HAL open science

Régulation d'une pêcherie : d'un problème local de contrôle optimal à une approche par domaine invariant

Suzanne Touzeau, Jean-Luc Gouzé

To cite this version:

Suzanne Touzeau, Jean-Luc Gouzé. Régulation d'une pêcherie : d'un problème local de contrôle optimal à une approche par domaine invariant. Automatique et Agronomie, Jan 2003, Montpellier, France. hal-02762469

HAL Id: hal-02762469

https://hal.inrae.fr/hal-02762469

Submitted on 7 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

AutoAgro2003
Colloque Automatique et Agronomie
Montpellier 22-23-24 Janvier 2003

Régulation d'une pêcherie : d'un problème local de contrôle optimal à une approche par domaine invariant

Suzanne TOUZEAU†— **Jean-Luc GOUZÉ**‡

† *Unité de Biométrie et IA, INRA, 78352 Jouy-en-Josas Cedex*
Suzanne.Touzeau@jouy.inra.fr

‡ *Projet Comore, INRIA, 06902 Sophia Antipolis Cedex*
gouze@sophia.inria.fr

RÉSUMÉ. *Cette ´etude a pour but de r´eguler une pêcherie en r´eduisant les ´ecarts de capture et d'effort autour d'un point d'´equilibre de r´ef´erence. Un modèle bio-´economique simple est consid´er´e, incluant une variable de contrôle sur la vitesse de variation de l'effort. Deux approches ont ´et´e abord´ees : la première est une approche optimale locale qui positionne le problème dans le le cadre classique de l'optimisation lin´eaire quadratique ; elle est ´etendue à une approche par « domaine invariant », dont la robustesse constitue un avantage majeur.*

MOTS-CLÉS : *halieutique ; dynamique des populations ; modèle bio-´economique ; r´egulation ; contrôle optimal ; approche par domaine invariant.*

1. Introduction

La *théorie du contr^ole optimal* a souvent été appliquée *en halieutique* pour le calcul d'optima bio-économiques, généralement afin de maximiser le revenu (escompté) de la pêche. Les ouvrages de Clark [CLA 76, CLA 85] constituent une référence dans ce domaine. Les solutions obtenues sont souvent des contrôles extrêmes de type bang-bang (sauts instantanés par paliers) ; à horizon fini elles conduisent presque systématiquement à l'extinction de la ressource. Horwood & Whittle se sont aussi penchés sur ces problèmes de maximisation du revenu [HOR 86a, HOR 86b] pour différents modèles de pêcheries à temps discret : en horizon infini, ils ont obtenu des contrôles localement optimaux, qui sous certaines conditions sont des feedbacks linéaires de l'état du stock. Ces résultats sont étendus dans [HOR 96] à un critère introduisant une notion de risque dans un contexte stochastique.

Cependant, il peut être plus intéressant de maintenir certaines variables, comme la capture, l'effort de pêche, ou encore la taille du stock, à des niveaux donnés. Plutôt que déterminer un optimum bio-économique, on cherche alors à *réguler la p^echerie* en réduisant les écarts du système autour d'un point d'équilibre de référence, ce qui a aussi un effet stabilisateur. Une autre application possible du contrôle optimal consiste alors à minimiser ces variations. Horwood *et al.* [HOR 90, JAC 91] ont proposé cette approche originale : leur but était de minimiser les variations d'effort et de capture, grâce à un terme de contrôle sur la capture ; ils ont obtenu un contrôle sub-optimal.

Dans cette étude, nous retenons le même critère, mais nous l'appliquons à un modèle global (sans classes d'âge) à temps continu, en utilisant la vitesse de variation de l'effort comme contrôle, et non la capture. Notre but est de réduire les écarts d'effort de pêche et de capture, ce qui garantit aux pêcheurs des revenus et un emploi relativement stables, en considérant grossièrement que les coûts sont proportionnels à l'effort déployé et les revenus à la capture. Il peut donc être considéré comme un critère économique simple.

Deux approches ont été développées pour cette régulation bio-économique, qui font appel à des méthodes de résolution très différentes. La première consiste à établir un *contr̂ole localement optimal*, ce qui place le problème dans le cadre classique de l'optimisation linéaire quadratique. La seconde approche, par « *domaine invariant* », cherche à garder le système dans des limites données d'effort et de capture grâce à un contrôle adéquat. La philosophie de cette étude est très similaire à la théorie de la viabilité développée par Aubin [AUB 91] et son équipe, mais les méthodologies sont différentes. La notre est exposée dans ce papier et décrite plus en détails dans [TOU 97]. L'extension du processus de régulation à cette approche de contrôle non optimal tend à augmenter sa robustesse.

En outre, pour plus de réalisme, le comportement des pêcheurs est pris en compte. Nous supposons qu'il est gouverné par des contraintes de rentabilité comme dans le modèle de Schaefer [SCH 91] ; des fonctions très simples de prix et de coût sont par conséquent introduites dans le modèle.

Dans la suite de cet article, nous présentons tout d'abord le modèle halieutique retenu et ses propriétés. Puis nous nous concentrons sur le processus de régulation ; un exemple de pêcherie est choisi pour illustrer les deux méthodes : l'optimisation locale et l'approche par domaine invariant. Enfin, nous terminons ce papier par une comparaison des deux approches et nous exposons quelques conclusions et perspectives.

2. Modélisation du syst̀eme pˆeche

Nous avons retenu un même modèle de pêcherie très général en temps continu pour les deux approches de régulation. Il est introduit ci-dessous, ainsi que les hypothèses qu'il sous-tend. Dans un deuxième temps, les propriétés de ce modèle sont décrites.

2.1. *Présentation du modèle*

Nous considérons un système dynamique de pêcherie simple, constitué d'une flottille de pêche et d'un stock de poissons. La flottille, éventuellement composé de plusieurs bateaux, est représentée par son effort de pêche global E, alors que la biomasse (ou l'abondance totale) X décrit l'état du stock. Les liens entre ces deux composantes apparaissent dans la figure 1. L'effort de pêche généré par la flottille est appliqué sur le stock et produit une capture Y. La flottille est aussi soumise à un contrôle U que l'on introduit dans un premier temps comme une variable exogène. C'est ce terme qui servira plus tard à la régulation.

