



**HAL**  
open science

# Problèmes de commande optimale périodique et applications

Vincent Quevedille

► **To cite this version:**

Vincent Quevedille. Problèmes de commande optimale périodique et applications. Optimisation et contrôle [math.OC]. 2016. hal-02801369

**HAL Id: hal-02801369**

**<https://hal.inrae.fr/hal-02801369v1>**

Submitted on 5 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Montpellier,  
Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck

---

# Problèmes de commande optimale périodique et applications

---

Rapport de stage de Master réalisé sous la direction de  
MM. T. Bayen<sup>1</sup> et A. Rapaport<sup>2</sup>

Année universitaire 2015-2016

Vincent Quedeville

31 août 2016

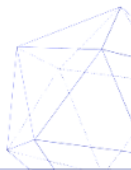
<sup>1</sup> : Université de Montpellier, Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck

<sup>2</sup> : INRA SupAgro Montpellier, UMR MISTEA



UNIVERSITÉ  
DE MONTPELLIER

IMAG  
INSTITUT MONTPELLIÉRAIN  
ALEXANDER GROTHENDIECK



INRA  
SCIENCE & IMPACT



# Table des matières

<b>1</b>	<b>GENERALITES SUR LE CHEMOSTAT</b>	<b>3</b>
1.1	Le chemostat à une espèce . . . . .	3
1.1.1	Recherche des points d'équilibre de (1.1.1) : . . . . .	3
1.1.2	Stabilité des points d'équilibre . . . . .	4
1.1.3	Etude du maximum de $x.D$ . . . . .	6
1.1.4	Synthèse . . . . .	7
1.2	Le chemostat à 2 espèces . . . . .	7
1.2.1	Recherche des points d'équilibre : . . . . .	8
1.2.2	Stabilité des points d'équilibre . . . . .	9
1.2.3	Synthèse . . . . .	11
<b>2</b>	<b>COMMANDE OPTIMALE PERIODIQUE</b>	<b>11</b>
2.1	Résultats d'existence . . . . .	11
2.1.1	Le chemostat à une espèce . . . . .	11
2.1.2	Le chemostat à 2 espèces . . . . .	13
2.2	Conditions d'optimalité . . . . .	18
2.2.1	Le principe de Pontryagin . . . . .	19
2.2.2	Application du principe du maximum . . . . .	20
2.2.3	Calcul des arcs singuliers . . . . .	20
<b>3</b>	<b>PROBLEME DE COMMANDE HYBRIDE : CALCUL NUMERIQUE ET OPTIMISATION</b>	<b>23</b>
3.1	Cadre . . . . .	23
3.2	Résultats d'existence . . . . .	24
3.3	Un autre modèle de commande hybride . . . . .	30
<b>4</b>	<b>ANNEXES</b>	<b>32</b>

## Résumé

Nous étudions un modèle de dynamique de population bactérienne (2 espèces dans ce sujet), qui prend la forme d'un système contrôlé. Le but de ce stage est de proposer une méthode de maximisation de la production de l'une des 2 espèces en compétition avec une autre dans un bio-réacteur alimenté en substrat à concentration contrôlable.

Dans la pratique, la présence d'une deuxième espèce nous empêche de maximiser la productivité de notre espèce d'intérêt (sans perte de généralité, nous conviendrons dans la suite qu'il s'agit de l'espèce 1) car à commande constante, la théorie prévoit que l'optimum favorise la croissance de l'espèce 2 (cf [7]), au détriment de l'espèce 1 en raison du principe d'exclusion compétitive.

Une idée pour pallier cette difficulté est de faire varier périodiquement la commande (elle sera typiquement constante par morceaux) entre les domaines de croissance des deux espèces, afin de dépasser sur un intervalle de temps à optimiser (en nous ramenant à une période), le seuil pour lequel le rendement de l'espèce 1 est maximal à commande constante.

La première partie de ce rapport, essentiellement bibliographique, est consacrée à l'étude du chemostat et l'induction de résultats d'existence et de stabilité de points fixes pour une commande constante. Dans la 2ème partie, nous nous concentrons davantage sur un système à 2 espèces et traiterons la question de la commande périodique. L'écriture d'une loi de commande optimale telle que donnée par le principe de Pontryagin reste encore une piste de recherche.

La 3ème partie traite d'optimisation et de calcul numérique. Nous donnons une loi de commande indépendante (explicitement du moins) du temps, pour laquelle les concentrations en bactéries obéissent asymptotiquement à un motif périodique, et l'espèce 1 dépasse sur une fraction d'une période l'optimum à commande constante. Enfin, comme 2 questions sont soulevées par le résultat de nos simulations, nous abordons les problématiques de la réduction du temps passé en zone de crise, ainsi que la maximisation de la production moyenne de l'espèce 1. Les preuves de ces résultats sont toutefois encore à l'état de recherche.

## Remerciements :

Je suis reconnaissant au Labex NUMEV qui a assuré le financement de mon stage. Je remercie pour leur apport à ce travail mes encadrants MM. TERENCE Bayen et Alain Rapaport. J'adresse mes plus sincères remerciements à MM. Hal Smith et Paul Waltman dont la paraphrase du livre "Theory of chemostat" constitue la majeure partie des résultats ici présentés. Enfin, toute référence consultable sur ces questions m'aura été indispensable et me renvoie à ce que je dois aux différents experts en la matière.

# 1 GENERALITES SUR LE CHEMOSTAT

## 1.1 Le chemostat à une espèce

La dynamique de la population microbienne et du substrat introduit dans le bio-réacteur est du type :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mu(s(t))x(t) - Dx(t) \\ \dot{s}(t) &= -\mu(s(t))x(t) + D(s_{in} - s(t))\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

Avec :

- $x(\cdot)$  la population microbienne (exprimée en concentration) de notre bio-réacteur
- $s(\cdot)$  la concentration en substrat du réacteur
- $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction de croissance de la population bactérienne. On la supposera continue, différentiable de différentielle continue, nulle en 0, croissante strictement, avec effet de saturation.
- $D$  est le taux de dilution du réacteur, strictement positif. Dans toute cette partie nous supposons  $D$  constant.
- $s_{in}$  est la concentration en substrat introduite dans le réacteur. C'est une constante positive.

Pour compléter le problème (1.1.1), nous nous donnons des conditions initiales  $x(t_0) = x_0$  et  $s(t_0) = s_0$  ( $t_0 = 0$  ici).

Si aucune confusion n'est possible, on pourra poser dans toute la suite  $x = x(\cdot)$ ,  $s = s(\cdot)$ .

Le cadre de l'étude sera un intervalle de temps  $[0, \infty)$ , et  $x$ ,  $s$ , des applications de  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

La mise en équations de notre modèle nous permet de montrer le résultat suivant, dont nous constaterons l'intérêt lorsque nous aborderons la recherche des points d'équilibre :

**Lemme 1.1.** *On considère le problème de Cauchy (1.1.1), avec les conditions initiales  $x(0) = x_0$ ,  $s(0) = s_0$ .*

*Alors :*

- *Si  $x_0 > 0$ , alors  $x(t) > 0$  pour tout temps  $t \geq 0$ .*
- *$\forall s_0 \in [0, s_{in}]$ , l'ensemble  $\{t | s(t) = 0\}$  sera de mesure nulle.*

*Démonstration.* L'équation sur  $x$  s'écrit sous forme intégrale :

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t (\mu(s(\tau)) - D)d\tau\right).$$

On déduit de l'expression de  $x(t)$  que si  $x_0 > 0$ , alors  $x$  reste strictement positive pour tout temps  $t > 0$ .

Aussi,  $s(t)$  reste positive pour tout  $t$  : en effet, supposons qu'il existe un temps  $\tilde{t} \geq 0$  tel que  $s(\tilde{t}) = 0$ . On aura :  $\dot{s} = Ds_{in} > 0$  et  $s(t) > 0$  pour  $t \in ]\tilde{t}, \tilde{t} + d_t]$ ,  $d_t > 0$ .  $\square$

Une autre quantité d'intérêt dont nous nous servirons dans la suite est  $s + x = \zeta$ , qui est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\dot{\zeta} = -D\zeta + Ds_{in}, \quad \zeta(t_0) = x(t_0) + s(t_0).$$

Soit, après intégration,  $\zeta(t) = (\zeta(t_0) - s_{in})e^{-D(t-t_0)} + s_{in}$ .

### 1.1.1 Recherche des points d'équilibre de (1.1.1) :

Ils vérifient :  $f(x, s) = 0$ , c'est à dire :

$$\begin{aligned}\mu(s)x - Dx &= 0 \\ -\mu(s)x + D(s_{in} - s) &= 0\end{aligned}$$

On posera une fois pour toutes dans la suite  $\mu^{-1}(D) = \lambda$ , appelé seuil de croissance, au-delà duquel la quantité de nutriment à disposition dans le système ne permet pas à l'espèce présente en culture de survivre.  $x(\mu(s) - D) = 0$  admet 2 solutions :  $x = 0$  et  $s = \lambda$ , si ce dernier existe.

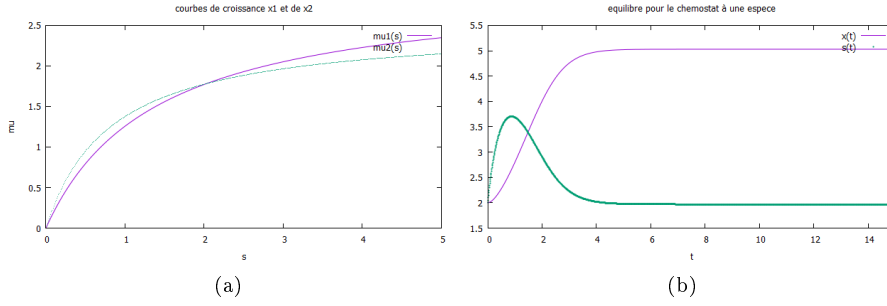


FIGURE 1 – (a) Deux courbes de croissance de type Monod s’intersectent en deux points au plus : 0 et  $\hat{s} > 0$ . Ici,  $\mu_1(s) = \frac{1.387s}{3+s}$ ,  $\mu_2(s) = \frac{0.817s}{2.5+s}$ ,  $\hat{s} = 2.033$ . (b) Un exemple de comportement de  $x$  à l’équilibre. Modélisation par une fonction de Monod ;  $\mu(s) = \frac{3s}{1.388+s}$ ,  $s_{in} = 7$ ,  $D = 1.76$

**Cas  $x = 0$**   $s$  vérifie alors l’équation :  $\dot{s} = D(s_{in} - s)$ , et dès lors  $(0, s_{in})$  est un point d’équilibre du système.

**Cas  $s = \lambda$**  L’équation vérifiée par  $s$  se réécrit :  $D(s_{in} - \lambda - x) = 0$  pour  $x = s_{in} - \lambda$  (si tant est que  $s_{in} - \lambda > 0$ ).

Le système a 2 points d’équilibre :  $(0, s_{in})$  et  $(s_{in} - \lambda, \lambda)$ , si  $D < \mu_{max}$ .

### 1.1.2 Stabilité des points d’équilibre

**Définition** On appelle ensemble  $\omega$ -limite pour la dynamique (1.1.1) l’ensemble  $\{ \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), s(t)), (x, s) \text{ solution de (1.1.1)} \}$

**Définition** On appelle fonction de Lyapunov  $V : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  associée à la dynamique (1.1.1) une fonction différentiable telle que :

- $V(x, s) \geq 0 \forall (x, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , et  $V(x, s) = 0 \Leftrightarrow (x, s) = (x^*, s^*)$
- $\frac{d}{dt} V(x, s) = \nabla V \cdot f(x, s) \leq 0 \forall (x, s)$ .

La méthode des fonctions de Lyapunov (cf [1] et [2]) donne la propriété de stabilité asymptotique (i.e stabilité et attractivité) d’un point d’équilibre  $(x^*, s^*)$ .

On pose  $S = \{(x, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ | V(x, s) < \infty, \frac{d}{dt} V(x, s) = 0\}$ , et  $S'$  le plus grand invariant de  $S$  pour la dynamique (1.1.1). On utilisera dans cette partie le résultat général suivant de stabilité au sens de LaSalle :

**Lemme 1.2.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable. Soit  $V$  une fonction de Lyapunov et soit  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  une trajectoire associée à la dynamique  $\dot{x} = f(x)$ . Supposons que  $V$  soit définie sur  $X$  variété invariante par la dynamique  $f$ . Alors  $\omega$  ensemble  $\omega$ -limite pour la dynamique  $f$  vérifie  $\omega \subset S'$ .

*Démonstration.* Pour preuve, comme la fonction  $V$  décroît le long d’une trajectoire et reste positive sur  $X$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x) = l$  existe dans  $\mathbb{R}$ , et  $V(x) \equiv l$  sur  $\{ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \}$ . En particulier  $\frac{d}{dt} V(x) \equiv 0$  sur cet ensemble, ipso facto inclus dans  $S'$  invariant par définition.  $\square$

Remarque : une autre version du théorème de LaSalle énoncée dans [2] donne la convergence de  $x(t)$  pour  $t \rightarrow \infty$  vers le plus grand ensemble de  $\{x \in X | \frac{d}{dt} V(x) = 0\}$  invariant pour la dynamique  $f$ , sous les hypothèses que :

- $V \in C^1(X)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, V(x) \leq \alpha$  est un compact de  $X$ . ( $V$  sera une fonction dite propre)
- $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in X$ .

(Remarque : il n’est de fait pas nécessaire que  $V$  soit une fonction de Lyapunov sur  $X$ .)

**Caractérisation des points d'équilibre :**

Nous définirons dans cette partie la dérivée directionnelle de  $V$  dans la direction de la dynamique  $f$  par :

$$\frac{dV}{dx}(x, s)\dot{x} + \frac{dV}{ds}(x, s)\dot{s}.$$

En fonction du signe de  $s_{in} - \lambda$ , l'un ou l'autre des points d'équilibre sera stable et attracteur (asymptotiquement stable) au sens de LaSalle. Nous allons appliquer ici le lemme 1.2 à notre système chemostat à une espèce pour conclure.

**Proposition 1.3.** *Sous l'hypothèse  $x_0 > 0$  :*

- Si  $s_{in} - \lambda > 0$ ,  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} s_{in} - \lambda$ , et  $s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda$ . Aussi,  $(s_{in} - \lambda, \lambda)$  est asymptotiquement stable.
- Si  $s_{in} - \lambda \leq 0$ ,  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , et  $s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda$ . Le point  $(0, s_{in})$  est asymptotiquement stable.

**1er cas :**  $s_{in} - \lambda > 0$  Nous restreindrons pour notre étude  $[0, s_{in}] \times [0, s_{in}]$  au sous-ensemble  $\Omega = \{(x, s) | x > 0\}$ .

Le point d'équilibre  $(s_{in} - \lambda, \lambda)$  sera asymptotiquement stable, dès que  $x(0) > 0$ .

En effet, posons :  $V(x, s) = x - (s_{in} - \lambda) - (s_{in} - \lambda) \ln\left(\frac{x}{s_{in} - \lambda}\right) + \int_{\lambda}^s \frac{\mu(\sigma) - D}{D} d\sigma$ , et montrons que  $V$  est une fonction de Lyapunov.

—  $V$  est bien positive :

- $\int_{\lambda}^s \frac{\mu(\sigma) - D}{D} d\sigma$  est l'intégrale d'une fonction de même signe que  $s - \lambda$ .
- Aussi,  $x - (s_{in} - \lambda) - (s_{in} - \lambda) \ln\left(\frac{x}{s_{in} - \lambda}\right)$  est bien positive :

$\frac{d}{dx}\left(x - (s_{in} - \lambda) - (s_{in} - \lambda) \ln\left(\frac{x}{s_{in} - \lambda}\right)\right) = 1 - \frac{s_{in} - \lambda}{x}$ , qui s'annule en  $x = s_{in} - \lambda$ , valeur de  $x$  pour laquelle  $x - (s_{in} - \lambda) - (s_{in} - \lambda) \ln\left(\frac{x}{s_{in} - \lambda}\right) = 0$ .

— On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x, s) &= \left(1 - \frac{s_{in} - \lambda}{x}\right)(\mu(s) - D)x + \frac{\mu(s) - D}{D}(-\mu(s)x + D(s_{in} - s)) \\ &= \frac{-1}{D}(\mu(s) - D)^2x - (\mu(s) - D)(s - \lambda) \leq 0 \end{aligned}$$

puisque  $\mu$  est monotone croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ce qui implique que  $\mu(s) - D$  est du même signe que  $s - \lambda$ .

$V$  est bien une fonction de Lyapunov ; le théorème de LaSalle donne donc la convergence de  $(x, s)$  vers le plus grand ensemble invariant de  $\{(x, s) | \frac{d}{dt}V(x(t), s(t)) = 0 \forall t \geq 0\}$  dans  $\{(x, s) | x(t) > 0 \forall t \geq 0\}$ , ici le point  $(s_{in} - \lambda, \lambda)$ .

**2ème cas :**  $s_{in} - \lambda < 0$  Remarque : posons  $x + s - s_{in} = \zeta$ .

$\zeta$  vérifie :  $\dot{\zeta} = -D\zeta$ . On remarque que  $\zeta(t) = \zeta(0)e^{-Dt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

0 est donc un point exponentiellement stable de  $\zeta$ . On peut donc ramener notre étude à l'hyperplan  $\zeta = 0$ . Dans ce cas, le système (1.1.1) se réduit à l'équation :

$$x = \mu(s_{in} - x)x - Dx \tag{1.1.2}$$

Et nous nous placerons dans notre étude sur :  $\{(x, s) | x \leq s_{in}\}$ .

Le point d'équilibre  $(0, s_{in})$  est asymptotiquement stable pour la dynamique  $f(x, s)$ .

En effet, si on pose  $V(x, s) = x$  : on remarque que  $\frac{d}{dt}V(x, s) = (\mu(s_{in} - x) - D)x < (\mu(s_{in}) - D)x < 0$  en vertu de l'hypothèse  $s_{in} - \lambda < 0$ .

Dans ce cas,  $V$  est une fonction propre et sa dérivée directionnelle dans la direction de la dynamique  $f$  est négative. Le théorème de LaSalle nous donne la convergence de  $x(t)$  vers le plus grand sous-ensemble invariant de

$$\{(x, s) | \frac{d}{dt}V(x, s) = 0 \forall t \geq 0\}$$

dans  $\{(x, s) | x(t) \leq s_{in} \forall t \geq 0\}$ , c'est à dire  $x = 0$  et donc  $s = s_{in}$ .  $\square$

Remarque : si  $s_{in} = \lambda$ , 0 est asymptotiquement stable pour la dynamique (1.1.1), avec pour bassin d'attraction  $\mathbb{R}_+^2$ , mais pas exponentiellement stable.

En effet, supposons  $x(0) \in \mathbb{R}^+$ , et  $s(0) > s_{in}$ . Alors :  $\dot{x} \geq 0$

$$\dot{s} \leq -\mu(s_{in})x(0) + D(s_{in} - s)$$

au moins pour  $t$  suffisamment petit. Alors, soit 1)  $s > s_{in}$  pour tout  $t \geq 0$ , soit 2) il existe un temps  $\tilde{t}$  tel que  $s(\tilde{t}) \leq s_{in}$  et  $(x, s)$  reste dans l'ensemble  $\mathbb{R}_+ \times [0, s_{in}]$ . Le premier cas est absurde : pour  $s > s_{in}$ ,  $D(s_{in} - s) < 0$  et  $|\mu(s)x|$  va croître avec le temps de sorte que  $\forall \{t_1, t_2 \in \mathbb{R} | t_1 < t_2\}$ ,  $\dot{s}(t_1) < \dot{s}(t_2)$ , ce qui contredit l'assertion  $s$  reste supérieur à  $s_{in}$  pour tout temps  $t \geq 0$ .

