Structuration d'un peuplement hétérogène au moyen d'éclaircies locales

J.C. Pierrat

Ann. For. Sci. 61 (2004) 179–190

DOI: 10.1051/forest:2004010

Article original

Structuration d'un peuplement hétérogène au moyen d'éclaircies locales

Jean-Claude PIERRAT*

Laboratoire d'Étude des Ressources Forêt-Bois, UMR INRA-ENGREF 1092, 14 rue Girardet, 54042 Nancy Cedex, France

(Reçu le 8 août 2002 ; accepté le 12 décembre 2002)

Résumé – Nous présentons un modèle de martelage basé sur des règles locales et ajustons ses paramètres pour rechercher un peuplement de structure déterminée. Le peuplement initial est divisé en cellules d'un nombre constant d'arbres. Une cellule est décrite par les nombres de tiges par classe de diamètre pour chaque essence. Ces variables sont aléatoires, de loi de probabilité modélisée par un mélange de distributions multinomiales, de paramètres connus ou estimés à partir d'un peuplement réel. Les objectifs de l'éclaircie sont de récolter un certain nombre de tiges dans chaque classe et de modeler le peuplement pour qu'une certaine loi de probabilité conjointe de deux arbres de la même cellule soit vérifiée. Le modèle de martelage consiste à classer les arbres de chaque cellule selon un certain ordre de succession des classes et à prélever différents rangs avec certaines probabilités. L'ordre de classement et ces probabilités sont les paramètres qui seront ajustés en minimisant un critère d'écart aux objectifs. Le modèle a été appliqué et validé sur un peuplement mélangé de hêtres et de chênes. Pour divers objectifs, nous présentons les stratégies de coupe. Nous montrons ensuite la variation des optimums selon de la structure du peuplement initial ou selon l'importance donnée aux objectifs locaux ou globaux. En discussion, les extensions du modèle sont envisagées pour se rapprocher des pratiques réelles.

gestion quantitative / éclaircie locale / structure peuplement hétérogène / mélange de distribution statistique / statistique d'ordre

Abstract – Local rules optimization in a mixed stand. We present a treemarking model based on local rules, which optimizes the structure of the stand. The stand is divided into plots with constant number of trees. A plot is described by the number of trees in diameter classes for each species. These variables are random variables and their probability law are modeled by a mixture of multinomial distributions of known parameters (or that have been estimated). Thinning objectives are to harvest given tree numbers in each class and to obtain a given joint distribution of two trees in the same plot. Each plot is thinned by using a rule. A rule ranks the trees in the plot according to some criterion and selects rank with certain probability. This criterion and these probabilities are the model parameters. They will be adjusted on objectives, taking into account the stand structure. The model is applied and validated on a mixed oak-beech stand. We present the obtained thinning strategy for each objective. We show the influence of the stand structure and of the weight given at global and local objectives on the optimum. In conclusion, extension of the model is discussed to be closer to the real sylvicultural practice.

quantitative management / locale thinning / mixed stand structure / mixture of statistical distribution / order statistics

1. INTRODUCTION

En forêt hétérogène, le marquage de l'éclaircie est toujours une opération délicate où il importe autant de remodeler le peuplement restant sur pied que de procéder à la récolte immédiate. Des objectifs généraux sont souvent explicites mais, pour les atteindre, peu de procédures standardisées sont disponibles [8, 9], et davantage de formalisme apparaît souhaitable pour résumer et expliquer les pratiques possibles ou pour concevoir les programmes informatiques pilotant de futures machines de bûcheronnage [6]. Dans cet esprit, nous proposons ici un ensemble de stratégies d'éclaircie standardisées parmi lesquelles la mieux adaptée à un peuplement et à des objectifs particuliers pourra être recherchée.

Les éclaircies considérées prennent en compte les critères d'espèce, de diamètre et d'organisation spatiale du peuplement où l'on cherche à favoriser statistiquement certains arrangements des arbres dans l'espace, sans pour autant viser une « forêt géométrique ».

Au niveau global du peuplement, il s'agira d'éviter la formation de classes creuses dans la distribution diamétrale, tout en se souciant de la valeur économique de la récolte ; plus précisément, les objectifs seront définis en terme de nombre moyen d'arbres à prélever (ou à conserver) par classe de diamètre pour chaque essence.

Au niveau local de petits groupes d'arbres, il s'agira de favoriser la présence de telle classe d'arbre au voisinage de telle

* Corresponding author: pierrat@nancy-engref.inra.fr

autre, de veiller à leur compatibilité ou encore de conserver la diversité locale ; à ce niveau, le critère quantitatif retenu sera la loi de probabilité conjointe de deux arbres du même groupe. Ces critères globaux et locaux, seront pondérés pour former un critère unique d'évaluation d'une stratégie d'éclaircie.

Habituellement, c'est à l'échelle du petit groupe d'arbres que s'apprécie l'opportunité de garder tel ou tel arbre, telle ou telle organisation. L'échelle locale a donc été choisie pour la mise en œuvre de l'éclaircie : nous imaginerons le peuplement divisé en cellules contenant un nombre constant d'arbres (fixé à la mesure du champ de vision de l'opérateur) et nous appliquerons sur chacune une règle qui dirige le choix des arbres à prélever. Elaborer cette règle coordonnant des prélèvements dispersés dans l'espace est le centre d'intérêt de cet article. La méthode consistera à ajuster les paramètres d'un modèle de prélèvement sensible aux objectifs et à la structure du peuplement initial.

Dans la section suivante « matériel et méthode », nous présenterons les modèles en présence.

Tout d'abord, nous nous intéresserons à celui du peuplement initial. Comme dans [4], nous avons utilisé un modèle statistique de mélange de distribution pour modéliser la loi de probabilité de la composition d'une cellule. Nous rappellerons brièvement ce modèle, en déduirons la loi des statistiques d'ordre puis présenterons les paramètres estimés sur un peuplement réel.

Ensuite, nous préciserons la description des objectifs de l'éclaircie, avec quelques exemples illustrant les objectifs de structure locale.

Enfin, nous exposerons le modèle de prélèvement. Nous établirons le système d'équations linéaires qui relie ses paramètres aux objectifs et en déduirons l'algorithme d'ajustement.

En section « résultats », ces modèles seront mis en œuvre numériquement. Nous comparerons les stratégies d'éclaircie obtenues pour les différents objectifs locaux, une fois atteint l'objectif en distribution diamétrale. Ensuite, deux études de sensibilité d'une stratégie seront effectuées, la première par rapport au poids de l'objectif global relativement à celui de l'objectif local, la seconde par rapport à la structure initiale du peuplement.