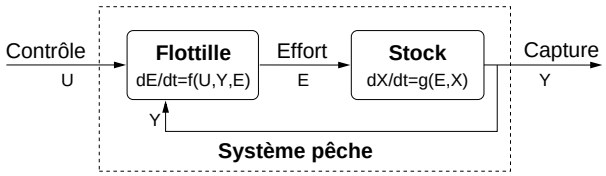

FIG. 1. *Représentation d'un syst̀eme pˆeche avec dynamique du stock et de la flottille, plus un terme de contr̂ole exog̀ene sur la flottille.*

On considère que la dynamique propre de la flottille découle de contraintes de rentabilité : tant que le revenu est plus important que le coût d'exploitation de la ressource, l'effort augmente, et vice versa. Des fonctions très simples de revenu et de coût sont choisies. Le coût est pris proportionnel à l'effort et en supposant un prix de vente fixe pour le poisson, le revenu est proportionnel à la capture. Remarquons que les coûts proportionnels prennent assez bien en compte les dépenses de carburant et de personnel, mais ne permettent pas d'inclure des investissements à long terme comme l'achat de navires de pêche.

Aucune structure d'âge n'est introduite pour le stock. Il est représenté par le modèle de Schaefer, qui suppose une croissance logistique du stock en l'absence d'exploitation, croissance diminuée de la capture instantanée, considérée proportionnelle à l'effort et à la biomasse totale du stock.

D'autres hypothèses générales ont été faites : nous nous plaçons en temps continu et nous introduisons le contrôle comme un terme additionnel sur la dynamique de la flottille. D'où le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = rX(1 - X/k) - qEX \\ \dot{E} = c\,(\alpha Y - \beta E) + U \\ Y = qEX \end{cases} \tag{1}$$

où r est le taux de croissance, k la capacité de charge (correspondant à l'équilibre non nul du stock en l'absence d'exploitation), q la capturabilité, α le prix d'une unité de capture, β le coût d'une unité d'effort et c le paramètre de conversion. c permet de transformer le profit instantané $\alpha Y - \beta E$, exprimé en unité monétaire, en variation d'effort.

Ce modèle a été introduit très tôt par Schaefer [SCH 91], le terme de contrôle U sur la vitesse de variation de l'effort excepté. Dans la littérature, la capture apparaît parfois comme une entrée du système que l'on peut contrôler, probablement en raison des quotas qui sont mis en place pour limiter les captures. Mais quand le stock est bas, il peut être difficile d'appliquer une certaine capture, alors qu'il semble plus logique d'imposer un effort. Dans notre cas l'effort de pêche suit sa propre dynamique et n'est par conséquent pas un contrôle adéquat. Même si cette dynamique était omise, il serait préférable d'appliquer le contrôle sur la vitesse de variation de l'effort. L'effort en tant que variable de contrôle pourrait avoir à suivre des changements brusques, voire une trajectoire bang-bang (un contrôle optimal possible, en particulier si l'hamiltonien est linéaire par rapport au contrôle) ; appliqué à une pêcherie où l'effort représente un nombre de bateaux, cela pourrait conduire à pêcher avec trois bateaux une année, sept l'année suivante, puis un... ce qui n'est pas réaliste. Avec un *contrˆole sur la vitesse de variation de l'effort*, on obtient un effort plus lisse ; il indique s'il faut augmenter ou diminuer le nombre de bateaux dans la flottille et à quel rythme, ce dernier étant éventuellement borné.

2.2. *Propriétés du modèle*

Positivité des variables Ce modèle n'a pas de sens pour des biomasses et des efforts négatifs. Sans contrôle, la structure du modèle garantit qu'à partir de valeurs initiales positives, ces variables restent positives au cours du temps. La variable de contrôle U cependant peut être négative, il peut donc être nécessaire d'imposer des contraintes supplémentaires.

Équilibres Considérons le système non contrôlé ($U = 0$). Il y a deux équilibres triviaux sans exploitation : le premier correspond à un stock épuisé $X = 0$ et le second à un stock à sa capacité de charge $X = k$.

L'existence d'un équilibre strictement positif non trivial est nécessaire pour une exploitation durable de la pêcherie. La contrainte suivante doit donc être respectée :

$$X_e = \frac{\beta}{q\alpha} < k. \tag{2}$$

Il s'agit en fait d'une contrainte de profit : le prix α doit être suffisamment haut comparé aux coûts proportionnels à β pour permettre aux pêcheurs de dégager un profit de la pêche. Nous supposerons que cette inégalité est vérifiée. Le tableau 1 reprend les trois équilibres ainsi déterminés.

TAB. 1. *Équilibres (X_e, E_e) du systˆeme (1) sans contrˆole ($U = 0$), quand la contrainte de profit (2) est vérifiée.*

X_e	E_e	
0	0	$\rightarrow$ stock épuisé
k	0	$\rightarrow$ stock vierge
$\beta/(q\alpha)$	$(r/q)(1 - \beta/(kq\alpha)))$	$\rightarrow$ stock exploité

Normalisation Cette étude n'est appliquée à aucun stock particulier. Afin de simplifier les notations et sans perte de généralité, nous normalisons alors le modèle, i.e. nous posons que :

$$r = k = q = c = 1. \tag{3}$$

Le changement de variables suivant permet de passer du système d'équations paramétré (1) au système normalisé dont les variables sont indicées par $_1$:

$$\begin{cases} t = \dfrac{t_1}{r}, & X = kX_1, & E = \dfrac{r}{q}\,E_1, \\ U = \dfrac{r^2}{q}\,U_1, & \alpha = \dfrac{r}{cqk}\,\alpha_1, & \beta = \dfrac{r}{c}\,\beta_1. \end{cases}$$

Cela montre bien que la normalisation (3) conserve la généralité du modèle. Le modèle normalisé sera utilisé par la suite pour appliquer nos résultats et réduire le nombre de paramètres à fixer ; l'indice $_1$ sera alors omis.

3. Régulation du syst`eme p^eche

Le but de la régulation est de maintenir le système décrit dans la section précédente autour d'un point d'équilibre de référence en réduisant les écarts de capture et d'effort. Une interprétation économique très simple de ce critère est de fournir à la flottille des revenus et un emploi relativement stables. Le moyen disponible pour atteindre cet objectif réside dans le terme de contrôle appliqué à la vitesse de variation de l'effort.

Deux méthodes sont abordées pour résoudre ce problème de régulation : une optimisation quadratique locale, plutôt classique, et une approche par « domaine invariant » plus détaillée dans la deuxième partie de cette section.

3.1. *Contrôle localement optimal*

Cette régulation, comparée aux problèmes plus classiques d'optimisation, présente des avantages. D'un état satisfaisant donné, quelle est la meilleure façon de réagir face à une augmentation soudaine de l'effort ou à une décroissance de la biomasse du stock ? Avec le critère sélectionné ici, la solution n'est pas : « maximiser la capture », mais une combinaison de : « maintenir un niveau d'effort pré-défini » et « permettre aux pêcheurs de conserver leur capture ». En outre, comme il s'agit d'un problème local, la linéarisation du système est licite et permet d'utiliser un modèle initial plus complexe. Combiné à un critère quadratique, nous obtenons alors aisément une solution localement optimale grâce au théorème de Riccati. On peut ensuite extraire certaines tendances de ces résultats.

