



HAL
open science

Étude d'exemples simples d'écoulements, comparaison Saint Venant et Navier-Stokes

Serge Hèsièwé Bodjana

► **To cite this version:**

Serge Hèsièwé Bodjana. Étude d'exemples simples d'écoulements, comparaison Saint Venant et Navier-Stokes. Sciences de la Terre. 2013. hal-02806353

HAL Id: hal-02806353

<https://hal.inrae.fr/hal-02806353>

Submitted on 6 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



MASTER 2–M.F.F.A
MECANIQUE DES FLUIDES FONDEMENTS ET
APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN DE STAGE

Présenté le 12 Septembre 2013

Étude d'exemples simples
d'écoulements, comparaison Saint
Venant et Navier-Stokes

Auteur :
Serge Hèzièwè
BODJONA

Responsables :
Pierre-Yves LAGRÉE
François JAMES
Frédéric DARBOUX

Je dédie ce document à mon père Henri M. Bodjona qui m'a toujours soutenu et encouragé à faire de grandes études ainsi qu'à toute ma famille.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude envers François James de m'avoir pris pour ce stage en premier lieu, ainsi qu'à Pierre-Yves Lagrée sans qui il m'aurait été difficile d'être aussi choisi pour effectuer ce stage. Je remercie très sincèrement Pierre-Yves Lagrée pour son soutien et son encouragement qu'il m'a apporté tout au long de ce stage au cours duquel j'ai beaucoup appris. Je lui suis profondément reconnaissant pour son attention portée à mon égard et pour ses commentaires et remarques constructifs. Je remercie également François James, Emmanuel Audusse, Olivier Delestre et José Marina Fullana pour leurs attentions et disponibilités qu'ils m'ont accordé au cours de ce stage sans oublier Frédéric Darboux qui a fourni les valeurs expérimentales.

J'exprime ma reconnaissance envers Rénée Gatignol, Roger Prud'homme, Pierre-Yves Lagrée et Amah d'Almeida qui ont initié et soutiennent la collaboration en Mécanique avec la faculté de Mathématiques de l'Université de Lomé au TOGO.

Je remercie Cédric Croizet qui est le directeur des études de Master Mécaniques, Pierre-Yves Lagrée qui est l'actuel directeur de l'équipe FCIH (Fluides Complexes et Instabilités Hydrodynamiques) au sein de laquelle j'ai effectué ce stage et tous les membres de l'Institut Jean le Rond d'Alembert pour leur accueil pendant ce stage.

J'adresse aussi mes remerciements à Nimonoka Gounséti paré pour les échanges avec lui et les conseils et aux autres collègues aussi pour la bonne ambiance et les quelques conseils toujours bienvenus, Plus particulièrement à Janet Traoré et Téo Gavaille.

Table des matières

1	INTRODUCTION	5
2	ÉQUATIONS ET MÉTHODE NUMÉRIQUE	7
2.1	Équations de Navier-Stokes	7
2.2	Méthode numérique pour Navier-Stokes	9
2.3	Équations de Saint Venant	9
2.4	Méthode numérique pour Saint Venant	10
3	EXEMPLES DE RÉSULTATS SAINT VENANT	12
3.1	Cas sans frottement	13
3.1.1	Rupture de barrage	13
3.1.2	Équilibre du lac au repos	13
3.1.3	Écoulement Fluvial	14
3.1.4	Écoulement Torrentiel	14
3.1.5	Écoulement Transcritique	15
3.1.6	Écoulement Transcritique avec ressaut	15
3.1.7	figures illustrant les exemples respectifs ci-dessus	15
3.2	Cas avec frottement	21
3.2.1	Écoulement sur un plan incliné avec prise en compte du frottement	21
3.2.2	Cas Navier-Stokes associé	21
3.3	Conclusion	23
4	LINÉARISATION DE SAINT VENANT	24

4.1	Équation linéarisée	24
4.2	Cas d'un fond sinusoïdal	25
4.3	Cas d'un fond Gaussien	25
4.4	Résultats numériques et analytiques	25
4.5	Perspectives	30
5	SOLUTION SIMILAIRE, COMPARAISON NAVIER-STOKES SAINT VENANT	31
5.1	Cas d'un plan incliné : solutions similaires	32
5.1.1	Équations	32
5.1.2	Expression de la solution similaire	33
5.1.3	Expression analytique de la solution similaire	35
5.1.4	Expression analytique du front et du sommet	36
5.2	Cas d'un fond plat : Solutions similaires	37
5.2.1	Équations	37
5.2.2	Expression de la solution similaire	38
5.2.3	Expression analytique de la solution similaire	40
5.2.4	Expression analytique du front et du sommet	40
5.3	Simulations	41
5.3.1	Résultats numériques obtenus sur un fond incliné	42
5.3.2	Résultats numériques obtenus sur un fond plat	46
5.4	Conclusion	50
6	Conclusion	51

Chapitre 1

INTRODUCTION

Les équations mathématiques générales utilisées en mécanique des fluides sont les équations de Navier-Stokes. L'intégration de ces équations sur l'épaisseur d'un fluide à surface libre génère le système d'équations simplifiées de Saint Venant. Ces équations et ces différentes variantes trouvent aujourd'hui plusieurs applications dans la simulation numérique de nombreuses phénomènes physiques dans le milieu naturel comme les catastrophes naturelles (tsunamis, ...), le ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles, la coulée des laves, la rupture d'un barrage, la pollution et la protection de l'environnement, les évolutions climatiques, l'étude des marées et crues, la sédimentologie, La simulation numérique des phénomènes physiques avec les équations de Navier-Stokes qui sont les plus utilisées est souvent complexe car elle nécessite des temps de calcul long et des maillages très fins pour mieux capter les phénomènes physiques. Les équations de Saint Venant s'avèrent moins coûteuses en temps de calcul et en nombre de points pour la simulation numérique et sont aussi mieux adaptées aux problèmes d'écoulements à surface libre où l'épaisseur du fluide est très petite devant la longueur de l'écoulement. Étant plus utilisées de nos jours dans les milieux naturels, nous nous sommes posé la question de comparer les solutions de la simulation numérique avec les équations de Saint Venant et celles de la simulation numérique avec les équations de Navier-Stokes dans des cas simples. Le but étant de compléter le modèle d'équations de Saint Venant si nécessaire (ajout des termes de la tension superficielle dans les équations si possible, comparaison du terme visqueux dans Navier-Stokes et du terme de frottement dans Saint Venant) et de réduire le temps de calcul et le nombre de points en simulant numériquement les phénomènes physiques plutôt avec les équations de Saint Venant.

L'objectif dans ce document est d'obtenir dans un premier temps les résultats d'exemples simples d'écoulements à surface libre avec les équations de Saint Venant en utilisant un modèle et une méthode numérique écrit en langage C et de les comparer dans certains cas à la solution analytique des équations. Ensuite dans un second temps, on effectuera une comparaison entre les résultats précédents et ceux obtenus par simulation numérique avec les équations de Navier-Stokes sur le logiciel Gerris flow solver.

Organisation du manuscrit

Le chapitre 2 sera consacré à l'exposition des équations mathématiques de Navier-Stokes et de Saint Venant et aussi à la méthode numérique utilisée pour discrétiser les équations de Saint Venant avec les quelles le code a été écrit en langage C pour la résolution numérique.

Dans le chapitre 3, nous exposerons les exemples de résultats obtenus par simulation numérique avec le code écrit en langage C ainsi que les conditions dans les quelles ont été réalisé ces différentes simulations.

Le chapitre 4 sera consacré à l'étude de la linéarisation des équations de Saint Venant et à la comparaison des solutions numériques aux solutions analytiques obtenues après résolution des équations linéarisées.

Dans le chapitre 5, On effectuera tout d'abord une étude théorique des solutions similaires obtenues des équations de Saint Venant, une comparaison des solutions similaires analytiques et numériques et on superposera les résultats numériques de la simulation avec les équations de Saint Venant et celles de Navier-Stokes.

Ensuite une conclusion générale sera fait sur le document avec des perspectives.

Chapitre 2

ÉQUATIONS ET MÉTHODE NUMÉRIQUE

Introduction

Ce chapitre sera consacré aux équations mathématiques générales utilisées et au méthode numérique avec la quelle on a discrétisé nos équations mathématiques pour effectuer la simulation numérique.

2.1 Équations de Navier-Stokes

Le système de Navier-Stokes incompressible 2D diphasique s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu(\vec{\nabla}\vec{u} + \nabla\vec{u}^T)) + \rho\vec{g},$$

+ les conditions aux limites,

où $\vec{u} = (U, V)$, p, ρ, μ sont respectivement la vitesse, la pression, la masse volumique, la viscosité dynamique du fluide et g la gravité avec $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\vec{u}$.

Le système diphasique est constitué de l'air et de l'eau à surface libre séparés par une interface sur laquelle existe des conditions de passages.

Le calcul sera fait sur un domaine comme l'indique la figure 1 (en 2D). La

vitesse est nulle au fond. A l'interface, il y a des conditions de passage pour les contraintes.

- Le modèle diphasique incompressible 2D adimensionné

En prenant H_0 , U_0 , et t_0 respectivement comme échelle caractéristique de longueur, de vitesse et du temps, et en posant $x = H_0\bar{x}$, $u = U_0\bar{u}$, $p = \rho_f U_0^2 \bar{p}$, et $t = t_0\bar{t}$ avec $t_0 = \frac{h_0}{u_0}$, le système de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\rho}}(-\bar{\nabla} \bar{p} + \frac{1}{Re} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mu}(\bar{\nabla} \bar{u} + \bar{\nabla} \bar{u}^T))) + \frac{1}{F_0^2}(\sin(\alpha)\bar{e}_x + \cos(\alpha)\bar{e}_y),$$

+ les conditions aux limites,

où $F_0 = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}$, $Re = \frac{u_0 h_0}{\nu}$ sont respectivement le nombre de Froude et le nombre de Reynolds caractéristique et $\bar{\mu} = T + (\frac{\mu_g}{\mu_f})(1-T)$, $\bar{\rho} = T + (\frac{\rho_g}{\rho_f})(1-T)$ sont des fonctions qui valent 1 dans le fluide et respectivement $\frac{\mu_g}{\mu_f}$ et $\frac{\rho_g}{\rho_f}$ dans l'air avec T un traceur qui vaut 1 dans le fluide et 0 dans l'air. Ce traceur est convecté par la relation $\frac{\partial T}{\partial t} + \text{vec}U \cdot \bar{\nabla} T = 0$.

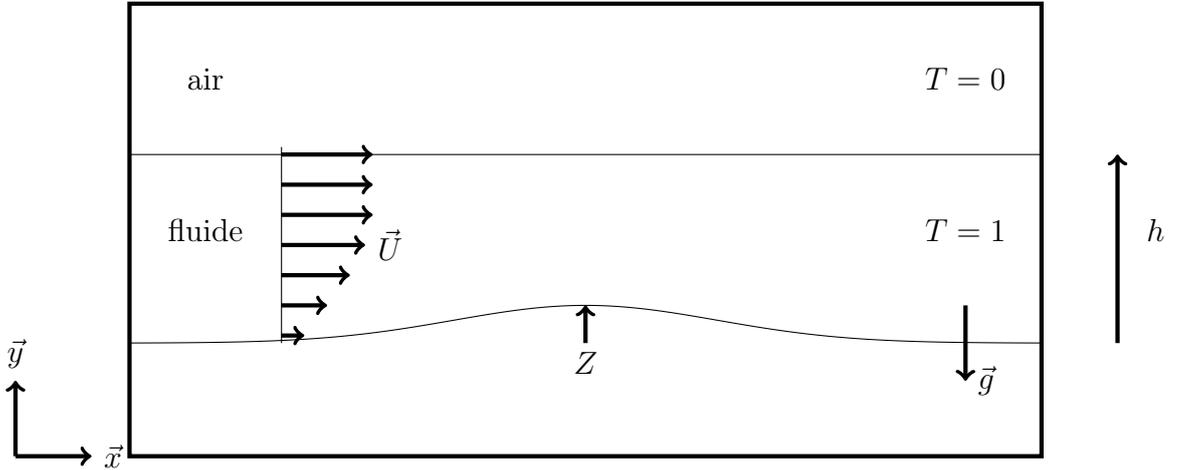


FIGURE- Z représente le fond, la couche fluide d'épaisseur h est au dessus du fond, la gravité est suivant $-y$ la vitesse u, v dépend de x et y , l'air est au dessus de la couche fluide. T est un traceur qui vaut 1 dans le fluide

2.2 Méthode numérique pour Navier-Stokes

Pour la simulation numérique des phénomènes physiques avec ces équations, on utilise le logiciel Gerris flow solver dans le quel a été utilisé la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations et la méthode VOF Volume of Fluid pour interface.

