



**HAL**  
open science

# Analyses multifactorielles: Analyses Factorielles des Correspondances

Sandrine Mignon-Grasteau

► **To cite this version:**

Sandrine Mignon-Grasteau. Analyses multifactorielles: Analyses Factorielles des Correspondances. Master. MASTER Sciences, Technologies, Santé MENTION Biologie Intégrative et Agrosociétés SPECIALITE Qualité et environnement en productions animales FINALITE Professionnelle (Statistiques), 2014. hal-02795854

**HAL Id: hal-02795854**

**<https://hal.inrae.fr/hal-02795854>**

Submitted on 5 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

Sandrine Mignon-Grasteau

2014

# AFC : Quand et pourquoi ?

- Pour l'analyse de données **qualitatives** (par opposition aux données quantitatives analysées par ACP)
- Les **tableaux** de contingence analysés sont **différents de ceux de l'ACP** :
  - **Lignes** : modalités d'une variable discontinue
  - **Colonnes** : modalités d'une autre variable discontinue
  - **Cellules** : Fréquence des deux modalités conjointes

# AFC : importance du $\chi^2$

- Donne une première indication sur l'existence d'une dépendance entre variables
- Ex : La préférence pour la bière évolue-t-elle avec l'âge ?



	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans	Totaux
Goût	3	1	8	12
Couleur	3	4	2	9
Alcool	4	5	0	9
Totaux	10	10	10	30

# AFC : importance du $\chi^2$

- Effectif observé

	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans	Totaux
Goût	3	1	8	12
Couleur	3	4	2	9
Alcool	4	5	0	9
Totaux	10	10	10	30

# AFC : importance du $\chi^2$

- Effectif théorique si indépendance

Effectif théorique =  $\frac{\text{Nb d'individus dans la ligne} \times \text{Nb d'individus dans la colonne}}{\text{Nb d'individus dans le tableau}}$

donc, par exemple

$$\text{Effectif théorique (Goût, 21-30 ans)} = \frac{12 \times 10}{30} = 4$$

$$\text{Effectif théorique (Alcool, 41-50 ans)} = \frac{10 \times 9}{30} = 3$$

	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans	Totaux
Goût	4	4	4	12
Couleur	3	3	3	9
Alcool	3	3	3	9
Totaux	10	10	10	30

# AFC : importance du $\chi^2$

- Ecart à l'indépendance

	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans
Goût	-1	-3	4
Couleur	0	1	-1
Alcool	1	2	-3



- Les 41-50 ans ont des écarts à l'indépendance plus élevés que les deux autres groupes
  - ↪ Ils ont des préférences plus marquées
- Les 41-50 ans ont des écarts à l'indépendance de signe opposé à ceux des autres groupes
  - ↪ Leurs goûts sont différents de ceux des autres groupes

# AFC : importance du $\chi^2$



- Carrés des écarts à l'indépendance / effectif théorique

	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans
Goût	1/4	9/4	16/4
Couleur	0/3	1/3	1/3
Alcool	1/3	4/3	9/3

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{Effectif observé} - \text{Effectif théorique})^2}{\text{Effectif théorique}}$$
$$= \mathbf{11.83}$$



Condition : moins de 20% des cellules ont un effectif < 5



# AFC : importance du $\chi^2$



- Interprétation des sommes par ligne et colonne

	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans	Totaux
Goût	1/4	9/4	16/4	6.50
Couleur	0/3	1/3	1/3	0.66
Alcool	1/3	4/3	9/3	4.67
Totaux	0.58	3.92	7.33	11.83

Total en colonne élevé  
=  
Groupe très différencié  
des autres

Total en ligne élevé  
=  
Critère permettant de  
différencier les groupes

# AFC : importance du $\chi^2$



- Le tableau des écarts pondérés est celui utilisé par l'AFC

	21-30 ans	31-40 ans	41-50 ans	Totaux
Goût	1/4	9/4	16/4	6.50
Couleur	0/3	1/3	1/3	0.66
Alcool	1/3	4/3	9/3	4.67
Totaux	0.58	3.92	7.33	11.83

- Les 3 lignes donnent un nuage de points
- Les 3 colonnes donnent un nuage de points
- On projette les 2 nuages sur un même plan avec une même origine

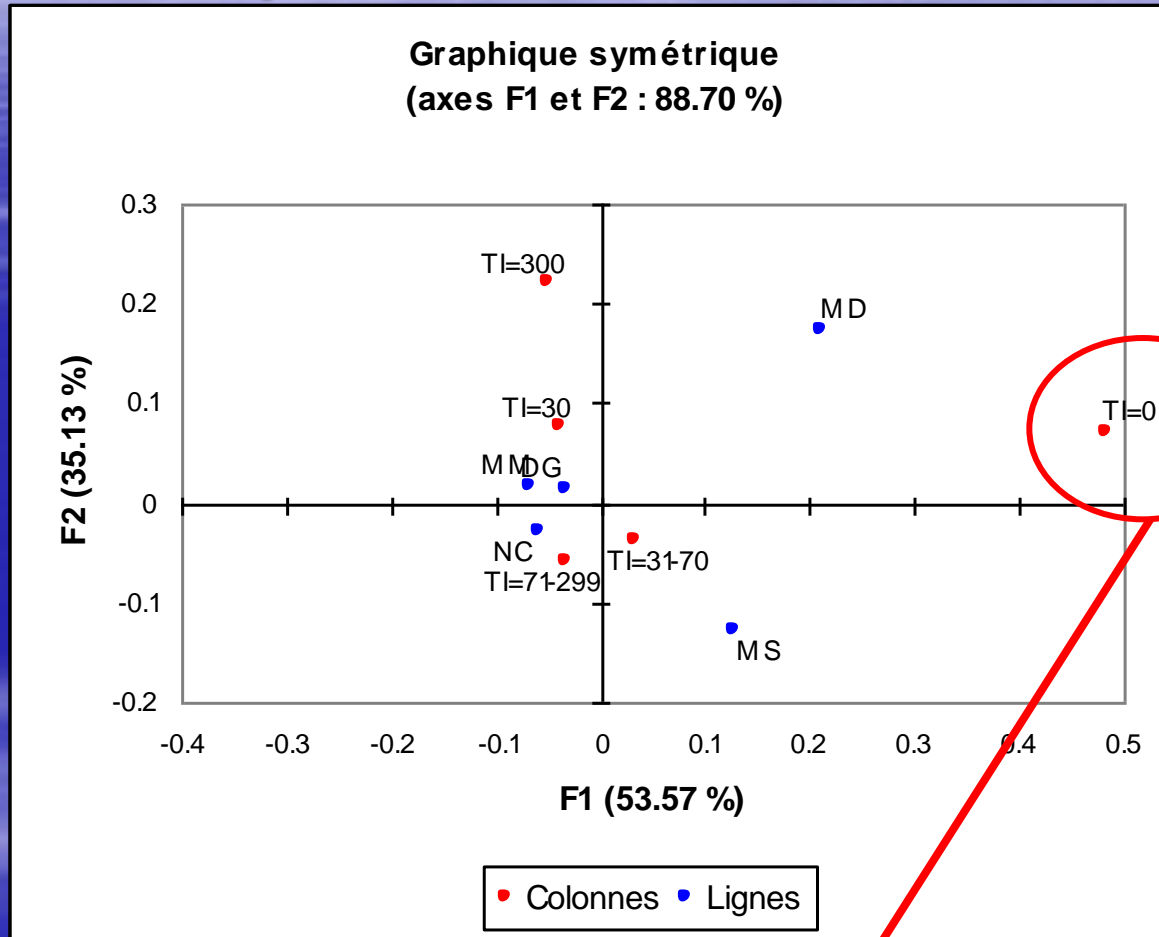
# Ex : Comportement de la Caille

- Durée d'immobilité tonique découpée en 5 classes
- Cette variable est croisée avec l'identité du « preneur »

