG. 3.11 – Noyau de Viabilité du Modèle Bilingue

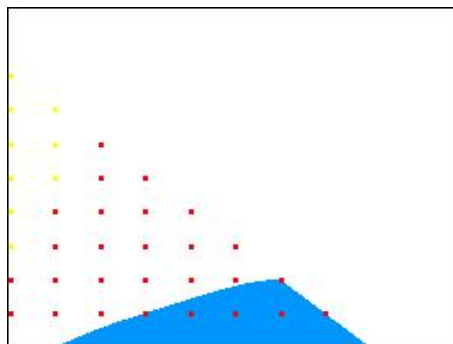


FIG. 3.12 – Coupe à $z = 0.0$; en abscisse σ_A , en ordonnée σ_B

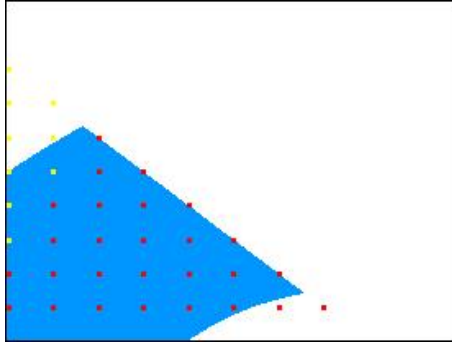


FIG. 3.13 – Coupe à $z = 0.5$; en abscisse σ_A , en ordonnée σ_B

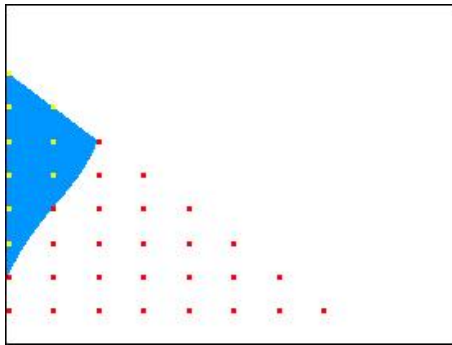


FIG. 3.14 – Coupe à $z = 1.0$; en abscisse σ_A , en ordonnée σ_B

3.4 Calcul de la Résilience pour le Modèle d'Abrams Strogatz

Dans cette partie, nous allons étudier la résilience du modèle d'Abrams Strogatz, c'est à dire que nous allons nous intéresser au coût engendré par une évolution qui sortirait de l'ensemble de contraintes avant de l'atteindre définitivement.

Pour cela, on définit l'ensemble $H = [0; 1] \times [0; 1]$ qui contient l'ensemble K de la partie 3.2 ($K = [0.3, 0.7] \times [0, 1]$). On considère les états initiaux de K et on étudie les évolutions partant de ces états qui vont atteindre K en temps fini éventuellement en passant par l'ensemble H . Dès qu'une évolution sort de l'ensemble K , on lui attribue un coût à chaque pas de temps. Ainsi, si elle sort définitivement de K son coût sera infini, et tous les points du noyau de viabilité ont un coût nul puisque l'on sait qu'ils restent définitivement dans K .

On utilise l'algorithme de Laëticia Chapel afin de représenter ces coûts.

On reprend le même modèle que dans la partie 3.2 et on ajoute une dimension correspondant au coût. On a donc un modèle en trois dimensions gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A)\sigma_A(\sigma_A^{a-1}s - (1 - \sigma_A)^{a-1}(1 - s)) \\ s' = u \text{ où } u \in [-0.1; 0.1] \\ c' = \begin{cases} 0 & \text{si on est dans } K \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On obtient alors le résultat de la figure 3.4. Il représente une coupe à $z = 0$. Le petit cadre noir représente l'ensemble de contraintes précédant K . On retrouve le noyau de viabilité de la partie 3.2. En effet, il n'y a que les éléments du noyau de viabilité qui ont un coût nul.

On trace ensuite des lignes de niveaux correspondant au « nouveau noyau de viabilité » quand on autorise un coût plus élevé. Dans la figure 3.4, on a représenté 4 courbes de niveaux. La première (la plus proche du noyau) nous donne tous les états initiaux qui permettent d'atteindre l'ensemble de contraintes K quand on autorise un coût de 1. La dernière (la plus éloignée du noyau) est le « nouveau noyau de viabilité » pour un coût autorisé de 4. La figure 3.4 montre que si on prend un état initial qui n'est pas dans K mais qui est à l'intérieur des courbes de niveaux, il existe une évolution qui part de ce point et qui va atteindre K en passant pendant un temps fini en dehors de l'ensemble K . Le coût « mesure » le temps passé en dehors de K .

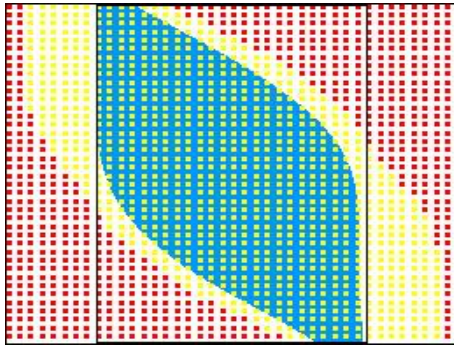


FIG. 3.15 – calcul de la résilience ; en abscisse σ_A , en ordonnée s

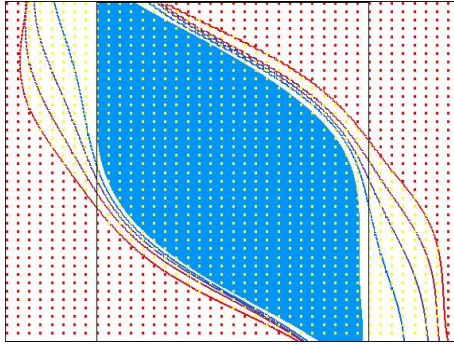


FIG. 3.16 – calcul de la résilience avec courbes de niveaux ; en abscisse σ_A , en ordonnée s

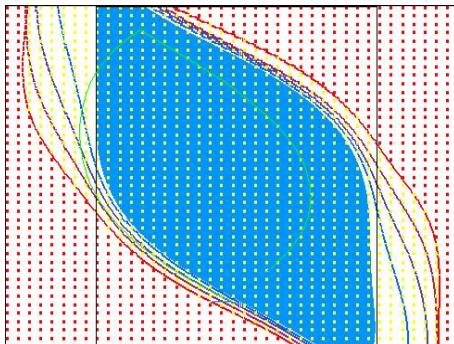


FIG. 3.17 – calcul de la résilience avec une trajectoire ; en abscisse σ_A , en ordonnée s

Bibliographie

- [1] AUBIN J-P. *Viability Theory*, Birkhäuser, 1991.
- [2] AUBIN J-P., BERNADO T., SAINT-PIERRE P., *A Viability Approach to Global Climate Change Issues*, 2004.
- [3] AUBIN J-P., SAINT-PIERRE P., *An Introduction to Viability Theory and Management of Renewable Ressources*, 2004.
- [4] AUBIN J-P., *Viability Kernels and Capture Basins of Sets under Differential Inclusions*, 2001.
- [5] AUBIN J-P., FRANKOWSKA H., SAINT-PIERRE P., *Viability : Models, Algorithm and Applications in Finance and Environmental-Economics*, 2007.
- [6] DEFFUANT G., MARTIN S., CHAPEL L., *Utiliser des « support vector machine » pour apprendre un noyau de viabilité*, 2005.
- [7] MARTIN S., *The Cost of Restoration as a Way of Defining Resilience : a Viability Approach Applied to a Model of Lake Eutrophication*, 2004.