



Incertitudes dans les études ACB-DE : guide méthodologique

F. Grelot, Jean-Stéphane Bailly, Nathalie Saint Geours, T. Länger

► To cite this version:

F. Grelot, Jean-Stéphane Bailly, Nathalie Saint Geours, T. Länger. Incertitudes dans les études ACB-DE : guide méthodologique. irstea. 2013, pp.51. hal-02609404

HAL Id: hal-02609404

<https://hal.inrae.fr/hal-02609404>

Submitted on 16 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Incertitudes dans les études ACB-DE

Guide Méthodologique

Frédéric Grelot¹
Jean-Stéphane Bailly³
Nathalie Saint-Geours²
Thibaut Langer¹

Version définitive du 16 avril 2013

N° Presage: 38648

¹ IRSTEA, UMR G-EAU
² IRSTEA, UMR TETIS
³ AgroParisTech, UMR TETIS



Table des matières

Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Spécification du modèle ACB-DE	5
1.1 Niveau 1 : Comparaison des coûts et bénéfices	7
1.2 Niveau 2 : Calcul des dommages évités moyens annualisés	8
1.3 Niveau 3 : Calcul des dommages et poids des scénarios	9
1.4 Illustration sur un cas simplifié	11
2 Sources d'incertitudes	15
2.1 Définitions	15
2.2 Typologie des sources d'incertitudes dans la démarche ACB-DE	15
2.3 Quantification et modélisation des sources d'incertitudes	17
2.4 Illustration sur un cas simplifié	19
3 Propagation des incertitudes	21
3.1 Constitution d'un plan d'expérience	21
3.2 Évaluations multiples du modèle	23
3.3 Incertitude résultante sur les sorties du modèle	23
3.4 Illustration sur un cas simplifié	24

4	Analyse de sensibilité	27
4.1	Analyse de sensibilité : principe	27
4.2	Indices de sensibilité	28
4.3	Illustration sur un cas simplifié	29
	Conclusion	30
	Glossaire	31
	Bibliographie	37
	Annexes	39

Table des figures

1	Les étapes d'une analyse d'incertitude et de sensibilité.	3
1.1	Décomposition en trois niveaux des modèles ACB-DE	6
1.2	Illustration d'une situation simplifiée	11
2.1	Distributions types d'incertitudes : uniforme, triangulaire, Gaussienne.	18
3.1	Un plan d'expérience OAT pour 3 entrées du modèle ACB-DE	22
3.2	Un plan d'expérience de Monte-Carlo de taille $L = 7$ pour 3 entrées du modèle ACB-DE	22
3.3	Évaluations du modèle ACB-DE en chaque point du plan d'expérience	23
3.4	Variations de la VAN par lorsque T , DE et CE varient	26
4.1	Effet isolé de la variabilité de p , DE puis CE sur la dispersion de la VAN (histogrammes)	28
4.2	Indices de sensibilité de premier ordre de la VAN aux incertitudes de DE , p et CE ; indices calculés avec l'outil SENSAS, avec intervalles de confiance à 95%	29
A.1	Création des deux échantillons A et B	41
A.2	Création de l'échantillon $A_B^{(i)}$	42

Liste des tableaux

2.1	Typologies des incertitudes usuelles dans une démarche ACB-DE	16
2.2	Exemple de matrice de confusion	19
3.1	Valeurs minimales et maximales des entrées incertaines du modèle	24

Introduction

Les partenaires du volet Inondations du Plan Rhône ont récemment proposé une méthodologie pour mener à bien une analyse coût-bénéfice (ACB) des projets de prévention des inondations. Cette analyse est demandée aux maîtres d'ouvrage qui sollicitent des subventions auprès des partenaires du Plan Rhône. En France, le ministère en charge de l'Environnement poursuit la même démarche : proposition d'une méthodologie pour mener une ACB et demande qu'une telle analyse soit effectuée préalablement à une sollicitation de subventions. À l'instar de ce qui se fait le plus souvent dans le domaine de la gestion des inondations, les méthodologies proposées par ces deux institutions reposent sur la méthode dite des « *dommages évités* » (on parlera donc d'ACB-DE).

Comme l'a rappelé le guide d'accompagnement édité par les partenaires du Plan Rhône (Ledoux 2010), la démarche ACB-DE permet de produire des indicateurs de l'efficacité des projets de prévention des inondations étudiés. Elle permet également de produire des indicateurs de diagnostic de l'exposition d'un territoire aux inondations. Cette production d'indicateurs est le fruit d'un travail de modélisation poussé, qui combine des expertises de nombreux domaines (hydrologie, hydraulique, économie...) et qui nécessite des données de différentes natures. Ces données, voire même les façons de les combiner, sont sujettes à incertitude. Le guide d'accompagnement rappelle donc la nécessité de procéder à une analyse de sensibilité pour mesurer l'importance de ces incertitudes sur les indicateurs produits. Il ne propose toutefois pas de démarche pour la mener à bien : le présent manuel vise à combler cette lacune.

En règle générale, bien que l'étape dite d'« *analyse de sensibilité* » soit vivement recommandée lors de tout exercice de modélisation, et plus particulièrement dans le cadre de l'ACB-DE, cette étape est très rarement effectuée. Une des raisons avancées est la trop grande technicité de la démarche à mettre en place. L'objectif de ce guide est de répondre à ce besoin en présentant de façon pédagogique une démarche d'analyse de sensibilité, appropriée aux analyses ACB-DE, répondant aux règles de l'art en vigueur dans la communauté scientifique. Bien qu'elles puissent différer dans leur mise en œuvre, les différentes méthodes pour mener à bien une ACB-DE partagent beaucoup de caractéristiques communes : ce manuel vise donc à présenter la démarche d'analyse de sensibilité de telle façon qu'elle puisse aisément être adaptée aux différentes manières de réaliser une ACB-DE. Dans un but pédagogique, nous nous appuyons toutefois plus particulièrement sur la méthode d'ACB-DE proposée dans le cadre du guide d'accompagnement du Plan Rhône.

Principes des analyses d'incertitude et de sensibilité

La démarche ACB-DE peut être vue comme un modèle, qui permet d'estimer une grandeur économique (sortie du modèle : Valeur Actuelle Nette d'un projet, Dommages Évités Moyens Annualisés...), à partir de différentes données (entrées du modèle : scénarii de crues, inventaire des enjeux...) et suivant un ensemble de traitements et de fonctions qui transforment ces données (la structure du modèle : traitements sous SIG, tableur...). Cette démarche de modélisation est inévitablement soumise à des « incertitudes », qui peuvent désigner à la fois :

- les erreurs ou imprécisions sur les données d'entrée ;
- un ensemble de choix possibles des fonctions qui composent la « structure » du modèle ;

Bien que le modèle ACB-DE soit déterministe, c'est-à-dire qu'à partir des mêmes entrées du modèle on obtient toujours la même sortie, la prise en compte des incertitudes font que différents résultats sont des réponses acceptables à la même question analysée. La sortie du modèle est donc également incertaine. Face à l'incertitude sur des données, une première stratégie est de choisir une position moyenne, position qui risque d'être le moins loin de la « vérité », inconnue : nous appellerons ici cette position moyenne la « valeur nominale ». Usuellement, les analyses ACB-DE ne sont réalisées que pour ces valeurs nominales, parfois même sans aucune considération sur le choix de ces valeurs eu égard aux incertitudes.

Pour maîtriser l'importance des incertitudes qui pèsent sur les sorties du modèle ACB-DE, il est nécessaire de compléter l'estimation aux valeurs nominales par une exploration de ce qui se passe « autour », dans l'espace des valeurs possibles pour les entrées du modèle. Étudier les incertitudes provenant des imprécisions sur les entrées du modèle ACB-DE, voir comment elles se combinent, se somment ou s'annulent, permet de comprendre et de mesurer leurs conséquences sur la précision des sorties et donc leur fiabilité. Cela permet donc d'accorder un degré de confiance aux sorties de l'ACB-DE, ce qui contribue à consolider ou relativiser leur exploitation. Cette démarche s'appelle l'« analyse d'incertitude ». Elle permet typiquement de proposer des éléments synthétiques tels que valeur moyenne des sorties (qui peut être différente de la valeur nominale), leur écart-type, un intervalle de confiance des résultats, ou la probabilité qu'une sortie dépasse un seuil jugé critique.

Une fois connue l'imprécision des sorties du modèle ACB-DE, surtout si elle est jugée trop importante, il est utile d'analyser quels sont les entrées qui y contribuent le plus. Cette démarche éclaire également la décision, en identifiant les entrées critiques, celles dont la variation conditionne la valeur prise par les sorties, et sur lesquelles il faut porter toute l'attention. Cette démarche permet d'orienter les efforts à réaliser pour une meilleure connaissance, en pointant les entrées dont il faut améliorer la précision afin d'atteindre une robustesse suffisante sur les indicateurs fournis en sortie du modèle ACB-DE. Elle permet également d'éviter des efforts de « sur-précision », inutiles parce qu'ils ne peuvent de toute façon qu'apporter qu'un gain très limité. Cette démarche s'appelle l'« analyse de sensibilité ». Elle permet de hiérarchiser les entrées du modèle ACB-DE, depuis les entrées dont l'incertitude n'a aucune importance jusqu'à ceux dont l'incertitude est très importante, voire prépondérante.

Structure du guide d'accompagnement

Les démarches d'analyse d'incertitude et d'analyse de sensibilité sont complémentaires, et nous avons choisi dans ce manuel de les combiner. Une démarche classique consiste à se placer dans un cadre probabiliste, c'est-à-dire de considérer les entrées et sorties du modèle ACB-DE comme des variables aléatoires : c'est la démarche qui est développée dans ce guide. Concernant l'analyse de sensibilité, nous avons choisi de présenter la méthode dite « *de Sobol* ». Cette méthode permet l'estimation d'indices de sensibilité des différentes entrées du modèle ACB-DE, indices qui permettent de hiérarchiser aisément les entrées du modèle selon leur importance. La démarche générale s'articule en quatre étapes (Fig.Figure 1), qui sont chacune détaillées dans un chapitre :

1. spécification du modèle ACB-DE, de ses entrées, de ses sorties (Chapitre Chapitre 1) ;
2. description des sources d'incertitude présentes dans le modèle ACB-DE (Chapitre Chapitre 2) ;
3. propagation des incertitudes à travers le modèle ACB-DE (Chapitre Chapitre 3) ;
4. estimation des indices de sensibilité de chaque source d'incertitude (Chapitre Chapitre 4).

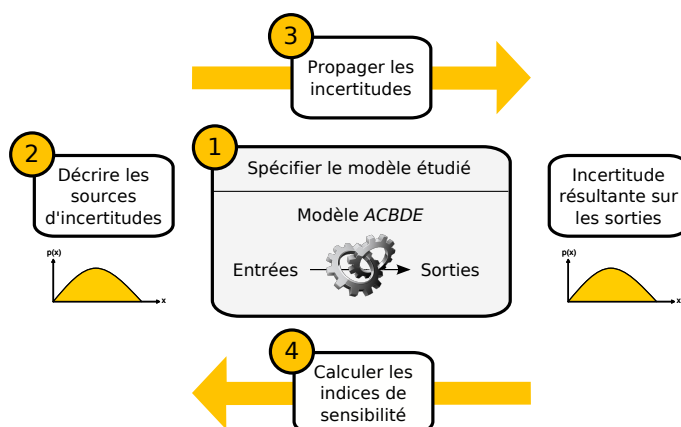


FIGURE 1 – Les étapes d'une analyse d'incertitude et de sensibilité.