Or, l'ensemble  $\mathbb{R}_+ \times [0, s_{in}]$  est invariant par la dynamique (1.1.1), ce qui nous place dans le cadre de l'application du théorème de LaSalle : on sait que  $(0, s_{in})$  est un point d'équilibre du système invariant par la dynamique (1.1.1).

### 1.1.3 Etude du maximum de x.D

L'objectif est ici de caractériser  $\max_{D>0} D(s_{in} - \lambda(D))$ , où pour rappel  $\lambda(D) = \mu^{-1}(D)$ . A cet effet, nous montrons la proposition suivante :

**Proposition 1.4.** *Si la fonction  $\mu$  est croissante strictement et concave strictement (ce qui sera le cas dans notre problème), alors  $D \mapsto D(s_{in} - \lambda(D))$  est concave strictement.*

*Démonstration.* Pour preuve de ce résultat, supposons  $\mu$  concave strictement. Nous voulons alors étudier le signe de :

$$\frac{d^2}{dD^2} D(s_{in} - \lambda(D)) = -D \frac{d^2}{dD^2} (\lambda(D)) - 2 \frac{d}{dD} (\lambda(D))$$

Or :

- Si  $\mu$  est concave strictement,  $\mu^{-1}$  est convexe strictement, ce qui induit  $\frac{d^2}{dD^2} (\lambda(D)) < 0$  et conséquemment  $-D \frac{d^2}{dD^2} (\lambda(D)) < 0$ .
- $\mu$  étant croissante strictement,  $\mu^{-1}$  est aussi croissante strictement et  $\frac{d}{dD} \mu^{-1} > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  en entier. De facto  $-2 \frac{d}{dD} (\lambda(D)) < 0$  ce qui induit la concavité stricte de  $D \mapsto D(s_{in} - \lambda(D))$ .

□

Nous montrons ainsi l'unicité d'un tel maximum dans le cas de fonctions de croissance concaves strictement.

Un calcul analytique (prenons l'exemple d'une cinétique Monod, i.e  $\mu(s) = \frac{\mu_{max}s}{K+s}$ ) donne :

$$\lambda = \frac{KD}{\mu_{max} - D}$$

$$\frac{d}{dD} (\lambda) = \frac{K}{\mu_{max} - D} + \frac{KD}{(\mu_{max} - D)^2} = \frac{K\mu_{max}}{(\mu_{max} - D)^2}$$

Nous cherchons donc les solutions de :

$$0 = s_{in} - \lambda - D \left[ \frac{d}{dD} (\lambda) \right] = s_{in} - \frac{KD}{\mu_{max} - D} - \frac{K\mu_{max}}{(\mu_{max} - D)^2}$$

En réduisant au même dénominateur  $(\mu_{max} - D)^2$  :

$$0 = s_{in}\mu_{max}^2 + s_{in}D^2 - 2s_{in}\mu_{max}D - K\mu_{max}D + KD^2 - K\mu_{max}D$$

$$= D^2[K + s_{in}] + D[-2s_{in}\mu_{max} - 2K\mu_{max}] + s_{in}\mu_{max}^2$$

Nous cherchons les racines de ce trinôme en D, de discriminant :

$$\Delta = 4s_{in}^2\mu_{max}^2 + 4K^2\mu_{max}^2 + 8Ks_{in}\mu_{max}^2 - 4Ks_{in}\mu_{max}^2 - 4s_{in}^2\mu_{max}^2$$

$$= 4\mu_{max}^2[K^2 + Ks_{in}]$$

$$\text{Ainsi donc : } D \pm = \frac{2\mu_{max}[K + s_{in} \pm \sqrt{K^2 + Ks_{in}}]}{2(K + s_{in})}$$

Ces racines doivent correspondre à des valeurs acceptables de  $s$  c'est à dire qu'il doit exister un  $\tilde{s} \in [0, s_{in}]$  tel que  $D \pm = \mu(\tilde{s})$ . Or :

$$\mu_{max} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{K^2 + Ks_{in}}}{K + s_{in}} \right) = \mu_{max} \frac{\tilde{s}}{K + \tilde{s}} = \mu_{max} \left[ 1 - \frac{K}{K + \tilde{s}} \right]$$

Nécessairement,  $\frac{K + \tilde{s}}{K} = + \frac{K + s_{in}}{\sqrt{K^2 + s_{in}}}$ , i.e  $\tilde{s} = \sqrt{K^2 + Ks_{in}} - K = \sqrt{K}(\sqrt{K + s_{in}} - \sqrt{K})$ .



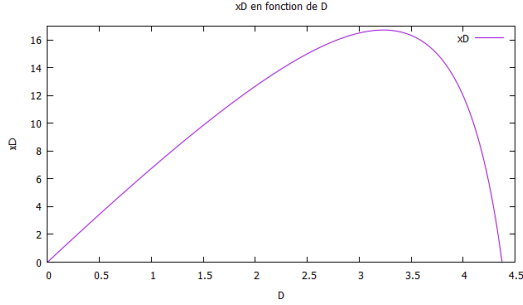


FIGURE 2 –  $xD$  est bien une fonction concave strictement

Nous obtenons donc une valeur  $\tilde{D} = \mu_{max}(1 - \sqrt{\frac{K}{K+s_{in}}})$  pour laquelle  $xD$  est maximale, et la valeur du maximum est  $\tilde{x}D = \mu_{max}(1 - \sqrt{\frac{K}{K+s_{in}}})(s_{in} - \sqrt{K}(\sqrt{K+s_{in}} - \sqrt{K}))$ .

### 1.1.4 Synthèse

L'évolution dans le temps de la population bactérienne est dictée par la valeur de  $D$  (ou de façon équivalente  $\lambda$ ). 2 cas se rencontrent :

- Le lessivage de l'espèce présente dans le bio-réacteur, si  $D > \mu(s_{in})$ .  $(0, s_{in})$  est alors point d'équilibre asymptotiquement stable.
- L'équilibre  $(s_{in} - \lambda, \lambda)$  asymptotiquement stable si  $s_{in} - \lambda > 0$ . Pour cet état d'équilibre, la quantité  $xD$  admet en pratique un maximum  $\tilde{x}D = \arg\max_D(xD)$  pour un  $\tilde{D}$  optimal, correspondant à la production biologique maximale à  $D$  fixé.

L'objectif de la partie 3 sera précisément de déterminer une commande périodique (parmi les commandes constantes par morceaux telles que  $\tilde{x}$  soit dépassé sur un intervalle de mesure non-nulle) pour laquelle  $xD$  en moyenne s'approchera de  $\tilde{x}D$ .

## 1.2 Le chemostat à 2 espèces

Le système à étudier est alors  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{s}) = f(x_1, x_2, s)$ , pour une dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_1(s)x_1 - Dx_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu_2(s)x_2 - Dx_2 \\ \dot{s} &= -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

pour des conditions initiales  $(x_{10}, x_{20}, s_0) \in ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}] \times [0, s_{in}]$ .

Ici encore,  $D$  et  $s_{in}$  sont des constantes strictement positives. Nous supposons pour simplifier que les interactions entre les représentants des deux espèces sont uniquement indirectes par le substrat commun, autrement dit pour  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$ ,  $\dot{x}_i$  ne contient pas de termes exprimés en fonction de  $-x_i x_j$ , que l'on retrouverait par exemple dans la modélisation d'une chaîne alimentaire.

Similairement au système chemostat à une espèce, nous pouvons montrer la proposition suivante :

**Proposition 1.5.** • Si  $x_{i0} > 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , alors  $x_i(t) > 0 \forall t \geq 0$ .  
 • Pour presque tout temps  $t \geq 0$ ,  $s(t) > 0$ .

*Démonstration.* Nous savons que si  $x_{i0} = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , alors  $x_i(t) = 0 \forall t \geq 0$ .

Si l'on suppose qu'il existe un temps  $\tilde{t} \geq 0$  pour lequel  $x_i(\tilde{t}) = 0$ , autrement dit  $x_i$  intersecte la solution nulle, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz induirait  $x_i(t) \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier, ce qui contredirait l'hypothèse

$x_{i0} > 0$ .

D'autre part, reprenant le raisonnement déjà proposé pour le chemostat à une espèce, s'il existe un temps  $\tilde{t}$  pour lequel  $s(\tilde{t}) = 0$ , alors  $\frac{d}{dt}s(\tilde{t}) = Ds_{in} > 0$ , et donc  $\{t|s(t) = 0\}$  est un ensemble de mesure nulle de  $\mathbb{R}_+$ .  $\square$

D'autre part, le changement de variables  $\zeta = x_1 + x_2 + s$  donne une équation différentielle vérifiée par  $\zeta$  du type :  $\dot{\zeta} = D(s_{in} - \zeta)$

Que l'on intègre comme dans le cas à une espèce en :

$$\zeta(t) = (x_{10} + x_{20} + s_0) \exp(-D(t - t_0)) - s_{in} \exp(-D(t - t_0)) + s_{in}.$$

### 1.2.1 Recherche des points d'équilibre :

Une fois encore, nous poserons dans la suite  $\lambda_{1/2} = \mu_{1/2}^{-1}(D)$ , seuils de croissance associés aux espèces 1 et 2 présentes dans le système.

Remarque préliminaire : le système est symétrique en  $x_1$  et  $x_2$ .

Les points d'équilibre de (1.2.1) seront les triplets  $(x_1, x_2, s)$  tels que :

$$\begin{aligned} x_1(\mu_1(s) - D) &= 0 \\ x_2(\mu_2(s) - D) &= 0 \\ -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1(\mu_1(s) - D) = 0$  admet deux solutions :  $x_1 = 0$  et  $s = \lambda_1$

**Cas  $x_1 = 0$ .** Alors :

$$\begin{aligned} \mu_2(s)x_2 - Dx_2 &= 0 \\ -\mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Comme précédemment, la résolution du système induit que  $(0, 0, s_{in})$  et  $(0, s_{in} - \lambda_2, \lambda_2)$  en seront les points d'équilibre, à condition toutefois que  $\lambda_2 < s_{in}$ .

**Cas  $s = \lambda_1$ .** Comme  $\mu_1(s)x_1 = Dx_1$ , (1.2.1) se réécrit :

$$\begin{aligned} \mu_2(s)x_2 - Dx_2 &= 0 \\ -\mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Alors, soit  $x_2 = 0$  et  $x_1 = s_{in} - \lambda_1$ , soit  $\mu_2(s) = D = \mu_1(s)$ , auquel cas 2 équations donnent une seule condition sur  $s$ , et une seule sur  $(x_1, x_2)$ . On obtient de facto une droite d'équilibres, d'équation :  $x_1 + x_2 = s_{in} - \lambda$ , où l'on a posé  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .

Remarque : il n'est pas nécessaire que  $\mu_1 \equiv \mu_2$  pour que  $\mu_1^{-1}(D) = \mu_2^{-1}(D)$ .

$x_2(\mu_2(s) - D) = 0$  admet 2 solutions :  $x_2 = 0$  et  $s = \lambda_2$

**Cas  $x_2 = 0$ .** En vertu de la remarque précédente, les points d'équilibre seront :  $(0, 0, s_{in})$  (redondant) et  $(s_{in} - \lambda_1, 0, \lambda_1)$  (là encore redondant), sous réserve que  $\lambda_1 < s_{in}$ .

Le cas  $s = \lambda_2$  fait écho au cas  $s = \lambda_1$  pour l'équilibre  $x_1(\mu_1(s) - D) = 0$ .

Enfin, le cas  $\lambda_1 = \lambda_2$  (ce qui ne signifie pas nécessairement  $\mu_1 \equiv \mu_2$ ) nous permet de ramener le système de 3 équations à un système sur  $(x_1, s)$  du type :

$$\begin{aligned}\mu x_1 - Dx_1 &= 0 \\ \mu x_2 - Dx_2 &= 0 \\ -\mu x_1 - \mu x_2 + D(s_{in} - s) &= 0\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

où l'on a posé  $\mu := \mu_1(s) = \mu_2(s)$ . La résolution nous conduit à deux points d'équilibre :  $x_1 = 0$ , qui donnera  $(0, 0, s_{in})$  (une fois de plus redondant !) et  $s = \lambda$ , ce qui induit après réinjection dans l'autre équation :  $x_1 + x_2 = s_{in} - \lambda$ . C'est le seul cas de coexistence des 2 espèces.

### 1.2.2 Stabilité des points d'équilibre

Nous allons supposer une bonne fois pour toutes que  $\lambda_1 < \lambda_2$ , le cas opposé se traitant de la même manière.

Remarquons là encore qu'en posant  $\zeta = x_1 + x_2 + s - s_{in}$ ,  $\dot{\zeta} = -D\zeta$  et 0 est un point exponentiellement stable de  $\zeta$ .

Dans le cas limite, le système (1.2.1) se réécrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - Dx_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2 - Dx_2\end{aligned}\tag{1.2.5}$$

Nous pouvons montrer en nous référant à [1] :

**Proposition 1.6.** — Si  $\lambda_1 < s_{in}$ ,  $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} s_{in} - \lambda_1$ ,  $x_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , et  $s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda_1$ .  $(s_{in} - \lambda_1, 0, \lambda_1)$  sera asymptotiquement stable.

— Si  $\lambda_1 \geq s_{in}$ ,  $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ ,  $x_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  et  $s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} s_{in}$ . Aussi,  $(0, 0, s_{in})$  sera asymptotiquement stable.

**Remarque** L'interprétation biologique de la proposition est l'exclusion compétitive que  $x_1$  livre à  $x_2$  dans le cas  $\lambda_1 < s_{in}$ , et un phénomène de washout qui élimine les espèces  $x_1$  et  $x_2$  dans le cas  $\lambda_1 \geq s_{in}$ .

*Démonstration.* Pour preuve, supposons d'abord  $s_{in} - \lambda_1 > 0$ . Nous nous intéressons aux sous-ensembles  $E_1 = \{x_1 + x_2 \geq s_{in} - \lambda_1\}$ ,  $E_2 = \{x_1 + x_2 \leq s_{in} - \lambda_1\}$  et posons  $V(x) = x_1 + x_2 - (s_{in} - \lambda_1)$ . On a en effet, dès que  $x_1(0) + x_2(0) \in E_1$  :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) &\leq (\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_1 + (\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_2 \\ &\leq [\mu_1(\lambda_1) - D]x_1 + [\mu_2(\lambda_1) - D]x_2 \\ &\leq [\mu_2(\lambda_2) - D]x_2 \leq 0\end{aligned}$$

car  $\lambda_2 \leq D$ . Alors, soit  $x_1 + x_2 \in E_2$  à partir d'un temps  $t_0$ , soit  $x_1 + x_2$  reste pour tout temps dans  $E_1$  et converge vers le plus grand invariant de  $\{(x_1(t), x_2(t)) | \dot{V}(x_1, x_2) = 0\}$  dans  $E_1$ .

Dans le cas  $x_1 + x_2 \in E_1$ , le théorème de LaSalle donne la convergence de  $(x_1, x_2)$  vers  $(s_{in} - \lambda_1, 0)$  seul invariant de  $\{(x_1, x_2) | \frac{d}{dt}V(x_1, x_2) = 0\}$  pour le système (1.2.5).

Si  $x_1 + x_2 \in E_2$  pour  $t \geq t_0$  :

Considérons le cas  $(x_1 + x_2) \leq s_{in} - \lambda_2$  :

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \geq (\mu_1(\lambda_2) - D)x_1 + (\mu_2(\lambda_2) - D)x_2 \geq (\mu_1(\lambda_1) - D)x_1 \geq 0$$

Ce qui nous donne la croissance de  $x_1 + x_2$ . L'ensemble

$$\tilde{E}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 | x_1 + x_2 \leq s_{in} - \lambda_2\}$$

ne contient pas d'invariant par la dynamique (1.2.5) ; il existe ainsi un temps  $\tilde{t}$  à partir duquel  $x_1 + x_2$  va sortir de  $\tilde{E}_2$ .

Dans le cas  $s_{in} - \lambda_2 < x_1 + x_2 \leq s_{in} - \lambda_1$  : on remarque déjà que  $\mu_1(s) \geq \mu_2(s)$  pour  $s_{in} - x_1 - x_2 \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

Aussi, le seul invariant de  $\{(x_1, x_2) | \dot{V} = 0\}$  dans  $E_2 \setminus \tilde{E}_2$  sera là encore le singleton  $(s_{in} - \lambda_1, 0)$ . En effet,  $x_2(\mu(s_{in} - x_1 - x_2) - D)$  s'annule ssi : 1)  $x_2 = 0$ . 2)  $x_2 = s_{in} - x_1 - \lambda_2$ .

Notons que 2) induit  $\dot{x}_1 = (\mu_1(\lambda_2) - D)x_1 > 0$ , et le champ de vecteurs pointe vers l'extérieur de la surface de niveau  $x_1 + x_2 = s_{in} - \lambda_2$ .

Nous remarquons que pour  $x_1 + x_2 \in [s_{in} - \lambda_2, s_{in} - \lambda_1]$ , on aura pour  $t$  suffisamment grand  $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \geq 0$ . En effet, si l'on suppose  $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 < 0$  pour un certain  $t \geq 0$  (par exemple  $t = 0$  si le bioréacteur est initialement davantage chargé en  $x_2$ ),  $(\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D) > (\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D)$  implique  $x_1(t) < x_2(t)$ .

Or, pour  $s_{in} - x_1 - x_2 \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,  $\dot{x}_2(t) \leq (\mu_2(\lambda_2) - D)x_2 \leq 0$  et  $\dot{x}_1 \geq (\mu_1(\lambda_1) - D)x_1 \geq 0$ , ce qui induit la décroissance de  $x_2$  vers l'attracteur 0 de  $\{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \in [s_{in} - \lambda_2, s_{in} - \lambda_1]\}$  et la croissance de  $x_1$  vers l'attracteur  $s_{in} - \lambda_1$ .

Il existe ainsi un temps  $\tilde{t}$  pour lequel  $x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$  et  $x_1(t) > x_2(t)$  dès que  $t > \tilde{t}$ .

Dès lors, nous concluons de l'existence d'un temps  $T > 0$  tel que  $\forall t \geq T$ ,  $x_1(t) > x_2(t)$  et  $\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) \geq 0$ . Ainsi, pour  $t \geq T$ ,  $x_1 + x_2$  va croître vers  $s_{in} - \lambda_1$  et  $(s_{in} - \lambda_1, 0, \lambda_1)$  sera bien asymptotiquement stable pour  $s_{in} - \lambda_1 > 0$ .

Si maintenant  $s_{in} - \lambda_1 \leq 0$  : on pose  $V(x_1, x_2) = x_1 - (s_{in} - \lambda_1)$  qui vérifie bien :

$$\dot{V} \leq \mu_1(\lambda_1)x_1 - Dx_1 \leq 0$$

Ce qui nous donne en vertu du théorème de LaSalle la convergence de  $(x_1, x_2)$  vers le plus grand invariant de  $\{(x_1, x_2) | \dot{V} = 0\}$  dans l'ensemble  $\{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leq s_{in}\}$ , i.e  $x_1 = 0$ .