2.3 Équations de Saint Venant

A partir des équations de Navier-Stokes intégrées sur l'épaisseur h , le système de Saint Venant obtenu s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\Gamma \frac{Q^2}{h} + \frac{gh^2}{2})}{\partial x} &= -gh \frac{\partial Z}{\partial x} - \tau, \\ &+ \text{les conditions aux limites,} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} Q = \int_Z^{Z+h} U(x, y) dy \\ \tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_Z \\ \Gamma = \frac{\int_Z^{Z+h} U^2 dy}{(\int_Z^{Z+h} U dy)^2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

où h, Q, Z, ν, g, Γ et τ sont respectivement la hauteur, le débit, le fond, la viscosité cinématique du fluide, la gravité, le facteur de forme et l'approximation du frottement.

En régime laminaire, $\Gamma = \frac{6}{5}$ et $\tau = 3\nu \frac{|Q|}{h^2}$ mais nous avons choisi par défaut $\Gamma = 1$ dans le code.

Dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ est le terme instationnaire, $\frac{\partial(\Gamma \frac{Q^2}{h})}{\partial x}$ est le terme de convection, $\frac{\partial(\frac{gh^2}{2})}{\partial x}$ est le terme de pression, $-gh \frac{\partial Z}{\partial x}$ est le terme de topographie et $\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_Z$ est le terme de frottement.

•Système de Saint Venant adimensionné

En prenant h_0, Q_0, u_0 et t_0 respectivement comme échelle caractéristique de

longueur, du flux, de vitesse et du temps, et en posant $h = h_0 \bar{h}$, $Q = Q_0 \bar{Q}$, $u = u_0 \bar{u}$, et $t = t_0 \bar{t}$ avec $t_0 = \frac{h_0}{u_0}$, le système de Saint Venant s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{h}} + \frac{\bar{h}^2}{2F_0^2} \right)}{\partial \bar{x}} = -\frac{\bar{h}}{F_0^2} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} - \frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2},$$

+ les conditions aux limites,

où $F_0 = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}$ et $Re = \frac{u_0 h_0}{\nu}$ sont respectivement le nombre de Froude et le nombre de Reynolds caractéristique.

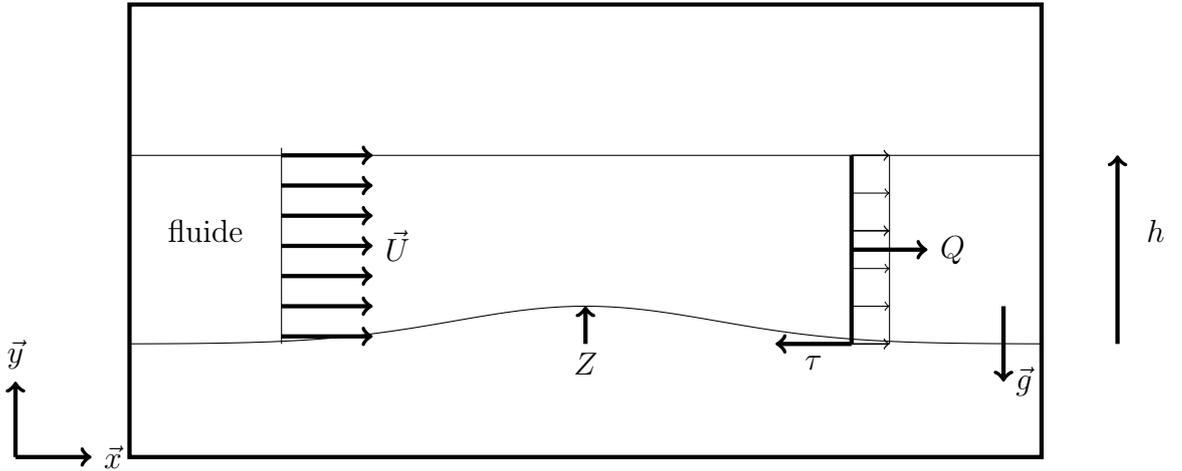


FIGURE- Z représente le fond, la couche fluide d'épaisseur h est au dessus dans la version Saint Venant, seul le débit total $Q(x, t)$ et le frottement à la paroi τ sont considérés et non plus le champ de vitesse $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$.

2.4 Méthode numérique pour Saint Venant

Ici l'idée consiste à appliquer le schéma des volumes finis usuels pour la résolution des équations de Saint Venant homogènes avec des variables reconstruites (reconstruction hydrostatique, voir [5], [3], [10]). Cette méthode

permet d'avoir un schéma plus adapté à la résolution du système de Saint Venant avec la topographie Z .

Ainsi en appliquant la méthode usuelle des volumes finis

$$\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n) = 0,$$

avec des variables hydrostatiques reconstruites par la méthode de reconstruction hydrostatique (voir [2])

$$\begin{cases} \bar{h}_{i+1/2G} = \max(\bar{h}_i + \bar{Z}_i - \max(\bar{Z}_i, \bar{Z}_{i+1}), 0), \bar{U}_{i+1/2G}^n = (\bar{h}_{i+1/2G}, \bar{h}_{i+1/2G}\bar{u}_i) \\ \bar{h}_{i+1/2D} = \max(\bar{h}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} - \max(\bar{Z}_i, \bar{Z}_{i+1}), 0), \bar{U}_{i+1/2D}^n = (\bar{h}_{i+1/2D}, \bar{h}_{i+1/2D}\bar{u}_i). \end{cases} \quad (2.2)$$

aux équations de Saint Venant, on aboutit à un schéma numérique d'ordre 1 suivant :

$$\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n) = 0,$$

avec

$$\begin{cases} F_{i+1/2D}^n = \mathcal{F}(\bar{U}_{i-1/2G}, \bar{U}_{i-1/2D}) + S_{i-1/2D} \\ F_{i+1/2G}^n = \mathcal{F}(\bar{U}_{i+1/2G}, \bar{U}_{i+1/2D}) + S_{i+1/2G}. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$S_{i+1/2G} - S_{i-1/2D} = \left(\frac{0}{\frac{(\bar{h}_{i-1/2D}^n)^2 - (\bar{h}_{i+1/2G}^n)^2}{2F^2}} \right)$$

$$\bar{U}_{i+1/2G} = \begin{pmatrix} h_{i+1/2G} \\ h_{i+1/2G}u_i \end{pmatrix}, \bar{U}_{i+1/2D} = \begin{pmatrix} h_{i+1/2D} \\ h_{i+1/2D}u_i \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - c \frac{U_D - U_G}{2} \\ F = \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{h}} + \frac{\bar{h}^2}{2F_0^2} \right) \end{cases} \quad (2.4)$$

c étant à définir à partir de la méthode d'approximation des flux utilisés (la méthode de Rusanov dans ce cas ci).

Ce schéma nommé schéma bien balancé "well balanced" (voir [3], [8], [5]) permet de conserver l'équilibre du lac au repos $h + Z = cste$. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise des schémas classiques pour discrétiser les équations.

Chapitre 3

EXEMPLES DE RÉSULTATS SAINT VENANT

Introduction

Dans ce paragraphe nous exposerons dans un premier temps les résultats obtenus des exemples simples de quelques types d'écoulements sans frottement sur un fond plat et sur une bosse (voir [10], [5], [11]) où dans le cas de la bosse nous exposeront l'expérimental de quelques cas d'écoulement (voir [13]). Dans un second temps, les exemples d'écoulement avec frottement sur une bosse et sur un fond ondulé seront exposés. En rappel, le code implémenté en C pour réaliser ces exemples d'écoulements est obtenu en discrétisant le système d'équation de Saint Venant adimensionné en utilisant le schéma numérique usuelle des volumes finis avec des variables reconstruites par la méthode de reconstruction hydrostatique (voir [5], [3], [8]).

En outre nous avons choisi le nombre de Reynolds $Re = 100$, le nombre de Froude caractéristique $F_0 = 1$ et on a choisi $\sqrt{gh_0}$ comme échelle de vitesse. Sur les figures obtenues dans les différents cas qui suivent, nous avons représenté en couleur bleue la surface libre du fluide sur le fond, en couleur rouge le débit et en couleur verte le fond.

3.1 Cas sans frottement

Dans cette section, on étudiera le cas des écoulements où le frottement n'est pas prise en compte.

Dans la section 3.1.1 et 3.1.2, seuls les termes instationnaires, de convection et de pression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement en plus de l'équation de conservation de la masse forment le système d'équations utilisé pour réaliser les études.

Le système d'équations utilisé dans la section 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5 et 3.1.6 est celui utilisé précédemment où on a rajouté le terme de la topographie dans les équations de conservation de la quantité de mouvement.

3.1.1 Rupture de barrage

Dans ce cas ci représenté sur la figure 3.1 nous avons divisé le domaine d'étude en deux parties égales et comme conditions initiales, nous avons choisi dans la première moitié du domaine une hauteur $h = 1$ et dans la seconde moitié $h = 0$ et le débit $Q = 0$ dans tout le domaine. Comme conditions aux limites on a :

$$\begin{cases} \bar{h}[0] = \bar{h}[1] \\ \bar{Q}[0] = \bar{Q}[1] \\ \bar{h}[nx] = \bar{h}[nx - 1] \\ \bar{Q}[nx] = \bar{Q}[nx - 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.2 Équilibre du lac au repos

Ce cas est représenté sur la figure 3.2 et comme conditions initiales, nous avons choisi une hauteur $\bar{h} = 0.5$ et un débit $\bar{Q} = 0$. Les conditions de bords utilisées sont :

$$\begin{cases} \bar{h}[0] = \bar{h}[nx] = 0.5 \\ \bar{Q}[0] = \bar{Q}[nx] = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous avons choisi un domaine d'une longueur $L = 1$ sur lequel on a mis 400 points. Le temps final de la simulation numérique est $t_{max} = 100$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

Ce cas correspond au fait que $Z \neq 0$ peut générer des courants parasites.

3.1.3 Écoulement Fluvial

Le nombre de Froude en entrée $F_e < 1$ est une condition qui caractérise les écoulements fluviaux. Pour être rassuré que cette condition d'entrée est toujours vérifiée dans notre code, on choisit tout d'abord un nombre de Froude d'entrée strictement inférieur à 1 ce qui d'après le calcul suivant nous permet de choisir une hauteur quelconque $\bar{h}[0]$ et un débit $\bar{Q}[0] = F_e \frac{\sqrt{\bar{h}[0]^3}}{F_0}$.

$$\text{En effet } F_e = \frac{u[0]}{\sqrt{gh[0]}} = \frac{\bar{u}[0]}{\sqrt{\bar{h}[0]}} F_0 \implies \bar{u}[0] = F_e \frac{\sqrt{\bar{h}[0]}}{F_0} \implies \bar{Q}[0] = F_e \frac{\sqrt{\bar{h}[0]^3}}{F_0}.$$

Ce choix permet du moins aux premières valeurs $\bar{h}[1]$, $\bar{u}[1]$ et $\bar{Q}[1]$ calculées par le code au pas de temps suivant de vérifier cette condition et donc avec les conditions limites de Neumann on a le nombre de Froude en entrée $F_e < 1$.

Pour ce cas d'exemple représenté sur la figure 3.3, nous avons choisi $F_e = 0.5$, initialement on a $\bar{h}[0] = 1$ et donc $\bar{Q}[0] = F_e \frac{\sqrt{\bar{h}[0]^3}}{F_0}$. Au bord, on a choisi

$$\begin{cases} \bar{h}[0] = \bar{h}[1] \\ \bar{Q}[0] = \bar{Q}[1] \\ \bar{h}[nx] = \bar{h}[nx - 1] \\ \bar{Q}[nx] = \bar{Q}[nx - 1]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour la simulation numérique, nous avons mis 1500 points pour un pas d'espace $dx = 0,005$. Le temps final de la simulation numérique est $tmax = 1000$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

3.1.4 Écoulement Torrentiel

Dans ce cas ci, c'est le nombre de Froude en entrée $F_e > 1$ qui caractérise les écoulements. Donc en faisant de même que dans la section précédente, on aura toujours cette condition qui sera satisfaite en entrée.

