



HAL
open science

Variations autour du problème de minimisation du temps de crise : méthode de régularisation de Moreau-Yosida et exploitation de la théorie de la viabilité

Kevin Cauvin-Migliore

► **To cite this version:**

Kevin Cauvin-Migliore. Variations autour du problème de minimisation du temps de crise : méthode de régularisation de Moreau-Yosida et exploitation de la théorie de la viabilité. Optimisation et contrôle [math.OC]. 2015. hal-02795523

HAL Id: hal-02795523

<https://hal.inrae.fr/hal-02795523>

Submitted on 5 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire de fin d'études
Année universitaire 2014 – 2015

Variations autour du problème de minimisation du temps
de crise : méthode de régularisation de Moreau-Yosida et
exploitation de la théorie de la viabilité.

Kevin CAUVIN-MIGLIORE

Stage effectué sous la direction de TERENCE Bayen¹ et Alain Rapaport².

¹ Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université de Montpellier

² UMR MISTEA, INRA SupAgro Montpellier

À ma muse, ma Ophélie...

*Je suis perdu,
vois-tu,
je suis noyé,
inondé d'amour,
je ne sais plus si je vis,
si je mange,
si je respire,
si je parle,
je sais que je t'aime.*

- Alfred de Musset -

Remerciements.

*La vérité scientifique sera toujours plus belle
que les créations de notre imagination
et que les illusions de notre ignorance.*

- Claude Bernard -

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, au succès de ce rapport.

Tout d'abord, j'adresse mes sincères remerciements à mon encadrant de projet, TERENCE Bayen, pour avoir accepté de diriger cette étude. Son accueil cordial, son aide riche, le temps passé ensemble, le partage de son expertise, ses remarques toujours constructives, m'ont permis de prendre du recul sur le travail que je fournissais, pour fournir un rapport de qualité. J'ai eu l'occasion de cotôyer TERENCE dans de multiples unités d'enseignement et c'est, incontestablement, grâce à lui que j'ai acquis le niveau que j'ai aujourd'hui. Merci, TERENCE!

De la même façon, je tiens à adresser mes amicales considérations à Alain Rapaport qui, depuis l'année dernière, a toujours été de précieux conseils dans les domaines relatifs aux systèmes dynamiques, toujours agrémentés de petits tuyaux ô combien nécessaires à un néophyte comme moi pour faire fonctionner Scilab... J'ai eu l'occasion de trouver, outre une porte de bureau toujours grande ouverte, un sourire fraternel et une aide appréciable! Je résumerai tout cela en un Merci pour l'accompagnement accordé depuis le début de l'an dernier.

Je remercie également toute l'équipe du Bâtiment 9, les enseignants-chercheurs, professeurs, personnels administratifs et étudiants. Après deux années de Master, rythmées entre cours, travaux dirigés et partage de culture mathématique, qu'ils puissent trouver dans ce travail le témoignage de ma sincère gratitude et de mon profond respect.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage : ma mère, mes collègues matheux ainsi que les non-matheux! Ma reconnaissance va également à mes très chers amis et collègues Romaric et Mario, sans qui les journées perdraient de leurs goûts.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Enfin¹, je termine mes remerciements en adressant tous mes sentiments à ma compagne, Ophélie, sans qui ce travail n'aurait pu aboutir. Sa constante présence à mes côtés, son soutien permanent, ses remarques pertinentes, son investissement titanesque dans mon combat perpétuel de regain de confiance en moi en périodes difficiles, m'ont permis de mener à bien toute cette année de Master 2. Qu'elle en soit, ici, vivement remerciée.

1. Ne dit-on pas que l'on laisse toujours « le meilleur pour la fin »?

Résumé.

Le but de ce rapport est d'étudier un problème de contrôle optimal, où la fonctionnelle de coût à minimiser représente le *temps de crise*, c'est-à-dire le temps passé par une trajectoire solution du système contrôlé en dehors d'un ensemble donné, noté K . La fonctionnelle considérée peut être exprimée au moyen de la fonction indicatrice de K , qui est discontinue et, de ce fait, empêche l'utilisation classique du principe du maximum de Pontryagin. Pour remédier à cela, l'emploi d'un schéma de régularisation sera utile : l'approximation de Moreau-Yosida sera celui employé ici, appliqué à la fonction caractéristique de K .

Après deux sections présentant les motivations du problème ainsi que quelques rappels nécessaires à la bonne compréhension du problème étudié, il sera établi la convergence d'une suite optimale pour le problème régularisé vers une solution optimale du problème d'origine. Ensuite, le principe du maximum de Pontryagin permettra, entre autres, d'établir la convergence du vecteur adjoint lorsque le paramètre de régularisation tend vers 0. Enfin, nous présenterons brièvement la notion de viabilité, considéré comme une alternative à la régularisation proposée ici.

Mots-clés : Contrôle optimal - Système dynamique - Système hybride - Temps de crise - Noyau de viabilité - Analyse convexe - Calcul des variations - Principe du maximum de Pontryagin - Principe du maximum hybride - Régularisation.

Table des matières

0	Introduction : définition du cadre du sujet et motivations.	1
0.1	Vous avez dit « <i>temps de crise</i> » ?	1
0.2	Formulation mathématique du <i>problème de temps de crise</i> .	1
0.2.1	Énoncé général et notations relatives au problème.	1
0.2.2	Hypothèses sous-jacentes sur le système.	2
0.3	Exemple : un modèle de <i>proie-prédateur</i> contrôlé.	3
1	Avant-propos : rappels en contrôle optimal et optimisation.	5
1.1	Quelques rappels d'analyse convexe.	5
1.2	Qu'est-ce qu'un <i>système contrôlé</i> ?	6
1.3	Résolution de problèmes d'existence relatifs au système contrôlé.	7
1.3.1	À propos de l'existence d'une solution du système contrôlé.	7
1.3.2	À propos de l'existence d'une solution du problème de contrôle optimal.	8
1.4	Autour du concept d'inclusions différentielles.	9
1.5	Quelques variations du principe du maximum de Pontryagin.	10
1.5.1	Principe du maximum de Pontryagin : Énoncé général.	10
1.5.2	Principe du maximum de Pontryagin : Énoncé dans le cadre de systèmes hybrides.	11
2	Du problème de temps de crise à sa régularisation : étude théorique.	14
2.1	Étude du problème de temps de crise non régularisé.	14
2.1.1	Étape 1 : Existence d'un contrôle optimal pour le problème non régularisé.	14
2.1.2	Étape 2 : Application du principe du maximum hybride au problème non régularisé.	15
2.2	Étude du problème de temps de crise régularisé.	19
2.2.1	Avant-propos : Pourquoi régulariser le problème ?	19
2.2.2	Introduction : Quelques notations et concepts utilisés pour la régularisation.	19
2.2.3	Étape 1 : Existence d'un contrôle optimal pour le problème régularisé.	20
2.2.4	Étape 2 : Application du principe du maximum de Pontryagin au problème régularisé.	23
2.2.5	Étape 3 : Convergence du système relatif à l'état adjoint.	25
3	Du problème de temps de crise à sa régularisation : deux exemples.	31
3.1	Exemple 1. Une stratégie naïve pour une dynamique planaire.	31
3.1.1	Étude du problème non régularisé.	33
3.1.2	Étude du problème régularisé.	35
3.2	Exemple 2. Le problème de temps de crise appliqué au chémostat.	37
3.2.1	Introduction : le chémostat, outil d'étude de la croissance de micro-organismes.	37
3.2.2	Une variation du problème de temps de crise adaptée au chémostat.	39
4	Du problème de temps de crise à sa viabilisation.	41
4.1	Introduction : la viabilité comme outil d'étude des systèmes contrôlés.	41
4.2	Le problème de temps de crise, écrit comme un problème de viabilité.	42
4.3	Exploitation du problème de viabilité.	43

Chapitre 0

Introduction : définition du cadre du sujet et motivations.

0.1 Vous avez dit « *temps de crise* » ?

Dans de très nombreux domaines, comme la finance, les sciences sociales ou encore l'économie, l'étude des périodes de crises peut être intéressante. Typiquement, un problème issu de l'un de ces domaines est assujéti à répondre à certaines contraintes, qui doivent être constamment vérifiées. Par exemple, un problème d'économie peut être lié à l'étude des variations de taux (d'intérêt, de chômage...), et les contraintes sont définies par l'intermédiaire de seuil(s).

Ce que l'on peut intuitiver est le fait qu'en pratique, il existe des périodes où ces contraintes ne sont pas satisfaites. Ces périodes sont appelées *périodes de crise*. Considérant un domaine de contraintes prédéfini pour le problème considéré, il est donc possible que l'évolution temporelle de ces contraintes quitte ledit domaine. Pire, l'évolution temporelle peut présenter un caractère d'irréversibilité suite à la sortie de ce domaine.

Ce qui introduit la licité du *problème de minimisation du temps de crise* : ce que l'on cherche est, étant donné un système et son jeu de contraintes associé, de quelle manière peut-on influencer sur ce système afin de réduire au minimum le temps pendant lequel les contraintes ne sont pas assujétiées.

0.2 Formulation mathématique du *problème de temps de crise*.

0.2.1 Énoncé général et notations relatives au problème.

Donnons-nous un réel $T > 0$ fixé, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction, K un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n , U un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^m , et considérons un système dynamique contrôlé de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{sur } [0, T] \\ x(0) = x_0 \in K \end{cases} \quad (0.2.1)$$

où x est l'état et u le contrôle, que l'on suppose pris dans l'ensemble des *contrôles admissibles* ainsi défini :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ est Lebesgue - mesurable}\}$$

Par la suite, on désignera par K^c le complémentaire de K dans \mathbb{R}^n , et par $\mathbf{1}_{K^c}$ la *fonction indicatrice* de K^c , définie comme suit :

$$\mathbf{1}_{K^c}(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } s \in K \\ 1 & \text{si } s \notin K \end{cases}$$

Le but est de considérer et d'étudier le problème de *Lagrange*¹ suivant, appelé *problème du temps de crise sur l'horizon fini* $[0, T]$:

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J^T(u) := \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x_u(t)) dt \quad (0.2.2)$$

On désignera par x_u l'unique² solution de (0.2.1), associée au contrôle u . La fonctionnelle à minimiser s'appelle *fonction de temps de crise sur* $[0, T]$. L'objectif est donc de trouver un contrôle optimal $u \in \mathcal{U}$ afin de minimiser le temps pendant lequel une trajectoire, associée à une solution de (0.2.1), soit en dehors de K .

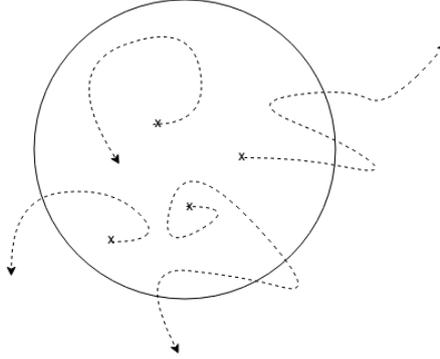


FIGURE 0.2.1 – Trajectoires issues de K .

Sur la représentation schématique ci-dessus, on se donne un ensemble K (ici, un disque), des conditions initiales $x_0 \in K$ (symbolisées par des croix), ainsi que des trajectoires issues de ces conditions initiales (la flèche indiquant le sens croissant du temps). Remarquons, sur ce schéma, que :

- Il y a exactement une seule trajectoire optimale (*i.e.* ne sortant jamais de K).
- La trajectoire de gauche est celle qui, parmi les trois autres trajectoires, va être le moins longtemps en *période de crise*.
- Les deux autres trajectoires sortent de K pour y rentrer à nouveau par la suite.

0.2.2 Hypothèses sous-jacentes sur le système.

Tout au long de cette étude, nous ferons les hypothèses suivantes sur le système :

- (H_U)** L'ensemble U est un sous-ensemble non vide, compact et convexe de \mathbb{R}^m .
- (H_K)** L'ensemble K est un sous-ensemble non vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n .
- (H_f)** La dynamique f est une application continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, localement lipschitzienne par rapport au couple de variables (x, u) , et satisfait la condition dite de *croissance au plus linéaire*, *i.e.* :

$$\exists \kappa_f > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U, |f(x, u)|_{\mathbb{R}^n} \leq \kappa_f |x|_{\mathbb{R}^n}$$

- (H_F)** Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble des vitesses augmentées ainsi défini :

$$F(x) := \{f(x, u) ; x \in U\}$$

est un ensemble non vide, compact et convexe.

1. C'est-à-dire que ce problème de contrôle optimal ne fait pas intervenir de *pay-off terminal*.
2. Sous certaines hypothèses classiques de contrôle optimal, que l'on rappellera dans une section ultérieure pour éviter de surcharger la section actuelle.

0.3 Exemple : un modèle de proie-prédateur contrôlé.

Soit $\alpha > 0$. On considère le système proie-prédateur³ contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1) + ux_2 \end{cases}$$

où x_1 représente le nombre de proies, x_2 le nombre de prédateurs, et $u(\cdot) \in [0, u_{\max}]$ la variable de contrôle. On se donne un certain horizon $T > 0$, et on cherche un contrôle $u(\cdot)$ astreint à minimiser la fonctionnelle de coût suivante :

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x_u(t)) dt$$

où $x_u := (x_1, x_2)$ désigne la solution du système proie-prédateur contrôlé associé au contrôle u que l'on prend dans l'ensemble des contrôles admissibles suivant :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \longrightarrow [0, u_{\max}] ; u \text{ est Lebesgue - mesurable}\}$$

et où l'on se donne le soin de choisir l'ensemble K de la façon suivante :

$$K := \{x_u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 ; x_1 > \alpha\}$$

D'après le système, il est évident que $(x_1^*, x_2^*) := (1, 1)$ est un équilibre du système non contrôlé. Pour bien illustrer la situation, quelques simulations numériques peuvent nous permettre d'intuire le portrait de phase en (x_1, x_2) pour pouvoir étudier, *a posteriori*, le comportement des trajectoires.

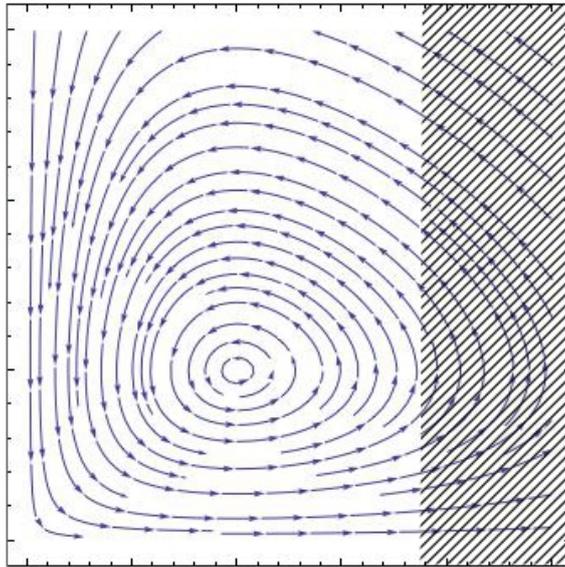


FIGURE 0.3.1 – Portrait de phase associé au système de Lotka-Volterra.

Ici, nous avons fait le choix d'indiquer le domaine K par des hachures, afin de repérer aisément les trajectoires qui rentrent en *période de crise*, et combien de temps celles-ci y restent. Un approfondissement de l'étude de ce modèle pourrait mener à considérer la *fonction de Liapunov*⁴ définie par :

$$\begin{aligned} V : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \ln x_1 - x_1 + \ln x_2 - x_2 \end{aligned}$$

3. Le modèle sous-jacent est appelé « de Lotka-Volterra », du nom de deux mathématiciens éponymes du 20^{ème} siècle, théoriciens de la dynamique des populations.

4. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (son nom, lorsqu'il est écrit en caractères romains, comporte de nombreuses variantes orthographiques), né en 1857 et mort en 1918, était un mathématicien Russe, mais aussi un mécanicien et physicien. Il est connu pour ses travaux sur la théorie autour de la stabilité des systèmes dynamiques, ainsi que pour ses contributions à la théorie des probabilités.

Celle-ci est constante le long des solutions du système proie-prédateur associé. En particulier, l'équilibre (x_1^*, x_2^*) est stable et vérifie :

$$V_{eq} := V(x_1^*, x_2^*) = V(1, 1) = -2 < 0$$

Chapitre 1

Avant-propos : rappels en contrôle optimal et optimisation.

Ce chapitre n'étant consacré qu'à des rappels, aucune propriété ne sera ici prouvée. Pour le lecteur intéressé, la plupart des résultats présentés ici sont prouvés dans [TRE]. Cette partie est subdivisée en plusieurs thèmes et problématiques.

1.1 Quelques rappels d'analyse convexe.

Le but de cette section est de rassembler diverses définitions et notions mathématiques d'analyse convexe, qui viendraient à être utilisées par la suite. Rappelons brièvement quelques notions de base.

Étant donné un espace vectoriel X , un sous-ensemble $A \subset X$ sera dit **convexe** si toute combinaison convexe d'éléments x et y de A , du type $\lambda x + (1 - \lambda)y$ où $\lambda \in [0, 1]$, appartient à A . Par exemple :

- Si X est équipé d'une norme, la boule fermée de \mathbb{R}^n de centre $0_{\mathbb{R}^n}$ et de rayon ρ , notée $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, \rho)$, est convexe.
- Un segment privé de son milieu $[-1, 0[\cup]0, 1] \subset \mathbb{R}$ n'est pas convexe.

Un espace vectoriel normé X est dit **de Banach** s'il est complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy de points de X converge vers un élément de X . Parmi la liste des espaces usuels de Banach, on peut citer, à titre d'exemples :

- L'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne usuelle ($n \geq 1$),
- L'espace $\mathcal{C}^0([a, b])$ des fonctions continues sur un intervalle fermé $[a, b]$,
- L'espace $\text{Lip}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lipschitziennes de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^n}}{|x - y|_{\mathbb{R}^m}}$$

Les ensembles compacts et convexes de \mathbb{R}^n sont les plus intéressants, ceux-ci nous apportant diverses propriétés, dont voici un exemple qui nous sera utile par la suite, notamment dans certaines preuves d'existence.

Proposition 1. *Soit K un ensemble compact et convexe de \mathbb{R}^n .*

- *Tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ admet une unique projection sur K , notée $P_K(x)$, telle que $P_K(x) \in K$ et :*

$$|P_K(x) - x|_{\mathbb{R}^n} = \min_{x' \in K} |x' - x|_{\mathbb{R}^n}$$

- *Toute fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que K est stable par f admet un point fixe, c'est-à-dire :*

$$\exists \kappa \in K, f(\kappa) = \kappa$$

En reprenant la notation de la proposition précédente, si on suppose de plus que K est non vide, on peut définir le **cône radial** $R_K(x)$, le **cône tangent** $T_K(x)$ et le **cône normal** $N_K(x)$ à K en x , respectivement de la façon suivante :

- $R_K(x) := \{h \in \mathbb{R}^n ; \exists \bar{\alpha} \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}], x + \alpha h \in K\}$.
- $T_K(x) := \left\{ h \in \mathbb{R}^n ; \exists \sigma > 0, x + \sigma h + o(\sigma) \in K, \left| \frac{o(\sigma)}{\sigma} \right|_{\mathbb{R}} \searrow 0 \right\}$.
- $N_K(x) := \{h \in \mathbb{R}^n ; \forall y \in K, \langle h, y - x \rangle \leq 0\}$.

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

Désormais, considérons que X est un espace de Banach, équipé de la norme $|\cdot|_X$. On définit la **distance** d'un point $x \in X$ à un sous-ensemble $A \subset X$ comme la plus petite distance séparant x d'un point de A , autrement dit :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} |x - a|_X$$

Supposons de plus que Y est également un espace de Banach, une **multi-application** F est une application qui, à tout point $x \in X$, associe un ensemble $F(x) \subset Y$. On dira naturellement qu'elle est à **valeurs compactes** si, pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous-ensemble compact de Y . De même, dire que F est à **valeurs bornées** signifie que toutes les valeurs prises par F sont contenues dans une boule fixée $B_F \subset Y$. Enfin, on dira que F possède un **graphe fermé** si l'ensemble :

$$\text{Graphe}(F) := \{(x, y) \in X \times Y ; y \in F(x)\}$$

est fermé. Une traduction séquentielle de la propriété précédente permet d'affirmer que pour toutes suites $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $(y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers x, y vérifiant l'inclusion $y_n \in F(x_n)$ pour tout $n \geq 1$ vérifie également l'inclusion $y \in F(x)$.