Preneur	TI=0	TI=1-30	TI=31-70	TI=71-299	TI=300	ENSEMBLE
DG	14	178	180	201	20	593
MD	6	30	29	24	4	93
MM	3	67	73	67	7	217
MS	8	44	67	65	3	187
NC	3	43	42	53	4	145
ENSEMBLE	34	362	391	410	38	1235

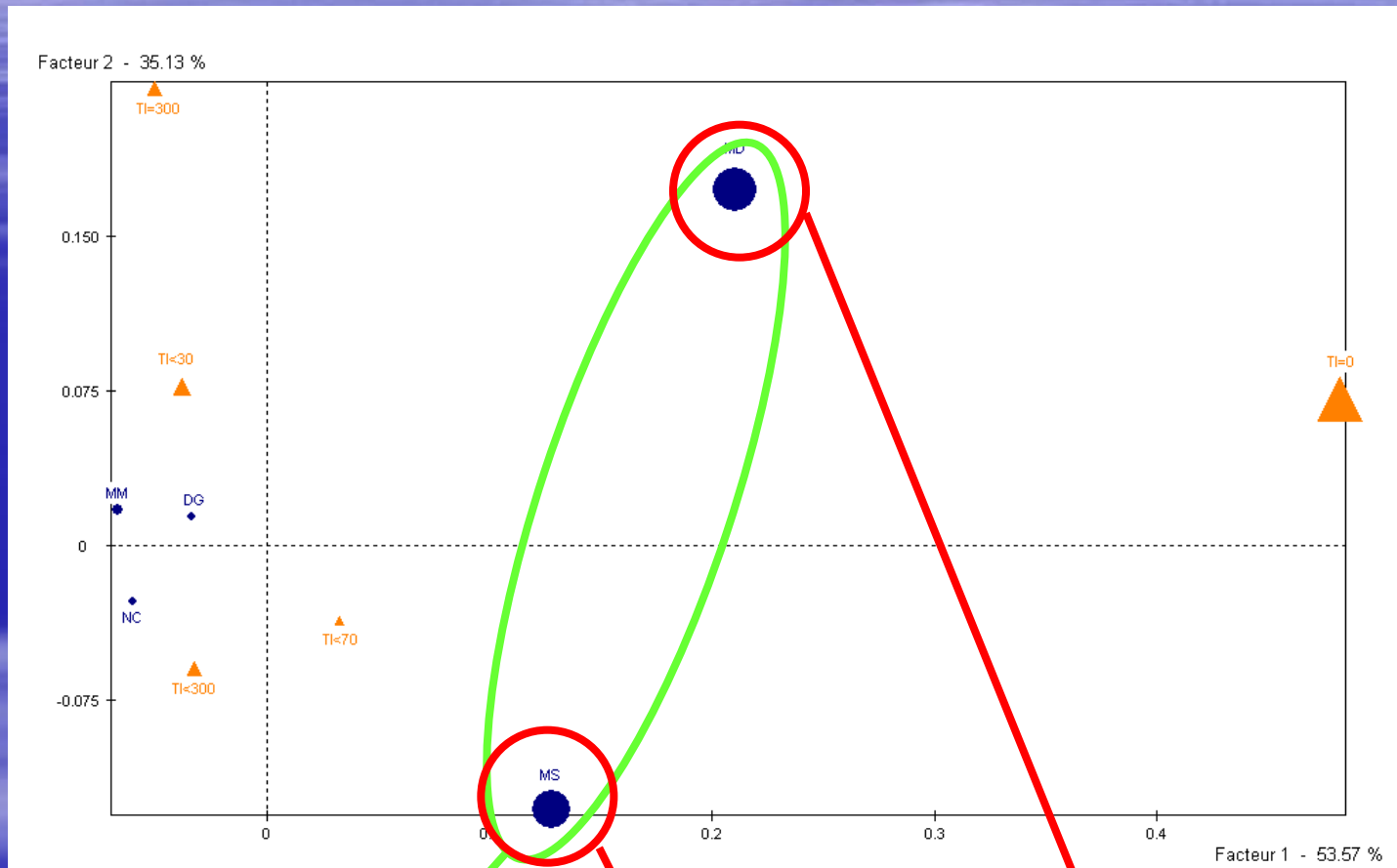
- Rentrer le tableau de contingence et réaliser l'AFC

# Ex : Comportement de la Caille



**F1 = opposition entre TI=0 et tout le reste**

# Ex : Comportement de la Caille



MS et MD ont relativement plus de TI=0 que les autres preneurs

Peu de TI=300

Beaucoup de TI=300

Opposition sur F2

# Ex : Comportement de la Caille

Khi <sup>2</sup> (Valeur observée)	17.511
Khi <sup>2</sup> (Valeur critique)	26.296
DDL	16
p-value	0.353
alpha	0.05

Effectif global × Somme des valeurs propres  
**1235** × **0.015**  
 suit un  $\chi^2$  à  $(nb\ lignes-1)(nb\ colonnes-1)$  d.d.l.

**4** × **4**

Interprétation du test :

H0 : Les lignes et les colonnes du tableau sont indépendantes.

Ha : Il existe un lien entre les lignes et les colonnes du tableau.

Etant donné que la p-value calculée est supérieure au niveau de signification seuil alpha=0.05, on peut valider l'hypothèse nulle H0.