Pour ce cas d'exemple représenté sur la figure 3.5, nous avons choisi $F_e = 1.5$, initialement $\bar{h}[0] = 1$ et donc $\bar{Q}[0] = F_e \frac{\sqrt{\bar{h}[0]^3}}{F_0}$. Comme conditions aux limites on a

$$\begin{cases} \bar{h}[0] = \bar{h}[1] \\ \bar{Q}[0] = \bar{Q}[1] \\ \bar{h}[nx] = \bar{h}[nx - 1] \\ \bar{Q}[nx] = \bar{Q}[nx - 1]. \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour la simulation numérique, nous avons mis 1500 points pour un pas

d'espace $dx = 0,005$. Le temps final de la simulation numérique est $tmax = 1000$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

3.1.5 Écoulement Transcritique

Pour ce cas d'exemple représenté sur la figure 3.7, nous avons choisi $F_e = 1$, et initialement on a $\bar{h}[0] = 1$ et donc $\bar{Q}[0] = F_e \frac{\sqrt{\bar{h}[0]^3}}{F_0}$. Comme condition de bords on a

$$\begin{cases} \bar{h}[0] = \bar{h}[1] \\ \bar{Q}[0] = \bar{Q}[1] \\ \bar{h}[nx] = \bar{h}[nx - 1] \\ \bar{Q}[nx] = \bar{Q}[nx - 1]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Pour la simulation numérique, nous avons mis 1500 points pour un pas d'espace $dx = 0,005$. Le temps final de la simulation numérique est $tmax = 1000$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

3.1.6 Écoulement Transcritique avec ressaut

Pour ce cas d'exemple représenté sur la figure 3.9, nous avons choisi initialement une hauteur d'eau $h = 0.25$ et un débit $Q = 0$. Comme conditions d'entrées, nous avons choisi

$$\begin{cases} \bar{h}[0] = \bar{h}[1] \\ \bar{Q}[0] = 0.08 \\ \bar{h}[nx] = \bar{h}[nx - 1] \\ \bar{Q}[nx] = \bar{Q}[nx - 1]. \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour la simulation numérique, nous avons mis 1500 points pour un pas d'espace $dx = 0,005$. Le temps final de la simulation numérique est $tmax = 1000$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

3.1.7 figures illustrant les exemples respectifs ci-dessus

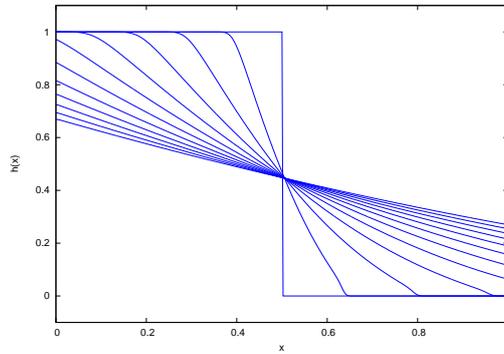


FIGURE 3.1 – Rupture de barrage tracé à $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \dots 10$. La hauteur (en bleue) diminue d'un coté et augmente de l'autre pour s'équilibrer et on observe 2 chocs qui se déplacent dans un sens opposés.

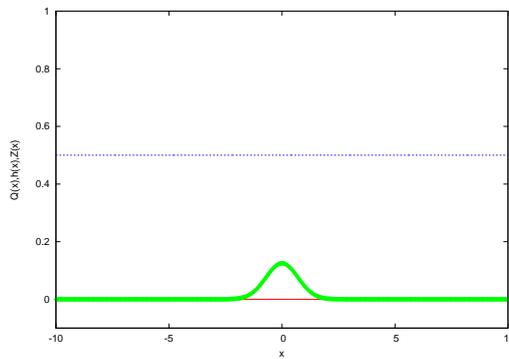


FIGURE 3.2 – cas du lac au repos, $h + Z = 1, Q = 0$. le fond est en vert. la hauteur du fluide (en bleue) $h=0.5$ et le débit (en rouge) $Q=0$. Donc pas de création de courants parasites. Ceci confirme la conservation de l'état d'équilibre du lac au repos.

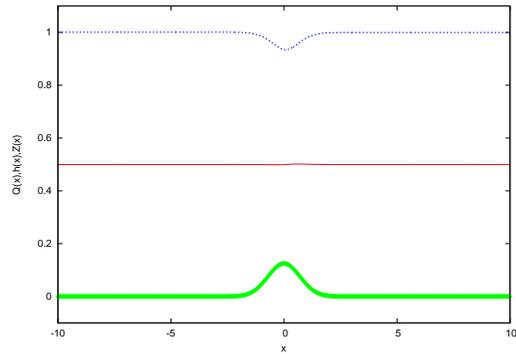
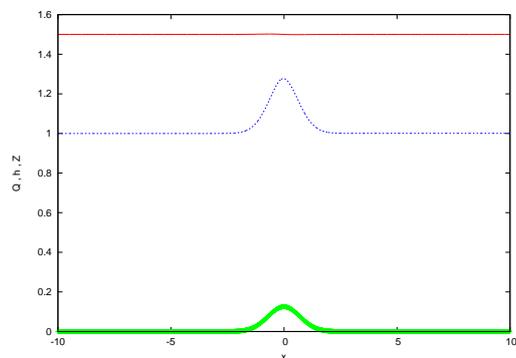


FIGURE 3.3 – cas fluvial. On remarque une déformation de la hauteur (en bleue) d'eau qui est opposée à la forme de la bosse (en verte) tandis que le débit (en rouge) du fluide est bien constant $Q=0.5=cste$.



FIGURE 3.4 – Encyclopédia NCFM



(a) t

FIGURE 3.5 – cas torrentiel. On constate une déformation de la hauteur (en bleue) d'eau qui est pareille à la forme de la bosse (en verte) tandis que le débit (en rouge) du fluide est bien constant $Q=1.5=cste$.



FIGURE 3.6 – Encyclopédia NCFM

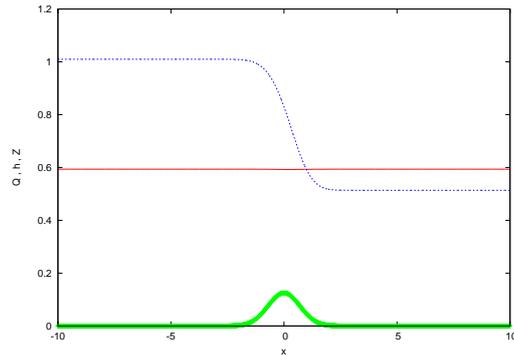
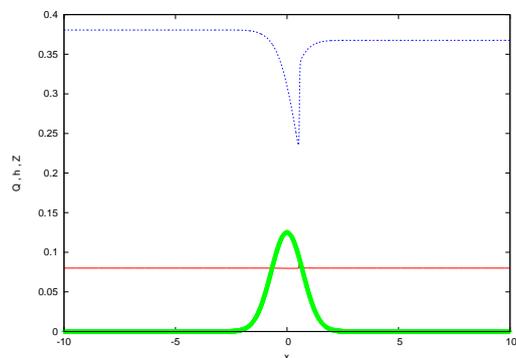


FIGURE 3.7 – cas transcritique : $F_e = 0.77, F_0 = 1, F_s = 1.61, Q = 0.6$. Le débit (en rouge) du fluide est constant $Q=0.6$ et la hauteur (en bleue) du fluide le reste jusqu'à la rencontre de la bosse (en verte) où il décroît et redevient constant après l'avoir passé.



FIGURE 3.8 – Encyclopédia NCFM



(a)

FIGURE 3.9 – cas transcritique avec ressaut : $F_e = 0.34$, $F_s = 0.36$, $Q = 0.08$. Le débit (en rouge) du fluide est constant $Q=0.08$ et la hauteur (en bleue) du fluide se déforme rapidement (ondes) dans le sens opposé à la bosse (en verte) en formant un ressaut.



FIGURE 3.10 – Encyclopédia NCFM

3.2 Cas avec frottement

Introduction

la commande wrapfigure Les exemples précédents correspondent à des écoulements où l'on a négligé le frottement. Examinons maintenant des écoulements dominés par le frottement. Dans ce cas ci, les termes instationnaires, de convection, de pression, de frottement et de pente dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement en plus de l'équation de conservation de la masse forment le système d'équations utilisé pour réaliser les études.

3.2.1 Écoulement sur un plan incliné avec prise en compte du frottement

Dans ce cas d'exemple tracé sur la figure 3.11, on prendra les conditions initiales et de bords d'un écoulement fluviale cette fois ci sur un plan incliné avec prise en compte du frottement.

A l'équilibre (régime stationnaire), le système de Saint Venant devient :

$$-\frac{\bar{h}}{F_0^2} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} - \frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2} = 0,$$

or $Z = \alpha \bar{x} + b$ donc $\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} = \alpha$, Donc en remplaçant ceci dans la relation précédente on en déduit la relation d'équilibre suivante :

$$|\bar{Q}| = \frac{\alpha Re}{3F_0^2} \bar{h}^3.$$

3.2.2 Cas Navier-Stokes associé

Dans ce cas, on met en initialement et entrée un poiseuille et en sortie une condition de Neumann pour la vitesse. l'interface air-eau se situe en $y = 1$. Dans ce cas ci on a des solutions analytiques de vitesse et de pression qui sont : $u(y) = -\bar{y}^2 + \frac{(r-m)\bar{y}}{m+1} + 2\bar{y}$, $p(x) = (1+r-x) \frac{\cos(\alpha)}{F^2}$ dans le fluide et $u(y) = \frac{(\bar{y}-2)(r\bar{y}m+m+r(\bar{y}-1))}{2m(m+1)}$, $p(x) = r(2-x) \frac{\cos(\alpha)}{F^2}$ dans l'air.

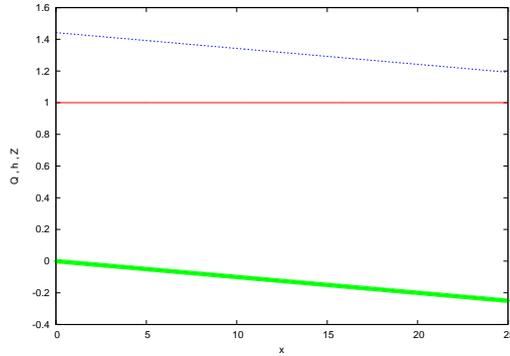


FIGURE 3.11 – sur un plan incliné avec frottement. $h = 1.442291, u = 0.693341, Q = 1$. Le fond est en vert. Le débit (en rouge) $Q=1$ et la hauteur (en bleue) du fluide sont constant le long du plan incliné.

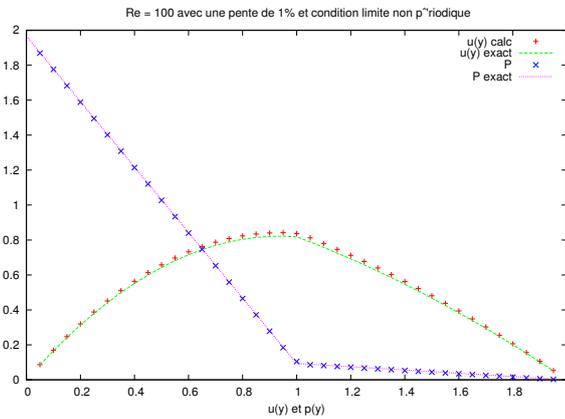
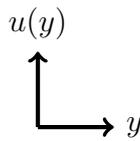


FIGURE 3.12 – Tracé de la vitesse et de la pression sur un plan incliné avec frottement. La vitesse analytique est en vert et celle calculée croix rouge. La pression analytique est en rose et celle calculée par le code est en croix bleue.