Enfin, nous dirons que la multi-application F est **de Marchaud** si celle-ci est non triviale, à valeurs compactes et convexes et si elle vérifie de plus la propriété de semi-continuité supérieure, *i.e.* :

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B(x_0, \eta), F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B(0_X, 1)$$

en désignant par $+$ la somme de Minkowski de deux ensembles, et si elle vérifie également la propriété de croissance au plus linéaire suivante :

$$\exists \kappa_F > 0, \forall x \in X, |x|_F \leq \kappa_F |x|_X$$

en désignant par $|\cdot|_F$ la norme suivante :

$$|x|_F := \sup_{y \in F(x)} |y|_Y$$

1.2 Qu'est-ce qu'un *systeme contrôlé* ?

Un *systeme contrôlé* est un système d'équations différentielles dépendant d'un paramètre (ici, une fonction) u de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I$$

où I est un intervalle, u est une fonction mesurable prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^m , et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction appelée *dynamique* du système contrôlé. Ici $t \in I$ désigne le temps, $x \in \mathbb{R}^n$ l'état du système, et u le *contrôle*.

Le contrôle u est assujéti à prendre ses valeurs dans l'ensemble des *contrôles admissibles*, ainsi défini :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ est Lebesgue - mesurable}\}$$

où $T > 0$ est donné. Enfin, on se donne deux sous-ensembles non-vides M_0 et M_T de \mathbb{R}^n , ainsi qu'une application $\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on appellera *lagrangien du systeme*, et $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on appellera *coût terminal* (ou *pay-off terminal*). Un *probleme de controle optimal* peut se formuler ainsi :

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \ell(t, x_u(t), u(t)) dt + \varphi(x_u(T)) \tag{1.2.1}$$

La notation x_u désigne une solution du système contrôlé, associée au contrôle u , et satisfaisant à $x_u(0) \in M_0$ et $x_u(T) \in M_T$. Un *problème de Bolza* est un problème tel qu'exposé ci-dessus. On parlera de *problème de Lagrange* lorsque $\varphi \equiv 0$ uniquement, et de *problème de Mayer* lorsque $\ell \equiv 0$ uniquement. Plusieurs questions se posent face à un problème de contrôle optimal :

1. Existe-t-il une solution x_u reliant M_0 à M_T ?
2. Existe-t-il un *contrôle optimal* u^* , autrement dit, le problème admet-il une solution $u^* \in \mathcal{U}$?
3. Est-il possible de caractériser un contrôle optimal u^* ?

Pour se fixer les idées, voici deux exemples concrets de tels problèmes :

1. Quel est le temps minimal pour rejoindre Uzès à partir de Montpellier, en sachant que la vitesse maximale de la voiture est de 130 km.h^{-1} , et en tenant compte de facteurs extérieurs (routes praticables, limitations de vitesses, aspects des routes, puissance de la voiture...)?
2. Peut-on « s'arranger » pour que, quelque soit la température de mon four à l'instant initial $t_0 = 0 \text{ min}$, la température intérieure du four soit égale, à l'instant $t_1 = 5 \text{ min}$, à $T_{t_1} = 210 \text{ }^\circ\text{C}$?

1.3 Résolution de problèmes d'existence relatifs au système contrôlé.

1.3.1 À propos de l'existence d'une solution du système contrôlé.

Considérons un système dynamique contrôlé $\dot{x} = f(t, x, u)$ où u désigne un contrôle mesurable par rapport à t . Introduisons la fonction g ainsi définie :

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) \longmapsto f(t, x, u(t))$$

dont la dépendance par rapport au temps est également mesurable. De ce fait, il convient d'introduire la notion de solution au sens de Carathéodory, avant de présenter le théorème de Cauchy-Lipschitz et le lemme de Gronwall.

On se donne I un intervalle de \mathbb{R} , et $g : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction astreinte à vérifier les conditions suivantes :

- (C1) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto g(t, x)$ est continue.
- (C2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto g(t, x)$ est mesurable.

Définition 1. On appelle **solution** de $\dot{x} = g(t, x)$ tout couple $(J, x(\cdot))$, où $J = [t_0, t_1]$ est un sous-intervalle de I , et x est une fonction absolument continue sur J telle que :

$$\forall t \in J, x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t g(\tau, x(\tau)) d\tau$$

On peut donc voir que $x(\cdot)$ est une solution au sens de Carathéodory si elle vérifie l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ pour presque tout $t \in J$.

Soit maintenant Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et définissons $\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^n ; (t, x) \in \Omega\}$ ainsi que $\Omega_x := \{t \in \mathbb{R} ; (t, x) \in \Omega\}$. Considérons maintenant une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- (C1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(t, x)$ est continue sur Ω_t .
- (C2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto g(t, x)$ est mesurable sur Ω_x .
- (C3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe deux constantes $c_K > 0$ et $L_K > 0$ dépendantes de K , telles que :

$$\forall ((t, x), (t, y)) \in K \times K, \begin{cases} |g(t, x)|_{\mathbb{R}^n} \leq c_K \\ |g(t, x) - g(t, y)|_{\mathbb{R}^n} \leq L_K |x - y|_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

et, se donnant $(t_0, x_0) \in \Omega$, on considère le problème de Cauchy suivant, que l'on appellera *système dynamique contrôlé réduit* :

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Le lemme suivant est un outil mathématique d'estimation d'une fonction vérifiant une certaine inégalité différentielle. Cet outil, puissant, permet notamment de démontrer l'unicité du problème de Cauchy (1.3.1).

Lemme 1 (Lemme de Gronwall (1919)). *Étant donnée une fonction z , absolument continue et positive, vérifiant le système d'inéquations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{z} \leq \alpha(t)z + \beta(t) \\ z(t_0) \leq \gamma \end{cases}$$

où $\gamma \geq 0$, α, β sont deux fonctions intégrables sur $[t_0, T]$, on a l'estimation suivante sur z :

$$\forall t \in [t_0, T], z(t) \leq \gamma \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \left[\beta(s) \exp\left(\int_{t_0}^s \alpha(\tau) d\tau\right) ds\right]$$

Sous ces hypothèses, il ne reste plus qu'à énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour le problème (1.3.1).

Théorème 1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (version locale)). *Sous les hypothèses précédentes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy (1.3.1) admet une unique solution locale $x(\cdot)$ définie sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$.*

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (version globale)). *Sous les hypothèses précédentes, et s'il existe deux constantes $c > 0$ et $L > 0$ telles que :*

$$\forall ((t, x), (t, y)) \in \Omega \times \Omega, \begin{cases} |g(t, x)|_{\mathbb{R}^n} \leq c \\ |g(t, x) - g(t, y)|_{\mathbb{R}^n} \leq L|x - y|_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

alors, pour tout $T > t_0$, le problème de Cauchy (1.3.1) admet une unique solution globale $x(\cdot)$ définie sur $[t_0, T]$, et la solution dépendant continûment de la condition initiale x_0 .

Ces énoncés garantissent donc l'existence d'une solution du système dynamique contrôlé, un contrôle $u \in \mathcal{U}$ étant donné. Cependant, un problème typique de contrôle optimal est la considération d'un système dynamique contrôlé, d'une part, et d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle d'autre part. C'est l'objet de la section suivante, dont les résultats portent sur l'existence d'une solution au problème d'optimisation.

1.3.2 À propos de l'existence d'une solution du problème de contrôle optimal.

Le but de l'énoncé suivant, appelé théorème de Phillipov¹, est de fournir quelques conditions suffisantes pour garantir l'existence d'un contrôle optimal sous un problème d'optimisation de Mayer :

Théorème 3 (Théorème de Phillipov). *Considérons le problème de Mayer suivant :*

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \varphi(x_u(T))$$

où x_u est l'unique solution de $\dot{x} = f(t, x, u)$, $u \in \mathcal{U}$ vérifiant $x(0) = x_0$ et $(T, x(T)) \in S$. De plus, supposons que :

- L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est compact, la cible S est fermée et $S \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$.
- Le coût φ est continu, la dynamique f est continue par rapport au triplet (t, x, u) , continûment différentiable par rapport à x et est à croissance au plus linéaire en x .
- L'ensemble des vitesses augmentées $F(t, x) := \{f(t, x, \omega) ; \omega \in U\}$ est convexe.

S'il existe une trajectoire reliant x_0 à S , alors il existe une solution optimale au problème de Mayer considéré.

1. Aleksei Fedorovich Phillipov, né en 1923 et mort en 2006, était un mathématicien russe. Ses travaux portaient sur les équations et inclusions différentielles, la théorie de la diffraction et les méthodes numériques.

Ce théorème d'existence est sensiblement modifié pour un problème de Bolza, devenant ainsi :

Théorème 4. *Considérons le problème de Bolza suivant :*

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \ell(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(x_u(T))$$

où x_u est l'unique solution de $\dot{x} = f(t, x, u)$, $u \in \mathcal{U}$ vérifiant $x(0) = x_0$ et $(T, x(T)) \in S$. De plus, supposons que :

- L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est compact, la cible S est fermée et $S \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$.
- Le coût φ est continu, la dynamique f est continue par rapport au triplet (t, x, u) , continûment différentiable par rapport à x et est à croissance au plus linéaire en x .
- Les ensembles $F^+(t, x) := \{(\dot{y}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; \dot{y} \geq \ell(t, x, \omega), y = f(t, x, \omega) \text{ pour un certain } \omega \in U\}$ sont convexes.
- La fonction ℓ est continue.

Si l'ensemble des trajectoires atteignant la cible S est non vide, alors il existe une solution optimale au problème de Bolza considéré.

1.4 Autour du concept d'inclusions différentielles.

Pour étudier certaines propriétés des systèmes dynamiques contrôlés, il conviendra d'utiliser le concept d'inclusions différentielles. Ainsi, on se donne un système dynamique contrôlé :

$$\dot{x} = f(t, x, u), u \in \mathcal{U}$$

où \mathcal{U} désigne l'ensemble des contrôles admissibles. On supposera que l'ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est compact, que l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est ouvert et que la fonction $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et continûment différentiable par rapport à sa première variable. On note F l'ensemble des vitesses augmentées :

$$F(t, x) = \{f(t, x, \omega), \omega \in U\}$$

Considérons maintenant l'inclusion différentielle ci-dessous.

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T]$$

Les inclusions différentielles offrent souvent une approche commode pour l'analyse des systèmes contrôlés. La différence entre les équations aux dérivées ordinaires et les inclusions différentielles est résumée de la façon suivante :

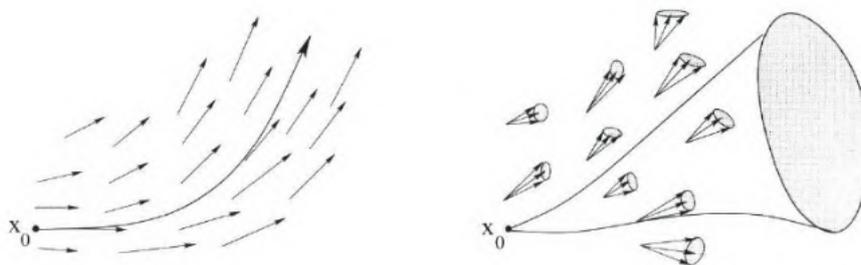


FIGURE 1.4.1 – Différence schématique entre équation différentielle et inclusion différentielle.

Dans le premier cas (celui illustré à gauche de la figure précédente), nous avons un modèle déterministe donné par l'équation différentielle. En d'autres termes, pour une condition initiale x_0 donnée, il correspond une unique

trajectoire $t \mapsto x(x_0, t)$. A contrario, dans le second cas (celui illustré à droite), nous avons un modèle non-déterministe où, pour toute condition initiale x_0 donnée, plusieurs trajectoires $t \mapsto x(x_0, t)$ sont possibles.

On a la caractérisation suivante d'une solution du système dynamique contrôlé, appelé résultat de Fillipov.

Proposition 2. *Une fonction absolument continue $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution du système dynamique contrôlé $\dot{x} = f(t, x, u)$, $u \in \mathcal{U}$ si et seulement si elle satisfait l'inclusion différentielle précédente pour presque tout $t \in [0, T]$.*

Par ailleurs, la proposition suivante, énoncée dans [CLA], énonce un résultat important quant à la convergence des arcs², pour une inclusion différentielle donnée.

Proposition 3. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une suite de fonctions absolument continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n telle que l'ensemble $(x_i(a))_{i \in I}$ est borné, et vérifiant :*

$$\dot{x}_i(t) \in F(\tau_i(t), x_i(t) + y_i(t) + r_i(t)B$$

pour presque tout $t \in [a, b]$, où B désigne la boule ouverte unité de \mathbb{R}^n et $(y_i)_{i \in I}$, $(r_i)_{i \in I}$, $(\tau_i)_{i \in I}$ désignent des suites de fonctions mesurables sur $[a, b]$ telles que :

- $(y_i)_{i \in I}$ converge vers 0 dans $L^2([a, b])$.
- $(r_i)_{i \in I}$ est une suite à termes positifs convergeant vers 0 dans $L^2([a, b])$.
- $(\tau_i)_{i \in I}$ converge vers t presque partout sur $[a, b]$.

Sous ces conditions, il existe une sous-suite de $(x_i)_{i \in I}$ qui converge uniformément vers x , où x désigne une fonction absolument continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n vérifiant $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ pour presque tout $t \in [a, b]$, et dont la suite des dérivées converge faiblement vers \dot{x} .

1.5 Quelques variations du principe du maximum de Pontryagin.

Le principe du maximum de Pontryagin³, né à la fin des années 1950, a pour optique de trouver une « politique » optimale, permettant de guider un système contrôlé vers une certaine cible.

1.5.1 Principe du maximum de Pontryagin : Énoncé général.

On se donne trois applications $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (appelée la *dynamique*), $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (le *lagrangien*), $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (le *payoff terminal*), toutes supposées de classe \mathcal{C}^1 , un réel $\bar{T} > 0$ et $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact. On considère le système de contrôle suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{1.5.1}$$

où les contrôles u sont pris dans l'ensemble \mathcal{U} dit *des contrôles admissibles* :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, \bar{T}] \rightarrow U; u \text{ est Lebesgue - mesurable}\}$$

et on suppose de plus que tous ces contrôles sont associés à des trajectoires reliant un point initial de $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ à un point final de $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, en un temps $t(u) < \bar{T}$. On considère le problème d'optimisation ci-dessous :

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \ell(x_u(t), u(t)) dt + \varphi(x_u(T)) \tag{1.5.2}$$

où, comme précédemment, la notation x_u désignera la solution du problème de Cauchy (1.5.1) sur $[0, T]$, T désignant le temps final, pouvant être fixé ou non. Le but de ce qui est suit est d'énoncer le principe du maximum de Pontryagin, qui énonce une condition nécessaire d'optimalité sur le contrôle u .

2. On désignera par *arc sur* $[a, b]$ toute application absolument continue x de $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

3. Lev Semionovitch Pontriaguine (plusieurs orthographes sont rencontrées dans la littérature), né en 1908 et mort en 1988, était un mathématicien soviétique. Ses recherches se sont orientées en topologie, théorie du contrôle optimal et sur les équations différentielles.

Théorème 5 (Principe du Maximum de Pontryagin). *Sous les considérations précédentes, si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelée **vecteur adjoint**, ainsi qu'un réel $p^0 \leq 0$, tels que :*

- Le couple $(p(\cdot), p^0)$ n'est pas trivial.
- Il est licite d'écrire le système d'égalités suivant pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t)) \end{cases} \quad (1.5.3)$$

où H désigne le **Hamiltonien** du système, défini par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, p, p^0, u) &\longmapsto \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 \ell(x, u) \end{aligned}$$

- La **condition de maximisation** suivante a lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), p^0, v) \quad (1.5.4)$$

- Si T n'est pas fixé, on a la **condition de maximisation au temps final** T suivante :

$$\max_{v \in U} H(x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{d\varphi}{dt}(x(T)) \quad (1.5.5)$$

- Si M_0 est une variété de \mathbb{R}^n ayant un espace tangent en $x(0) \in M_0$, alors $p(0) \perp T_{M_0}(x(0))$.
- Si M_1 est une variété de \mathbb{R}^n ayant un espace tangent en $x(T) \in M_1$, alors $p(T) - p^0 \frac{d\varphi}{dt}(x(T)) \perp T_{M_1}(x(T))$.

Une **extrémale** du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de (1.5.3) - (1.5.4). Dans le cas où $p_0 = 0$, on parlera d'extrémale **anormale**, et d'extrémale **normale** le cas échéant. Les conditions d'orthogonalité 5. et 6. du théorème précédent sont appelées **conditions de transversalité sur le vecteur adjoint**, et l'équation (1.5.5) s'appelle **condition de transversalité sur le Hamiltonien**.

1.5.2 Principe du maximum de Pontryagin : Énoncé dans le cadre de systèmes hybrides.

La théorie du contrôle est si vaste, qu'il existe une multitude de variantes au principe du maximum de Pontryagin. Dès à présent, l'auteur en introduit une d'entre elles. Un problème sera dit **hybride** s'il implique plusieurs systèmes de contrôle (ici, nous en aurons deux) autonomes, le second succédant au premier à un certain **temps de commutation** τ . En d'autres termes, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & u(t) \in U & 0 \leq t < \tau & \text{p.p.} \\ \dot{y}(t) = g(y(t), v(t)) & v(t) \in V & \tau < t \leq T & \text{p.p.} \end{cases}$$

Au système précédent, on adjoint également deux conditions portant sur les états initial et final :

$$\begin{cases} x(0) \in E_1 \\ y(T) \in E_2 \end{cases}$$

ainsi qu'une troisième condition, portant sur x et y à l'instant précis où l'on franchit le temps de commutation $t = \tau$:

$$(\tau, x(\tau), y(\tau)) \in \mathcal{S}$$

où l'on a pris le soin de se donner un certain ensemble \mathcal{S} . De plus, il n'est pas nécessaire de supposer que les dimensions de x et y sont identiques, et on peut supposer que τ peut également varier. Assujettie aux trois conditions précédentes, la fonctionnelle à minimiser est donc du type :

$$J := \int_0^\tau \ell_1(x(t), u(t)) dt + \int_\tau^T \ell_2(y(t), v(t)) dt + \varphi_0(\tau, x(\tau), y(\tau)) + \varphi_1(x(0)) + \varphi_2(y(T))$$

Par souci de simplicité, nous supposerons que toutes les fonctions ici utilisées, à savoir f , g , ℓ_1 , ℓ_2 , φ_0 , φ_1 et φ_2 , sont localement lipschitziennes (ou continûment différentiables, ce qui implique le caractère localement lipschitzien). Nous supposerons également que les ensembles U et V sont bornés, et que E_1 , E_2 et la cible \mathcal{S} sont tous trois fermés. Il convient également de définir les Hamiltoniens respectifs :

$$H_1^\eta(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle - \eta \ell_1(x, u) \quad H_2^\eta(y, q, v) = \langle q, g(y, v) \rangle - \eta \ell_2(y, v)$$

ainsi que les Hamiltoniens maximisés respectivement sur U et V :

$$M_1^\eta(x, p) = \max_{u \in \mathcal{U}} H_1^\eta(x, p, u) \quad M_2^\eta(y, q) = \max_{v \in \mathcal{V}} H_2^\eta(y, q, v)$$

Lorsque l'on a saisi l'importance du principe du maximum de Pontryagin énoncé précédemment, il convient de s'attendre une version similaire dans le cadre d'un système hybride. Intuitivement, le lecteur doit s'attendre à être confronté à deux principes du maximum de Pontryagin « classiques », avec un lien « à la frontière » (lorsque $t = \tau$), dans le sens suivant.

Théorème 6 (Principe du Maximum de Pontryagin Hybride⁴). *Sous les considérations précédentes, si les contrôles $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{V}$ respectivement associés aux trajectoires $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ sont optimaux sur $[0, T]$, alors il existe deux applications $p(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $q(\cdot) : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continues, ainsi qu'un réel $\eta \in \{0, 1\}$, tels que :*

- Le triplet $(\eta, p(\tau), q(\tau))$ n'est pas trivial.
- Il est licite d'écrire les **inclusions adjointes**, c'est-à-dire le système d'inclusions différentielles suivant, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) \in \partial_C H_1^\eta(\cdot, p(t), u(t))(x(t)) & \text{p.p. } t \in [0, \tau] \\ -\dot{q}(t) \in \partial_C H_2^\eta(\cdot, q(t), v(t))(y(t)) & \text{p.p. } t \in [\tau, T] \end{cases} \quad (1.5.6)$$

- Les contrôles u et v maximisent les Hamiltoniens sur chaque strate respective. Autrement dit, les **conditions de maximisation** suivantes ont lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} t \in [0, \tau] & \implies H_1^\eta(x(t), p(t), u(t)) = M_1^\eta(x(t), p(t)) \\ t \in [\tau, T] & \implies H_2^\eta(y(t), q(t), v(t)) = M_2^\eta(y(t), q(t)) \end{cases} \quad (1.5.7)$$

- Les Hamiltoniens sont conservés sur chaque strate où ceux-ci sont définis. En d'autres termes, la **condition de constance** suivante a lieu :

$$\exists h_1 \in \mathbb{R}, \exists h_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} \text{p.p. } t \in [0, \tau], & H_1^\eta(x(t), p(t), u(t)) = M_1^\eta(x(t), p(t)) = h_1 \\ \text{p.p. } t \in [\tau, T], & H_2^\eta(y(t), q(t), v(t)) = M_2^\eta(y(t), q(t)) = h_2 \end{cases} \quad (1.5.8)$$

- Les **conditions de transversalité** suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} p(0) \in \eta \partial_L \varphi_1(x(0)) + N_{E_1}^L(x(0)) \\ -q(T) \in \eta \partial_L \varphi_2(y(T)) + N_{E_2}^L(y(T)) \end{cases} \quad (1.5.9)$$

- Enfin, à la transition où $t = \tau$, s'applique la **condition de « switch »** suivante :

$$(h_1 - h_2, -p(\tau), q(\tau)) \in \eta \partial_L \varphi_0(\tau, x(\tau), y(\tau)) + N_{\mathcal{S}}^L(\tau, x(\tau), y(\tau)) \quad (1.5.10)$$

Globalement, il est clair que le principe du maximum hybride ressemble fortement à celui énoncé précédemment. Les seules nouveautés résident principalement dans l'appartition de la condition de « switch » (qui, intuitivement, « fait le lien entre $\dot{x} = f(x, u)$ et $\dot{y} = g(y, v)$ ») et des notations suivantes :

- $\partial_L \psi(\zeta)$, faisant référence à la notion de sous-différentiel⁵ de Mordukhovich de la fonction ψ au point ζ .
- $\partial_C \psi(\zeta)$, faisant référence à la notion de sous-différentiel de Clarke de la fonction ψ au point ζ .
- $N_X^L(\zeta)$, faisant référence à la notion de cône normal de Mordukhovich à l'ensemble X au point ζ .