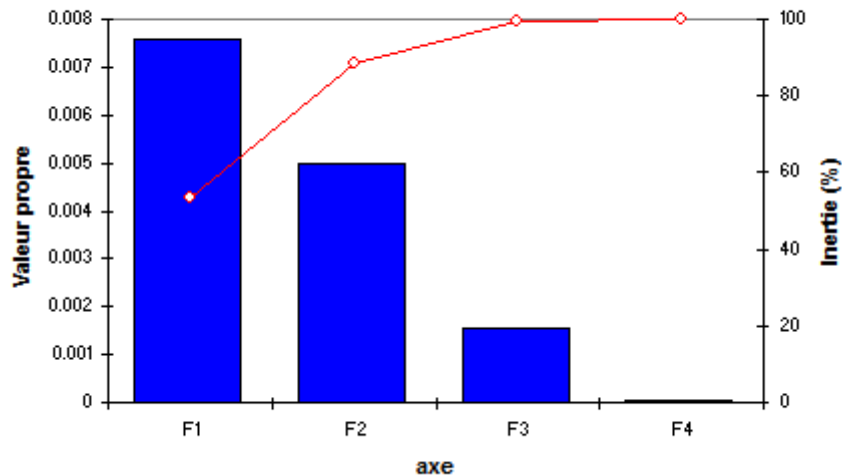
Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est de 35.33%.

Inertie totale : 0.014

Valeurs propres et pourcentages d'inertie :

	F1	F2	F3	F4
Valeur propre	0.008	0.005	0.002	0.000
Inertie (%)	53.569	35.132	10.952	0.347
% cumulé	53.569	88.701	99.653	100.000

Scree plot



# Ex : Couleur des yeux et des cheveux

Couleur des yeux	Couleur des cheveux				
	Blond	Roux	Châtain	Marron	Noir
Pâles	326	38	241	110	3
Clairs	688	116	584	188	4
Moyens	343	84	909	412	26
Foncés	98	48	403	681	85

- Réaliser l'AFC
- Etape 1 : observer le  $\chi^2$

# Ex : Couleur des yeux et des cheveux

Test d'indépendance entre les lignes et les colonnes :

Khi <sup>2</sup> (Valeur c	1240.039
Khi <sup>2</sup> (Valeur c	21.026
DDL	12
p-value	< 0.0001
alpha	0.05

Interprétation du test :

H0 : Les lignes et les colonnes du tableau sont indépendantes.

Ha : Il existe un lien entre les lignes et les colonnes du tableau.

Etant donné que la p-value calculée est inférieure au niveau de signification  $\alpha=0.05$ , on doit rejeter l'hypothèse nulle H0, et retenir l'hypothèse alternative Ha.

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est inférieur à 0.01%.

Inertie totale : 0.23

Valeurs propres et pourcentages d'inertie :

	F1	F2	F3
Valeur propre	0.199	0.030	0.001
Inertie (%)	86.556	13.070	0.373
% cumulé	86.556	99.627	100.000





# Ex : Couleur des yeux et des cheveux

Résultats pour les yeux :

Poids, distances et distances quadratiques à l'origine, inerties et inerties relatives (yeux) :

	Poids (relatif)	Distance	Distance <sup>2</sup>	Inertie	Inertie relative
Pâles	0.133	0.438	0.192	0.02555	0.111
Clairs	0.293	0.451	0.203	0.05956	0.259
Moyens	0.329	0.247	0.061	0.02015	0.088
Foncés	0.244	0.715	0.512	0.12493	0.543

Coordonnées principales (yeux) :

	F1	F2	F3
Pâles	-0.400	0.165	-0.064
Clairs	-0.441	0.088	0.032
Moyens	0.034	-0.245	-0.006
Foncés	0.703	0.134	0.004

Coordonnées standard (yeux) :

	F1	F2	F3
Pâles	-0.897	0.954	-2.188
Clairs	-0.987	0.510	1.084
Moyens	0.075	-1.412	-0.189
Foncés	1.574	0.772	0.148

Contributions (yeux) :

	Poids (relatif)	F1	F2	F3
Pâles	0.133	0.107	0.121	0.638
Clairs	0.293	0.286	0.076	0.345
Moyens	0.329	0.002	0.657	0.012
Foncés	0.244	0.605	0.145	0.005

Cosinus carrés (yeux) :

	F1	F2	F3
Pâles	0.836	0.143	0.021
Clairs	0.956	0.039	0.005
Moyens	0.018	0.981	0.001
Foncés	0.965	0.035	0.000

# Ex : Couleur des yeux et des cheveux

## Résultats pour les cheveux :

Poids, distances et distances quadratiques à l'origine, inerties et inerties relatives (cheveux) :

	Poids (relatif)	Distance	Distance <sup>2</sup>	Inertie	Inertie relative
Blond	0.270	0.571	0.326	0.088	0.383
Roux	0.053	0.266	0.071	0.004	0.016
Châtain	0.397	0.213	0.045	0.018	0.078
Marron	0.258	0.598	0.357	0.092	0.401
Noir	0.022	1.132	1.282	0.028	0.122

Coordonnées principales (cheveux) :

	F1	F2	F3
Blond	-0.544	0.174	-0.013
Roux	-0.233	0.048	0.118
Châtain	-0.042	-0.208	-0.003
Marron	0.589	0.104	-0.010
Noir	1.094	0.286	0.046

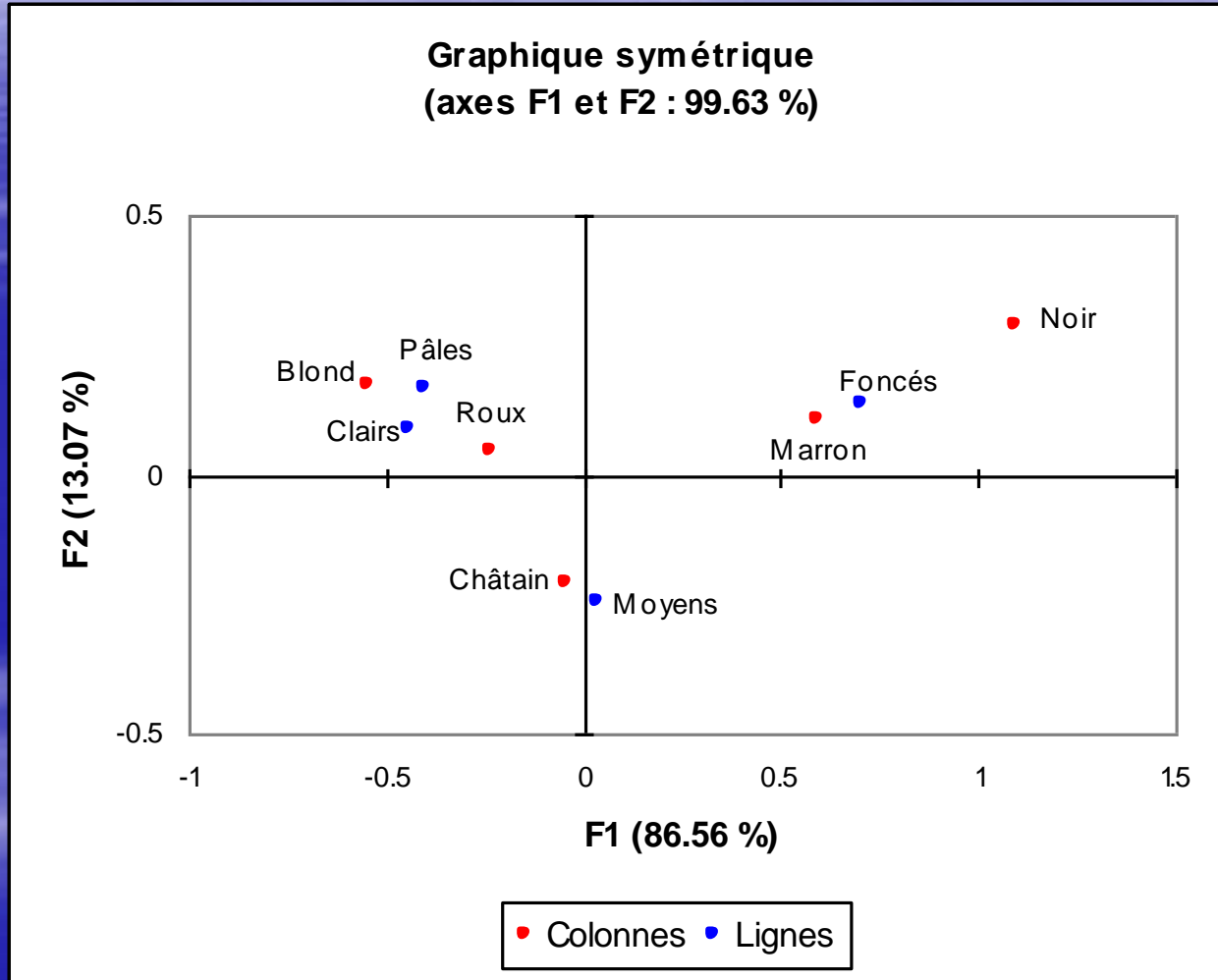
Coordonnées standard (cheveux) :