Notre objectif est donc de *minimiser les variations locales d'effort et de capture* autour du point d'équilibre non trivial sur un horizon temporel fini T. Nous décrivons dans un premier temps le problème mathématique et sa résolution, puis dans un deuxième temps, des résultats sont produits sur un exemple.

3.1.1. *Résolution du probl`eme d'optimisation*

Le premier pas consiste à linéariser le système autour du point d'équilibre non trivial sous exploitation noté (X_e, E_e) ; cette simplification est assez bien justifiée dans le cas d'un problème local. Nous notons en minuscules les variables locales, e.g. $x = X - X_e$. Le système linéaire correspondant aux équations (1) est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -rX_e\,x(t)/k - qX_e\,e(t) \\ \dot{e}(t) = c\alpha qE_e\,x(t) + c\,(\alpha qX_e - \beta)e(t) + u(t) = c\alpha qE_e\,x(t) + u(t) \\ y(t) = qE_e\,x(t) + qX_e\,e(t). \end{cases} \tag{4}$$

Nous choisissons un critère des moindres carrés, de manière à placer le problème dans le cadre très classique de l'*optimisation linéaire quadratique*. D'où l'expression du problème d'optimisation ci-dessous.

**Probl`eme d'optimisation –** *Trouver pour le syst`eme linéarisé (4), un contrˆole $u(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$ minimisant le crit`ere suivant :*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\, p_1\, e(t)^2 + p_2\, y(t)^2 + p_3\, u(t)^2 \,]\, dt \tag{5}$$

o`u les $p_i$ sont des param`etres de pondérations strictement positifs et normalisés ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$).

Le contrôle u est intégré directement dans le critère sous forme d'un terme quadratique supplémentaire à minimiser. Cela permet de limiter les variations de u plus simplement que par l'introduction d'une contrainte sur le contrôle.

La résolution mathématique du problème ci-dessus par le théorème de Riccati est reportée en annexe. La solution optimale obtenue, notée avec l'exposant *, a la forme suivante :

$$u^*(t) = F_1(t)\, x^*(t) + F_2(t)\, e^*(t) \tag{6}$$

où F_1 et F_2 dépendent uniquement des paramètres du modèle et du temps. L'expression analytique des fonctions F_1 et F_2 nécessite la résolution d'un système d'équations différentielles, ce qui n'est pas immédiat. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers une résolution numérique du problème, sur un exemple présenté ci-dessous. Cette méthodologie a aussi été appliquée à un stock réel et a fait l'objet d'une étude plus détaillée dans [TOU 97].

3.1.2. *Application `a un exemple*

Afin de pouvoir représenter la solution du problème d'optimisation, nous raisonnons à présent sur un exemple. La première étape consiste donc à fixer les paramètres du système pêche. Le modèle normalisé est choisi, selon l'équation (3), ainsi que deux valeurs numériques pour le prix et le coût (respectivement α et β) vérifiant la contrainte de profit (2). Ces paramètres déterminent un point d'équilibre non trivial (X_e, E_e) (cf. TAB. 1). Il s'agit alors de fixer la condition initiale du système afin de créer une perturbation, que l'on cherche ensuite à réguler. Nous nous plaçons dans le cas d'une chute de 50% de la biomasse par rapport à l'équilibre et d'une augmentation plus ou moins équivalente de l'effort. La dernière étape consiste à choisir les coefficients de pondération du critère (5), ainsi que l'horizon d'optimisation. Ce dernier est fixé à 10 (l'unité de temps dépend de la paramétrisation). Le poids p_3, correspondant au terme de contrôle, doit être assez élevé pour limiter la vitesse de variation de l'effort ; on accorde sinon la même importance à la capture et à l'effort dans le critère. L'ensemble des paramètres choisis selon la description ci-dessus fait l'objet du tableau 2.

TAB. 2. *Param`etres de régulation du syst`eme pˆeche (1) normalisé par (3) pour l'approche localement optimale.*

Param`etres du syst`eme pˆeche		
Stock et effort normalisés	$r = k = q = c = 1$	
Profit	$\alpha = 0,8$	$\beta = 0,24$
$\Rightarrow$ Équilibre non trivial	$X_e = 0,3$	$E_e = 0,7$
Param`etres de minimisation		
Condition initiale	$X_0 = 0,15$	$E_0 = 1$
Pondérations du critère	$p_1 = p_2 = 0,25$	$p_3 = 0,5$
Horizon temporel	$T = 10$	

Les trajectoires optimales solutions de ce problème particulier sont représentées dans la figure 2. Bien que ces dernières soient issues du système linéarisé (4), on a choisi de montrer l'évolution au cours du temps des variables globales et non locales ; e.g. la biomasse globale $X^*(t) = X_e + x^*(t)$ est tracée, et non pas la biomasse locale x^*. De même pour l'effort, la capture et le contrôle.

Dans cet exemple, la régulation optimale consiste d'abord à réduire l'effort rapidement et de manière conséquente, pour permettre au stock de se reconstituer, puis à l'augmenter vers sa valeur d'équilibre. L'état du système à la fin de la période de régulation est très proche de l'équilibre, ce qui est relativement satisfaisant.

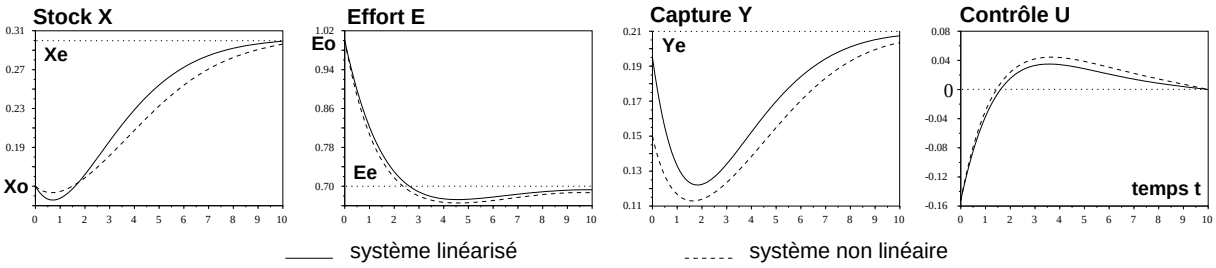

FIG. 2. *Régulation localement optimale appliquée ̀a l'exemple du tableau 2 : trajectoires optimales obtenues pour le syst̀eme linéarisé (4) ; comparaison avec les trajectoires sub-optimales résultant de la m̂eme loi de contr̂ole (6) appliquée au syst̀eme non linéaire (1).*

La figure 2 nous permet aussi d'apprécier l'approximation linéaire. Pour chacune des quatre variables, nous représentons sur le même graphe la trajectoire issue du système non linéaire (1) auquel nous appliquons la loi de contrôle (6). Cette loi, optimale pour le système linéarisé, est seulement localement optimale dans ce cas et les trajectoires correspondantes sont qualifiées de sub-optimales. La comparaison des deux jeux de trajectoires montre que l'approximation est relativement bonne. On note cependant que les deux courbes de capture sont décalées, et ce dès l'instant initial car la linéarisation néglige le terme de second ordre de la capture.

