



HAL
open science

Construction d'un portefeuille sous-jacent virtuel

Sophie Pardo, Robert Kast, André Lapied

► **To cite this version:**

Sophie Pardo, Robert Kast, André Lapied. Construction d'un portefeuille sous-jacent virtuel. *Revue Economique*, 2004, 55 (3), pp.407-418. <10.3917/reco.553.0407>. <hal-02671791>

HAL Id: hal-02671791

<https://hal.inrae.fr/hal-02671791v1>

Submitted on 31 Dec 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC 4.0 - Attribution - Non-commercial use - International License

Construction d'un portefeuille sous-jacent virtuel

Sophie Pardo*
Robert Kast**
André Lapedis***

La théorie des options réelles, utilisée pour évaluer des projets d'investissement ou pour résoudre des problèmes de temps optimal d'investissement, est fondée sur l'existence d'un actif sous-jacent négocié. Cependant, dans de nombreuses applications, un tel actif n'existe pas. Ainsi, l'une des principales difficultés dans l'application des options réelles réside dans la détermination d'un actif sous-jacent pertinent. Dans cet article, nous proposons une méthode de construction d'un sous-jacent virtuel comme un portefeuille d'actifs échangés. Cette construction est fondée sur la maximisation du ratio de corrélation (ou coefficient de corrélation fonctionnelle). Deux exemples d'application concernant l'industrie du cuivre illustrent la méthode.

CONSTRUCTION OF A VIRTUAL UNDERLYING PORTFOLIO

Real option theory, used for valuing investments or solve optimal time schedule problems, is based on the existence of a relevant underlying security. However, in most applied works, there is no obvious asset connected with the risk to value. One of the main difficulty, in applying real option theory to public investments, is to determine a relevant underlying asset. In this paper, we propose a method for constructing a virtual underlying security as a portfolio of marketed assets, optimizing the functional correlation coefficient. We propose two examples using real data concerning copper industry.

Classification JEL : C13, C14, D81, G12, G13.

INTRODUCTION

La théorie des options réelles est utilisée en particulier pour évaluer des projets d'investissement et pour résoudre des problèmes de temps optimal d'investissement. Elle est fondée sur l'existence d'un actif négocié sous-jacent à l'actif réel à évaluer. Dans la pratique, l'existence d'un tel actif n'est pas toujours assurée. Dans cet article, nous proposons une méthode de construction

* INRA-LAMETA, 2 place Viala, F-34060 Montpellier Cedex 2. Courriel : pardo@ensam.inra.fr

** CNRS-LAMETA-IDEP. Courriel : kast@ensam-inra.fr

*** GREQAM-IDEP, Université d'Aix-Marseille. Courriel : lapied@ehess.univ-mrs.fr.

Les auteurs remercient les participants du LII^e congrès de l'AFSE pour leurs commentaires.

d'un portefeuille d'actifs négociés qui joue le rôle d'un sous-jacent. Cette méthode repose sur une représentation de l'incertitude pertinente par la construction d'un portefeuille *le plus corrélé possible* avec l'actif réel que l'on veut évaluer.