Chapitre 1

Spécification du modèle ACB-DE

L'objectif de ce chapitre est de préciser la première étape d'une analyse d'incertitude-sensibilité appliquée aux études ACB-DE : c'est l'étape dite de spécification du modèle. Cette première étape consiste à spécifier le modèle utilisé, c'est-à-dire décrire ses entrées, ses sorties, sa structure, et de manière plus générale chacune des hypothèses qui peuvent être sujettes à incertitude. Dans la suite de ce document, nous entendons par « *modèle* » une manière de combiner et traiter des données (les entrées) pour obtenir les sorties désirées. Par exemple, un modèle dans le cadre de l'ACB-DE peut prendre la forme d'une chaîne de traitements permettant de croiser sous un logiciel de SIG les résultats d'un modèle hydraulique avec des données caractérisant l'occupation du sol, complétée par une nouvelle chaîne de traitements sous un logiciel de type tableur permettant de calculer les dommages supportés par les enjeux inondés, de les sommer sur la zone et de les intégrer dans le calcul économique.

À ce stade, deux remarques préliminaires doivent être faites.

Premièrement, le terme ACB-DE est un terme désignant les analyses coûts-bénéfices basées sur la méthode dite des dommages évités. Bien que cette dénomination désigne une méthode aux contours définis dans le champ de l'évaluation économique, elle n'implique pas forcément, dans les détails, une façon de procéder suffisamment restreinte pour qu'un modèle puisse être spécifié et convenir à toutes les utilisations envisageables de la méthode.

Secondement, en entrant dans les détails, appliquer la méthode ACB-DE implique de combiner des modèles, par exemple hydrologiques, hydrauliques, géomatiques, économiques. Il peut y avoir une assez grande latitude dans le choix de chacun de ces modèles, il peut également y avoir une certaine latitude dans la façon de les combiner pour calculer les indicateurs économiques attendus dans une ACB-DE. Pour une application donnée de la méthode ACB-DE, la spécification du modèle au sens de ce chapitre revient à décrire l'ensemble des sous-modèles utilisés ainsi que la façon de les combiner. Dans la suite, bien que cela soit un abus de langage nous parlerons du « *modèle ACB-DE* » pour désigner un modèle particulier utilisé pour mettre en œuvre la démarche ACB-DE dans un contexte donné.

Les modèles ACB-DE partagent toutefois suffisamment de caractéristiques communes pour que des enseignements généraux puissent être donnés : ils ont notamment des entrées communes, et des sorties identiques. Le choix suivi dans ce chapitre est donc de présenter les modèles ACB-DE d'un point de vue général, en évitant autant que possible de nous appuyer sur une mise en œuvre particulière. Pour ce faire, nous avons choisi de présenter les modèles ACB-DE en trois niveaux (Fig. Figure 1.1) :

Niveau 1 La comparaison des coûts et des bénéfices actualisés d'un projet.

Niveau 2 Le calcul des bénéfices d'un projet : les dommages évités annualisés.

Niveau 3 Le calcul des dommages pour différents scénarios d'inondation et la détermination du poids de ces scénarios.

Ces niveaux ne sont pas forcément explicités dans toutes les mise en œuvre d'analyse ACB-DE. Ils permettent néanmoins de structurer notre discours. En effet, chacun des niveaux correspond à des indicateurs classiquement attendus en sortie de la démarche ACB-DE. Certaines sorties intermédiaires (c'est-à-dire issues des niveaux 2 et 3) peuvent d'ailleurs présenter un intérêt en soi, et donc être intégrées dans la démarche d'analyse d'incertitude-sensibilité. Par ailleurs, la mise en œuvre de la démarche ACB-DE est d'autant plus spécifique à chacun des contextes ou cas d'étude rencontrés que le niveau est élevé. Ainsi, il nous est possible d'avoir une présentation complète du niveau 1, alors que pour le niveau 3, notre discours nécessitera d'être adapté à chaque mise en œuvre particulière de la démarche ACB-DE. Dans ce chapitre, à titre d'exemple, nous fournissons la traduction des considérations générales appliquées à la mise en œuvre particulière proposée par le Plan Rhône (Ledoux 2010). Nous tenons à préciser que l'objectif de ce chapitre n'est pas d'expliquer les principes d'une ACB, ni même d'une ACB-DE. Le lecteur intéressé par ces explications est prié de se reporter à d'autres ouvrages (Hubert and Ledoux 1999; Ledoux et al. 2003; Erdlenbruch et al. 2008).

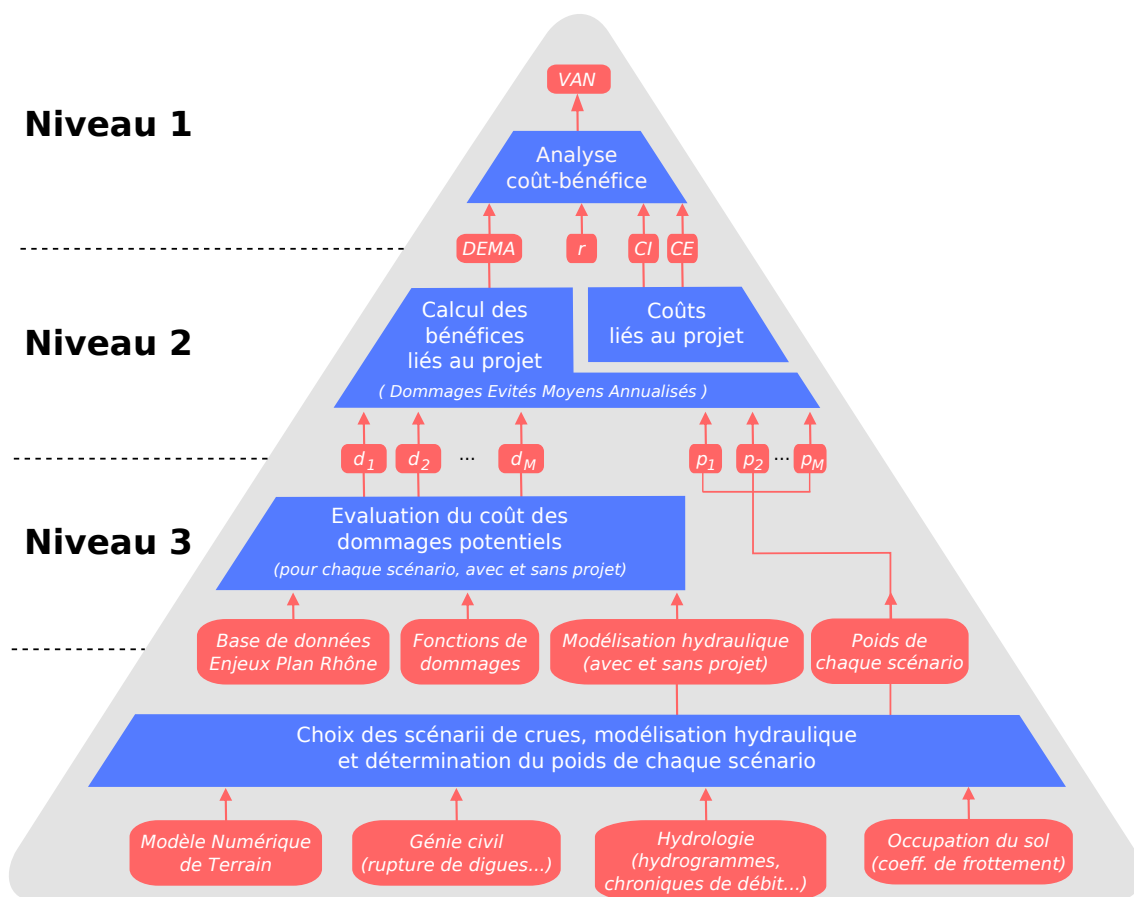


FIGURE 1.1 – Décomposition en trois niveaux des modèles ACB-DE

1.1 Niveau 1 : Comparaison des coûts et bénéfices

❖ Cas général

Comme toute méthode basée sur une analyse coût-bénéfice, une ACB-DE vise à estimer un indicateur de l'efficacité de la politique évaluée par la comparaison des bénéfices (avantages monétarisés) et coûts (inconvenients monétarisés) de cette politique. Les bénéfices et les coûts sont dans le cas général des grandeurs observées sur un certain horizon temporel N . Pour parvenir à un indicateur synthétique, il est d'usage d'actualiser les coûts et bénéfices. L'indicateur actualisé est la principale sortie de l'ACB-DE. En théorie comme en pratique, il est possible de rencontrer différentes spécifications de cet indicateur, à savoir : la valeur actuelle nette (VAN), le ratio de Hicks (R) et l'horizon temporel N_0 à partir duquel la VAN est positive. Les formules suivantes donnent l'expression générale de ces différentes grandeurs :

$$VAN(N) = \sum_{i=0}^N \alpha_i (B_i - C_i) \quad R = \frac{\sum_{i=0}^N \alpha_i B_i}{\sum_{i=0}^N \alpha_i C_i} \quad N_0 = \min\{N \mid VAN(N) \geq 0\}$$

où :

- B_i désigne les bénéfices attendus de la politique au pas de temps i ;
- C_i désigne les coûts attendus de la politique au pas de temps i ;
- α_i est le poids dû à l'actualisation au pas de temps i ;
- N est l'horizon temporel sur lequel est évaluée la politique ;
- $VAN(N)$ est la VAN calculée à l'horizon temporel N .

Ces formules sont valables pour toute ACB.

Pour les ACB-DE, les bénéfices de la politique peuvent être décomposés en $DE_i + b_i$, où DE_i désigne les dommages évités au pas de temps i , (considérés comme une valeur algébrique et donc positive si des dommages sont évités, négative si des dommages sont ajoutés) et b_i désigne les autres bénéfices liés au projet (par exemple la valeur récréative d'un plan d'eau formé par une retenue).

Par ailleurs, les coûts de la politique peuvent être décomposés en $CI_i + CE_i + c_i$, où CI_i désigne les coûts d'investissements (coûts d'études et de travaux, la plupart du temps affectés au seul pas de temps 0), CE_i désigne les coûts d'entretien (la plupart du temps pris comme constants) et c_i désigne les autres coûts liés à la mise en place de la politique, par exemple les inconvenients paysagers liés à la construction d'un ouvrage, ou bien les coûts d'indemnisation des conséquences de la potentielle surinondation de certaines zones. Ces coûts additionnels c_i sont rarement pris en compte.

Enfin, le facteur d'actualisation α_i pour l'année i est directement dépendant du taux d'actualisation, selon la formule suivante valable dans le cas général :

$$\alpha_i = \prod_{j=0}^i \frac{1}{1 + r_j}$$

où r_j est la taux d'actualisation au pas de temps j . Par convention, les valeurs suivantes du taux d'actualisation r_j sont utilisées : $r_0 = 0$, $r_j = 2\%$ jusqu'à 10 ans ($i = 1$ à 10), puis $r_j = 3\%$ pour $i > 10$.

Outre les grandeurs donnant les flux des bénéfices et des coûts liés au projet, deux autres entrées sont donc utilisées au niveau 1 du modèle ACB-DE : l'horizon temporel N du projet et le taux d'actualisation r^a . L'une comme l'autre de ces entrées sont avant tout affaire de convention. Il est d'usage de ne pas les laisser libre de choix par le maître d'œuvre de l'ACB-DE, ce qui n'interdit pas de les considérer comme des entrées incertaines du modèle. Dans ce cas, leurs incertitudes doivent également être affaire de convention.

✦ Mise en œuvre proposée par le Plan Rhône

Dans la mise en œuvre proposée par le Plan Rhône (Ledoux 2010), les hypothèses suivantes, très courantes, sont utilisées. Seuls les dommages évités DE_i sont pris en compte pour mesurer les bénéfices apportés par la politique au pas de temps i ; ces dommages évités sont considérés comme nuls au pas de temps 0 et constants pour les autres pas de temps $i > 0$: on choisit comme indicateur de ces dommages évités les Dommages Évités Moyens Annualisés, notés DEMA. L'indicateur DEMA peut être localement positif (traduisant alors une réduction des dommages annuels grâce à la mise en place de la politique de prévention), ou bien négatif (dans le cas d'une augmentation des dommages annuels suite à la mise en place de la politique de prévention). Les coûts d'investissement CI_i sont dans leur intégralité affecté au pas de temps 0. Les coûts d'entretien CE_i sont considérés comme nuls au pas de temps 0 et constants pour les autres pas de temps $i > 0$. Enfin, les autres coûts liés à la mise en place de la politique sont négligés. En tenant compte de ces hypothèses, la Valeur Actuelle Nette de la politique s'écrit :

$$VAN = -CI + \sum_{i=1}^N \alpha_i (DEMA - CE)$$

où (pour rappel) $DEMA$ désigne les dommages évités moyens annualisés, CI désigne les coûts d'investissements, CE désigne les coûts d'entretien moyens annualisés, α_i désigne le poids d'actualisation au pas de temps i et N l'horizon temporel sur lequel est évaluée la politique.

