Test de la vraisemblance entre deux motifs de points

Application à une maladie sur une parcelle de vigne

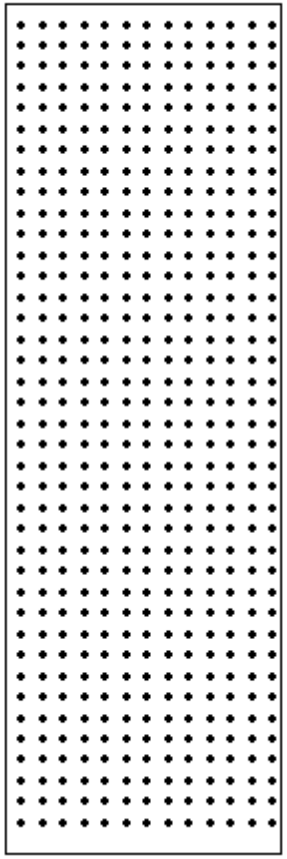
Labenne Amaury, INRA, UMR 1065 SAVE, Villenave d'Ornon.
Bonneu Florent, Laboratoire de Mathématiques d'Avignon (EA 2151), Avignon.

Introduction

- L'esca, une maladie du bois de la vigne.
- Pas de lien systématique entre les symptômes de la maladie et la mort du cep.
- Plusieurs questions :
  - Est-ce que les ceps meurent aux mêmes endroits où il y avait des ceps symptomatiques l'année passée ?
  - Est-ce que les ceps symptomatiques réapparaissent aux mêmes endroits de la parcelle d'une année à l'autre ?
- Nécessité de mettre en place un test pour comparer les densités des deux parcelles. Utilisation de R et du package *spatstat*.

Notations

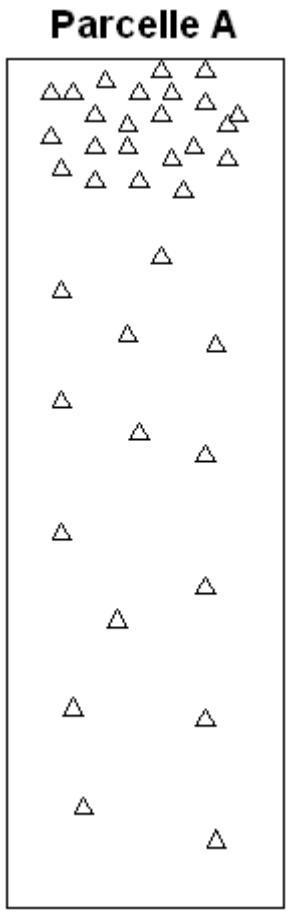
Carte de la parcelle



- Chaque cep à une position fixe i, on lui associe une variable d'état X_i où $X = (X_1, ..., X_n)$ est le vecteur des états des ceps.

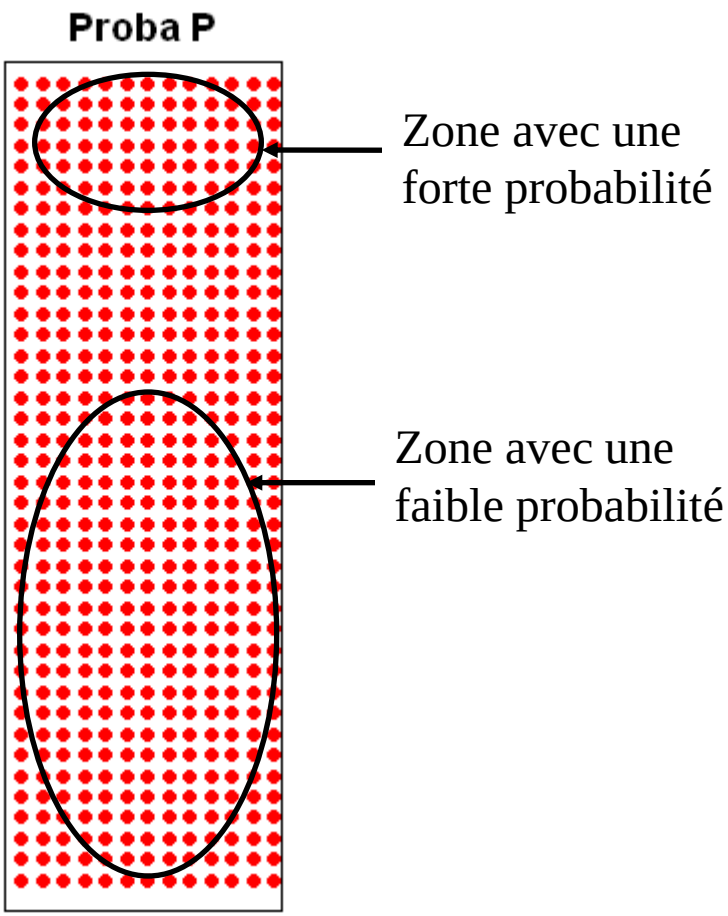
- Si le cep i est malade, on note $X_i = 1$ sinon $X_i = 0$.