3.2. *Approche par domaine invariant*

Cette approche s'inspire de l'étude précédente, mais au lieu de chercher à minimiser les écarts de capture et d'effort, nous tentons ici de réguler le système de manière à ce qu'il reste « proche » de l'équilibre. « Proche » dans ce contexte signifie que les écarts de capture et d'effort sont bornés. L'objectif est donc de *maintenir le syst̀eme dans un domaine de capture et d'effort*, défini autour d'un point d'équilibre donné. Plus précisément, nous souhaitons vérifier si, partant d'un point de ce domaine, il est possible de trouver un contrôle admissible permettant au système d'y rester. Si c'est le cas, un tel domaine sera qualifié d'invariant ou viable.

Notre approche s'inscrit dans le cadre des études de *viabilité* (cf. [DOY 97] par exemple) : certaines conditions de viabilité étant données, ce type d'analyse consiste à déterminer l'ensemble des conditions initiales en dehors desquelles, quel que soit le contrôle admissible appliqué, le système ne vérifiera pas les contraintes. Dans le cas présent, ces contraintes sont : « demeurer dans des bornes de capture et d'effort ». Cependant, si notre philosophie est la même, les méthodes de résolution sont différentes.

Après avoir présenté plus en détails notre approche, nous l'illustrons sur l'exemple utilisé précédemment pour l'approche localement optimale. Nous adoptons une résolution graphique, particulièrement simple dans ce cas.

3.2.1. *Présentation de l'approche par domaine invariant*

Pour introduire l'approche par domaine invariant, nous devons tout d'abord décrire plus précisément ce que nous entendons par « invariant », d'où les deux définitions suivantes.

Définition – *Un domaine est dit* ***invariant (ou viable) sans contrôle*** *si, ̀a partir de tout point initial dans le domaine, le syst̀eme reste dans les limites du domaine au cours du temps, le contr̂ole étant maintenu ̀a zéro.*

Définition – *Un domaine est dit* ***invariant (ou viable) avec contrôle*** *si, ̀a partir de tout point initial dans le domaine, il existe un contr̂ole admissible permettant de maintenir le syst̀eme dans les limites du domaine.*

Dans cette approche, nous ajoutons une contrainte sur le contrôle : il est borné, $U_{min} \leqslant U \leqslant U_{max}$, de manière à éviter des variations d'effort de trop fortes pentes. Généralement, le minimum est négatif et le maximum positif, afin que l'effort de pêche puisse croître et décroître. Un contrôle vérifiant cette contrainte est dit **admissible**.

Les étapes principales de la recherche d'un domaine invariant sont décrites de manière sommaire dans ce paragraphe, la méthode étant ensuite plus détaillée lors de son application à un exemple. Avant tout, il faut définir un domaine initial dans lequel la pêcherie doit évoluer. On fixe donc les valeurs d'effort et de capture qui délimitent ce domaine $D = [E_{min}, E_{max}] \times [Y_{min}, Y_{max}]$. Puis on procède à l'analyse suivante.

- Si le domaine D est invariant sans contrôle, i.e. si le champ aux bords du domaine est rentrant, il n'est pas nécessaire de poursuivre : ne rien faire, soit $U = 0$, garantit que la pêcherie reste dans le domaine.
- Sinon un sous-domaine invariant avec contrôle du domaine initial D doit être déterminé. Cela est accompli par un contrôle aux bords : dès que possible, le contrôle à la limite du domaine est fixé de manière à avoir un champ rentrant.
  - Si sur toutes les frontières du domaine D, un contrôle admissible peut être trouvé de manière à obtenir un champ rentrant, le domaine est invariant avec contrôle.
  - S'il existe des points sur les bords où aucun contrôle admissible ne permet d'obtenir un champ rentrant, le domaine est réduit en conséquence. Ce dernier pas est plus clairement illustré par l'application de cette méthode à l'exemple.

Une résolution essentiellement graphique est utilisée ci-dessous pour résoudre le problème appliqué. Afin de faciliter l'analyse du champ aux bords du domaine D, un changement de variables est réalisé. Dans le plan de phase (E, Y), le système (1) normalisé selon l'équation (3) devient :

$$\begin{cases} \dot{E} = \alpha Y - \beta E + U \\ \dot{Y} = \dot{E}X + \dot{X}E \\ \quad = [(\alpha - 1)Y + (1 - \beta)E - E^2 + U]\, Y/E. \end{cases} \tag{7}$$

Les isoclines délimitent des régions du plan de phase, dans lesquelles les directions du champ selon chacun des axes sont les mêmes en tout point. Elles permettent donc de déterminer la direction du champ, en particulier au bords du domaine. Dans ce nouveau système sans contrôle, i.e. pour $U = 0$, elles sont définies par:

- $\dot{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y = \dfrac{\beta}{\alpha} E,$
- $\dot{Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y = 0 \quad$ ou $\begin{cases} Y = \frac{E}{\alpha - 1}(E + \beta - 1) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ E = 1 - \beta & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$

3.2.2. *Application ˋa un exemple*

Pour l'application de la méthode de régulation par domaine invariant, nous utilisons le même système pêche que celui illustrant la régulation localement optimale. Le domaine initial est choisi de manière à inclure l'équilibre non trivial correspondant à un stock exploité (cf. TAB. 1). Les bornes de la variable de contrôle sont de signes opposés, pour lui permettre de diminuer ou d'augmenter la vitesse de l'effort. Les valeurs numériques ainsi retenues sont données par le tableau 3.