4. Dans la pratique, nous abrègerons le nom de ce théorème par « principe du maximum hybride ».

5. Le lecteur intéressé pourra consulter [PEN] pour de plus amples informations à ce propos.

Le résultat suivant, que l'on admettra, simplifiera notablement le travail lors de l'étude approfondie du problème de temps de crise.

Fait 1. *Dans le cadre du problème de temps de crise, on peut faire les simplifications suivantes.*

- *L'ensemble K étant supposé convexe, les sous-différentiels de Mordukhovich et de Clarke seront assimilés au sous-différentiel de l'analyse convexe classique⁶.*
- *L'ensemble K étant supposé convexe, les cônes normaux de Mordukhovich seront assimilés au cône normal de l'analyse convexe classique.*
- *Le « vecteur adjoint » q « continue » le « vecteur adjoint » p , au sens suivant : $p(\tau) = q(\tau)$.*
- *La constance des Hamiltoniens est préservée « à gauche et à droite », au sens suivant : $h_1 = h_2$.*

Éléments de preuve. Nous ne donnons ici que des éléments de preuve, ou plutôt des intuitions pouvant guider le lecteur sur la preuve.

- La raison de la licéité des deux premiers items réside dans les hypothèses faites sur les différentes fonctions intervenant dans le problème de temps de crise.
- En ce qui concerne les deux derniers items, c'est un énoncé⁷ qui peut être démontré à titre d'exercice, dont l'ingrédient principal consiste en le fait que le second état est une continuité du premier, au sens où :

$$\mathcal{S} = \{(\tau, x, y) ; x = y\}$$

et dans le sens où φ_0 est identiquement nulle.

□

6. Le sous-différentiel d'une fonction f convexe et propre est l'ensemble de ses sous-gradients en $x \in X$, eux-mêmes définis comme les vecteurs $s \in X$ tels que $\forall y \in X, f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$.

7. Cet énoncé, d'ailleurs, n'est pas propre qu'au problème de temps de crise !

Chapitre 2

Du problème de temps de crise à sa régularisation : étude théorique.

2.1 Étude du problème de temps de crise non régularisé.

2.1.1 Étape 1 : Existence d'un contrôle optimal pour le problème non régularisé.

L'existence d'une solution au système dynamique (0.2.1) est simple à démontrer : en quelques mots, il suffit de prendre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, et d'utiliser l'hypothèse (\mathbf{H}_f) pour montrer que le problème de Cauchy (0.2.1) admet une unique solution x_u définie sur l'intervalle $[0, T]$. Il ne reste plus qu'à démontrer pourquoi on peut trouver un contrôle optimal au problème de temps de crise. C'est ce que nous faisons maintenant.

Proposition 4. *Le problème (0.2.2) admet un contrôle optimal.*

Démonstration. Commençons la preuve par quelques notations :

- μ désignera l'infimum de la fonctionnelle J^T sur \mathcal{U} , i.e. $\mu := \inf_{u \in \mathcal{U}} J^T(u)$.
- $(u_n) \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$ sera une suite minimisante de la fonctionnelle J^T sur \mathcal{U} .
- x_n désignera la solution associée au problème (0.2.1) sous le contrôle u_n .
- μ_n désignera l'évaluation de J^T en u_n , i.e. $\mu_n := J^T(u_n)$ ¹.

Maintenant, définissons la fonction $y_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ comme la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_n(t) = \mathbf{1}_{K^c}(x_n(t)) & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ y_n(0) = 0 \end{cases}$$

et, en désignant par $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des parties de \mathbb{R}^{n+1} , définissons la multi-application Θ par :

$$\Theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} f(x, U) \times \{0\} & \text{si } x \in \text{Int}(K) \\ f(x, U) \times [0, 1] & \text{si } x \in \partial K \\ f(x, U) \times \{1\} & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

Cette application est bien définie, remarquant que \mathbb{R}^n peut se décomposer suivant l'union disjointe triviale $\text{Int}(K) \sqcup \partial K \sqcup K^c$. Deux remarques viennent :

- L'ensemble $\Theta(x, y)$ est non vide, compact et convexe, en utilisant les hypothèses (\mathbf{H}_F) et (\mathbf{H}_U) .
- Utilisant de plus l'hypothèse (\mathbf{H}_f) , il vient que Θ est semi-continue inférieurement.

1. De ces définitions, il vient que $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$.

Soit maintenant $\omega \in \Theta(x, y)$. Il vient que :

$$\begin{aligned} |\omega|_{\mathbb{R}^{n+1}} &\leq |f(x, U)|_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} + 1 \\ &\leq \kappa_f |x|_{\mathbb{R}^n} + 1 \\ &\leq \kappa_f |(x, y)|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} + 1 \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (\mathbf{H}_f) relative à la croissance au plus linéaire de f . En posant $z_n := (x_n, y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion différentielle suivante :

$$\dot{z}_n \in \Theta(z_n)$$

Il existe donc² une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rendant la sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ uniformément convergente vers la trajectoire $z^* = (x^*, y^*)$, telle que $\dot{z}^*(t) \in \Theta(z^*(t))$ pour presque tout $t \in [0, T]$, et telle que toutes les dérivées de $z_{\varphi(n)}$ convergent faiblement vers \dot{z}^* .

De la première déduction, il s'ensuit que $\dot{x}^* \in F(x^*(t))$ pour presque tout $t \in [0, T]$, et donc que x^* est une solution de (0.2.1). De plus, par définition de $\mu_{\varphi(n)}$, et grâce à la convergence de $y_{\varphi(n)}$ vers y^* , on peut vérifier que :

$$y_{\varphi(n)}(T) = \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x_{\varphi(n)}(t)) dt = \mu_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y^*(T)$$

D'autre part, on a l'inégalité suivante, par définition de Θ :

$$y^*(T) \geq \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x^*(t)) dt = J^T(x^*)$$

Et il s'ensuit que $J^T(x^*) = \mu$, ce qui achève la démonstration. \square

2.1.2 Étape 2 : Application du principe du maximum hybride au problème non régularisé.

Sur le problème non régularisé, on peut appliquer le principe du maximum hybride, qui nous donnera des conditions d'optimalité. Dans un premier temps, il convient d'introduire la notion de *temps de croisement régulier*, adapté au contexte.

Définition 2. Nous dirons que $t_c \in [0, T]$ est un **temps de croisement régulier** de K à son complémentaire K^c pour une solution x du problème de temps de crise non régularisé, si les propriétés suivantes sont vraies :

- $x(t_c) \in \partial K$.
- Il existe une constante $\eta > 0$ telle que :
 - (i) $\ll x(\cdot)$ est dans K avant $t_c \gg$, i.e. $\forall t \in [t_c - \eta, t_c[, x(t) \in K$.
 - (ii) $\ll x(\cdot)$ n'est pas dans K après $t_c \gg$, i.e. $\forall t \in]t_c, t_c + \eta], x(t) \notin K$.
- Le contrôle u est continu à gauche et à droite de t_c .
- La trajectoire est transverse³ à K en t_c , i.e. pour tout $h^* \in N_K(x(t_c))$, s'il existe un élément $h \in T_K(x(t_c))$ vérifiant $h \notin R_K(x(t_c))$ et $\langle h, h^* \rangle = 0$, alors :

$$\langle h^*, f(x(t_c), u(t_c)) \rangle \neq 0$$

La définition d'un **temps de croisement régulier** de K^c à son complémentaire K s'obtient de la même façon, en remplaçant K par K^c dans la définition précédente.

2. D'après la proposition 3 du chapitre précédent, relative à la convergence des arcs.

3. En d'autres termes, cette condition signifie qu'une trajectoire ne peut rencontrer K de façon tangentielle à K .

Remarquons que si la frontière de K est lisse dans un certain voisinage de t_c , alors la quantité h^* évoquée dans la dernière propriété est le vecteur normal unitaire sortant de K en $x(t_c)$. De même, il convient de remarquer que la condition de transversalité de la trajectoire n'affirme rien d'autre qu'une trajectoire ne peut rencontrer K de façon tangentielle. Enfin, il convient d'introduire la dernière hypothèse majeure, appelée **condition transverse**, avant d'énoncer le principe du maximum hybride.

(**H_{tr}**) Une trajectoire optimale pour (TC) n'admet aucune ($m = 0$) ou un nombre fini ($m \geq 1$) de temps de croisements réguliers sur $[0, T]$, notés $\{t_1, \dots, t_m\}$.

Le principe du maximum hybride donne les conditions nécessaires suivantes : considérant un contrôle optimal $u \in \mathcal{U}$, on note H le Hamiltonien du système associé, défini de la manière suivante :

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, p, p^0, u) \longmapsto \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 \ell(x, u)$$

en supposant que la solution x du problème de temps de crise non régularisé satisfait à l'hypothèse (**H_{tr}**). Dans ce cas, il vient que :

- Il existe une constante $p^0 \leq 0$ et une application absolument continue par morceaux $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelée **vecteur adjoint** tels que $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$. De plus, $p(\cdot)$ est absolument continue entre chaque temps de croisement régulier, et satisfait à l'**équation adjointe** suivante, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\dot{p}(t) = - \langle p(t), D_x f(x(t), u(t)) \rangle$$

- La **condition de maximisation** suivante a lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$u(t) \in \arg \max_{\alpha \in U} \langle p(t), f(x(t), \alpha) \rangle$$

- Pour tout $t_c \in \{t_1, \dots, t_m\}$, nous avons la **condition de saut** relative au vecteur adjoint p :

$$\exists h^* \in N_K(x(t_c)), p(t_c^+) = p(t_c^-) + \frac{\langle p(t_c^-), f(x(t_c), u(t_c^-)) - f(x(t_c), u(t_c^+)) \rangle + \sigma p^0}{\langle h^*, f(x(t_c), u(t_c^+)) \rangle} h^*$$

où $\sigma = -1$ si t_c est un temps de croisement régulier de K à K^c , et $\sigma = +1$ dans le cas inverse. Les notations t_c^- et t_c^+ renvoient à la notion de continuité à gauche et à droite de t_c .

- Le vecteur adjoint satisfait à la **condition de transversalité** suivante $p(T) = 0$, dès lors que $x(T)$ est libre.

Dès lors que le couple $(p^0, p(\cdot))$ est non nul, nous pouvons supposer que $p^0 = -1$ d'après la condition de transversalité. Enfin, l'appellation **trajectoire extrémale** désignera un triplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ satisfaisant (0.2.1), ainsi que l'équation adjointe et la condition de maximisation précédentes.

Nous pouvons modifier l'hypothèse (**H_{tr}**) en supposant qu'une trajectoire optimale pour (TC) peut entrer ou quitter K de manière tangentielle lorsque le nombre de temps de croisements réguliers est fini. Cependant, si la trajectoire rencontre K de manière tangentielle à un temps t_c , la **condition de saut** relative au vecteur adjoint p s'écrit alors :

$$p(t_c^+) - p(t_c^-) \in N_K(x(t_c))$$

Pour pouvoir établir le principe du maximum hybride, le nombre de temps de croisements réguliers doit être fixé, pour une trajectoire optimale donnée. Ce n'est pas très commode : il convient donc de régulariser le problème étudié, afin de pouvoir trouver des conditions d'optimalité dans un cadre, disons, plus commun, sans aucune connaissance a priori sur le nombre de temps de croisements. Le fait de ne plus avoir à supposer la véracité de l'hypothèse (**H_{tr}**) est plus commode, et n'est plus obligatoire dès que nous appliquerons le principe du maximum de Pontryagin sur le problème régularisé.

Il convient maintenant de prouver l'équivalence entre les résultats énoncés précédemment ainsi que la formulation du principe du maximum de Pontryagin.

Démonstration. Il convient de rappeler que le problème du temps de crise consiste à minimiser la fonctionnelle :

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J^T(u) := \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x(t)) dt$$

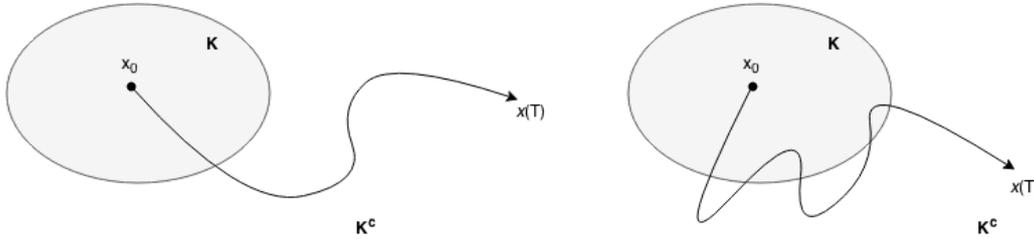
où x est l'unique solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{sur } [0, T] \\ x(0) = x_0 \in K \end{cases}$$

où u est le *contrôle*, que l'on suppose pris dans l'ensemble des *contrôles admissibles* ainsi défini :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ est Lebesgue - mesurable}\}$$

Sans aucune perte de généralités⁴, on supposera que la trajectoire optimale x admet un unique temps de croisement régulier $\tau \in]0, T[$, libre, comme indiqué sur la figure de gauche suivante. (Sur la figure de droite est représentée une trajectoire optimale admettant cinq temps de croisement réguliers : nous exclurons ce type de cas pour la suite). Nous supposons de plus que $x(t) \in K$ pour $t \in [0, \tau]$ et que $x(t) \notin K$ pour $t \in]\tau, T]$.



D'après les considérations précédentes, il conviendra donc de prendre $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ identiquement nulles, $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = 1$ sur leurs domaines de définition, $f = g$, ainsi que les égalités ensemblistes $U = V, E_1 = \{x_0\}, E_2 = \mathbb{R}^n$. On supposera que le passage de K à K^c se fera de manière continue, autrement dit que $x(\tau) = y(\tau)$. Enfin, on définit la cible \mathcal{S} ainsi :

$$\mathcal{S} :=]0, T[\times \{(x, x) ; x \in K\}$$

(1) Le principe du maximum hybride implique l'existence d'une constante $\eta \in \{0, 1\}$. En posant $p^0 := -\eta$ et en utilisant le fait que $p(\tau) = q(\tau)$, la **condition de non-trivialité** $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$ est vérifiée.

(2) Écrivons les équations adjointes : d'après le principe du maximum hybride, il existe deux applications absolument continues $p(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $q(\cdot) : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) = \frac{\partial H_1^\eta}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)) & \text{p.p. } t \in [0, \tau] \\ -\dot{q}(t) = \frac{\partial H_2^\eta}{\partial y}(y(t), q(t), v(t)) & \text{p.p. } t \in [\tau, T] \end{cases}$$

où les Hamiltoniens respectifs sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} H_1^\eta(x(t), p(t), u(t)) = \langle p(t), f(x(t), u(t)) \rangle \\ H_2^\eta(y(t), q(t), v(t)) = \langle q(t), g(y(t), v(t)) \rangle - p^0 \mathbf{1}_{K^c}(y(t)) \end{cases}$$

Supposons que, de façon presque sûre, $t \in [0, \tau]$. Alors, il vient l'équation différentielle suivante :

$$-\dot{p}(t) = \frac{\partial H_1^\eta}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)) = \langle p(t), D_x f(x(t), u(t)) \rangle \quad \text{p.p. } t \in [0, \tau]$$

4. Si x admet plus d'un temps de croisement régulier, il conviendra de décomposer le système $\dot{x} = f(x, u)$ sur $[0, T]$: la « partition » $[0, \tau[\cup]\tau, T]$ est adaptée pour un seul temps de croisement $\tau \in]0, T[$. Pour plusieurs temps de croisements réguliers, il faudrait « scinder » $[0, T]$ en autant de segments que nécessaire.

Supposons maintenant que, de façon presque sûre, $t \in [\tau, T]$. Alors, il vient l'équation différentielle suivante :

$$-\dot{q}(t) = \frac{\partial H_2^n}{\partial y}(y(t), q(t), v(t)) = \langle q(t), D_y g(y(t), v(t)) \rangle \text{ p.p. } t \in [\tau, T]$$

en utilisant le fait que $\mathbf{1}_{K^c}(t) = 1$ pour presque tout $t \in [\tau, T]$. Ceci prouve que les **équations adjointes** sont bien vérifiées.

(3) La **condition de maximisation** est triviale, celle-ci n'étant qu'une traduction de ce qu'affirme le principe du maximum hybride.

(4) Supposons que $x(T)$ est libre. Les conditions de transversalité se traduisent très facilement au moyen de l'analyse convexe. En effet, on a d'une part :

$$p(0) \in N_{\{x_0\}}(\{x_0\}) = \mathbb{R}^n$$

De la même façon, on peut écrire que :

$$-p(T) \in N_{\mathbb{R}^n}(\{x(T)\})$$

Par définition du cône normal, il vient que pour tout élément $\omega \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $\langle -p(T), \omega - x(T) \rangle \leq 0$ est vérifiée. Posons $\omega = x(T) + \varepsilon \mathbf{s}$, où $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{n-1}$ appartient à la sphère unité. Il vient que :

$$\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}^{n-1}, \varepsilon \langle -p(T), \mathbf{s} \rangle \leq 0$$

et il s'ensuit que $p(T) = 0$. Les **conditions de transversalité** sont donc bien vérifiées.

(5) Enfin, prouvons la licite de la **condition de saut** sur le vecteur adjoint. Là encore, nous supposerons qu'il existe un unique temps de croisement $\tau \in]0, T[$ pour la trajectoire optimale $x(\cdot)$ et ce, sans perte de généralités. Constatons que \mathcal{S} est convexe : comme produit cartésien d'un segment ouvert de \mathbb{R} (convexe) avec la diagonale d'un ensemble convexe. D'après le principe du maximum hybride, on a :

$$(h_1 - h_2, -p(\tau^-), p(\tau^+)) \in N_{\mathcal{S}}(\tau, x(\tau), x(\tau))$$

Posons $\Delta h := h_1 - h_2$ de sorte que l'inclusion précédente implique celle-ci :

$$\Delta h \in N_{]0, T[}(\tau)$$

Par définition du cône normal, il vient que pour tout $\omega \in [0, T]$, l'inégalité $\langle \Delta h, \omega - T \rangle \leq 0$ est vérifiée. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque.

1. D'une part, si l'on écrit $\omega = T - \varepsilon$, on obtient l'inégalité $-\varepsilon \Delta h \leq 0$.
2. D'autre part, en écrivant $\omega = T + \varepsilon$, on obtient l'égalité $\varepsilon \Delta h \leq 0$.

Ces deux inégalités, valables pour tout $\varepsilon > 0$, ne peuvent être simultanément satisfaites que si $\Delta h = 0$, soit :

$$h_1 = h_2$$

Ce qui implique⁵ la constance du Hamiltonien le long d'une trajectoire extrémale. Poursuivons notre raisonnement, il reste à étudier l'inclusion suivante :

$$(-p(\tau^-), p(\tau^+)) \in N_{\{(x,x); x \in K\}}(x(\tau), x(\tau))$$

Par définition du cône normal, et en utilisant le produit scalaire adéquat sur l'espace produit induit par la diagonale, il vient que pour tout $\omega \in K$, l'inégalité $\langle -p(\tau^-) + p(\tau^+), \omega - x(\tau) \rangle \leq 0$ est vérifiée. Ceci n'est rien d'autre qu'une traduction de l'affirmation suivante :

$$p(\tau^+) - p(\tau^-) \in N_K(x(\tau))$$

5. « Moralement », le principe du maximum hybride nous indiquait que, à un ensemble de mesure nulle près, chaque Hamiltonien était constant sur $[0, \tau]$, respectivement $[\tau, T]$. Ici, le résultat $h_1 = h_2$ n'est que la traduction que la valeur du Hamiltonien est presque partout conservée sur $[0, T]$ tout entier, autrement dit, que celle-ci ne dépend pas de la « strate temporelle » $[0, \tau]$ ou $[\tau, T]$ sur laquelle nous nous positionnons !