1.2 Niveau 2 : Calcul des dommages évités moyens annualisés

Pour une politique donnée, les dommages évités sont obtenus en effectuant le différentiel entre les dommages entre la situation sans la mise en place de la politique (situation de référence) et la situation avec la mise en place de la politique (situation de projet). On se place ici dans le cadre de la mise en œuvre proposée par le Plan Rhône : on choisit l'indicateur DEMA (Dommages Évités Moyens Annualisés) pour décrire les dommages évités à chaque pas de temps annuel.

Pour chacune des situations (référence ou projet), un nombre infini de scénarios d'inondations peuvent avoir lieu, donnant donc lieu à un nombre infini de scénarios de dommages. Il est d'usage de considérer qu'il est possible de définir, pour toute situation considérée, la moyenne des dommages susceptibles

^aDans la suite du document, nous noterons r le taux d'actualisation, même si en fait nous désignons de la sorte implicitement une fonction qui, en général, dépend du temps.

d'avoir lieu sur une période d'observation d'une année : ce sont les dommages moyens annualisés (DMA). Pour chaque situation (référence ou projet), la plupart des études procèdent de la façon suivante :

- un nombre fini M de scénarios d'inondation sont explicités ;
- pour chacun de ces scénarios d'inondation, un dommage (d_1 à d_M) est estimé ;
- pour chacun de ces scénarios d'inondation, un poids (p_1 à p_M) est affecté. Ces poids sont généralement issus d'une analyse fréquentielle hydrologique (ce point sera discuté en détail en section §1.3.3).

Les dommages moyens annualisés sont alors calculés de la manière suivante :

$$DMA = \sum_{j=1}^M p_j \cdot d_j$$

Le calcul des DMA doit se faire pour chacune des situations considérées (la situation de référence et chacun des situations de projet évaluées). Il faut noter que l'ensemble des données nécessaires au calcul des DMA peut varier d'une situation à une autre : les poids p_i des scénarios d'inondation, les dommages d_i , mais également la collection des M scénarios utilisés.

Pour chaque projet évalué, les dommages évités moyens annualisés (DEMA) sont calculés par différence entre le DMA de la situation de référence et le DMA de la situation de projet correspondante :

$$DEMA = DMA_{\text{référence}} - DMA_{\text{projet}}$$

Au final, les entrées du niveau 2 des modèles ACB-DE sont donc :

1. la collection des M scénarios utilisés pour chacune des situations ;
2. les dommages d_i de chacun des scénarios pour les situations où ils interviennent ;
3. les poids p_i de chacun des scénarios pour les situations où ils interviennent.

La première entrée est un choix structurel du modèle ACB-DE. Les deux entrées suivantes sont des sorties intermédiaires de la méthode ACB-DE : elles sont calculées dans le niveau 3 des modèles ACB-DE, que nous détaillons dans la section suivante.

1.3 Niveau 3 : Calcul des dommages et poids des scénarios

❖ Calcul des dommages

Le calcul des dommages d_i pour chacun des scénarios des inondations et chacune des situations (référence ou projet) est la résultante du croisement de plusieurs informations :

- une typologie des enjeux susceptibles de subir les inondations (habitat, entreprises, cultures, bâtiments agricoles, réseaux...), cette typologie servant principalement à regrouper les enjeux selon leur fonction de dommages ;

- une base de données donnant la localisation des enjeux ainsi que leurs éventuelles caractéristiques susceptibles d'intervenir dans la fonction de dommage (surface, hauteur de premier plancher...);
- une caractérisation du scénario d'inondation, spécifiant l'étendue de l'inondation ainsi que les paramètres d'intensité utilisés pour les fonctions de dommages (généralement la hauteur d'eau, la durée de submersion et la vitesse de l'eau).

❖ Caractérisation du scénario d'inondation

La caractérisation d'un scénario d'inondation pour une situation est obtenue à la suite d'une modélisation hydraulique. Il est courant que la sortie de la modélisation hydraulique ne soit pas directement une cartographie de l'inondation, notamment dans le cas de modèle hydraulique à une dimension ou à casiers, mais que cette sortie nécessite un traitement supplémentaire.

Les entrées des modèles hydrauliques sont les suivants :

- un modèle numérique de terrain adapté aux besoins de la modélisation (prise en compte plus fine des éléments impactant fortement les écoulements, qu'ils soient naturels ou anthropiques), permettant de définir une géométrie des lieux d'écoulement ;
- des facteurs ayant à la fois un sens physique et servant au calage des modèles (coefficients dits de frottements) ;
- un scénario hydrologique (conditions amont, condition aval, apports latéraux) ;
- un scénario d'état des éléments structurant les écoulements (digues, levées, barrages).

De façon idéale, le même modèle hydraulique, calé, est utilisé pour simuler l'ensemble des scénarios d'inondation en situation de référence et en situation de projet. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas. Lorsque les sorties du modèle hydraulique ne sont pas directement des cartographies des inondations donnant en tout point du territoire l'intensité de l'aléa (hauteur d'eau, durée de submersion, vitesse de l'eau), l'étape de cartographie fait intervenir les sorties du modèle hydraulique et un modèle numérique de terrain (qui peut être différent de celui utilisé pour le modèle hydraulique).

❖ Poids des scénarios

Les poids p_i des scénarios découlent d'une analyse visant à quantifier la fréquence temporelle de l'occurrence de chacun des scénarios. Cette analyse est réalisée pour chaque situation (de référence ou de projet). Elle comporte, a minima, une analyse probabiliste de type hydrologique. Cette analyse hydrologique s'appuie sur : un ensemble de mesures de grandeurs hydrologiques (chroniques de hauteur d'eau en une station de mesures) ou météorologiques ; un modèle statistique pour qualifier la rareté des événements ; une éventuelle modélisation hydrologique lorsqu'il est nécessaire de régionaliser les mesures.

Cette analyse hydrologique peut être combinées à d'autres aspects (liste non exhaustive), selon les situations analysées :

- une analyse probabiliste de type génie civil pour quantifier les risques de défaillances des éléments structurant les écoulements (digues par exemple) ;

- une analyse probabiliste donnant l'état de certains éléments structurants (par exemple, le taux de remplissage d'un barrage).

En toute rigueur, la détermination des poids des scénarios devrait également tenir compte de l'état des enjeux, surtout quand le comportement de ceux-ci dépendent de la saison (exemple des activités agricoles, des activités touristiques). Dans la pratique, cette dépendance à la saisonnalité est très souvent intégrée dans la définition des courbes de dommage.

Enfin, en règle générale, il peut être impossible de définir un poids p_i homogène pour un scénario d'inondation sur l'ensemble du territoire étudié (une même crue peut par exemple avoir plusieurs périodes de retour sur le bassin versant). Il est alors nécessaire de découper le territoire en entités homogènes et de déterminer des poids par scénario dans chaque sous-zone.

1.4 Illustration sur un cas simplifié

On présente ici un exemple simplifié de démarche ACB-DE. Cet exemple est utilisé dans l'ensemble du guide pour illustrer les notions et méthodes présentées. Il correspond aux niveaux 1 et 2 d'un modèle ACB-DE (Fig. Figure 1.1).

On considère un territoire « *exemple* » soumis à un seul type de crue qui se produit en moyenne une fois tous les 10 ans (Fig. Figure 1.2). Cette inondation a donc une période de retour T de 10 ans. Sa survenue implique, en l'état actuel des aménagements, des dommages d d'un montant estimé à 2 000 k€. Un projet de réduction du risque par sur-inondation en amont des enjeux principaux permet de réduire les dommages à $d' = 1\,000$ k€.

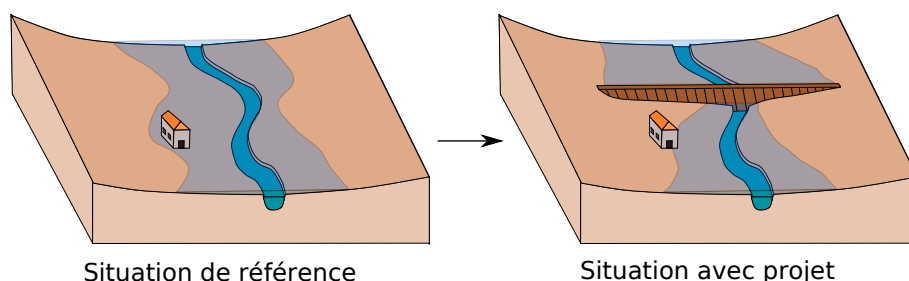


FIGURE 1.2 – Illustration d'une situation simplifiée

Ce projet d'aménagement a un coût d'investissement de 1 000 k€ (CI). Le coût annuel d'entretien est de 60 k€ (CE). Pour l'évaluation du projet, le financeur recommande de considérer un taux d'actualisation r fixe à 2 % et, étant donné la nature de l'aménagement, de considérer un horizon temporel de $N = 50$ ans.

Spécification de niveau 1

Avec les hypothèses considérées, la VAN se calcule de la sorte :

$$VAN(N) = -CI + \alpha(N)(DEMA - CE)$$

$\alpha(N)$ correspond au poids cumulé de l'actualisation. Il est donné par l'équation suivante :

$$\alpha(N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i = \sum_{i=1}^N \prod_{j=0}^i \frac{1}{(1 + r_j)}$$

(dans ce cas, le taux d'actualisation r ne dépend pas du pas de temps i)

À ce niveau 1, le modèle ACB-DE a donc une unique sortie, la VAN , et utilise cinq entrées :

- les coûts d'investissement CI ;
- les coûts d'entretien CE ;
- l'horizon temporel de N années ;
- le taux d'actualisation r ;
- les dommages évités moyens annualisés $DEMA$ (qui sont une sortie intermédiaire issue du niveau 2, dont nous allons préciser le calcul).

Spécification de niveau 2

Dans cet exemple simplifié, deux situations sont considérées : une situation de référence, et une situation avec projet. Pour chacune de ces situations, un seul scénario d'inondation est utilisé : $M = 1$. Le poids p de ce scénario ne varie pas, il est toujours égal à l'inverse de la période de retour T de 10 ans : $p = 1/T$. Les dommages eux varient : ils valent $d = 2\,000\text{k€}$ en situation de référence, $d' = 1\,000\text{k€}$ en situation de projet. Les dommages moyens annualisés (DMA) pour la situation de référence sont données par :

$$\begin{aligned} DMA_{\text{référence}} &= p \cdot d = \frac{d}{T} \\ &= \frac{2000}{10} \\ &= 200\text{k€/an} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les DMA pour la situation de projet sont donnés par :

$$\begin{aligned} DMA_{\text{projet}} &= p' \cdot d' = \frac{d'}{T'} \\ &= \frac{1000}{10} \\ &= 100\text{k€/an} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Les dommages évités moyens annualisés ($DEMA$) sont donnés par :

$$\begin{aligned} DEMA &= DMA_{\text{référence}} - DMA_{\text{projet}} = p \cdot (d - d') = \frac{d - d'}{T} \\ &= 200 - 100 \\ &= 100\text{k€/an} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Au niveau 2, le modèle ACB-DE a donc pour sortie l'indicateur $DEMA$, et utilise trois entrées :

- les dommages d du scénario d'inondation pour la situation de référence ;
- les dommages d' du scénario d'inondation pour la situation de projet ;
- la période de retour T du scénario d'inondation, valable pour les deux situations.