3.3 Conclusion

Tous ces résultats numériques exposés précédemment décrivent les phénomènes physiques attendus comme le déplacement dans un sens opposé des deux ondes de chocs dans le cas de la rupture du barrage, le cas du lac au repos qui ne bouge jamais, le cas de l'écoulement fluvial où les deux ondes se déplacent dans un sens opposé et la surface libre se déformant de façon opposée à la bosse à l'équilibre, le cas d'un écoulement torrentiel où les deux ondes se déplacent dans le sens de l'écoulement et la surface libre se déformant de la même manière que la bosse à l'équilibre, le cas transcritique où on passe d'un écoulement fluvial à un écoulement torrentiel et le cas transcritique avec ressaut où on observe la formation d'un ressaut au niveau de la bosse. Le cas d'un écoulement sur un plan incliné vérifie la relation d'équilibre analytique entre la hauteur et le débit calculé qui est obtenue à partir de l'équilibre entre le frottement et la pente lorsque le système évolue. Les tracées obtenus en simulant les mêmes phénomènes avec Navier-Stokes (sous Gerris flow solver) sont aussi convaincants.

Chapitre 4

LINÉARISATION DE SAINT VENANT

Introduction

Nous proposons d'étudier la réponse linéaire d'un écoulement sur un fond ondulé de petite hauteur où les termes instationnaires, de convection, de pression, de frottement, de topographie et la pente sont tous présents dans les équations utilisées. C'est un premier modèle d'écoulement de ruissellement sur un champ.

4.1 Équation linéarisée

En linéarisant les équations adimensionnées de Saint Venant obtenues dans le chapitre 2 avec $\bar{h} = \bar{h}_0 + \varepsilon \bar{h}_1$, $\bar{Z} = \alpha \bar{x} + \varepsilon \bar{f}_1$, et $\bar{Q} = 1$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial x} = 0 \\ (\bar{h}_0 - \frac{1}{h_0}) \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial x} - (\frac{6}{Re \bar{h}_0^3} - \alpha) \bar{h}_1 + \alpha \bar{h}_0 + \frac{3}{Re \bar{h}_0^2} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

En tenant compte de la relation obtenue à l'état d'équilibre qui est : $-\frac{\alpha}{F_0^2} \bar{h} - \frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2} = 0$, on obtient l'équation différentielle suivante à résoudre :

$$\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial x} + A \bar{h}_1 = B \bar{f}_1,$$

où

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\alpha}{F_0^2} - \frac{6|\bar{Q}|}{Re\bar{h}_0^3} \right) \frac{\bar{h}_0^2}{\bar{h}_0^3 - Q^2} \\ B = -\frac{\bar{h}_0^3}{F_0^2(\bar{h}_0^3 - Q^2)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2 Cas d'un fond sinusoïdal

Dans cette partie, nous ferons l'étude de la linéarisation avec un fond sinusoïdal $f(\bar{x}) = \sin(k\bar{x})$. On résoudra l'équation différentielle précédente avec $f(x) = \sin(k\bar{x})$ et on superposera la solution analytique forcée à la solution calculée par le code.

Dans ce cas ci, la solution générale obtenue est de la forme suivante :

$$\bar{h}_1 = \lambda e^{-A\bar{x}} - \frac{AB}{A^2 + k^2} \cos(k\bar{x}) - \frac{Bk}{A^2 + k^2} \sin(k\bar{x})$$

où

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\alpha}{F_0^2} - \frac{6|\bar{Q}|}{Re\bar{h}_0^3} \right) \frac{\bar{h}_0^2}{\bar{h}_0^3 - Q^2} \\ B = \frac{\bar{h}_0^3 k}{F_0^2(\bar{h}_0^3 - Q^2)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3 Cas d'un fond Gaussien

Dans cette partie, nous ferons l'étude de la linéarisation avec un fond (une bosse) Gaussien $f(\bar{x}) = e^{-\bar{x}^2}$. On résoudra l'équation différentielle précédente avec $f(\bar{x}) = e^{-\bar{x}^2}$ et on superposera la solution analytique forcée à la solution calculée par le code.

Dans ce cas ci, la solution analytique générale obtenue est de la forme suivante :

$$\bar{h}_1 = \lambda e^{-A\bar{x}} - \frac{B}{2} e^{-\bar{x}^2} - \frac{AB\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{A^2}{4}} \operatorname{erf}\left(\frac{A}{2} - \bar{x}\right)$$

où

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\alpha}{F_0^2} - \frac{6|\bar{Q}|}{Re\bar{h}_0^3} \right) \frac{\bar{h}_0^2}{\bar{h}_0^3 - Q^2} \\ B = \frac{2\bar{h}_0^3}{F_0^2(\bar{h}_0^3 - Q^2)} \end{cases} \quad (4.4)$$

et λ est une constante qui dépend des conditions aux limites.

4.4 Résultats numériques et analytiques

Sur la figure 4.1, on tracera tout d'abord la surface libre sur la bosse ainsi que le débit. La figure 4.2 représente des tracés obtenus à

partir des valeurs expérimentales de l'expérience de Darboux. Sur la figure 4.3, nous tracerons pour $k = 1$ en couleur rouge la solution forcée $\bar{h}_1 = -\frac{AB}{A^2+k^2} \cos(k\bar{x}) - \frac{Bk}{A^2+k^2} \sin(kx)$, en couleur bleue la solution calculée par le code. Sur la figure 4.4 et 4.5, nous tracerons respectivement en couleur bleue et rouge les coefficients respectifs $C_0 = -\frac{AB}{A^2+k^2}$ et $C_1 = -\frac{Bk}{A^2+k^2}$ du $\cos(kx)$ et du $\sin(kx)$ en fonction de k puis en fonction de L_0 avec L_0 et k tel que $k = \frac{2\pi}{L_0}$.

Sur la figure 4.6, on tracera tout d'abord la surface libre sur la bosse ainsi que le débit. Sur la figure 4.7 on tracera en couleur rouge la solution forcée $\bar{h}_1 = -\frac{B}{2}e^{-\bar{x}^2} - \frac{AB\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{A^2}{4}}\text{erf}(\frac{A}{2} - \bar{x})$, en couleur bleue la solution calculée par le code et en verte le fond.

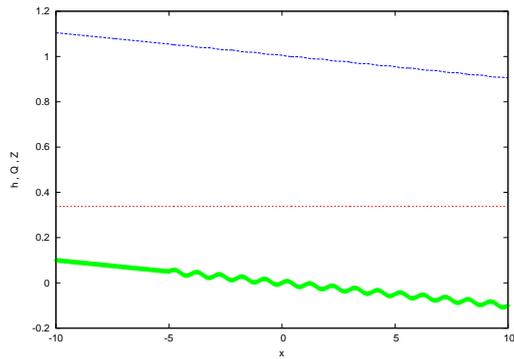


FIGURE 4.1 – écoulement sur une pente racolée à un fond sinusoïdal. Le débit (en rouge) $Q=0.338242$ est constant tandis que la hauteur (en bleue) reste constant jusqu'à l'encontre des perturbations où elle se déforme suivant la forme du fond (en vert).

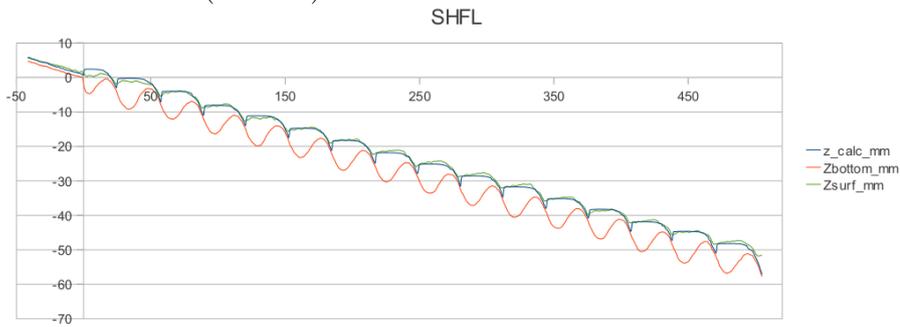


FIGURE 4.2 – écoulement sur un tôle ondulé. Tracé effectué à partir des valeurs expérimental de Darboux. Le fond (tôle) est en rouge, la surface libre expérimental est en bleue et le débit est en vert.

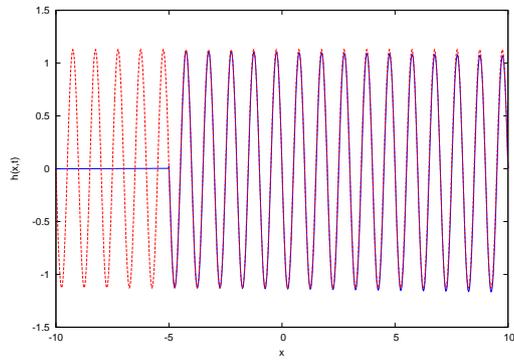


FIGURE 4.3 – Solution analytique forcée (en rouge) et solution calculée par le code (en bleue). La solution calculée converge vers la solution analytique forcée à partir de la position où commence l'ondulation.

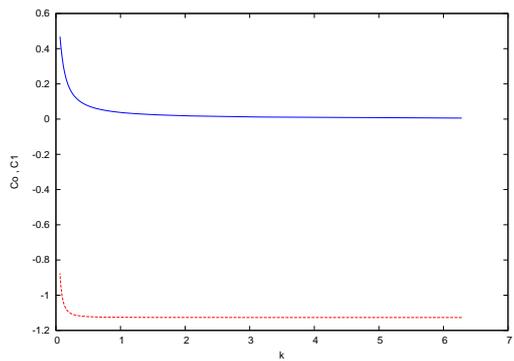


FIGURE 4.4 – coefficients C_0 (en bleue) et C_1 (en rouge) en fonction du k de $\sin(kx)$

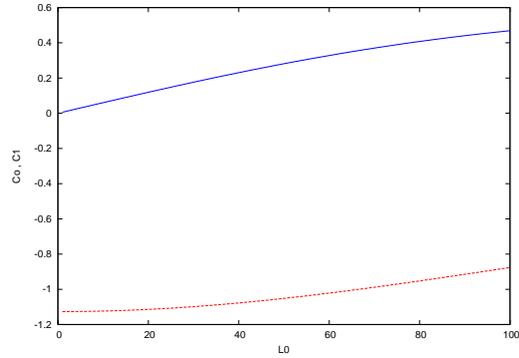


FIGURE 4.5 – coefficients C_0 (en bleue) et C_1 (en rouge) en fonction de L_0

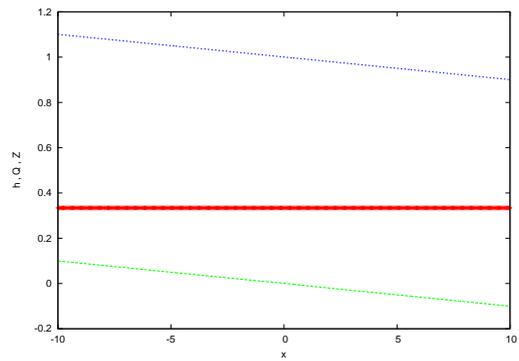


FIGURE 4.6 – Écoulement sur un fond Gaussien. Le débit (en rouge) $Q=0.333936$ est constant tandis que la hauteur (en bleue) se déforme suivant la forme du fond (en vert).

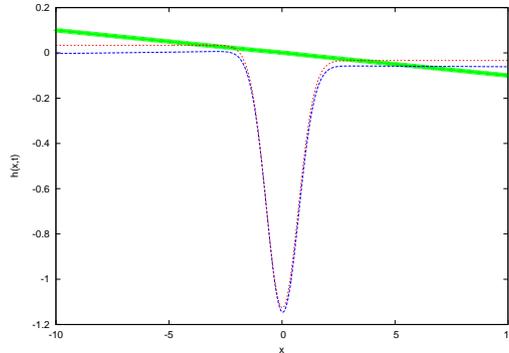


FIGURE 4.7 – Solution analytique forcée (en rouge) et solution calculé par le code (en bleue). La solution calculée se rapproche plus de la solution analytique forcée au niveau où la perturbation se fait plus ressentir (la bosse en verte).

4.5 Perspectives

Les solutions analytiques forcées et numériques sont proches, ce qui indique que les différentes perturbations introduites à l'état d'équilibre ont été capté par le code. Dans le cas du fond sinusoïdale, le travail devra se poursuivre en se mettant dans les conditions de l'expérience de Darboux et de réaliser la simulation pour obtenir ces résultats expérimentaux.