Une validation de la démarche a été effectuée : comme nous disposons de la cartographie du peuplement, les stratégies trouvées seront mises en œuvre et les résultats moyens obtenus seront comparés aux moyennes théoriques.

En conclusion, les limitations du modèle et perspectives seront discutées.

2. MATÉRIELS ET MÉTHODES

2.1. Modèle du peuplement initial

Le peuplement est constitué par trois placettes témoins du dispositif d'expérimentation de Réno-Valdieu [2] que nous avons divisées en cellules contenant 6 arbres. Ce peuplement est âgé d'environ 80 ans et d'une surface totale de 0,6 ha. On dispose des diamètres, espèces et coordonnées de tous les arbres. Après exclusion de 300 arbres trop petits pour avoir un intérêt sylvicole, ce peuplement contient 768 arbres avec 36 % de hêtres et 64 % de chênes, assez mélangés du moins à première vue. Trois classes de circonférence ont été définies pour chacune des deux espèces : petits (p) de 30 à 70 cm, moyens (m) de 70 à 100 cm et gros (g) au-dessus de 100 cm. Par la suite gc sera l'abréviation de gros chênes, … ph sera celle de petit hêtre.

Dans un premier temps, une cellule est décrite par un vecteur Y = $(Y_1, \ldots, Y_k, \ldots, Y_K)$ où les Y_k sont les nombres d'arbres dans des classes de diamètre pour chacune des espèces, K le nombre total de classes. Pour modéliser la loi de probabilité de Y, en tenant compte des dépendances entre arbres d'une même cellule, nous avons utilisé un modèle de mélange de lois [4], dont le principe est présenté en toute généralité dans [3]. Celui-ci repose sur deux hypothèses : d'une part, les arbres d'une cellule proviennent tous aléatoirement d'une parmi J populations (appelée composantes par la suite) et d'autre part, une fois connue la composante d'origine les arbres sont indépendants (la loi de Y est multinômiale).

Lorsque J est fixé, les distributions de chaque composante peuvent être estimées par l'algorithme EM [3]. Pour déterminer le nombre J, nous avons utilisé la procédure bootstrap indiquée dans [7], procédure qui teste le nombre de composantes à J contre (J+1). Nous avons trouvé que trois composantes sont ici nécessaires. Leurs effectifs sont présentés tableau Ia.

Par la suite, la cellule sera décrite par la liste des arbres classés selon un certain ordre de succession des classes.

Nous noterons les statistiques d'ordre $(D^{(1)}, \ldots, D^{(n)})$, n étant le nombre d'arbres par cellule, $D^{(1)}$ le premier de la liste, $D^{(n)}$ le dernier. Les $D^{(i)}$ sont des variables aléatoires (à valeurs dans les numéros de classe) dont les lois ainsi que les lois conjointes peuvent être calculées numériquement, à partir des lois de Y calculées précédemment. En effet, pour chaque composante, ces lois sont données par les formules indiquées en annexe de [5] et pour obtenir le résultat final, il suffit de sommer ces lois en pondérant par la fréquence de chaque composante. Par exemple, en notant P(j) la fréquence de la composante j,

$$P(D^{(1)} \in \text{classe } k) = \sum_{j=1}^{J} P(D^{(1)} \in \text{classe } k/j)P(j).$$

À partir de ceux-ci, nous avons calculé la loi des probabilités conjointes de deux arbres de la même cellule (paragraphe 5 de l'annexe de [5]). Les résultats sont présentés tableau Ib. Par comparaison avec la structure au hasard (Tab. Ic), on remarque l'agrégation des pc (cette remarque peut aussi être faite à partir du tableau Ia où l'on note le sous effectif des pc dans la composante 3 et symétriquement le sur effectif des gros arbres).

On remarque par ailleurs que le modèle à trois composantes est plus proche de l'estimation directe (Tab. Id) que le modèle à une composante.

2.2. Description des objectifs de l'éclaircie

2.2.1. Critère d'optimisation

Comme indiqué en introduction, les objectifs sylvicoles sont résumés par deux caractéristiques. D'une part, les effectifs à prélever dans chaque classe, notés par la suite (e_k^* ; k = 1,K). D'autre part, la matrice P^* dont l'élément P_{kq}^* (k = 1, K ; q = k,K) est la probabilité que deux arbres pris aléatoirement dans une même cellule soient dans les classes k et q (la cellule étant elle-même tirée aléatoirement dans l'ensemble des cellules).

Pour atteindre ces objectifs, nous avons cherché la stratégie de prélèvement (voir paragraphe 2.3) qui minimise le critère :

$$C = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k^2 (e_k - e_k^*)^2 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=k}^{K} \beta_{k,q}^2 (P_{kq} - P_{kq}^*)^2$$

Tableau I. Peuplement initial. (a) Effectifs par classe dans chaque composante du mélange. (b) Loi de probabilité conjointe de deux arbres issus d'une même cellule (estimée par le modèle). (c) Loi de probabilité conjointe de deux arbres issus d'une même cellule (hypothèse d'une structure spatiale aléatoire). (d) Loi de probabilité conjointe de deux arbres issus d'une même cellule (estimée directement sur les données).

(a)	ph	mh	gh	pc	mc	gc	Total	%
Composante 1	95	4	0	205	61	5	370	48.2
Composante 2	13	8	4	74	6	0	105	13.7
Composante 3	86	41	30	53	68	15	293	38.1
Total	194	53	34	332	135	20	768	

(b)	ph	mh	gh	pc	mc	gc
ph	0,0660	0,0184	0,0122	0,1011	0,0475	0,0074
mh		0,0081	0,0059	0,0200	0,0139	0,0028
gh			0,0040	0,0108	0,0094	0,00200
pc				0,2275	0,0657	0,0072
mc					0,0336	0,0056
gc						0,0010

(c)	ph	mh	gh	pc	mc	gc
ph	0,0636	0,0174	0,0112	0,1093	0,0445	0,0066
mh		0,0047	0,0031	0,0299	0,0121	0,0018
gh			0,0019	0,0192	0,0078	0,0011
pc				0,1866	0,0761	0,0113
mc					0,0307	0,0046
gc						0,0007

(d)	ph	mh	gh	pc	mc	gc
ph	0,0677	0,0177	0,0140	0,0992	0,0468	0,0070
mh		0,0099	0,0068	0,0198	0,0130	0,0018
gh			0,0036	0,0109	0,0075	0,0013
pc				0,2265	0,0685	0,0073
mc					0,0322	0,0075
gc						0,0010

Tableau II. Objectifs des effectifs par classe.

	ph	mh	gh	pc	mc	gc	Total
Effectifs restant	150	35	20	290	100	10	605
Effectifs à couper	44	18	14	42	35	10	163
% (coupé/initial)	22,7	34,0	41,2	12,6	25,9	50	21,2

où e_k est l'effectif moyen prélevé dans la classe k avec une certaine stratégie, $e_k - e_k^*$ est donc l'écart entre l'objectif et la valeur obtenue pour la stratégie de coupe considérée.