Bilan

Avec les valeurs nominales des différentes entrées utilisés, les dommages évités moyens annuels $DEMA$ valent 100 k€/an. La VAN pour un horizon $N = 50$ ans est de 297 k€ :

$$\begin{aligned} VAN(N) &= -CI + \alpha(N) \cdot (DEMA - CE) \\ &= -1000 + \alpha(50) \cdot (100 - 60) \\ &= 297 \text{ k€} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Au total, sept entrées sont nécessaires pour le calcul de la VAN , trois entrées sont nécessaires pour le calcul des $DEMA$.

Chapitre 2

Sources d'incertitudes

2.1 Définitions

L'incertitude est un terme désignant tout ce qui ne peut pas être déterminé avec exactitude. Comme évoqué précédemment, les incertitudes correspondent cependant à plusieurs concepts liés aux notions d'imprécisions, d'imprévisibilité et d'ignorance. Selon Walker et al. (2003), les incertitudes en modélisation peuvent être classées entre autre selon leur nature (imprécisions, imprévisibilité ou ignorance), l'intensité de leur description (loi statistique ou une collection de scénarios possibles) et leur situation dans la formulation du modèle (incertitudes des entrées, des sorties, des paramètres, de la structure du modèle...)

On peut également classer les incertitudes selon la dimension de leur support. L'incertitude peut porter sur une entrée ou sortie scalaire du modèle (paramètre quantitatif ou qualitatif sans dimension), relevant d'une série ou d'un signal $1D$ (par exemple une fonction de dommages selon la hauteur d'eau) ou $2D$ (carte), etc.

2.2 Typologie des sources d'incertitudes dans la démarche ACB-DE

À partir de la description des modèles ACB-DE qui a été faite en Chapitre Chapitre 1, on cherche ici à établir une typologie des sources d'incertitudes qui peuvent être rencontrées dans les études ACB-DE. Cette liste ne prétend pas être exhaustive, mais elle identifie les sources d'incertitudes les plus couramment rencontrées dans la démarche ACB-DE. On précise dans la Table Tableau 2.1, pour chacune des sources d'incertitudes identifiées, quelques dimensions discutées en §2.1 : sa situation dans le modèle, son intensité, son support. Pour plus de clarté, les différentes sources d'incertitude sont regroupées selon le niveau (1, 2 ou 3) auquel elles interviennent dans la démarche ACB-DE (Chapitre Chapitre 1 et Fig.Figure 1.1).

Source d'incertitude	Situation	Intensité	Support
« Niveau 1 de la démarche ACB-DE »			
$DEMA$	entrée	statistique	scalaire
CI	entrée	scenario	scalaire
CE	entrée	scenario	scalaire
r_i	paramètre	statistique	courbe 1D
N	paramètre	statistique	scalaire
VAN	sortie	statistique	scalaire
« Niveau 2 de la démarche ACB-DE »			
DE_i	entrée	statistique	scalaire
p_i	entrée	statistique	scalaire
mode de calcul des DEMA	structurelle	–	–
$DEMA$	sortie	statistique	scalaire
« Niveau 3 de la démarche ACB-DE »			
Base de données <i>Enjeux</i>	entrées	statistique	carte 2D
Fonctions de dommages	entrée	statistique	courbes 1D
Modélisations hydrauliques	entrée	statistique	carte 2D
Mode de croisement sous SIG entre aléas et enjeux	structurelle	–	–
DE_i	sortie	statistique	scalaire
« En amont »			
Modèle Numérique de Terrain	entrée	statistique	carte 2D
Hydrologie fréquentielle	entrée	statistique	scalaire
Génie civil (description des ruptures de digues)	entrée	scenario	scalaire
Occupation du sol (coef. de frottements)	entrée	statistique	carte 2D

TABLE 2.1 – Typologies des incertitudes usuelles dans une démarche ACB-DE

2.3 Quantification et modélisation des sources d'incertitudes

Suite une première description qualitative des sources d'incertitude et de leur nature, l'incertitude de chaque entrée doit être quantifiée. Plusieurs cadres méthodologiques peuvent être choisis :

Cadre déterministe Dans ce cadre, un ensemble fini de valeurs possibles est choisi pour définir la gamme de variation de chaque variable d'entrée. On peut par exemple se limiter aux trois valeurs suivantes : (*valeur minimale, valeur nominale, valeur maximale*).

Cadre probabiliste Dans ce cadre, on cherche à identifier une densité de probabilité pour décrire la variabilité de chaque entrée. On peut par exemple choisir une loi uniforme entre une valeur minimale et une valeur maximale, ou bien une loi normale caractérisée par une moyenne et un écart-type.

Autres cadres D'autres cadres existent pour décrire l'incertitude sur les entrées : logique floue, cadre probabiliste de second ordre...

On propose dans ce guide de se limiter au cadre « *probabiliste* ». On précise ci-dessous comment modéliser l'incertitude pour des entrées scalaires, 1D et 2D.

Paramètres sans dimension (scalaire)

À partir des données disponibles (série de données, dires d'expert, caractéristiques des instruments de mesure...), il faut associer à chaque entrée scalaire X_i une densité de probabilité p_i (loi uniforme, triangulaire, normale...). Cette étape est cruciale et conditionne souvent les résultats de l'analyse d'incertitude. Il est généralement très difficile d'associer une densité de probabilité à une entrée X_i : en l'absence de données permettant d'étayer ce choix, il est recommandé de choisir des bornes d'incertitude assez « *pénalisantes* », c'est-à-dire de maximiser l'incertitude pesant sur X_i . Les lois et paramètres les plus utilisés pour représenter et décrire statistiquement les incertitudes sur une entrée X_i scalaire du modèle ACB-DE peuvent être :

- une loi uniforme de paramètres μ, δ : dans ce cas, chaque valeur comprise entre $\mu - \delta$ et $\mu + \delta$ a la même chance de se produire et l'histogramme des valeurs possibles est celui représenté en Figure 2.1-a.
- une loi triangulaire de paramètres μ, δ : l'histogramme des valeurs possibles est donné en Figure 2.1-b.
- une loi Gaussienne, de paramètre μ, σ : dans ce cas on a plus de chance d'être proche de la valeur moyenne et une incertitude extrême a une chance non-nulle de se produire (incertitude non bornée) (Fig. Figure 2.1-b). μ désigne alors la moyenne et σ , l'écart-type.

Ces trois types de lois « *théoriques* » peuvent être vues comme trois niveaux d'intensité sur la connaissance du domaine d'incertitude. Pour le choix d'une loi uniforme, l'expertise n'est souvent capable que de donner des « *bornes* » sur l'incertitude autour de la valeur nominale (plus ou moins δ). Pour le choix d'une loi triangulaire, l'expertise peut à la fois donner des bornes et dire que les bornes ont peu de chance d'être atteintes. Pour une loi Gaussienne ou autres lois dérivées d'une Gaussienne ^a (log-normale, Poisson, ...), elle relève moins seulement de l'expertise et s'appuie le plus souvent sur quelques mesures d'incertitudes (expérimental).

^aLa loi Gaussienne est une loi de référence car elle correspond 1-à la description de bruits blancs d'appareils de mesure et 2-elle est la loi de convergence de beaucoup d'autres lois.

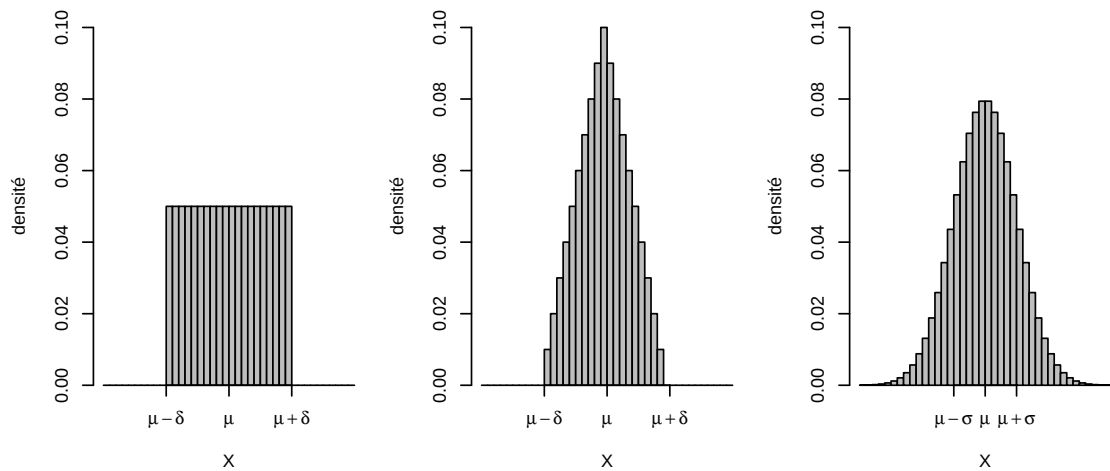


FIGURE 2.1 – Distributions types d'incertitudes : uniforme, triangulaire, Gaussienne.

Série 1D

La spécification du domaine d'incertitude sur une variable d'entrée ou sortie 1D (courbes d'endommagement) peut relever de deux méthodes :

- soit par l'intermédiaire de fonctions paramétriques qui décrivent la courbe. On se ramène au cas précédent (spécification de domaine d'incertitude scalaire) en spécifiant alors le domaine d'incertitude des paramètres de la fonction ;
- soit par transformation géométrique simple de la courbe (homothétie et/ou translation) suivant des paramètres (d'homothétie et/ou de translation). On se ramène là-encore au cas précédent (spécification de domaine d'incertitude scalaire) en spécifiant le domaine d'incertitude de ces paramètres géométriques.

Carte 2D

La spécification du domaine d'incertitude sur une variable d'entrée ou sortie 2D (cartes des enjeux, MNT, cartes d'aléas) peut relever de trois grandes familles de méthodes :

- Dans le cas d'une carte d'objets géographiques délimités, l'incertitude peut porter sur la géométrie des objets. La spécification des incertitudes géométriques revient alors à spécifier directement l'incertitude sur les propriétés géométriques des objets utilisées par le modèle, i.e. la surface des objets, suivant des lois simples sur ces propriétés qui deviennent des incertitudes scalaires.
- Dans le cas d'une carte d'objets géographiques délimités et labélisés (les différents types d'occupation du sol), un moyen de spécifier le domaine d'incertitude est de construire une matrice de confusion.

Une matrice de confusion donne la probabilité de confusion, i.e. la probabilité d'erreur de labélisation des objets, pour chaque paire de types possible. Par exemple, la matrice présentée dans le tableau Tableau 2.2 signifie que 1) les objets labélisés en type « *Bâti* » ont une chance de $\frac{100}{110}$ % d'être effectivement de type « *Bâti* » sur le terrain 2) tous les objets qui sont sur le terrain de type « *Bâti* » sont bien labélisés « *Bâti* » sur la carte, 3) les objets labélisés en type « *Cultures - vignes* » sur la carte ont une chance de 5 % d'être en réalité de type « *Cultures - non vignes* » sur le terrain

		Type cartographié		
		Bâti	Cultures - vignes	Cultures - non vignes
Type réel	Bâti	100	0	0
	Cultures - vignes	5	95	0
	Cultures - non vignes	5	5	90

TABLE 2.2 – Exemple de matrice de confusion

4) les objets qui sont sur le terrain de type « *Cultures - vignes* » ont une chance de 5 % d'être labélisés en type « *Bâti* » sur la carte et une chance de 95 % d'être bien labélisés, 5) tous les objets labélisés en type « *Cultures - non vignes* » sur la carte sont bien des objets de type « *Cultures - non vignes* » sur le terrain 6) les objets de type « *Cultures - non vignes* » sur le terrain ont une chance de 5 % d'être labélisés en type « *Bâti* » sur la carte, une chance de 5 % d'être labélisés en type « *Cultures - vignes* » et une chance de 90 % d'être correctement labélisés.

- Dans le cas d'une carte d'une variable quantitative et définie en tous points de l'espace (un MNT par exemple), les incertitudes sur cette carte proviennent à la fois de l'imprécision sur les données ponctuelles de base (les données topographiques dans le cas d'un MNT) et des incertitudes d'interpolation à partir de ces données ponctuelles de base. Pour les premières, la spécification de l'incertitude revient à spécifier la distribution de l'erreur sur ces données de base, sous forme scalaire, en considérant que cette erreur est aléatoire d'un endroit à l'autre de l'espace.