La théorie des options réelles s'est développée à partir du milieu des années 1980 dans le sillage des articles fondateurs de McDonald-Siegel [1984] et Brennan-Schwartz [1985]. Elle permet d'évaluer des projets d'investissement en tenant compte de l'incertitude, de la flexibilité et de l'irréversibilité des décisions. Cette théorie repose sur l'analogie entre une option financière d'achat européenne et l'opportunité d'investissement, c'est-à-dire la valeur d'option créée par la possibilité de différer l'investissement. McDonald-Siegel ont mis en évidence cette analogie et ont étendu la théorie de l'évaluation des actifs dérivés financiers à ces investissements « réels ». Ainsi, en utilisant les méthodes de la théorie financière, il est possible non seulement d'évaluer cette option et la valeur du projet mais aussi de résoudre des problèmes de temps optimal d'investissement. L'utilisation de ces méthodes nécessite toutefois un certain nombre d'hypothèses, en particulier sur la forme des processus des variables d'état ; les solutions analytiques ne sont en effet possibles que pour une certaine famille de processus, les mouvements browniens géométriques. Les autres hypothèses fondamentales diffèrent selon la méthode de résolution utilisée. La première méthode est basée sur la programmation dynamique et nécessite le choix du taux d'actualisation considéré comme exogène, ce qui revient à supposer que ce taux est indépendant du risque du projet. Cette hypothèse forte est surmontée par l'utilisation de la seconde approche directement issue de la théorie financière, l'analyse des actifs contingents. En revanche, l'hypothèse fondamentale de cette dernière est que les variations futures de la valeur du projet (considérée comme un actif contingent aux variables d'état) peuvent être répliquées par les actifs financiers présents sur le marché. En d'autres termes, le marché doit être suffisamment complet pour répliquer le risque du projet. Ces hypothèses sont vérifiées dans les modèles classiques d'options réelles, pour lesquels le projet est en général un investissement minier et l'incertitude n'est supposée représentée que par les variations du prix de la matière première. Dans ce cas, en effet, la variable d'état est un actif échangé sur un marché financier et il existe, la plupart du temps, à la fois un marché au comptant et un marché de contrat *futur* pour cet actif. Il est alors possible de construire un portefeuille de réplification des variations futures de la valeur du projet à l'aide de l'actif sans risque et du prix de marché de l'actif. C'est l'application directe de l'évaluation des actifs dérivés à la *Black-Scholes* [1973]. L'application de la théorie des options réelles est plus délicate lorsque le sous-jacent (c'est-à-dire la ou les variables d'état représentant l'incertitude) n'est pas un actif échangé sur un marché financier. Par exemple, Slade [2001] a mis en évidence l'importance de la prise en compte des coûts de production et des réserves, stochastiques, dans l'évaluation d'une mine de cuivre, ces variables n'étant pas des actifs financiers. Pour répondre à cette difficulté l'auteur se réfère au *Capital Asset Pricing Model* afin de calculer le prix de marché du risque de chacun de ces actifs réels et ajuste la dérive de leur processus à l'aide de leur prime de risque. Cette méthode, développée notamment par Cox-Ingersoll-Ross [1985] et Brennan-Schwartz [1985], n'est pas sans poser de problèmes quant au choix du portefeuille de marché pertinent pour des actifs très éloignés du marché. La question de la nature du sous-jacent se pose également dans l'article de Cortazar-Schwartz-Salinas [1998]. Les auteurs s'intéressent au

problème de décision d'investissement optimal d'un producteur de cuivre confronté à des régulations gouvernementales sur les émissions polluantes. L'incertitude est alors représentée par deux variables aléatoires : le prix du cuivre, pour lequel il existe un marché à terme et un marché au comptant et le minerai de cuivre pour lequel il n'existe pas de marché de *future*. Afin de répondre à ce problème de sous-jacent non échangé, l'approche adoptée dans cet article est de choisir un actif financier particulier dont les variations sont les plus corrélées possible avec celles du minerai. Lorsqu'un tel *surrogate asset*¹ existe, la théorie des options réelles peut être appliquée assez directement ; cet actif est alors utilisé afin de construire un portefeuille de couverture qui va servir à l'évaluation et au calcul du temps optimal d'investissement. Cortazar-Schwartz-Salinas considèrent que le prix du minerai peut s'exprimer comme une fraction du prix du cuivre raffiné, l'actif choisi est ainsi le prix du cuivre raffiné.

L'objet de cet article est la construction d'un portefeuille d'approximation qui, dans le même esprit que le *surrogate asset*, représente au mieux l'incertitude de l'actif réel lorsqu'un seul actif ne suffit pas. Nous proposons une méthode de construction d'un tel portefeuille, fondée sur la maximisation du coefficient de corrélation fonctionnelle. L'article est organisé en deux parties. Nous présentons les hypothèses du modèle et la méthode de construction dans la première partie et la seconde est consacrée à l'illustration de la méthode, sur données financières et sur données issues de l'industrie du cuivre.