En effet,  $\{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = s_{in} - \lambda_1\}$  n'est pas invariant pour le système (1.2.5) : si  $x_1 + x_2 = s_{in} - \lambda_1$ , alors  $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$  vérifie :

$$\dot{X}(t) = (\mu_2(\lambda_1) - D)x_2 < (\mu_2(\lambda_2) - D)x_2 \text{ par hypothèse.}$$

$$\dot{X}(t) \leq 0.$$

Donc, si  $x_1(t) + x_2(t) = s_{in} - \lambda_1$  pour un certain temps  $t$ ,  $x_1 + x_2 \leq s_{in} - \lambda_1$  pour tout temps  $\geq t$ .

De facto,  $x_1 = 0$  est le seul invariant pour (1.2.5), et donc  $(0, 0)$  est la limite de  $(x_1, x_2)$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

Enfin, si  $s_{in} = \lambda_1$ , le même développement que dans le cas à une espèce nous donnera la convergence de  $(x_1, x_2, s)$  vers  $(0, 0, s_{in})$  pour  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Remarque :** Dans le cas où les taux de mortalité des 2 espèces seraient différents :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_1(s)x_1 - D_1x_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu_2(s)x_2 - D_2x_2 \\ \dot{s} &= -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Nous ne pourrions pas nous ramener à un système de 2 équations différentielles vérifiées par  $x_1$  et  $x_2$  pour l'étude de la stabilité des points d'équilibre. En effet,  $\zeta = x_1 + x_2 + s$  vérifie l'inéquation différentielle :

$$\dot{\zeta} \leq -\tilde{D}\zeta + \bar{D}s_{in} \tag{1.2.7}$$

Où  $\tilde{D} = \max(D_1, D_2, D)$  et  $\bar{D} = \min(D_1, D_2, D)$ .

Alors :  $\zeta(t) \leq \frac{\bar{D}}{\tilde{D}} + \exp(-\tilde{D}t)(\zeta_0 - \frac{\bar{D}}{\tilde{D}})$ .

Ce qui induit une limite supérieure sur la quantité  $\zeta$  ( $\limsup_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) \leq \frac{\bar{D}}{\tilde{D}}$ ) mais en l'état, il n'y a pas assez d'information pour montrer la convergence en temps long de  $\zeta$  : en particulier, la limite supérieure ne fait pas intervenir les fonctions de croissance  $\mu_i(s)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

### 1.2.3 Synthèse

Pour toute valeur (constante) de  $D$  sauf une, l'état d'équilibre du chemostat à 2 espèce se traduit par la survie d'une espèce au plus : les deux espèces se livrent une exclusion compétitive. L'ensemble des points d'équilibre du chemostat à 2 espèces est :

- $(0, 0, s_{in})$  asymptotiquement stable si  $\lambda_1 > s_{in}$ . Les deux espèces sont lessivées par le flux trop important de substrat pour que son ingestion soit possible par l'une ou l'autre des espèces.
- $(0, s_{in} - \lambda_2, \lambda_2)$  asymptotiquement stable si  $\lambda_2 < \inf(s_{in}, \lambda_1)$ .  $x_2$  survit à l'exclusion compétitive livrée à  $x_1$ .
- $(s_{in} - \lambda_1, 0, \lambda_1)$  asymptotiquement stable si  $\lambda_1 < \inf(s_{in}, \lambda_2)$ .  $x_1$  survit à l'exclusion compétitive livrée à  $x_2$ .
- La droite d'équation  $\{x_1 + x_2 = s_{in} - \lambda\}$  dans le cas particulier  $\lambda_1 = \lambda_2$ . On notera qu'en fonction des conditions initiales, tout point de la droite est un point d'équilibre!

## 2 COMMANDE OPTIMALE PERIODIQUE

**Définition** Soit une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, et  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On considère l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$ .

Soit  $\psi$  l'application définie comme suit :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \psi(t) = F(t, x(t)) \end{aligned}$$

On posera dans la suite  $\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt}F(t, x(t)) + \frac{d}{dx}F(t, x(t))\frac{d}{dt}x(t)$ .

$\dot{F}(t, x(t))$  ainsi définie est la dérivée en temps de  $F$  le long de la trajectoire  $(x(t))_{t \geq 0}$ .

**Définition** Pour une fonction  $f : t \in \mathbb{R}_+ \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}_+$  mesurable du temps, pour  $T \in \mathbb{R}_+$ , on posera dans la suite  $\langle f \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ .

### 2.1 Résultats d'existence

#### 2.1.1 Le chemostat à une espèce

Nous nous intéressons au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(s)x - D(t)x \\ \dot{s} &= -\mu(s)x + D(t)(s_{in} - s) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

pour lequel il existe un réel  $T > 0$  tel que  $D(t+T) = D(t) \forall t \in [0, \infty[$ ,  $x(0) = x_0 > 0$  et  $s(0) = s_0 \geq 0$ .

Dans toute la suite, nous supposons  $\mu$  continue, localement Lipschitz, strictement croissante et nulle en 0; aussi nous ferons l'hypothèse  $D \not\equiv 0$ .

Le résultat suivant est issu de [3] :

**Proposition 2.1.** *Pour  $D$  continue, l'hypothèse  $\int_0^T \mu(s_{in}) - D(t) dt > 0$  induit l'existence d'une unique solution  $(x, s)$  de (2.1.1) (avec condition initiale  $(x_0, s_0) \in ]0, s_{in}] \times [0, s_{in}[$ ) positive, de période  $T$ . Si  $\int_0^T \mu(s_{in}) - D(t) dt \leq 0$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  quelles que soient les conditions initiales.*

*Démonstration.* Pour preuve, posons d'abord  $\zeta(t) = x(t) + s(t) - s_{in}$ , de sorte que  $\zeta(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta &= -D(t)\zeta, \text{ que l'on intègre en :} \\ \zeta(t) &= \zeta_0 \exp\left(-\int_0^t D(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \zeta(t) = \zeta_0 \exp\left(-\int_0^t D(\tau) - \langle D \rangle_T d\tau\right) \exp(-t\langle D \rangle_T) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

En effet,  $\exp\left(-\int_0^t D(\tau) - \langle D \rangle_T d\tau\right)$  est une fonction  $T$ -périodique et  $\langle D \rangle_T \neq 0$  induit  $\exp(-t\langle D \rangle_T) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

On peut alors étudier, comme dans le cas à commande constante, (2.1.1) pour l'égalité particulière  $x(t) + s(t) = s_{in}$ .

(2.1.1) devient alors :

$$\frac{d}{dt}x = x[\mu(s_{in} - x) - D(t)] \quad (2.1.2)$$

Comme  $D(\cdot)$  reste positif pour tout temps, notre ensemble d'intérêt est :  $\{x | 0 < x \leq s_{in}\}$ . On remarque, comme  $x(t)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , il en est de même pour  $s(t)$ , et la solution de (2.1.1) existe globalement sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ .

1er cas : traitons d'abord  $\langle \mu(s_{in}) - D \rangle_T \leq 0$ . On définit  $\phi(t, 0, x_0)$  le flot associé à (2.1.2), tel que  $\phi(0, 0, x_0) = x_0$ , ainsi que l'application de Poincaré  $\pi(x_0) = \phi(T, 0, x_0)$ .

Si  $\langle \mu(s_{in}) - D \rangle_T \leq 0$ , on aura pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} \pi(x(t)) &= x(t) \exp\left(\int_t^{t+T} \mu(s_{in} - x(\tau)) - D(\tau) d\tau\right) \\ &< x(t) \exp\left(\int_t^{t+T} \mu(s_{in} - x(\tau)) - D(\tau) d\tau\right) \\ &< x(t) \end{aligned}$$

De sorte que  $\{\pi^n(x_0)\}_n$ , suite décroissante minorée, converge pour  $n \rightarrow \infty$ , vers un  $x^* \in [0, s_{in}]$ .

Si  $\int_0^T \mu(s_{in}) - D(t) < 0$  : la limite sera nécessairement nulle.

(En effet, pour tous  $t_1 \in \mathbb{R}_+$ ,  $t_2 > t_1$ ,  $t_2 = t_1 + nT + \delta t$ , où  $\delta t$  est le reste de la division de  $t_2 - t_1$  par  $T$ .)

Alors :  $x(t_2) < x(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^{t_1+\delta t} \mu(s_{in}) - D(t) dt\right) \exp(T\langle \mu(s_{in}) - D \rangle)^n$ , avec

$\exp\left(\int_{t_1}^{t_1+\delta t} \mu(s_{in}) - D(t) dt\right) < \delta t \mu(s_{in})$  nécessairement borné. La limite  $x(t_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  vient immédiatement.)

Si  $\int_0^T \mu(s_{in}) - D(t) = 0$  : soit  $x^*$  sera la solution identiquement nulle, auquel cas l'assertion sera prouvée, soit  $x^*(\cdot) > 0 \forall t \in \mathbb{R}_+$ .

Dans ce dernier cas, posons  $\underline{x} = \liminf_{t \geq 0} x(t) > 0$ . Nous aurons alors pour tous temps  $t, \tilde{t}$  tels que  $\tilde{t} > t$  :

$x(\tilde{t}) \leq x(t) \exp\left(\int_t^{\tilde{t}} \mu(s_{in} - \underline{x}) - D(\tau) d\tau\right) \xrightarrow{\tilde{t} \rightarrow \infty} 0$ , ce qui montre bien que 0 est la seule limite possible de  $x(t)$ .

2ème cas : regardons le cas  $\int_0^T \mu(s_{in}) - D(t) dt > 0$ . Remarquons pour commencer qu'en vertu du théorème de dépendance continue par rapport aux conditions initiales, l'application  $\pi$  est continue. 0 en est évidemment un point fixe. De plus, nous savons que  $\pi$  envoie  $[0, s_{in}]$  dans  $[0, s_{in}]$ . Nous voulons prouver que  $\pi$  possède un unique point fixe  $x^*$  différent du singleton 0 sur  $[0, s_{in}]$ .

Pour celà, nous allons étudier le comportement de l'application  $x \mapsto \pi(x) - x$ . Tout d'abord, remarquons que  $\pi(0) = 0$  puisque 0 est évidemment point fixe trivial de (2.1.2). D'autre part,  $\pi(s_{in}) < s_{in}$  en vertu de nos hypothèses sur  $x$  et du fait que  $s_{in}$  n'est pas point d'équilibre de (2.1.2).

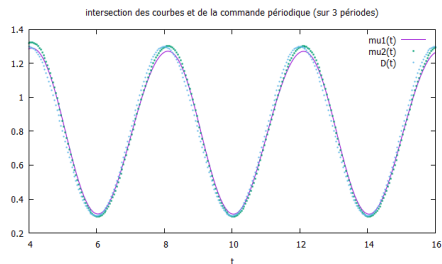
Or  $\frac{d}{dx_0} \pi(0) = \frac{d}{dx_0} \phi(T, 0, 0)$ .

Si on linéarise (2.1.2), on aura, pour tout  $x_0 \in \Omega$  :

$$\frac{d}{dx_0} \pi(x_0) = \exp\left(\int_0^T \mu(s_{in} - \phi(t, 0, x_0)) - D(t) - \phi(t, 0, x_0) \mu'(s_{in} - \phi(t, 0, x_0)) dt\right)$$

Donc :  $\frac{d}{dx_0} \pi(0) = \exp\left(\int_0^T \mu(s_{in}) - D(t) dt\right) > 1$  en vertu de notre hypothèse.

Donc  $\pi(x) - x$  prend des valeurs strictement positives sur un voisinage ouvert de 0, et est négative pour  $x = s_{in}$ . En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe sur l'intervalle  $]0, s_{in}[$  un  $\bar{x}$  tel que  $\pi(\bar{x}) - \bar{x} = 0$ , i.e un point fixe de  $\pi$ .



(a)

FIGURE 3 – Dans le cas où les courbes de croissance des deux espèces s’intersectent, l’équilibre est une situation de coexistence (cf figure 4.a)

**Remarque** L’inégalité précédente nous donne également la répulsion de la trajectoire (périodique) identiquement nulle. On dira que (2.1.2) est un système uniformément persistant.

Reste à montrer que  $\frac{d}{dx}\pi(\bar{x}) < 0$ .

Pour ce faire, si  $\bar{x}$  est un point fixe de  $\pi$ , on aura  $\int_0^T \mu(s_{in} - \phi(t, 0, \bar{x})) - D(t)dt = 0$ , et  $\frac{d}{dx}\pi(\bar{x})$  se réécrit :

$$\frac{d}{dx}\pi(\bar{x}) = \exp\left(-\int_0^T \phi(t, 0, \bar{x})\mu'(s_{in} - \phi(t, 0, \bar{x}))dt\right) < 0$$

Ce qui nous montre l’asymptotique stabilité de  $\bar{x}$ , conséquence de l’uniforme persistance de 0 qui empêche les trajectoires  $\phi(t, 0, x_0)$  (pour  $x_0$  quelconque dans  $]0, s_{in}]$ ) de converger vers 0. On pose alors  $(x^*(t), s^*(t)) = (\phi(t, 0, \bar{x}), s_{in} - \phi(t, 0, \bar{x}))$  qui est bien solution périodique de (2.1.1).

Pour preuve de l’unicité de la solution : soient  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  deux solutions distinctes de (2.1.2) pour des conditions initiales  $x_{10}, x_{20}$ . Sans perte de généralité, nous pourrions supposer  $x_{10} > x_{20}$ , l’autre cas étant parfaitement symétrique.

Alors en posant  $y_i(t) = \ln(x_i(t))$ , (2.1.2) prend la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}_1}{x_1} &= \frac{d}{dt}y_1 = \mu(s_{in} - e^{y_1}) - D(t) \\ \frac{\dot{x}_2}{x_2} &= \frac{d}{dt}y_2 = \mu(s_{in} - e^{y_2}) - D(t)\end{aligned}$$

Ce qui induit :  $\frac{d}{dt}y_1 - \frac{d}{dt}y_2 = \mu(s_{in} - e^{y_1}) - \mu(s_{in} - e^{y_2})$ . En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, comme les deux solutions ne peuvent s’intersecter pour un temps  $t > 0$  déterminé,  $\frac{d}{dt}y_1(t) - \frac{d}{dt}y_2(t)$  est de signe constant, donc  $y_1 - y_2$  est une fonction monotone du temps. Ici,  $y_1 - y_2$  décroît ; soit  $l$  sa limite. Comme  $l < 0$  contredirait le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $y_1$  reste bien toujours au-dessus de  $y_2$ , ce qui nous donne un ordre des solutions en fonction de leurs conditions initiales.

(Remarque : la preuve de ce résultat nous montre également que pour toute condition initiale  $x_0 \in ]0, s_{in}]$ ,  $|\phi(t, 0, x_0) - x^*(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , autrement dit que la solution  $x^*$  est asymptotiquement stable)  $\square$

On cherche alors des solutions  $T$ -périodiques de (2.1.1) sous des conditions plus faibles que  $D$  continue, par exemple  $D$  continue par morceaux. L’hypothèse minimale pour la preuve du résultat est  $D$  mesurable en temps, ce qui sera le cas en pratique ( $D$  constante par morceaux le plus souvent).

### 2.1.2 Le chemostat à 2 espèces

Notre système sera le suivant :

$$\dot{x}_1 = \mu_1(s)x_1 - D(t)x_1 \tag{2.1.3}$$

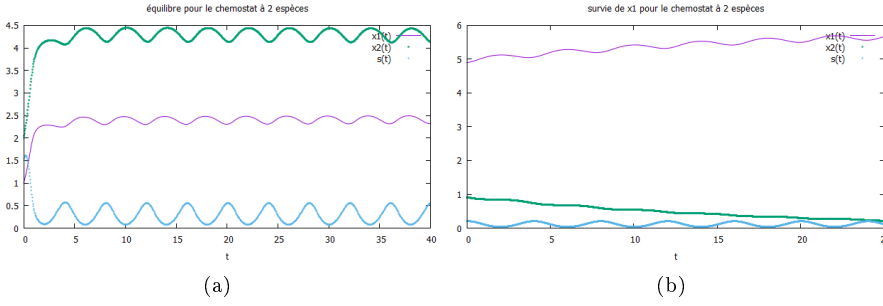


FIGURE 4 – Deux états d'équilibre périodique différents. Modélisation des  $\mu_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  par des fonctions de Monod. A gauche,  $\mu_{1max} = 2.7$ ,  $\mu_{2max} = 3.1$ ,  $K_1 = 0.617$ ,  $K_2 = 0.758$ ,  $s_{in} = 7$ ,  $D(t) = 0.8 + 0.5 * \cos(2\pi t / T)$ ,  $T = 4$ . A droite, pour  $D(t)$ ,  $T$  et  $s_{in}$  identiques,  $K_1 = 0.5$ ,  $K_2 = 0.4$ ,  $\mu_{1max} = 4.5$ ,  $\mu_{2max} = 3.5$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \mu_2(s)x_2 - D(t)x_2 \\ \dot{s} &= -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(t)(s_{in} - s)\end{aligned}$$

où  $D$  sera une fonction  $T$ -périodique,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des fonctions continues, croissantes et localement Lipschitz en  $s$ . On suppose également que

$$(x_1(0), x_2(0), s(0)) = (x_{10}, x_{20}, s_0) \in \Omega = ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}].$$

Deux cas de figure s'offrent à nous :

— L'une des deux espèces s'éteint (ce qui est le cas si sa courbe de croissance est toujours strictement "en-dessous" de l'autre) : alors le comportement asymptotique rejoint celui du cas à une espèce.

On posera dans ce cas  $x_j^*$  la concentration de l'espèce  $j$  survivante pour la solution périodique, telle que d'après (2.1.3),  $x_j^*(t) = x_{j0} \exp(\int_0^t \mu(s_{in} - x_j^*(\tau)) - D(\tau) d\tau)$ ,  $j \in \{1, 2\}$

Et la concentration en substrat sera, en vertu de la partie 1 :

$$s^*(t) = s_{in} - x_{j0} \exp\left(\int_0^t \mu(s_{in} - x_j^*(\tau)) - D(\tau) d\tau\right)$$

— Les deux espèces coexistent (ce qui implique que les courbes de croissance des deux espèces doivent s'intersecter). Nous pouvons montrer qu'il existe une solution périodique  $(x_1, x_2, s)$  qui attire une solution de (2.1.3), pour une certaine condition initiale  $(x_{10}, x_{20}, s_0) \in ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}].$

La question de l'unicité reste ouverte. Certains résultats présents dans la littérature donnent des conditions suffisantes pour l'unicité de la solution d'un système de type Lotka-Volterra (cf [9]). En revanche, aucun théorème n'a encore été démontré pour une dynamique de type chemostat.

On montrera la proposition suivante (cf [1]) :

**Proposition 2.2.** *Pour  $D$  continue et  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}_+$ , pour  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$ , si  $\int_0^T \mu_i(s_{in} - x_j^*) - D(t) dt < 0$  (où l'on a posé  $x_j^*$  la solution périodique associée à la survie de la seule espèce  $j$ ), l'axe des  $x_j$  sera attractif pour la dynamique (2.1.3). Si  $\int_0^T \mu_i(s_{in} - x_j^*) - D(t) dt > 0$ , il existe une unique solution  $(x_1(\cdot), x_2(\cdot), s(\cdot))$  périodique à (2.1.3) dans  $]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}].$*

**Remarque** Pour comprendre intuitivement le résultat, plaçons-nous près d'une solution d'équilibre pour laquelle seule l'espèce  $j$  est présente, et introduisons une faible concentration d'espèce  $i$ . Pour induire le comportement de l'espèce  $i$  au voisinage de 0, l'idée sera de linéariser notre système au niveau de la solution d'équilibre  $x_i = 0$ ,  $x_j(\cdot) = x_j^*(\cdot)$ .