Ceci implique l'existence de $h^* \in N_K(x(\tau))$ et d'un réel $\alpha \geq 0$, tels que :

$$p(\tau^+) - p(\tau^-) = \alpha h^*$$

Or, quelques brefs calculs peuvent mener à l'expression explicite du scalaire α en fonction des données du problème :

$$\begin{aligned} p(\tau^+) - p(\tau^-) = \alpha h^* &\implies \langle p(\tau^+) - p(\tau^-), f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle = \alpha \langle h^*, f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle \\ &\implies \alpha = \frac{\langle p(\tau^+) - p(\tau^-), f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle}{\langle h^*, f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle} \end{aligned}$$

De plus, il convient de rappeler que le Hamiltonien est entièrement préservé le long d'une trajectoire extrémale. En utilisant l'expression des Hamiltoniens ainsi que la continuité⁶ de la trajectoire au voisinage de τ , on a :

$$\langle p(\tau^-), f(x(\tau), u(\tau^-)) \rangle = \langle p(\tau^+), f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle - 1$$

En combinant les deux égalités précédentes, il vient finalement que :

$$\alpha = \frac{\langle p(\tau^-), f(x(\tau), u(\tau^-)) - f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle + 1}{\langle h^*, f(x(\tau), u(\tau^+)) \rangle}$$

où la constante 1 apparaissant dans l'expression du coefficient α symbolise le fait que la trajectoire $x(\cdot)$ admet un temps de croisement τ permettant le passage de K à son complémentaire K^c . Le cas échéant, cette constante aurait été -1 . \square

2.2 Étude du problème de temps de crise régularisé.

2.2.1 Avant-propos : Pourquoi régulariser le problème ?

Le but de cette étude est de fournir des conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par les trajectoires solutions du problème (0.2.2).

Cependant, la discontinuité de la fonction $\mathbf{1}_{K^c}$, au niveau de la frontière de K , ne nous permet pas d'appliquer directement le principe du maximum de Pontryagin. En effet, cela provient du fait que l'on n'a aucune hypothèse usuelle concernant le caractère lipschitzien des données : cela ne permet pas l'application du principe du maximum de Pontryagin classique.

Pour surmonter cette difficulté, nous devons utiliser une méthode de régularisation basée sur une approximation de Moreau-Yosida. Ainsi, la sous-section suivante nous permettra de comprendre le lien entre le problème de temps de crise initial (TC) :

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x_u(t)) dt$$

et la famille de problèmes de temps de crise régularisés (TC_ε) , paramétrée par $\varepsilon > 0$:

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} d(x_u(t), K)^2\right) \right) dt$$

2.2.2 Introduction : Quelques notations et concepts utilisés pour la régularisation.

Par la suite, la notation $d(\cdot, K)$ désignera la *fonction distance* à l'ensemble K , tandis que χ_K désignera la *fonction caractéristique* de l'ensemble K , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \chi_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

6. Attention : la trajectoire $x(\cdot)$ est continue, mais il n'en est pas de même pour le contrôle $u(\cdot)$ ou le vecteur adjoint $p(\cdot)$!

Il est aisé de vérifier que cette fonction est convexe et semi-inférieurement continue en tout point de \mathbb{R}^n , si $K \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et convexe. Pour la régularisation du problème de temps de crise, il est également nécessaire d'introduire la notion suivante.

Définition 3. Soit $\varepsilon > 0$. On appelle **enveloppe de Moreau de χ_K et de paramètre ε** la fonction définie sur \mathbb{R}^n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, e_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon} d(x, K)^2$$

Cette notion, indispensable dans la future approximation de Moreau-Yosida dans notre problème de minimisation du temps de crise, satisfait à l'assertion suivante :

Proposition 5. Soit K un sous-ensemble de \mathbb{R}^n fermé et convexe, et notons $P_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ l'application de projection sur K ⁷. Alors e_ε vérifie les propriétés suivantes :

- e_ε est différentiable sur \mathbb{R}^n et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla e_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}(x - P_K(x))$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $e_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_K(x)$.

Démonstration. Le premier item étant prouvé dans [POL], nous ne prouverons que le second item. La preuve, aisée, repose sur l'union disjointe $\mathbb{R}^n = K \sqcup K^c$.

- Dans le cas où $x \in K$, $d(x, K) = e_\varepsilon(x) = \chi_K(x) = 0$.
- Le cas échéant, si $x \notin K$, et K étant fermé, il vient que $d(x, K) > 0$. Par conséquent, on voit bien que $e_\varepsilon(x)$ est une quantité tendant vers $+\infty$ dès lors que ε tend vers 0.

□

Enfin, nous noterons γ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $\gamma(x) := 1 - \exp(-x)$, de sorte que l'on puisse écrire $\mathbf{1}_{K^c} = \gamma \circ \chi_K$. La fonctionnelle à minimiser pour le problème régularisé sera définie de la façon suivante, pour tout $u \in \mathcal{U}$:

$$J_\varepsilon^T(u) := \int_0^T \gamma \circ e_\varepsilon(x_u(t)) dt$$

où x_u est l'unique solution de (0.2.1). Ainsi, on notera (TC) le problème du temps de crise :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J^T(u)$$

et (TC_ε) la famille de problèmes de temps de crise régularisés paramétrée par $\varepsilon > 0$:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J_\varepsilon^T(u)$$

2.2.3 Étape 1 : Existence d'un contrôle optimal pour le problème régularisé.

La preuve de l'existence d'un contrôle optimal pour (TC_ε) est simple et repose sur l'utilisation du théorème de Fillipov, ce que nous énonçons et démontrons maintenant.

Proposition 6. Le problème (TC_ε) admet un contrôle optimal, i.e. le problème (TC_ε) est bien posé.

Démonstration. Il suffit de constater les points suivants :

- L'hypothèse (\mathbf{H}_U) affirme que U est compact.
- L'hypothèse (\mathbf{H}_F) affirme que l'ensemble des vitesses augmentées est convexe et compact.
- L'application $\xi \mapsto \gamma \circ e_\varepsilon(\xi)$ est continue sur \mathbb{R}^n et bornée par 1.

Ce qui achève la démonstration.

□

⁷. Cette application est correctement définie, dans la mesure où K est un sous-ensemble fermé et convexe de \mathbb{R}^n .

Il est donc licite de considérer un contrôle optimal : nous noterons u_ε un minimiseur pour le problème (TC_ε) , et x_ε la trajectoire associée, vérifiant $x_\varepsilon(0) = x_0 \in K$. Le lemme suivant permet de justifier la corrélation entre les fonctionnelles J^T et J_ε^T .

Lemme 2. *Soit $u \in \mathcal{U}$ un contrôle. L'assertion suivante est légitime :*

$$J_\varepsilon^T(u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} J^T(u)$$

Démonstration. Considérons l'espace $[0, T]$, muni de la tribu borélienne sur \mathbb{R} , et de la mesure de Lebesgue. Cet espace est mesuré. Il est clair que la suite de fonctions $(\gamma \circ e_\varepsilon \circ x_u)_{\varepsilon > 0}$ converge simplement vers $\mathbf{1}_{K^c} \circ x_u$ sur $[0, T]$, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\gamma \circ e_\varepsilon(x_u(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{1}_{K^c}(x_u(t))$$

De plus, par construction de γ , il est facile de voir que cette suite de fonctions est uniformément bornée par 1. Le théorème de convergence dominée permet de conclure. \square

Constatons de plus que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple $(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$ tel que u_ε minimise la fonctionnelle J_ε^T . D'après la proposition 3, il existe un couple (u^*, x^*) avec $u^* \in \mathcal{U}$ solution de (0.2.1) et telle qu'à une sous-suite près, $(x_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge uniformément vers x^* sur $[0, T]$ et $(\dot{x}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement vers \dot{x}^* dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$. Ces considérations faites, il ne reste plus qu'à prouver que x^* minimise le problème (TC) .

Proposition 7. *Reprenant les mêmes notations que la remarque précédente, la trajectoire x^* minimise le problème de temps de crise (TC) .*

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant. Tout d'abord, donnons-nous une fonction ρ définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^n \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \text{Int}(K) \\ v & \text{si } x \in \partial K \\ 1 & \text{si } x \notin K \end{cases} \end{aligned}$$

Donnons-nous deux suites (ε_i) et (λ_i) de réels strictement positifs telles que ε_i, λ_i et $\frac{\lambda_i}{\varepsilon_i^2}$ convergent vers 0 à l'infini.

Lemme 3. *Considérant une solution $x(\cdot)$ de (0.2.1), il existe trois fonctions mesurables par rapport au temps $a_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, b_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v_i : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'égalité suivante ait lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:*

$$\gamma \circ e_{\varepsilon_i}(x(t)) = g(x(t) + a_i(t), v_i(t)) + b_i(t) \quad (2.2.1)$$

De plus, a_i et b_i convergent vers 0 et sont contrôlées de la manière suivante, pour tout $t \in [0, T]$, indépendamment de la trajectoire $x(\cdot)$ considérée :

$$0 \leq |a_i(t)|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon_i \quad 0 \leq |b_i(t)|_{\mathbb{R}} \leq \exp\left(-\frac{\lambda_i}{2\varepsilon_i^2}\right) \quad (2.2.2)$$

Démonstration. Dans toute cette preuve, $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, \lambda_i)$ désignera la boule fermée de \mathbb{R}^n ayant pour centre $0_{\mathbb{R}^n}$ et pour rayon λ_i , et K_{λ_i} désignera l'ensemble ainsi défini :

$$K_{\lambda_i} := K + \overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, \lambda_i)$$

Soit $t \in [0, T]$. Distinguons les cas pour faciliter l'écriture de la preuve :

Cas 1. **Si** $x(t) \in K$.

Il suffit de prendre $a_i \equiv 0, b_i \equiv 0$ et $v_i \equiv 0$: les assertions (2.2.1) et (2.2.2) sont alors triviales.

Cas 2. **Si** $x(t) \notin K_{\lambda_i}$.

Prenons $a_i \equiv 0$, $v_i \equiv 0$ et $b_i(t) := -\exp\left(-\frac{\lambda_i}{2}d(x(t), K)^2\right)$ et on a alors :

$$\gamma \circ e_{\varepsilon_i}(x(t)) = \mathbf{1}_{K^c}(x(t)) - \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon_i}d(x(t), K)^2\right) = g(x(t) + a_i(t), v_i(t)) + b_i(t)$$

Ce qui prouve l'égalité (2.2.1). Les contrôles (2.2.2) sont également obtenus : celui relatif à a_i est trivial, celui relatif à b_i est évident puisque $x(t) \notin K_{\lambda_i}$ et donc que $d(x(t), K) \geq \lambda_i$.

Cas 3. **Si** $x(t) \in K_{\lambda_i} \setminus K$.

Prenons $b_i \equiv 0$, $a_i(t) := P_K(x(t)) - x(t)$ et $v_i(t) := \gamma\left(\frac{\varepsilon_i}{2}d(x(t), K)^2\right)$. Par construction de a_i , il vient que $x(t) + a_i(t) = P_K(x(t)) \in \partial K$ et, par conséquent :

$$g(x(t) + a_i(t), v_i(t)) = v_i(t)$$

Ce qui prouve l'égalité (2.2.1). Les contrôles (2.2.2) sont également obtenus : celui relatif à b_i est trivial, celui relatif à a_i est évident par définition de $x(t)$.

L'achèvement de la preuve repose sur le fait que $x(\cdot)$ est absolument continue et, de ce fait, les ensembles suivants sont mesurables pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\{t \in [0, T] ; x(t) \in \text{Int}(K)\} \quad \{t \in [0, T] ; x(t) \in K_{\lambda_i}\}$$

ce qui rend les fonctions a_i , b_i et v_i mesurables par rapport au temps. □

Avant de continuer sur la preuve de la proposition précédente, et gardant les mêmes notations que précédemment, nous emploierons les notations suivantes :

$$T_1 := \{t \in [0, T] ; x^*(t) \in \text{Int}(K)\} \quad T_2 := \{t \in [0, T] ; x^*(t) \in \partial K\} \quad T_3 := \{t \in [0, T] ; x^*(t) \notin K\}$$

Preuve de la proposition précédente. Pour alléger les notations, u_i fera référence à u_{ε_i} , tout comme x_i fera référence à x_{ε_i} . Il convient de rappeler que pour tout $u \in \mathcal{U}$, $J_{\varepsilon_i}^T(u_i) \leq J_{\varepsilon_i}^T(u)$.

Sans pertes de généralités, nous pouvons supposer que, lorsque i tend vers $+\infty$, (x_i) convergera uniformément sur $[0, T]$ vers x^* , et (\dot{x}_i) convergera faiblement vers \dot{x}^* . Appliquant le lemme précédent à x_i , il vient que :

$$\gamma\left(\frac{\varepsilon_i}{2}d(x_i(t), K)^2\right) = g(x_i(t) + a_i(t), v_i(t)) + b_i(t) \quad (2.2.3)$$

Remarquant que $[0, T] = T_1 \sqcup T_2 \sqcup T_3$, posant $g_i(t) := g(x_i(t) + a_i(t), v_i(t))$ et intégrant l'équation (2.2.3) entre 0 et T , il vient que :

$$J_{\varepsilon_i}^T(u_i) = \int_{T_1} g_i(t) dt + \int_{T_2} g_i(t) dt + \int_{T_3} g_i(t) dt + \int_0^T b_i(t) dt \quad (2.2.4)$$

Étudions chaque terme de l'équation (2.2.4) :

1. Convergence de l'intégrale $\int_{T_1} g_i(t) dt$.

Supposons que $t \in T_1$. D'après le lemme précédent, a_i converge vers 0. De plus, x_i converge vers x^* . Il s'ensuit donc que $g_i(t) = 0$ si i est suffisamment grand. Sur l'ensemble T_1 , g_i converge donc vers $\mathbf{1}_{K^c}(x^*(\cdot))$. Enfin, la bornitude de g_i entraîne la convergence de cette intégrale vers 0.

2. Étude de l'intégrale $\int_{T_2} g_i(t) dt$.

Supposons que $t \in T_2$. Il est évident que $g_i(t) \geq 0$ et, par conséquent :

$$\int_{T_2} g_i(t) dt \geq 0$$

3. **Convergence de l'intégrale** $\int_{T_3} g_i(t) dt$.

Supposons que $t \in T_3$. Si i est suffisamment grand, $x_i(t) + a_i(t) \notin K$ et, de ce fait, $g_i(t) = 1$. Sur l'ensemble T_3 , g_i converge donc vers $\mathbf{1}_{K^c}(x^*(\cdot))$. Cette intégrale converge donc vers $J^T(u^*)$.

4. **Convergence de l'intégrale** $\int_0^T b_i(t) dt$.

D'après le lemme précédent, b_i est bornée et converge vers 0. On peut donc écrire que :

$$\int_0^T b_i(t) dt \leq T \|b_i\|_{L^\infty([0,T])} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$$

D'où la convergence de cette intégrale vers 0.

Des considérations précédentes vient l'inégalité suivante, valable pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\int_{T_1} g_i(t) dt + \int_{T_3} g_i(t) dt + \int_0^T b_i(t) dt \leq J_{\varepsilon_i}^T(u_i) \leq J_{\varepsilon_i}^T(u^*)$$

Pour conclure que u^* est le contrôle optimal, il suffit d'observer que pour tout $u \in \mathcal{U}$, on a :

$$J_{\varepsilon_i}^T(u_i) \leq J_{\varepsilon_i}^T(u)$$

et, en faisant tendre l'indice i vers $+\infty$, il vient l'inégalité suivante, ce qui achève la preuve :

$$J^T(u^*) \leq J^T(u)$$

□

2.2.4 Étape 2 : Application du principe du maximum de Pontryagin au problème régularisé.

Nous avons construit la famille de problèmes régularisés (TC_ε) afin de pouvoir appliquer le principe du maximum de Pontryagin, ce que nous faisons ici. Pour cela, nous allons construire un problème auxiliaire, noté par la suite (TC_ε^{eq}) . Tout d'abord, posons \mathcal{V} l'ensemble des contrôles admissibles ainsi défini,

$$\mathcal{V} := \{v : [0, T] \rightarrow K ; v \text{ est Lebesgue - mesurable}\}$$

et $\mathcal{W} := \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. La notation $\mathbf{u} := (u, v)$ désignera un élément de \mathcal{W} . On introduit le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x - v|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) & y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

dont $z_{\mathbf{u}} := (x_{\mathbf{u}}, y_{\mathbf{u}})$ désigne l'unique solution du système augmenté assujéti aux conditions initiales précédemment exposées. On définit le problème (TC_ε^{eq}) comme le problème de Mayer suivant :

$$\inf_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{W}} y_{\mathbf{u}}(T)$$

Lemme 4. *Les problèmes (TC_ε) et (TC_ε^{eq}) sont équivalents.*

Démonstration.

(\Rightarrow) **Une solution du problème (TC_ε) est aussi solution du problème (TC_ε^{eq}) .** Soit $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ une solution optimale du problème (TC_ε) dont on dénote par x_ε la solution au problème de Cauchy associé. On a :

$$\forall u \in \mathcal{U}, J_\varepsilon^T(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon^T(u)$$

On note x la solution du problème de Cauchy associée à u . K étant convexe, on a, pour tout $v : [0, T] \rightarrow K$:

$$\int_0^T \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} d(x_\varepsilon(t), K)^2 \right) dt \leq J_\varepsilon^T(u) \leq \int_0^T \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x(t) - v(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) dt$$

Donc $(u_\varepsilon, P_K(x_\varepsilon)) \in \mathcal{W}$ est une solution optimale de (TC_ε^{eq}) .

(\Leftarrow) **Une solution du problème (TC_ε^{eq}) est aussi solution du problème (TC_ε) .** Soit $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{W}$ une solution optimale du problème (TC_ε^{eq}) dont on dénote par x_ε la solution au problème de Cauchy associé. Supposons qu'il existe $\Gamma \subset [0, T]$, de mesure de Lebesgue positive vérifiant $v_\varepsilon(t) \neq P_K(x_\varepsilon(t))$ pour tout $t \in \Gamma$. La convexité de K implique l'inégalité stricte suivante :

$$\forall t \in \Gamma, |x_\varepsilon(t) - P_K(x_\varepsilon(t))|_{\mathbb{R}^n} < |x_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)|_{\mathbb{R}^n}$$

γ étant une application strictement croissante, il vient que :

$$\int_0^T \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x_\varepsilon(t) - P_K(x_\varepsilon(t))|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) dt < \int_0^T \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) dt$$

Ce qui contredit l'optimalité de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{W}$. Il s'ensuit que l'ensemble Γ n'existe pas, et que l'on a, pour presque tout $t \in [0, T]$, l'égalité $v_\varepsilon(t) = P_K(x_\varepsilon(t))$. Mais alors, l'optimalité de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{W}$ implique :

$$J_\varepsilon^T(u_\varepsilon) \leq \int_0^T \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x(t) - v(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) dt$$

où $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, et x est la solution du problème de Cauchy associé au problème (TC) . Prenons v définie sur $[0, T]$ par $v(t) := P_K \circ x(t)$. On obtient ensuite que $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ est une solution optimale de (TC_ε) :

$$J_\varepsilon^T(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon^T(u)$$

□

Il ne reste plus qu'à appliquer le principe du maximum de Pontryagin. Les problèmes (TC_ε) et (TC_ε^{eq}) étant équivalents, nous travaillerons sur le second, par commodité. Définissons d'abord le Hamiltonien du problème comme :

$$H_\varepsilon : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, p, q, u, v) \mapsto \langle p, f(x, u) \rangle + q\gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x - v|_{\mathbb{R}^n}^2 \right)$$

Soit un contrôle optimal $\mathbf{u}_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{W}$ relatif au problème (TC_ε^{eq}) , dont la trajectoire associée est notée $z_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. L'application du principe du maximum de Pontryagin aboutit aux assertions suivantes :

- Il existe une constante $q_\varepsilon \leq 0$ et une fonction absolument continue $p_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelée **vecteur ligne adjoint** tels que $(p_\varepsilon(\cdot), q_\varepsilon) \neq (0, 0)$. De plus, $p_\varepsilon(\cdot)$ satisfait à l'**équation adjointe** suivante, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\dot{p}_\varepsilon(t) = -\langle p_\varepsilon(t), D_x f(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) \rangle - \frac{q_\varepsilon}{\varepsilon} (x_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)) \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right)$$

- La **condition de maximisation** suivante a lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) \in \arg \max_{\alpha \in U} \langle p_\varepsilon(t), f(x_\varepsilon(t), \alpha) \rangle \\ v_\varepsilon(t) \in \arg \max_{w \in K} q_\varepsilon \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x_\varepsilon(t) - w|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) \end{cases}$$

- Nous avons la **condition de transversalité** $p_\varepsilon(T) = 0$ et $q_\varepsilon = -1$.