TAB. 3. *Paramˋetres de régulation du systˋeme pˆeche (7) associés ˋa l'approche par domaine invariant.*

Paramˋetres du systˋeme pˆeche		
cf. TAB. 2		
Paramˋetres de régulation		
Bornes du domaine initial D	$E_{min} = 0,6$	$E_{max} = 1$
	$Y_{min} = 0,15$	$Y_{max} = 0,35$
Contrôle admissible	$U_{min} = -0,1$	$U_{max} = 0,1$

La détermination du sous-domaine invariant sans et avec contrôle de D peut être facilement visualisée par des graphiques dans le plan de phase (E, Y) du système (7). Par conséquent, la résolution de ce problème suit la succession des figures ci-dessous.

FIGURE 3. Ce premier graphe met en évidence le domaine initial D, les isoclines, l'équilibre non trivial sous exploitation **Eq**, ainsi que le champ sans contrôle. Ils sont représentés dans le plan de phase initial (X, E), correspondant aux équations (1), et dans le plan de phase courant (E, Y), correspondant aux équations (7).

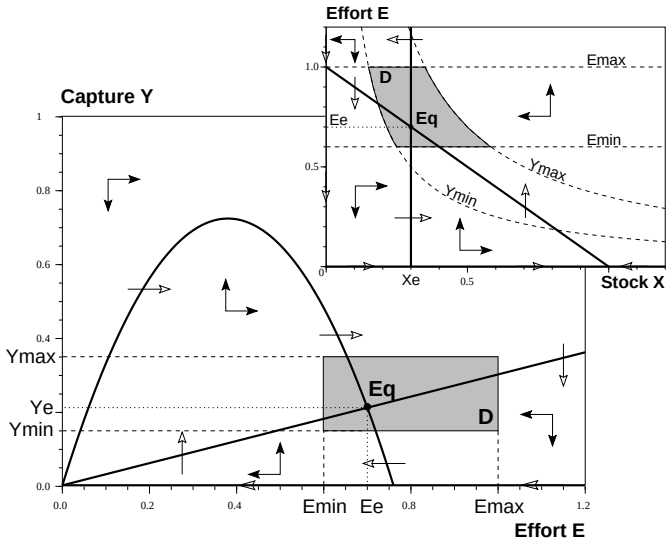

FIG. 3. *Domaine initial D (grisé), isoclines (en gras) et champ sans contr^ole dans les deux plans de phase.*

FIGURE 4. Certaines parties de la frontière du domaine D admettent un champ sortant sans contrôle. Sur chacun des quatre côtés de D, elles sont limitées par l'intersection du bord avec une isocline, e.g. le bord $Y = Y_{min}$ et l'isocline $\dot{Y} = 0$ au point (E_{lim}, Y_{min}) ; le champ passe de rentrant à sortant en ce point, car la composante pertinente du champ sur ce bord, $\dot{Y}$, change de signe. On obtient de la même manière un point limite sur chacun des bords. On en déduit alors le sous-domaine invariant sans contrôle : il est délimité par les trajectoires du système (7) sans contrôle ($U = 0$) qui passent par ces points limites. Ce premier résultat est illustré dans la figure 4.

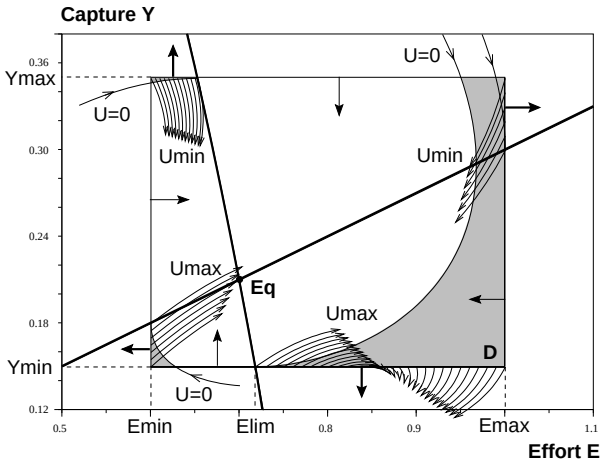

FIG. 4. *Sous-domaine invariant sans contr^ole (D moins les zones non viables grisées) et contr^ole le plus favorable aux bords.*

Sur les parties de la frontière où le champ est sortant, on cherche ensuite à déterminer un contrôle permettant d'obtenir, si possible, un champ rentrant.

Bord $\mathbf{E = E_{min}}$ La composante $\dot{E}$ du champ devrait être positive. Or : $\dot{E} = \alpha Y - \beta E_{min} + U$.
Afin de se placer dans le cas le plus favorable, le contrôle U doit être pris aussi grand que possible, soit $U = U_{max}$. Le champ devient alors positif si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$Y \geqslant \frac{\beta E_{min} - U_{max}}{\alpha} = 0,055.$$

Cette condition étant toujours remplie dans D, on peut alors trouver un contrôle admissible de manière à ce que le système ne sorte pas du domaine D par le bord E_{min}.

Bord $\mathbf{E = E_{max}}$ De manière similaire, on montre que U_{min} est le contrôle le plus favorable sur ce bord et que l'inégalité correspondante est toujours vérifiée dans D. Ainsi, la zone non viable sans contrôle associée au bord E_{max} devient invariante avec contrôle.

Bord $\mathbf{Y = Y_{min}}$ Dans ce cas, $\dot{Y}$ devrait être positive. Or :

$$\dot{Y} = \left[(\alpha - 1)Y_{min} + (1 - \beta)E - E^2 + U\right] Y_{min}/E. \tag{8}$$

U_{max} est donc le contrôle le plus favorable et la condition pour que le champ soit rentrant est :

$$-E^2 + (1 - \beta)E + (\alpha - 1)Y_{min} + U_{max} = -E^2 + 0,76E - 0,03 \geqslant 0.$$

Les racines de ce polynôme sont $E_1 \simeq 0,843$ et $-0,083$. L'inégalité n'est donc vérifiée sur le bord Y_{min} que pour : $E \leqslant E_1$. Pour des efforts supérieurs à E_1 dans le voisinage de la frontière, il existe une zone non viable avec contrôle.

Bord $\mathbf{Y = Y_{max}}$ Par un raisonnement analogue, on montre que U_{min} est le contrôle le plus favorable et que la condition correspondante est toujours vérifiée (polynôme sans racines réelles). La zone non viable sans contrôle associée à ce bord devient invariante avec le contrôle U_{min}.

Réduire l'effort quand il est haut pour maintenir le système dans D semble logique. C'est moins évident en ce qui concerne la capture, car deux effets opposés entrent en concurrence : un effort moindre diminue a priori la capture, mais il permet à la biomasse de croître, ce qui peut entraîner une augmentation de la capture à plus ou moins long terme. Cela dépend de l'état du stock, ce qui est clairement démontré sur le bord Y_{min}.