*Démonstration.* On introduit une fois encore la grandeur  $\zeta(t) = x_1(t) + x_2(t) + s(t) - s_{in}$ . Alors, comme  $\frac{d}{dt}\zeta = -D(t)\zeta$ , on aura ici encore  $\zeta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$



En effet, on peut écrire, pour tout  $t \in \mathbb{R} : \zeta(t) = \zeta_0 \exp(-\int_0^t D(\tau) - \langle D \rangle_T) \exp(-t\langle D \rangle_T)$ , où  $\exp(-\int_0^t D(\tau) - \langle D \rangle_T)$  est  $T$ -périodique, et  $\exp(-t\langle D \rangle_T) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

On peut donc étudier (2.1.3) sur la variété invariante  $x_1 + x_2 + s = s_{in}$ , c'est à dire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - D(t)x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2 - D(t)x_2 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Comme dans le cas à une espèce, une intégration de (2.1.4) induit l'existence de la solution maximale sur l'intervalle  $[0, \infty[$ .

Notre ensemble d'intérêt sera ici :  $\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \in [0, s_{in}]\}$

Soit  $\phi(t, 0, x_{10}, x_{20})$  le flot associé à (2.1.3), pour lequel  $\phi(0, 0, x_{10}, x_{20}) = (x_{10}, x_{20})$ . On posera  $\pi$  l'application de Poincaré associée à (2.1.3), ie :

$$\pi(x_{10}, x_{20}) = (x_1(T), x_2(T)).$$

L'idée est d'utiliser le théorème du point fixe de Brouwer sur un compact de  $\mathbb{R}_+^2$  qui n'inclue pas les axes d'équations  $x_2 = 0$ , ni  $x_1 = 0$ . S'il existe un point fixe  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  de l'application de Poincaré sur ce compact, alors  $\phi(t, 0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  sera notre candidate pour la preuve de la proposition. A cet effet, nous montrerons d'abord sous quelles conditions les solutions  $(x_1^*(\cdot), 0)$  et  $(0, x_2^*(\cdot))$  seront répulsives (i.e (2.1.3) sera uniformément persistant), puis restreindrons notre ensemble  $\Omega$  d'intérêt à un compact sur lequel il sera pertinent d'appliquer le théorème de Brouwer.

**Stabilité des solutions périodiques** Sur le bord de  $\Omega$ , les solutions périodiques seront  $(x_1^*(\cdot), 0)$  et  $(0, x_2^*(\cdot))$ , et en vertu de la première partie :

$$x_1^*(t) = x_{10} \exp(\int_0^t \mu_1(s_{in} - x_1(\tau)) - D(\tau) d\tau)$$

$$\text{Et } x_2^*(t) = x_{20} \exp(\int_0^t \mu_2(s_{in} - x_2(\tau)) - D(\tau) d\tau)$$

L'étude de la stabilité des deux solutions périodiques fait intervenir les multiplicateurs de Floquet.

**Calcul des multiplicateurs** L'idée est de linéariser notre système (2.1.3) au voisinage des solutions  $(x_1^*(\cdot), 0)$  et  $(0, x_2^*(\cdot))$ .

Pour ce faire, posons  $\chi_1(t) = x_1(t) - x_1^*(t)$  et  $\chi_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t)$ .

Appelons  $f(t, x_1, x_2)$  la dynamique associée au système différentiel (2.1.3).

On écrira la matrice jacobienne de  $f$  par rapport à  $x$  en  $(t, x)$  sous la forme  $\nabla_x f(t, x)$  dont les entrées sont données par :

$$\begin{aligned} j_{11} &= \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D(t) - x_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ j_{12} &= -x_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ j_{21} &= -x_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ j_{22} &= \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D(t) - x_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \end{aligned}$$

si bien que l'équation variationnelle au voisinage de la solution  $(x_1^*(t), 0)$  sera :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi_1 &= \chi_1[\mu_1(s_{in} - x_1^*(t)) - D(t) - x_1^*(t)\mu_1'(s_{in} - x_1^*(t))] - \chi_2[x_1^*(t)\mu_1'(s_{in} - x_1^*(t))] \\ \frac{d}{dt}\chi_2 &= \chi_2[\mu_2(s_{in} - x_1^*(t)) - D(t)] \end{aligned} \quad (*)$$

On peut déduire au voisinage de  $(0, x_2^*(t))$  le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi_1 &= \chi_1[\mu_1(s_{in} - x_2^*(t)) - D(t)] \\ \frac{d}{dt}\chi_2 &= \chi_2[\mu_2(s_{in} - x_2^*(t)) - D(t) - x_2^*(t)\mu_2'(s_{in} - x_2^*(t))] - \chi_1[x_2^*(t)\mu_2'(s_{in} - x_2^*(t))] \end{aligned}$$

Si  $M(t)$  est la matrice variationnelle de l'application de Poincaré, (i.e la matrice jacobienne de l'application de Poincaré  $\pi$  en  $(x_1^*(\cdot), 0)$ ) l'équation variationnelle vérifiée par la matrice fondamentale  $X(t)$  au voisinage de  $(x_1^*(\cdot), 0)$  est :

$$\frac{d}{dt}X(t) = M(t)X(t) \quad (**)$$

Avec pour condition initiale  $X(0) = Id$ . En  $(x_1^*(\cdot), 0)$ ,  $M(t) =$

$$\begin{bmatrix} \mu_1(s_{in} - x_1^*(t)) - D(t) - x_1^*(t)\mu_1'(s_{in} - x_1^*(t)) & -x_1^*(t)\mu_1'(s_{in} - x_1^*(t)) \\ 0 & \mu_2(s_{in} - x_1^*(t)) - D(t) \end{bmatrix}$$

De fait, la matrice fondamentale associée à  $(**)$  pour  $t = T$  est du type :

$$\begin{bmatrix} \exp(\langle m_{11}(t) \rangle_T) & \langle m_{12}(t) \int_0^t m_{22}(\tau) d\tau \int_t^T m_{11}(\tau) d\tau \rangle_T \\ 0 & \exp(\langle m_{22}(t) \rangle_T) \end{bmatrix}$$

(où l'on a posé  $m_{ij}(t)$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  les coefficients de la matrice  $M$ )

Les résultats pour la solution  $(0, x_2^*(\cdot))$  se déduisent directement du cas  $(x_1^*(\cdot), 0)$ . Les valeurs propres des matrices fondamentales en  $(x_1^*(\cdot), 0)$  (respectivement  $(0, x_2^*(\cdot))$ ) donneront les multiplicateurs et exposants de Floquet dont découleront les propriétés de stabilité des solutions  $(x_1^*(\cdot), 0)$ ,  $(0, x_2^*(\cdot))$ .

Ces exposants sont :  $-\frac{1}{T} \int_0^T x_1^*(t)\mu_1'(s_{in} - x_1^*(t))dt$ ,  $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_2(s_{in} - x_1^*(t)) - D(t)dt$   
(respectivement  $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_1(s_{in} - x_2^*(t)) - D(t)dt$ ,  $-\frac{1}{T} \int_0^T x_2^*(t)\mu_2'(s_{in} - x_2^*(t))dt$ )

Alors, si  $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_i(s_{in} - x_j^*(t)) - D(t)dt < 0$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$ , alors les solutions respectives  $(x_i = 0, x_j = x_j^*(\cdot))$  seront asymptotiquement stables. Elles seront instables si  $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_i(s_{in} - x_j^*(t)) - D(t)dt > 0$ .

Nous revenons donc à la preuve : supposons que  $(x_1^*(\cdot), 0)$  et  $(0, x_2^*(\cdot))$  soient instables. Nous voulons utiliser cette propriété pour trouver des réels  $\delta_1, \delta_2 > 0$  suffisamment petits tels que si  $(x_{10}, x_{20}) \geq (\delta_1, \delta_2)$ , alors  $\pi([\delta_1, s_{in}] \times [\delta_2, s_{in}]) \subset [\delta_1, s_{in}] \times [\delta_2, s_{in}]$ .

Pour ce faire, on cherche à montrer que la dynamique (2.1.4) préserve une relation d'ordre de deux solutions périodiques  $x$  et  $y$  pour deux conditions initiales  $x_0$  et  $y_0$  telles que  $x_0 - y_0$  appartienne à un cône  $C$ .

Les relations d'ordre dont nous devons montrer la conservation seront :

- Soit  $x_{10} \geq y_{10}$  &  $x_{20} \geq y_{20} \Rightarrow x_1(t) \geq y_1(t)$  &  $x_2(t) \geq y_2(t) \forall t \geq 0$
- Soit  $x_{10} \geq y_{10}$  &  $x_{20} \leq y_{20} \Rightarrow x_1(t) \geq y_1(t)$  &  $x_2(t) \leq y_2(t) \forall t \geq 0$ .

Dans le cas  $x_{10} \geq y_{10}$ ,  $x_{20} \leq y_{20}$  :

Rappelons au préalable que le système (2.1.4) est de type compétitif, i.e :

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x_1(t), x_2(t)) = -x_j x_i \mu_j'(s_{in} - x_1 - x_2) \leq 0$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ . Nous allons montrer le résultat suivant de conservation d'ordre :

**Lemme 2.3.** Soit  $f : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \ni f(t, x)$  une  $C$ -fonction. On considère l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$ , où pour tout temps  $t > 0$ ,  $x(t) \in C$  sous-ensemble connexe de  $\mathbb{R}^2$ .

Soient deux conditions initiales  $x_0, y_0$  telles que  $x_{10} \geq y_{10}$ ,  $x_{20} \leq y_{20}$ . Alors pour tout temps  $t \geq 0$ ,  $x_1(t) \geq y_1(t)$  et  $x_2(t) \leq y_2(t)$ .

*Démonstration.* La connexité de l'ensemble  $C$  induit les égalités :

$$\begin{aligned} \bullet f_1(t, x_1, x_2) - f_1(t, y_1, y_2) &= \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, \lambda y_1 + (1 - \lambda)x_1, x_2)(x_1 - y_1)d\lambda \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_1, \lambda y_2 + (1 - \lambda)x_2)(x_2 - y_2)d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f_2(t, x_1, x_2) - f_2(t, y_1, y_2) &= \int_0^1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, \lambda y_1 + (1 - \lambda)x_1, x_2)(x_1 - y_1)d\lambda \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x_1, \lambda y_2 + (1 - \lambda)x_2)(x_2 - y_2)d\lambda \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que l'on ait  $x_1(t) < y_1(t)$ ,  $x_2(t) \leq y_2(t)$  sur un intervalle de temps  $[\underline{t}, \bar{t}]$ , avec  $\underline{t} < \bar{t}$ . Appelons  $\tilde{t} = \inf\{t \geq 0 | x_1(t) \leq y_1(t), x_2(t) \leq y_2(t)\}$  (en particulier,  $\tilde{t} < \underline{t}$ ). Pour  $t = \tilde{t}$ , nous aurons :

$$\begin{aligned} x_1(\tilde{t}) &= y_1(\tilde{t}) \\ f_1(\tilde{t}, x_1(\tilde{t}), x_2(\tilde{t})) - f_1(\tilde{t}, y_1(\tilde{t}), y_2(\tilde{t})) &= \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\tilde{t}, x_1(\tilde{t}), (\lambda y_2 + (1 - \lambda)x_2)(\tilde{t}))(x_2 - y_2)(\tilde{t})d\lambda \end{aligned}$$

En vertu des hypothèses formulées sur le système (compétitif) et sur le signe de  $x_2 - y_2$  pour  $t = \tilde{t}$ ,  $f_1(\tilde{t}, x_1(\tilde{t}), x_2(\tilde{t})) - f_1(\tilde{t}, y_1(\tilde{t}), y_2(\tilde{t})) > 0$ . Ce résultat contredit  $x_1(t) < x_2(t)$  sur un intervalle de temps  $[\underline{t}, \bar{t}]$ , avec  $\underline{t} > \tilde{t}$ .  $\square$

Nous montrons de même que l'ordre  $x_2 \leq y_2$  sera donc conservé pour tout temps  $t \geq 0$  si  $x_{20} \leq y_{20}$ ,  $x_{10} \geq y_{10}$ .

Dans le cas où  $x_{10} \geq y_{10}$  et  $x_{20} \geq y_{20}$  : nous allons induire le résultat par une intégration en temps rétrograde. Posons  $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)) = (x_1(T - t), x_2(T - t))$ .

Remarquons d'abord que pour  $i \in \{1, 2\}$  :  $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{x}_i / \partial t}{\partial x_i / \partial t} = -1$ .

$\tilde{x}_1(t)$  et  $\tilde{x}_2(t)$  vérifient le système :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\dot{x}_1(t) = -f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\dot{x}_2(t) = -f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Après changement de variables  $t \rightarrow T - t$ , (2.1.5) se réécrit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= f_1(T - t, \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= f_2(T - t, \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)) \end{aligned}$$

Et comme, pour  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$   $\frac{\partial f_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , le système (2.1.5) est bien de type coopératif.

Ainsi, reprenant les arguments énoncés ci-dessus,  $\tilde{x}_1(0) \geq \tilde{y}_1(0)$ ,  $\tilde{x}_2(0) \geq \tilde{y}_2(0)$  est totalement équivalent à  $\tilde{x}_1(T) = x_{10} \geq y_{10} = \tilde{y}_1(T)$ ,  $\tilde{x}_2(T) = x_{20} \geq y_{20} = \tilde{y}_2(T)$ .

Pour quantifier ces réels  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  : si l'on calcule les vecteurs propres  $v_i = (a_i, b_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  de la matrice jacobienne (par rapport à  $x$ ) de l'application de Poincaré associés aux valeurs propres  $\mu_1(s_{in} - x_1^*) - D(t) - x_1^* \mu_1'(s_{in} - x_1^*)$  et  $\mu_2(s_{in} - x_1^*)$  (sans perte de généralité, nous nous placerons en  $(x_1^*(\cdot), 0)$ ) :

- $v_1 = (1, 0)^T$  est associé à la valeur propre positive  $(\mu_2(s_{in} - x_1^*))$
- Pour  $\mu_1(s_{in} - x_1^*) - D(t) - x_1^* \mu_1'(s_{in} - x_1^*)$ ,  $a_2$  et  $b_2$  sont liés par la relation :

$$a_2 = b_2 \left[ \frac{x_1^* \mu_1'(s_{in} - x_1^*)}{\mu_1(s_{in} - x_1^*) - D(t) - (\mu_2(s_{in} - x_1^*) - D(t)) - x_1^* \mu_1'(s_{in} - x_1^*)} \right]$$

Nous pouvons poser  $b_2 = 1$ . Mais le dénominateur (donc  $a_2$ ) est de signe variable : il est positif pour  $x_1^*$  proche de 0, négatif pour  $x_1^*$  proche de  $s_{in} - \hat{s}$  par exemple, où  $\hat{s}$  est la valeur strictement positive de  $s$  pour laquelle  $\mu_1(s) = \mu_2(s)$ .

Considérons un temps  $t$  tel que, pour  $x_1^*(t)$ ,  $a_2 < 0$ . Si nous perturbons le vecteur  $u = (x_1^*(t), 0)$  suivant le vecteur propre  $v_2$  (on appellera  $w = u + \varepsilon v_2$ , où  $\varepsilon > 0$  est supposé petit) : la préservation de la relation d'ordre nous donne  $u_1 > \pi(w)_1$  et  $u_2 < \pi(w)_2$ .

Nous pouvons alors choisir  $\delta_2 = \pi(w)_2$ .

D'autre part, comme la suite des  $(\pi^n(w))_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et bornée, elle converge vers un  $w^* = \pi(w^*)$ .

En particulier, nous pouvons prendre  $\delta_1 = w_1^*$ , de sorte que l'ensemble  $[\delta_1, s_{in}] \times [\delta_2, s_{in}]$  reste invariant par l'application de Poincaré.

Dans ce cadre, le théorème de Brouwer nous donne  $(x_1^*, x_2^*)$  point fixe de  $\pi$  dans  $[\delta_1, s_{in}] \times [\delta_2, s_{in}]$ .

On pose alors  $(x_1(t), x_2(t), s(t)) = (\phi(t, 0, x_{10}, x_{20}), s_{in} - \phi(t, 0, x_{10}, x_{20}))$  solution périodique de (2.1.3).  $\square$

Aussi, les mêmes arguments que dans le cas à une espèce nous permettent d'étendre le résultat à  $D$  mesurable en temps, par exemple  $D$  continue par morceaux ou  $D \in L^p[0, T]$  quelconque. En particulier, il suffit que la dynamique  $f$  soit une C-fonction (i.e  $t \mapsto f(t, x, D)$  est mesurable sur  $[0, T]$ ,  $x \mapsto f(t, x, D)$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ ) pour obtenir existence et unicité de la solution périodique de (2.1.4) (application du théorème de Cauchy-Lipschitz).

## 2.2 Conditions d'optimalité

Dans toute cette partie, nous considérerons un système périodique (dont nous noterons  $T$  la période) de type chemostat à 2 espèces :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_1(s)x_1 - D(t)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu_2(s)x_2 - D(t)x_2 \\ \dot{s} &= -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + D(s_{in} - s) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Avec donc  $(x_1(T), x_2(T), s(T)) = (x_{10}, x_{20}, s_0) \in ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}] \times [0, s_{in}]$ . Comme nous nous placerons à l'équilibre, nous pouvons nous ramener au système en dimension 2 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - D(t)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2 - D(t)x_2 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

L'intérêt de notre modélisation est la maximisation, en fonction de  $D$ , de l'expression  $\frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) D(t) dt$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Dit autrement, quelle commande peut maximiser la production de l'espèce  $x_i$ , sous la contrainte de la présence de l'espèce  $j$  dans notre bioréacteur? Ces problèmes se rencontrent par exemple, dans des problématiques de type dépollution des eaux usées.

Dans toute la suite, nous conviendrons de  $i = 1$ ,  $j = 2$ . Nous voudrions montrer que pour une commande périodique,  $x_1$  peut dépasser l'optimum  $x_1^*$  pour le critère  $\max x_1 \cdot D$  à  $D$  constant (dont le calcul fut effectué dans la partie 1).

En toute généralité,  $D \in \mathcal{U}$  ensemble des applications mesurables bornées (i.e  $u(t) \in U \forall t \geq 0$  pour  $U$  un compact de  $\mathbb{R}$ ), muni de la norme  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Nous imposons ici que les fonctions de  $\mathcal{U}$  sont  $T$ -périodiques.

Notre critère sera donc ici :

$$\max_{D(\cdot)} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) D(t) dt \quad (2.2.3)$$

(c'est un problème de type Lagrange).

Remarquons que nous pouvons nous ramener à un problème de type Mayer en 3 dimensions en posant  $x_0$  la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -\frac{1}{T} x_1 D \\ \dot{x}_1 &= \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - D(t)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2 - D(t)x_2 \end{aligned}$$

Pour la condition initiale  $(x_0(0), x_1(0), x_2(0)) = (0, x_{10}, x_{20})$ . La contrainte devient  $-\min_{D(\cdot)} x_0(T, D)$ . La proposition suivante nous donne un résultat d'existence d'une commande optimale, à  $T$  fixé.