	F1	F2	F3
Blond	-1.219	1.002	-0.427
Roux	-0.523	0.278	4.027
Châtain	-0.094	-1.201	-0.110
Marron	1.319	0.599	-0.345
Noir	2.452	1.651	1.574

Contributions (cheveux) :

	Poids (relatif)	F1	F2	F3
Blond	0.270	0.401	0.271	0.049
Roux	0.053	0.014	0.004	0.861
Châtain	0.397	0.004	0.572	0.005
Marron	0.258	0.449	0.093	0.031
Noir	0.022	0.132	0.060	0.054

# Ex : Couleur des yeux et des cheveux



# ANALYSE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES

- Même principe que l'AFC, mais on a plusieurs variables qualitatives pour chaque individu
- Le tableau contient alors les modalités des variables qualitatives, et non plus les fréquences de chaque modalité

<b>Individu</b>	<b>Sexe</b>	<b>Lot</b>	<b>Age</b>	<b>...</b>
<b>1</b>	<b>M</b>	<b>1</b>	<b>&lt;20</b>	<b>...</b>
<b>2</b>	<b>F</b>	<b>1</b>	<b>20-40</b>	<b>...</b>
<b>3</b>	<b>M</b>	<b>2</b>	<b>&gt;60</b>	<b>...</b>
<b>4</b>	<b>M</b>	<b>2</b>	<b>40-60</b>	<b>...</b>
<b>5</b>	<b>F</b>	<b>3</b>	<b>&lt;20</b>	<b>...</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>

# ANALYSE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES

- On généralise les calculs de l'AFC
- A partir du tableau de départ, on crée des tableaux de « 0-1 » (tableaux disjonctifs complets)

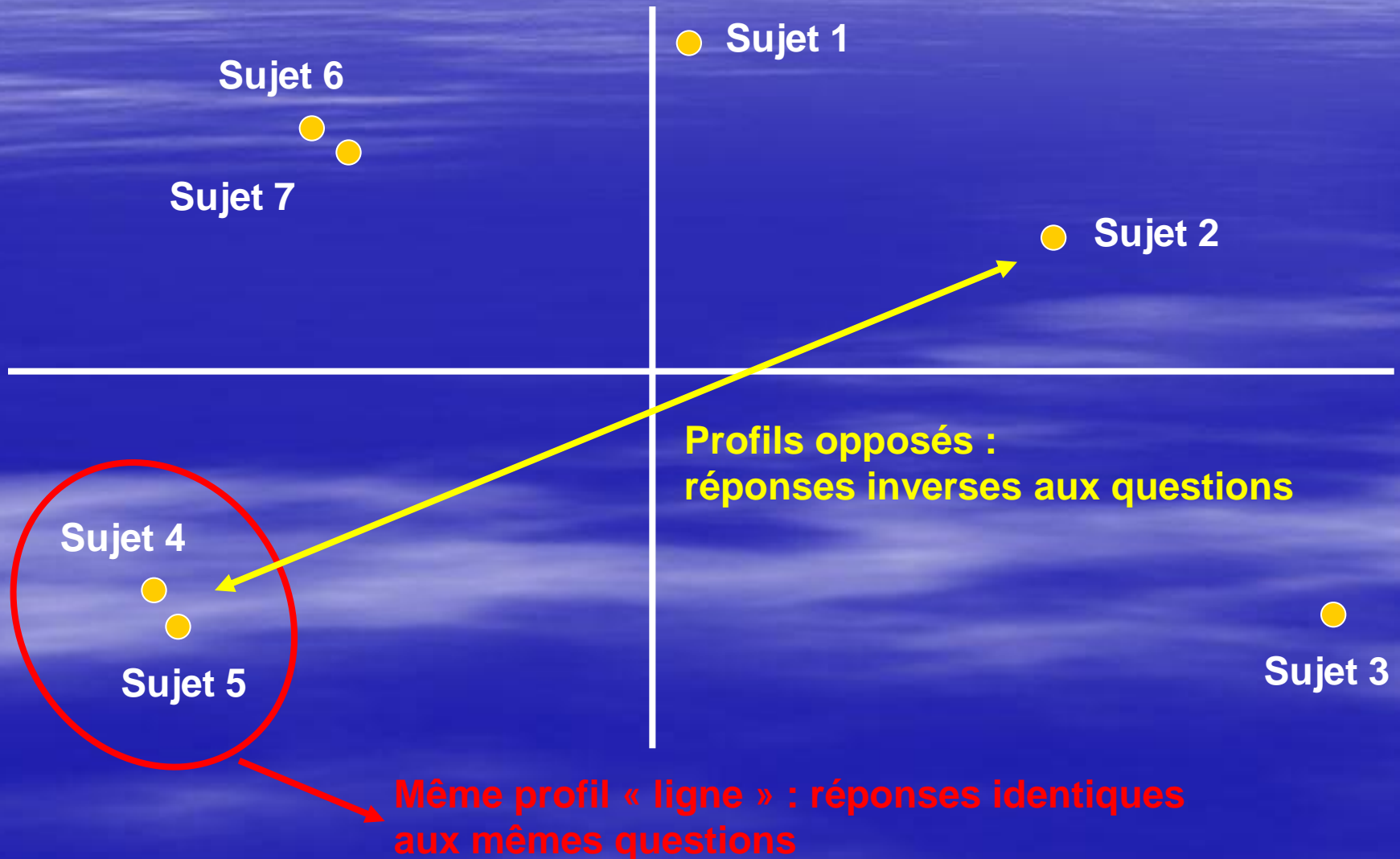
Ind	Sexe	Lot	Age
1	M	1	<20
2	F	1	20-40
3	M	2	>60
4	M	2	40-60
5	F	3	<20