Toute trajectoire optimale correspond à une trajectoire extrémale normale (c'est-à-dire telle que $q_\varepsilon \neq 0$). On peut remarquer que la condition de transversalité provient du fait que $(p_\varepsilon(\cdot), q_\varepsilon) \neq (0, 0)$ et le fait que $x_\varepsilon(T)$ et $y_\varepsilon(T)$ sont libres.

La convexité de K et la condition de maximisation impliquent que $v_\varepsilon(t) = P_K(x_\varepsilon(t))$ pour presque tout $t \in [0, T]$, v_ε désignant un contrôle extrémal. De plus, le système étant autonome, le Hamiltonien est conservé le long de toute trajectoire extrémale. En particulier, pour $t = T$, on a l'égalité :

$$H_\varepsilon = -\gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} |x_\varepsilon(T) - v_\varepsilon(T)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right)$$

D'où le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, $|H_\varepsilon| \leq 1$.

2.2.5 Étape 3 : Convergence du système relatif à l'état adjoint.

Dans cette partie, nous supposons que les hypothèses (\mathbf{H}_U) , (\mathbf{H}_K) , (\mathbf{H}_f) et (\mathbf{H}_F) sont satisfaites. Le but de cette sous-section est simple : il s'agit de montrer que, lorsque le paramètre de régularisation $\varepsilon > 0$ tend vers 0, alors une extrémale du problème régularisé converge (à une sous-suite près) vers une extrémale du problème non régularisé.

À cet effet, notons (u_n, v_n) la solution de (TC_ε^{eq}) pour $\varepsilon = \varepsilon_n$, x_n l'unique solution de (0.2.1) associée au contrôle $u = u_n$, et p_n l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{p}_n(t) = -\langle p_n(t), D_x f(x_n(t), u_n(t)) \rangle + \frac{1}{\varepsilon_n} (x_n(t) - v_n(t)) \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(t) - v_n(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) & \text{p.p.t } \in [0, T] \\ p_n(T) = 0 \end{cases}$$

Le lemme suivant, d'apparence simple, est capital. Sa preuve est, cependant, très technique et pourra être évitée en première lecture pour le lecteur novice.

Lemme 5. *La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0, T])$. En d'autres termes, il existe une constante $P \geq 0$ vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|p_n\|_{L^\infty([0, T])} \leq P$$

Démonstration. Soient $\tau_1 \in [0, T]$ et $u_1 \in U$. La dynamique étendue \tilde{f} associée au système est définie par :

$$\tilde{f}(x, u) := (f(x, u), \gamma(x))$$

et le vecteur de variation $\tilde{v}_n := (v_n, v_n^0) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ du problème régularisé $(TC_{\varepsilon_n}^{eq})$ est défini comme l'unique solution du problème de Cauchy ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}}_n(t) = D_x \tilde{f}(x_n(t), u_n(t)) \tilde{v}_n(t) & \text{p.p.t } \in [0, T] \\ \tilde{v}_n(\tau_1) = \tilde{f}(x_n(\tau_1), u_1) - \tilde{f}(x_n(\tau_1), u_n(\tau_1)) \end{cases}$$

Ce système est équivalent au nouveau système suivant :

$$\begin{cases} \dot{v}_n(t) = D_x f(x_n(t), u_n(t)) v_n(t) & \text{p.p.t } \in [0, T] \\ v_n^0(t) = \langle \nabla \gamma(x_n(t)), v_n(t) \rangle \end{cases} \quad (2.2.6)$$

assujetti au système de conditions initiales ci-dessous.

$$\begin{cases} v_n(\tau_1) = f(x_n(\tau_1), u_1) - f(x_n(\tau_1), u_n(\tau_1)) \\ v_n^0(\tau_1) = 0 \end{cases}$$

De l'uniforme bornitude de $x_n(\cdot)$ sur $[0, T]$ et de la continuité de f , il vient que la suite $v_n(\cdot)$ est uniformément bornée sur $[0, T]$, par une constante notée C .

Considérons maintenant la constante $A \geq 0$ vérifiant l'assertion suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], |x_n(t) - P_K(x_n(t))|_{\mathbb{R}^n} \leq A$$

Prouvons maintenant que la suite $v_n^0(\cdot)$ est uniformément bornée sur $[0, T]$. Supposons que t_n^1 est un temps de croisement pour $x_n(\cdot)$, tel que la suite $(t_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers un certain t_1 , où t_1 est le premier temps de croisement pour $x^*(\cdot)$. Puisque t_1 est un temps de croisement isolé pour x^* , nous pouvons supposer, sans pertes de généralités, que :

$$\begin{cases} x_n(t) \in K & 0 \leq t \leq t_n^1 \\ x_n(t) \notin K & t > t_n^1, t \simeq t_n^1 \end{cases}$$

Ici, la notation $x \simeq y$ aura pour sens « x est dans un voisinage proche de y ». Considérons $\varepsilon_n > 0$ et choisissons $t \in [t_n^1, t_n^1 + \varepsilon_n]$. L'intégration de la seconde équation de (2.2.6) sur l'intervalle $[t_n^1, t]$ donne :

$$v_n^0(t) = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{t_n^1}^t \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon_n} \|x_n(t) - P_K(x_n(t))\|_{\mathbb{R}^n}^2\right) \langle x_n(t) - P_K(x_n(t)), v_n(t) \rangle dt$$

ce qui entraîne, puisque $t \in [t_n^1, t_n^1 + \varepsilon_n]$:

$$|v_n^0(t)|_{\mathbb{R}} \leq AC$$

et il s'ensuit que $v_n^0(\cdot)$ est bornée dans un voisinage du premier temps de croisement t_1 . Par suite, on peut prouver⁸ que $v_n^0(\cdot)$ est bornée sur tout intervalle compact I ne contenant pas un temps de croisement pour x^* .

De plus, l'égalité suivante a lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\frac{d}{dt} (\langle p_n(t), v_n(t) \rangle) = \langle \nabla \gamma(x_n(t)), v_n(t) \rangle = v_n^0(t)$$

En intégrant cette relation et sachant que $p_n(T) = 0$, il vient que :

$$\langle p_n(t), v_n(t) \rangle = v_n^0(t) - v_n^0(T)$$

Puisque $v_n^0(\cdot)$ est uniformément bornée sur $[0, T]$, alors la suite $\langle p_n(\cdot), v_n(\cdot) \rangle$ est uniformément bornée sur $[0, T]$. Enfin, pour tout $t \in [0, T]$, le cône de Pontryagin $K(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ est défini comme le plus petit cône de \mathbb{R}^n contenant tous les vecteurs de variations⁹ $v(t)$ pour tous les points de Lebesgue $0 < \tau_1 < t$. En utilisant le fait que $(x_n(\cdot), p_n(\cdot), u(\cdot))$ est une extrémale normale, on peut démontrer que $K(t) = \mathbb{R}^n$ (voir [HAB]), ce qui permet de déduire¹⁰ que $p_n(\cdot)$ est une suite uniformément bornée. \square

Une fois cette preuve finie, il convient de remarquer que la suite désignant l'état adjoint est bornée... pourtant, qu'en est-il de la suite des dérivées ? C'est l'objet de ce qui suit.

Précédemment, nous avons établi qu'il existe une solution x^* de (0.2.1) définie sur $[0, T]$ telle qu'à une sous-suite près, la suite $x_n(\cdot)$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers $x^*(\cdot)$, et la suite $\dot{x}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{x}^*(\cdot)$ dans $L^2([0, T])$.

Effectuons l'hypothèse relative au caractère fini du nombre de temps de croisement réguliers pour x^* . Dénotons par $(t_k)_{1 \leq k \leq m}$ ces temps de croisements réguliers pour x^* et remarquons que ceux d'indices impairs correspondent au passage de K à K^c . Par convention, on posera $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = T$. Enfin, choisissons $0 < \eta^0 < \min_{1 \leq k \leq m} \frac{t_{k+1} - t_k}{2}$ et, pour tout $0 < \eta < \eta^0$, nous emploierons la notation suivante :

$$I_\eta := [0, t_1 - \eta] \cup \left(\bigcup_{1 \leq k \leq m-1} [t_k + \eta, t_{k+1} - \eta] \right) \cup [t_m + \eta, T]$$

Constatons que $I_\eta \subset [0, T]$. Mieux que cela, les intervalles I_η ont été créés pour leurs qualités de compact évitant tout temps de croisement. Par extension, toute preuve de convergence reposant sur la manipulation des I_η pourra s'étendre à des compacts évitant ces instants de croisement. Le lemme ci-dessous est un exemple d'utilisation de tels compacts.

8. Plus précisément, pour tout intervalle compact I ne contenant pas un temps de croisement pour x^* , il existe une constante $\gamma_I > 0$, telle que pour tout $t \in I$, on ait $d(x_n(t), K) \geq \gamma_I$ si $n \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand. On obtient alors, pour presque tout $t \in I$:

$$v_n^0(t) \leq \frac{AC}{\varepsilon_n} \exp\left(-\frac{\gamma_I^2}{2\varepsilon_n}\right)$$

si $n \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand. Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir le résultat souhaité.

9. C'est-à-dire ceux correspondant à une variation en aiguille du contrôle $u_n(\cdot)$.

10. Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite t'_n telle que $\|p_n(t'_n)\| \rightarrow +\infty$. Prenant un vecteur de variation normalisé, colinéaire à $p_n(t'_n)$, on aurait une contradiction avec le fait que le second membre de l'équation $\langle p_n(t), v_n(t) \rangle = v_n^0(t) - v_n^0(T)$ est uniformément borné.

Lemme 6. Pour tout $\eta \in]0, \eta^0]$, il existe une fonction absolument continue $p_\eta^* : I_\eta \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que, à une sous-suite près, $p_n(\cdot)$ converge uniformément vers $p_\eta^*(\cdot)$ sur I_η et $\dot{p}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{p}_\eta^*(\cdot)$ sur $L^2(I_\eta)$. De plus, l'égalité suivante a lieu pour presque tout $t \in I_\eta$:

$$\dot{p}_\eta^*(t) = -\langle p_\eta^*(t), D_x f(x^*(t), u^*(t)) \rangle$$

Démonstration. $x_n(\cdot)$ est une suite convergente dans $L^2([0, T])$ et chaque temps de croisement est transverse. De ce fait, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ et un réel $\rho_n > 0$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, \forall t \in I_\eta, d(x_n(t), \partial K) \geq \rho_n$$

Utilisant le fait que K est compact et f est continue par rapport à chacune de ces variables, la suite $(x_n(\cdot), u_n(\cdot))$ est uniformément bornée sur $[0, T]$ et il existe un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait simultanément, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} |D_x f(x_n(t), u_n(t))|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha \\ |x_n(t) - P_K(x_n(t))|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha \end{cases}$$

Donc, pour tout réel $t \in I_\eta$, on a :

$$\begin{cases} |\dot{p}_n(t)|_{\mathbb{R}} \leq \alpha |p_n(t)|_{\mathbb{R}} & \text{si } x_n(t) \in K \\ |\dot{p}_n(t)|_{\mathbb{R}} \leq \alpha |p_n(t)|_{\mathbb{R}} + \frac{\alpha}{\varepsilon_n} \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} \rho_n \right) & \text{si } x_n(t) \notin K \end{cases}$$

Posant $\xi_n := \frac{\alpha}{\varepsilon_n} \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} \rho_n \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient l'inégalité suivante, pour presque tout $t \in I_\eta$:

$$|\dot{p}_n(t)|_{\mathbb{R}} \leq \alpha |p_n(t)|_{\mathbb{R}} + \xi_n$$

Et, d'après le lemme précédent, il s'ensuit que la suite $p_n(\cdot)$ est uniformément Lipschitz-continue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, il existe une fonction absolument continue $p_\eta^* : I_\eta \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que, à une sous-suite près, $p_n(\cdot)$ converge uniformément vers $p_\eta^*(\cdot)$. Puisque $\dot{p}_n(\cdot)$ est bornée dans $L^2(I_\eta)$, la convergence faible est immédiate. Enfin, l'égalité demandée est immédiate, en utilisant le fait que l'application

$$t \mapsto \frac{1}{\varepsilon_n} \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(t) - v_n(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) (x_n(t) - v_n(t))$$

est uniformément convergente vers 0 sur I_η . □

L'intérêt du lemme précédent réside dans l'énoncé et l'utilité de la proposition suivante.

Proposition 8. Il existe une fonction $p^* : [0, T] - \{t_1, \dots, t_m\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

- À une sous-suite près, $p_n(t) \rightarrow p^*(t)$ pour presque tout $t \in [0, T]$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- La fonction p^* est absolument continue sur tout intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, pour $0 \leq i \leq m$ (avec $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = T$), bornée sur $[0, T]$ et satisfait à :

$$\begin{cases} \dot{p}^*(t) = -\langle p^*(t), D_x f(x^*(t), u^*(t)) \rangle & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ p^*(T) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Démontrons ces deux propositions dans cet ordre.

- Si $\eta' < \eta \leq \eta^0$, il est clair que $I_\eta \subset I_{\eta'}$ et donc que $p_{\eta'}^*(t) = p_\eta^*(t)$ pour tout $t \in I_\eta$. Le lemme précédent affirme donc qu'il existe une extractrice φ_1 telle que la convergence $p_{\varphi_1(n)} \rightarrow p_\eta^*$ est uniforme sur I_η et telle que la convergence $p_{\varphi_1(n)} \rightarrow p_\eta^*$ est faible sur $L^2(I_\eta)$. Soit maintenant $\eta' < \eta$, il existe une extractrice φ_2 telle que la convergence $p_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \rightarrow p_\eta^*$ est uniforme sur $I_{\eta'}$ et telle que la convergence $p_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \rightarrow p_\eta^*$ est faible sur $L^2(I_{\eta'})$. Répétant ce raisonnement avec une suite décroissante η_n vers 0 de rationnels tels que $\eta_n < \eta^0$, il existe une extractrice φ_n telle que la convergence de la sous-suite diagonale $p_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n)} \rightarrow p_\eta^*$ soit uniforme sur chaque intervalle I_{η_k} ($k \in \mathbb{N}$), ce qui conclut la preuve.

- Posons $p_n := p_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n}(n)$. De par le lemme précédent, la fonction p^* coïncide avec p_n^* sur chaque I_η . Par conséquent, pour presque tout $t \in I_\eta$:

$$\dot{p}_\eta^*(t) = -\langle p_\eta^*(t), D_x f(x^*(t), u^*(t)) \rangle$$

Puisque $\eta > 0$ est arbitraire, et que $p_n(T) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient facilement le système :

$$\begin{cases} \dot{p}^*(t) = -\langle p^*(t), D_x f(x^*(t), u^*(t)) \rangle & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ p^*(T) = 0 \end{cases}$$

Et, de façon similaire à la preuve du lemme précédent, l'inégalité suivante a lieu pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$|\dot{p}^*(t)|_{\mathbb{R}} \leq \alpha |p^*(t)|_{\mathbb{R}}$$

L'intégration de la relation précédente grâce au lemme de Gronwall donne l'inégalité suivante, valable pour tout indice $i \in \{1, \dots, m-1\}$, et pour tous réels $t \in]t_i, t_{i+1}[$, $\tau_i \in]t_i, t_{i+1}[$:

$$|p^*(t)|_{\mathbb{R}} \leq |p^*(\tau_i)|_{\mathbb{R}} e^{\alpha T}$$

Ce qui prouve le fait que p^* est bornée sur $[0, T]$. □

Ayant introduit la notion de temps de croisement, il convient de se demander quel peut être le comportement de la fonction p^* lors du franchissement d'un tel temps de croisement. La proposition suivante vient répondre à cette question.

Proposition 9. *Les assertions suivantes sont vraies :*

- Soient (t_n^1) et (t_n^2) deux suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n^1 < t_1 < t_n^2$. Supposons de plus que (t_n^1) et (t_n^2) convergent toutes deux vers t_1 lorsque n tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [p_n(t_n^2) - p_n(t_n^1)] \in N_K(x^*(t_1))$$

- Les quantités $p^*(t_1^-)$ et $p^*(t_1^+)$ existent, et satisfont à :

$$p^*(t_1^+) - p^*(t_1^-) \in N_K(x^*(t_1))$$

- La fonction p^* satisfait à la condition de saut¹¹ suivante, relative au vecteur adjoint p , et ce à chaque temps de croisement t_c :

$$\exists h^* \in N_K(x(t_c)), p(t_c^+) = p(t_c^-) + \frac{\langle p(t_c^-), f(x(t_c), u(t_c^-)) - f(x(t_c), u(t_c^+)) \rangle + \sigma p^0}{\langle h^*, f(x(t_c), u(t_c^+)) \rangle} h^*$$

Démonstration. Démontrons ces trois propositions dans cet ordre.

- Soit $\eta < \eta^0$. De l'uniforme convergence de $x_n(\cdot)$ vers $x^*(\cdot)$ sur $[0, T]$ résulte l'existence de $\tilde{t}_n \in [t_1 - \eta, t_1 + \eta]$ tel que $x_n(\tilde{t}_n) \in \partial K$. Sans perte de généralités, on peut supposer que :

$$\tilde{t}_n = \min \{t \in [t_1 - \eta, t_1 + \eta] ; x_n(t) \in \partial K\}$$

Il vient que $\tilde{t}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t_1$. Définissons maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\zeta_n := - \int_{t_n^1}^{t_n^2} \langle p_n(t), D_x f(x_n(t), u_n(t)) \rangle dt$$

11. On rappelle que $p^0 \leq 0$ est la constante donnée par le principe du maximum hybride, $\sigma = -1$ si t_c est un temps de croisement régulier de K à K^c , et $\sigma = +1$ dans le cas inverse. Les notations t_c^- et t_c^+ renvoient à la notion de continuité à gauche et à droite de t_c .

Cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, on rappelle que l'équation suivante a du sens pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\dot{p}_n(t) = -\langle p_n(t), D_x f(x_n(t), u_n(t)) \rangle + \frac{1}{\varepsilon_n} (x_n(t) - v_n(t)) \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(t) - v_n(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right)$$

Ce qui donne, en intégrant sur le compact $[t_n^1, t_n^2]$:

$$p_n(t_n^2) - p_n(t_n^1) = \zeta_n + \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{t_n^1}^{t_n^2} \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(t) - v_n(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) (x_n(t) - v_n(t)) dt$$

De plus, il existe $\hat{t}_n \in]t_n^1, t_n^2[$ tel que :

$$p_n(t_n^2) - p_n(t_n^1) = \zeta_n + \frac{t_n^2 - t_n^1}{\varepsilon_n} \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(\hat{t}_n) - v_n(\hat{t}_n)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) (x_n(\hat{t}_n) - v_n(\hat{t}_n))$$

Posons $\rho_n := \frac{t_n^2 - t_n^1}{\varepsilon_n} \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(\hat{t}_n) - v_n(\hat{t}_n)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) |x_n(\hat{t}_n) - v_n(\hat{t}_n)|_{\mathbb{R}^n}$ et $w_n := \frac{x_n(\hat{t}_n) - v_n(\hat{t}_n)}{|x_n(\hat{t}_n) - v_n(\hat{t}_n)|_{\mathbb{R}^n}}$ de sorte que l'égalité précédente s'écrive :

$$p_n(t_n^2) - p_n(t_n^1) = \zeta_n + \rho_n w_n$$

La bornitude du membre de gauche entraîne la bornitude de la suite $(\rho_n w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\zeta_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$ donc la suite associée est également bornée). De plus, w_n a été construit de sorte à être de norme 1 : il existe donc $w \in \mathcal{S}^{n-1}$ tel que $w_n \rightarrow w$ lorsque n tend vers $+\infty$, à une sous-suite près. En prenant de nouveau une sous-suite, nous pouvons supposer le fait qu'il existe $\rho \geq 0$ tel que $\rho_n \rightarrow \rho$ lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, on rappelle que :

$$\forall t \in [0, T], v_n(t) = P_K(x_n(t))$$

donc, pour tout $y \in K$, on a :

$$\langle w_n, y - P_K(x_n(\hat{t}_n)) \rangle \leq 0$$

Faisons tendre n vers $+\infty$ pour obtenir le fait que $\langle w, y - P_K(x^*(t_1)) \rangle \leq 0$, ce qui prouve que $w \in N_K(x^*(t_1))$, ce qui achève la démonstration.