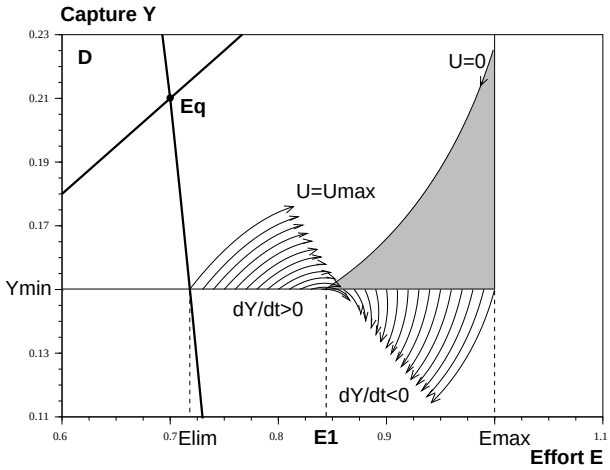

FIG. 5. *Zone non viable a priori avec contrˆole (grisée) et contrˆole le plus favorable au bord.*

FIGURE 5. Grâce à la détermination du contrôle le plus favorable à la frontière, le sous-domaine invariant a priori de la figure 4 peut être étendu : seule la zone associée au bord Y_{min} pour des efforts $E > E_1$ reste non viable. Dans un premier temps, on peut délimiter cette zone par la trajectoire sans contrôle passant par le point (E_1, Y_{min}), comme le montre la figure 5.

Cette zone correspond à un stock fortement exploité de biomasse faible, ce qui explique pourquoi la capture ne peut pas croître immédiatement. Augmenter l'effort aux abords de cette région ($E \leqslant E_1$) ne semble pas très sage, c'est néanmoins une stratégie ponctuelle permettant de rester dans D quand on s'approche de Y_{min}.

FIGURE 6. Le contrôle le plus favorable pour $E \leqslant E_1$ dans la figure 5 tend à conduire le système vers la zone non viable. Afin d'éloigner la pêcherie de cette zone, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\text{(i)} \quad \dot{Y} \geqslant 0, \qquad \text{(ii)} \quad \dot{E} \leqslant 0, \qquad \text{pour } Y = Y_{min} \text{ et } E \leqslant E_1.$$

Nous avons montré précédemment qu'il existe un contrôle admissible vérifiant (i). En outre, l'effort E et la capture $Y = Y_{min}$ étant fixés, $\dot{Y}$ est selon (8) une fonction croissante de U. Pour que (ii) soit vérifiée, le contrôle U doit être « aussi petit que possible ». Par conséquent, il faut choisir un contrôle au bord tel que $\dot{Y} = 0$, soit :

$$U = E^2 + (\beta - 1)E + (1 - \alpha)Y_{min}.$$

En remplaçant U par cette valeur dans l'équation (8), la condition (ii) devient équivalente à :

$$E^2 - E + Y_{min} \leqslant 0.$$

Les racines de ce polynôme étant $0,18$ et $E_2 = 0,5 + \sqrt{0,1} \simeq 0,816 < E_1$, cette condition est vérifiée au bord Y_{min} pour $E \leqslant E_2$. Finalement, le sous-domaine invariant de D avec contrôle ne devrait contenir que les points du bord Y_{min} pour lesquels l'effort est inférieur à E_2. La trajectoire sans contrôle passant par ce nouveau point (E_2, Y_{min}) permet de délimiter une zone viable a priori, représentée sur la figure 6.

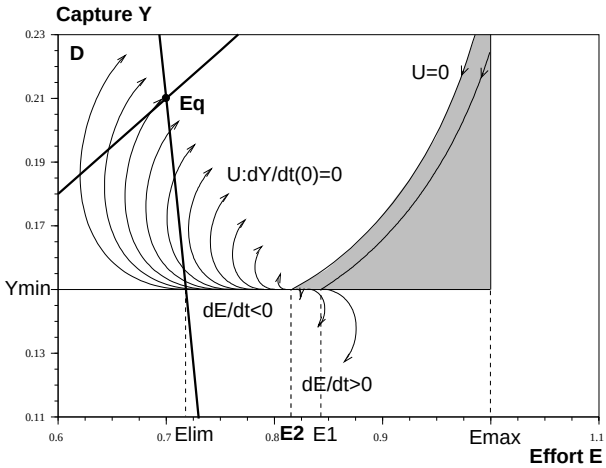

FIG. 6. *Zone viable a priori avec contrôle (zone non grisée de D) et contrôle « viable » au bord (tel que $\dot{Y} = 0$).*

Remarque : E_2 délimite un sous-domaine invariant avec contrôle sans doute plus petit que le strict nécessaire. Mais notre approche n'est pas optimale : plutôt que déterminer le plus grand sous-domaine invariant, nous préférons opter pour des stratégies simples, quitte à obtenir un plus petit sous-domaine.

FIGURE 7. Les trajectoires de (7) passant par le point limite (E_2, Y_{min}) admettent toutes la même tangente en ce point, car pour tout contrôle U :

$$\dot{Y}(E_2, Y_{min})/\dot{E}(E_2, Y_{min}) = Y_{min}/E_2.$$

La figure 7 représente ces trajectoires pour différents contrôles admissibles et constants. Elle montre que parmi ces trajectoires, celle délimitant le plus grand sous-domaine invariant est obtenue pour le contrôle U_{min}.

Ce résultat est assez intuitif. En effet, quand la biomasse est basse, il semble naturel de vouloir diminuer l'effort aussi vite que possible afin d'aider le stock à récupérer, sinon la capture diminuerait rapidement.

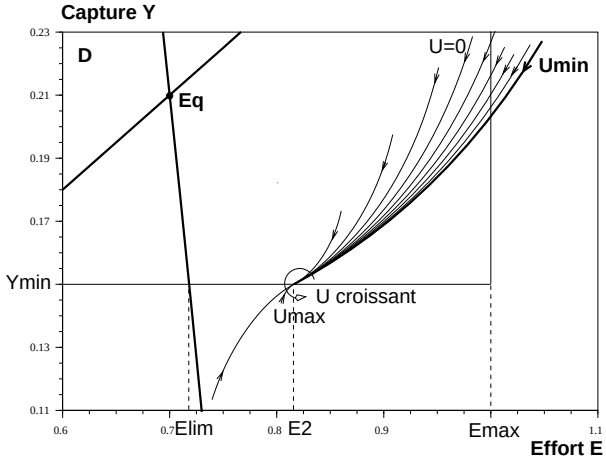

FIG. 7. *Trajectoires limites du sous-domaine invariant avec contrˆole, obtenues pour des contrˆoles admissibles constants ; celle délimitant le plus grand sous-domaine correspond ˀa U_{min}.*

FIGURE 8. Cette figure met en évidence le sous-domaine invariant avec contrôle Δ finalement obtenu. Comparé au domaine initial D, il exclut la zone non viable correspondant à une pression de pêche forte sur un stock de faible biomasse (effort élevé pour capture réduite).