Estimation des probabilités



On estime la probabilité pour tous les ceps d'être symptomatiques par une méthode de noyaux (on choit la taille du noyau H).

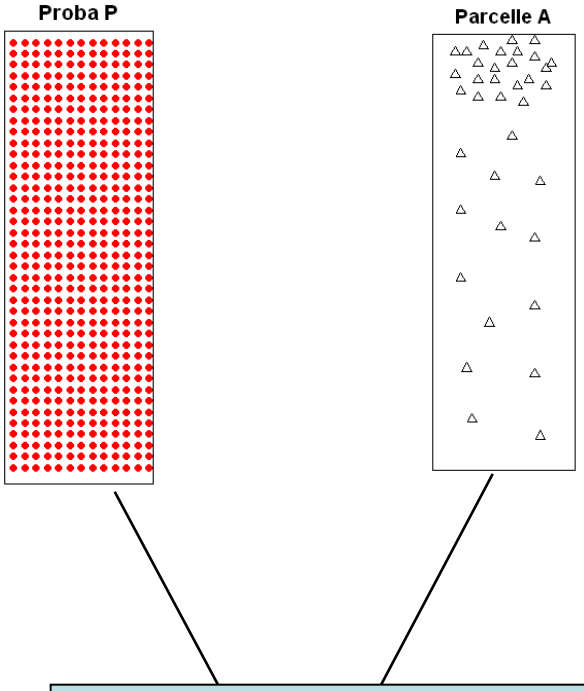
La probabilité est estimée grâce à la fonction *relrisk* du package *spatstat*.



Ici, on ne représente que les ceps symptomatiques, ie : $X_i = 1$

On obtient donc une probabilité p_i d'être symptomatique en chaque point de la parcelle. $P = (p_1, \ldots, p_n)$

Principe du test et vraisemblance



$$V = \prod_{i=1}^{n} p_i^{X_i} (1 - p_i)^{1 - X_i}$$

Vraisemblance

Exemple :

○	△	△	○
△	○	△	△
○	△	○	○
○	○	○	○

p1	p2	p3	p4
p5	p6	p7	p8
p9	p10	p11	p12
p13	p14	p15	p16

△ : Ceps symptomatiques, i.e., $X_i = 1$

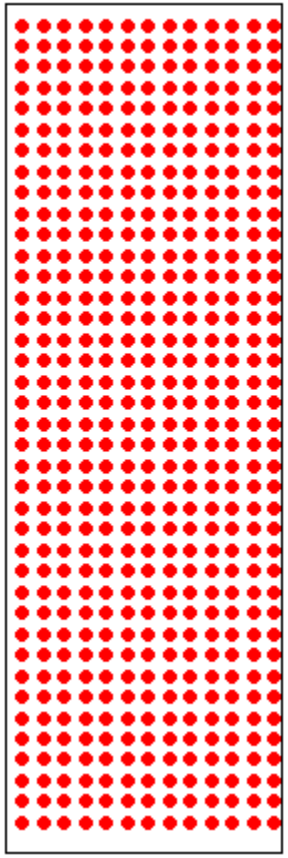
○ : Ceps sains, i.e., $X_i = 0$

Vraisemblance du motif :

$$V = p_2 . p_3 . p_5 . p_7 . p_8 . p_{10} . (1 - p_1)\,(1 - p_4)(1 - p_6)\,(1 - p_9)(1 - p_{11})\,(1 - p_{12})$$

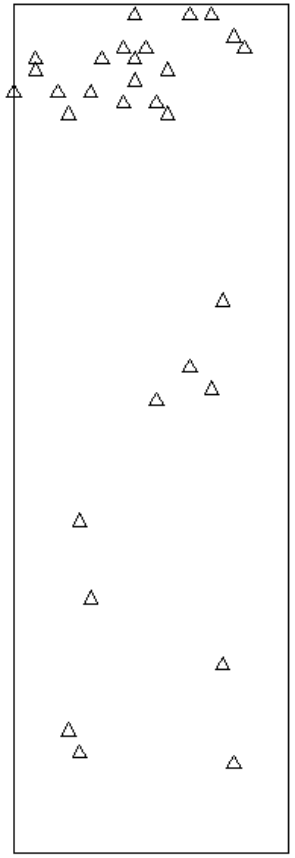
Simulations de parcelles semblables à A

Proba P



A chaque position i, on applique une variable de Bernoulli de paramètre p_i . Ainsi, on obtient un nouveau motif A1 simulé, ressemblant au motif A.