Chapitre 5

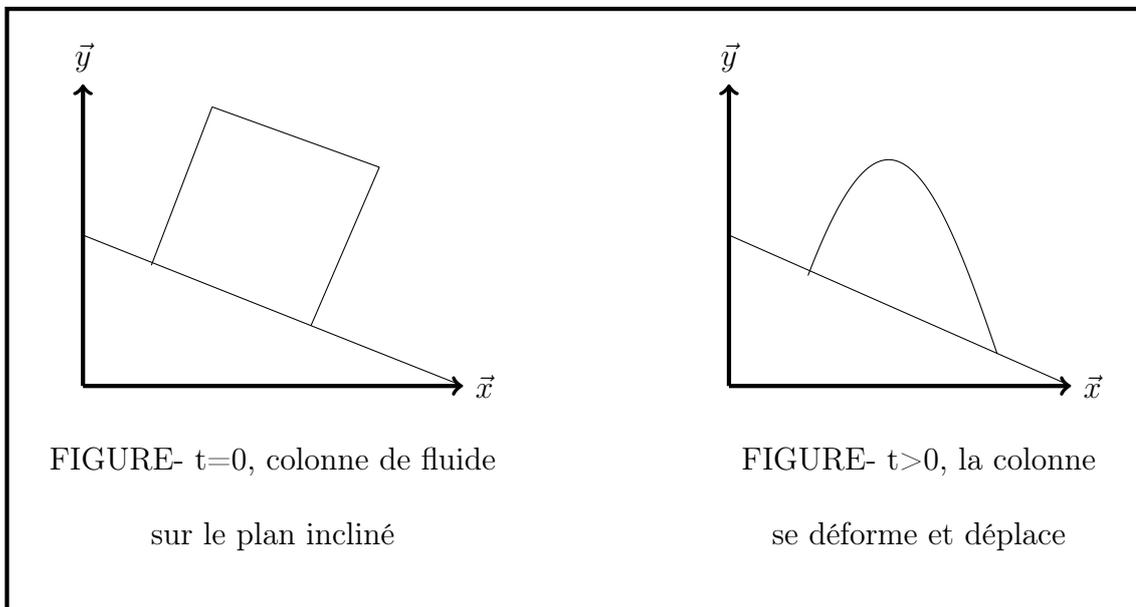
SOLUTION SIMILAIRE, COMPARAISON NAVIER-STOKES SAINT VENANT

Introduction

Nous étudions dans cette partie les écoulements dominés par la viscosité à appliquer pour des écoulements très visqueux (lave, coulée de boue ...). L'objectif est de résoudre numériquement ce problème par les équations de Saint Venant, comparer dans un premier temps les solutions obtenues par simulation numérique aux solutions similaires (voir [6]) obtenues analytiquement des équations de Saint venant adimensionnées qu'on détaillera dans la suite. Dans un second temps, on effectuera la simulation numérique sur le logiciel Gerris flow solver (voir [9]) utilisant les équations de Navier-Stokes avec un modèle diphasique (fluide-gaz) et on comparera les deux solutions numériques à savoir la hauteur (équations de Saint Venant) et l'interface (équations de Navier-Stokes) du fluide.

Le problème ici consiste à mettre sur un fond plat puis sur un plan incliné une colonne d'eau qu'on laisse couler toute seule (voir Huppert [6]). C'est une double rupture de barrage visqueux.

5.1 Cas d'un plan incliné : solutions similaires



Le système d'équations utilisé dans cette section comporte l'équation de conservation de la masse et celle de conservation de la masse dans la quelle sont considérés que les termes instationnaires, de convection de pression, de frottement et la pente.

5.1.1 Équations

Le système d'équation de Saint Venant sur un plan incliné ($\bar{Z} = \alpha\bar{x} + \beta$) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\frac{\bar{Q}^2}{\bar{h}} + \frac{\bar{h}^2}{2F_0^2})}{\partial \bar{x}} = -\frac{\bar{h}}{F_0^2} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} - \frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2},$$

+ les conditions limites.

L'équilibre entre la pente et la viscosité entraîne que $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}}$ est petit, donc négligeable. Le fluide ayant une vitesse faible durant le mouvement entraîne que

son débit est faible. Donc le terme $\frac{\bar{Q}^2}{\bar{h}}$ est petit et donc négligeable. La pente de la hauteur du fluide ($\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$) étant très faible devant la pente du plan incliné ($\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}}$) donc le terme $\frac{\partial(\frac{\bar{h}^2}{2F_0^2})}{\partial \bar{x}}$ est aussi négligeable dans les équations. Alors le système d'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} &= 0, \\ -\frac{\bar{h}}{F_0^2} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} - \frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2} &= 0. \end{aligned}$$

+ les conditions limites.

De la deuxième relation du système, on déduit que $\bar{Q} = |\bar{Q}| = -\frac{Re}{3F_0^2} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} \bar{h}^3$ car $\bar{Q} > 0$. En remplaçant \bar{Q} par son expression dans la première relation du système, on a l'équation suivante :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + k \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

+ les conditions limites.

avec $k = -\frac{Re}{F_0^2} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\alpha Re}{F_0^2}$.

5.1.2 Expression de la solution similaire

L'idée de départ est que la solution soit similaire *ie* à la même forme à toutes les échelles considérées et la masse soit aussi conservée à toutes les échelles.

Soit $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) = f(\bar{x}, \bar{t})$ la solution de l'équation dans l'échelle (\bar{x}, \bar{t}) . Soit (\hat{x}, \hat{t}) une échelle quelconque avec \hat{h} solution de l'équation dans cette échelle telle qu'on a : $\bar{h} = H\hat{h}$, $\bar{x} = X\hat{x}$, $\bar{t} = T\hat{t}$. Alors on a :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + k \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} = \frac{H}{T} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + k \frac{H^3}{X} \hat{h}^2 \frac{\partial(\hat{h})}{\partial \hat{x}}.$$

La solution étant similaire à toutes les échelles considérées entraîne que l'équation est aussi la même à toutes les échelles et donc les deux équations aux deux échelles différentes considérées sont les mêmes si et seulement

si

$$\frac{H}{T} = \frac{H^3}{X} \implies T = \frac{X}{H^2}.$$

$$\int \bar{h} d\bar{x} = HX \int \hat{h} d\hat{x},$$

La masse étant constante à toutes les échelles considérées entraîne que

$$HX = 1 \implies H = \frac{1}{X}.$$

Alors \hat{h} est solution de l'équation dans l'échelle (\hat{x}, \hat{t}) telle qu'on a :

$$\bar{h} = \frac{1}{X} \hat{h}, \bar{x} = X\hat{x}, \bar{t} = X^3\hat{t},$$

$$\bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) = f(\bar{x}, \bar{t}) \implies \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) - f(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \implies F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = 0,$$

$$F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) - f(\bar{x}, \bar{t}),$$

$$F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = F\left(\frac{1}{X} \hat{h}, X\hat{x}, X^3\hat{t}\right) = F\left(\frac{1}{X} \hat{h} X\hat{x}, \frac{X\hat{x}}{(X\hat{t})^{1/3}}, X^3\hat{t}\right) = F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}, X^3\hat{t}\right),$$

La première égalité est obtenue en remplaçant dans F les variables $\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}$ par leurs expressions en fonction de $\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}$ obtenus ci-dessus, la deuxième égalité est obtenue en multipliant la première variable par la deuxième et la deuxième variable par la racine cubique de la troisième dans le but d'éliminer X dans les deux premières variables tout en gardant la troisième variable intact. La troisième égalité est obtenue en éliminant les X par simplification.

$$\forall X, \hat{t}, F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}, X^3\hat{t}\right) \text{ or } F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = 0 \text{ donc } F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}, X^3\hat{t}\right) = 0.$$

Alors d'après ce qui précède en faisant varier X et \hat{t} , la fonction $F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}, X^3\hat{t}\right)$ est toujours nulle. Ceci veut dire que cette fonction est indépendante de X et \hat{t} et donc de indépendante de la variable $X^3\hat{t}$ donc on a : $\forall X, \hat{t} F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}, X^3\hat{t}\right) = 0 \implies F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}\right) = 0$ et donc d'après la définition de F on peut écrire :

$$F\left(\hat{x}\hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}\right) = 0 \implies \hat{x}\hat{h} - f_0\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}\right) = 0 \implies \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{x}} f_0\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}\right).$$

En nommant par η la variable similaire, alors $\eta = \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}} \implies \hat{x} = \eta \hat{t}^{1/3}$ et donc $\hat{h}(\eta, \hat{t}) = \frac{\hat{t}^{-1/3}}{\eta} f_0(\eta)$. En posant $\mathcal{H}(\eta) = \frac{1}{\eta} f_0(\eta)$, alors $\hat{h}(\eta, \hat{t}) = \mathcal{H}(\eta) \hat{t}^{-1/3}$. $\hat{h}(\eta, \hat{t})$ est la solution similaire et $\mathcal{H}(\eta)$ est en fonction de η la forme invariante de la solution quelque soit l'échelle considérée.

5.1.3 Expression analytique de la solution similaire

En remplaçant $\widehat{h}(\eta, \widehat{t})$ par son expression précédente dans l'équation on a :

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{3}\widehat{t}^{-2/3}\mathcal{H}(\eta) + \widehat{t}^{-1/3}\frac{\partial\eta}{\partial\widehat{t}}\frac{\partial\mathcal{H}(\eta)}{\partial\eta} + k\widehat{t}^{-2/3}\mathcal{H}^2(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\widehat{x}}\frac{\partial\mathcal{H}(\eta)}{\partial\eta} = 0, \\ \frac{\partial\eta}{\partial\widehat{x}} = \widehat{t}^{-1/3} = \frac{\eta}{\widehat{x}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\widehat{t}} = -\frac{\widehat{x}}{3}\widehat{t}^{-4/3} = -\frac{\eta}{3\widehat{t}}, \quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial\widehat{x}}\right)^2 = \frac{\eta^2}{\widehat{x}^2}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}(\eta)}{\partial\eta} = \mathcal{H}'(\eta), \quad \frac{\partial^2\mathcal{H}(\eta)}{\partial\eta^2} = \mathcal{H}''(\eta). \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions précédentes dans l'équation, on aboutit à une équation différentielle du second ordre de la forme suivante qu'on résout :

$$\mathcal{H}(\eta) + \eta\mathcal{H}'(\eta) - 3k\mathcal{H}^2(\eta)\mathcal{H}'(\eta) = 0,$$

$$\implies (\eta\mathcal{H}(\eta))' - (k\mathcal{H}^3(\eta))' = 0 \implies \eta\mathcal{H}(\eta) - k\mathcal{H}^3(\eta) = C_0,$$

où C_0 est une constante arbitraire réelle à déterminer. Pour $\eta = 0$, on a $C_0 = -k\mathcal{H}(0)$ et donc en notant que $\mathcal{H}(0) = H_0$ on a : $\eta\mathcal{H}(\eta) - k\mathcal{H}^3(\eta) = -kH_0$ d'où on a $\eta = \frac{k\mathcal{H}^3(\eta) - kH_0}{\mathcal{H}(\eta)}$ qui est la solution implicite (représentée sur la figure 5.2) de l'équation différentielle.

La forme de la solution explicite obtenue avec les formules de Cartan est :

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{\sqrt[3]{2}(9H_0^3k^3 + \sqrt{81H_0^6k^6 - 12\eta^3k^3})^{2/3} + 2\sqrt[3]{3}\eta k}{6^{2/3}\sqrt[3]{9H_0^3k^3 + \sqrt{81H_0^6k^6 - 12\eta^3k^3}}},$$

d'où on a :

$$\widehat{h}(\eta, \widehat{t}) = \widehat{t}^{-1/3} \left(\frac{\sqrt[3]{2}(9H_0^3k^3 + \sqrt{81H_0^6k^6 - 12\eta^3k^3})^{2/3} + 2\sqrt[3]{3}\eta k}{6^{2/3}\sqrt[3]{9H_0^3k^3 + \sqrt{81H_0^6k^6 - 12\eta^3k^3}}} \right).$$

En considérant la forme de la solution implicite on a pour $H_0 = 0$, $\mathcal{H}(\eta) = \sqrt{\frac{\eta}{k}}$ d'où on a $\widehat{h}(\eta, \widehat{t}) = \widehat{t}^{-1/3} \sqrt{\frac{\eta}{k}}$ et donc $\widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{t}) = \sqrt{\frac{\widehat{x}}{k\widehat{t}}}$.