**Proposition 2.4.** *On considère un système d'équations différentielles  $\dot{x} = f(t, x, D)$ , pour une contrainte d'optimisation  $\min_{D(\cdot)} x_0(T, D)$ . Sous les hypothèses :*

- La dynamique  $f$  est une  $C$ -fonction, continue par rapport aux variables  $(t, x, D)$  et à croissance au plus linéaire en  $x$ .
  - $x_0$  est continue.
  - L'ensemble des  $x(T, D)$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  sera égal à 2 pour notre modèle).
  - L'ensemble des commandes admissibles  $U$  est compact. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $U = [0, D_{max}]$ .
  - Les ensembles  $\{(f_0, f) | f_0 < x_0(T, \omega), f(t, x, \omega) = \dot{x}\}$ ,  $\omega \in [0, D_{max}]$  sont convexes.
- Alors, s'il existe une solution à (2.2.2), il existe une commande optimale au problème (2.2.3).

**Remarque** Pour notre modèle, l'ensemble des commandes admissibles est inclus dans le compact  $[0, D_{max}]$ , où  $D_{max} = (\mu_{2max} + \mu_{1max})/2$  par exemple, si nous souhaitons éviter le lessivage de notre bio-réacteur. De plus,  $(x_1(T), x_2(T)) = (x_{10}, x_{20})$  est un singleton donc fermé dans  $]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}]$ . Nous pouvons donc construire une commande optimale pour le problème (2.2.1) sous la contrainte (2.2.3).

*Démonstration.* Comme l'ensemble des trajectoires reliant  $(x_{10}, x_{20})$  à  $(x_1(T), x_2(T))$  est non-vidé, nous pouvons nous donner une suite de trajectoires  $x_n$  (chacune associée à une commande  $D_n$ ) telles que  $(x_{n1}(T_n), x_{n2}(T_n)) = (x_{n10}, x_{n20})$  et  $x_{n0}(T_n, D_n) \rightarrow \min_D x_0(T, D)$ , pour  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de temps de  $[0, T]$ .

Comme la suite des  $x_n$  est uniformément bornée, la suite des  $\dot{x}_n$  est uniformément Lipschitz continue. Donc en vertu du théorème d'Ascoli, nous pouvons supposer (quitte à extraire des sous-suites) que  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  et que  $\{x_n\}$  converge vers une trajectoire  $x^*$  associée à une commande  $D^*$ .

(Nous noterons que  $x_0^*(0, D^*) = 0$ )

Il nous reste enfin à montrer que la trajectoire  $x^*$  (ainsi que la commande  $D^*$  de facto) est optimale. C'est une conséquence de  $x_{n0}(T_n, D_n) \rightarrow \min_D x_0(T, D)$ , puisque  $x_0^*(T, D^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n0}(T_n, D_n)$ .  $\square$

Pour un temps terminal  $T$  variable, une preuve générale du résultat est donné dans [8].

### 2.2.1 Le principe de Pontryagin

Il s'agit tout d'abord dans ce paragraphe de prouver un principe de type Pontryagin pour notre système (2.2.1), afin de déterminer une commande  $D$  optimale à période  $T$  fixée. Dans un deuxième temps, nous chercherons à optimiser la période  $T$  qui maximise  $\langle (x_1.D)(t) \rangle_T$ .

**Définition** On posera :

$$H : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x(t), p(t), p^0, D(t)) \mapsto (p(t), f(t, x(t), D(t))) - \frac{1}{T} p^0 x_1(t) D(t)$$

le hamiltonien associé au problème (2.2.1), où  $(\cdot)$  est le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$  et  $p^0 \in \mathbb{R}$ .

Dans toute la suite, nous poserons  $(x_{10}^*, x_{20}^*) = x^*(0) = x^*(T) \in ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}]$ .

Nous voulons prouver la proposition suivante :

**Proposition 2.5.** *Si la commande  $D \in \mathcal{U}$  est optimale sur  $[0, T]$ , il existe une application absolument continue  $p(\cdot) : t \in [0, T] \mapsto p(t) \in \mathbb{R}^2$  appelée vecteur adjoint et un nombre réel  $p^0 \leq 0$  tels que :*

$$\begin{aligned} - \dot{x}_1^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_1}(t, x^*(t), p(t), p^0, D) = x_1^* \mu_1 (s_{in} - x_1^* - x_2^*) - x_1^* D \\ \dot{x}_2^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_2}(t, x^*(t), p(t), p^0, D) = x_2^* \mu_2 (s_{in} - x_1^* - x_2^*) - x_2^* D \\ - \dot{p}_1(t) &= - \frac{\partial H}{\partial x_1}(t, x^*(t), p(t), p^0, D) = -\mu_1 (s_{in} - x_1^* - x_2^*) p_1 + D p_1 \\ &\quad + x_1^* \mu_1' (s_{in} - x_1^* - x_2^*) p_1 + x_2^* \mu_2' (s_{in} - x_1^* - x_2^*) p_2 - \frac{1}{T} D \\ \dot{p}_2(t) &= - \frac{\partial H}{\partial x_2}(t, x^*(t), p(t), p^0, D) = -\mu_2 (s_{in} - x_1^* - x_2^*) p_2 + D p_2 \\ &\quad + x_2^* \mu_2' (s_{in} - x_1^* - x_2^*) p_2 + x_1^* \mu_1' (s_{in} - x_1^* - x_2^*) p_1 \\ - H(t, x^*(t), p(t), p^0, D) &= \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*(t), p(t), p^0, u) \end{aligned}$$

$$- p(0) = p(T)$$

Remarquons déjà que notre problème de Lagrange peut s'écrire comme un problème de Mayer en  $n + 1$  ( $= 3$  ici) dimensions, où l'on posera  $x_0$  la solution de l'équation différentielle :  $\frac{d}{dt}x_0 = -\frac{1}{T^*}x_1D$ , avec  $x_0(0) = 0$ .

La preuve pour un problème de Mayer avec temps terminal  $T^*$  fixé et point terminal  $x(T^*) = x_0$  est donnée en annexe.

Si la période  $T$  est libre, nous pouvons montrer un résultat similaire (cf [4]), avec la condition supplémentaire :  $\max_{D(\cdot) \in \mathcal{U}} H(t, x(t), p(t), p^0, D) = 0$ .

### 2.2.2 Application du principe du maximum

Dans notre exemple,  $x(0) = x_0 = x(T)$  donc il n'y a pas d'autre condition de transversalité.

Dans la suite nous poserons  $p^0 = -1$ , de sorte que le hamiltonien s'exprime par :

$$H(t, x, p, p^0, D) = p_1x_1\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2x_2\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) + D(-p_1x_1 - p_2x_2 + \frac{1}{T}x_1).$$

$D$  doit être une commande admissible, et doit donc prendre ses valeurs dans un intervalle  $[0, \bar{D}]$ . D'après la proposition 2.2, nous pourrions par exemple poser  $\bar{D} = (\mu_1(s_{in} - x_2^*) + \mu_2(s_{in} - x_1^*))/2$  pour respecter la contrainte d'existence de la solution périodique.

Pour le calcul du vecteur adjoint,  $p_1$  et  $p_2$  obéissent au système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -[\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D - x_1\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_1 - \frac{1}{T}D \\ &\quad + [x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_2 \\ \dot{p}_2 &= [x_1\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_1 - [\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D - x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_2 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Pour la condition  $p(0) = p(T)$ .

Aussi, nous poserons  $\phi(x_1, x_2, p_1, p_2) = -p_1x_1 - p_2x_2 + \frac{1}{T}x_1$  la fonction de commutation de la commande. L'intérêt de cette fonction réside dans la détermination de la loi de commande, puisque pour  $\{t|\phi(t) < 0\}$  nous voudrions  $D(t) \equiv 0$ , et pour  $\{t|\phi(t) > 0\}$ ,  $D(t) \equiv \bar{D}$ .

Si  $\phi(t) = 0$ , nous aurons 2 possibilités : soit 1)  $\dot{\phi} = 0$  et  $\phi$  s'annule sur un intervalle (il s'agit d'arcs singuliers), soit 2)  $\dot{\phi} \neq 0$  et la commande change d'une valeur extrême à l'autre (on parle de points de commutation).

Dans le premier cas nous ne pourrions caractériser une unique loi de commande sur les arcs singuliers.

On calcule :  $\dot{\phi}(x_1, x_2, p_1, p_2) =$

$$\begin{aligned} &- p_1(\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - Dx_1) \\ &+ \{\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D - x_1\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)\}p_1 + \frac{1}{T}D - [x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_2\}x_1 \\ &- p_2(\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2 - Dx_2) \\ &+ \{-[x_1\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_1 + [\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D - x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)]p_2\}x_2 \\ &+ \frac{1}{T}\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - \frac{1}{T}Dx_1 \\ &= -p_1x_1^2(\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)) - p_2x_1x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ &- p_1x_1x_2\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) - p_2x_2^2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) + \frac{1}{T}\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 \\ &= -[p_1x_1\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)][x_1 + x_2] + \frac{1}{T}\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 \end{aligned}$$

### 2.2.3 Calcul des arcs singuliers

Nous recherchons ici des solutions "acceptables" de  $\phi = 0$ ,  $\frac{d^n}{dt^n}\phi = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, nous voulons savoir si la commande optimale telle que donnée par le principe de Pontryagin nous impose de rester

un certain temps sur un arc singulier.

Le PMP nous donne le système d'équations vérifiées par les quantités  $p_i x_i$  :

$$\begin{aligned} -p_1 x_1 - p_2 x_2 + \frac{1}{T} x_1 &= 0 \\ -[p_1 x_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2 x_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)][x_1 + x_2] &= -\frac{1}{T} \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Et la conservation du hamiltonien le long de la trajectoire  $(x_1(t), x_2(t))$  :

$$p_1 x_1 \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2 x_2 \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) = \text{cste.}$$

Comme  $\dot{\phi}$  ne dépend pas de  $D$ , nous ne pouvons pas inférer de condition sur la commande associée à un arc singulier. Pour induire un résultat plus précis concernant  $\{D \mid \phi \equiv 0\}$  sur un ensemble de mesure de Lebesgue non-nulle, il nous faut calculer  $\ddot{\phi}$  :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -[\dot{p}_1 x_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) + p_1 \dot{x}_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) - p_1 x_1 \dot{x}_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ &\quad - p_1 x_1 \dot{x}_2 \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) + \dot{p}_2 x_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2 \dot{x}_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ &\quad - p_2 x_2 \dot{x}_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) - p_2 x_2 \dot{x}_2 \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)][x_1 + x_2] \\ &\quad - [p_1 x_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2 x_2 \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)][(\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_1 \\ &\quad + (\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_2] + \frac{1}{T} \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)(\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_1 \\ &\quad + \frac{1}{T} x_1 \dot{x}_1 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) + \frac{1}{T} x_1 \dot{x}_2 \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ &= \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 p_1 + \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_1 \\ &\quad - D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 p_1 - D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_1 - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)^2 x_1^3 p_1 \\ &\quad - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2)^2 x_1^2 x_2 p_1 + \frac{1}{T} D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 + \frac{1}{T} D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 \\ &\quad - \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_2 x_1^2 p_2 - \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_2 \\ &\quad - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 p_1 + D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 p_1 \\ &\quad - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_1 + D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_1 \\ &\quad + \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^3 p_1 - D \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^3 p_1 \\ &\quad + \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_1 - D \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_1 \\ &\quad + \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_1 - D \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_1 \\ &\quad + \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_1 - D \mu_1''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_1 \\ &\quad - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_1 - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^2 x_1 p_1 \\ &\quad + \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_2 + \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^2 p_2 \\ &\quad - D \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_2 - D \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^2 p_2 \\ &\quad - \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)^2 x_1 x_2^2 p_2 - \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)^2 x_2^3 p_2 \\ &\quad - \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_2 + D \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2 p_2 \\ &\quad - \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^2 p_2 + D \mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^2 p_2 \\ &\quad + \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_2 - D \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 x_2 p_2 \\ &\quad + \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_2 - D \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_2 \\ &\quad + \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_2 - D \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) x_1 x_2^2 p_2 \\ &\quad + \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^3 p_2 - D \mu_2''(s_{in} - x_1 - x_2) x_2^3 p_2 \\ &\quad - \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 p_1 + D \mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) x_1^2 p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_1x_2p_1 + D\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1x_2p_1 \\
& -\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_1x_2p_2 + D\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_1x_2p_2 \\
& -\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2^2p_2 + D\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)x_2^2p_2 \\
& + \frac{1}{T}\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)^2x_1 - \frac{1}{T}D\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1 - \frac{1}{T}\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1^2 \\
& + \frac{1}{T}D\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)x_1^2
\end{aligned}$$

Après simplification par application de (2.2.5) :

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} = & -p_1x_1^2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) + p_1x_1^3\mu''_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + p_1x_1^2x_2\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) - p_2x_1x_2\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + p_2x_1^2x_2\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2x_1x_2^2\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& - p_1x_1x_2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) + p_1x_1^2x_2\mu''_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + p_1x_1x_2^2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - p_2x_2^2\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + p_2x_1x_2^2\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2x_2^3\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + \frac{1}{T}x_1\mu_1^2(s_{in} - x_1 - x_2) - \frac{2}{T}x_1^2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& - \frac{1}{T}x_1x_2\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) - \frac{1}{T}x_1x_2\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + D\{-p_1x_1^3\mu''_1(s_{in} - x_1 - x_2) - 2p_1x_1^2x_2\mu''_1(s_{in} - x_1 - x_2) - p_2x_1^2x_2\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& - 2p_2x_1x_2^2\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2) - p_1x_1x_2^2\mu''_1(s_{in} - x_1 - x_2) - p_2x_2^3\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& + \frac{2}{T}x_1^2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) + \frac{2}{T}x_1x_2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\} = 0
\end{aligned}$$

Nous introduisons les quantités intermédiaires :  $\alpha = p_1x_1\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2x_2\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)$  et  $\beta = p_1x_1\mu''_1(s_{in} - x_1 - x_2) + p_2x_2\mu''_2(s_{in} - x_1 - x_2)$  pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} = & \alpha(x_1\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) + x_2\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)) \\
& + \beta(x_1^2\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) + x_2^2\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) + x_1x_2\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) + x_1x_2\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)) \\
& + \frac{1}{T}x_1\mu_1^2(s_{in} - x_1 - x_2) - \frac{2}{T}x_1^2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& - \frac{1}{T}x_1x_2\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) - \frac{1}{T}x_1x_2\mu'_2(s_{in} - x_1 - x_2)\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) \\
& - D\beta(x_1 + x_2)^2 + \frac{2}{T}D(x_1^2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2) + x_1x_2\mu'_1(s_{in} - x_1 - x_2))
\end{aligned}$$

$\ddot{\phi}$  est de la forme  $A + DB$  où la condition de Clebsch-Legendre (i.e la positivité du hessien du hamiltonien le long de la trajectoire optimale) nous impose  $B > 0$ . Ainsi donc :

$$D_{arcsingulier} = -\frac{A}{B}.$$

Il s'agit enfin de vérifier que  $-\frac{A}{B}$  correspond à une valeur acceptable de  $D$ , i.e  $-\frac{A}{B} \in [0, D_{max}]$ . Ce résultat est encore une piste de recherche à l'heure actuelle...



### 3 PROBLEME DE COMMANDE HYBRIDE : CALCUL NUMERIQUE ET OPTIMISATION

#### 3.1 Cadre

Nous nous consacrerons au système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_1 = f_1(t, x, D) \\ \dot{x}_2 &= (\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_2 = f_2(t, x, D)\end{aligned}$$

Pour  $D \in \{D_{min}, D_{max}\}$  mesurable en temps,  $x_1, x_2 \in ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}]$ .

On suppose que les courbes de croissance de  $x_1$  et  $x_2$  sont de type Monod, et s'intersectent en  $\hat{s}$ . On supposera aussi  $\mu_1(s) < \mu_2(s) \forall s \in ]0, \hat{s}]$ ,  $\mu_1(s) > \mu_2(s) \forall s \in ]\hat{s}, s_{in}]$ . Nous ferons aussi l'hypothèse  $\hat{s} > s_{in} - x_1^*$ .

On pose  $K$  l'ensemble  $\{(x_1, x_2) | x_1 > x_1^*\}$ , où  $x_1^* = \underset{D \text{ constante}, x_2 \equiv 0}{\operatorname{argmax}} (x_1, D)$ .

Enfin, la condition suivante est imposée sur  $D_{min}$  et  $D_{max}$  :  $0 < D_{min} < \mu_1(\hat{s}) < D_{max} < \mu_1(s_{in})$ .

Nous étudierons dans cette partie 2 problèmes d'optimisation :  $\inf_u \int_0^T \mathbf{1}_{K^c}(x_1(t)) dt$  et  $\sup_u \int_0^T x_1 \cdot D dt$ .

Nous pouvons montrer (cf [7]) qu'aucune commande constante n'est optimale pour le critère de rendement  $\frac{1}{T} \int_0^T x_1 \cdot D dt = \bar{x}_1 D$ , où l'on a posé  $\bar{x}_1$  la valeur à l'équilibre de  $x_1$  associée à une comande  $D$  constante.

En effet, nous déduisons de la partie 1 que pour  $D > \mu_1(\hat{s})$ ,  $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} s_{in} - \mu_1^{-1}(D) < s_{in} - \hat{s} < x_1^*$ , tandis que si  $D < \mu_1(\hat{s})$ ,  $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

La proposition suivante vise à étendre ce résultat à une commande mesurable :

**Proposition 3.1.** *Pour toute commande  $D$  mesurable bornée, sous les hypothèses :*

- Pour  $s \in ]0, \hat{s}]$ ,  $\mu_1(s) < \mu_2(s)$ . Pour  $s \in ]\hat{s}, s_{in}]$ ,  $\mu_1(s) > \mu_2(s)$ .  $\mu_1(\hat{s}) = \mu_2(\hat{s})$ .
- $0 < D_{min} < \mu_1(\hat{s}) < D_{max} < \mu_1(s_{in})$
- $s_{in} - x_1^* < \hat{s}$ .

*Pour toute condition initiale  $(x_{10}, x_{20}) \in ]0, s_{in}] \times ]0, s_{in}]$ , il n'existe pas de temps  $T > 0$  tel que  $x_1(t) \geq x_1^* \forall t \geq T$ .*

*Démonstration.* Nous débutons la preuve par un lemme intermédiaire :

**Lemme 3.2.** *Il existe un temps  $t_0 \geq 0$  et des réels  $0 < \underline{s} < \bar{s} < \hat{s}$  tels que  $\forall t \geq t_0$ ,  $s(t) \in [\underline{s}, \bar{s}]$ .*

*Démonstration.* En effet, la borne supérieure est évidemment donnée par  $s_{in} - x_1^*$  par hypothèse.

Quant à la borne inférieure, nous remarquons que pour  $s = 0$ ,  $\dot{s} = D s_{in} > \alpha > 0 \forall D \in \{D_{min}, D_{max}\}$ , où  $\alpha$  est un réel positif suffisamment petit.

Nécessairement, par continuité de  $s(t)$ , il existe une valeur  $\delta$  de  $s$  pour laquelle  $\forall s \geq \delta$ ,  $\dot{s} > \frac{1}{2}\alpha$ .

Nous avons 2 possibilités : soit  $s_0 \geq \delta$ , alors  $s(t) > \delta \forall t > 0$  et on peut prendre  $\underline{s} = s_0$ . Soit  $s_0 < \delta$ , et il existera un temps  $\tilde{t} > 0$  tel que  $s(t) > s_0 \exp(\frac{1}{2}\alpha t) > \delta \forall t > \tilde{t}$ , en raison de la stricte positivité de  $\dot{s}$  au voisinage de 0. On peut donc choisir  $\underline{s} = s(\tilde{t})$   $\square$

Supposons par l'absurde  $x_1 \geq x_1^* \forall t \geq T$ .