Parcelle A1

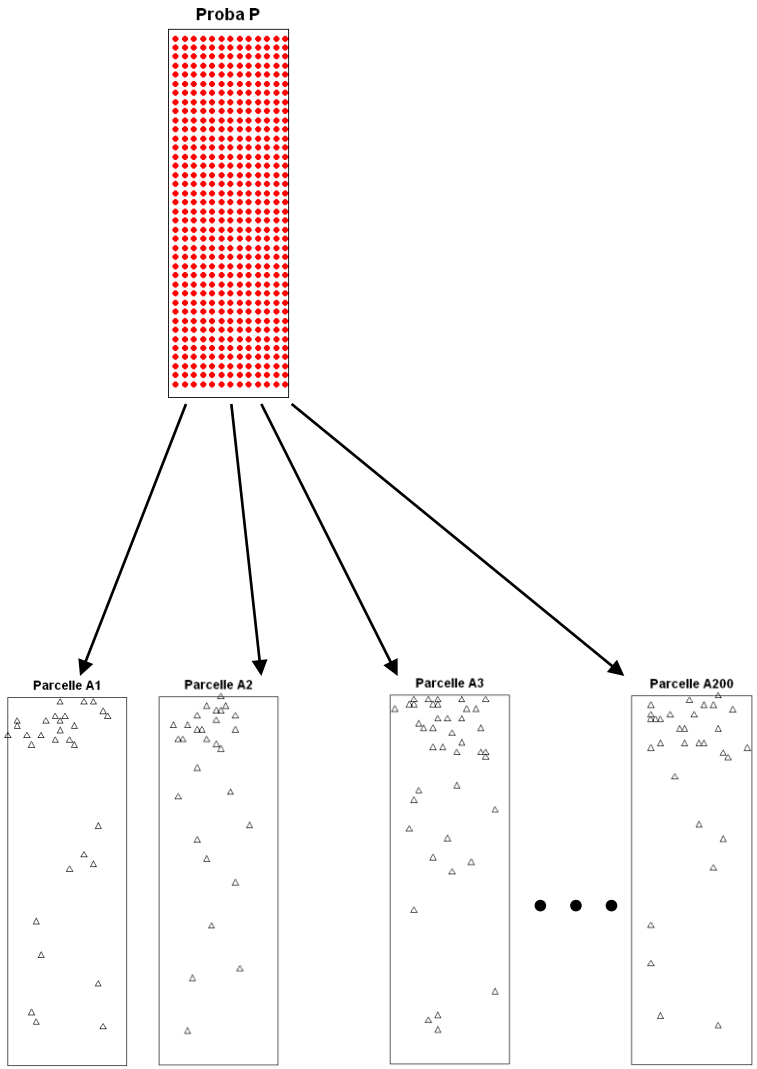


Vraisemblance

$$V = \prod_{i=1}^{n} p_i^{X_i} (1 - p_i)^{1 - X_i}$$

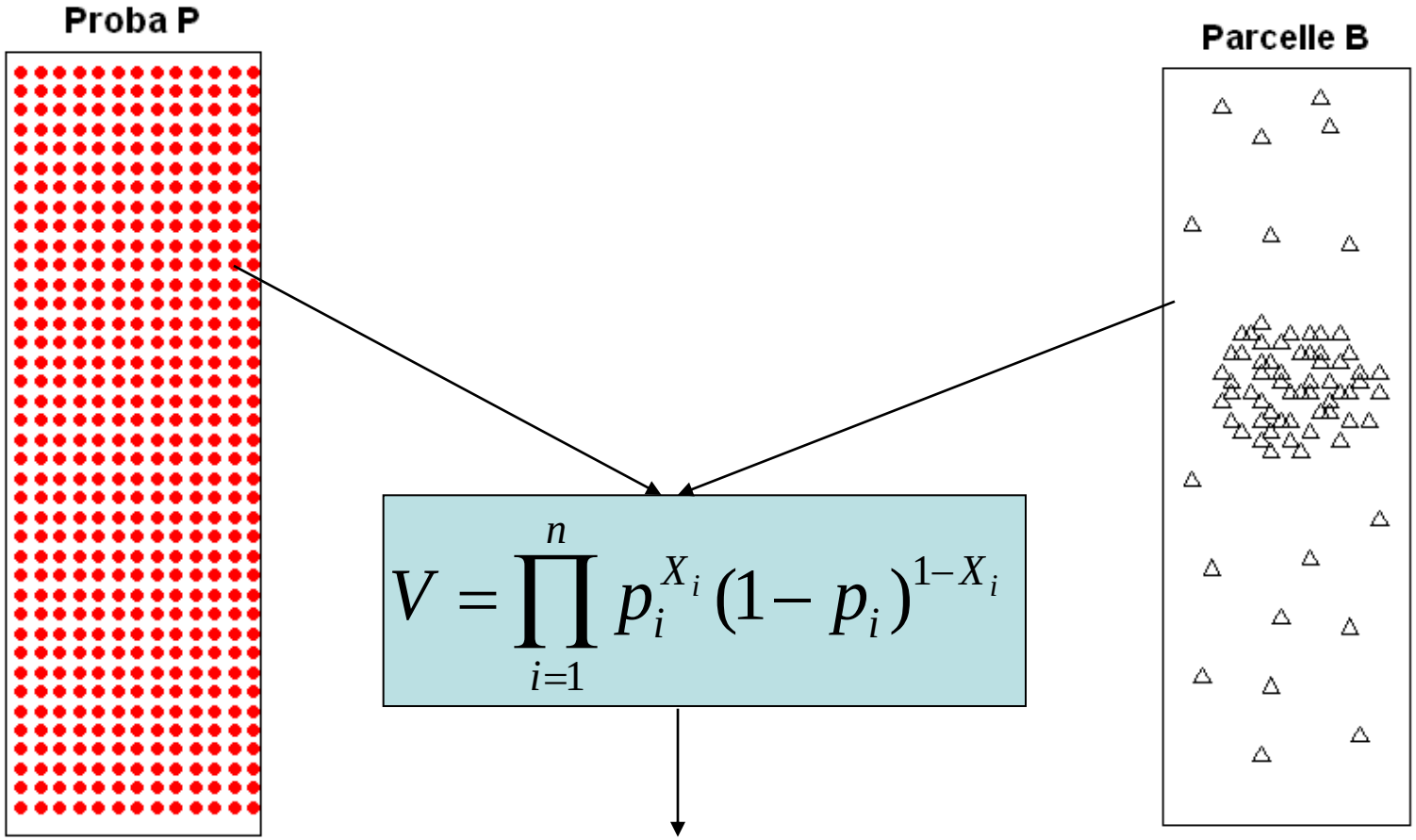
$$V_{A_1}$$

Création de l'enveloppe de test



- On simule N_{sim} réalisations de la parcelle A grâce à la même carte de probabilités.
- Sur chacune des parcelles A_j , on calcule la vraisemblance V_{A_j} , $j \in [1, N_{sim}]$
- Après avoir rangé ces valeurs dans l'ordre croissant et éliminé $\alpha = 10\%$ des valeurs extrêmes, on obtient le vecteur ENV$= [S_{5\%}, \dots, S_{95\%}]$, c'est notre enveloppe de test