Soit A la masse du fluide, η_0 et η_1 les solutions de l'équation $\mathcal{H}(\eta) = 0$ telle que $\eta_0 < \eta_1$. La masse étant constante et $\mathcal{H}(\eta)$ étant la forme invariante de la solution similaire alors on a $\int_{\eta_0}^{\eta_1} \mathcal{H}(\eta) d\eta = A$, condition qui permet de déterminer la constante C_0 .

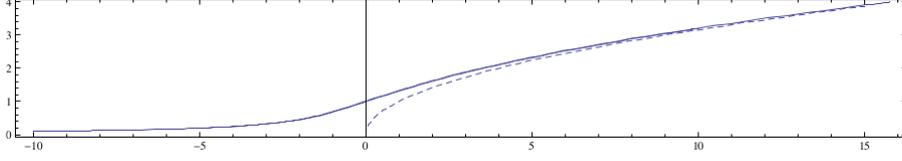


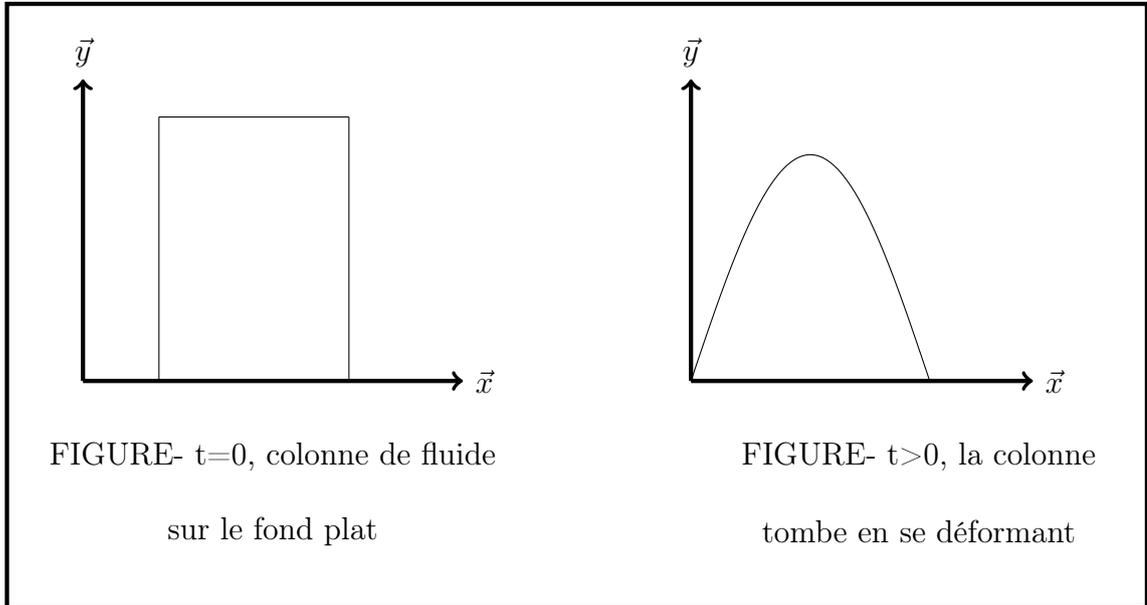
FIGURE 5.1 – Solution sous forme implicite qui est égal à $\sqrt{\eta}$ lorsque η devient grand. $\sqrt{\eta}$ est la solution finale.

5.1.4 Expression analytique du front et du sommet

Le front est l'ensemble des $\hat{x}_F(\hat{t})$ tel que $\hat{h} = 0$ et le sommet est $\hat{h}(0, \hat{t})$. Soit A une masse initiale qui se déplace entre \hat{x}_F qui est la position du front droit et 0 la position du front gauche qui ne bouge pas au cours du mouvement. En supposant que $H_0 = 0$ alors $\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \sqrt{\frac{\hat{x}}{kt}}$. Donc la masse est $A = \int_0^{\hat{x}_F} \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) d\hat{x} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\hat{x}_F^3}{kt}} \implies \hat{x}_F = \left(\frac{9A^2 kt}{4}\right)^{1/3}$ est la forme du front.

$\hat{h}(\eta, \hat{t}) = 0 \implies \mathcal{H}(\eta) = 0 \implies \eta = \eta_0$ ou $\eta = \eta_1 \implies \hat{x}_F = \eta_0 \hat{t}^{1/3}$ ou $\hat{x}_F = \eta_1 \hat{t}^{1/3}$. $\hat{h}(0, \hat{t}) = \hat{t}^{1/5} \mathcal{H}(\eta)(0)$. Donc $\hat{x}_F = \eta_0 \hat{t}^{1/3}$, $\hat{x}_F = \eta_1 \hat{t}^{1/3}$ et $\hat{h}(0, \hat{t}) = \hat{t}^{1/5} \mathcal{H}(\eta)(0)$ sont respectivement les expressions analytiques du front gauche et droite puis du sommet en $x = 0$ de la solution similaire.

5.2 Cas d'un fond plat : Solutions similaires



Le système d'équations utilisé dans ce cas ci comporte l'équation de conservation de la masse et celle de conservation de la masse dans la quelle sont considérés que les termes instationnaires, de convection de pression et de frottement.

5.2.1 Équations

Le système d'équation de Saint Venant sur un fond plat ($\bar{Z} = 0$) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{h}} + \frac{\bar{h}^2}{2F_0^2} \right)}{\partial \bar{x}} = -\frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2},$$

+ les conditions limites.

L'équilibre entre la pression et la viscosité entraîne que $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}}$ est petit, donc négligeable. Le fluide ayant une vitesse faible durant le mouvement entraîne que son débit est faible. Donc le terme $\frac{\bar{Q}^2}{\bar{h}}$ est petit et donc négligeable.

Alors le système d'équation devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} &= 0, \\ \frac{\partial(\frac{\bar{h}^2}{2F_0^2})}{\partial \bar{x}} &= -\frac{3}{Re} \frac{|\bar{Q}|}{\bar{h}^2}.\end{aligned}$$

+ les conditions limites.

De la deuxième relation du système, on déduit que $\bar{Q} = |\bar{Q}| = k\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ car $\bar{Q} > 0$ avec $k = -\frac{Re}{3F_0^2}$. En remplaçant \bar{Q} par son expression dans la première relation du système on a l'équation suivante :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + k \frac{\partial(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})}{\partial \bar{x}} = 0,$$

+ les conditions limites.

5.2.2 Expression de la solution similaire

L'idée de départ est que la solution soit similaire *ie* à la même forme à toutes les échelles considérées et la masse soit aussi conservée à toutes les échelles.

Soit $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) = f(\bar{x}, \bar{t})$ la solution de l'équation dans l'échelle (\bar{x}, \bar{t}) . Soit (\hat{x}, \hat{t}) une échelle quelconque avec \hat{h} solution de l'équation dans cette échelle telle qu'on a : $\bar{h} = H\hat{h}$, $\bar{x} = X\hat{x}$, $\bar{t} = T\hat{t}$. Alors on a :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + k \frac{\partial(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})}{\partial \bar{x}} = \frac{H}{T} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + k \frac{H^4}{X^2} \frac{\partial(\hat{h}^3 \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}})}{\partial \hat{x}}.$$

La solution étant similaire à toutes les échelles considérées entraîne que l'équation est aussi la même à toutes les échelles et donc les deux équations aux deux échelles différentes considérées sont les mêmes si et seulement si

$$\begin{aligned}\frac{H}{T} = \frac{H^4}{X^2} &\implies T = \frac{X^2}{H^3}. \\ \int \bar{h} d\bar{x} &= HX \int \hat{h} d\hat{x},\end{aligned}$$

La masse étant constante à toutes les échelles considérées entraîne que :

$$\frac{H}{T} = \frac{H^4}{X^2} \implies T = \frac{X^2}{H^3}.$$

$$\int \bar{h} d\bar{x} = HX \int \hat{h} d\hat{x} = 1 \implies H = \frac{1}{X}.$$

Alors \hat{h} est solution de l'équation dans l'échelle (\hat{x}, \hat{t}) telle qu'on a :

$$\bar{h} = \frac{1}{X} \hat{h}, \bar{x} = X \hat{x}, \bar{t} = X^5 \hat{t},$$

$$\bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) = f(\bar{x}, \bar{t}) \implies \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) - f(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \implies F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = 0,$$

$$F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) - f(\bar{x}, \bar{t}),$$

$$F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = F\left(\frac{1}{X} \hat{h}, X \hat{x}, X^5 \hat{t}\right) = F\left(\frac{1}{X} \hat{h} X \hat{x}, \frac{X \hat{x}}{(X^5 \hat{t})^{1/5}}, X^5 \hat{t}\right) = F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}, X^5 \hat{t}\right).$$

La première égalité est obtenue en remplaçant dans F les variables $\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}$ par leurs expressions en fonction de $\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}$ obtenus ci-dessus, la deuxième égalité est obtenue en multipliant la première variable par la deuxième et la deuxième variable par la racine cinquième de la troisième dans le but d'éliminer X dans les deux premières variables tout en gardant la troisième variable intacte et la troisième égalité est obtenue en éliminant les X par simplification.

$$\forall X, \hat{t}, F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}, X^5 \hat{t}\right) \text{ or } F(\bar{h}, \bar{x}, \bar{t}) = 0 \text{ d'où } F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}, X^5 \hat{t}\right) = 0.$$

Alors d'après ce qui précède, en faisant varier X et \hat{t} , la fonction $F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}, X^5 \hat{t}\right)$ est toujours nulle. Ceci veut dire que cette fonction est indépendante de X et \hat{t} et donc de indépendante de la variable $X^5 \hat{t}$ donc on a : $\forall X, \hat{t}, F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}, X^5 \hat{t}\right) = 0 \implies F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}\right) = 0$ et donc d'après la définition de F on peut écrire : $F\left(\hat{x} \hat{h}, \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}\right) = 0 \implies \hat{x} \hat{h} - f_0\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}\right) = 0 \implies \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{x}} f_0\left(\frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}}\right).$

En nommant par η la variable similaire, alors $\eta = \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/5}} \implies \hat{x} = \eta \hat{t}^{1/5}$ et donc $\hat{h}(\eta, \hat{t}) = \frac{\hat{t}^{-1/5}}{\eta} f_0(\eta)$. En posant $\mathcal{H}(\eta) = \frac{1}{\eta} f_0(\eta)$ alors $\hat{h}(\eta, \hat{t}) = \mathcal{H}(\eta) \hat{t}^{-1/5}$. $\hat{h}(\eta, \hat{t})$ est la solution similaire et $\mathcal{H}(\eta)$ est en fonction de η la forme invariante de la solution quelque soit l'échelle considérée.

5.2.3 Expression analytique de la solution similaire

En remplaçant $\widehat{h}(\eta, \widehat{t})$ par son expression précédente dans l'équation on a :

$$\widehat{t}^{-1/5} \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{t}} \mathcal{H}(\eta) + \widehat{t}^{-1/5} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{t}} \frac{\partial \mathcal{H}(\eta)}{\partial \eta} + k(3\eta^2 \mathcal{H}(\eta))^2 \left(\widehat{t}^{-1/5} \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial \mathcal{H}(\eta)}{\partial \eta} \right)^2 + \eta^3 \mathcal{H}(\eta)^3 \widehat{t}^{-1/5} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \widehat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\eta)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \widehat{x}} = \widehat{t}^{-1/5} = \frac{\eta}{\widehat{x}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{t}} = -\frac{\widehat{x}}{5\widehat{t}^{6/5}} = -\frac{\eta}{5\widehat{t}}, \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial \widehat{x}} \right)^2 = \frac{\eta^2}{\widehat{x}^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}(\eta)}{\partial \eta} = \mathcal{H}'(\eta), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\eta)}{\partial \eta^2} = \mathcal{H}''(\eta).$$

En remplaçant ces expressions précédentes dans l'équation, on aboutit à une équation différentielle du second ordre de la forme suivante qu'on résout :

$$\mathcal{H}(\eta) + \eta \mathcal{H}'(\eta) + 5k(3\mathcal{H}^2(\eta)\mathcal{H}'(\eta) + \mathcal{H}^3(\eta)\mathcal{H}''(\eta)) = 0,$$

$$\implies (\eta \mathcal{H}(\eta))' + 5k(\mathcal{H}^3(\eta)\mathcal{H}'(\eta))' = 0 \implies \eta \mathcal{H}(\eta) + 5k(\mathcal{H}^3(\eta)\mathcal{H}'(\eta)) = C_0.$$

Initialement on a un problème symétrique d'axe $x = 0$. On veut obtenir aussi une solution similaire symétrique d'axe $x = 0$ qui est une parabole en 0. Donc ceci entraîne que $\mathcal{H}'(0) = 0$ et $\mathcal{H}(0) = 0$ d'où $C_0 = 0$.

$$\implies 5k(\mathcal{H}^2(\eta)\mathcal{H}'(\eta)) = -\eta \implies \left(\frac{5k}{3} \mathcal{H}^3(\eta) \right)' = -\eta \implies \frac{5k}{3} \mathcal{H}^3(\eta) = -\frac{1}{2}\eta^2 + C_1$$

$$\implies \mathcal{H}(\eta) = \left(\frac{5k}{3} \right)^{1/3} \left(C_1 - \frac{1}{2}\eta^2 \right)^{1/3} \implies \widehat{h}(\eta, \widehat{t}) = \widehat{t}^{-1/5} \left(\frac{5k}{3} \right)^{1/3} \left(C_1 - \frac{1}{2}\eta^2 \right)^{1/3},$$

où C_1 est une constante arbitraire réelle à déterminer. $\mathcal{H}(\eta)$ représenté la solution similaire analytique et sa forme est représentée sur la figure 5.1.