Considérons d'abord la grandeur  $p = \frac{x_1}{x_2}$ , qui obéit à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{\dot{x}_1}{x_2} - \frac{x_1 \dot{x}_2}{x_2^2} = \frac{1}{x_2} [(\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_1 - x_1(\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D)] \\ &= p[\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - \mu_2(s_{in} - x_1 - x_2)]\end{aligned}$$

D'autre part, comme par hypothèse,  $x_1 \geq x_1^*$  et  $x_2 > 0 \forall t$ , nécessairement  $s < s_{in} - x_1^* < \hat{s}$  compte tenu de l'énoncé. En particulier, on peut trouver un réel  $\bar{s} < \hat{s}$  tel que  $s < \bar{s} \forall t \geq T$

Il existe donc un réel  $\alpha < 0$  tel que, pour tout temps  $t > T$ ,  $\dot{p} < \alpha p$ . Donc  $p(t) < \frac{x_1(T)}{x_2(T)} \exp(\alpha(t-T)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .  
 Donc il existe un temps  $\tilde{t}$  tel que,  $\forall t > \tilde{t}$ ,  $x_1(t) < x_1^*$ , ce qui contredit  $x_1(t) > x_1^* \forall t \geq T$ .  $\square$

Notre objectif est donc de déterminer une loi de commande périodique pour laquelle :

- le seuil  $x_1^*$  peut être atteint et dépassé le plus longtemps possible.
- ou  $\langle x_1 D \rangle_T$  est aussi proche que possible de la valeur en l'absence de  $x_2$ .

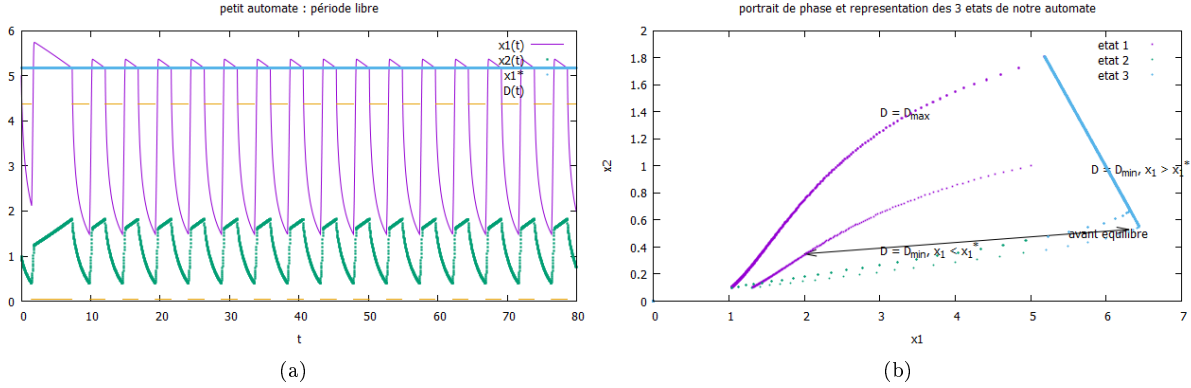


FIGURE 5 – (a) Simulation (par des fonctions de Monod) d’une commande périodique pour laquelle  $x_1$  dépasse sur un ensemble de mesure non-nulle la solution  $x$  à l’équilibre pour le chemostat à une espèce. Ici,  $\mu_{1max} = 5$ ,  $\mu_{2max} = 4$ ,  $K1 = 1.$ ,  $K(2) = 0.2$ . (b) Représentation dans le plan de phase : la trajectoire  $(x_1(\cdot), x_2(\cdot))$  converge rapidement (au bout d’une période) vers un motif périodique.

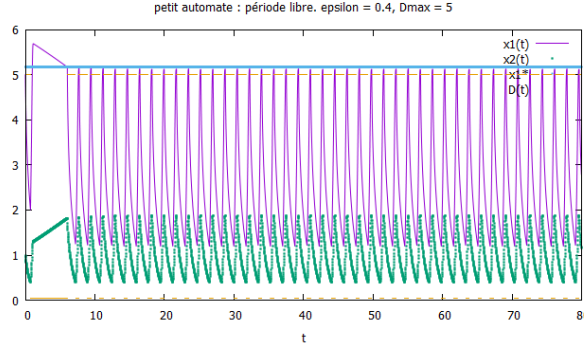


FIGURE 6 –  $\mu_{1max}$  n’est pas une valeur admissible de  $D_{max}$  : le lessivage de  $x_1$  l’empêche de franchir le seuil  $x_1^*$ .

### 3.2 Résultats d’existence

L’hypothèse  $0 < D_{min} < \mu_1(\hat{s}) < D_{max} < \mu_1(s_{in})$  nous impose de restreindre les intervalles de définition de  $D_{min}$  (respectivement  $D_{max}$ ) à des sous-ensembles compacts de  $]0, \mu_1(\hat{s})[$  (respectivement  $]\mu_1(\hat{s}), \mu_1(s_{in})[$ ). Soit  $\varepsilon_0$  un réel petit (par exemple  $10^{-3}$ ) et considérons  $D_{min} \in [\varepsilon_0, \mu_1(\hat{s}) - \varepsilon_0]$ ,  $D_{max} \in [\mu_1(\hat{s}) + \varepsilon_0, \mu_1(s_{in}) - \varepsilon_0]$ .

Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour une condition initiale  $(t_0, x_{10}, x_{20})$  (nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $t_0 = 0$  et  $x_{10} = x_1^*$ ),  $D(0) = D_{max}$  et  $x_{20} > \varepsilon$  (où  $\varepsilon > 0$  est un seuil

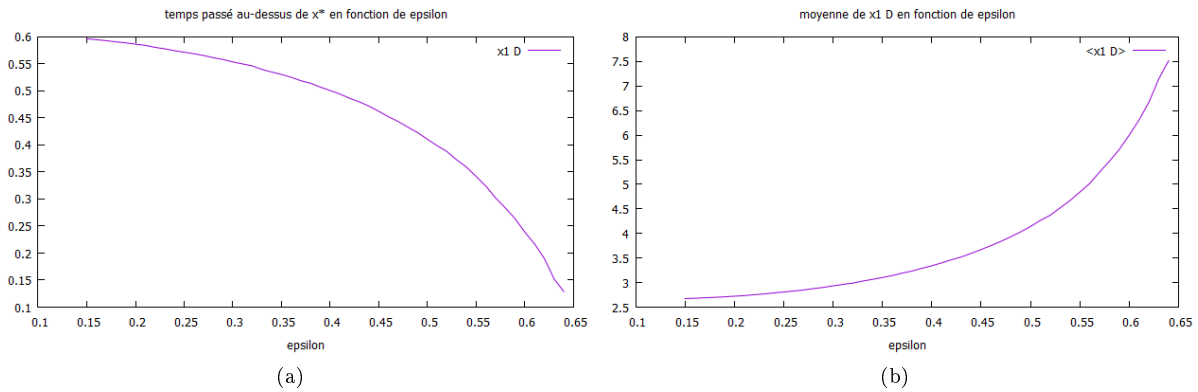


FIGURE 7 – résultats de l'application d'une commande périodique, pour un système de type chemostat à 2 espèces. Etude du rendement de  $x_1.D$  et du temps de crise pour  $\varepsilon \geq 0.15$

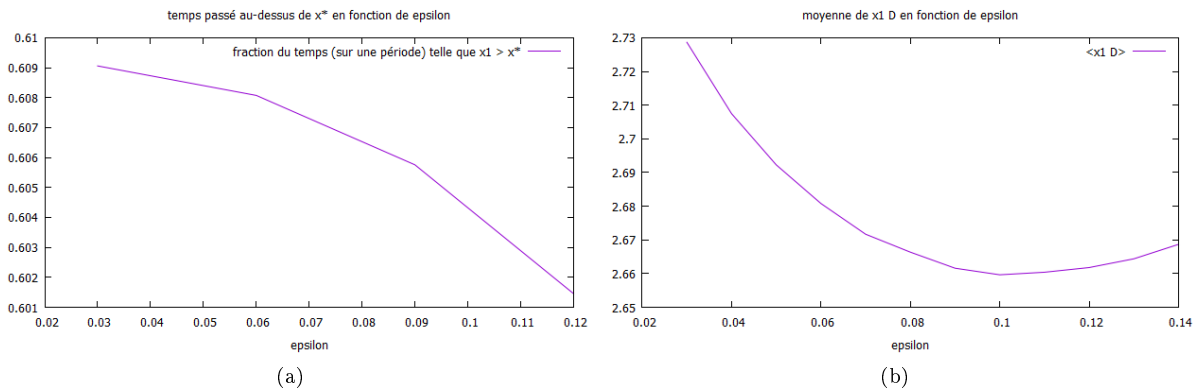


FIGURE 8 – Pour  $\varepsilon \leq 0.15$ , nous agrandissons l'échelle

pour lequel nous changerons la valeur de la commande, comme nous le verrons ci-dessous), se répète le motif périodique suivant :

- $D = D_{max}$  jusqu'en un temps  $t_1 = \inf\{t > 0 | x_2(t) \leq \varepsilon\}$ .
- $D = D_{min}$  et  $x_1$  croît jusqu'à atteindre  $x_1^*$  en un temps  $t_2 = \inf\{t > t_1 | x_1(t) \geq x_1^*\}$
- $D = D_{min}$  et  $x_1$  atteint son maximum ( $> x_1^*$ ), puis décroît jusqu'en un temps  $t_3 = \inf\{t > t_2 | x_2(t) \leq x_1^*\}$

Dans cette partie, nous choisirons pour commande hybride :

$\mathbf{D}(x_1, x_2) =$

- $D_{max}$  si  $x_1 < x_1^*$ ,  $\dot{x}_1 < 0$  et  $x_2 > \varepsilon$
- $D_{min}$  si  $x_2 \leq \varepsilon$
- $D_{min}$  si  $x_2 > \varepsilon$  et  $x_1 \leq x_1^*$  et  $\dot{x}_1 > 0$
- $D_{min}$  si  $x_1 > x_1^*$ ,  $x_2 > \varepsilon$
- $D_{max}$  si  $x_1 = x_1^*$ ,  $x_2 > \varepsilon$  et  $\dot{x}_1 < 0$ .

Ce rétro-contrôle est exhaustif compte tenu de la nature de notre motif périodique.

Nous pouvons montrer la proposition :

**Proposition 3.3.** *Pour toute condition initiale  $(x_{10}, x_{20}) \in ]0, s_{in}[ \times ]0, s_{in}[$ , il existe des constantes  $D_{min} \in$*

$[\varepsilon_0, \mu_1(\hat{s}) - \varepsilon_0]$ ,  $D_{max} \in [\mu_1(\hat{s}) + \varepsilon_0, \mu_1(s_{in}) - \varepsilon_0]$ , et il existe  $\tilde{\varepsilon}$  suffisamment petit tel que,  $\forall \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$ , il existe une solution périodique du système différentiel avec commande  $\mathbf{D}$ .

*Démonstration.*

En vertu des résultats de la partie 1 à propos du chemostat à 2 espèces avec commande constante,  $(x_1, x_2) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (s_{in} - \mu_1^{-1}(D_{max}), 0)$  donc il existe un temps fini  $t_1 > 0$  tel que  $x_2(t_1) = \varepsilon$  (de toute évidence, l'intersection de la trajectoire  $x_2(t)$  avec le seuil  $\varepsilon$  ne peut être tangente, car  $x_2$  ne peut être égal à  $\varepsilon$  à l'équilibre).

Partant de  $t_1$ ,  $\mathbf{D}$  prend la valeur  $D_{min}$  et  $x_2(t_1) = \varepsilon$ . Nous savons de la partie consacrée au chemostat à une espèce avec commande constante que si  $x_2$  était égal à 0,  $x_1$  convergerait vers  $s_{in} - \mu_1^{-1}(D_{min})$  que l'on a supposée strictement plus grande que  $x_1^*$ . Donc il existe un temps  $\bar{t} > t_1$  et un réel  $\alpha > 0$  tels que  $x_1(\bar{t}) \geq x_1^* + \alpha$ .

Nous pouvons donc induire de la propriété de continuité des solutions par rapport aux conditions initiales qu'il existe un  $\delta$  suffisamment petit tel que, si  $x_2(t) \leq \delta$  pour  $t > t_1$ , il existera un temps  $t_2 > t_1$  tel que  $x_1(t_2) \geq x_1^*$ , et un temps  $\bar{t} > t_2$  tel que  $x_1(\bar{t}) > x_1^* + \alpha$ . En particulier, il existe un  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que, si  $x_2(t_1) < \tilde{\varepsilon}$ , alors  $x_2(t_2) < \delta$ .

Ainsi partant de la condition initiale  $x_2(t_1) = \varepsilon$ ,  $x_1(t_1) \in ]0, x_1^*[$ , il existera un temps  $t_2 > t_1$  tel que  $x_1(t_2) = x_1^*$ .

Enfin, pour une condition initiale  $x_1(t_2) = x_1^*$  et  $x_2(t_2) > \varepsilon$ ,  $x_1$  va atteindre son maximum ( $> x_1^* + \alpha$ ) en un temps  $\bar{t}$ , puis décroître. Supposons par l'absurde que pour tout  $t > t_2$ ,  $x_1(t)$  reste supérieur à  $x_1^*$ . Alors  $(\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t), \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t))$  serait un état d'équilibre de notre chemostat à 2 espèces à commande constante  $D_{min}$ . Or le seul état d'équilibre est  $(0, s_{in} - \mu_2^{-1}(D_{min}))$  ce qui contredit notre hypothèse  $x_1(t) > x_1^*$  pour tout  $t > t_2$ .

Donc il existe bien un temps  $t_3 > t_2$  tel que  $x_1(t_3) = x_1^*$ , et l'intersection de la trajectoire  $t \mapsto x_1(t)$  avec la droite d'équation  $t \mapsto x_1^*$  est nécessairement transverse. Nous changeons alors la commande ( $D_{min} \rightarrow D_{max}$ ) en  $t_3$ .

Partant en  $t_2$  de  $x_2(t_2) = x_1^*$ ,  $\mathbf{D} = D_{min} < \mu_1(s^*)$ ,  $x_1$  va décroître et intersecter  $\{(x_1, x_2) | x_1 = x_1^*\}$  de façon transverse.

Il nous reste pour finir à montrer que  $x_2(t_3) - x_2(t_0) = 0$  car  $x_1(t_3) - x_1(t_0) = 0$  et  $\mathbf{D}(t_3) = D_{max}$ .  
Considérons donc l'application

$$\psi_t : ]0, s_{in}[ \rightarrow ]0, s_{in}[$$

$$x_{20} \mapsto x_2(t) = x_{20} + \int_0^t (\mu_2(s_{in} - x_1(\tau) - x_2(\tau)) - D)x_2(\tau) d\tau$$

$\psi_{t_3}$  joue le rôle de l'application de Poincaré  $\pi$  introduite dans la deuxième partie. La différence ici est que le réel  $t_3$  (et donc la période du motif) est libre.

Nous voulons montrer que  $\psi_{t_3}$  possède un point fixe. Pour ce faire, considérons une suite  $(x_{2n}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $x_{2n0} \rightarrow x_{20}$ .

D'une part, la suite des  $(\mu_2(s_{in} - x_1(\cdot) - x_{2n}(\cdot)) - \mathbf{D}(\cdot))x_{2n}(\cdot)$  est continue par morceaux en vertu de la définition de  $\mathbf{D}$ . De plus, pour  $x_{2n0} \rightarrow x_{20}$ , nous pouvons vérifier (de proche en proche) que  $(\mu_2(s_{in} - x_1(t) - x_{2n}(t)) - \mathbf{D}(t))x_{2n}(t)$  converge simplement vers  $(\mu_2(s_{in} - x_1(t) - x_2(t)) - \mathbf{D}(t))x_2(t)$  pour  $t \in [0, t_3]$ .

D'autre part, nous pouvons majorer la dynamique  $(\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D)x_2$  par  $s_{in}\mu_1(s_{in})$

Ce qui nous donne en vertu du théorème de convergence dominée :

$$x_{2n0} + \int_0^{t_3} (\mu_2(s_{in} - x_1(\tau) - x_{2n}(\tau)) - D(\tau))x_{2n}(\tau) d\tau \rightarrow x_{20} + \int_0^{t_3} (\mu_2(s_{in} - x_1(\tau) - x_2(\tau)) - D(\tau))x_2(\tau) d\tau$$

Et donc la continuité de l'application  $\psi_t$ .

Evidemment, si  $x_{20} = s_{in} - x_1^*$  (et donc  $s_0 = 0$ ), nous aurons à l'instant  $t_3$  :  $x_2(t_3) \leq s_{in} - x_1^*$ . Aussi, il existe un  $\varepsilon' > \varepsilon$  tel que  $x_{20} = \varepsilon' \Rightarrow x_2(t_3) \geq \varepsilon'$ . En effet, par hypothèse sur notre commande hybride, à l'instant  $t_1$  où l'on bascule la commande de  $D_{max}$  à  $D_{min}$  :  $\dot{x}_2(t_1) = (D_{max} - D_{min})\varepsilon$ . Puis, pour

$t \in ]t_1, t_3]$ ,  $\dot{x}_2(t)$  est positif, de sorte que  $x_2(t_3) > x_2(t_1)$ . Il suffit donc de choisir  $\varepsilon' > \varepsilon + c(D_{max} - D_{min})\varepsilon$ , où  $c$  est un réel strictement positif suffisamment petit, pour retrouver  $\psi_{t_3}(\varepsilon') > \varepsilon'$ .

En conséquence,  $\psi_t$  envoie le compact  $[\varepsilon', s_{in} - x_1^*]$  dans lui-même. Une application du théorème du point fixe de Brouwer nous donne alors l'existence d'un  $x_{20} \in [\varepsilon', s_{in} - x_1^*]$  tel que  $\psi_t(x_{20}) = x_{20}$ . Dans la suite, nous poserons donc  $T = t_3 - t_0$ .  $\square$

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de convexité de  $x_1$ . Comme :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= (\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - D_{max})^2 - (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)x_1\mu_1'(s_{in} - x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= (\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - D_{max})^2 - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)x_2\mu_2'(s_{in} - x_1 - x_2)\end{aligned}$$

sur  $[t_0, t_1[$ , en particulier,  $\ddot{x}_1$  sera positive si  $\dot{x}_1 + \dot{x}_2$  est négative, autrement dit si  $x_1 + x_2$  décroît sur  $[t_0, t_1[$ . Nous avons par hypothèse :  $\frac{d}{dt}(x_1 + x_2)(t)|_{t=t_0} < 0$ . En effet,  $D_{max} > \mu_2(s_{in} - x_1^*)$  donc  $\frac{d}{dt}x_2|_{t=t_0} < 0$ . De même, comme  $D_{max} > \mu_1(s_{in} - x_1^*)$ ,  $\frac{d}{dt}x_1|_{t=t_0} < 0$ .

Si l'on suppose  $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$  en un temps  $\tilde{t} \in ]t_0, t_1[$ , alors  $x_1 + x_2$  sera constant sur  $\{t | t \geq \tilde{t}\}$ , et  $\dot{x}_1 + \dot{x}_2$  ne pourra changer de signe sur  $[\tilde{t}, t_1[$ .

De la même manière, nous montrons que  $\ddot{x}_1 \leq 0 \Leftrightarrow D = D_{min}$ .

En effet, rappelons d'abord qu'à l'instant  $\tilde{t}$  pour lequel la commande bascule de  $D_{max}$  à  $D_{min}$ , la dynamique est discontinue. D'autre part,  $\ddot{x}_1$  ne peut être strictement positive sur  $\{t > \tilde{t}\}$ , car  $x_1$  est évidemment bornée supérieurement par  $s_{in}$ .