IDENTIFICATION DE L'INCERTITUDE ET PORTEFEUILLE D'APPROXIMATION

Considérons $V(X)$ la valeur d'un projet dont les flux de paiement sont incertains. Par souci de simplicité, nous nous restreignons ici au cas d'une seule variable d'état. Afin de résoudre un problème de temps optimal d'investissement ou d'évaluer le projet à l'aide de l'analyse des actifs contingents, une hypothèse essentielle est que les variations de la valeur du projet peuvent être reproduites par les actifs échangés sur les marchés. Lorsque X est lui-même un actif échangé, les variations de la valeur du projet seront répliquées par un portefeuille formé de X (qui représente toute l'incertitude pertinente du projet) et de l'actif sans risque. En revanche, lorsque X n'est pas échangé, il est nécessaire de trouver ou de déterminer un actif échangé dont le processus est parfaitement corrélé avec celui de X .

Identification de l'incertitude

Nous nous plaçons dans le cadre d'hypothèses classiques concernant la forme des processus en supposant que la dynamique de tout actif financier Y^i échangé suit un mouvement brownien géométrique :

$$dY_t^i = \mu_i Y_t^i dt + \sigma_i Y_t^i Z_t$$

1. Hubalek-Schachermayer [2000].

De même, nous faisons l'hypothèse que la dynamique de l'actif réel X peut être représentée par un mouvement brownien géométrique :

$$dX_t = \mu_X X_t dt + \sigma_X X_t d\tilde{Z}_t$$

avec $\sigma_X > 0$.

Il est clair que tout actif réel ne peut être représenté par un mouvement brownien géométrique. Cependant, cette hypothèse est très fréquemment utilisée dans les modèles d'options réelles, notamment car elle permet d'obtenir des solutions analytiques. D'autres formes de processus sont également utilisées (Slade [2001]) mais nous nous contenterons de présenter les résultats pour cette hypothèse simple.

L'existence d'une relation déterministe entre X et un actif échangé Y^i permet d'identifier la source d'incertitude de X à celle de Y^i . Ce résultat est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. Soient $\frac{dX}{X} = \mu_X dt + \sigma_X d\tilde{Z}$, et $\frac{dY^i}{Y^i} = \mu_i dt + \sigma_i dZ$, deux mouvements browniens géométriques avec $Z(t)$, $\tilde{Z}(t)$, $0 \leq t \leq T$, deux processus de Gauss-Wiener définis sur un espace de probabilité filtré (Ω, \mathcal{F}, P) qui vérifient $\varepsilon(dZd\tilde{Z}) = \rho dt$ (ρ , coefficient de corrélation supposé constant).

Si $\exists t, 0 \leq t \leq T, \exists \Delta$ un accroissement du temps et $\exists f \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ non-dégénérée tels que :

$$\frac{X_{t+\Delta}}{X_t} = f\left(\frac{Y_{t+\Delta}^i}{Y_t^i}\right)$$

alors $|\rho| = 1$.

Preuve. Voir Kast-Lapied-Pardo [2002] ■

Une stratégie de répliation formée de cet actif Y^i et de l'actif sans risque permet de répliquer les variations de la valeur du projet. Dans le cas où il n'existe pas un tel actif négocié, nous proposons de construire un portefeuille d'actifs négociés $P(Y^i)$, tel qu'il existe une fonction déterministe ϕ entre X et $P(Y^i)$. Sous les hypothèses d'absence de friction, le prix de ce portefeuille est son coût de formation. Pour simplifier les notations, nous posons $P(Y^i) = Y$.

Nous proposons alors de construire un portefeuille Y tel que :

$$\ln\left(\frac{X_{t+\Delta}}{X_t}\right) = \phi\left(\ln\left(\frac{Y_{t+\Delta}}{Y_t}\right)\right) \quad (1)$$

Considérons pour cela N actifs financiers échangés $\{Y^1, \dots, Y^N\}$, suivant des processus browniens géométriques :

$$dY_t^i = \mu_i Y_t^i dt + \sigma_i Y_t^i dZ_i$$

où μ_i sont les dérivées instantanées, σ_i les écarts type, et dZ_i les incréments de processus de Gauss-Wiener tels que $\mathcal{E}(dZ_i dZ_j) = \rho_{ij} dt^1$.

1. Les coefficients de corrélation ρ_{ij} sont constants.

Notons $R_{it} = \ln\left(\frac{Y_t^i}{Y_{t-1}^i}\right)$, le rendement logarithmique¹ de l'actif i . Nous voulons construire un portefeuille Y :

$$R_{Yt} = \sum_{i=1}^N \lambda_i R_{it}$$

avec $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$,

tel qu'il existe une fonction déterministe φ vérifiant :

$$R_{Xt} = \varphi(R_{Yt})$$

où R_{Xt} est la variation logarithmique de X .