- D'après la proposition précédente, \dot{p}^* est bornée sur $[0, T] - \{t_1, \dots, t_m\}$. Il existe donc une constante $C \geq 0$ telle que pour tout indice $i \in \{0, \dots, m-1\}$, on a l'inégalité suivante, valable pour tous $t, t' \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$|p^*(t) - p^*(t')|_{\mathbb{R}} \leq C |t - t'|_{\mathbb{R}}$$

p^* satisfait donc au critère de Cauchy au point t_i^- , ce qui prouve l'existence $\lim_{t \rightarrow t_i^-} p^*(t)$.

- Puisque le système est autonome, le Hamiltonien H_n est conservé (constant) le long de toute trajectoire extrémale de $(TC_{\varepsilon_n}^{eq})$. De ce fait, nous pouvons supposer (à une sous-suite près) qu'il existe un réel $h \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \rightarrow h$ lorsque n tend vers $+\infty$. Maintenant, considérons deux temps t, t' tels que $t < t_1 < t'$. Si n est suffisamment grand, en utilisant la convergence uniforme de $x_n(\cdot)$, il vient que :

$$\langle p_n(t), f(x_n(t), u_n(t)) \rangle = \langle p_n(t'), f(x_n(t'), u_n(t')) \rangle - \gamma(x_n(t'))$$

Le fait de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente implique que :

$$\langle p^*(t_1^-), f(x^*(t_1), u^*(t_1)) \rangle = \langle p^*(t_1^+), f(x^*(t_1), u^*(t_1^+)) \rangle - 1$$

et la conclusion vient d'elle-même, en utilisant le fait que $p^*(t_1^+) - p^*(t_1^-) \in N_K(x^*(t_1))$.

□

Par souci de brièveté, il convient de reformuler tous les théorèmes précédents, pour conclure cette partie relative à la convergence du système adjoint.

Résumé. Supposons que les hypothèses (\mathbf{H}_U) , (\mathbf{H}_F) , (\mathbf{H}_f) et (\mathbf{H}_K) sont toutes satisfaites. Considérons une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels décroissante, convergeant vers 0. Considérons également une solution (x_n, u_n) du problème $(TC_{\varepsilon_n}^{eq})$ et p_n l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{p}_n(t) = -\langle p_n(t), D_x f(x_n(t), u_n(t)) \rangle + \frac{1}{\varepsilon_n} (x_n(t) - v_n(t)) \gamma' \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} |x_n(t) - v_n(t)|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) & \text{p.p.t} \in [0, T] \\ p_n(T) = 0 \end{cases}$$

Alors les propriétés suivantes sont satisfaites, à une éventuelle sous-suite près :

- (1) Il existe une solution (x^*, u^*) du problème (TC) telle que :
 - (a) $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers $x^*(\cdot)$ sur $[0, T]$.
 - (b) $\dot{x}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{x}^*(\cdot)$ dans $L^2([0, T])$.
- (2) La fonction valeur associée au problème $(TC_{\varepsilon_n}^{eq})$ converge ponctuellement sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ vers la fonction valeur associée au problème (TC) .
- (3) De plus, si x^* satisfait à l'hypothèse (\mathbf{H}_{tr}) , il existera une fonction $p^* : [0, T] - \{t_1, \dots, t_m\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\langle p(t), D_x f(x(t), u(t)) \rangle & \text{p.p.t} \in [0, T] \\ u(t) \in \arg \max_{\alpha \in U} \langle p(t), f(x(t), \alpha) \rangle & \text{p.p.t} \in [0, T] \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

et à la condition suivante, dite « **condition de saut** relative au vecteur adjoint p » pour tout temps de croisement $t_c \in \{t_1, \dots, t_m\}$:

$$\exists h^* \in N_K(x(t_c)), p(t_c^+) = p(t_c^-) + \frac{\langle p(t_c^-), f(x(t_c), u(t_c^-)) - f(x(t_c), u(t_c^+)) \rangle + \sigma p^0}{\langle h^*, f(x(t_c), u(t_c^+)) \rangle} h^*$$

telle que :

- (a) $p_n(\cdot)$ converge vers $p^*(\cdot)$ presque partout sur $[0, T]$.
- (b) Pour tout compact $C_T \subset [0, T]$ ne contenant pas de temps de croisement pour x^* :
 - (i) La convergence évoquée au point (a) est une convergence uniforme.
 - (ii) $\dot{p}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{p}^*(\cdot)$ dans $L^2(C_T)$.

Chapitre 3

Du problème de temps de crise à sa régularisation : deux exemples.

3.1 Exemple 1. Une stratégie naïve pour une dynamique planaire.

Dans cette section, nous allons considérer un exemple pour lequel nous pourrions calculer une politique optimale explicite, aussi bien pour le problème régularisé que pour le problème non-régularisé. À cet effet, il convient de considérer la dynamique planaire linéaire¹ suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2 + u) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

où $u : [0, T] \rightarrow [-1, 1]$ est un contrôle mesurable. La dynamique (3.1.1) sera étudiée sur le disque de rayon R :

$$\mathcal{D} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$$

De plus, l'ensemble compact convexe K représentant les contraintes est défini de la manière suivante :

$$K := \{(x_1, x_2) \in \mathcal{D} ; x_2 \geq 0\}$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, notre but sera de minimiser la fonctionnelle suivante, sous la condition initiale $x_u(t_0) = x_0 \in \mathcal{D}$:

$$\inf_{u(\cdot)} \int_{t_0}^T \mathbf{1}_{\mathcal{D} \cap K^c}(x_u(t)) dt \quad (3.1.2)$$

Lemme 7. *Le domaine \mathcal{D} est invariant par la dynamique (3.1.1).*

Démonstration. Soit $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{D}$ le couple de conditions initiales respectives de x_1 et x_2 . On sait que la dynamique peut s'écrire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2(2 + u) \\ \dot{x}_2 = x_1(2 + u) \end{cases}$$

L'intégration d'un tel système différentiel donne la relation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_1^2(0) + x_2^2(0) = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2$$

Or, il vient que $x_1^0 + x_2^0 \leq R^2$ par définition de x_1^0 et x_2^0 . Ce qui permet de conclure que le domaine \mathcal{D} est invariant par la dynamique considérée. \square

1. Celle-ci peut s'écrire $\dot{X} = AX$ avec $X = (x_1 \ x_2)^T$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -2-u \\ 2+u & 0 \end{pmatrix}$.

La construction du système planaire fait apparaître une matrice A dont les valeurs propres associées laissent suggérer une certaine licéité de l'utilisation des coordonnées polaires. Ceci est l'objet du lemme qui suit.

Lemme 8. *La dynamique (3.1.1) peut s'écrire de la façon équivalente suivante :*

$$\dot{\theta} = 2 + u \tag{3.1.3}$$

Démonstration. Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $x_1 = r \cos \theta$ et $x_2 = r \sin \theta$. Différentions l'expression de x_1 par rapport au temps :

$$\dot{x}_1 = -r\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}x_2$$

Utilisons l'expression de x_1 donnée par la dynamique (3.1.1) :

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}_1}{x_2} = 2 + u$$

Ce qui est l'expression alternative recherchée pour la dynamique étudiée. □

Les trajectoires sont donc des cercles de rayon $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |(x_1^0, x_2^0)|_{\mathbb{R}^2}$ centrés en l'origine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, et ce quelque soit le contrôle $u(\cdot)$ choisi. Ce dernier agit comme une vitesse angulaire pour les trajectoires. Désormais, considérons le contrôle (avec retour d'état, *feedback* en anglais) construit de la façon suivante :

$$u^*[x(t)] := \begin{cases} -1 & \text{si } x(t) \in K \\ 1 & \text{si } x(t) \in K^c \end{cases}$$

En regardant de plus près la construction de ce contrôle, on voit que l'on souhaite minimiser la vitesse angulaire lorsque l'état appartient à K , et à la maximiser lorsque l'état n'appartient plus à K . C'est ce que nous appelons ici *stratégie naïve*, comme l'illustre la figure suivante.

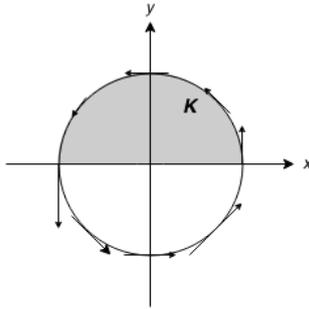


FIGURE 3.1.1 – Illustration de la *stratégie naïve* : lorsque l'on est dans K , on minimise la vitesse angulaire. En dehors de K , on la maximise pour « revenir plus vite » dans K .

Étant donnés deux réels $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $T > 0$ fixés, $\theta_m(\cdot)$ désignera l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = 2 + u_m(t) & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ \theta_m(0) = \theta_0 \end{cases}$$

où u_m est défini de sorte que $u_m(t) := u^*[\theta_m(t)]$. Par la suite, nous montrerons que cette stratégie, bien qu'elle n'est pas unique, est optimale pour le problème (3.1.2).

3.1.1 Étude du problème non régularisé.

Dans cette partie, nous cherchons un contrôle optimal pour le problème (3.1.2), en utilisant le principe du maximum hybride. Pour simplifier le cadre, nous supposons que $t_0 = 0$ et que $r = 1$. De plus, conformément à la construction du contrôle u^* précédemment explicitée, il convient d'introduire les deux sous-ensembles de \mathbb{R} :

$$C^+ := \sin^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{x \in \mathbb{R}; \sin x \geq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \quad C^- := \mathbb{R} - C^+$$

Fixons maintenant un réel $\theta_0 \in [0, 2\pi[$, ainsi qu'un contrôle Lebesgue-mesurable $u : [0, T] \rightarrow [-1, 1]$, et désignons par $\theta_u(\cdot)$ l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 2 + u(t) & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

Proposition 10. *On dénote par u un contrôle optimal relatif au problème (3.1.2).*

— Si $\theta_u(T) \in C^+$, alors l'expression de u est donnée par :

$$u(t) = \begin{cases} v \in [-1, 1] & \text{si } \theta_u(t) \in C^+ \\ 1 & \text{si } \theta_u(t) \in C^- \end{cases} \quad (3.1.4)$$

— Si $\theta_u(T) \in C^-$, alors l'expression de u est donnée par :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \theta_u(t) \in C^+ \\ v \in [-1, 1] & \text{si } \theta_u(t) \in C^- \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Démonstration. Désignons par H le Hamiltonien associé au système, défini de la manière suivante :

$$H : \quad \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\theta, \lambda, u) \quad \longmapsto \quad \lambda(2+u) - \mathbf{1}_{C^-}(\theta)$$

u désignera un contrôle optimal du problème (3.1.2), associé à la trajectoire θ_u . D'après le principe du maximum hybride, il existera une fonction absolument continue par morceaux $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation adjointe $\dot{\lambda}(t) = 0$ pour presque tout $t \in [0, T]$, et à $\lambda(T) = 0$. La condition de maximisation, quant à elle, se traduit ainsi :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda > 0 \\ -1 & \text{si } \lambda < 0 \\ v \in [-1, 1] & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Rappelons que le Hamiltonien est constant le long de toute trajectoire extrémale.

u prenant ses valeurs dans $[-1, 1]$, il vient que $\dot{\theta} \geq 1$, puis que les temps de croisements, qui sont tous transverses, sont en nombre fini. L'hypothèse (\mathbf{H}_{tr}) est donc satisfaite, et le principe du maximum hybride implique donc que λ a une discontinuité en un temps de croisement t_c et que la quantité $\lambda(t_c^+) - \lambda(t_c^-)$ est finie.

- (1) **Supposons que $\theta_u(T) \in C^+$.** Alors, puisque $\lambda(T) = 0$, l'expression du Hamiltonien donne $H = 0$.
- (a) **Supposons que $\theta_u(t) \in C^-$.** Alors $0 = 2\lambda + |\lambda| - 1$, ce qui impose $\lambda = \frac{1}{3}$ puis $u = 1$.
- (b) **Supposons que $\theta_u(t) \in C^+$.** Alors $0 = 2\lambda + |\lambda|$ implique que $\lambda = 0$ et on prend $u(t) \in [-1, 1]$.
- (2) **Supposons que $\theta_u(T) \in C^-$.** Alors, puisque $\lambda(T) = 0$, l'expression du Hamiltonien donne $H < 0$.
- (a) **Supposons que $\theta_u(t) \in C^+$.** Alors $H = 2\lambda + |\lambda| < 0$, ce qui impose la condition $\lambda < 0$. On en déduit donc aisément que $\lambda = H < 0$ tant que $\theta_u(t) \in C^+$ et, dans ce cas, $u(t) = -1$.
- (b) **Supposons que $\theta_u(t) \in C^-$.** Alors $H = 2\lambda + |\lambda| - 1$, ce qui impose que $\lambda \geq 0$ est constant dans C^- .² Enfin, si $\lambda = 0$ dans C^- , alors $u(t) \in [-1, 1]$ dans C^- et, si $\lambda > 0$ dans C^- , alors $u(t) = 1$ dans C^- .

Cette distinction de cas et les remarques précédentes permettent de retrouver les expressions de u escomptées. \square

Notre but était de prouver qu'ici, la stratégie naïve était optimale. C'est l'objet de ce qui suit.

Corollaire 1. u_m est un contrôle optimal pour le problème (3.1.2). En d'autres termes, étant donné un contrôle u mesurable, astreint à satisfaire l'une des conditions (3.1.4) ou (3.1.5), et tel que $\theta_u(0) = \theta_0$, on a :

$$J^T(u) \geq J^T(u_m)$$

où J^T est la fonctionnelle que l'on désire minimiser dans (3.1.2).

Démonstration. Dans un premier temps, il convient de changer l'expression de la fonctionnelle J^T au travers d'un changement de variables. Puisque $\theta_m \geq 1$, on peut transformer l'expression de $J^T(u_m)$, pour y faire apparaître une dépendance en $\theta = \theta_m(t)$:

$$J^T(u_m) = \int_0^T \mathbf{1}_{C^-}(\theta_m(t)) dt = \frac{1}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_m(T)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) d\theta$$

- (1) **Supposons que la valeur terminale de $\theta_u(\cdot)$ appartient à C^+ .** Alors u est donné par (3.1.4) et, suivant un raisonnement similaire à celui effectué précédemment, on peut écrire que :

$$J^T(u) = \frac{1}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_u(T)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) d\theta$$

et on en déduit la relation suivante :

$$J^T(u) - J^T(u_m) = \frac{1}{3} \int_{\theta_m(T)}^{\theta_u(T)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) d\theta$$

Que les trajectoires associées à θ_u et θ_m soient toutes deux dans C^+ ou C^- , il vient que $\dot{\theta}_u - \dot{\theta}_m \geq 0$ et, par conséquent, l'inéquation $\theta_u(t) \geq \theta_m(t)$ est vérifiée pour tout $t \in [0, T]$. Il vient alors que $\theta_u(T) \geq \theta^*(T) \geq 0$, d'où le résultat escompté.

- (2) **Supposons que la valeur terminale de $\theta_u(\cdot)$ appartient à C^- .** Alors u est donné par (3.1.5) et, suivant un raisonnement similaire à celui effectué précédemment, on peut écrire que :

$$\theta_m(t) - \theta_u(t) = \int_{t_0}^t [u_m(\tau) - u(\tau)] d\tau = \int_{\theta_0}^{\theta_u(t)} \frac{u_m(\theta_u^{-1}(\theta)) - u(\theta_u^{-1}(\theta))}{2 + u(\theta_u^{-1}(\theta))} d\theta$$

L'expression donnée par (3.1.5) permet d'en déduire que :

$$\theta_m(t) - \theta_u(t) = \int_{\theta_0}^{\theta_u(t)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) \left[\frac{3}{2 + u(\theta_u^{-1}(\theta))} - 1 \right] d\theta$$

2. En effet, le fait de supposer que λ est strictement négatif dans C^- serait absurde : on aurait $\lambda = H + 1 < 0$ et $\lambda(T) = 0$.

Il s'ensuit que la fonctionnelle de coût peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J^T(u) &= \frac{1}{3} \left[\theta_m(T) - \theta_u(T) + \int_{\theta_0}^{\theta_u(T)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) d\theta \right] \\ &= J^T(u_m) + \frac{1}{3} \left[\theta_m(T) - \theta_u(T) + \int_{\theta_m(T)}^{\theta_u(T)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

Que les trajectoires associées à θ_u et θ_m soient toutes deux dans C^+ ou C^- , il vient que $\dot{\theta}_u - \dot{\theta}_m \leq 0$ et, par conséquent, l'inéquation $\theta_u(t) \leq \theta_m(t)$ est vérifiée pour tout $t \in [0, T]$ ce qui, de même que dans le cas précédemment, donne le résultat escompté.

Cette distinction de cas achève la preuve. \square

Comme dit précédemment, les trajectoires pour le problème (3.1.2) ne sont pas uniques. En effet, quelque soit le comportement du contrôle $u(\cdot)$ dans un voisinage de $t = T$, la fonctionnelle de coût est inchangée si la trajectoire prend fin dans K^c ou dans l'intérieur de K . Par exemple, si $\theta_u(T)$ est dans un voisinage proche de $\theta_m(T) \in C^-$, alors il vient immédiatement que $J^T(u) = J^T(u_m)$. Ceci ne change rien au fait que le contrôle u_m est optimal.

3.1.2 Étude du problème régularisé.

Dans cette partie, nous cherchons un contrôle optimal pour le problème (3.1.2), en utilisant le principe du maximum de Pontryagin, après régularisation du problème subséquent au moyen de la méthode de régularisation de Moreau-Yosida. Pour simplifier le cadre, nous supposons toujours que $t_0 = 0$ et que $r = 1$. De par la construction de K , il vient que la fonctionnelle « distance à K » prend la forme suivante :

$$d(x(t), K) = -\min[0, \sin(\theta(t))]$$

de sorte que le problème de contrôle optimal (3.1.2) se régularise ainsi :

$$\inf_{u(\cdot)} J_\varepsilon^T(u) := \int_0^T \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \min[0, \sin(\theta_u(t))]^2\right) \right] dt \quad (3.1.6)$$

où nous désignerons par u un contrôle Lebesgue-mesurable $u : [0, T] \rightarrow [-1, 1]$, $\theta_u(\cdot)$ désignant l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 2 + u(t) & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

pour une condition initiale $\theta_0 \in \mathbb{R}$ donnée. Fixons maintenant un réel $\theta_1 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. De façon similaire à l'étude du problème non régularisé, il convient d'introduire les deux sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

$$C_{\theta_1}^+ := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi - \theta_1, (2k+1)\pi + \theta_1] \quad C_{\theta_1}^- := \mathbb{R} - C_{\theta_1}^+$$

La proposition suivante nous donne des conditions d'optimalité pour le problème régularisé (3.1.6).

Proposition 11. *Considérant u_ε un contrôle optimal pour le problème régularisé (3.1.6), les assertions suivantes sont vérifiées :*

- Si $\theta_{u_\varepsilon}(T) \in C^+$, alors l'expression de u_ε est donnée par (3.1.4)³.
- Si $\theta_{u_\varepsilon}(T) \in C^-$, alors il existe un unique réel $\theta_1^\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que :

$$u_\varepsilon(t) := \begin{cases} -1 & \text{si } \theta_{u_\varepsilon}(t) \in C_{\theta_1^\varepsilon}^+ \\ 1 & \text{si } \theta_{u_\varepsilon}(t) \in C_{\theta_1^\varepsilon}^- \end{cases}$$

3. Il est intéressant de noter que, dans ce cas, nous retrouvons l'expression de u établie dans le cadre du problème non régularisé!

Démonstration. Désignons par H_ε le Hamiltonien associé au système régularisé, défini de la manière suivante :

$$H_\varepsilon : \quad \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\theta, \lambda, u) \quad \longmapsto \quad \lambda(2+u) - \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \min[0, \sin \theta]^2\right) \right]$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ jouera le rôle du vecteur adjoint, u_ε désignera un contrôle optimal du problème (3.1.6), associé à la trajectoire θ_{u_ε} définie comme l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 2 + u_\varepsilon(t) & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

D'après le principe du maximum hybride, il existera une fonction absolument continue $\lambda_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation adjointe suivante, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\dot{\lambda}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \min[0, \sin(\theta_{u_\varepsilon}(t))]^2\right) \min[0, \sin(\theta_{u_\varepsilon}(t))] \cos(\theta_{u_\varepsilon}(t))$$

dont la condition de transversalité implique que $\lambda_\varepsilon(T) = 0$. La condition de maximisation, quant à elle, implique la loi de commande suivante :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_\varepsilon(t) > 0 \\ -1 & \text{si } \lambda_\varepsilon(t) < 0 \\ \tilde{u}_\varepsilon \in [-1, 1] & \text{si } \lambda_\varepsilon(t) = 0 \end{cases}$$

Constatons que $\lambda_\varepsilon(\cdot)$ joue le rôle d'une fonction de commutation, croissante pour $\theta_{u_\varepsilon}(\cdot) \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (modulo 2π) et décroissante pour $\theta_{u_\varepsilon}(\cdot) \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ (modulo 2π). Rappelons que le Hamiltonien est constant le long de toute trajectoire extrémale et, de ce fait, on a :

$$H_\varepsilon = 2\lambda_\varepsilon + |\lambda_\varepsilon| - \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \min[0, \sin \theta_{u_\varepsilon}]^2\right) \right]$$

(1) **Supposons que $\theta_{u_\varepsilon}(T) \in C^+$.** Alors, puisque $\lambda_\varepsilon(T) = 0$, l'expression du Hamiltonien donne $H_\varepsilon = 0$.