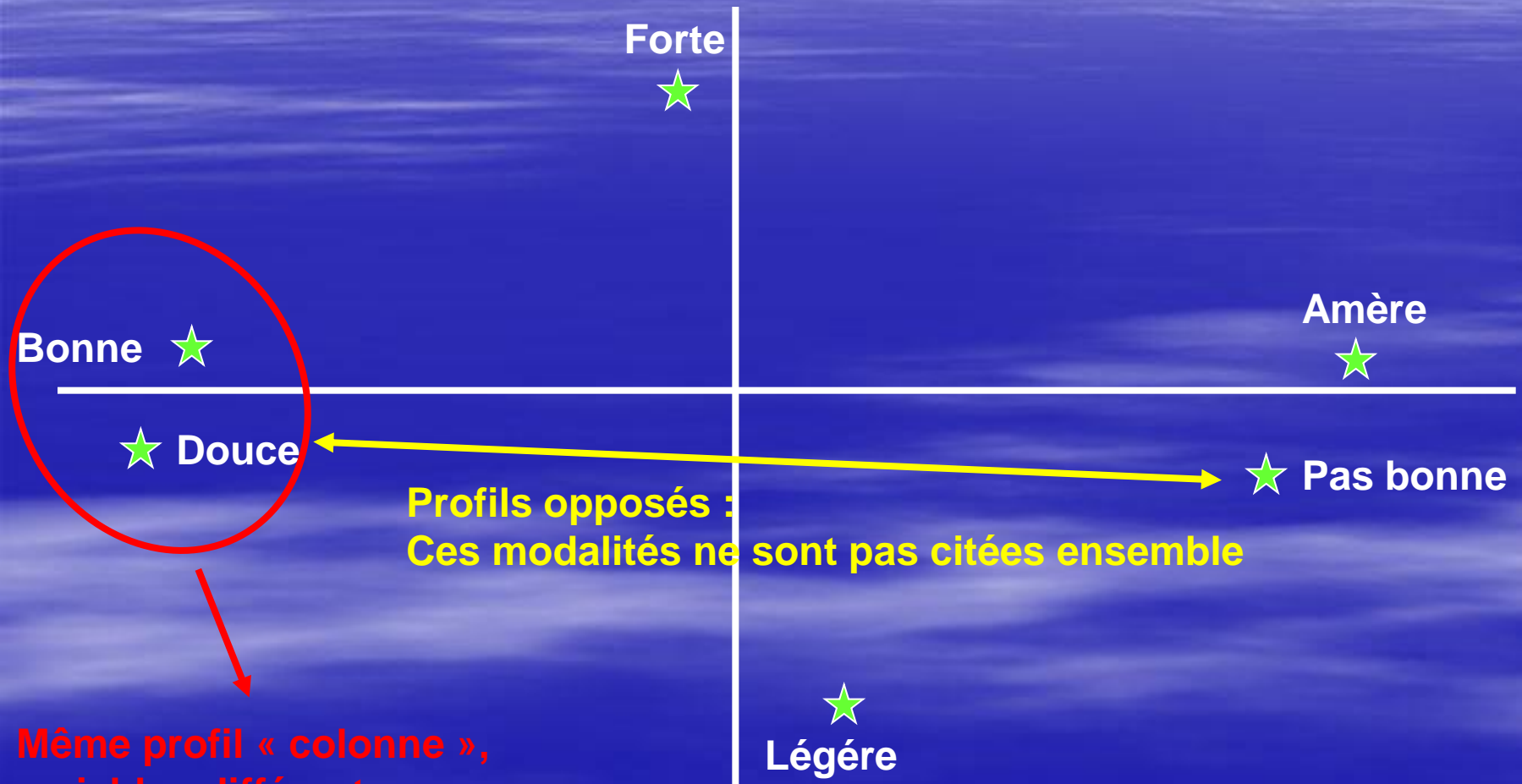
Mieux vaut avoir le moins de « 0 » possible, l'analyse est plus robuste

Ind	M	F	1	2	3	<20	20-40	40-60	>60
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	1	0	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1	1	0	0	0

# ANALYSE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES : nuage d'individus



# ANALYSE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES : nuage de modalités



Même profil « colonne »,  
variables différentes :  
réponses utilisées ensemble

# APPLICATION : CANCER DU SEIN

- Ouvrir la Base Sein. SBA
- Variables :
- Soins, indicateurs physiologiques :
  - chimio, lymphocytes, albumine, lactico dehydrogenase
- Indicateurs de gravité de la maladie :
  - **qualitatives** : délai d'apparition des métastases, nombre de sites avec métastase, métastases sur le foie
  - **quantitatives** : survie en mois



# APPLICATION : CANCER DU SEIN

- Réaliser l'AFC
- Choisir la méthode :
  - Analyses Factorielles
  - Correspondances multiples (CORMU)
- Paramétrer l'AFC :
  - Nominale active : chimio, lymphocytes, lactico dehydrogenase, albumine
  - Nominale illustrative : nb de sites métastatiques, délai d'apparition des métastases, métastases sur le foie
  - Continue illustrative : survie

# APPLICATION : CANCER DU SEIN

VALEURS PROPRES

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION .. 1.2500

SOMME DES VALEURS PROPRES .... 1.2500

HISTOGRAMME DES 5 PREMIERES VALEURS PROPRES

NUMERO	VALEUR PROPRE	%	% CUMULE	
1	0.3174	25.39	25.39	*****
2	0.2768	22.14	47.54	*****
3	0.2439	19.51	67.05	*****
4	0.2247	17.97	85.02	*****
5	0.1872	14.98	100.00	*****

RECHERCHE DE PALIERS ENTRE (DIFFERENCES SECONDES)

PALIER ENTRE	VALEUR DU PALIER	
1 -- 2	7.74	*****

# APPLICATION : CANCER DU SEIN

## Tableau des valeurs propres

Trace de la matrice: **1.25000**

<b>Numéro</b>	<b>Valeur propre</b>	<b>Pourcentage</b>	<b>Pourcentage cumulé</b>
<b>1</b>	<b>0.3174</b>	<b>25.39</b>	<b>25.39</b>
<b>2</b>	<b>0.2768</b>	<b>22.14</b>	<b>47.54</b>
<b>3</b>	<b>0.2439</b>	<b>19.51</b>	<b>67.05</b>
<b>4</b>	<b>0.2247</b>	<b>17.97</b>	<b>85.02</b>
<b>5</b>	<b>0.1872</b>	<b>14.98</b>	<b>100.00</b>