Les α_k sont des poids traduisant l'importance que le sylviculteur accorde aux effectifs prélevés dans les différentes classes.

P est la matrice de probabilité des états de deux arbres d'une même cellule après coupe. $P_{K,q} - P_{kq}^*$ est l'écart entre l'objectif et la valeur obtenue pour la stratégie de coupe considérée.

Les $\beta_{k,q}$ sont des poids traduisant l'importance relative que le sylviculteur accorde aux objectifs d'organisation spatiale du peuplement.

Remarques

– Le premier terme du critère correspond à un objectif au niveau du peuplement, le second à un objectif d'organisation à l'échelle de la cellule. Les poids α_k et $\beta_{k,q}$ seront utilisés pour analyser la sensibilité de la stratégie optimale selon l'importance relative donnée aux objectifs globaux et locaux.

En particulier, avec des poids α_k forts qui permettront d'atteindre au mieux l'objectif en distribution diamétrale, nous pourrons regarder la stratégie de coupe selon différents *P**.

– Certains poids peuvent être nuls et dans ce cas, il n'est pas nécessaire de renseigner l'objectif correspondant. Ainsi, les P_{kq}^* dont la valeur est de peu d'intérêt ou difficile à donner peuvent ne pas intervenir.

– Chacun des termes de *P** peut être choisi indépendamment, éventuellement sans se soucier de ce qui est possible (la matrice P* n'a pas de contraintes, à la différence de la matrice P). Ainsi, pour favoriser la présence simultanée dans la cellule d'arbres de classes *k* et *q*, l'on mettra $P^*(k,q)$ à un, ce qui revient à maximiser cette probabilité. Au contraire, pour diminuer l'association de ces deux classes, $P^*(k,q)$ sera choisie égale à zéro.

– Les poids pourraient aussi être choisis pour homogénéiser les deux termes du critère (on prendra alors $\alpha_k = 1/e_k^*$ et $\beta_{k,q} = 1/P_{kq}^*$), mais cette option n'a pas été étudiée ici.

2.2.2. Exemples d'objectifs

Pour *e**, nous avons choisi un exemple (Tab. II) où le pourcentage d'arbres coupés augmente dans les catégories de gros diamètre. En réalité, le choix de ces valeurs est délicat et fait intervenir la dynamique de croissance et des considérations économiques.

Pour *P**, quatre objectifs locaux ont été envisagés successivement :

– Favoriser la formation de taches de pc. L'élément *P**(pc, pc) vaudra 1, les autres éléments n'étant pas spécifiés ($\beta_{k,q} = 0$ si *k* # pc et *q* # pc).

– Favoriser la dispersion spatiale des pc. L'élément *P**(pc, pc) vaudra 0, les autres éléments n'étant pas spécifiés.

– Favoriser l'agglomération des pc et la dispersion des ph. L'élément *P**(pc, pc) vaudra 1, l'élément *P**(ph, ph) vaudra 0, les autres éléments n'étant pas spécifiés.

– Favoriser un mélange aléatoire des arbres de toute classe. La matrice *P** prendra les valeurs calculées selon l'hypothèse d'une répartition au hasard des arbres restants (Tab. X).

2.3. Le modèle de prélèvements locaux

Pour déterminer les arbres à prélever sur chacune des cellules, nous proposons de modéliser les règles d'éclaircie, puis d'ajuster les paramètres en minimisant le critère C. Pour faciliter l'exposé, le modèle sera présenté en 3 étapes de complexité croissante, le dernier étant retenu dans la suite de l'article.

2.3.1. Modèle M1

Supposons les arbres de la cellule, ordonnés selon une certaine succession des classes (par exemple, par espèce puis à l'intérieur de celle-ci par grosseur) et des prélèvements d'arbres à différents rangs (par exemple, le 1^{er} et le 4^{e}).

Selon que tel ou tel rang est prélevé, les effectifs moyens récoltés dans les différentes classes ainsi que les dépendances entre les arbres restant vont varier. Nous avons donc la possibilité de minimiser le critère C en choisissant les rangs à prélever.

Lorsque l'ordre de classement varie, un autre système de variables décrit les cellules, avec des liaisons entre rangs différentes. Parmi tous les ordres possibles, nous chercherons l'ordre pour lequel les objectifs seront ajustés au mieux. Il pourra éventuellement être interprété en explicitant l'adéquation entre cette description et les objectifs sylvicoles.

Le modèle M1 se résume donc par un classement des arbres dans chaque cellule selon un certain ordre et par une liste déterministe de rangs à prélever. L'ordre et ces rangs sont les paramètres qui seront ajustés.

Notons que les objectifs interviennent dans le critère et que la structure du peuplement initial intervient dans le calcul des lois de probabilité des rangs (statistiques d'ordre). Il y a donc bien séparation entre les objectifs d'éclaircie et la structure initiale du peuplement.

2.3.2. Modèle M2

Dans le modèle M1, la règle était identique pour toutes les cellules. Il semble néanmoins avantageux de la différencier selon le contenu de la cellule, par exemple pour récolter davantage d'arbres dans les cellules en désaccord avec les objectifs.

Une extension simple serait de faire varier la règle selon la valeur prise par la médiane. Nous avons envisagé une option un peu plus générale dans laquelle la règle dépend de la valeur prise par une statistique d'ordre dont le numéro $n0$ ($1 <= n0 <= n$) est un paramètre à ajuster.

Par ailleurs, dans le souci de disperser les prélèvements dans l'espace, le nombre d'arbres prélevés dans une cellule a été limité à deux arbres (dans le logiciel, on prélève zéro, un ou deux arbres par cellule).

2.3.3. Modèle M3

Dans le modèle M2, la règle est identique pour les cellules de même contenu. Pour prendre éventuellement des décisions différentes dans des situations identiques, ce modèle a été probabilisé : sachant la valeur prise par la statistique d'ordre $n0$, les rangs sont prélevés avec certaines probabilités. Ces probabilités seront de nouveaux paramètres.