PROPOSITION 1. *Sous les hypothèses précédentes, le portefeuille Y suit un mouvement brownien géométrique de la forme :*

$$dY = \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \lambda_i (\lambda_i - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \lambda_i \lambda_j \right] Y dt + \sqrt{\left(\sum_i \sum_j \sigma_i \sigma_j \lambda_i \lambda_j \rho_{ij} \right)} Y dZ$$

où dZ est l'incrément d'un processus de Gauss-Wiener.

Preuve. La preuve s'obtient en appliquant le lemme de Itô à

$$F(Y^1, \dots, Y^N, t) = Y_t = \frac{Y_0}{\prod_{i=1}^N (Y_0^i)^{\lambda_i}} \prod_{i=1}^N (Y_t^i)^{\lambda_i}. \quad \blacksquare$$

D'après le théorème 1, les rendements du portefeuille sont parfaitement corrélés avec ceux de X . Ainsi, Y permet d'identifier la source d'incertitude de X . Dans la section suivante, nous déterminons φ telle que $R_{Xt} = \varphi(R_{Yt})$. L'existence d'une telle fonction déterministe est caractérisée par le coefficient de corrélation fonctionnelle.

Coefficient de corrélation fonctionnelle

Plus général que le coefficient de corrélation (linéaire), le coefficient de corrélation fonctionnelle (CCF), qu'on trouve également sous le nom de ratio de corrélation dans la littérature probabiliste, mesure toute dépendance fonctionnelle entre deux variables aléatoires A et B .

¹ L'utilisation des rendements logarithmiques se justifie dans le cadre de processus browniens géométriques.

CCF est défini par :

$$\eta_{B|A}^2 = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{E}(B|A))}{\mathbf{V}(B)}.$$

Ce coefficient est à valeurs dans $[0, 1]$, et $\eta_{B|A}^2 = 1$ est équivalent à l'existence d'une fonction déterministe f telle que $B = f(A)$ presque sûrement (Saporta [1990]).

Pour répondre à notre problème de construction d'un portefeuille qui joue le rôle d'un sous-jacent, on suppose implicitement l'existence d'une relation fonctionnelle entre les rendements géométriques de X , donnés par R_{Xt} et ceux d'un portefeuille optimal constitué des actifs disponibles sur le marché. Nous pouvons alors construire ce portefeuille Y dont les variations sont données par $R_Y = \sum_{j \in J} \lambda_j^* R_j$, en maximisant le coefficient de corrélation fonctionnelle entre R_X et R_Y :

$$\eta_{R_Y|R_X}^2 = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{E}(R_Y|R_X))}{\mathbf{V}(R_Y)}$$

En pratique, le portefeuille sera calculé, à l'aide des données, en maximisant par rapport à λ_j , la version empirique du coefficient $\eta_{R_Y|R_X}^2$, sous la contrainte $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$. La construction de la version empirique de $\eta_{R_Y|R_X}^2$ nécessite l'estimation des espérances conditionnelles, c'est-à-dire des régressions $g(R_X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(R_Y|R_X)$. Les estimations sont faites par une méthode non paramétrique des fonctions orthogonales¹. Une fois le portefeuille optimal calculé, la fonction φ qui vérifie $R_{Xt} = \varphi(R_{Yt}) + \varepsilon$ peut être estimée par la même méthode non paramétrique. Lorsqu'elle existe, ce calcul nous donne la meilleure approximation de la relation fonctionnelle entre R_X et R_Y . En pratique, le coefficient de corrélation fonctionnelle maximisé n'est pas égal à 1. Le portefeuille est construit pour être le plus corrélé possible à l'actif réel. Dans cette situation, les méthodes d'évaluation des actifs contingents seront celles utilisées en marché incomplet.

ILLUSTRATION DE LA MÉTHODE

Données financières

Cette section a pour but de tester la méthode présentée dans la section précédente sur des données financières. Nous construisons le portefeuille et comparons ses variations à celles de l'actif approximé, puis testons la stabilité de la méthode par rapport au temps.