Pour les incertitudes d'interpolation, elles peuvent être spécifiées d'un point de vue mixte entre théorique et expérimental, par utilisation d'un modèle dit « *géostatistique* », sous hypothèse d'une homogénéité des propriétés des erreurs d'interpolation sur tout l'espace considéré. Ce modèle fait l'hypothèse qu'en chaque point interpolé, l'incertitude est Gaussienne, centrée sur une valeur moyenne proche d'une interpolation linéaire entre les données ponctuelles et suivant un écart-type qui est d'autant plus grand que l'on est loin des données ponctuelles.

2.4 Illustration sur un cas simplifié

On reprend ici l'exemple présenté en section §1.4. Le modèle précédent intègre les niveaux 1 et 2 et a été estimé à partir des valeurs nominales pour les 7 entrées : p, d, d', CE, CI, r et N . Il a pour sortie, la VAN .

- L'entrée $p = 1/T$, avec comme valeur nominale $p = 1/10$, provient de l'étude statistique de la série de débits observée sur une station située juste en amont de la plaine d'inondation. Cette série d'observations du débit journalier maximum sur 25 ans a été ajustée classiquement suivant une loi de Gumbel (ajustement d'une loi exprimant la fréquence en fonction du débit). Cet ajustement statistique, pour le débit de crue considéré, estime la période de retour à 10 ans. Les propriétés statistiques des paramètres ajustés de cette loi, qui tiennent compte du nombre d'observations et de leur répartition dans la gamme de fréquences, permettent de donner un intervalle de confiance de cette estimation : elle est estimée à [9 ans, 11 ans] pour un intervalle à 99 %.

- d et d' , estimés à 2 000 k€ et 1 000 k€ respectivement, représentent la somme des dommages sur la zone d'étude pour la situation de référence et la situation de projet. Leur estimation provient d'un modèle, non décrit dans cet exemple, qui fait le croisement entre deux simulations hydrauliques donnant la distribution spatiale des hauteurs de submersion pour le scénario de référence et le scénario de projet, la localisation des enjeux et leur courbe de dommages. Une analyse d'incertitude de ce modèle a permis de caractériser les valeurs des dommages évités $DE = d - d'$, qui peut varier de manière uniforme entre 800 k€ et 1 200 k€.
- CI Les coûts d'investissement ont été estimés à 1 000 k€. Cette estimation est celle de l'avant projet. Après consultation du bureau d'étude ayant proposé le projet, il a été choisi de considérer que cette estimation pouvait en fait être comprise entre 900 k€ et 1 200 k€, étant donné que le coût des projets a plus tendance à être majoré que minoré au fil des évaluations successives.
- CE Usuellement, on considère que les coûts d'entretien annuels pour ce type d'aménagement s'élèvent à 5% du coût d'investissement. Par ailleurs, des retours d'expérience récents montrent que ce taux est souvent sous-évalué et que qu'il est plutôt situé entre 5% et 7% du coût d'investissement, soit entre 50 k€ et 70 k€ dans le cadre du projet considéré ici.
- Le taux d'actualisation utilisé est, à titre illustratif, un taux fixe r par convention fixé à 2%. Il est également considéré, dans notre exemple, que la convention est forte sur ce taux et qu'aucune incertitude n'est considérée autour de cette valeur.
- De la même façon, l'horizon temporel $N = 50$ ans est considéré, à titre illustratif, sans besoin de considérer d'incertitude autour de cette valeur.

On a ainsi caractérisé et quantifié l'incertitude qui pèse sur toutes les entrées du modèle. Pour des raisons pédagogiques simplificatrices, on ne va considérer dans la suite de ce manuel que trois entrées incertaines : le poids p , les dommages évités $DE = d - d'$ et les coûts d'entretien CE . On décide de négliger arbitrairement l'incertitude sur les autres entrées : N est fixé à 50, r à 2% et CI à 1 000 k€.

Chapitre 3

Propagation des incertitudes

La propagation des incertitudes constitue la troisième phase de l'analyse d'incertitude/sensibilité des modèles ACB-DE (Fig. Figure 1). Une fois que le modèle ACB-DE étudié a été entièrement spécifié (phase Chapitre 1), que l'incertitude pesant sur chaque entrée du modèle a été décrite et quantifiée (phase Chapitre 2), vient la phase de propagation des incertitudes à travers le modèle ACB-DE. L'objectif de cette phase est de quantifier l'incertitude résultante sur les sorties du modèle ACB-DE (VAN, DEMA...) et de discuter ainsi de la robustesse des indicateurs fournis par le modèle. De manière très générale, on peut décomposer cette phase en trois étapes :

1. constituer un plan d'expérience ;
2. évaluer le modèle ACB-DE en chaque point du plan d'expérience ;
3. analyser l'incertitude résultante sur les sorties du modèle ACB-DE.

3.1 Constitution d'un plan d'expérience

On appelle « *jeu d'entrées du modèle* », noté J , un ensemble de valeurs qui peut être utilisé comme entrées du modèle ACB-DE. Par exemple, pour le niveau 1 du modèle ACB-DE (Fig. Figure 1.1), un jeu d'entrée peut être : ($CE = 0.2$ M€, $CI = 30$ M€, $r = 0.2$, $DEMA = 12$ M€, $N = 50$ ans). Comme chaque entrée est entachée d'incertitude, on constitue plusieurs jeux $J_1, J_2, \dots, J_L$ en faisant varier la valeur de chaque entrée dans la gamme de variation qui a été choisie durant la phase Chapitre 2 (description des sources d'incertitude). L'ensemble de ces L jeux d'entrée est généralement appelé un « *plan d'expérience* ». Chaque jeu d'entrée J_i est appelé « *point* » du plan d'expérience.

Il existe une grande variété d'approches permettant de construire des plans d'expérience, selon l'usage que l'on souhaite en faire (analyse d'incertitude, de sensibilité, estimation de probabilité extrêmes...) et selon les caractéristiques du modèle étudié (temps de calcul, propriétés de régularité...). Le plan d'expérience le plus simple (Fig. Figure 3.1) prend pour point de départ les valeurs nominales de chacune des entrées du modèle ACB-DE, puis fait varier la valeur de chaque entrée, une par une, généralement en lui affectant une valeur « *minimale* » puis une valeur « *maximale* ». Cette approche est désignée sous le nom d'approche OAT (One-At-a-Time). Elle est intuitive et facile à mettre en œuvre, mais présente néanmoins

des lacunes : elle ne permet pas d'explorer les interactions entre les différentes entrées du modèle ACB-DE, qui en se combinant peuvent augmenter l'incertitude sur les sorties ; elle ne permet pas non plus de prendre en compte la loi de probabilité des entrées du modèle, puisqu'elle ne considère que leurs valeurs minimales et maximales.

	<i>CI</i>	<i>DEMA</i>	<i>CE</i>	
$J_1 =$	(1000	50	0.2)	valeurs nominales
$J_2 =$	(1000	50	0.16)	min pour CE
$J_3 =$	(1000	50	0.24)	max pour CE
$J_4 =$	(1000	30	0.2)	min pour DEM A
$J_5 =$	(1000	80	0.2)	max pour DEM A
$J_6 =$	(800	50	0.2)	min pour CI
$J_7 =$	(1200	50	0.2)	max pour CI

FIGURE 3.1 – Un plan d'expérience OAT pour 3 entrées du modèle ACB-DE

C'est pourquoi nous proposons dans ce manuel de s'appuyer sur un autre type de plan d'expérience : les plans dits de « *Monte-Carlo* » (Fig. Figure 3.2). Pour construire un tel plan d'expérience, on choisit d'abord la taille L du plan. Pour chaque entrée du modèle, on tire ensuite de manière indépendante un échantillon aléatoire de taille L dans la loi de probabilité qui a été retenue en phase Chapitre 2 pour décrire l'incertitude sur cette entrée (description des sources d'incertitude). Ainsi, dans ce type de plan d'expérience, toutes les entrées du modèle ACB-DE varient simultanément, et de manière indépendante, et peuvent prendre une infinité de valeurs selon leur loi de probabilité (le tirage respecte la loi de probabilité qui a été définie pour chaque entrée X_i).

	<i>CI</i>	<i>DEMA</i>	<i>CE</i>
$J_1 =$	(1230	38	0.21)
$J_2 =$	(985	45	0.17)
$J_3 =$	(1032	53	0.19)
$J_4 =$	(1143	61	0.23)
$J_5 =$	(874	58	0.21)
$J_6 =$	(832	47	0.18)
$J_7 =$	(946	49	0.18)

FIGURE 3.2 – Un plan d'expérience de Monte-Carlo de taille $L = 7$ pour 3 entrées du modèle ACB-DE

3.2 Évaluations multiples du modèle

On dispose maintenant d'un plan d'expérience de L lignes construit par une procédure de type Monte-Carlo. Il faut ensuite évaluer le modèle ACB-DE pour chacune des lignes. Pour chacun des L jeux d'entrée J_i , l'évaluation du modèle ACB-DE fournit une valeur pour chaque sortie d'intérêt : VAN, DEMA, selon le niveau du modèle considéré (Fig. Figure 3.3).

	<i>CI</i>	<i>DEMA</i>	<i>CE</i>
$J_1 =$	(1230	38	0.21)
$J_2 =$	(985	45	0.17
$J_3 =$	(1032	53	0.19)
$J_4 =$	(1143	61	0.23)
$J_5 =$	(874	58	0.21)
$J_6 =$	(832	47	0.18)

FIGURE 3.3 – Évaluations du modèle ACB-DE en chaque point du plan d'expérience

La taille L du plan d'expérience est primordiale : plus le plan est petit ($L \ll 1000$), moins les résultats de l'analyse d'incertitude et de sensibilité sont robustes et reproductibles. Plus le plan d'expérience est grand ($L \gg 1000$), plus le nombre d'évaluations du modèle ACB-DE est important. Ces évaluations multiples du modèle peuvent être coûteuses en temps de calcul. Pour l'analyse d'incertitude et de sensibilité de Sobol, un ordre de grandeur classique pour L est de l'ordre de 1000. Il n'est donc envisageable de réaliser la propagation des incertitudes que si la chaîne de traitements (sous SIG, tableur, etc.) qui constitue le modèle ACB-DE est assez automatisée pour que son exécution puisse être répétée un très grand nombre de fois sans efforts. En ce sens un outil est fourni avec ce guide (outil NOE et ses compléments, décrit dans les livrables de l'action 2.1) permettant de réaliser cette automatisation (tirages de Monte-Carlo et évaluations multiples du modèle) et pour une partie du modèle ACB-DE seulement (niveaux 1 et 2 : calcul des DEMA et de la VAN).

3.3 Incertitude résultante sur les sorties du modèle

À l'issue de la phase de propagation des incertitudes, on dispose d'un ensemble de L valeurs calculées pour chacune des sorties d'intérêt du modèle ACB-DE : VAN, DEMA...^a On peut tirer de ces L valeurs des statistiques descriptives classiques qui permettront de résumer l'incertitude pesant sur les sorties du modèle :

- histogramme empirique des L valeurs ;
- valeur moyenne sur l'ensemble des L simulations ;
- écart-type sur l'ensemble des L simulations ;

^aLa notion d'« entrée » ou de « sortie » du modèle dépend du niveau du modèle que l'on considère (1,2 ou 3, voir figure Figure 1.1). Ainsi les DEMA sont une sortie du niveau 2 du modèle, mais une entrée du niveau 1.

- valeur min, max, quantiles...

On peut également donner des intervalles de confiance à 95% sur les valeurs des sorties du modèle ACB-DE.

3.4 Illustration sur un cas simplifié

On reprend ici l'exemple présenté en sections §1.4 et §2.4.