En notant, n le nombre d'arbres par cellule et K le nombre de classes, les paramètres du modèle sont alors :

OR : l'ordre de classement des arbres de la cellule.

no : le numéro de la statistique d'ordre D^{no} conditionnant la décision.

a_{ir} : ($i = 1, n$; $r = 1, K$) la probabilité de prélever l'arbre de rang i seul dans une cellule où $D^{no} = r$.

$b_{i,j,r}$: ($i = 1, n-1$; $j = i+1, n$; $r = 1, K$) la probabilité de prélever les arbres de rang i et j dans une cellule où $D^{no} =$ r.

c_r : la probabilité de n'effectuer aucun prélèvement dans une cellule où $D^{no} = r$.

Remarques

– Connaissant D^{no}, il y a $(n + n \times (n-1)/2 + 1)$ décisions possibles. En pratique, le choix de la décision sera plus restreint car l'algorithme retournera une probabilité nulle pour beaucoup.

– Les paramètres a, b, c doivent être positifs ou nuls et satisfaire les contraintes de normalisation :

$$\forall r,\ c_r + \sum_{i=1}^{n} a_{i,r} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} b_{i,j,r} = 1.$$

2.4. Optimisation

Dans une première étape, OR et $n0$ sont fixés. Chaque élément e_k et $P_{k,q}$ s'écrit linéairement en fonction des paramètres a, b, c. (voir paragraphe 1 et 2 en annexe). En l'égalant à sa valeur objectif (son homologue étoilé), on obtient une équation. Celle-ci a été multipliée par le poids correspondant (α_k ou $\beta_{k,q}$) de façon à pondérer les objectifs locaux et globaux. Le système a été résolu par moindres carrés sous contrainte de positivité et de normalisation des coefficients [1].

Dans une seconde étape, le critère a été minimisé en parcourant l'ensemble des valeurs de OR et $n0$.

Remarques

– La matrice objectif n'a pas de contraintes mais la matrice P vérifie :

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{q=k}^{K} P_{k,q} - \sum_{q=1}^{K} P_{qq} = 1.$$

– Les marges de P ont une interprétation :

$$P_k = \sum_{q=1}^{k} P_{kq} - P_{kk}$$

est la probabilité de tirage d'un arbre de classe k.

Notons que ce n'est plus la fréquence de la classe k dans le peuplement final (les arbres des « petites » cellules (cellules de $n-2$ arbres) ont une probabilité supérieure d'être tirés).

P_k dépend linéairement des paramètres a, b, c. Son ajustement serait possible en introduisant ces relations dans le système d'équations, mais n'est pas dans l'objectif de cet article.

2.5. Démarche de validation

Comme la stratégie et la composition des cellules sont aléatoires, les résultats vont présenter une variabilité qu'il faut préciser. D'autre part, il y a nécessairement un écart entre la structure du peuplement réel et celle modélisée et il faut vérifier que cela n'entraîne pas de biais important.

Le peuplement de Réno-Valdieu étant cartographié, un programme informatique [4] a permis d'obtenir différentes découpes du peuplement en cellules de 6 arbres. Pour chaque découpage, les stratégies de prélèvements correspondants aux divers objectifs ont été mises en œuvre cellule par cellule. Les effectifs prélevés dans chaque classe ont été observés et la matrice P calculée par comptage des couples (k, q) dans les cellules. Cette procédure a été répétée 5000 fois, les valeurs moyennes ainsi que les écarts types ont été calculés.

Nous jugerons alors si les résultats moyens sont proches de l'objectif et si leurs écarts-types sont raisonnables d'un point de vue pratique.

3. RÉSULTATS

3.1. Exemples de stratégie

Dans ce paragraphe, nous présentons les stratégies visant l'objectif global présenté tableau II et différents objectifs

Tableau III. Stratégie d'agrégation des petits chênes.

3^e statistique d'ordre		Stratégie		Effectifs coupés						
				par classe						Total
Valeur	Freq. %	Rang à prélever	Freq.	ph	mc	gc	gh	mh	pc	
ph	18,2	5, 6	39,8	0,4	3,1	1	2,1	3,9	20,2	30,7
		6	51,9							
		aucun	8,2							
mc	33,7	1, 2	9,1	6,4	3,1	0	0	0	0	9,5
		2, 3	1,9							
		aucun	89,1							
gc	4,6	2, 3	83,3	1,5	3,1	6,3	0,3	0,2	0,3	11,7
		3, 4	16,7							
gh	5,4	2, 3	100	1,7	3,4	0,9	7,8	0	0	13,8
mh	5,6	1, 2	0,4	1,6	2,7	0,5	1,4	8,2	0	14,4
		2, 3	99,6							
pc	32,4	1, 2	100	32,5	19,6	1,4	2,3	5,6	21,5	82,9
Total				44,0	35	10,1	13,9	17,9	42	163
Objectif (rappel)				44	35	10	14	18	42	163

locaux. Une forte pondération a été donnée à l'objectif global, pour que l'ajustement de la distribution diamétrale soit correct.

3.1.1. Objectif local d'agrégation des petits chênes

La stratégie optimale est présentée tableau III. L'ordre optimal trouvé est ph, mc, gc, gh, mh, pc. La statistique conditionnante est la 3^e statistique d'ordre. Le tableau indique que lorsque D^3 est un ph, ce qui se produit théoriquement dans 18.2 % des cellules, il faut prélever les rangs 5 et 6 avec une probabilité de 0.398, le rang 6 avec une probabilité de 0.519 et ne rien prélever avec une probabilité de 0.082. Les colonnes suivantes indiquent les effectifs prélevés par ces actions (nous n'avons pas présenté les détails par décisions possibles). La dernière ligne donne les effectifs prélevés par classe. On remarque ici que l'ajustement de la distribution diamétrale est correct.

Cette stratégie consiste à prélever les pc lorsqu'ils sont isolés dans les cellules et les arbres d'autres catégories lorsque les pc sont fortement représentés dans la cellule. En effet, lorsque D^3 est un ph, la cellule ne peut contenir beaucoup de pc ; on prélèvera alors un total de 20.2 pc. Lorsque D^3 est un pc, la cellule contient au moins 4 pc ; on prélèvera 61.4 arbres autres que pc (toutefois, on enlève 21.5 pc). Après prélèvement des rangs 1 et 2, les cellules contiennent uniquement des pc, P(pc,pc) vaut alors 1. Avec cette stratégie, P(pc,pc) passe de 0.2275 à 0.3941.