1. Nous ne détaillons pas ici la procédure d'estimation. Le lecteur peut se reporter à Kast, Lapiéd, Pardo [2002], accessible en ligne sur le site du GREQAM, document de travail 02a18, ou en s'adressant aux auteurs par courriel.

Les données sont constituées des rendements mensuels de 30 actifs financiers du CAC 40, observés au premier de chaque mois. La période d'observation va du 1^{er} janvier 1989 au 1^{er} septembre 1998, correspondant à une taille d'échantillons de $T = 117$. La procédure consiste à choisir un actif et à calculer un portefeuille d'approximation formé des 29 autres. Notons R_{it} la variation géométrique de l'actif i au temps t . Pour un actif fixé i_0 , nous voulons déterminer, à l'aide des 29 autres actifs, le portefeuille optimal dont la variation géométrique est donnée par $R_{Y^*} = \sum_{j \neq i_0} \lambda_j^* R_j$, tel que :

$$(\lambda_j^*)_{j \in J} = \max_{(\lambda_j)_{j \in J}} (\eta_{R_Y | R_{i_0}}^2)$$

(avec $\sum_{j \neq i_0} \lambda_j^* = 1$).

La première étape est la maximisation du CCF, $\eta(Y^* | R_{i_0})$, entre les variations logarithmiques de X_{i_0} et celles du portefeuille. On obtient les coefficients du portefeuille optimal $(\lambda_j^*)_{j \in J}$. On peut alors caractériser la fonction déterministe f telle que $R_{Y^*t} = f(R_{i_0t}) + \varepsilon_1$. Dans un second temps, nous estimons la relation fonctionnelle φ telle que $R_{i_0t} = \varphi(R_{Y^*t}) + \varepsilon_2$ par la même méthode non paramétrique. Cette dernière étape nous donne les variations de l'actif réel estimées à l'aide de la fonction φ et du portefeuille optimal.

Nous avons appliqué cette méthodologie aux 30 actifs. Pour implémenter la maximisation du coefficient empirique, nous avons utilisé Matlab 5.2.0, avec le toolbox d'optimisation version 1.5.2. Notons que, lors de l'application sur ces données réelles, l'algorithme n'a pas convergé dans tous les cas, l'hypothèse d'existence de la relation fonctionnelle n'est pas vérifiée dans tous les cas. Le tableau 1 présente l'erreur quadratique moyenne d'estimation entre les variations log observées de l'actif i et celles estimées à l'aide du portefeuille optimal :

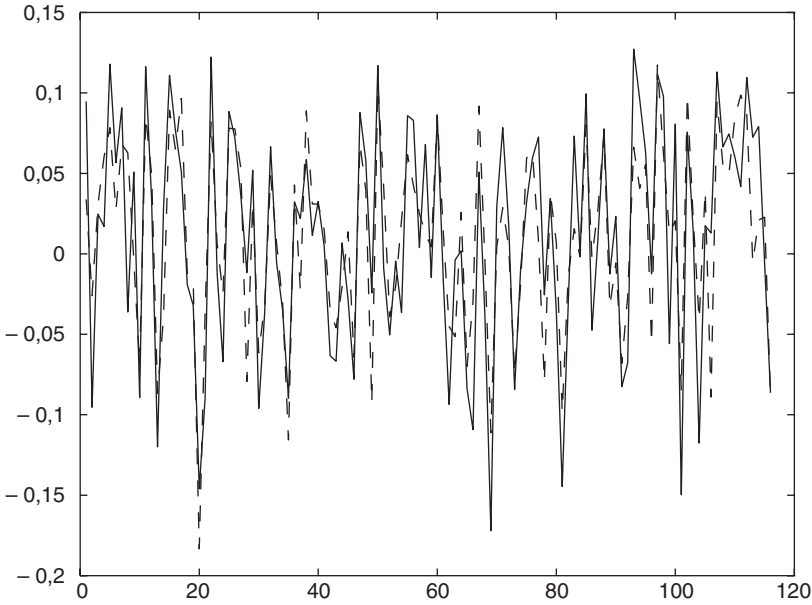
$$EQ_{\eta}(i) = \frac{1}{T} \sum (R_{jt} - \hat{\varphi}_j(R_{Y^*t}))^2$$

où R_{Y^*} est le portefeuille optimal qui maximise η_{emp}^2 et $\hat{\varphi}_j$ est l'estimation de la fonction de régression de R_j sur R_{Y^*} .