On commence par mener la propagation des incertitudes avec un plan d'expérience de type OAT, afin d'illustrer les limites de cette approche. Les valeurs minimales et maximales des différentes entrées du modèle ACB-DE ont été définies en phase Chapitre 2 (description des sources d'incertitudes) :

Entrée	Valeur minimale	Valeur maximale
p	1/11	1/9
DE	800 k€	1200 k€
CE	5 % de CI	7 % de CI

TABLE 3.1 – Valeurs minimales et maximales des entrées incertaines du modèle

On constitue un plan d'expérience de type OAT à partir de ces valeurs, et pour chaque point du plan d'expérience, on calcule la VAN pour un horizon temporel de $N = 50$ ans :

	p	DE	CE	VAN
$J_1 =$	(1/10	1000 k€	60 k€)	297 k€
$J_2 =$	(1/10	1000 k€	50 k€)	621 k€
$J_3 =$	(1/10	1000 k€	70 k€)	-273 k€
$J_4 =$	(1/10	800 k€	60 k€)	-351 k€
$J_5 =$	(1/10	1200 k€	60 k€)	945 k€
$J_6 =$	(1/11	1000 k€	60 k€)	2 k€
$J_7 =$	(1/9	1000 k€	60 k€)	657 k€

Cette analyse nous donne de premières informations sur la robustesse de l'indicateur VAN fourni par le modèle ACB-DE. Sur les 7 évaluations réalisées, sa valeur minimale est de -351 K€, sa valeur maximale de 945 k€ et sa valeur moyenne est de 271 k€.

Répetons maintenant cette analyse avec un plan d'expérience de type Monte-Carlo. On a choisi dans la phase Chapitre 2 (description des incertitudes) de choisir comme loi de probabilité pour chaque entrée du modèle ACB-DE une loi uniforme entre la valeur minimale et la valeur maximale. On génère à partir

de ces lois de probabilités un plan d'expérience de longueur $L = 1000$ selon l'approche présentée précédemment, et l'on calcule pour chaque ligne de ce plan d'expérience la valeur de la VAN pour un horizon temporel de $N = 50$ ans (on ne donne ci-dessous que les dix premières lignes de ce plan) :

	p	DE	CE	VAN
J_1	(0.10896647	1021.00 k€	68.88 k€)	374.02 k€
J_2	(0.10787474	1028.42 k€	64.97 k€)	490.60 k€
J_3	(0.10263924	898.63 k€	55.04 k€)	206.04 k€
J_4	(0.10924740	1004.97 k€	54.42 k€)	795.29 k€
J_5	(0.10208544	927.61 k€	68.60 k€)	-158.84 k€
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
J_{9996}	(0.10983689	1018.76 k€	69.58 k€)	372.14 k€
J_{9997}	(0.09781693	828.61 k€	61.82 k€)	-376.42 k€
J_{9998}	(0.09853765	1117.65 k€	64.66 k€)	474.23 k€
J_{9999}	(0.10155124	885.88 k€	57.32 k€)	58.20 k€
J_{1000}	(0.10652036	988.87 k€	69.98 k€)	147.03 k€

On obtient ainsi l'histogramme situé à droite de la Figure Figure 3.4. On en tire les informations suivantes :

- la VAN a une valeur moyenne de 328 k€ sur les 1000 simulations
- la VAN est comprises entre -788 k€ et 1503 k€ sur les 1000 simulations
- elle a un paramètre σ de dispersion (correspondant classiquement à l'écart-type) de 465 k€
- la VAN a 90% de chances de se trouver entre -437 k€ et 1093 k€
- la VAN est négative pour 26% des simulations

Toutes ces informations constituent l'analyse d'incertitude de la sortie VAN. Elles permettent de préciser la portée et la robustesse des résultats fournis par le modèle ACB-DE, compte-tenu des hypothèses faites sur les incertitudes des entrées. Dans la présentation de l'exemple en section §1.4, on avait calculé la valeur de la VAN pour la valeur nominale des entrées du modèle ACB-DE : cette valeur nominale était de 297 k€, indiquant que le projet est pertinent d'un point de vue économique. Notre analyse complémentaire nous informe que, compte-tenu de l'incertitude qui pèse sur les entrées du modèle ACB-DE, la VAN peut en réalité être négative dans 25% des cas. Cette incertitude peut être jugée inacceptable par le gestionnaire. Dans ce cas, pour identifier les pistes d'amélioration du modèle ACB-DE qui permettront de caractériser avec plus de précision la valeur de la VAN, on peut avoir recours à une analyse de sensibilité (Chapitre Chapitre 4).

Par ailleurs, on voit sur cet exemple l'apport du plan d'expérience de Monte-Carlo par rapport à un plan d'expérience OAT : le plan d'expérience de Monte-Carlo permet de donner des intervalles de confiance

probabiliste sur le valeur de la VAN, et prend en compte les possibles interactions entre la valeur des différentes entrées du modèle. Le plan d'expérience OAT, lui, a sous-estimé l'écart existant entre les valeurs extrêmes (min et max) de la VAN.

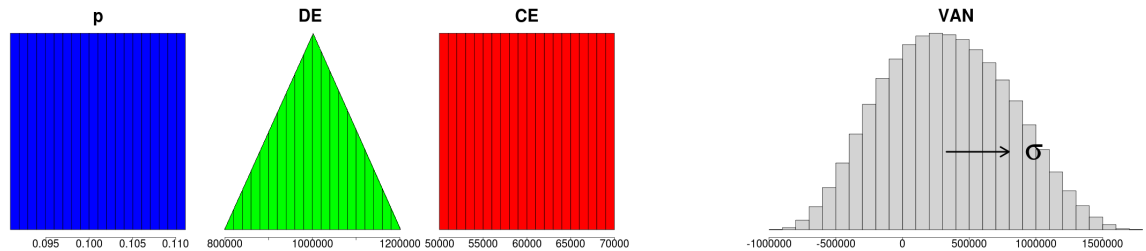


FIGURE 3.4 – Variations de la VAN par lorsque T , DE et CE varient

Chapitre 4

Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité constitue la quatrième phase d'une analyse d'incertitude–sensibilité (Fig. Figure 1). Comme cela a été présenté en introduction, l'analyse de sensibilité vise à identifier les entrées du modèle ACB-DE qui expliquent la plus grande part de l'incertitude pesant sur les sorties du modèle, ainsi que les entrées qui n'expliquent qu'une part négligeable de cette incertitude. Les approches d'analyse de sensibilité quantitatives permettent de calculer pour chaque entrée du modèle un (ou plusieurs) « *indice de sensibilité* ». Ces indices permettent de hiérarchiser les différentes entrées du modèle, d'identifier les plus influentes, ou au contraire d'écarter celles qui n'ont que peu d'effet sur le résultat du modèle.

Il existe de nombreuses méthodes d'analyse de sensibilité, mais l'objet de ce guide n'est pas de faire un état de l'art de ces approches. On se limite ici à présenter une des approches possibles, qui est l'analyse de sensibilité basée sur la variance (parfois appelée « *analyse de Sobol* »). On trouvera à la fin de ce guide quelques références bibliographiques sur ce sujet, ainsi que les bases mathématiques de cette approche (annexe §A).

4.1 Analyse de sensibilité : principe

Pour donner une idée de ce qu'est l'analyse de sensibilité, on s'appuie sur l'exemple présenté en sections §1.4, §2.4 et §3.4. On essaye ici de mesurer un à un l'effet de l'incertitude de chacune des trois entrées incertaines (p , DE et CE) sur la variation de la VAN. En faisant varier une à une chacune des entrées incertaines et en fixant les deux autres entrées à leur valeur nominale, on obtient les histogrammes situés à gauche de la Figure Figure 4.1. On observe que la dispersion de la VAN résultante est plus faible sur chacun de ces histogrammes que sur l'histogramme de la Figure Figure 3.4, où les trois entrées du modèle variaient simultanément. Le fait de ne faire varier qu'une entrée du modèle entraîne une « *réduction de la dispersion* » de la sortie du modèle, ici la VAN. Plus l'entrée est influente, plus la dispersion de la VAN (largeur des histogrammes situés à droite de la Figure Figure 4.1) sera importante.

On note σ_p , le paramètre de dispersion de la VAN lorsque seule, l'entrée p varie. De même pour σ_{DE} et σ_{CE} . Par comparaison des histogrammes de la VAN sur la Figure Figure 4.1, on voit que $\sigma_p < \sigma_{DE}$, $\sigma_{CE} < \sigma_{DE}$ et $\sigma_{CE} \approx \sigma_p$. On perçoit donc que la VAN est beaucoup plus sensible aux incertitudes sur DE qu'aux incertitudes sur p ou CE . À l'inverse, à la vue de ces comparaisons, il est difficile de dire si la VAN est plus sensible aux incertitudes sur p ou sur CE .

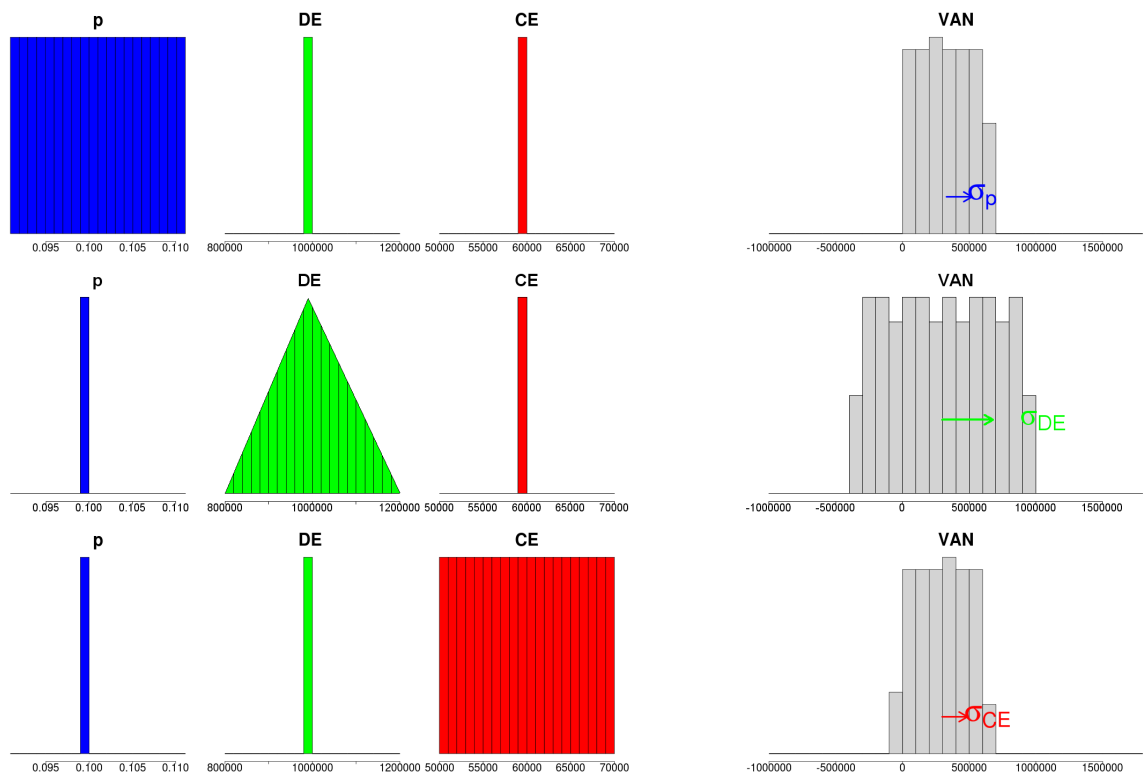


FIGURE 4.1 – Effet isolé de la variabilité de p , DE puis CE sur la dispersion de la VAN (histogrammes)

Ainsi, pour réduire l'intervalle de confiance sur la VAN et être plus précis sur son estimation, il semble qu'il faille en premier lieu réduire les incertitudes qui pèsent sur DE , c'est-à-dire améliorer notre connaissance de cette entrée. Au contraire, améliorer la précision de p ou de CE ne semble réduire l'incertitude de la VAN que de manière minime. Cette analyse sur un modèle simplifié à l'extrême peut être menée pour les différents niveaux (1,2 et 3) des modèles ACB-DE.