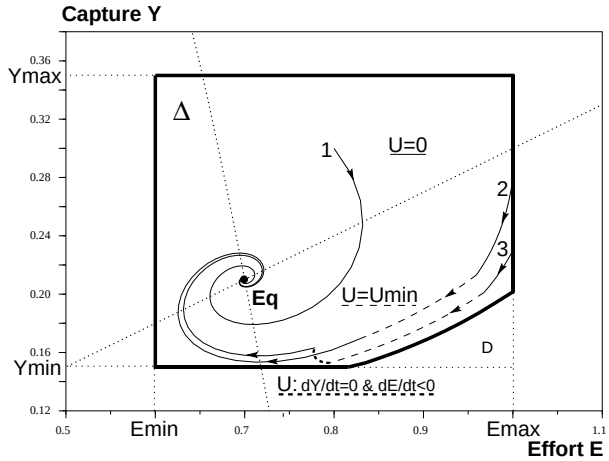

FIG. 8. *Sous-domaine invariant avec contrˆole Δ ; exemples de trajectoires viables avec contrˆole.*

On trace aussi quelques trajectoires viables. La trajectoire 1 n'a besoin d'aucun contrôle. La trajectoire 2 nécessite une diminution rapide de l'effort de pêche lorsqu'elle approche de la zone non viable : quand l'effort est élevé et que la capture commence à décroître de manière notable (un signe évident de l'épuisement du stock), celui-ci doit intuitivement être réduit, et ce aussi vite que possible. Cette stratégie s'applique aussi à la trajectoire 3, mais en dépit de cette mesure, la capture continue à s'approcher de sa valeur minimum. L'effort doit donc être augmenté (contrôle au bord, cf. FIG. 6) afin d'accroître la capture et de s'éloigner de la frontière de Δ.

Remarque : Nous ne nous intéressons pas dans ce papier à ce qu'il se passe en dehors du domaine. Dans la théorie de la viabilité, c'est en partie considéré par le biais du temps de retour [AUB 91]. Mais la philosophie de notre approche est de déterminer s'il est possible ou non de maintenir l'état du système entre certaines bornes. En dehors de celles-ci, le critère n'est pas respecté et le système n'est par conséquent pas étudié.

4. Discussion

L'objectif de cette étude était de contrôler une pêcherie de manière à ce que les variables de capture et d'effort restent proches de leurs valeurs à un équilibre donné. Ce critère de gestion tend à stabiliser les revenus, coûts et emploi de la pêcherie. Deux approches ont été développées pour réguler le système bio-économique relativement simple considéré. La première établit des trajectoires localement optimales, en minimisant les écarts de capture et d'effort par rapport à l'équilibre. Celles-ci dépendent de l'état initial du système ainsi que de paramètres plus techniques de minimisation. La seconde est une approche domaine : étant donné un domaine borné de capture et d'effort, elle détermine un sous-domaine invariant avec contrôle. Si l'état initial de la pêcherie est dans ce sous-domaine, celle-ci y restera, pour peu qu'un contrôle approprié (non unique) soit appliqué lorsque le système s'approche du bord. Une telle trajectoire est qualifiée de viable. La figure 9 montre quelques résultats des deux approches pour le système pêche particulier décrit dans les tableaux 2 et 3. Le sous-domaine invariant avec contrôle et quelques exemples de trajectoires viables, ainsi que des trajectoires localement optimales (loi localement optimale (6) introduite dans le système non linéaire (7)), sont représentées dans le plan de phase (E, Y).

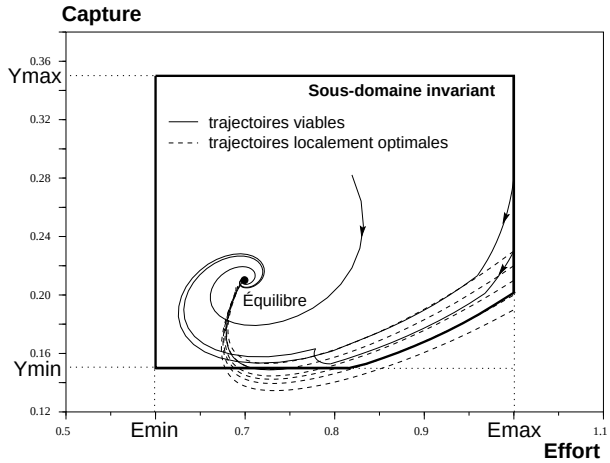

FIG. 9. *Comparaison des deux approches : trajectoires localement optimales et trajectoires viables.*

Les trajectoires localement optimales convergent certes vers l'équilibre, mais elles sortent des bornes de capture et d'effort. Le critère de minimisation est une somme quadratique des écarts à l'équilibre de référence. Ainsi, dans un contexte d'exploitation durable, nous pouvons lui préférer l'approche domaine, qui réduit la distance à l'équilibre de référence dans le plan de phase (E, Y).

En outre, la robustesse de l'approche domaine par rapport à l'optimisation locale est un avantage majeur de cette approche. En effet, son but n'est pas d'atteindre un équilibre, mais d'en rester proche. Même si la dynamique du stock et de la flottille est imparfaitement connue, nous pouvons toujours maximiser les incertitudes selon un principe de précaution (scénario du pire cas) et appliquer cette méthode. Une estimation de la capture et de l'effort est nécessaire, l'application est donc plus facile dans le cas d'une pêcherie impliquant peu de ports de débarquement et d'engins de pêche.

Afin d'appliquer cette étude à de vraies pêcheries dans un but de gestion, il serait sans doute nécessaire de développer la description du stock : des stades ou classes d'âge pourraient être introduits, ou encore des caractères multi-spécifiques. Cela augmenterait la dimension du système, ce qui ne permettrait plus d'utiliser la méthode de résolution graphique décrite dans ce papier.