# Contributions des modalités actives

Libellé	Poids relatif	Distance à l'origine	Axe 1	Axe 2	Axe 3	Axe 4	Axe 5
<b>chimio</b>							
chimio non	16.978	0.47250	0.46	16.02	0.95	12.45	2.22
chimio oui	8.022	2.11640	0.98	33.89	2.01	26.34	4.69
<b>lactico dehydrogenase</b>							
ldh (<180)	8.574	1.91584	11.35	11.33	28.79	0.01	14.22
ldh (180-380)	11.885	1.10357	0.41	12.99	31.92	7.14	0.00
ldh (>380)	4.542	4.50467	32.05	1.45	3.12	17.55	27.65
<b>lymphocytes</b>							
lymph (>=750)	19.185	0.30310	1.91	5.37	7.28	8.49	0.21
lymph (<750)	5.815	3.29927	6.30	17.73	24.00	28.01	0.70
<b>albumine</b>							
alb (>=30)	22.750	0.09888	4.19	0.11	0.17	0.00	4.53
alb (<30)	2.250	10.11320	42.36	1.10	1.76	0.00	45.78

Valeurs-Tests des modalités  
actives et illustratives

Libellé	Effe ctif	Poids absolu	Distance à l'origine	Axe 1	Axe 2	Axe 3	Axe 4	Axe 5
---------	--------------	-----------------	----------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

**chimio**

chimio non	400	400.00	0.47250	-3.28	18.03	4.12	-14.32	5.51
chimio oui	189	189.00	2.11640	3.28	-18.03	-4.12	14.32	-5.51

**lactico dehydrogenase**

ldh (<180)	202	202.00	1.91584	11.36	10.60	-15.86	0.28	-9.76
ldh (180-380)	280	280.00	1.10357	2.41	-12.70	18.68	-8.48	-0.14
ldh (>380)	107	107.00	4.50467	-17.10	3.40	-4.68	10.65	12.20

**lymphocytes**

lymph (>=750)	452	452.00	0.30310	7.83	12.26	13.40	13.89	-2.00
lymph (<750)	137	137.00	3.29927	-7.83	-12.26	-13.40	-13.89	2.00

**albumine**

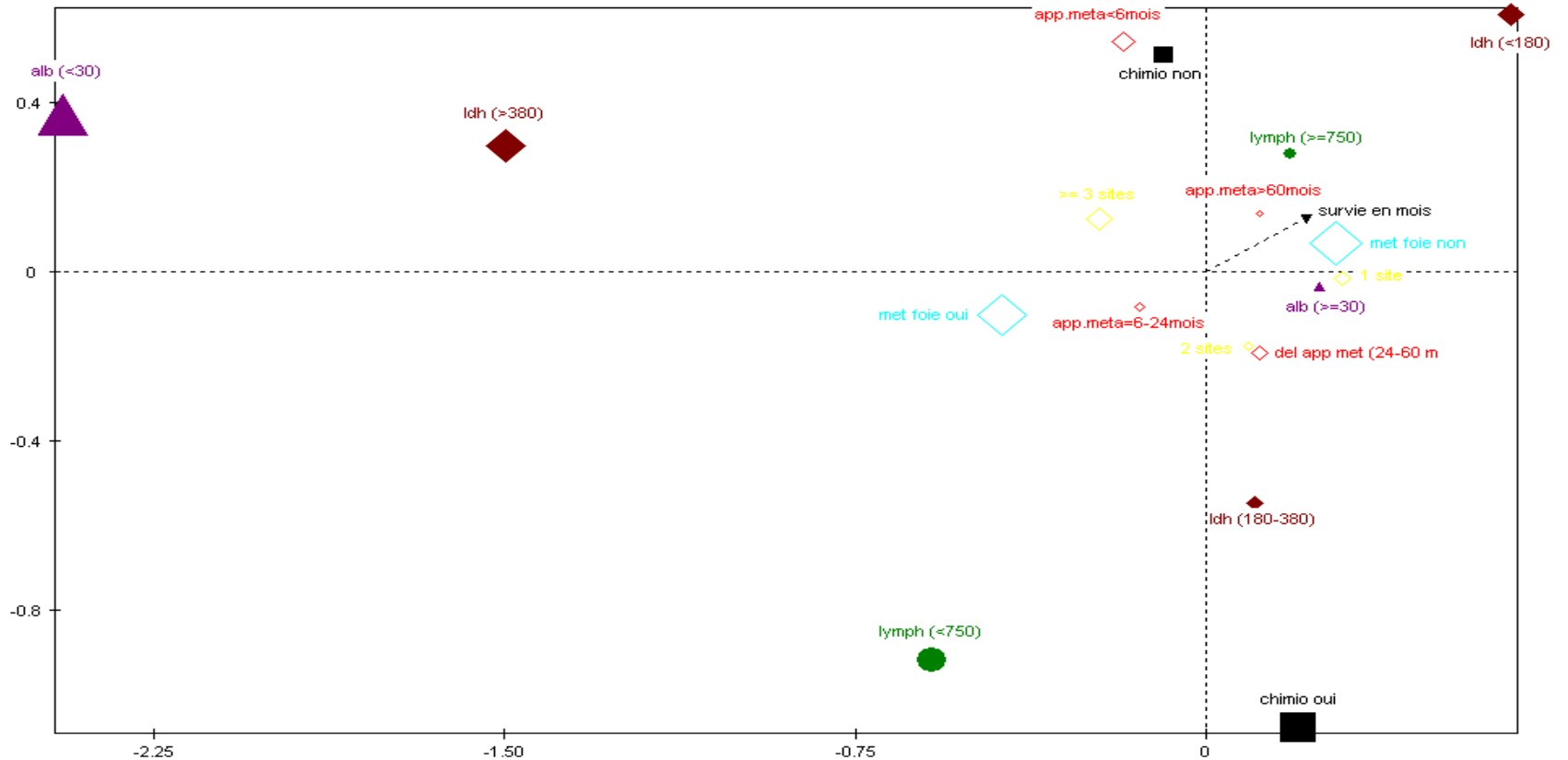
alb (>=30)	536	536.00	0.09888	18.64	-2.81	-3.33	0.11	14.88
alb (<30)	53	53.00	10.11320	-18.64	2.81	3.33	-0.11	-14.88

**delai apparition metastases**

< 6mois	84	84.00	6.01190	-1.74	5.37	0.42	-1.62	2.34
6-24 mois	164	164.00	2.59146	-2.18	-1.30	-2.22	1.65	0.80
24-60 mois	237	237.00	1.48523	2.24	-3.82	0.32	1.16	-2.35