4.2 Indices de sensibilité

Les « *indices de sensibilité* » traduisent les observations empiriques faites précédemment. On peut estimer pour chaque entrée i du modèle ACB-DE un indice de sensibilité S_i , compris entre 0 et 1. Cet indice de sensibilité décrit la part de la variabilité de la sortie du modèle ACB-DE qui est due uniquement à l'incertitude sur l'entrée i . La somme des indices de sensibilité S_i de toutes les entrées du modèle est toujours inférieure ou égale à 1. Si cette somme est strictement inférieure à 1, alors une partie de la variabilité de la sortie du modèle est due aux interactions entre les entrées du modèle : la différence $1 - \sum S_i$ permet de quantifier l'influence de ces interactions.

Les indices de sensibilité S_i permettent de hiérarchiser les différentes entrées du modèle ACB-DE en fonction de leur influence sur la variabilité de la sortie du modèle. Par exemple, les entrées qui présentent un fort indice de sensibilité ($S_i > 0.3$) expliquent une grande part de l'imprécision de la sortie : c'est sur ces variables qu'il faut concentrer ses efforts, pour essayer d'améliorer la connaissance de leur valeur exacte, et ainsi réduire fortement l'incertitude qui pèse sur les indicateurs fournis par le modèle ACB-DE.

Au contraire, les entrées qui présentent un faible indice de sensibilité ($S_i < 0.1$) ne sont pas prioritaires, car elles n'influencent que marginalement sur l'incertitude globale de la sortie du modèle.

La définition mathématique des indices de sensibilité est donnée en annexe §A. En pratique, ces indices peuvent être estimés à partir d'un plan d'expérience, selon une démarche similaire à celle de propagation des incertitudes (phase Chapitre 3). Le détail de la procédure d'estimation de ces indices est donné en annexe §B. L'outil SENSAS (voir livrables de l'action 2.1) permet d'estimer automatiquement les indices de sensibilité pour les niveaux 1 et 2 des modèles ACB-DE.

4.3 Illustration sur un cas simplifié

L'application de l'outil SENSAS (voir livrables de l'action 2.1) sur l'exemple simplifié présenté en sections §1.4, §2.4 et §3.4 permet d'estimer les indices de sensibilité de chaque entrée de ce modèle (Fig. Figure 4.2).

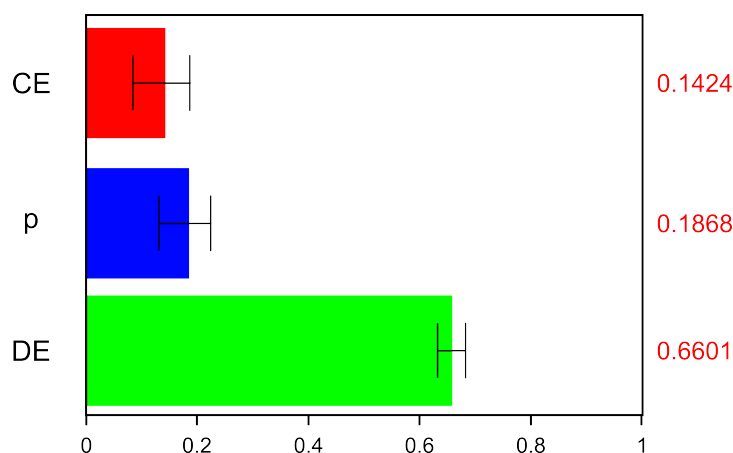


FIGURE 4.2 – Indices de sensibilité de premier ordre de la VAN aux incertitudes de DE , p et CE ; indices calculés avec l'outil SENSAS, avec intervalles de confiance à 95%

À partir de ces résultats, on peut établir la hiérarchie suivante : la VAN est environ 4 fois plus sensible aux incertitudes sur DE qu'à celles sur p ou CE ($S_{DE} \simeq 4S_p \simeq 4S_{CE}$). La sensibilité de la VAN aux incertitudes sur p et CE est sensiblement la même. La somme des indices de sensibilité des entrées du modèle est égale à 0.9893, très proche de 1 : on peut en conclure que l'impact supplémentaire des interactions entre ces trois entrées sur la variance de la VAN est négligeable.

L'analyse de sensibilité permet ainsi au gestionnaire d'identifier les entrées les plus importantes dans le calcul de la VAN, celles qui conditionnent le plus la précision de cet indicateur. Sur cet exemple simplifié, il apparaît prioritaire de réduire l'incertitude sur l'estimation des dommages évités par l'aménagement (entrée DE). Pour ce faire, une descente au niveau 3 du modèle ACB-DE (Fig. Figure 1.1) peut être nécessaire et une analyse de sensibilité de cet étage du modèle doit être menée. Le gestionnaire peut par exemple travailler à mieux caractériser les fonctions d'endommagement des différents types d'enjeux exposés aux crues sur son territoire. Si améliorer la caractérisation des dommages évités DE s'avère difficile ou impossible, alors l'analyse de sensibilité montre qu'il est équivalent de réduire l'incertitude sur l'entrée p (poids du scénario de crue) ou sur l'entrée CE (coûts d'entretien annuels de l'ouvrage) pour augmenter la précision de l'indicateur VAN.

Pour compléter les conclusions apportées par l'analyse de sensibilité, il faut aussi s'interroger sur sa capacité à réduire l'incertitude sur telle ou telle entrée du modèle ACB-DE, et sur le coût de cette réduction d'incertitude. Ainsi, dans cet exemple simplifié, la capacité du gestionnaire à réduire l'incertitude sur l'entrée p ou sur l'entrée CE n'est pas la même. Pour mieux caractériser le poids p d'un scénario de crue, il faut disposer de chroniques de débits s'étendant sur une période de temps plus longue afin de déterminer avec plus de précision la période de retour de ce scénario : à un instant donné, la capacité d'un gestionnaire à améliorer la connaissance du poids p est donc très faible. En revanche, pour réduire l'incertitude sur l'entrée CE (coûts d'entretien annuels de l'aménagement de protection), il faut s'attacher à caractériser au mieux comment l'ouvrage va évoluer dans le temps, définir dans le détail ce que seront les tâches d'entretien, etc. . . La capacité du gestionnaire à améliorer la connaissance de l'entrée CE est donc réelle, mais elle a aussi un coût (études supplémentaires). Ainsi, même si l'analyse de sensibilité indique que l'influence des entrées p et CE sur la précision de la VAN est la même, des arguments d'ordre pratique ou économique permettent néanmoins de les différencier.

Conclusion

Ce guide présente d'un point de vue technique et pédagogique l'analyse d'incertitude et de sensibilité d'une ACB-DE. Cependant, au delà de la technicité de ces méthodes, il paraît évident que les résultats qu'elles fournissent et leur interprétation dépendent fortement des hypothèses réalisées sur les incertitudes des entrées de l'ACB-DE. Ces hypothèses résultent le plus souvent d'une expertise réalisée dans une phase amont à l'ACB-DE, expertise qui fait en l'état le point des connaissances usuelles sur les entrées, par exemple lors des études hydrologiques, hydrauliques, etc. Si les résultats de l'analyse peuvent parfois s'avérer intuitifs, ils ont cependant l'avantage de confirmer et quantifier cette intuition, rarement exprimée et débattue dans les études ACB-DE.

Aller plus loin, corriger les ACB-DE en fonction de ces résultats d'analyse de sensibilité, peut nécessiter de repartir en amont, sur une étude plus poussée des incertitudes des entrées, nécessitant alors la mobilisation de méthodes avancées et propres à chaque discipline (hydrologie fréquentielle, hydraulique), méthodes que ce guide n'avait pas vocation à présenter. De ce fait, l'analyse de sensibilité d'une ACB-DE ne s'inscrit pas toujours dans une démarche d'ingénierie linéaire, elle est une itération qui permet de progresser sur les études ACB-DE ou sur la méthode ACB-DE elle-même.

Glossaire

α voir Facteur d'actualisation.

ACB Analyse Coût-Bénéfice.

ACB-DE Analyse Coût-Bénéfice utilisant l'approche des Dommages Évités pour estimer les bénéfices attendus d'une politique de prévention des inondations.

Actualisation L'actualisation est l'opération mathématique qui permet de comparer des valeurs économiques qui s'échelonnent dans le temps : il s'agit de ramener la valeur future d'un bien, d'une dépense à une valeur actuelle. (Lebe et al. 2005)

Analyse d'incertitude L'analyse d'incertitude étudie sur la propagation des incertitudes à travers un modèle, et vise à quantifier l'incertitude résultante qui existe sur le résultat du modèle. Elle permet typiquement d'associer un intervalle de confiance aux résultats fournis par un modèle.

Analyse de sensibilité L'analyse de sensibilité vise à mesurer l'influence de l'incertitude de chacune des entrées d'un modèle sur la précision du résultat du modèle. Elle permet de hiérarchiser les entrées en fonction de leur influence sur la variabilité de la sortie du modèle.

CI Coûts d'investissement liés au projet de prévention étudié.

CE Coûts d'entretien annuels liés au projet de prévention étudié.

d_i Dommages engendrés par le scénario d'inondation i .

DE Dommages Évités : pour un scénario d'inondation donné, ils sont égaux à la différence entre les dommages engendrés par ce scénario en situation de référence et les dommages engendrés par ce même scénario en situation de projet.

DEMA Dommages Évités Moyens Annualisés. Ils sont égaux à la différence entre les Dommages Moyens Annualisés en situation de référence et les Dommages Moyens Annualisés en situation de projet.

DMA Dommages Moyens Annualisés. Pour une situation donnée (de référence ou de projet) ils sont égaux à la moyenne des dommages susceptibles d'avoir lieu sur une période d'observation d'une année.

Écart-type En mathématiques, plus précisément en statistiques et probabilités, l'écart type mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne. (source : Wikipédia)

Entrée Désigne une donnée (variable, paramètre, carte...) qui est utilisée en entrée du modèle ACB-DE.

Facteur d'actualisation Facteur d'actualisation entrant dans le calcul de la Valeur Actuelle Nette.

Horizon temporel Durée (en années) sur laquelle est évaluée la pertinence économique d'un projet de prévention des inondations. Notée N .

Indice de sensibilité Pour une entrée i d'un modèle, l'indice de sensibilité noté S_i représente la part de la variabilité de la sortie du modèle qui est due à l'incertitude sur l'entrée i . L'indice S_i est compris entre 0 et 1.

Jeu d'entrées Ensemble de variables qui peut être utilisé en entrée du modèle ACB-DE. Par exemple, pour le niveau 1 du modèle ACB-DE, un jeu d'entrée peut être : ($CI = 30$ M€, $CE = 0.2$ M€, $r = 0.2$, $DEMA = 12$ M€, $N = 50$ ans). Noté J

J voir Jeu d'entrées.

L Taille d'un plan d'expérience (nombre de points).

M Nombre de scénarios d'inondation considérés pour le calcul des Dommages Moyens Annualisés.

Mission Rhône Unité du service Prévention des Risques de la Direction régionale de l'Environnement, de l'Aménagement et du Logement de Rhône-Alpes.

Modèle Désigne dans ce manuel une manière de combiner et traiter des données (les entrées) pour obtenir les sorties désirées.

Monte-Carlo Le terme méthode de Monte-Carlo, ou méthode Monte-Carlo, désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. (source : Wikipédia)

N voir Horizon temporel.

N_0 Durée minimale (en années) à partir de laquelle la Valeur Actuelle Nette du projet de prévention est positive.

OAT One-At-a-Time. Désigne un type de plan d'expérience dans lequel on fait varier la valeur des entrées du modèle une par une, et non simultanément.

p_i Poids affecté au scénario d'inondation i pour le calcul des Dommages Moyens Annualisés.

Plan d'expérience Ensemble de plusieurs jeux d'entrées $J_1, \dots, J_L$.