Nous pourrions aussi changer de variable de contrôle. Actuellement, il s'agit d'un terme autoritaire sur la vitesse de variation de l'effort de pêche, qui est sinon gouvernée par des contraintes de rentabilité. Le contrôle représente un décideur extérieur qui impose une règle sur la variation de l'effort du type : doit-elle diminuer et à quelle vitesse. Cependant, les règles existantes pour limiter la pêche sont principalement des quotas annuels sur les captures, dans les régions gérées par le CIEM (dont l'Atlantique nord et ouest, la mer Baltique). En Méditerranée,

des mesures techniques sont appliquées sur l'effort, telles que le temps passé en mer, la taille de maille, etc. ; mais celles-ci sont en général historiques et demeurent constantes au fil des ans. Un contrôle sous forme de subventions, par exemple sur le prix du carburant, serait alors bien adapté à ces pêcheries méditerranéennes. Il influencerait bien la vitesse de variation de l'effort, mais nécessiterait un modèle économique plus développé afin de l'insérer dans le système.

5. Bibliographie

[AUB 91] AUBIN J.-P., *Viability theory*, Systems and control: foundations and applications, Birkhäuser, Boston, 1991.

[CLA 76] CLARK C. W., *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 1976.

[CLA 85] CLARK C. W., *Bioeconomic modeling and fi sheries management*, Wiley-Interscience, New York, 1985.

[DOY 97] DOYEN L., SAINT-PIERRE P., Scale of viability and minimal time of crisis, *Set-Valued Anal.*, vol. 5, n° 3, 1997, p. 227-246.

[HOR 86a] HORWOOD J. W., WHITTLE P., Optimal control in the neighbourhood of an optimal equilibrium with examples from fi sheries models, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology*, vol. 3, n° 2, 1986, p. 129-142.

[HOR 86b] HORWOOD J. W., WHITTLE P., The optimal harvest from a multicohort stock, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology*, vol. 3, n° 2, 1986, p. 143-155.

[HOR 90] HORWOOD J. W., JACOBS O. L. R., BALLANCE D. J., A feed-back control law to stabilize fi sheries, *J. Cons. int. Explor. Mer*, vol. 47, 1990, p. 57-64.

[HOR 96] HORWOOD J., Risk-sensitive optimal harvesting and control of biological populations, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology*, vol. 13, n° 1, 1996, p. 35-71.

[JAC 91] JACOBS O. L. R., BALLANCE D. J., HORWOOD J. W., Fishery management as a problem in feedback control, *Automatica*, vol. 27, n° 4, 1991, p. 627-640.

[KWA 72] KWAKERNAAK H., SIVAN R., *Linear control systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.

[NOV 94] D'ANDRÉA NOVEL B., COHEN DE LARA M., *Commande lin´eaire des systèmes dynamiques*, Masson, Paris, 1994.

[SCH 91] SCHAEFER M. B., Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fi sheries, *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 53, n° 1/2, 1991, p. 253-279, First published in 1954.

[TOU 97] TOUZEAU S., Mod`eles de contrˆole en gestion des pˆeches, Th`ese de Doctorat en Science, Universit´e de Nice – Sophia Antipolis, mars 1997, Sp´ecialit´e Sciences de l'Ing´enieur.

ANNEXE

Résolution du probl`eme de régulation optimale

Cette annexe est un complément de la section 3.1, présentant la résolution du problème de contrôle optimal avec coût quadratique appliqué au système de pêche linéarisé (4). Cela place le problème dans le cadre classique du théorème de Riccati [KWA 72, NOV 94].

Soit le système dynamique suivant, contrôlé et à temps continu :

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \text{avec :} \left| \begin{array}{l} z \in I\!R^n \\ u \in I\!R^p \end{array} \right. \tag{9}$$

où les matrices suivantes sont supposées connues :

$$\left| \begin{array}{l} Q \text{ : matrice symétrique positive de taille } n \times n, \\ R \text{ : matrice symétrique définie positive de taille } p \times p, \\ S \text{ : matrice de taille } n \times p, \\ L \text{ : matrice symétrique positive de taille } n \times n. \end{array} \right.$$

Théor`eme de Riccati – optimisation linéaire quadratique en horizon fini – *Soit $K_0 = K(0)$ la valeur finale de la solution de l'équation différentielle rétrograde suivante, appelée équation de Riccati :*

$$\begin{gathered}\dot{K} + A'K + KA - (KB + S)R^{-1}(B'K + S') + Q = 0 \\ K(T) = L.\end{gathered} \tag{10}$$

Considérons aussi le crit`ere quadratique en horizon fini ($T > 0$) suivant :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[z(t)'Q\,z(t) + u(t)'R\,u(t) + z(t)'S\,u(t) + u(t)'S'z(t)\right]\,dt + z(T)'L\,z(T). \tag{11}$$

Alors, en notant $z_0 = z(0)$, le minimum du crit`ere (11) est :

$$\min_u J(u) = z_0'\,K_0\,z_0.$$

En outre, ce minimum est atteint pour le contr^ole en boucle fermée (feedback) suivant :

$$u^*(t) = -R^{-1}(B'K + S')\,z^*(t) \tag{12}$$

o`u $z^*(t)$ est la solution de :

$$\begin{aligned}\dot{z}^* &= Az^* + Bu^* = [A - BR^{-1}(B'K + S')]\,z^* \\ z_0^* &= z_0.\end{aligned}$$

Pour appliquer ce théorème au système pêche (4) muni du critère (5), nous devons tout d'abord identifier les matrices mentionnées ci-dessus, en remplaçant z par (x, e), avec $X_e = \beta/(q\alpha)$ et $E_e = (r/q)(1 - \beta/(kq\alpha))$. On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} -(r/k)X_e & -qX_e \\ c\alpha qE_e & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} p_2\,q^2E_e^2 & p_2\,q^2E_eX_e \\ p_2\,q^2E_eX_e & p_1 + p_2\,q^2X_e^2 \end{pmatrix},$$

$$R = (p_3), \qquad S = 0, \qquad L = 0.$$

Si le coefficient de pondération p_3 est strictement positif (p_1 et p_2 étant positifs), les matrices Q, R, S et L vérifient les hypothèses ci-dessus ; cette contrainte signifie que la vitesse de variation de l'effort doit être incluse dans le critère, ce qui n'est pas restrictif dans la mesure où nous souhaitons limiter ses variations. Le problème d'optimisation consiste alors à résoudre l'équation de Riccati (10), où K est une matrice 2×2. Il n'y a pas de solution analytique simple, mais une résolution numérique sur un exemple est tout à fait réalisable.

NB – Le travail présenté dans ce papier a fait l'objet d'une publication dans un journal en anglais :
S. TOUZEAU and J.-L. GOUZÉ. Regulation of a fishery: from a local optimal control problem to an "invariant domain" approach. *Natural Resource Modeling*, 14(2):311–333, 2001.