Tableau 1. Erreurs quadratiques moyennes

j	EQ_{η}	j	EQ_{η}	j	EQ_{η}	j	EQ_{η}
1	0,0044	8	0,0047	18	0,0025	24	0,0014
2	0,0016	12	0,0022	20	0,0022	25	0,0026
3	0,0037	14	0,0041	21	0,0058	26	0,0015
5	0,0056	16	0,0019	22	0,0066	27	0,0016
6	0,0036	17	0,0022	23	0,0018	30	0,0065

Nous présentons la comparaison graphique pour un actif, $i_0 = 26$ (Vivendi), pour lequel $\eta_{emp} = 0,85$. La figure 1 présente le graphe des variations géométriques de $\hat{\varphi}(R_{Y^*})$ (pointillés) et de R_{i_0} (trait plein).

Figure 1. Comparaison entre $\hat{\phi}(R_{\gamma^*})$ et R_{26} 

La comparaison graphique entre les variations du portefeuille optimal et celles de l'actif que nous avons approximé nous permet de penser que la source d'incertitude est bien identifiée.

Stabilité dans le temps

Nous avons testé la stabilité dans le temps de la méthode comme un indicateur de son pouvoir prédictif. La période d'observation initiale a été divisée en deux sous-périodes, la première pour l'estimation et la seconde pour la prévision. La méthode est appliquée sur les données de la période $\{1, \dots, T - T_0\}$, avec $T_0 \in \{6, 12, 24\}$. De cette façon, un nombre T_0 de mois a été supprimé dans chaque échantillon $(R_{j_t})_j$ pour calculer le portefeuille optimal $(\lambda_j^*)_{j \in J}$.

Les prévisions des variations du portefeuille sur la période $\{T - T_0 + 1, \dots, T\}$ ont été calculées à l'aide des coefficients λ_j^* et des observations R_{j_t} .

Le tableau 2 donne l'erreur quadratique moyenne de prévisions pour deux actifs correspondant à $i_0 = 24$ et $i_0 = 26$, pour un horizon de temps $T_0 = 6, 12$ et 24 mois.

Tableau 2. Erreurs quadratiques moyennes de prévision

	T_0	EQ_P		T_0	EQ_P
	6	0,0028		6	0,00139
$i_0 = 24$	12	0,0030	$i_0 = 26$	12	0,00640
	24	0,0050		24	0,00790

L'erreur de prévision reste du même ordre de grandeur que l'erreur d'estimation mais croît avec l'horizon de temps.

Données de mines de cuivre

Nous présentons deux applications de la méthode concernant l'industrie minière du cuivre, domaine d'application classique des options réelles. Elles illustrent les deux exemples évoqués dans l'introduction. La première fait référence à l'absence de contrats *future* (cf. Cortazar-Schwartz-Salinas [1998]) et dans la seconde, nous nous intéressons aux coûts de traitement du cuivre, variable non échangée sur un marché financier (cf. Slade [2001]).

US Producer's Copper Price

Le prix du cuivre sur le London Market Stock Exchange (LME) ou sur le Commodity Market Exchange (COMEX) est généralement la variable d'état principale dans un problème de choix d'investissement dans une mine de cuivre. Cependant un autre prix, le *US Producer's Copper Price*, qui n'est pas à proprement parler un prix de marché¹, pourrait jouer le rôle de la variable d'état du fait de sa large utilisation par les producteurs de cuivre.

Le *US Producer's Copper Price* n'est pas tout à fait le prix d'un actif financier, mais, surtout, il n'existe pas de contrat *future* qui dépende de ce prix. Nous proposons de construire un portefeuille d'actifs financiers négociés le plus corrélé possible avec le *US Producer's Copper Price*. Les données sont les observations des *US Producer's Copper Price* mensuels, d'août 1992 à décembre 1999 et les 30 principaux actifs du S&P 500 sur la même période². La taille de l'échantillon est $T = 89$.