Plan Rhône Le Plan Rhône est un projet global de développement durable sur le Rhône et sa vallée, issu d'un partenariat entre l'Etat, le Comité de Bassin Rhône Méditerranée, les Conseils régionaux riverains du Rhône et la Compagnie Nationale du Rhône. Ce plan comporte entre autres un important volet dédié à la gestion du risque d'inondation.

r voir Taux d'actualisation.

Ratio de Hicks Le ratio de Hicks, noté R est un indicateur actualisé de la pertinence économique d'un projet.

R voir Ratio de Hicks.

S_e voir Indice de sensibilité.

Situation de référence Situation du territoire en l'absence de projet de prévention des inondations.

Situation de projet Situation du territoire suite à la mise en place du projet de prévention des inondations étudié.

Sobol L'analyse de Sobol est un type d'analyse de sensibilité, basé sur la décomposition de la variance de la sortie du modèle étudié en variances d'espérances conditionnelles.

Sortie Désigne le résultat numérique fourni par un modèle.

T Période de retour d'un événement considéré.

Taux d'actualisation Taux de substitution entre le futur et le présent (Lebe et al. 2005), servant à l'opération d'actualisation.

Valeur nominale Valeur « *de base* » d'une variable, c'est-à-dire une sorte de « *valeur moyenne* » (au sens large, pas au sens statistique) utilisé lorsque l'incertitude sur cette variable et ignorée ou n'est pas décrite de manière explicite.

Valeur actuelle nette La valeur actuelle nette (VAN, en anglais : Net Present Value, NPV) est un indicateur de la pertinence économique d'un projet, déouclant d'un bilan monétarisé et actualisé des avantages et inconvénients attendus du projet.

VAN voir Valeur actuelle nette.

Bibliographie

- Erdlenbruch, K., Gilbert, E., Grelot, F., and Lescouliers, C. (2008). Une analyse cot-bfice spatialisée la protection contre des inondations : application de la mode des dommages t la basse valle l'orb. *Ingeries Eau-Agriculture-Territoires*, 53 :3–20. 6
- Hubert, G. and Ledoux, B. (1999). *Le cot du risque. Évaluation des impacts socio-nomiques des inondations*. Presses de l'ENPC. 6
- Lebe, D., Baumstark, L., and Hirtzman, P. (2005). Rsion du taux d'actualisation des investissements publics. Technical report, Commissariat Gral du Plan. 33, 35
- Ledoux, B., Grelot, F., and Reliant, C. (2003). *Synth des luations socio-nomiques des instruments de prntion des inondations*. Minist de l'Écologie et du Dloppement Durable - Direction des Études Économiques et de l'Évaluation Environnementale. 6
- Ledoux, C. (2010). *Mode standard pour l'analyse cot-bfice des projets de prntion des inondations - Guide d'accompagnement*. Mission Rhne (DREAL Rhne-Alpes / Service Prntion des Risques). 1, 6, 8
- Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M., and Tarantola, S. (2008). *Global Sensitivity Analysis - The Primer*. Wiley. 40, 41, 42
- Walker, W., Harremoees, P., Rotmans, J., van der Sluijs, J.P. and. van Asselt, M., Janssen, P., and Kraye von Krauss, M. (2003). Defining uncertainty : A conceptual basis for uncertainty management in model-based decision support. *Integrated Assessment*, 4(1) :5–17. 15

Annexes

A	Bases mathématiques de l'analyse de sensibilité	40
B	Estimation des indices de sensibilité	41

A Bases mathématiques de l'analyse de sensibilité

On donne dans cette annexe des précisions sur les bases mathématiques de l'analyse de sensibilité basée sur la variance, parfois appelée analyse de Sobol. Pour plus d'informations sur ce sujet, se reporter à Saltelli et al. (2008).

On considère un modèle déterministe $Y = f(X_1, \dots, X_k)$ où les entrées X_i et la sortie Y sont des variables aléatoires réelles. L'analyse de sensibilité basée sur la variance repose sur la décomposition de la variance de Y (sortie du modèle) en une somme de variances conditionnelles. Elle conduit à définir pour chaque variable d'entrée X_i deux indices de sensibilité, parfois appelés « indices de Sobol ». Les indices dits « de premier ordre » traduisent l'influence de chaque entrée X_i prise de manière isolée. Les indices dits « totaux » traduisent l'influence de chaque entrée X_i et des interactions qu'elle a avec les autres entrées X_j .

L'indice de sensibilité S_i du premier ordre pour la variable X_i est compris entre 0 et 1, il est donné par l'équation suivante :

$$S_i = \frac{\text{Var}[E(Y|X_i)]}{\text{Var}(Y)}$$

Où $E(Y|X_i)$ est l'espérance conditionnelle obtenue lorsque l'entrée X_i est considérée fixe.

L'indice total ST_i pour l'entrée X_i est donné par l'équation suivante :

$$ST_i = 1 - \frac{\text{Var}[E(Y|X_{\sim i})]}{\text{Var}(Y)} \quad (\text{A.1})$$

Où $E(Y|X_{\sim i})$ est l'espérance conditionnelle obtenue lorsque toutes les entrées autres que X_i sont considérées fixes.

Les indices de sensibilité de Sobol S_i et ST_i présentent plusieurs propriétés :

- $\sum_i S_i \leq 1$: la somme des indices de premier ordre est toujours inférieure ou égale à 1. La différence $1 - \sum_i S_i$ représente le poids de l'interaction entre les entrées dans la variabilité de la sortie du modèle.
- $ST_i \geq S_i$: les indices totaux sont toujours supérieurs ou égaux aux indices de premier ordre. Pour une entrée X_i , la différence $ST_i - S_i$ indique la part de variance de Y qui est expliquée par l'interaction de l'entrée incertaine X_i avec d'autres entrées X_j .

Les indices de premier ordre S_i permettent d'identifier les entrées X_i les plus influentes, c'est-à-dire celles qui expliquent la plus grande part de la variance de Y : elles ont les plus grands indices de premier ordre. Les indices totaux ST_i permettent d'identifier les entrées les moins influentes, c'est-à-dire celles qui n'expliquent qu'une très faible part de la variance de Y , qu'elles soient considérées seules ou en interaction avec les autres entrées X_j : elles ont les plus faibles indices totaux.

B Estimation des indices de sensibilité

On précise dans cette annexe comment estimer les indices de sensibilité des entrées d'un modèle à partir d'évaluations multiples de ce modèle en plusieurs points d'un plan d'expérience. L'ensemble de cette procédure d'estimation est réalisé automatiquement par l'outil SENSAS pour les niveaux 1 et 2 pour les modèles ACB-DE. Cette annexe peut donc tout à fait être ignorée en première lecture. Par ailleurs, la procédure d'estimation est décrite ici très brièvement, le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans l'ouvrage de Saltelli et al. (2008).

L'estimation des indices de sensibilité des entrées d'un modèle passe par la constitution d'un plan d'expérience adapté, puis par l'évaluation du modèle en chaque point de ce plan d'expérience, avant de calculer les estimateurs de chacun des indices de sensibilité.

❖ Constitution du plan d'expérience

Principe

Le plan d'expérience retenu s'appuie sur une démarche de type Monte-Carlo, qui offre l'avantage d'être simple dans son principe et facile à mettre en œuvre. Deux échantillons A et B de même dimension $k \times L$ (où k est le nombre d'entrées du modèle et L la taille de l'échantillon) sont d'abord créés en tirant de manière indépendante, pour chaque entrée X_i , deux échantillons aléatoires $(X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(L)})$ de même taille L dans la densité de probabilité p_i (Fig. Figure A.1).

$$A = \begin{pmatrix} T & DE & CE \\ (9.7, & 859, & 58) \\ (9.3, & 1223, & 67.2) \\ (X_1^{(3)}, & X_2^{(3)}, & X_3^{(3)}) \\ (10.8, & 947, & 51.4) \\ (10.1, & 1146, & 55) \\ (9, & 1208, & 62.3) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ L \\ \downarrow \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} T & DE & CE \\ (9.4, & 1012, & 69.1) \\ (10.6, & 850, & 57.8) \\ (X_1^{(3)}, & X_2^{(3)}, & X_3^{(3)}) \\ (10.2, & 1189, & 62.7) \\ (9.1, & 930, & 51) \\ (9.8, & 988, & 68.5) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ L \\ \downarrow \end{matrix}$$

FIGURE A.1 – Création des deux échantillons A et B

Permutations

Afin de pouvoir « isoler » l'influence de chaque entrée X_i et estimer des indices de sensibilité, les deux échantillons A et B sont ensuite combinés un certain nombre de fois. Plus précisément, le modèle étudié doit être simulé en des points où seule l'une des entrées X_j varie par rapport à un point où le modèle a déjà été simulé. À cette fin, de nouveaux échantillons sont créés par permutations entre les échantillons A et B . Pour j allant de 1 à k , on crée une matrice $A_B^{(i)}$, identique à la matrice A , sauf dans sa $i^{\text{ème}}$ colonne qui est celle de B (Fig. Figure A.2, voir (Saltelli et al. 2008) pour les détails de cette procédure).

$$A = \begin{pmatrix} T & DE & CE \\ (9.7, & 859, & 58) \\ (9.3, & 1223, & 67.2) \\ (X_1^{(3)}, & X_2^{(3)}, & X_3^{(3)}) \\ (10.8, & 947, & 51.4) \\ (10.1, & 1146, & 55) \\ (9, & 1208, & 62.3) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} L$$

$$B = \begin{pmatrix} T & DE & CE \\ (9.4, & 1012, & 69.1) \\ (10.6, & 850, & 57.8) \\ (X_1^{(3)}, & X_2^{(3)}, & X_3^{(3)}) \\ (10.2, & 1189, & 62.7) \\ (9.1, & 930, & 51) \\ (9.8, & 988, & 68.5) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} L$$

$$A_B^{(i)} = \begin{pmatrix} T & DE & CE \\ (9.7, & 1012, & 58) \\ (9.3, & 850, & 67.2) \\ (X_1^{(3)}, & X_2^{(3)}, & X_3^{(3)}) \\ (10.8, & 1189, & 51.4) \\ (10.1, & 930, & 55) \\ (9, & 988, & 62.3) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} L$$

FIGURE A.2 – Création de l'échantillon $A_B^{(i)}$

Plan d'expérience complet

L'ensemble des matrices A , B et de toutes les matrices $A_B^{(j)}$ constitue le plan d'expérience complet P pour l'analyse de sensibilité. Il est de taille $L' = L * (k + 2)$ où k est le nombre d'entrées du modèle.

❖ Estimation des indices de sensibilité

L'évaluation du modèle étudié en un point du plan d'expérience P permet d'obtenir une valeur pour la sortie Y du modèle. L'évaluation de Y pour chacune des lignes des échantillons A , B et $A_B^{(j)}$, permet d'obtenir trois vecteurs de taille L , que l'on note Y_A , Y_B et $Y_{A_B^{(j)}}$. On estime alors les indices de sensibilité de premier ordre et totaux de chacune des entrées X_i par rapport à Y , notés $S_i(Y)$ et $ST_i(Y)$, selon les expressions (Eqn. (A.2)) et (Eqn. (A.3)) recommandées par Saltelli et al. (Saltelli et al. 2008).

$$S_i = \frac{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_B^{(i)} \cdot Y_{A_B^{(i)}}^{(j)} - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_B^{(j)} \cdot Y_A^{(j)}}{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_A^{(j)} \cdot Y_A^{(j)} - \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_A^{(j)} \right) \cdot \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_B^{(j)} \right)} \quad (\text{A.2})$$

$$ST_i = \frac{\frac{1}{2L} \sum_{j=1}^L \left[Y_A^{(j)} - Y_{A_B^{(i)}}^{(j)} \right]^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^L Y_A^{(j)} \cdot Y_A^{(j)} - \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_A^{(j)} \right) \cdot \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_B^{(j)} \right)} \quad (\text{A.3})$$



IRSTEA, UMR G-EAU
361 RUE J.F. BRETON - BP 5095
34196 MONTPELLIER CEDEX 5
Contact: frederic.grelot@irstea.fr
Tel : (+33) [0]4 67 04 63 45