Calcul de la vraisemblance sur la parcelle B



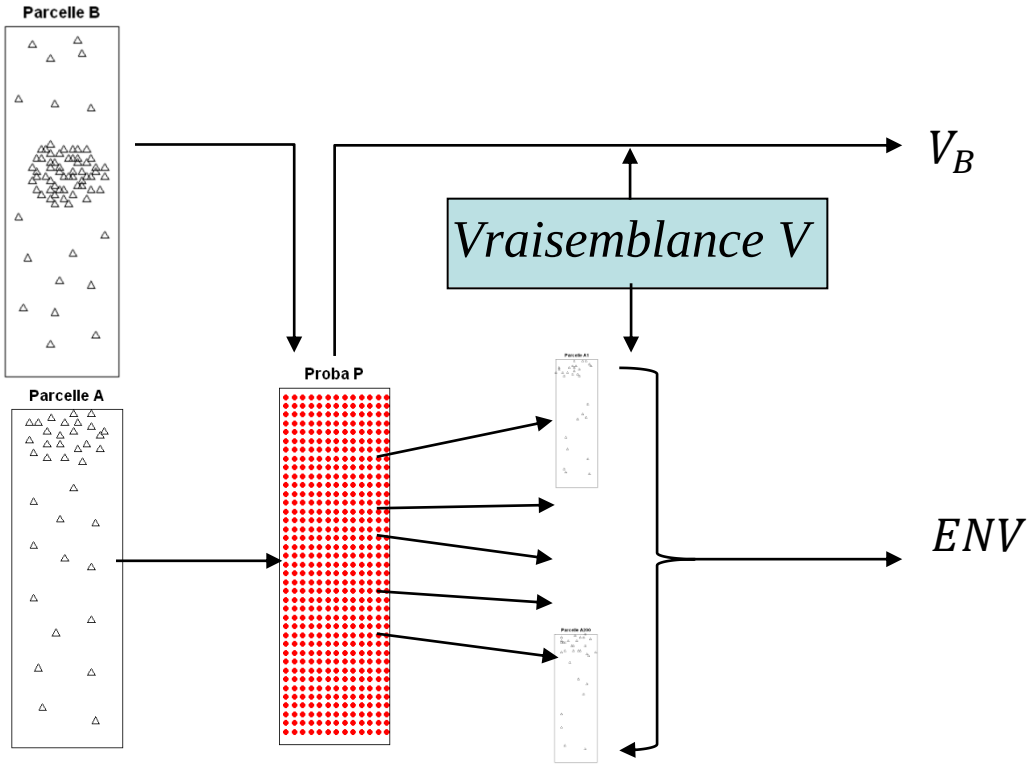
$$V = \prod_{i=1}^{n} p_i^{X_i} (1 - p_i)^{1 - X_i}$$

$$V_B$$

V_B est notre Statistique de test

Test et décision finale

- On teste l'hypothèse H0 : Les deux motifs de points A et B ne sont pas significativement différents.
- Pour cela, on regarde où se situe la valeur de V_B qui est notre statistique de test par rapport à l'enveloppe ENV, c'est une méthode de Monte-Carlo.

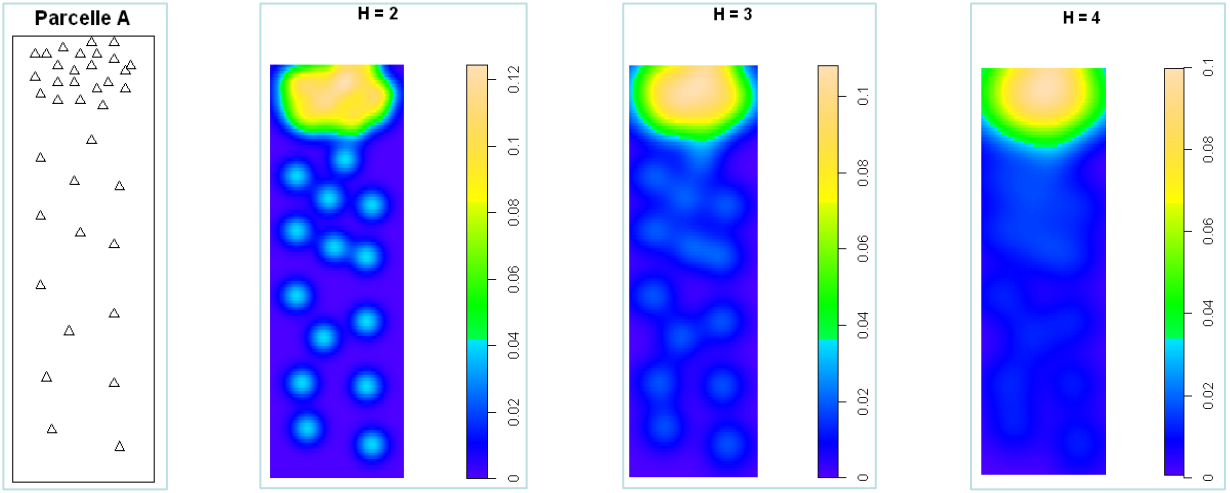


Décision :

- Si $V_B \in ENV$, on ne rejette pas H0.
- Si $V_B \notin ENV$, on rejette H0, au risque de $\alpha = 10\%$.