(a) **Supposons que $\theta_{u_\varepsilon}(t) \in C^+$.** Si, pour $t \in [0, T]$, $\lambda_\varepsilon(t) < 0$ ou $\lambda_\varepsilon(t) > 0$, on obtiendrait une contradiction avec l'expression du Hamiltonien précédente (sachant que $H_\varepsilon = 0$). On a donc, dans ce cas, $\lambda_\varepsilon(t) = 0$ et, dans ce cas, le contrôle u_ε peut prendre toutes les valeurs possibles de $[-1, 1]$.

(b) **Supposons que $\theta_{u_\varepsilon}(t) \in C^-$.** Alors, de façon similaire au cas précédent, on obtiendrait $\lambda_\varepsilon(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et, dans ce cas, $u_\varepsilon(t) = 1$.

(2) **Supposons que $\theta_{u_\varepsilon}(T) \in C^-$.** Alors, puisque $\lambda_\varepsilon(T) = 0$, l'expression du Hamiltonien donne $H_\varepsilon < 0$.

(a) **Supposons que $\theta_{u_\varepsilon}(t) \in C^+$.** Dans ce cas, il est aisé de voir que $\lambda_\varepsilon(t)$ est constant, et que $\lambda_\varepsilon(t) < 0$. On en déduit donc aisément que $\lambda_\varepsilon(t) = H_\varepsilon < 0$ tant que $\theta_{u_\varepsilon}(t) \in C^+$ et, dans ce cas, $u_\varepsilon(t) = -1$ pour tout $t \in [0, T]$.

(b) **Supposons que $\theta_{u_\varepsilon}(t) \in C^-$.** On sait que $\theta_{u_\varepsilon}(T) \in C^-$ et que $\lambda_\varepsilon(T) = 0$, d'où :

$$H_\varepsilon = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \sin^2 \theta_{u_\varepsilon}(T)\right) - 1$$

Ceci implique clairement que $H_\varepsilon + 1 > 0$, et ce qui légitime l'existence d'un réel $\theta_1^\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant l'égalité $\sin(\pi + \theta_1^\varepsilon) = -\sqrt{-2\varepsilon \ln(H_\varepsilon + 1)}$. L'expression du Hamiltonien est invariante par changement de variable $\theta \longleftrightarrow \pi - \theta$. Il vient alors que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction de commutation $\lambda_\varepsilon(\cdot)$ admet exactement deux zéros $\theta_1^\varepsilon + (2k+1)\pi < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \theta_1^\varepsilon$ sur l'intervalle $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$. Au temps terminal $t = T$, $\theta_{u_\varepsilon}(T)$ est nécessairement l'un de ces deux zéros. Enfin, la monotonie de λ_ε ainsi qu'une symétrie centrale par rapport à $\tilde{\theta} = \frac{3\pi}{2}$ donne le résultat escompté.

Cette distinction de cas et les remarques précédentes permettent de retrouver les expressions de u_ε escomptées. \square

La petite différence par rapport au problème non régularisé réside dans la proposition suivante, qui établit le caractère optimal de la stratégie naïve dans un seul des cas précédemment exposés.

Corollaire 2. u_m est un contrôle optimal pour le problème (3.1.6). En d'autres termes, étant donné un contrôle u_ε mesurable, astreint à satisfaire la condition (3.1.4), et vérifiant $\theta_{u_\varepsilon}(0) = \theta_0$, on a :

$$J_\varepsilon^T(u_\varepsilon) \geq J_\varepsilon^T(u_m)$$

où J_ε^T est la fonctionnelle que l'on désire minimiser dans (3.1.6).

Démonstration. Puisque la valeur terminale de $\theta_{u_\varepsilon}(\cdot)$ est dans C^+ , l'expression du contrôle u_ε est donnée par (3.1.4). De façon similaire au corollaire 1, quelques calculs mènent à l'expression suivante :

$$J_\varepsilon^T(u_\varepsilon) - J_\varepsilon^T(u_m) = \frac{1}{3} \int_{\theta_m(T)}^{\theta_{u_\varepsilon}(T)} \mathbf{1}_{C^-}(\theta) \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \sin^2 \theta\right) \right] d\theta$$

et, utilisant le fait que l'on ait $\theta_m(t) \leq \theta_{u_\varepsilon}(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, l'égalité précédente implique que u_m est un contrôle optimal pour le problème régularisé, ce qui achève la preuve. \square

Notons que dans le deuxième cas de la proposition précédente, on pourrait se demander si le contrôle subséquent converge vers le contrôle avec retour d'état suivant :

$$u^*[x(t)] := \begin{cases} -1 & \text{si } x(t) \in K \\ 1 & \text{si } x(t) \in K^c \end{cases}$$

La réponse à cette question n'est malheureusement pas affirmative, dans la mesure où les trajectoires optimales du problème ne sont pas uniques.

3.2 Exemple 2. Le problème de temps de crise appliqué au chémostat.

3.2.1 Introduction : le chémostat, outil d'étude de la croissance de micro-organismes.

L'exemple suivant, relatif au chémostat⁴, témoigne de l'application des mathématiques à l'écologie. Le terme *chemostat* a été introduit en 1950 par Monod⁵, Novick⁶ et Szilard⁷, et provient de l'acrostiche « *C*hemical *e*nvironment *i*s *s*tatic ». Ce dispositif permet l'étude de la croissance de micro-organismes au travers de la connexion en série de trois récipients, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

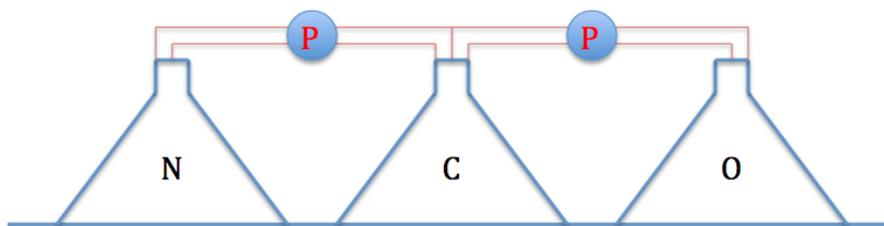


FIGURE 3.2.1 – Représentation schématique simplifiée du chémostat : trois récipients connectés en série à l'aide de pompes réglées à la même vitesse.

4. Pour le lecteur intéressé, le chémostat a été présenté dans [CAU], et étudié dans sa quasi-globalité par Hal Smith.

5. Jacques Monod, né en 1910 et décédé en 1976, était un biologiste et biochimiste français de l'Institut Pasteur de Paris, lauréat en 1965 du prix Nobel de physiologie et médecine. Les apports de Jacques Monod à la biologie moléculaire sont considérables. Intéressé par la génétique des micro-organismes, il mettra en évidence l'existence de l'ARN messager.

6. Aaron Novick, né en 1919 et décédé en 2000, est considéré comme l'un des fondateurs de la biologie moléculaire. Il s'est associé avec Leo Szilard, avec qui il a travaillé au laboratoire de Métallurgie de l'Université de Chicago durant la seconde guerre mondiale.

7. Leo Szilard, né en 1898 et décédé en 1964, était un physicien hongro-américain. Dès 1933, il a participé au projet Manhattan tout en menant une action publique contre l'utilisation de l'énergie nucléaire et promouvant le désarmement. Il s'intéressa par la suite à la biologie moléculaire naissante et fut l'un des initiateurs du Laboratoire européen de biologie moléculaire.

En conditions opératoires simples (nutriments en quantités excédentaires sauf un, conditions optimales pour la croissance des bactéries), on cherche à comprendre la dynamique dans le récipient C (récipient de culture) recevant en continu des substances nutritives.

Présentons quelques notations⁸ nécessaires à la compréhension du système du chémostat où n espèces sont en compétition : S désignera la concentration de substrat, S_{in} désignera la quantité de substrat entrante dans le récipient N , D désignera le taux de dilution exercé dans le récipient C , et X_i désignera la concentration en espèce i au sein du récipient de culture. Enfin, nous supposons que chaque espèce i suit une cinétique de type Monod⁹, c'est-à-dire de la forme :

$$\mu_i(S) := \frac{\bar{\mu}_i S}{K_i + S}$$

où $\bar{\mu}_i > 0$ est une constante, appelée *constante de saturation de la cinétique*¹⁰ et $K_i > 0$ est une constante, appelée *constante de Michaelis-Menten*¹¹. Continuons avec quelques définitions :

Définition 4. Pour chaque espèce i considérée, la plus petite valeur de S assujettie à vérifier $\dot{X}_i = 0$ est appelée **break-even concentration** de l'espèce i , et est communément notée λ_i .

Une conséquence directe de cela est que, dans le cadre d'une cinétique monotone, l'expression de λ_i est donnée par $\lambda_i = \mu_i^{-1}(D)$. Ici, ayant choisi le cadre d'une cinétique de type « Monod » pour toutes les espèces, on peut alors écrire l'égalité suivante :

$$\lambda_i = \frac{K_i D}{\bar{\mu}_i - D}$$

cette définition ayant du sens pour un taux de dilution D aussi bien constant que fonctionnel, à la seule condition que $\bar{\mu}_i > D$.

On rappelle la proposition suivante, rappelant l'utilité de la break-even concentration dans le cadre de plusieurs espèces en compétition dans un chémostat. Celle-ci affirme, dans les grandes lignes, que la break-even concentration est un « indicateur de survie » d'une espèce.

Proposition 12. *Supposons, quitte à renuméroter les espèces, que l'espèce 1 a la plus petite break-even concentration. Si, de plus, $\lambda_1 < S_{in}$, alors l'espèce 1 est la seule espèce à survivre dans le chémostat.*

Le système d'équations différentielles du chémostat, modélisant l'évolution de la concentration de n espèces en compétition pour obtenir du substrat, s'établit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i(S) X_i + D(S_{in} - S) \\ \dot{X}_1 &= \mu_1(S) X_1 - D X_1 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{X}_n &= \mu_n(S) X_n - D X_n \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où les quantités proportionnelles à D sont des termes d'ordre physique, ceux d'ordre biologique étant modélisés par des quantités proportionnelles aux quantités $\mu_i(\cdot)$. Les quantités S , X_1 , X_2 doivent être positives pour respecter une certaine cohérence avec la biologie sous-jacente du système précédent. Cette propriété, démontrée dans [CAU], se reformule mathématiquement de la forme suivante :

Proposition 13. *Le domaine \mathbb{R}_+^3 est invariant par la dynamique (3.2.1). Autrement dit, la positivité des conditions initiales $S(0)$, $X_1(0)$ et $X_2(0)$ entraîne la positivité des valeurs de $S(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, et ce pour tout $t \geq 0$.*

8. Le problème peut s'appréhender de multiples façons : par exemple, il sera parfois intéressant de considérer la quantité de biomasse $B := \sum_{i=1}^{i=n} X_i$ courante dans le récipient de culture, ou la proportion $p_i := \frac{X_i}{B}$ d'une espèce i dans le récipient... les notations d'une importance moindre seront présentées au fur et à mesure du développement, lorsqu'elles présenteront une utilité.

9. Dans la littérature, on trouvera également l'appellation de « équation de Michaelis-Menten ».

10. L'appellation se conçoit une fois que l'on a constaté que l'égalité suivante est vraie : $\lim_{S \rightarrow +\infty} \mu_i(S) = \bar{\mu}_i$.

11. Cette constante a la dimension d'une concentration : plus précisément, c'est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse initiale de la réaction est égale à la moitié de la vitesse initiale maximale.

Les autres propriétés suivantes, relatives au système différentiel (3.2.1), ont aussi été démontrées dans [CAU], et sont rappelées ici à titre purement indicatif. Elles pourront servir par la suite.

Proposition 14. *Le système différentiel (3.2.1) du chémostat, où $n = 2$ espèces sont en compétition, satisfait aux assertions suivantes :*

- Les quantités $S(\cdot)$ et $X_i(\cdot)$ sont bornées.
- En posant Z la quantité définie par $Z := S + X_1 + X_2 - S_{in}$:
 - Z satisfait à l'équation différentielle $\dot{Z} = -DZ$.
 - $Z = 0$ est une variété stable attractive¹² : on a donc $S + X_1 + X_2 = S_{in}$ à l'équilibre.
 - Toute solution périodique du système (3.2.1) vérifie $Z = 0$.

3.2.2 Une variation du problème de temps de crise adaptée au chémostat.

Pour cette sous-section, nous considérerons que les deux espèces en compétition suivent toutes deux une cinétique de type Monod, dont les courbes se croisent en une unique intersection non triviale $(S^*, D^*) \neq (0, 0)$, comme l'illustre le graphique ci-dessous.

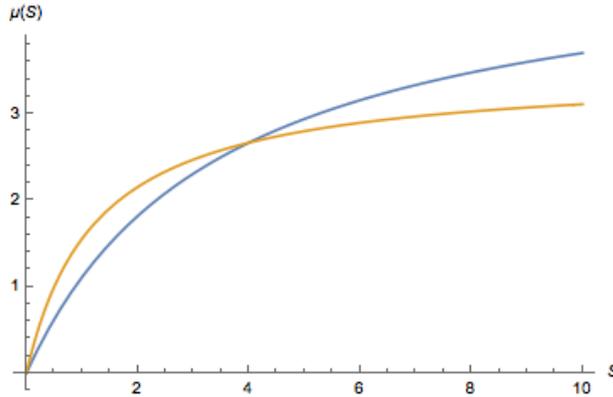


FIGURE 3.2.2 – Cinétiques de Monod avec intersection non triviale.

Le problème biológico-mathématique suivant se pose : on se donne un chémostat, où vivent deux espèces X_1 et X_2 contrôlées par un taux de dilution $u(\cdot) := D(\cdot)$. On souhaite maintenir la quantité d'espèce 1 au-delà d'un certain seuil X_1^* : autrement dit, on souhaite que $X_1(\cdot) > X_1^*$. Mais, *de facto*, l'espèce 2 est aussi présente.

Sur la variété $S + X_1 + X_2 = S_{in}$, on a donc le système dynamique en dimension 2 suivant, à variables (X_1, X_2) , contrôlé par $u(\cdot)$:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = [\mu_1(S_{in} - X_1 - X_2) - u] X_1 \\ \dot{X}_2 = [\mu_2(S_{in} - X_1 - X_2) - u] X_2 \end{cases}$$

où le domaine $K := \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; X_1 \geq X_1^*\}$ est l'ensemble dont le complémentaire représente la crise. Remarquons que la positivité de S entraîne l'appartenance des valeurs de (X_1, X_2) au domaine triangulaire $X_1 + X_2 < S_{in}$.

12. En l'absence de perturbations, le système va évoluer de façon irréversible vers cette variété.

Quelques simulations numériques sous Scilab permettent d'appréhender le problème du maintien de X_1 au-dessus de la valeur seuil X_1^* .

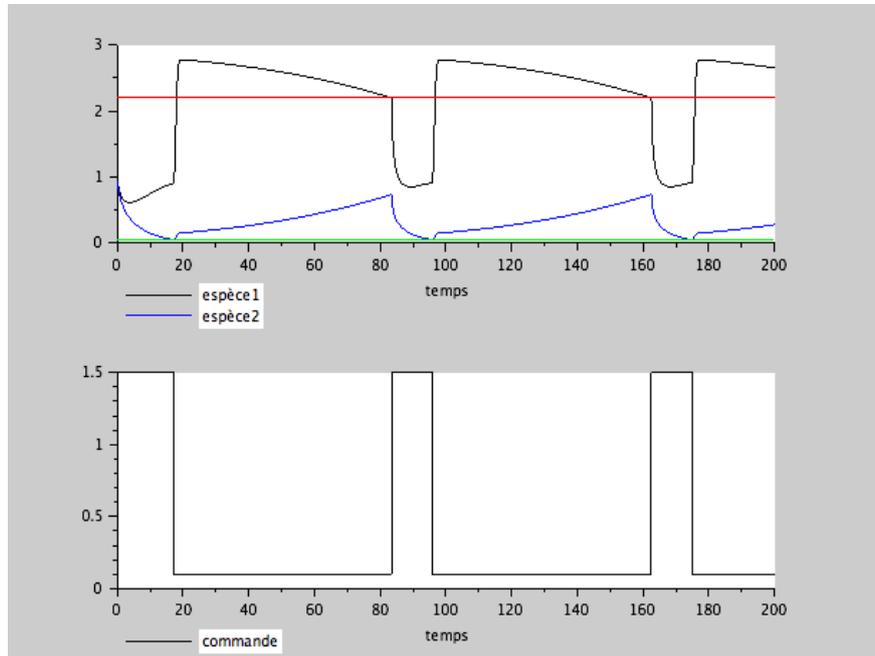


FIGURE 3.2.3 – Simulations numériques du système chémostat sous Scilab.

La figure précédente présente, pour des valeurs de paramètres et de conditions initiales fixées, l'évolution temporelle de la quantité des espèces 1 et 2 au sein du chémostat, ainsi que la loi de commande associée. Remarquons que :

- Il existe un temps $\tau > 0$ au-delà duquel les évolutions des concentrations en espèce 1 et 2 semblent périodiques, alternant entre périodes de crises, courtes et effectivement existantes, et périodes de non-crisis, plus longues.
- Le contrôle $u(\cdot) := D(\cdot)$, correspondant au taux de dilution, est choisi constant par morceaux.
 - Avec un taux de dilution D suffisamment faible, on assure la pérennité de l'espèce 1 pendant quelques unités de temps. Les deux espèces 1 et 2 assurent leur survie au sein du chémostat. L'évolution quantitative de leurs concentrations est lente.
 - Avec un taux de dilution D suffisamment grand, on assure le retour en période de non-crise rapidement, de sorte que la quantité X_1 redevienne rapidement supérieure au seuil X_1^* . Durant ce même temps, l'espèce 2 décroît en concentration, aussi rapidement que la concentration en espèce 1 augmente.

De plus, d'autres simulations numériques prouvent que, ayant choisi des conditions initiales dans l'ensemble défini par $X_1 + X_2 < S_{in}$, avec $X_2(0)$ faible et/ou $X_1(0)$ arbitrairement grand, les périodes de crises sont toujours existantes, mais de durées inévitablement plus courtes.

Chapitre 4

Du problème de temps de crise à sa viabilisation.

4.1 Introduction : la viabilité comme outil d'étude des systèmes contrôlés.

Dans le langage courant, le mot *viabilité* décrit la capacité d'une entité à survivre. Comme expliqué précédemment, l'étude des périodes de crises peut s'avérer utile dans de nombreux domaines, comme par exemple en économie, en finance ou en sciences sociales, entre autres. Le premier point de vue que l'on peut adopter est celui développé jusqu'alors, la viabilité étant un autre point de vue pour la résolution et l'appréhension d'un problème de temps de crise.

Compte tenu du contexte mathématique posé jusqu'alors, le lecteur pourra intuitivement que cette notion est relative au comportement d'un objet au sein d'un domaine donné. Mathématiquement parlant, il vient la définition suivante.

Définition 5. Étant donné un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ et une trajectoire $x(\cdot)$, on dira que cette dernière est **viable dans K** si celle-ci reste constamment dans K , *i.e.* :

$$\forall t \geq 0, x(t) \in K$$

Avec les mêmes notations que précédemment, nous nous donnerons un système dynamique s'exprimant sous la forme d'une inclusion différentielle :

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad \text{p.p. } t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1.1)$$

sous la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Il est naturel de penser que les trajectoires seront différentes selon la condition initiale à laquelle est soumise la dynamique : ces trajectoires pourront être viables ou non, au sens de la définition précédente. Cette remarque motive donc une nouvelle définition.

Définition 6. Étant donné un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ et, sous l'inclusion différentielle (4.1.1), on peut définir le **noyau de viabilité de K** , noté $\text{Viab}_F(K)$, comme l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles il existe une trajectoire viable dans K , *i.e.* :

$$\text{Viab}_F(K) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n ; \exists x(\cdot) \text{ solution de (4.1.1) issue de } x_0 \text{ et viable dans } K\}$$

Dans le cas d'une application de Marchaud, on peut démontrer que le noyau de viabilité de K est, lorsque K est fermé, le plus grand domaine de viabilité fermé relatif à F et contenu dans K .

La définition de viabilité est assez restrictive, dans la mesure où elle n'autorise aucune trajectoire $x(\cdot)$ à sortir de K , que ce soit pour un temps infinitésimal ou non. Il convient donc d'introduire une nouvelle notion, plus élargie. On note Λ la mesure de Lebesgue usuelle sur \mathbb{R}^n muni de la tribu borélienne.