Ainsi,  $\ddot{x}_1$  est soit strictement négative, soit change de signe sur  $\{t > \tilde{t}\}$ . Dans ce dernier cas,  $\dot{x}_1$  admettrait son maximum en un temps  $T > \tilde{t}$ , et en particulier  $\dot{x}_1(T) > \dot{x}_1(\tilde{t})$ , ce qui est absurde compte tenu de la Lipschitz-continuité de la dynamique sur  $\{t > \tilde{t}\}$ .

Donc  $D = D_{min} \Leftrightarrow x_1$  est concave (strictement) sur  $\{t | D(t) = D_{min}\}$ .

Nous voulons enfin trouver une borne uniforme sur  $\varepsilon$  qui nous assure l'existence du motif périodique. Par exemple, si  $\varepsilon > s_{in} - x_1^*$ , il n'existera évidemment aucun temps  $t$  tel que  $x_1(t) \geq x_1^*$ . Il sera bien sûr indispensable d'induire une meilleure borne sur  $\varepsilon$  pour conclure quant au résultat d'existence. L'étude de ces résultats reste du domaine de la recherche...

Enfin, la détermination d'une commande optimale pour les critères de temps de crise et rendement de  $x_1 D$  reste là aussi inachevée. Les simulations numériques (figure 10) nous donnent néanmoins l'intuition du résultat, faute de mieux...

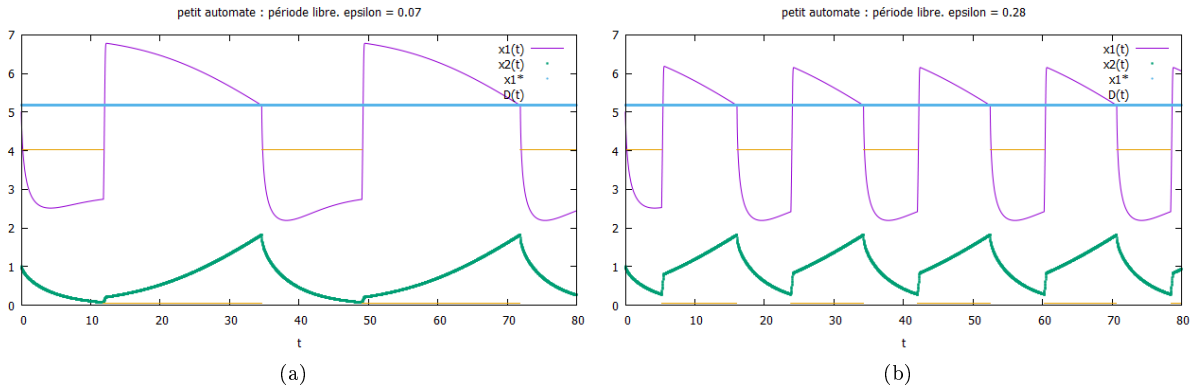
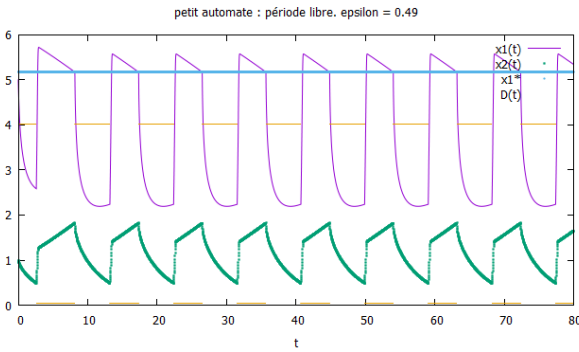
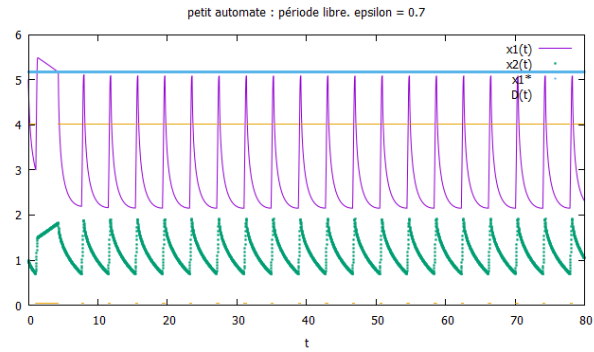


FIGURE 9 – Influence de différents paramètres sur le motif périodique obtenu via la commande périodique avec mémoire  $\mathbf{D}$  :  $\varepsilon = 0.07, 0.28$

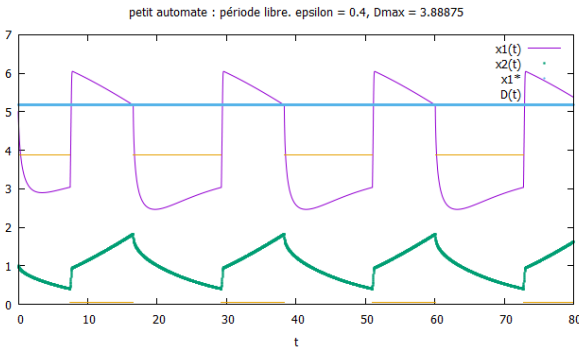


(a)

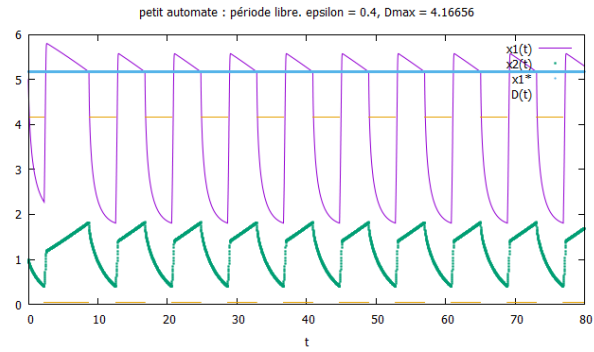


(b)

FIGURE 10 –  $\varepsilon = 0.49, 0.7$ . On constate que pour  $\varepsilon = 0.7$ ,  $x_1$  ne passe plus le seuil  $x_1^*$ , la valeur de  $\min_{nT \leq t \leq (n+1)T} x_2$  étant trop grande

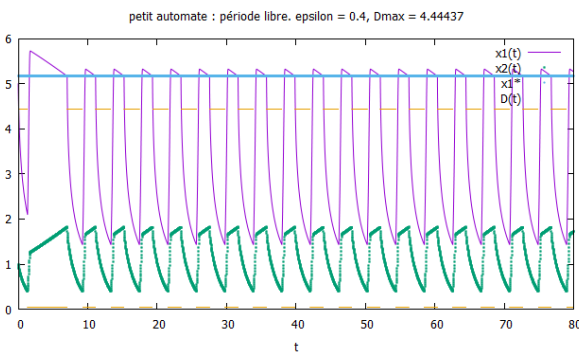


(a)

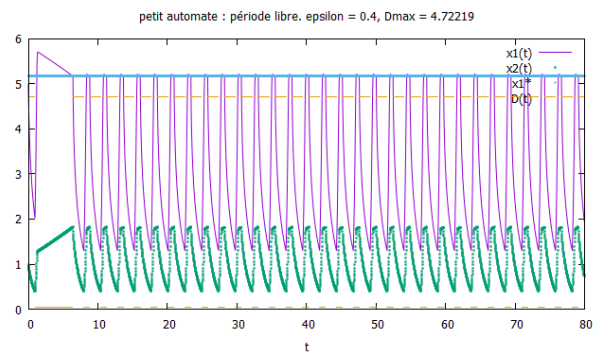


(b)

FIGURE 11 – Influence du paramètre  $D_{max}$  (a)  $D_{max} = 3.88875$ , (b)  $D_{max} = 4.16656$



(a)



(b)

FIGURE 12 – (a)  $D_{max} = 4.44437$ , (b)  $D_{max} = 4.72219$

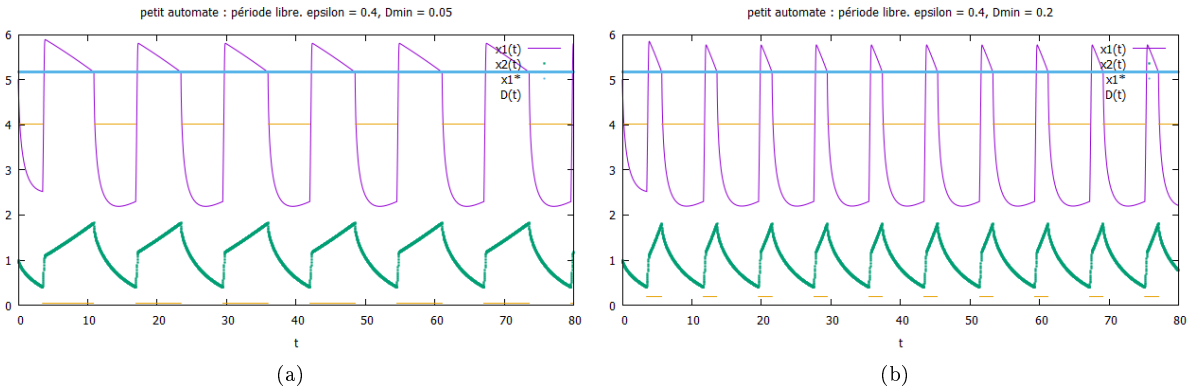


FIGURE 13 – Influence du paramètre  $D_{min}$  (a)  $D_{min} = 0.05$ , (b)  $D_{min} = 0.2$

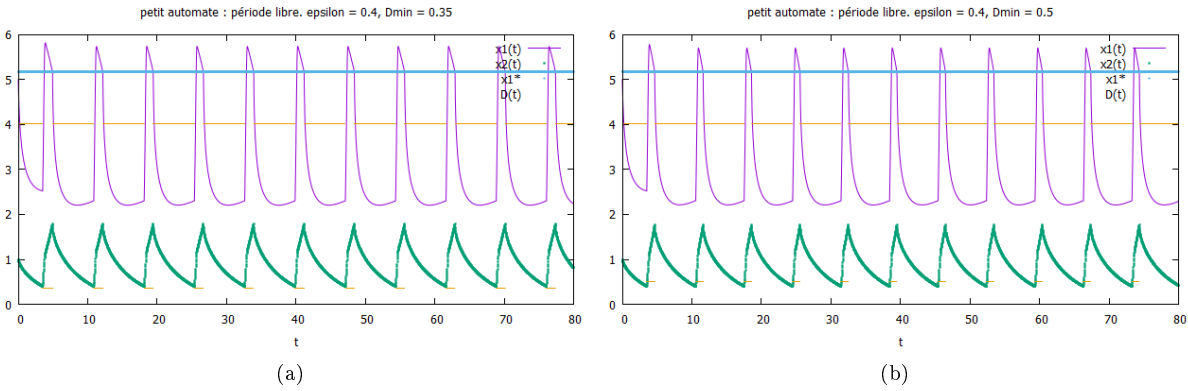


FIGURE 14 – (a)  $D_{min} = 0.35$ , (b)  $D_{min} = 0.5$

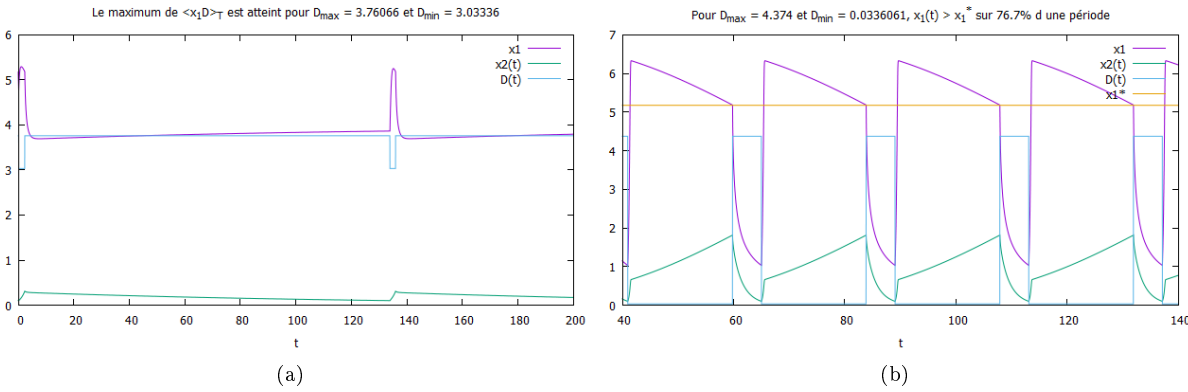


FIGURE 15 – (a) Pour  $D_{max} = \mu_1(\hat{s}) + \varepsilon$ ,  $D_{min} = \mu_1(\hat{s}) - \varepsilon$ ,  $\langle x_1 D \rangle_T$  atteint 85% du maximum calculé dans la partie 1. (b) Pour  $D_{max} = \mu_1(s_{in}) - \varepsilon$ ,  $D_{min} = \varepsilon$ , le système passe 77% d'une période hors zone de crise

### 3.3 Un autre modèle de commande hybride

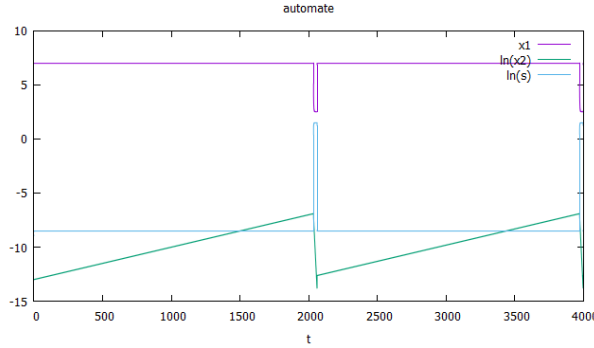


FIGURE 16 – Pour la commande  $\mathcal{D}$ ,  $x_2$  est proche de 0, et la dynamique de  $\ln(x_2)$  est linéaire. Pour  $\mathcal{D} = D_{min}$ ,  $s$  peut également être petit, et  $x_1$  aussi proche que souhaité de  $s_{in}$  sur la majeure partie d'une période.

L'objectif de maximiser  $\langle x_1 D \rangle_T$  peut se comprendre comme une condition de notre commande de maintenir  $x_2$  près de 0, ce qui est toujours possible à partir d'un certain temps  $t \geq 0$ , quitte à lessiver fortement l'espèce 2 à l'instant 0.

Nous allons alors poser  $\alpha, \beta$  deux réels strictement positifs,  $t_0 \geq 0$  un temps pour lequel  $\alpha \leq x_2 \leq \beta$ , et proposer une loi de commande pour laquelle  $x_2 \in [\alpha, \beta] \forall t \geq t_0$  :

- Si  $x_{20} < \beta$  :  $\mathcal{D} = D_{min}$  jusqu'à ce que  $x_2 = \beta$  puis  $\mathcal{D} = D_{max}$  jusqu'à ce que  $x_2 = \alpha$ .
- Si  $x_{20} \geq \beta$   $\mathcal{D} = D_{max}$  jusqu'à ce que  $x_2 = \alpha$  puis  $\mathcal{D} = D_{min}$  jusqu'à ce que  $x_2 = \beta$ .

Autrement dit,  $\mathcal{D} =$

- $D_{max}$  si  $x_2 \geq \beta$
- $D_{max}$  si  $x_2 \in ]\alpha, \beta[$  et  $\dot{x}_2 < 0$
- $D_{min}$  si  $x_2 \leq \alpha$
- $D_{min}$  si  $x_2 \in ]\alpha, \beta[$ ,  $\dot{x}_2 > 0$ .

$\mathcal{D}$  ne "voit" pas la trajectoire  $t \mapsto x_1(t)$ . L'intérêt de cette loi de commande est que pour  $x_2$  suffisamment proche de 0,  $x_1$  se comporte "presque" comme si  $x_2$  était nul, et peut en particulier dépasser le seuil  $x_1^*$ , avec là encore une restriction sur les commandes  $D_{min}$  et  $D_{max}$  (similaire à l'exemple de la figure 10 et au cas  $\varepsilon = 0.7$ ).

Le résultat d'existence du motif périodique se prouve comme similairement au cas de la commande hybride  $\mathbf{D}$  portant sur  $x_1, x_2, \dot{x}_1$  introduit précédemment.

En effet, nous pouvons sans perte de généralité considérer  $t_0 = 0, x_{20} = \beta, \mathcal{D}_0 = D_{max}$ . L'existence de temps  $t_1 > t_0$  tel que  $x_2(t_1) = \alpha$  et  $t_2 > t_1$  tel que  $x_2(t_2) = \beta$  peut se prouver comme dans la partie 3.2. Nous voulons alors déterminer un  $\tilde{x}_1 > 0$  tel que :  $x_1(0) = \tilde{x}_1 \Rightarrow x_1(t_2) = \tilde{x}_1$ . Le résultat d'existence se montre comme dans la preuve de la proposition 3.3.

Nous voulons alors déterminer une loi de commande (sous-)optimale (optimale parmi l'ensemble des commandes constantes par morceaux prenant 2 valeurs distinctes sur une période) pour nos critères  $\langle x_1 D \rangle_T$  et  $\int_0^T \mathbf{1}_{x_1 \geq x_1^*}$ .

Les simulations numériques montrent que le choix de  $D_{min} = \varepsilon_0$  et  $D_{max} = \mu_1(s_{in}) - \varepsilon_0$  optimise le critère  $\langle x_1 D \rangle_T$ , alors que  $D_{min} = \mu_1(\hat{s}) - \varepsilon_0, D_{max} = \mu_1(s_{in}) + \varepsilon_0$  est optimal pour  $\int_0^T \mathbf{1}_{x_1 \geq x_1^*}$ . La preuve reste encore actuellement du domaine de la recherche...



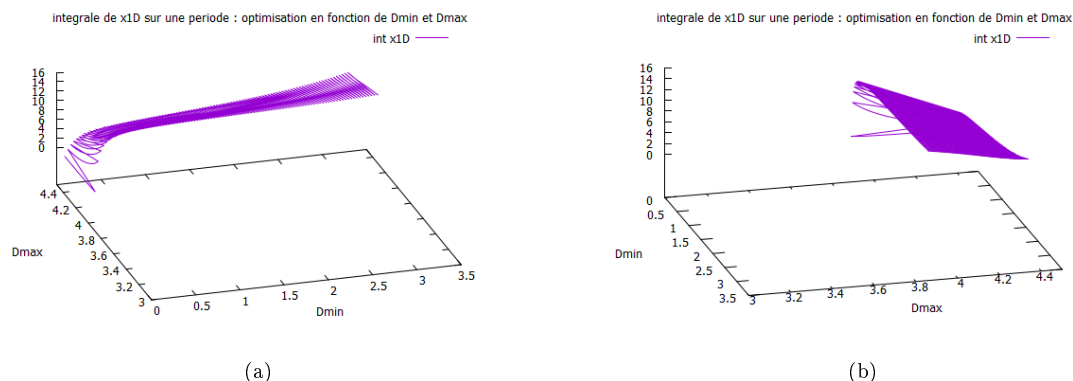


FIGURE 17 – Etude du rendement de  $\langle x_1 D \rangle_T$  en fonction de  $D_{min}$  et  $D_{max}$ . A gauche est présentée la croissance en  $D_{min}$ , à droite la croissance en  $D_{max}$ .