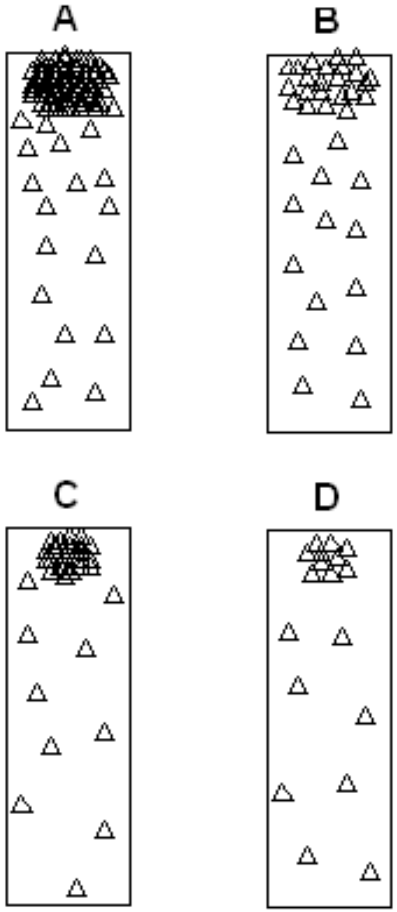
Influence de la taille du noyau H

- Pour estimer la carte des probabilités, on utilise une méthode de noyaux. La taille du noyau H utilisé, à une influence sur la valeur des probabilités et donc sur les résultats.



- Plus H est grand, plus la carte des probabilités est « lissée ». Le test aura moins tendance à rejeter H0.

Résultats de quelques simulations

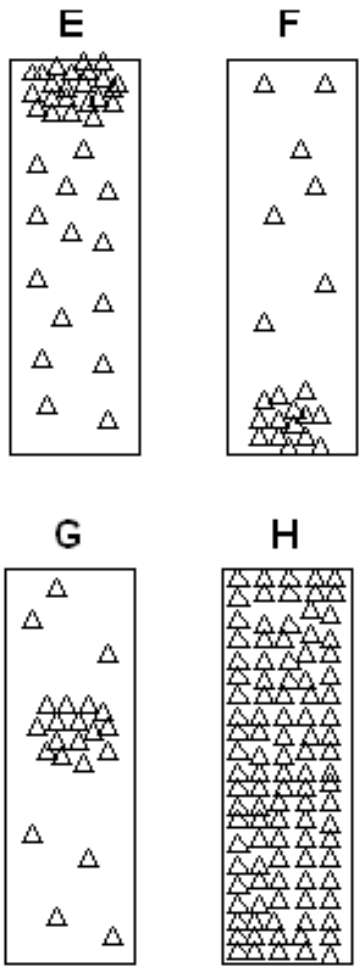


Pourcentages de rejet du test H=2				
P1(col)/P2(l)	A	B	C	D
A	4,8	58,4	11,6	31,6
B	7,2	4	7,4	9,6
C	99,5	93,6	5	51,1
D	98,5	88,5	38,2	5,3

Pourcentages de rejet du test H=3				
P1(col)/P2(l)	A	B	C	D
A	7,1	32,1	4,1	23,4
B	17,2	5,9	6,4	5,5
C	47,2	53,3	6,3	21,8
D	19,9	23,9	6	3,5

Pourcentages de rejet du test H=4				
P1(col)/P2(l)	A	B	C	D
A	4,5	23,2	3,5	17,8
B	15,3	3,7	5,2	4,9
C	9,3	29,5	4,9	12,2
D	5,6	9,3	5,3	4,5

Résultats de quelques simulations



	Pourcentages de rejet du test H=2			
P1(col)/P2(l)	E	F	G	H
E	4	72,3	49,4	100
F	98,6	5	91,7	100
G	99,6	89,4	4,8	100
H	4,2	3,7	5,4	5,7

	Pourcentages de rejet du test H=3			
P1(col)/P2(l)	E	F	G	H
E	5,9	38,1	26	99,4
F	82,5	4,1	52,7	100
G	86	58,9	7	100
H	3,2	3,3	5,4	6,5

	Pourcentages de rejet du test H=4			
P1(col)/P2(l)	E	F	G	H
E	3,7	29,2	19,1	95,7
F	65,4	4	38	99,9
G	62,1	31,9	5,6	97,4
H	3,7	2,5	5,6	7,2

Conclusion

- Choix de la taille du noyau H influence fortement les résultats.
- Test non symétrique, nécessité d'établir une règle de décision lorsqu'on croise les tests.
- Test non valable si le motif de départ est uniforme, en effet la probabilité est la même sur toute la parcelle.
- Test à améliorer ou à coupler avec un autre, mais qui peut être appliqué à de nombreuses problématiques impliquant des processus spatiaux sur grille.