Définition 7. Étant donné un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$, un réel $T > 0$ et une trajectoire $x(\cdot)$, on dira que cette dernière est **viabale dans K à l'échelle T** si celle-ci sort de K pour au plus T unités de temps, *i.e.* :

$$\Lambda(\{t \geq 0; x(t) \notin K\}) \leq T$$

Par exemple, en reprenant la figure schématique (0.2.1), il vient que :

- La trajectoire du haut est viable dans K (ou viable dans K à l'échelle 0, ce qui est rigoureusement identique).
- La trajectoire de gauche est la trajectoire viable dans K à la plus petite échelle $T \neq 0$.

La dernière définition est une combinaison de la notion de noyau de viabilité, avec celle de viabilité d'un ensemble à une certaine échelle. On a ainsi la définition suivante.

Définition 8. Étant donné un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$, un réel $T > 0$ et, sous l'inclusion différentielle (4.1.1), l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe une trajectoire $x(\cdot)$ viable dans K à l'échelle T est appelé **voisinage de viabilité de K à l'échelle T** .

4.2 Le problème de temps de crise, écrit comme un problème de viabilité.

Dès à présent, on se place dans l'espace vectoriel $X = \mathbb{R}^n$, de dimension finie, afin d'étudier le problème de Cauchy associé à l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) & \text{p.p. } t \in \mathbb{R}^+ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Les exemples principaux d'inclusions différentielles sont, en réalité, des systèmes contrôlés par une dynamique de la forme $\dot{x} = f(x, u)$, avec une certaine condition $u \in U(x)$ liant le contrôle u à l'état x . Dans ce cas, il suffit de considérer la multi-application F définie par $F(x) := \{f(x, u) ; u \in U(x)\}$ afin de pouvoir continuer l'étude.

Étant donnée une dynamique F , l'auteur emploiera la notation $\mathcal{S}_F(x_0)$ pour désigner l'ensemble (éventuellement vide) des fonctions absolument continues, solutions de l'inclusion différentielle (4.2.1) ayant x_0 pour point de départ. De plus, on se donnera un ensemble $K \subset X$ fermé, qui aura pour rôle de définir les contraintes d'état. On souhaite donc étudier la fonctionnelle de coût suivante :

$$C_{K,F}(x_0) := \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)} \Lambda(\{t \geq 0; x(t) \notin K\}) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau$$

en admettant que $C_{K,F}(x_0) = +\infty$ dès lors que toute trajectoire $x(\cdot)$, solution de l'inclusion différentielle (4.2.1) et ayant x_0 pour point de départ, n'est jamais viable dans K , c'est-à-dire si elle ne satisfait jamais à la contrainte d'état $x(\cdot) \in K$, et ce pendant un temps infini.

Constatons ici que l'on étudie le problème de temps de crise sur un horizon infini (ce qui correspond, moralement, à $T = +\infty$ dans le problème précédent). La fonction indicatrice de K^c n'est que semi-continue inférieurement, ce qui gêne l'application des techniques de contrôle optimal sur un horizon infini. C'est donc pour cela que l'arrière-plan de cette partie est dédié aux techniques liées à la viabilité, afin de lever cette difficulté.

4.3 Exploitation du problème de viabilité.

Dans un premier temps, il convient de modifier l'inclusion différentielle (4.2.1) dans le sens suivant. Introduisons d'abord une version multi-valuée de la fonction caractéristique de K^c définie de la façon suivante :

$$\mathbf{1}_{K^c}^\#(x) := \begin{cases} [0, 1] & \text{si } x \in \partial K \\ 1 & \text{si } x \in K^c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que l'inclusion différentielle (4.2.1) devienne l'inclusion différentielle « augmentée » ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \\ \dot{y}(t) \in -\mathbf{1}_{K^c}^\#(x(t)) \end{cases} \quad \text{p.p. } t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.3.1)$$

On rappelle de plus que toute fonction $\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ à valeurs réelles étendues admet un **épigraphe** défini de la façon suivante :

$$\text{EpiGr}(\psi) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}; \psi(x) \leq y\}$$

Deux caractérisations peuvent être obtenues : l'une d'entre elles, que l'on appellera « Version « X -viable » », est applicable à la fonctionnelle $C_{K,F}$ de sorte à obtenir une trajectoire viable sur X . L'autre version, que l'on appellera « Version « H -viable » », sera applicable à la fonctionnelle $C_{K,F}^H$ définie de la façon suivante :

$$C_{K,F}^H(x_0) := \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_F^H(x_0)} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau$$

où $\mathcal{S}_F^H(x_0)$ désignera l'ensemble (éventuellement vide) des fonctions absolument continues, solutions de l'inclusion différentielle (4.2.1) ayant x_0 pour point de départ, et viable dans le domaine $H \subset X$ que l'on supposera fermé. Nous énonçons maintenant ces deux versions.

Théorème 7 (Version « X -viable »). *On considère une multi-application $F : X \rightrightarrows X$ de Marchaud, et un sous-ensemble K fermé dans X .*

— Pour tout $x_0 \in X$ tel que $C_{K,F}(x_0) \neq +\infty$, l'infimum est atteint, ce qui signifie :

$$\exists x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0), \quad C_{K,F}(x_0) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x^*(\tau)) d\tau$$

— En considérant \tilde{F} la dynamique définie par $\tilde{F}(x, y) := (F(x), -\mathbf{1}_{K^c}(x))$, il vient que :

$$\text{EpiGr}(C_{K,F}) = \text{Viab}_{\tilde{F}}(X \times \mathbb{R}^+)$$

Théorème 8 (Version « H -viable »). *On considère une multi-application $F : X \rightrightarrows X$ de Marchaud, et deux sous-ensembles K et H fermés dans X .*

— Pour tout $x_0 \in X$ tel que $C_{K,F}^H(x_0) \neq +\infty$, l'infimum est atteint, ce qui signifie :

$$\exists x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_F^H(x_0), \quad C_{K,F}^H(x_0) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x^*(\tau)) d\tau$$

— En considérant \tilde{F} la dynamique définie par $\tilde{F}(x, y) := (F(x), -\mathbf{1}_{K^c}(x))$, il vient que :

$$\text{EpiGr}(C_{K,F}^H) = \text{Viab}_{\tilde{F}}(H \times \mathbb{R}^+)$$

Nous ne démontrons ici que la caractérisation « H -viable », la version « X -viable » s'en inspirant largement.

Démonstration. Il y a deux assertions à prouver.

- Prenons $x_0 \in X$ quelconque. De la définition même de $C_{F,K}^H$, il vient que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une trajectoire $x_n(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)$ viable dans H vérifiant :

$$C_{K,F}^H(x_0) \leq \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x_n(\tau)) d\tau \leq C_{K,F}^H(x_0) + \frac{1}{n}$$

On admet que le graphe de la restriction de $\mathcal{S}_F(\cdot)$ à tout compact est, lui-même, compact. Il existe donc une sous-suite $x_n(\cdot)$ qui converge vers $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)$ pour la topologie de la convergence ponctuelle. H étant fermé, il est clair que $x^*(\cdot)$ est viable dans H , et que $x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_F^H(x_0)$. De plus, K étant aussi fermé, $\mathbf{1}_{K^c}$ est semi-inférieurement continue et on peut écrire l'inégalité suivante pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbf{1}_{K^c}(x^*(t)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x_n(t))$$

À cette inégalité, on applique le lemme de Fatou, de sorte que l'on obtienne :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x^*(t)) dt \leq \int_0^{+\infty} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x_n(t)) dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x_n(t)) dt$$

De l'inégalité de départ, il vient que :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x^*(t)) dt \leq C_{K,F}^H(x_0)$$

Et l'égalité est ainsi assurée.

- $\mathbf{1}_{K^c}^\sharp(\cdot)$ et $\tilde{F}(\cdot)$ sont toutes deux des applications de Marchaud. Rappelons de plus qu'une égalité ensembliste peut s'obtenir au moyen d'une double inclusion réciproque. C'est ce que nous faisons ici.

(C) Soit $(x, y) \in \text{EpiGr}(C_{K,F}^H)$. Il existe une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)$ viable dans H vérifiant :

$$C_{K,F}^H(x_0) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau \leq y$$

Définissons $y(\cdot)$ par $y(t) := y - \int_0^t \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau$: il est clair que $y(0) = y$, que $y(\cdot) \geq 0$ et :

$$\dot{y}(t) = -\mathbf{1}_{K^c}(x(t)) \in -\mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x(t))$$

Ce qui prouve que $(x, y) \in \text{Viab}_{\tilde{F}}(H \times \mathbb{R}^+)$.

(D) Soit $(x, y) \in \text{Viab}_{\tilde{F}}(H \times \mathbb{R}^+)$. Il existe alors une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F^H(x)$ et une solution $y(\cdot)$ vérifiant :

$$y(t) = y + \int_0^t y'(\tau) d\tau \geq 0$$

avec $y'(s) \in -\mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x(s))$. Puisque K est fermé, on peut supposer que pour tout $v \in \mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x)$, $\mathbf{1}_{K^c}(x) \leq v$, ce qui mène à l'inégalité $-y'(s) \geq \mathbf{1}_{K^c}(x(s))$ qui, étant intégrée puis passée à la limite, mène à :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau \leq y$$

On en déduit aisément, d'après les résultats précédents, que :

$$C_{K,F}^H(x) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_F^H(x)} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau \leq y$$

Ce qui prouve que $(x, y) \in \text{EpiGr}(C_{K,F}^H)$.

□

Par la suite, nous allons étendre les notions de viabilité « à l'échelle T », adaptée au contexte du problème de temps de crise, ce qui motive la définition suivante.

Définition 9. Soient $F : X \rightrightarrows X$ une application de Marchaud et K un sous-ensemble fermé de X . Pour tout réel $T \geq 0$, le **voisinage de viabilité de K à l'échelle T sous la dynamique F** , que l'on note $\text{Viab}_F^T(K)$, est l'ensemble défini par :

$$\text{Viab}_F^T(K) := \{x \in X ; C_{K,F}(x) \leq T\}$$

De la définition précédemment énoncée, il vient immédiatement la caractérisation suivante, dont la preuve est un simple exercice laissé au lecteur :

Lemme 9. *Étant donné $F : X \rightrightarrows X$ une application multi-valuée et $K \subset X$ un ensemble fermé, on a :*

$$\text{Viab}_F(K) = \text{Viab}_F^0(K) = \{x \in X ; C_{K,F}(x) = 0\}$$

Le voisinage de viabilité à une échelle T peut être caractérisé comme un noyau de viabilité d'un problème augmenté, dont l'augmentation est similaire à celle énoncée précédemment. D'un point de vue numérique, cette caractérisation est intéressante de par son exploitation facile par des schémas numériques.

Proposition 15. *Étant donné $F : X \rightrightarrows X$ une application de Marchaud, $K \subset X$ un ensemble fermé, et $T \geq 0$:*

$$\text{Viab}_F^T(K) = \Pi_X(\text{Viab}_{\widehat{F}}(X \times [0, T]))$$

où Π_X désigne la projection sur X , et \widehat{F} désigne la dynamique augmentée définie par $\widehat{F}(x, y) := (F(x), \mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x))$.

Démonstration. La preuve s'inspire largement de celle portant sur la caractérisation « H -viable ». $\widehat{F}(\cdot)$ est une application de Marchaud. Rappelons de plus qu'une égalité ensembliste peut s'obtenir au moyen d'une double inclusion réciproque. C'est ce que nous faisons ici.

(C) Soit $x_0 \in \text{Viab}_F^T(K)$. Il existe une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)$ viable dans H vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau \leq T$$

Définissons $y(\cdot)$ par $y(t) := \int_0^t \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau$: il est clair que $y(0) = 0$, que $y(\cdot) \leq T$ et :

$$\dot{y}(t) = \mathbf{1}_{K^c}(x(t)) \in \mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x(t))$$

Donc $(x(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{S}_{\widehat{F}}(x_0, 0)$ et satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$(x(t), y(t)) \in X \times [0, T]$$

Par suite, $(x_0, 0) \in \text{Viab}_{\widehat{F}}(X \times [0, T])$, ce qui prouve enfin que $x_0 \in \Pi_X(\text{Viab}_{\widehat{F}}(X \times [0, T]))$.

(D) Soit $x_0 \in \Pi_X(\text{Viab}_{\widehat{F}}(X \times [0, T]))$. Il existe $y_0 \in [0, T]$, une trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0)$ et $y(\cdot)$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, y(t) = y_0 + \int_0^t y'(\tau) d\tau \leq T$$

avec $y'(s) \in \mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x(s))$. Puisque K est fermé, on peut supposer que pour tout $v \in \mathbf{1}_{K^c}^\sharp(x)$, $\mathbf{1}_{K^c}(x) \leq v$, ce qui mène à l'inégalité $y'(s) \geq \mathbf{1}_{K^c}(x(s))$ qui, étant intégrée, donne :

$$\int_0^t \mathbf{1}_{K^c}(x(\tau)) d\tau \leq T - y_0 \leq T$$

Par conséquent, $\Lambda(\{t \in \mathbb{R}^+ ; x(t) \notin K\}) \leq T$, ce qui prouve que $x_0 \in \text{Viab}_F^T(K)$. □

Désormais, on considère $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de X . La notion de limite inférieure d'une suite d'ensembles au sens de Painlevé-Kuratowski est définie de la manière suivante :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n := \left\{ x \in X ; \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n) = 0 \right\}$$

et, de la même façon, on définit la notion de limite supérieure d'une suite d'ensembles au sens de Painlevé-Kuratowski :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n := \left\{ x \in X ; \limsup_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n) = 0 \right\}$$

sachant que, lorsque ces deux limites coïncident, la notation $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ désignera la valeur commune de ces deux limites. Il convient maintenant d'établir des propriétés standard relatives aux voisinages de viabilité : d'abord, concernant la « croissance temporelle et ensembliste » du voisinage de viabilité.

Proposition 16. *Étant donné $F : X \rightrightarrows X$ une application de Marchaud, K un sous-ensemble fermé de X , et un réel $T \geq 0$, les applications « partielles » $t \mapsto \text{Viab}_F^t(K)$ et $K \mapsto \text{Viab}_F^T(K)$ sont croissantes, dans le sens où :*

- Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $\text{Viab}_F^{t_1}(K) \subset \text{Viab}_F^{t_2}(K)$.
- Si $K_1 \subset K_2$ sont deux sous-ensembles fermés de X , alors $\text{Viab}_F^T(K_1) \subset \text{Viab}_F^T(K_2)$.

Démonstration. La preuve du premier point n'est qu'un exercice d'écriture provenant de la définition même d'un voisinage de viabilité. Pour le second point, on se donne deux sous-ensembles K_1 et K_2 , fermés dans X et tels que $K_1 \subset K_2$, ainsi qu'un élément $x \in \text{Viab}_F^T(K_1)$ associé à une trajectoire $x^*(\cdot)$. On peut écrire la chaîne d'implications suivante :

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_2^c \subset K_1^c \Rightarrow \forall \xi \in X, \mathbf{1}_{K_2^c}(\xi) \leq \mathbf{1}_{K_1^c}(\xi)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $\xi = x^*(t)$. En intégrant l'inégalité précédente sur \mathbb{R}^+ et en utilisant le fait que $C_{K_1, F}(x) \leq T$, on obtient immédiatement que $x \in \text{Viab}_F^T(K_2)$. \square

De la même façon, il convient d'établir la « continuité temporelle » du voisinage de viabilité.

Proposition 17. *Étant donné $F : X \rightrightarrows X$ une application de Marchaud et K un sous-ensemble fermé de X , l'application « partielle » $t \mapsto \text{Viab}_F^t(K)$ est continue, dans le sens où l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:*

$$\text{Viab}_F^t(K) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{Viab}_F^{t+h}(K)$$

En particulier, on a :

$$\text{Viab}_F(K) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{Viab}_F^h(K)$$

Comme dit précédemment, le problème de temps de crise étudié consiste à atteindre une cible (ici, l'ensemble K choisi) le plus rapidement possible. Ce problème a été étudié à de maintes reprises lorsque la fonction à minimiser est continûment différentiable. Lorsqu'elle ne l'est pas, nous avons la possibilité de régulariser cette fonctionnelle, comme illustré ici avec la méthode de Moreau-Yosida. Une deuxième méthode consiste à utiliser les méthodes relatives à la viabilité, ce que nous faisons maintenant.

Pour cela, notons $\Psi_{K, F}(\cdot)$ l'application qui, à toute condition initiale $x_0 \in X$, associe le temps minimal pour atteindre l'ensemble K sous la dynamique F soit, en d'autres termes :

$$\Psi_{K, F}(x_0) := \inf \{ t \in \mathbb{R}^+ ; \exists x^*(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x_0), x^*(t) \in K \}$$

Ce qui permet d'établir des conditions nécessaires afin que K soit viable par rapport à la dynamique F .

Théorème 9. *Étant donnés $F : X \rightrightarrows X$ une application de Marchaud et K un sous-ensemble fermé de X , et supposant que K est viable sous la dynamique F , il vient que :*

- Les applications $C_{K,F}$ et $\Psi_{K,F}$ sont confondues.
- On a l'égalité $\text{Viab}_F^T(K) = \{x \in X ; \Psi_{K,F}(x) \leq T\}$.

Démonstration. La seconde assertion étant une conséquence de la première, on ne cherchera qu'à prouver l'égalité des applications $C_{K,F}$ et $\Psi_{K,F}$. Ces deux applications étant semi-inférieurement continues, il suffit de prouver que leurs épigraphes sont confondus.

(\subset) Soit $(x, T) \in \text{EpiGr}(\Psi_{K,F})$. Il vient immédiatement l'inégalité $T^* := \Psi_{K,F}(x) \leq T$ et, de ce fait, il existe une trajectoire $x_1(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ telle que $x^* := x_1(T^*) \in K$. De la viabilité de K , il vient l'existence d'une deuxième trajectoire $x_2(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x^*)$ telle que $x_2(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

En concaténant les deux trajectoires $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$, on obtient une troisième trajectoire $\tilde{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$ telle que $\Lambda(\{t \in \mathbb{R}^+ ; \tilde{x}(t) \in K^c\}) \leq T^* \leq T$. Ceci prouve que $(x, T) \in \text{EpiGr}(C_{K,F})$.

(\supset) Soit $(x, T) \in \text{EpiGr}(C_{K,F})$. Par l'absurde, si l'on suppose que $\Psi_{K,F}(x) > T$, il viendrait que pour toute trajectoire $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$, on ait :

$$\forall t \in [0, T], x(t) \notin K$$

La trajectoire $x(\cdot)$ considérée étant continue et K étant fermé, il existe un réel $\eta > 0$ vérifiant :

$$\forall t \in [0, T + \eta], x(t) \notin K$$

Dans ce cas, la suite d'inégalités suivante aurait lieu :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{K^c}(x(s)) ds \geq \int_0^{T+\eta} \mathbf{1}_{K^c}(x(s)) ds = T + \eta > T$$

Ceci aboutissant à une contradiction, on prouve ainsi que $(x, T) \in \text{EpiGr}(\Psi_{K,F})$.

□

Bibliographie

- [BAY] Bayen, T., Rapaport, A. (2015). About Moreau-Yosida regularization of the minimal time crisis problem.
- [BO1] Bonnans, J., Moreno, C., Saguez, C. (2006). Contrôle de domaines temporels. Rapport de recherche, INRIA Rocquencourt.
- [BO2] Bonnans, J., Gaudrat, V. (1988). A domain control approach to state-constrained control problems. Rapport de recherche, INRIA Rocquencourt.
- [BRE] Bressan, A., Piccoli, B. (2005). Introduction to the Mathematical Theory of Control.
- [CAU] Cauvin, K., Condé, R. (2014). Un modèle mathématique du chémostat : compétition entre espèces au sein d'un bioréacteur. Projet de Maîtrise, INRA Montpellier, UMR MISTEA.
- [CLA] Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Stern, R. J. and Wolenski, P. R. (1998). Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer-Verlag, New-York.
- [DOY] Doyen, L. and Saint-Pierre, P. (1997). Scale of Viability and Minimal Time of Crisis. *Set-Valued Analysis*, 5(3), pp.227-246.
- [HAB] Haberkorn, T. and Trélat, E. (2011). Convergence Results for Smooth Regularizations of Hybrid Nonlinear Optimal Control Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 49(4), pp. 1498-1522.
- [PEN] Penot, J. P. (2013). Calculs without derivatives. Springer-Verlag, New-York.
- [POL] Poliquin, R. A., Rockafellar, R. T., Thibault, L. (2000). Local differentiability of distance functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 352, pp. 5231-5249.
- [TRE] Trélat, E. (2013). Contrôle optimal : théorie et applications. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France. <https://www.ljll.math.upmc.fr/trelat/fichiers/livreopt.pdf>.