# APPLICATION : CANCER DU SEIN

Facteur 2 - 22.14 %



Facteur 1 - 25.39 %

# Ex : Les voitures des Américains

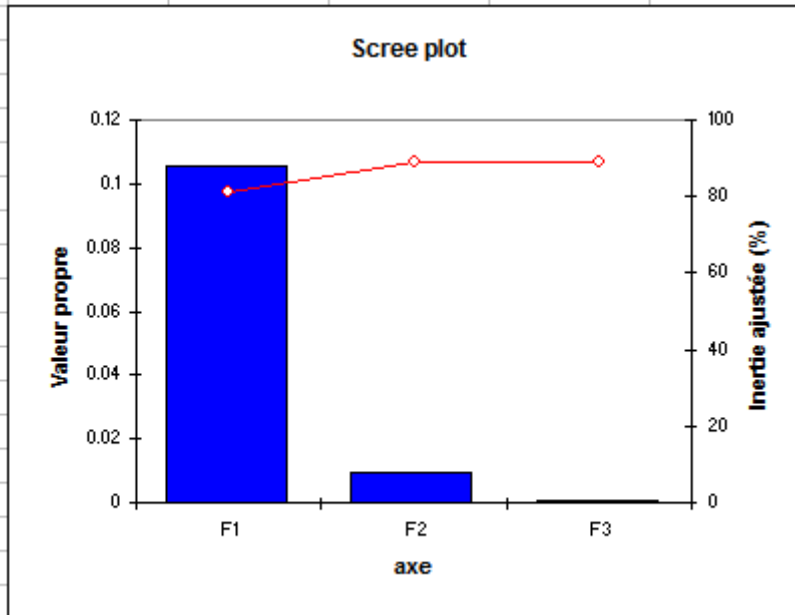
- Récupérer le fichier « voiture.xls »
- Réaliser les statistiques élémentaires sur les variables
- Réaliser l'analyse des correspondances multiples (ACM)

# Ex : Les voitures des Américains

Inertie totale : 2

Valeurs propres et pourcentages d'inertie :

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
Valeur propre	0.550	0.399	0.348	0.277	0.251	0.175
Inertie (%)	27.486	19.935	17.419	13.853	12.558	8.749
% cumulé	27.486	47.421	64.840	78.693	91.251	100.000
Inertie ajustée	0.105	0.010	0.001			
Inertie ajustée (%)	81.366	7.427	0.393			
% cumulé	81.366	88.793	89.186			





# Ex : Les voitures des Américains

Résultats pour les variables :			
Coordonnées principales (Variables) :			
	F1	F2	F3
Origine-Américaine	→ 0.976	0.070	0.120
Origine-Européenne	-0.471	→ -1.048	1.907
Origine-Japonaise	-0.629	0.231	-0.613
Taille-Grande	→ 1.738	→ 0.957	1.006
Taille-Moyenne	0.278	→ -0.777	-0.421
Taille-Petite	→ -0.747	0.452	0.108
Type-Familiale	0.539	-0.299	-0.372
Type-Sportive	→ -0.878	→ -0.370	0.519
Type-Utilitaire	-0.025	→ 1.713	0.192

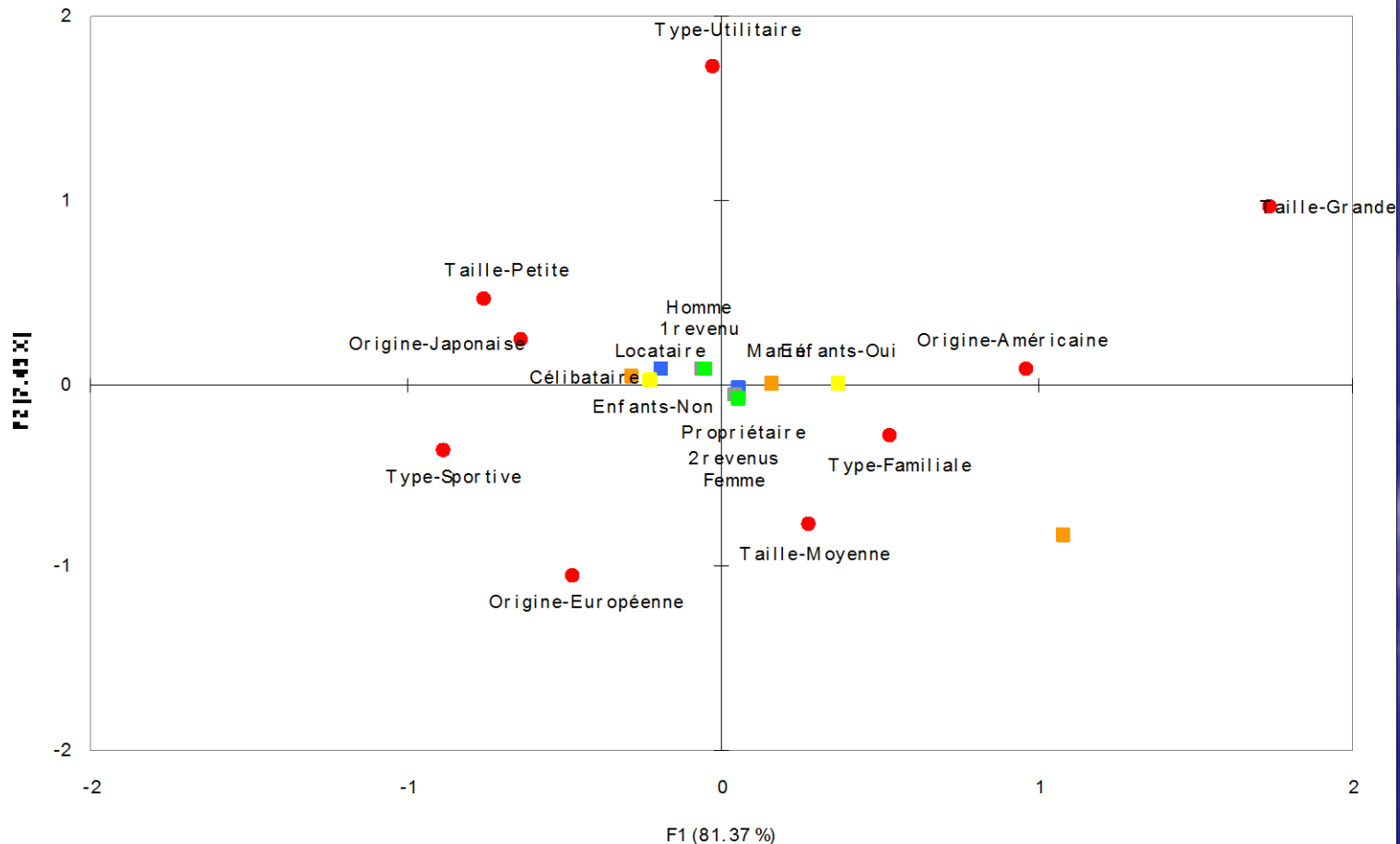
Contributions (Variables) :					
	Poids	Poids (relatif)	F1	F2	F3
Origine-Américaine	128	0.126	→ 0.219	0.002	0.005
Origine-Européenne	45	0.044	0.018	→ 0.122	0.463
Origine-Japonaise	165	0.163	0.117	0.022	0.176
Taille-Grande	43	0.042	→ 0.233	0.097	0.123
Taille-Moyenne	142	0.140	0.020	→ 0.212	0.071
Taille-Petite	153	0.151	→ 0.153	0.077	0.005
Type-Familiale	177	0.175	0.092	0.039	0.069
Type-Sportive	107	0.106	→ 0.148	0.036	0.081
Type-Utilitaire	54	0.053	0.000	→ 0.392	0.006