$\mathcal{H}(\eta) = 0 \implies \eta = \sqrt{2C_1}$ ou $\eta = -\sqrt{2C_1}$. Soit A la masse du fluide. La masse étant constante et $\mathcal{H}(\eta)$ étant la forme invariante de la solution similaire alors on a $\int_{-\sqrt{2C_1}}^{\sqrt{2C_1}} \mathcal{H}(\eta) d\eta = A$, condition qui permet de déterminer la constante C_1 .

5.2.4 Expression analytique du front et du sommet

Le front est l'ensemble des $\widehat{x}_F(\widehat{t})$ où $\widehat{h} = 0$ et le sommet est $\widehat{h}(0, \widehat{t})$. donc on :

$$\widehat{h}(\eta, \widehat{t}) = 0 \implies \left(C_1 - \frac{1}{2}\eta^2 \right)^{1/3} = 0 \implies |\eta| = \sqrt{2C_1} \implies |\widehat{x}_F| = |\eta_F| \widehat{t}^{1/5} = \sqrt{2C_1} \widehat{t}^{1/5},$$

$$\widehat{h}(0, \widehat{t}) = \widehat{t}^{-1/5} \left(\frac{3C_1}{5k} \right)^{1/3}.$$

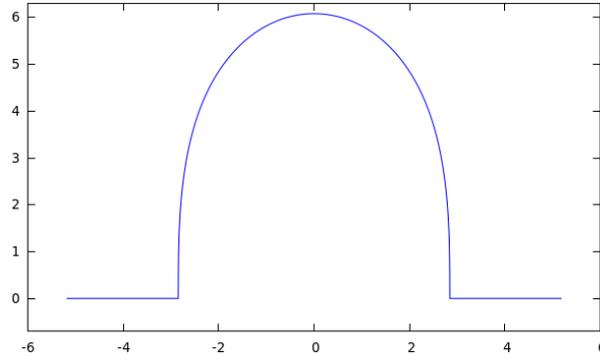


FIGURE 5.2 – Forme de la solution similaire analytique

Donc $\hat{x}_F = \sqrt{2C_1\hat{t}^{1/5}}$ où $\hat{x}_F = -\sqrt{2C_1\hat{t}^{1/5}}$ et $\hat{h}(0, \hat{t}) = \hat{t}^{-1/5}(\frac{3C_1}{5k})^{1/3}$ sont respectivement les expressions analytiques du front gauche et droite puis du sommet de la solution similaire.

5.3 Simulations

Introduction

Dans ce paragraphe on exposera dans un premier temps les résultats (*ie* la hauteur, le logarithme de la position du front droit, du sommet et la solution similaire) numériques obtenus lors de la simulation par les équations de Saint Venant d'une colonne de fluide visqueux qu'on laisse couler sur un fond plat avec frottement qu'on comparera aux solutions analytiques obtenues précédemment. Ensuite, On superposera la solution numérique (la hauteur) de Saint Venant à celle de Navier-Stokes. Dans un second temps, on fera de même dans le cas du fond incliné.

La figure 5.2 (respectivement 5.1) comportera la forme de la solution similaire analytique sur un fond plat (respectivement sur un fond incliné). Sur la figure 5.12 (respectivement sur la figure 5.3) sera tracé l'effondrement de la colonne du fluide au cours du temps avec frottement existant sur un fond plat (respectivement sur un fond incliné) et celui sans frottement sur le fond plat sera tracé sur la figure 5.13. la superposition du logarithme front droit et du sommet numérique et analytique sera tracée respectivement sur les figures 5.14 et 5.15 (respectivement sur les figures 5.4 et 5.5) pour le cas d'un fond plat (respectivement pour le cas d'un fond incliné). La solution similaire analytique et numérique de la colonne du fluide au cours du temps

seront tracées sur la figure 5.16 (respectivement sur la figure 5.6) pour le cas d'un fond plat (respectivement pour le cas d'un fond incliné). Sur la figure 5.17 (respectivement sur les figures 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 et 5.11) sera superposée la hauteur numérique calculé par le modèle de Saint Venant et de l'interface numérique calculée par le modèle Navier-Stokes sur un fond plat (respectivement sur un fond incliné).

5.3.1 Résultats numériques obtenus sur un fond incliné

Pour ce cas, nous avons choisi initialement $\bar{h}[0] = 0.1$ pour \bar{x} compris entre 0 et 10 puis $\bar{h}[0] = 0$ pour \bar{x} non compris entre 0 et 10 et $\bar{Q}[0] = 0$. Comme condition limite on a choisi

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}}(0) = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}}(1) = 0 \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}(0) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}(1) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour la simulation numérique, nous avons mis 1500 points pour un pas d'espace $dx = 0,005$. Le temps final de la simulation numérique est $t_{max} = 1000$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

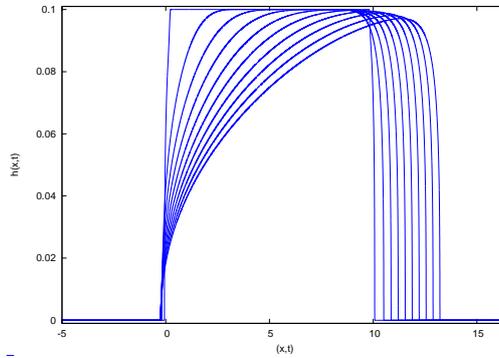


FIGURE 5.3 – Hauteur du fluide tracé à $t = 0, 10, 20, 30, \dots, 100$. La colonne fluide tombe en formant un tas qui se déplacent grâce au fond incliné.

Pour ce cas, nous avons choisi initialement $\bar{h}[0] = 0.4$ pour \bar{x} compris entre -2.5 et 2.5 puis $\bar{h}[0] = 0$ pour \bar{x} non compris entre -2.5 et 2.5 et $\bar{Q}[0] = 0$. Comme condition limite on a choisi

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}}(0) = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}}(1) = 0 \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}(0) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}(1) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

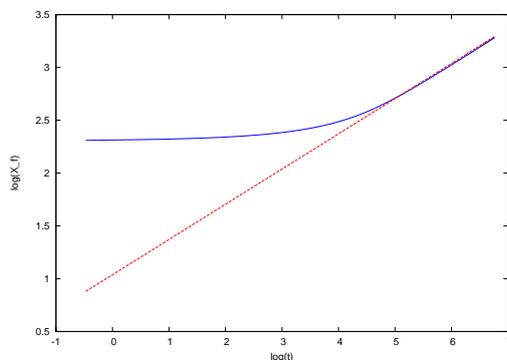


FIGURE 5.4 – Logarithme du front droit numérique (en bleu) et analytique (en rouge) en fonction du temps. Aux $\log(t)$ plus court, les deux droites sont distincts mais aux plus long elles sont plus proches l'une de l'autre. Elles ont le même coefficient directeur qui est $1/3$ aux grands $\log(t)$.

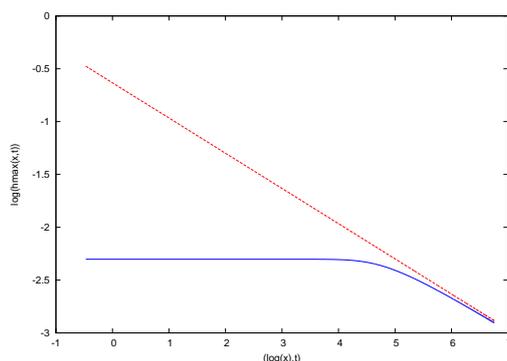


FIGURE 5.5 – Logarithme de la hauteur maximal analytique (en rouge) et numérique (en bleue) en $t^{\frac{1}{3}}$ tracés en fonction du temps. Plus le logarithme du temps devient grand, meilleur c'est le rapprochement entre les deux droites en log (même coefficient directeur qui est $1/5$).

Pour la simulation numérique, nous avons mis 1500 points pour un pas d'espace $dx = 0,005$. Le temps final de la simulation numérique est $t_{max} = 1000$ et le pas de temps est $dt = 0.001$.

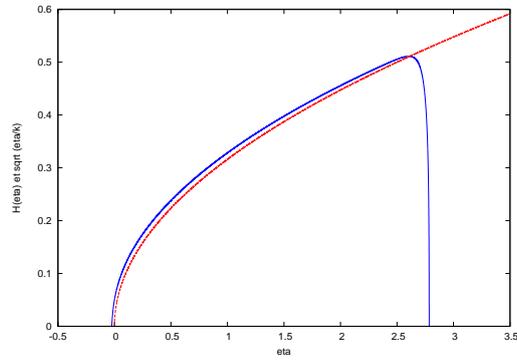


FIGURE 5.6 – $\mathcal{H}(\eta)$ (en bleu) et $\sqrt{\eta/k}$ (en rouge) au temps $t = 400$. A partir de l'instant $t = 400$ la solution similaire est semblable à la fonction $\sqrt{\eta/k}$ comme l'a prédit la théorie.

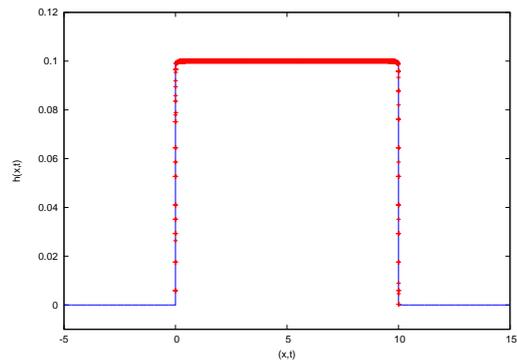


FIGURE 5.7 – Superposition de hauteur Saint Venant (en traits) et Navier Stokes (en croix) tracé à $t = 0$.

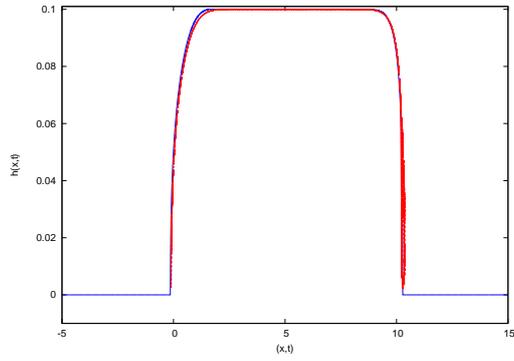


FIGURE 5.8 – Superposition de hauteur Saint Venant (en traits) et Navier Stokes (en croix) tracé à $t = 5$.

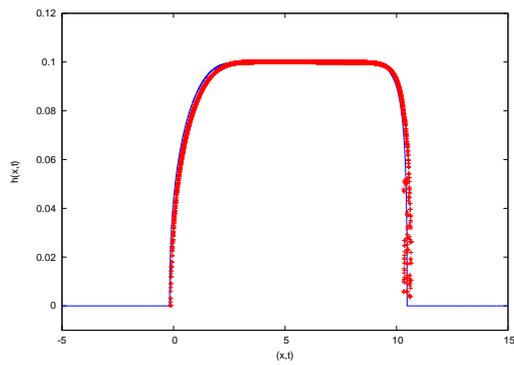


FIGURE 5.9 – Superposition de hauteur Saint Venant (en traits) et Navier Stokes (en croix) tracé à $t = 10$.