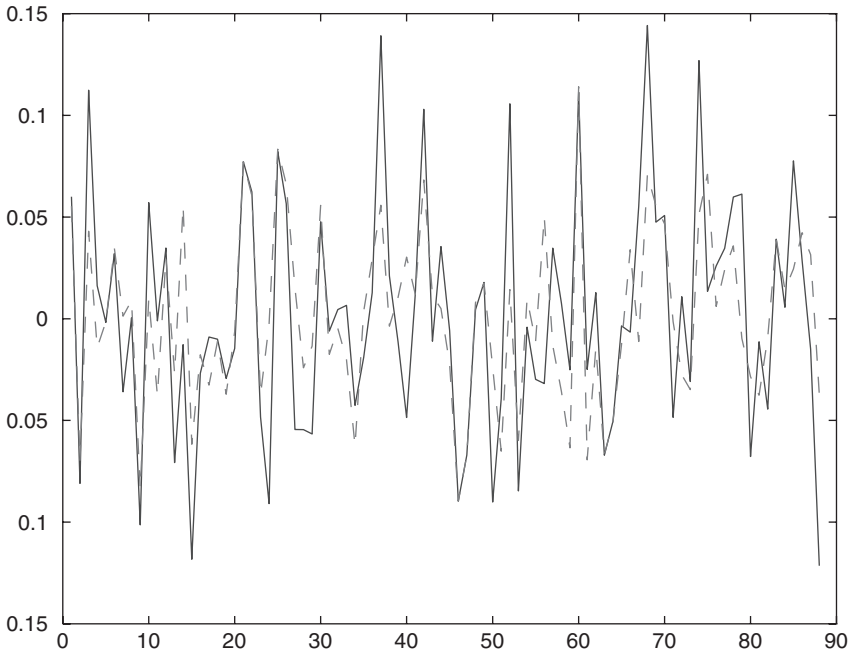
Nous faisons l'hypothèse que le prix producteur suit un mouvement brownien géométrique :

$$dX_{\text{prod}} = \mu_{\text{prod}}X_{\text{prod}}dt + \sigma_{\text{prod}}X_{\text{prod}}dZ_{\text{prod}} \quad (2)$$

Nous construisons le portefeuille optimal qui maximise le coefficient de corrélation fonctionnelle $\eta^2_{(R_{Y^*}|R_{\text{prod}})}$ entre les variations de ce portefeuille et celles du *US Producer's Copper Price*. Une fois le portefeuille construit, nous estimons la relation fonctionnelle ψ telle que $R_{Y^*} = \psi(R_{\text{prod}}) + \varepsilon$. Le CCF optimal est proche de 1 et l'erreur quadratique moyenne entre les variations du portefeuille et $\psi(R_{\text{prod}})$ est $\text{EQ}_{\eta} = 0,0015$. Nous retrouvons une erreur quadratique du même ordre de grandeur que lors de l'illustration sur données financières. La figure 2 présente la comparaison graphique entre la fonction estimée des variations logarithmiques du prix du cuivre producteur et celles du portefeuille (en pointillés).

1. Il représente le prix auquel les producteurs vendent le cuivre aux acheteurs domestiques.

2. Nous remercions Dan Edelstein du US Geological Survey et Bertrand Maillet, Team-Université Paris I, pour leur aide précieuse dans la recherche et la collecte de ces données. Les statistiques descriptives concernant les données ainsi que les paramètres estimés des processus sont disponibles dans Kast-Lapied-Pardo [2002].

Figure 2. Comparaison entre $\hat{\psi}(R_{\text{prod}})$ et R_Y .

D'après ce graphique, les deux processus semblent très fortement corrélés. On peut constater, en effet, que l'approximation de la dynamique est assez bonne. Les variations sont dans le même sens.