Dans les cellules où D^3 est un ph (qui contiennent donc au moins 3 ph), les prélèvements de pc font augmenter l'agrégation des ph et de fait P(ph,ph) passe de 0.0636 à 0.0972. Nous chercherons au paragraphe 2 une stratégie alternative qui disperse les ph tout en agrégeant les pc.

3.1.2. Objectif local de dispersion des petits chênes

La stratégie optimale est présentée tableau IV. L'ordre optimal est pc, mc, ph, mh, gh, gc. La statistique conditionnant est la 4^e statistique d'ordre.

Remarquons qu'aucun prélèvement n'est effectué dans les cellules contenant au moins 4 pc (où D^4 est un pc). La stratégie consiste à prélever les pc dans les taches d'importance moyenne.

Lorsque les pc sont moins présents, les autres catégories sont récoltées.

Avec cette stratégie, P(pc,pc) passe de 0.2275 à 0.2124.

3.1.3. Objectif de mélange aléatoire de toutes les catégories

La stratégie optimale est présentée tableau V. La 4^e statistique d'ordre est la statistique conditionnante.

Initialement les arbres de même classe avaient tendance à être groupés (comparaison des Tabs. Ib et Ic). Pour diminuer cette liaison, la stratégie optimale préleve dans la classe majoritaire dans la cellule, ceci est particulièrement net pour les pc et ph.

La matrice objectif est globalement assez bien ajustée (Tab. Xb).

Tableau IV. Stratégie de dispersion des petits chênes.

4^e statistique d'ordre		Stratégie		Effectifs coupés par classe						Total
Valeur	Freq. %	Rang à prélever	Freq.	pc	mc	ph	mh	gh	gc	
pc	32,4	aucun	100	0	0	0	0	0	0	0
mc	24,3	2, 6	55,8	22,6	13	11	2,4	1,6	1,6	52,2
		3, 4	11,9							
		3	32,2							
ph	33,7	2, 6	88,4	18,2	18,1	23,6	9,5	9,7	7,4	86,5
		3, 4	11,6							
mh	7,6	2, 3	56,7	1,2	3,7	8,4	5,2	0,6	0,5	19,6
		3, 4	30,8							
		3, 6	12,5							
gh	1,8	3, 4	74,3	0	0,2	0,9	0,8	2,1	0,4	4,4
		3, 6	25,7							
gc	0	3, 4	100	0	0	0	0	0	0	0
Total				42	35	43,9	17,9	14	9,9	162,7
Objectif (rappel)				42	35	44	18	14	10	163

Tableau V. Stratégie de mélange aléatoire de toutes les catégories.

4^e statistique d'ordre		Stratégie		Effectifs coupés par classe						Total
Valeur	Freq. %	Rang à prélever	Freq.	mh	gh	mc	gc	ph	pc	
mh	0,2	4, 5	91,4	0,2	0	0,1	0	0	0	0,3
		aucun	8,6							
gh	1	1, 2	41,4	1,3	1,5	0	0	0	0	2,8
		3, 4	58,6							
mc	10,5	1, 2	23,9	5,9	4,8	4	0	0	0	14,7
		2, 3	2,2							
		2	55,9							
		aucun	18							
gc	3,8	1, 4	66,9	2	0,9	1,8	5,1	0	0	9,8
		3, 4	33,1							
ph	32,3	1, 2	23,7	8,4	6,6	26,7	4,6	31,2	0	77,5
		1, 3	15,1							
		2, 3	25,4							
		2, 4	16,3							
		3, 4	12,8							
		aucun	6,7							
pc	51,9	2, 6	13,9	0,2	0,3	2,5	0,4	12,7	42	58,1
		3, 4	22,4							
		3	14,6							
		aucun	49,1							
Total				18	14,1	35,1	10,1	43,9	42	163,2
Objectif				18	14	35	10	44	42	163

Tableau VI. Sensibilité des optimums aux coefficients du critère.

Poids de l'objectif global		Poids ph nul Poids pc fort	Poids ph moyen Poids pc moyen	Poids ph fort Poids pc nul
Fort	P(pc,pc)	0,3941	0,3131	0,2864
	P(ph,ph)	0,0972	0,0411	0,0362
	$\sum_{k=1}^{K} \lvert e_k^* - e_k \rvert$	0	0	0
Moyen	P(pc,pc)	0,4081	0,3206	0,2761
	P(ph,ph)	0,0608	0,0300	0,0292
	$\sum_{k=1}^{K} \lvert e_k^* - e_k \rvert$	13	26	14
Faible	P(pc,pc)	0,4292	0,3921	0,2829
	P(ph,ph)	0,0595	0,0248	0,0193
	$\sum_{k=1}^{K} \lvert e_k^* - e_k \rvert$	21	55	32
Nul	P(pc,pc)	0,4519	0,4519	0,4519
	P(ph,ph)	0,0094	0,0094	0,0094
	$\sum_{k=1}^{K} \lvert e_k^* - e_k \rvert$	148	148	148

En conclusion, les trois stratégies précédentes, très différentes entre elles, permettent néanmoins d'atteindre les mêmes objectifs globaux, avec au final des structures locales bien différentes.

3.2. Analyse de sensibilité

3.2.1. Sensibilité des optimums à l'importance relative des différents objectifs

Dans ce paragraphe, l'objectif global de l'éclaircie est toujours celui indiqué tableau II, l'objectif local est d'agréger les pc et de disperser les ph. On peut s'attendre à ce qu'une tolérance sur les objectifs globaux autorise une meilleure réalisation des objectifs locaux. Nous chercherons à préciser dans quelle mesure.

Le tableau VI présente les optimums pour différents poids donnés à chacun de ces objectifs (l'importance de l'objectif global varie en ligne et l'importance des l'objectifs ph et pc varie en colonne). On peut notamment remarquer la continuité des optimums et leur gamme de variation relativement importante.

Quelques commentaires généraux peuvent être faits les stratégies correspondantes (mais, toutes ne peuvent être présentées par manque de place).

Lorsque l'objectif global perd de son importance, on observe une diminution de l'effectif de pc coupé et une augmentation du nombre de ph (et de mc). Lorsque tous les α_k sont nuls (dernière ligne), la stratégie optimale consiste simplement à prélever les rangs 1 et 2 dans toutes les cellules, pour l'ordre de classement ph, gc, gh, mh, mc pc. Ainsi, les ph sont prélevés prioritairement et les pc en dernier : un maximum de ph et un minimum de pc sont prélevés, quels que soient leurs poids relatifs.