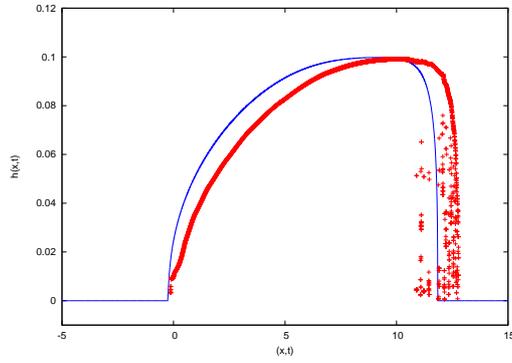


FIGURE 5.10 – Superposition de hauteur Saint Venant (en traits) et Navier Stokes (en croix) tracé à $t = 50$.

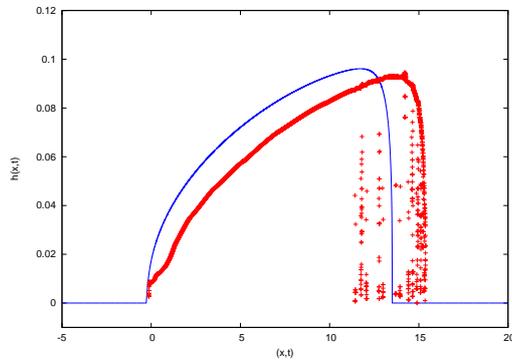


FIGURE 5.11 – Superposition de hauteur Saint Venant (en traits) et Navier Stokes (en croix) tracé à $t = 100$. L'interface et la hauteur sont les mêmes aux instants $t = 0, 5$; quasiment égales à l'instant $t = 10$ et sont décalées mais gardent la même forme aux instants $t = 50, 100, \dots$

5.3.2 Résultats numériques obtenus sur un fond plat

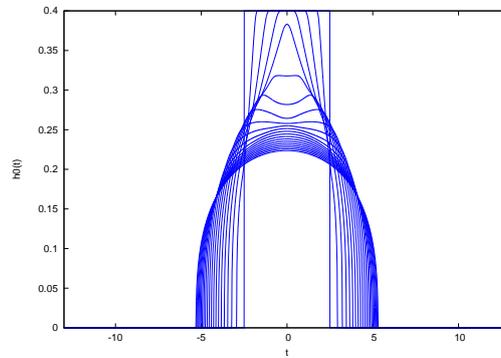


FIGURE 5.12 – Hauteur dans le cas avec frottement tracé à $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$. la colonne de fluide tombe en ayant une forme parabolique à partir d'un instant et tombe moins vite à cause du frottement existant sur le fond empêchant la progression rapide des deux fronts.

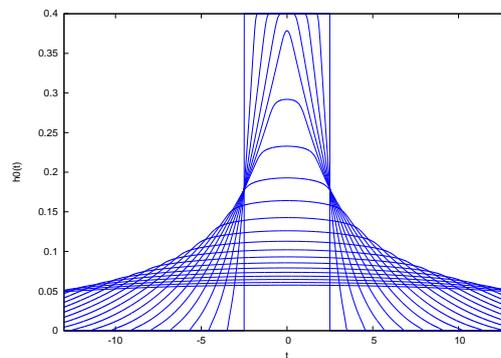


FIGURE 5.13 – Hauteur dans le cas sans frottement tracé à $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$. La colonne fluide tombe en formant une parabole plus ouverte que la précédente. Ceci est du au fait que les deux fronts ne sont pas confrontés aux frottements du fond et par conséquent progresse plus vite.

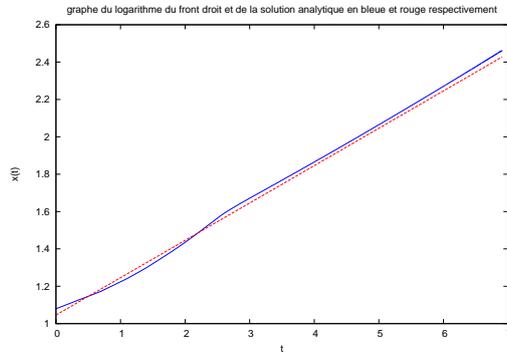


FIGURE 5.14 – Logarithme de la position du front droit numérique (en bleu) et analytique (en rouge) en fonction du temps. A partir de certain instant, les deux droites en log se rapprochent plus sans se toucher. Elles ont le même coefficient directeur qui est $1/5$.

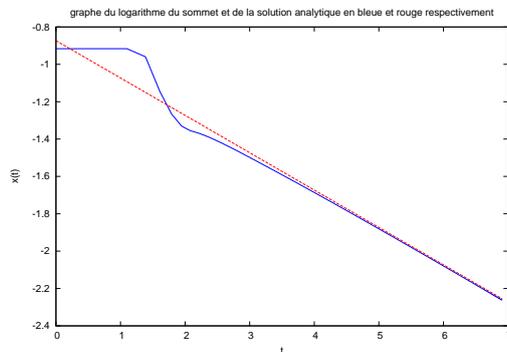


FIGURE 5.15 – Logarithme de la position du sommet (en bleu) calculé numériquement et solution analytique (en rouge) en $t^{\frac{1}{5}}$ tracé à $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 1000$. A partir d'un certain instant, les deux droites en log se rapprochent et plus le temps évolue meilleur c'est le rapprochement. Elles ont le même coefficient directeur qui est $-1/5$.

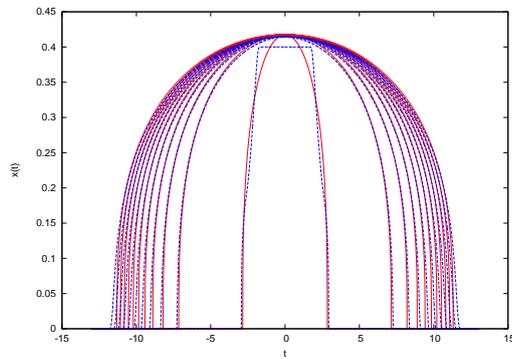


FIGURE 5.16 – Solution semblable analytique (en rouge) et celle calculée par le code (en bleue) tracé à $t = 1, 100, 200, 300, \dots, 1000$. Les deux solutions similaires se coïncident à partir d'un instant et garde jusqu'à l'instant final la même forme parabolique.

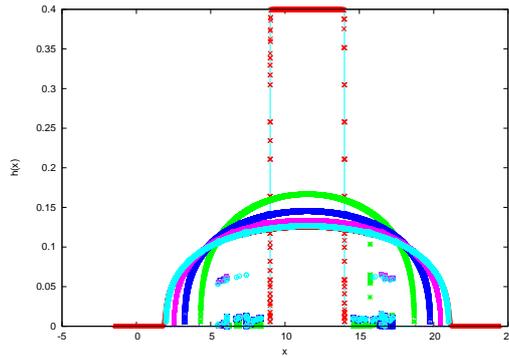


FIGURE 5.17 – Hauteur Saint Venant (en traits) et Navier Stokes (en croix) tracé à $t = 0, 100, 200, 300, 400$. L'interface et la hauteur ont la même forme et sont presque égales de l'instant initial $t = 0$ jusqu'à l'instant $t = 400$.

5.4 Conclusion

Le tracé des solutions similaires analytiques obtenues théoriquement et des solutions similaires calculées par le code se rapproche plus l'un de l'autre à partir d'un instant court pour le cas du fond plat et à partir d'un long instant pour le cas du fond incliné. Ceci montre que lorsque le système évolue, on retrouve l'équilibre entre la pression et le frottement dans le cas d'un fond plat et celui du frottement et de la pente dans le cas d'un fond incliné. Toutefois, les approximations faites dans les théories en négligeant des termes dans les équations qui n'ont pas été négligé dans le calcul numérique, les erreurs numériques du code utilisé peuvent être à l'origine de la non parfaite coïncidence des solutions. Cependant, sur un fond plat les solutions numériques de Navier-Stokes et Saint Venant tracées sont presque les mêmes à tout instant tandis que sur un fond incliné, à partir d'un certain instant on observe un décalage des deux solutions mais qui gardent toujours la même forme.

Chapitre 6

Conclusion

Le travail dans ce document a consisté dans un premier temps à utiliser un modèle et une méthode numérique adaptée à des fonds non plats (voir [10], [5], [3], [2], [4]) pour discrétiser les équations de Saint Venant (voir [8], [11], [10]). Les différents exemples de résultats numériques d'écoulement à surfaces libres obtenus sur un fond plat, incliné et sur une topologie (voir [10], [5], [11]) sont issus de la simulation numérique avec ces équations discrétisées précédemment. Les différents systèmes d'équations utilisés dans le numérique et dans la théorie sont issus des différentes simplifications possibles des équations de Saint Venant. Toutefois, il faut noter que les phénomènes physiques observés lors de l'expérimental de ces exemples d'écoulements ont été bien capté par les différents modèles utilisé pour effectuer la simulation numérique. Nous avons pu comparer aussi dans les cas où elles existent, des solutions analytiques aux solutions numériques où la comparaison a été convaincante. Dans un second temps, nous avons comparé des solutions numériques de deux modèles ; Navier-Stokes dont les équations mathématiques et le code en Gerris utilisé dans la simulation numérique ont été tiré de [9] et Saint Venant. La comparaison des deux résultats obtenus a été rassurant. Dans le chapitre 5, la comparaison des solutions similaires numériques et théoriques (voir [6]) a été effectué et le graphe des deux solutions se superposent.

Perspectives

Cependant, notons que des simulations numériques faites avec le logiciel Gerris flow solver pour les exemples obtenus avec le modèle de Saint Venant

dans le chapitre 3 et 4 ne captent pas les phénomènes physiques obtenu en expérimental et n'ont pas donné des résultats satisfaisants. D'autres exemples aussi effectués dans le cas d'un fond ondulé font apparaître des instabilités. Mais les résultats obtenus lors de la superposition des solutions des deux modèles dans le chapitre 5 nous permet de croire que numériquement le modèle Saint Venant est aussi une simplification du modèle Navier-Stokes. Donc il s'avère nécessaire de continuer les investigations sur Gerris en vue tout d'abord de capter les phénomènes physiques présents. Et ensuite comparer les deux résultats pour s'assurer que les résultats des exemples du chapitre 3 et 4 sont obtenus. Le calcul doit être poursuivi aussi dans le cas d'un fond ondulé (tôle ondulé) en vue d'obtenir numériquement les résultats expérimentals obtenus par Darboux.

Bibliographie

- [1] Abdallah, M. (2005) Thèse. Les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement.
- [2] Audusse E. (2004) Thèse. Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes.
- [3] Audusse E., Bouchut F., Bristeau M.-O., Klein R., and Perthame B.. "A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows". *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2050–2065, 2004.
- [4] Bouchut F.. Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources, volume 2 (2004).
- [5] Delestre O., Lagrée P.-Y.. Schéma numérique des volumes finis avec la reconstruction hydrostatique "well-balanced".
- [6] Hebert E. Huppert. "Flow and instability of a viscous current down a slope", *Journal of fluid mechanics* volume X pp 427-429, 1982.
- [7] Jacques Sainte-Marie (2010) Thèse. Models and numerical schemes for free surface flows. Beyond the Saint-Venant system
- [8] Lagrée P.-Y.. Équations de Saint Venant et application aux mouvements de fonds érodables, écoulements en milieux naturels, Cours MSF12 M1 UPMC, (2013).
- [9] Lagrée P.-Y.. Équation de Ruissellement : Saint Venant Laminaire (2013).
- [10] Lagrée P.-Y.. Résolution numérique des équations de Saint-Venant, mise en œuvre en volumes finis bien balancés pp 1-22, 2013.
- [11] Minh Hoang LE (2012) Thèse. Modélisation multi-échelle et simulation numérique de l'érosion des sols de la parcelle aux bassin versant.

- [12] Randall J. LeVeque. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] ROBERT R. LONG. Stratified Flow. The Johns Hopkins University.
- [14] Thual O. (2008, 2010). Cours sur les ondes de crues, Intumescences et ressauts.