Nous avons construit un portefeuille d'actifs échangés qui peut être utilisé dans l'évaluation d'un investissement dans une mine de cuivre. Supposons que $H(X_{\text{prod}})$ est l'opportunité d'exploiter une mine de cuivre, dont la valeur ne dépend que du prix du cuivre producteur. H est une fonction inconnue. La valeur future de l'opportunité (ou de la mine) dépend du prix futur du sous-jacent. Afin de déterminer l'équation aux dérivées partielles qui caractérise cette valeur, nous appliquons la formule d'Itô à la fonction H :

$$dH = H_{X_{\text{prod}}} dX_{\text{prod}} + \frac{1}{2} X_{X_{\text{prod}} X_{\text{prod}}} d(X_{\text{prod}})^2 \quad (3)$$

L'étape suivante est la construction d'un portefeuille de réplcation, formé d'une position longue dans la mine et de $\left(\frac{H_{X_{\text{prod}}} \sigma_{X_{\text{prod}}} X_{\text{prod}}}{\sigma_Y Y}\right)$ positions courtes dans le portefeuille Y . À ce stade, notre portefeuille intervient. En effet, s'il existait un contrat futur pour le cuivre producteur, le portefeuille de réplcation serait formé de cet actif. En l'absence d'un tel actif, le portefeuille de réplcation peut être formé de l'actif sans-risque et de notre portefeuille, en vertu de sa forte corrélation avec le prix producteur.

Coûts de traitement du cuivre concentré

Nous disposons de données mensuelles concernant les coûts de traitement du cuivre concentré¹ sur la période août 1992-juin 2002 (119 observations). La base utilisée est la base américaine formée des 30 actifs du S&P 500 sur la période correspondante.

Nous construisons le portefeuille optimal qui maximise le CCF entre ce portefeuille et les variations des coûts de traitement et nous estimons la fonction φ telle que :

$$R_C = \varphi(R_{Y^*}) \quad (4)$$

où R_C représente les changements logarithmiques des coûts. Cette construction nous donne une estimation du processus des coûts de traitement. La valeur du CCF optimal est 0,69 et la valeur de l'erreur quadratique entre R_C et $\varphi(R_Y)$ est $EQ_\eta = 0,0065$. La comparaison graphique nous a confirmé la mauvaise approximation du processus des coûts par le portefeuille et la fonction. Ces résultats posent la question de la constitution de la base d'actifs. Les 30 principaux actifs du S&P 500 ne captent pas bien (ou ne tiennent pas compte) du risque lié aux variations des coûts de traitement du cuivre, ce qui semble assez intuitif. Il est donc nécessaire de constituer une base plus pertinente en y incluant, par exemple, les prix des principales matières premières sur la période.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé une méthode empirique qui permet de construire un portefeuille d'actifs négociés *le plus corrélé* possible avec un actif réel. Ce portefeuille représente alors au mieux l'incertitude prise en compte par le marché, pertinente pour l'actif réel. Il peut alors être utilisé dans la résolution d'un problème de temps optimal d'investissement ou pour l'évaluation de la valeur du projet par la théorie des options réelles. Cette approche permet une grande flexibilité quant au choix de la base d'actifs utilisée, et cette base est déterminante dans la précision de la méthode. Le choix d'une base d'actifs pertinente et la sensibilité de la méthode à ce choix et à la discrétisation du pas de temps font l'objet de travaux en cours.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BLACK F., SCHOLES M. [1973], « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-654.
 BRENNAN M., SCHWARTZ E.S. [1985], « Evaluating natural resource investments », *Journal of Business*, 58, p. 135-157.

1. Nous remercions Tony Warwick-Ching du groupe CRU, pour nous avoir gracieusement fourni ces données.

- CORTAZAR G., SCHWARTZ E.S., SALINAS M. [1998], « Evaluating Environmental Investments: A Real Options Approach », *Management Science*, 44 (8), p. 1059-1070.
- COX J.E., INGERSOLL J.E., ROSS S.A. [1985], « An Intertemporal General Equilibrium Model of Assets Prices », *Econometrica*, 53 (2), p. 363-384.
- HUBALEK F., SCHACHERMAYER W. [2000], « The Limitations of no-arbitrage arguments for real options », *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4 (2), p. 361-373.
- KAST R., LAPIED A., PARDO S. [2002], « Virtual underlying security », DT-GREQAM 02A18.
- MCDONALD R., SIEGEL D. [1984], « The Value of Waiting to Invest », *Quarterly Journal of Economics*, 101, novembre, p. 707-728.
- SAPORTA G. [1990], *Probabilités, analyse de données et statistique*, Technip.
- SLADE M. [2001], « Valuing managerial flexibility: An application of real options theory to mining investments », *Journal of Environmental Economics and Management*, 41 (2), p. 193-223.