Lorsque « l'objectif dispersion des ph » prend de l'importance, le prélèvement des ph se fait davantage dans les taches de ph. Le prélèvement des pc se fait lorsque la cellule contient peu ou pas de ph et de sorte que la cellule ne contient plus que des pc (Tab.VII, présentant la stratégie où le poids des objectifs globaux est fort, le poids ph est moyen, le poids pc est moyen).

3.2.2. Sensibilité à la structure initiale du peuplement

Nous considérons ici un peuplement initial théorique représenté par un modèle à 10 composantes identiques (les arbres de même classe sont sur dispersés). L'objectif global est toujours celui du tableau II. L'objectif local est d'agréger les pc et de disperser les ph. Un fort poids a été donné à l'objectif global et des poids moyens aux objectifs locaux.

La stratégie optimale est présentée tableau VIII. Elle diffère avec celle obtenue avec le peuplement réel (Tab. VII) : les ph sont moins prélevés dans les taches de ph (D^3 = ph), davantage de pc sont coupés (D^3 = mc).

Avec cette stratégie P(pc,pc) passe de 0.1837 à 0.3194 et P(ph,ph) passe de 0.06136 à 0.0453.

Tableau VII. Stratégie d'agrégation des petits chênes et dispersion des petits hêtres.

2^e statistique d'ordre		Stratégie		Effectifs coupés						
				par classe						Total
Valeur	Freq. %	Rang à prélever	Freq.	ph	gc	gh	mh	mc	pc	
ph	47,0	1, 3	44,0	36,8	2,4	2,7	2,5	5,6	3	53
		aucun	56,0							
gc	5,5	2, 3	27,3	0	7,3	0,6	0,4	0,5	0,2	9
		2	72,7							
gh	7,3	2, 3	62,4	0	0	9,9	2,7	1,5	1,7	15,8
		2, 6	4,8							
		2	21,8							
		6	11,0							
mh	8,3	2	100	0	0	0	10,7	0	0	10,7
mc	17,7	2, 3	71,1	0	0	0	0	23,2	15,6	38,8
		6	28,9							
pc	13,8	1, 4	100	7,2	0,3	0,7	1,6	4,2	21,5	35,5
Total				44	10	13,9	17,9	35	42,0	162,8
Objectif (rappel)				44	10	14	18	35	42	163

Tableau VIII. Stratégie d'agrégation des petits chênes et dispersion des petits hêtres. Structure surdispersée 10 composantes.

3^e statistique d'ordre		Stratégie		Effectifs coupés						
				par classe						Total
Valeur	Freq. %	Rang à prélever	Freq.	ph	mc	gc	mh	gh	pc	
ph	16,5	1, 2	33,9	14,4	0	0	0	0	0	14,4
		aucun	66,1							
mc	35,1	2, 3	5,3	1,4	3,4	0	0,3	0,3	19,4	24,8
		6	44,7							
		aucun	50,0							
gc	5,5	2, 3	72,7	2,3	4,5	5,3	0	0	1,9	14
		2, 6	27,3							
mh	13,5	2, 3	45,5	4,7	9,1	1,7	9,7	0	9,4	34,6
		2, 6	54,5							
gh	7,5	2, 3	97,5	2	4	0,8	2,3	9,9	0,2	19,2
		2, 6	2,5							
pc	21,8	1, 2	85,7	19,2	14,1	2,1	5,7	3,7	11	55,8
		2, 5	14,3							
Total				44	35,1	9,9	18	13,9	41,9	162,8
Objectif (rappel)				44	35	10	18	14	42	163

Tableau IX. Simulation de stratégies. Comparaison des effectifs théoriques et observés.

Stratégie		ph	mh	gh	pc	mc	gc	Total
Théorique		44	18	14	42	35	10	163
Tableau III	Effectifs observés	44	22,8	11,5	39,9	33	10,8	162
	Écart à l'objectif	0	–4,8	2,5	2,1	2	–0,8	
	Écart type	1,5	1,3	0,9	1,6	1,6	0,8	
Tableau IV	Effectifs observés	43,8	18,2	12,2	41,3	35,5	10,0	161
	Écart à l'objectif	0,2	–0,2	1,8	0,7	–0,5	0	
	Écart type	1,7	1,3	1,3	1,7	2,3	1,2	
Tableau V	Effectifs observés	43,2	19,2	14,3	42	35,3	11,9	166
	Écart à l'objectif	0,8	–1,2	–0,3	0	–0,3	–1,9	
	Écart type	2,6	2,3	2,1	2,1	3,0	1,3	
Tableau VII	Effectifs observés	45,8	22,5	13,9	41,1	32,5	7,1	163
	Écart à l'objectif	–1,8	–4,5	0,1	0,9	2,5	2,9	
	Écart type	2,1	1,2	1,5	1,5	2,0	1,3	

Tableau X. Loi de probabilité conjointe de deux arbres de la même cellule (mélange aléatoire de toutes les classes d'arbres). (a) Loi objectif dans l'hypothèse d'une répartition aléatoire des effectifs restants du tableau II. (b) Différence Loi objectif – Loi théorique donnée par le modèle de stratégie du tableau VII. (c) Différence Loi théorique – Loi observée (stratégie du Tab. VII).

(a)	ph	mh	gh	pc	mc	gc
ph	0,0611	0,0143	0,0083	0,1190	0,0409	0,0041
mh		0,0033	0,0018	0,0277	0,0095	0,0009
gh			0,0009	0,0160	0,0054	0,0005
pc				0,2292	0,0793	0,0079
mc					0,0272	0,0026
gc						0,0003

(b)	ph	mh	gh	pc	mc	gc
ph	–0,0060	–0,0024	–0,0023	0,0019	–0,0011	–0,0006
mh		–0,0022	–0,0009	0,0036	–0,0003	–0,0003
gh			–0,0009	0,0039	–0,0007	–0,0004
pc				0,0025	0,0018	0,0012
mc					–0,0004	–0,0006
gc						0,0001

(c)	ph	mh	gh	pc	mc	gc
ph	–0,0049	0,0003	–0,0030	0,0012	0,0002	0,0010
mh		–0,0025	–0,0001	0,0002	0,0021	0,0008
gh			–0,0001	0,0004	0,0024	0,0005
pc				–0,0014	–0,0006	0,0008
mc					–0,0009	0,0002
gc						0,0002

3.3. Validation

Les différentes stratégies présentées tableau III, IV, V, VII ont été simulées sur le peuplement cartographié. Les résultats d'ensemble sont regroupés tableau IX. On remarque les biais dus à l'inexactitude du modèle de structure du peuplement initial. Ils restent toutefois relativement faibles. La variabilité est également acceptable.