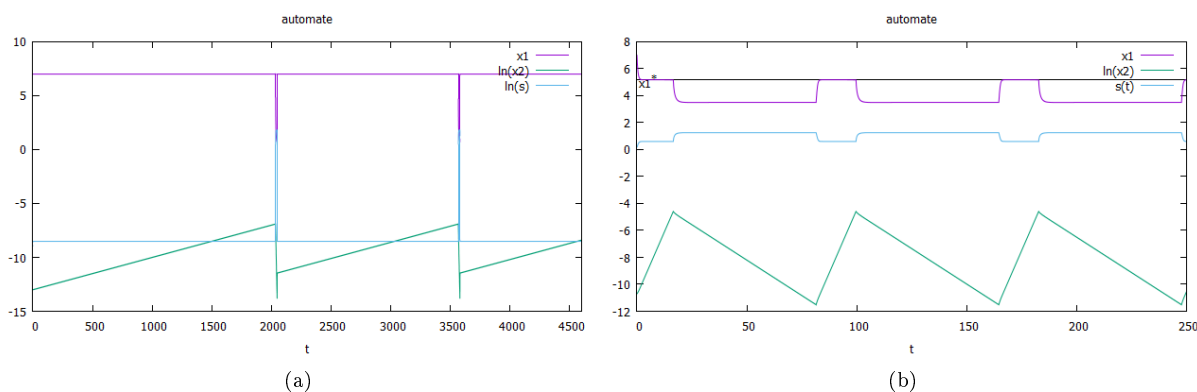


FIGURE 18 – Pour un système de commande hybride portant sur la seule espèce  $x_2$ , sont représentées les trajectoires associées aux commandes optimales pour les critères de : (a) temps de crise, (b) rendement de  $x_1 D$ . Pour  $D_{max} = \mu_1(s_{in}) - \varepsilon$ ,  $D_{min} = \varepsilon$ , le temps passé en zone de crise est de moins de 1% d'une période. Pour  $D_{max} = \mu_1(\hat{s}) + \varepsilon$ ,  $D_{min} = \mu_1(\hat{s}) - \varepsilon$ ,  $\langle x_1 D \rangle$  dépasse 85% du maximum.

## SYNTHESE :

Pour un système de type chemostat à deux espèces, aucune commande constante n'est optimale pour le critère  $\langle x_1 D \rangle_T$ . En effet, pour la comande optimale telle que calculée en partie 1, la croissance de l'espèce 2 est privilégiée et le principe d'exclusion compétitive se traduira par l'extinction de l'espèce 1.

En faisant varier périodiquement  $D$  entre les domaines de croissance de  $x_1$  et  $x_2$ , nous garantissons de la survie de l'espèce 1 et nous approchons de l'optimum, jusqu'à 85% pour une commande constante par morceaux pouvant prendre deux valeurs.

Nous nous sommes assurés de résultats d'existence d'une solution périodique pour certaines valeurs de  $D_{max}$ ,  $D_{min}$  et du / des paramètres de bascule de la commande. Nous sommes alors en droit d'espérer améliorer la production de l'espèce 1 en déterminant les valeurs optimales de ces paramètres. Pour ce faire, il faudra définir un intervalle de définition pour lesquels nous nous assurons l'existence d'une solution périodique telle que décrite en partie 3, puis chercher (analytiquement et numériquement) l'optimum pour chaque paramètre...

## 4 ANNEXES

### Addendum : la théorie de Floquet pour le chemostat périodique

Nous rappellerons quelques résultats pour le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) \forall t \geq t_0 \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{4.0.1}$$

Pour une dynamique  $f$   $T$ -périodique. Sans perte de généralité, nous pourrions nous limiter au cas de la dimension 2.

Nous poserons  $\phi(t, 0, x_0)$  le flot associé à (23), et appellerons  $\pi$  l'application de Poincaré associée à (23), i.e  $\pi(x_0) = \phi(T, 0, x_0)$ .

Nous posons  $J_x f(t, x)$  la jacobienne de  $f$  en  $(t, x)$ . Le système (1) linéarisé s'écrit, au voisinage d'une solution  $(t, x(t))$  de (23) :

$$\dot{y} = J_x f(t, x(t))y\tag{4.0.2}$$

Considérons l'équation variationnelle matricielle :  $\dot{M} = J_x f(t, x(t))M$ .

On appelle matrice fondamentale une solution  $M(t)$  de ladite équation pour la condition initiale  $M(0) = Id$ .  $M$  vérifie les propriétés suivantes :

- Toute solution  $y$  de (24) est de la forme  $M(t)v$  où  $v$  est un vecteur constant.
- $M(T) = \pi'(x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(T, x_0)$ .

On appellera multiplicateurs de Floquet les valeurs propres de  $M(T)$ , par exemple dans notre cas  $\lambda_1, \lambda_2$ . Si pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\lambda_i = \exp(T\mu_i)$ , on appellera  $\mu_i$  les exposants de Floquet du système périodique.

Le résultat suivant est montré dans [1] :

Soit  $x(t)$  une trajectoire périodique pour (23). Si tous les exposants de Floquet de la solution  $x(t)$  ont une partie réelle négative, la trajectoire est asymptotiquement stable. Si un exposant est à partie réelle positive, la trajectoire est instable.

(Autrement dit, les valeurs propres de  $M(T)$  doivent toutes appartenir à l'intérieur du cercle unité du plan complexe). Une caractérisation plus fine des points fixes de  $\pi$  peut également être prouvée selon le signe des exposants (cf. [1]).

L'intérêt de cette théorie est une caractérisation facile de la stabilité des trajectoires périodiques d'un système différentiel. Une méthode de résolution de tels systèmes consiste à déterminer les solutions sur le bord d'un ensemble d'intérêt puis à l'intérieur du dit ensemble. L'étude de leurs multiplicateurs de Floquet induira leur propriété de stabilité. Nous exprimons une solution ad hoc de (23)  $T$ -périodique, asymptotiquement stable, puis étudions éventuellement son unicité...

## Addendum : preuve du principe de Pontryagin pour un problème de Mayer

Le cadre est l'équation différentielle :  $\dot{x} = f(t, x, D)$  pour  $f$  une C-fonction.

Le problème de commande optimale sera :  $\min_{D(\cdot)} x_0(T, D)$ , où  $T$  est fixé et  $D \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U, u \text{ mesurable}\}$  Soit :

$$H : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x(t), p(t), p^0, D(t)) \mapsto (p(t), f(t, x(t), D(t))) - \frac{1}{T} p^0 x_1(t) D(t)$$

le hamiltonien associé à l'équation différentielle, et  $p_0 \leq 0$

**Proposition 4.1.** *Si la commande  $D \in \mathcal{U}$  est optimale sur  $[0, T]$ , il existe une application absolument continue  $p(\cdot) : t \in [0, T] \mapsto p(t) \in \mathbb{R}^2$  appelée vecteur adjoint et un nombre réel  $p^0 \leq 0$  tels que :*

- $\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p(t), p^0, D)$
- $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p(t), p^0, D)$
- $H(t, x^*(t), p(t), p^0, D) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*(t), p(t), p^0, u)$
- $p(0) = p(T)$

Le 4ème item est appelé condition de transversalité sur le vecteur adjoint.

*Démonstration.* Nous allons procéder par perturbations en aiguille de notre commande  $D$ . Nous définirons  $(D_\delta)_{\delta \in \mathbb{R}}$  la suite de perturbations de  $D$  telle que :

$$D_\delta(t) = D^*(t) | t \in [0, T^*] \setminus [\tilde{t} - \delta, \tilde{t}]$$

$$= u | t \in [\tilde{t} - \delta, \tilde{t}]$$

Pour  $\tilde{t} \in ]0, T^*]$  quelconque, et  $u \in U$ . Les trajectoires associées constituent également une suite  $(x_\delta)$  indexée par  $\delta$ .

Nous voulons montrer que le long de la variété  $\{x_\delta(T^*)\}_{\delta \in \mathbb{R}}$ ,  $p(t).f(t, x_\delta, D_\delta)$  sera toujours strictement inférieur à  $p(t).f(t, x^*, D^*)$ .

A cet effet, remarquons que la trajectoire  $x_\delta(\cdot)$  est déviée à l'instant  $\tilde{t}$  de la trajectoire  $x^*(\cdot)$  de :  $\frac{1}{\delta}(x_\delta(\tilde{t}) - x^*(\tilde{t})) = \frac{1}{\delta} \int_{\tilde{t}-\delta}^{\tilde{t}} f(t, x_\delta(t), D_\delta(t)) - f(t, x^*(t), D^*(t)) dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), u) - f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D^*(\tilde{t}))$ .

$$\tilde{p}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (x_\delta(t) - x^*(t)) = f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), D^*(t))$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{p}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[ \frac{d}{dt} (x_\delta(t) - x^*(t)) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (f(t, x_\delta(t), D_\delta(t)) - f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D^*(\tilde{t}))) = \nabla_x f . \tilde{p}(t).$$

$\tilde{p}$  est donc solution d'une équation différentielle, de condition initiale  $\tilde{p}(t)|_{t=\tilde{t}} = f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D_\delta(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D^*(\tilde{t}))$ , dont on peut appeler  $R(t, \tilde{t})$  la résolvante.

$$\text{Ainsi, } \tilde{p}(t) = R(t, \tilde{t}) (f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D_\delta(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D^*(\tilde{t})))$$

D'autre part, comme la commande  $D^*$  est supposée optimale, nous aurons à l'instant  $T^* : \frac{1}{T^*} \int_{\tilde{t}-\delta}^{T^*} x_{1\delta} . D_\delta - x_1^* . D^* dt = (x_{0\delta} - x_0^*)(T^*) < 0$ .

Nécessairement,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (x_{0\delta} - x_0^*)(T^*) = \nabla_x x_0(T^*) . \tilde{p}(T^*) < 0$ .

Posons alors  $p(t)$  la solution du système différentiel défini en temps rétrograde :

$$\dot{p}(t) = -p(t) . \nabla_x f(t, x^*(t), D^*(t)), \quad p(T^*) = \nabla_x x_0(T^*).$$

On aura  $\tilde{p}(t).p(t)$  constant sur  $[0, T^*]$ . Or, son signe est négatif, puisqu'à l'instant  $t = T^* : \tilde{p}(T^*).p(T^*) = \tilde{p}(T^*) \nabla_x x_0(T^*) < 0$ .

En particulier, en  $t = \tilde{t}$ ,  $p(\tilde{t}).\tilde{p}(\tilde{t}) = p(\tilde{t}) (f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D_\delta(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x^*(\tilde{t}), D^*(\tilde{t}))) < 0$ , et comme l'inégalité est vraie pour tout  $\tilde{t} \in ]0, T^*]$ , on aura  $p(t).f(t, x^*(t), D^*(t)) > p(t).f(t, x^*(t), u(t)) \forall u \in U$ .

Pour finir la preuve, on prolonge le résultat à 0 par continuité, et on remarque que  $\nabla_x H(t, x, p, p_0, D) = p(t). \nabla_x f(t, x, D)$  pour recouvrir le principe du maximum.  $\square$

## Addendum : Exemple de code C++ pour une modélisation de commande hybride

```
MatrixXd Chemostat::automate(double mu, double K, double s0, VectorXd initialconditions,
VectorXd mumax, VectorXd A, VectorXd ic, double epsilon)
```

```
int N = 2000, M = 1000;
    MatrixXd x(N, 3);
x.setZero();
    initialconditions.resize(nbsp);
    mumax.resize(2);
    A.resize(2);
    ic.resize(2);
    double sstar;
    double mu1moinsmu2 = 1.;
    VectorXd s(N);
    s.setZero();
    for(int n = 1; n < N; n++)

s(n) = s0 / N * n;
    if(abs(monod(mumax(1), A(1), s(n)) - monod(mumax(0), A(0), s(n))) < mu1moinsmu2)

        mu1moinsmu2 = abs(monod(mumax(1), A(1), s(n)) - monod(mumax(0), A(0), s(n)));
        sstar = s(n);

    cout << sstar << endl;
VectorXd temps(N);
    temps.setZero();
    MatrixXd Matrix(N, 7);
    //les 5 colonnes supplémentaires : temps, s(t), x1équilibre(t), x*, D(t)
    Matrix.setZero();
    double h = 0.02;
    x(0, 0) = 0., x(0, 1) = initialconditions(0), x(0, 2) = initialconditions(1);
    double u = 0.;
    double Dmax = (mumax(0) + monod(mumax(0), A(0), sstar)) / 2.;
    double xstar = 0.1, maximum = 0.1, ustar = 0.;
    for(int j = 0; j < M; j++)

for(int i = 1; i < N; i++)

    double m1 = 0, m2 = 0, m3 = 0, m4 = 0;
    double k1 = (monod(mu, K, x(i - 1, 2)) - u) * x(i - 1, 1);
    m1 = m1 - monod(mu, K, x(i - 1, 2)) * x(i - 1, 1) + u * (s0 - x(i - 1, 2));
    double k2 = (monod(mu, K, x(i - 1, 2) + h / 2. * m1) - u) * (x(i - 1, 1) + h / 2 * k1);
    m2 = m2 - monod(mu, K, x(i - 1, 2) + h / 2. * m1) * (x(i - 1, 1) + h / 2 * k1)
+ u * (s0 - x(i - 1, 2) - h / 2 * m1);
    double k3 = (monod(mu, K, x(i - 1, 2) + h / 2. * m2) - u) * (x(i - 1, 1) + h / 2 * k2);
    m3 = m3 - monod(mu, K, x(i - 1, 2) + h / 2. * m2) * (x(i - 1, 1) + h / 2 * k2)
+ u * (s0 - x(i - 1, 2) - h / 2 * m2);
    double k4 = (monod(mu, K, x(i - 1, 2) + h * m3) - u) * (x(i - 1, 1) + h * k3);
    m4 = m4 - monod(mu, K, x(i - 1, 2) + h * m3) * (x(i - 1, 1) + h * k3)
+ u * (s0 - x(i - 1, 2) - h * m3);
```

```

    x(i, 1) = x(i - 1, 1) + h / 6. * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
    x(i, 2) = x(i - 1, 2) + h / 6. * (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4);
    temps(i) = temps(i - 1) + h;
    x(i, 0) = temps(i);

    if(x(N - 1, 1) * u > maximum)

        maximum = x(N - 1, 1) * u;
        xstar = maximum / u;
        ustar = u;
        for(int k = 0; k < N; k++)

Matrix(k, 3) = x(k, 1);

    u = u + mu / M;

    cout << xstar * ustar << endl;
    for(int i = 0; i < N; i++)

        Matrix(i, 0) = temps(i);
        Matrix(i, 5) = xstar;

    VectorXd D(N - 1);
    Matrix(0, 1) = xstar;
    Matrix(0, 4) = initialconditions(1);
    double Dmin = 0.01;
    for(int i = 1; i < N; i++)

        if(i == 1)

            if(Matrix(0, 2) >= epsilon)

                D(i - 1) = Dmax;

            else if(Matrix(0, 2) < epsilon)

                D(i - 1) = Dmin;

        else if(i >= 2)

            if(D(i - 2) == Dmin && (Matrix(i - 1, 1) - Matrix(i - 2, 1))
/ (Matrix(i - 1, 0) - Matrix(i - 2, 0)) > 0)

                D(i - 1) = Dmin;

            else if(D(i - 2) == Dmin && (Matrix(i - 1, 1) - Matrix(i - 2, 1))
/ (Matrix(i - 1, 0) - Matrix(i - 2, 0)) < 0 && Matrix(i - 1, 1) - xstar > 0.01)

                D(i - 1) = Dmin;

```

```

        else if(D(i - 2) == Dmin && (Matrix(i - 1, 1) - Matrix(i - 2, 1))
/ (Matrix(i - 1, 0) - Matrix(i - 2, 0)) < 0 && Matrix(i - 1, 1) - xstar < 0.01)

            D(i - 1) = Dmax;

        else if(D(i - 2) == Dmax && Matrix(i - 1, 2) > epsilon)

            D(i - 1) = Dmax;

        else if(D(i - 2) == Dmax && Matrix(i - 1, 2) < epsilon)

            D(i - 1) = Dmin;

Matrix(i - 1, 6) = D(i - 1);
Matrix(N - 1, 6) = Matrix(N - 2, 6);
double l1 = 0, l2 = 0, l3 = 0, l4 = 0;
MatrixXd k(4, 2);
for(int j = 0; j < 2; j++)

    Matrix(i, j + 1) = Matrix(i - 1, j + 1);

for(int j = 0; j < 2; j++)

    k(0, j) = (monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4)) - D(i - 1)) * Matrix(i - 1, j + 1);
    l1 = l1 - monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4)) * Matrix(i - 1, j + 1) + 1. / 2 * D(i - 1)
* (s0 - Matrix(i - 1, 4)));
    Matrix(i, j + 1) += h / 6 * k(0, j);

for(int j = 0; j < 2; j++)

    k(1, j) = (monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4) + h / 2. * l1) - D(i - 1))
* (Matrix(i - 1, j + 1) + h / 2 * k(0, j));
    l2 = l2 - monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4) + h / 2. * l1)
* (Matrix(i - 1, j + 1) + h / 2 * k(0, j)) + 1. / 2 * D(i - 1) * (s0 - Matrix(i - 1, 4) - h / 2 * l1);
    Matrix(i, j + 1) += h / 3 * k(1, j);

for(int j = 0; j < 2; j++)

    k(2, j) = (monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4) + h / 2. * l2) - D(i - 1))
* (Matrix(i - 1, j + 1) + h / 2 * k(1, j));
    l3 = l3 - monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4) + h / 2. * l2)
* (Matrix(i - 1, j + 1) + h / 2 * k(1, j)) + 1. / 2 * D(i - 1) * (s0 - Matrix(i - 1, 4) - h / 2 * l2);
    Matrix(i, j + 1) += h / 3 * k(2, j);

for(int j = 0; j < 2; j++)

    k(3, j) = (monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4) + h * l3) - D(i - 1))
* (Matrix(i - 1, j + 1) + h * k(2, j));
    l4 = l4 - monod(mumax(j), A(j), Matrix(i - 1, 4) + h * l3)

```

```
* (Matrix(i - 1, j + 1) + h * k(2, j)) + 1. / 2 * D(i - 1) * (s0 - Matrix(i - 1, 4) - h * l3);
    Matrix(i, j + 1) += h / 6 * k(3, j);

    Matrix(i, 4) = Matrix(i - 1, 4) + h / 6. * (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4);

return Matrix;
```

## References

- [1] H. Smith & P. Waltman, *Theory of Chemostat, Dynamics of Microbial Competition*, Cambridge 1995
- [2] B. d'Andrea-Novel & M. de Lara, *Control Theory for Engineers, A Primer*, Springer 2013
- [3] X.-Q. Zhao, *Dynamical Systems in Population Biology*, SMC 2003
- [4] A. Bressan & B. Piccoli, *Introduction to the Mathematical Theory of Control*
- [5] E. G. Gilbert, *Optimal Periodic Control : A General Theory of Necessary Conditions*, *SIAM J. Control and Optimisation*, Vol 15, No.5, pp 717-746 (Août 1977)
- [6] E. Trélat, *Contrôle Optimal : Théorie et Applications*, Vuibert 2008
- [7] T. Bayen & A. Rapaport, *Optimization of the Time Crisis Function and Application to the Chemostat Model*
- [8] A. F. Filippov, *On Certain Questions in the Theory of Optimal Control*, *SIAM Vol 1, No.1*, pp 76-84 (1962).
- [9] P. De Mottoni & A. Schiaffino, *Competition Systems with Periodic Coefficients : A Geometric Approach*, *Journal of Mathematical Biology* 11, pp 319-335 (1981)