# Ex : Les voitures des Américains

Résultats pour les variables :			
Coordonnées principales (Variables) :			
Domicile-	0.889	-0.035	0.264
Domicile-Locataire	-0.187	0.061	-0.165
Domicile-Propriétaire	0.060	-0.023	0.059
Revenu-1 revenu	-0.057	0.077	0.049
Revenu-2 revenus	0.045	-0.061	-0.039
Statut marital-	-0.275	0.029	0.072
Statut marital-Marié	0.162	-0.017	-0.042
Enfants-	1.087	-0.841	-0.644
Enfants-Non	-0.227	0.013	0.069
Enfants-Oui	0.371	-0.015	-0.110
Sexe-Femme	0.061	-0.090	-0.023
Sexe-Homme	-0.050	0.074	0.019

# Ex : Les voitures des Américains

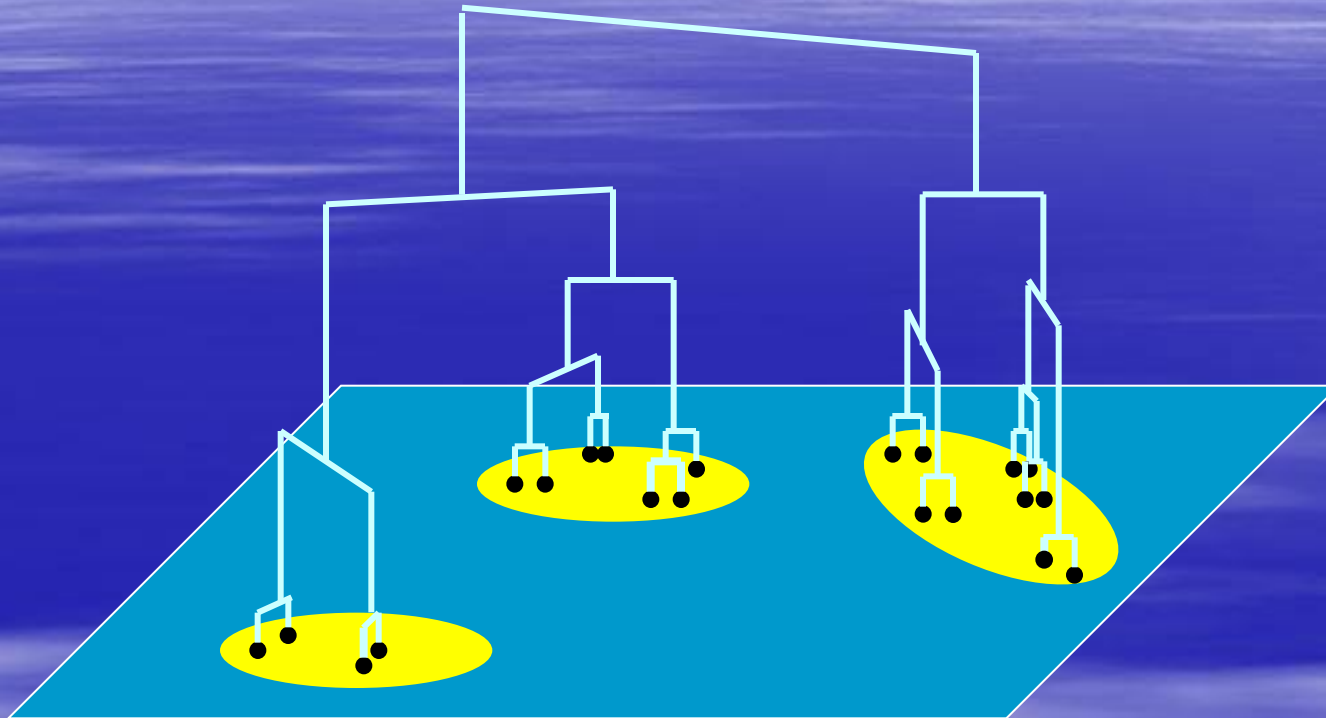
Graphique symétrique  
(axes F1 et F2 : 88.79 %)



# Classification ascendante hiérarchique

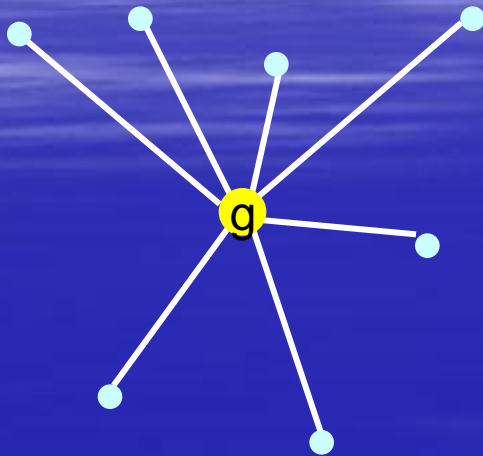
- Question : peut-on faire des groupes à partir de nos données, pour prévoir où un nouvel individu ira se placer ?

# Principe



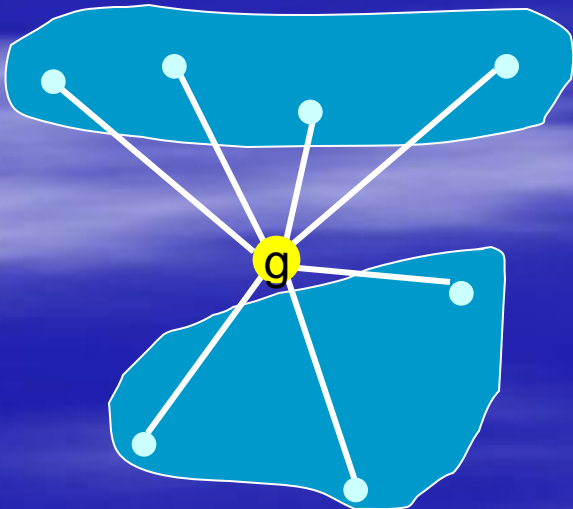
On recherche les deux points les plus proches  
On les regroupe, et leur barycentre devient un nouveau point  
On continue jusqu'à n'avoir plus qu'une seule classe

# Critère de Ward



Inertie totale =

Distance au centre de gravité



Inertie inter classes + Inertie intra-classe

# Agrégation : les variables

- Sur les variables quantitatives
- Sur les données brutes
  - lourdeur si beaucoup d'individus
  - données qualitatives
- Utiliser les coordonnées factorielles
- Sur données qualitatives, réaliser une AFC d'abord, puis utiliser les coordonnées comme base d'agrégation