Les lois de probabilité conjointe sont bien ajustées (Tab. Xc). En particulier, on constate une baisse de P(ph,ph) et une hausse de P(pc,pc).

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cet article montre tout d'abord qu'il est possible de formaliser un système d'éclaircie locale en forêt hétérogène, de construire un outil informatique qui définit les règles locales de prélèvement optimisant les objectifs sylvicoles qu'ils soient locaux ou globaux. Le système proposé, sans doute trop simple pour les situations réelles, peut néanmoins donner des repères pour analyser des situations plus complexes à objectifs multiples.

D'autre part, les particularités du modèle de prélèvement présenté (essentiellement sa conception indépendante des objectifs et du peuplement initial, son paramétrage des priorités de prélèvement, son approche statistique) offrent une réelle souplesse pour analyser le processus de décision. En particulier, dans la phase de définition des objectifs, l'analyse de sensibilité permet de préciser ce qui est réalisable, ce qui doit être sacrifié pour atteindre tel autre type d'objectif.

Enfin, l'interprétation des règles de prélèvement permet le plus souvent d'expliquer les liaisons entre le peuplement initial, les objectifs et la stratégie obtenue.

Pour dépasser le cadre des hypothèses faîtes sur les trois modèles (peuplement, objectif, stratégie) et être davantage opérationnel en forêt, certaines améliorations peuvent être proposées.

Plusieurs échelles pourraient être prises en compte (la simple partition du peuplement effectuée est par trop grossière pour l'étude des fréquences de figures complexes imbriquées), des variables supplémentaires (prévisions de croissance, positionnement explicite des arbres, qualité des bois) introduites, ou d'autres objectifs de structure (état sanitaire, structure verticale) envisagés.

Enfin, même si l'automatisation du martelage n'est pas nécessairement une imitation du procédé manuel, rendre le modèle plus proche des pratiques et des préoccupations du sylviculteur semble une voie féconde. Dans cette direction, un inventaire des pratiques en forêt hétérogène et des exercices de martelage sont en cours de réalisation. L'espoir est qu'une fois de plus, l'alternance entre modélisation et confrontation à la pratique permette de progresser.

Remerciements: Je remercie mes collègues pour leurs conseils et leurs lectures attentives du manuscrit. Cette étude a bénéficié d'un financement du GIP Ecofor dans le cadre du « Programme de recherche sur les forêts hétérogènes ».

ANNEXE

Soit une cellule de n arbres.

Soit OR un ordre sur les classes et soit $(D^{(1)}, ..., D^{(n)})$ les statistiques d'ordre à valeurs dans les numéros de classe.

Soit une éclaircie où :

– no est le numéro de la statistique d'ordre D^{no} conditionnant la décision.

– a_{ir} ($i = 1, n$; $r = 1, K$) est la probabilité de prélever l'arbre de rang i seul dans une cellule où $D^{no} = r$.

– $b_{i,j,r}$ ($i = 1, n-1$; $j = i+1, n$; $r = 1, K$) est la probabilité de prélever les arbres de rang i et j dans une cellule où $D^{no} = r$.

– c_r est la probabilité de n'effectuer aucun prélèvement dans une cellule où $D^{no} = r$.

A1. Linéarité de e_k par rapport à a et b

Montrons que l'espérance du nombre d'arbre prélevés dans la classe k s'exprime linéairement en fonction des paramètres a et b.

Soit A_k le nombre d'arbre prélevés dans la classe k. On a de par la formule des espérances conditionnelles :

$$E(A_k) = e_k = \sum_{r=1}^{K} P(D^{n0} = r)E(A_k | D^{n0} = r).$$

Dans une cellule telle que $D^{no} = r$, si on prélève l'arbre de rang i l'effectif moyen éclairci dans la classe k sera $\Pr(D^i = k/D^{n0} = r)$.

Si on prélève les arbres de rang i et j, il sera de :

$$\Pr(D^i = k/D^{n0} = r) + \Pr(D^j = k/D^{n0} = r).$$

Pour l'ensemble des Q cellules du peuplement, l'effectif moyen éclairci dans la classe k sera donc :

$$e_k = Q \sum_{r=1}^{K} P(D^{n0} = r) \sum_{i=1}^{n} a_{ir} \Pr(D^i = k/D^{no} = r)$$
$$+ Q \sum_{r=1}^{K} P(D^{n0} = r) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} bijr(\Pr(D^i = k/D^{no} = r)$$
$$+ \Pr(D^j = k/D^{no} = r)).$$

Soit :

$$e_k = Q \sum_{r=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} \Pr(D^i = k \text{ et } D^{no} = r)$$
$$+ Q \sum_{r=1}^{K} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} bijr(\Pr(D^i = k \text{ et } D^{no} = r)$$
$$+ \Pr(D^j = k \text{ et } D^{no} = r)).$$

Les termes $\Pr(D^i = k \ et \ D^{no} = r)$ étant connus numériquement (voir annexe de [4]), e_k s'exprime donc linéairement en fonction des paramètres a et b.

A2. ÉTUDE DE LA LOI CONJOINTE (X,Y)

Soit X et Y deux arbres pris aléatoirement dans la même cellule à valeurs dans les numéros de classe.

Soit

$P_{k,q} = \Pr\{X \in \text{ classe } k \text{ et } Y \in \text{ classe } q\} (k = 1,\mathrm{K} \ ; \ q = k,\mathrm{K})$.

Montrons que $P_{k,q} = \Pr\{X \in \text{ classe } k \text{ et } Y \in \text{ classe } q\}$ s'exprime linéairement en fonction des paramètres a, b, c.

A2.1. Remarques préliminaires

Remarque 2.1.1

Du fait du tirage aléatoire de (X,Y) dans la cellule, les $n(n-1)/2$ couples de rang sont équiprobables.

Avant prélèvement, $\Pr\{X \in \text{ classe } k \text{ et } Y \in \text{ classe } q\}$ vaut :

$$\frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{ classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{ classe } q\}}{n(n-1)}.$$

Remarque 2.1.2

Après prélèvement de l'arbre de rang u, $P_{k,q}$ vaut :

$$P_{k,\ q} = \frac{2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n-1} \sum_{\substack{j>i \\ j \neq u}}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{ classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{ classe } q\}}{(n-1)(n-2)}.$$

En réécrivant les sommations, le numérateur s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{ classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{ classe } q\}$$
$$- \sum_{j>u}^{n} \Pr\{D^{(u)} \in \text{ classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{ classe } q\}$$
$$- \sum_{i<u}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{ classe } k \text{ et } D^{(u)} \in \text{ classe } q\}.$$

Remarque 2.1.3

Après prélèvement des arbres de rang u et v, $P_{k,q}$ vaut :

$$P_{k,\,q} = \frac{2\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq u\\ i\neq v}}^{n-1}\ \sum\limits_{\substack{j>i\\ j\neq u\\ j\neq v}}^{n} Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q\}}{(n-2)(n-3)}.$$

En réécrivant les sommations, le numérateur s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ \sum_{j>i}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q\} - \sum_{j>u}^{n} \Pr\{D^{(u)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q\}$$

$$- \sum_{i<u}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(u)} \in \text{classe } q\} - \sum_{j>v}^{n} \Pr\{D^{(v)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q\}$$

$$- \sum_{i<v}^{n} \Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(v)} \in \text{classe } q\} + \Pr\{D^{(u)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(v)} \in \text{classe } q\}.$$

A2.2. Linéarité de $\mathbf{P_{k,q}}$

Soit D l'ensemble des décisions {aucun prélèvement ; prélèvement du rang u ($u = 1, n$) ; prélèvement des rangs i et j ($i = 1$; $n - 1$) ($j = i + 1, n$) }.

$$P_{k,q} = \sum_{r=1}^{K}$$

$$\sum_{d} P\left\{X \in \text{classe } k \text{ et } Y \in \text{classe } q \text{ et } D^{n0} = r \text{ et decision} = d\right\}$$

ou encore $\sum\limits_{d}\ \sum\limits_{r=1}^{K} P\{D^{n0} = r\} P\{\text{decision} = d/D^{n0} = r\} P\{X \in \text{classe } k \text{ et } Y \in \text{classe } q/D^{n0} = r \text{ et decision} = d\}$.

En explicitant les différentes décisions

$$\sum_{r=1}^{K} \Pr\{D^{(n0)} \in \text{classe } r\} c_r \Pr(X \in \text{classe } k \text{ et } Y \in \text{classe } q/D^{n0} = r \text{ et aucun prélèvement}\}$$

$$+ \sum_{r=1}^{K} \Pr\{D^{(n0)} \in \text{classe } r\} \sum_{u=1}^{n} a_{ur} \Pr\{X \in \text{classe } k \text{ et } Y \in \text{classe } q/D^{n0} = r \text{ et prélèvement du rang u}\}$$

$$+ \sum_{r=1}^{K} \Pr\{D^{(n0)} \in \text{classe } r\} \sum_{u=1}^{n-1}\ \sum_{v=u+1}^{n} b_{uvr} \Pr\{X \in \text{classe } k \text{ et } Y \in \text{classe } q/D^{n0} = r \text{ et prélèvement des rangs u et v}\}.$$

En introduisant les remarques 1, 2, 3 du paragraphe précèdent respectivement dans les termes 1, 2, 3, on obtient :

$$\frac{2\sum\limits_{r=1}^{K} \Pr\left\{D^{(n0)} \in \text{classe } r\right\} c_r \sum\limits_{i=1}^{n-1}\ \sum\limits_{j>i}^{n} \Pr\left\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q/D^{(n0)} = r\right\}}{n(n-1)}$$

$$+\frac{2\sum\limits_{r=1}^{k} \Pr\left\{D^{(n0)} \in \text{classe } r\right\} \sum\limits_{i=1}^{n-1}\ \sum\limits_{j>i}^{n} (1 - a_{ir} - a_{jr}) \Pr\left\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q/D^{(n0)} = r\right\}}{(n-1)(n-2)}$$

$$+\frac{2\sum\limits_{r=1}^{K} \Pr\left\{D^{(n0)} \in \text{classe } r\right\} \sum\limits_{i=1}^{n-1}\ \sum\limits_{j>i}^{n} \left(1 - \sum\limits_{s>i}^{n} b_{\text{i,s,r}} - \sum\limits_{t<i}^{n} b_{\text{t,i,r}} - \sum\limits_{s>j}^{n} b_{\text{j,s,r}} - \sum\limits_{t<j} b_{\text{t,j,r}} + b_{\text{i,j,r}}\right) \Pr\left\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q/D^{n0} = r\right\}}{(n-2)(n-3)}.$$

On obtient finalement :

$$\frac{2\sum_{r=1}^{K}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n} c_r \Pr\left\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q / D^{n0} = r\right\}}{n(n-1)}$$

$$+\frac{2\sum_{r=1}^{K}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}(1-a_{ir}-a_{jr})\Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q \text{ et } D^{(n0)} = r\}}{(n-1)(n-2)}$$

$$+\frac{2\sum_{r=1}^{K}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\left(1-\sum_{s>i}^{n} b_{\mathrm{i,s,r}}-\sum_{t<i} b_{\mathrm{t,i,r}}-\sum_{s>j}^{n} b_{\mathrm{j,s,r}}-\sum_{t<j} b_{\mathrm{t,j,r}}+b_{\mathrm{i,j,r}}\right)\Pr\left\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q \text{ et } D^{(n0)} = r\right\}}{(n-2)(n-3)}.$$

RÉFÉRENCES

[1] Lawson C., Hanson R.J., Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, Inc., ISBN 0-13-822585-0, 1974.

[2] Ningre F., Comparaison de différentes modalités d'éclaircie du chêne sessile, Premiers résultats d'un dispositif expérimental situé en forêt domaniale de Réno-Valdieu (Orne), Rev. For. Fr. 2 (1990) 254–264.

[3] McLachlan G., Peel D., Finite mixture models, Wiley, ISBN 0-471-00626b-2, 2000.

[4] Pierrat J.-C., Hervé J.-C., Peyron J.-L., Modélisation de la structure d'un peuplement et simulation de sylvicultures locales et sélectives, Can. J. For. Res. 27 (1997) 849–858.

[5] Pierrat J.-C., Modélisation de la structure locale et simulation d'éclaircies dans un peuplement hétérogène, Ann. For. Sci. 57 (2000) 701–716.

[6] Teissier Du Cros R., Les machines de bûcheronnage en France : situation et perspectives, Rev. For. Fr. LIII (2001) 205–216.

[7] Turner T.R., Estimating the propagation rate of a viral infection of potato plants via mixtures of regressions, Appl. Statist. 49 (2000) 371–384.

[8] Vanclay J.K., Modelling selection harvesting in tropical rain forests, J. Trop. For. Sci. 1 (1989) 280–294.

[9] Zucchini W., Gadow K.v., Two indices of agreement among foresters selecting trees for thinning, For. Landsc. Res. 1 (1995) 199–206.