

Introduction

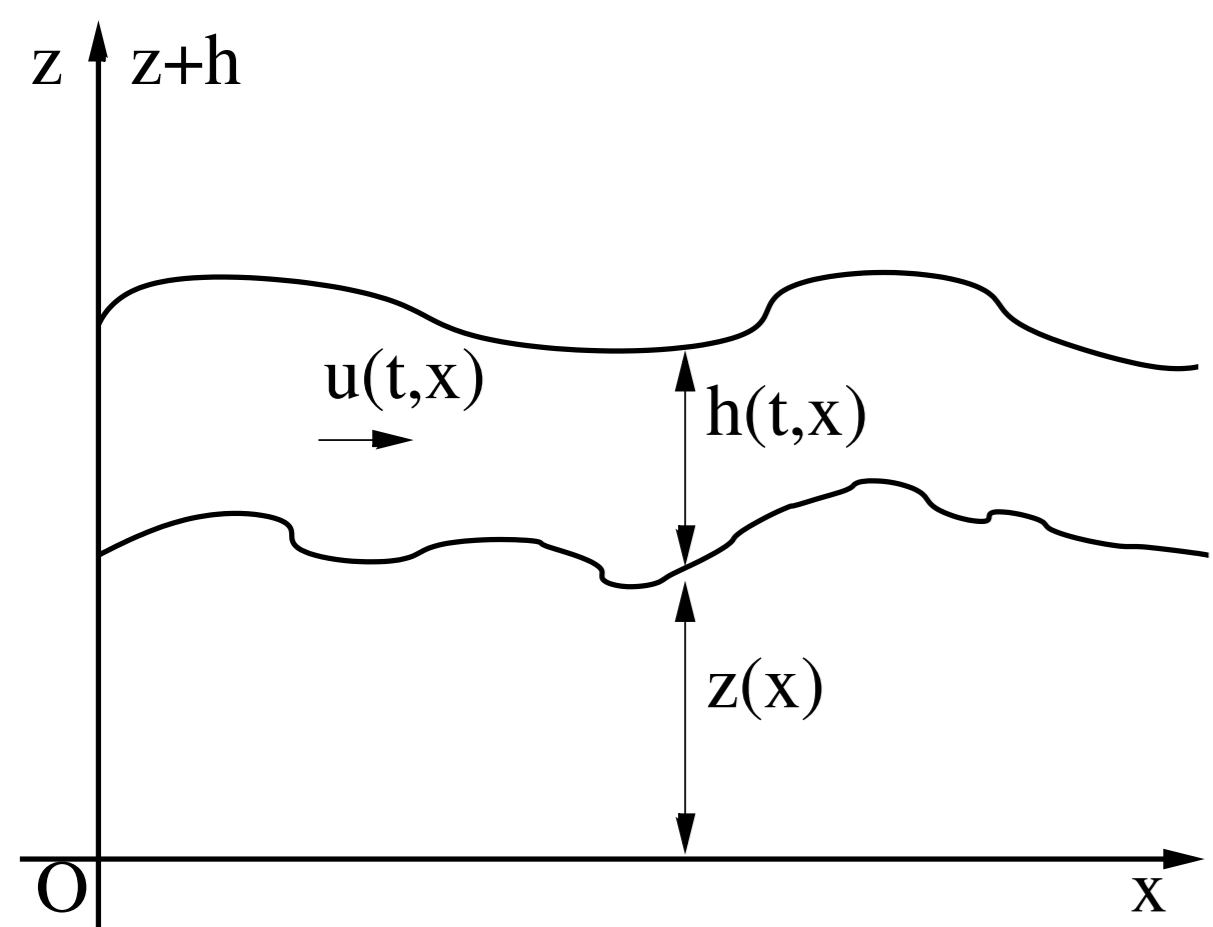


Nous nous intéressons à la simulation de ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. Nous devons faire face aux difficultés dues aux interfaces sec/mouillé et à l'alimentation en eau sur surface sèche. De plus, le modèle doit être complété par un terme de frottement. Nous ne tenons pas compte de l'infiltration pour l'instant. Le modèle que nous considérons pour cela est le système de Saint-Venant. C'est un système d'équations aux dérivées partielles qui a déjà été utilisé pour ce type de problème [Est00].

Cependant, les méthodes numériques utilisées jusqu'à présent ne permettaient pas d'assurer l'obtention de hauteurs d'eau positives. De plus les équilibres étaient assez mal calculés.

Nous résolvons ce système par une méthode numérique aux volumes finis. La topographie est traitée par une méthode équilibre introduite par [Aud05] et [Bou04], permettant de traiter les transitions sec/mouillé. Les frottements sont traités de deux façons différentes. La méthode, ainsi que le traitement des frottements sont validés sur un ensemble de résultats expérimentaux produits par l'INRA d'Orléans.

Système de Saint Venant



Les équations de Saint-Venant sont de la forme

$$\partial_t U + \partial_x F(U, Z) + B(U, Z) \cdot \partial_x Z = T(U),$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, Z = gz,$$

$$F(U, Z) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}, B(U, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$\text{et } T(U) = \begin{pmatrix} P \\ -ghS_f \end{pmatrix}.$$

où h est la hauteur d'eau, u la vitesse horizontale moyennée suivant la verticale, $q = hu$ le débit, z la topographie, P la pluie et S_f les frottements.

U est une représentation vectorielle des variables conservatives.

La méthode développée ici va être exposée dans le cas uni-dimensionnel horizontal, sans pluie et sans frottement. Une formulation de type volumes finis de ce système est donnée par

$$\frac{d}{dt} U_i + \frac{1}{\Delta t} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}) = S_i$$

où U_i est le vecteur des variables conservatives discrètes, $\mathcal{F}_{i\pm 1/2}$ les flux numériques aux interfaces et S_i une discrétisation du terme source. Définir une **méthode volumes finis** revient à choisir une méthode pour le calcul des flux numériques et du terme source.

Le solveur HLL pour système homogène

Dans cette partie, nous nous intéressons au système de Saint-Venant sur fond plat. Nous utilisons dans ce cas, le **flux HLL**

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) & \text{si } 0 < c_1 \\ c_1 F(U_G) - c_2 F(U_D) & \text{si } c_1 < 0 < c_2 \\ F(U_D) & \text{si } c_2 < 0 \end{cases} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (U_D - U_G) \text{ si } c_1 < 0 < c_2,$$

avec deux paramètres c_1 et c_2 tels que $c_1 < c_2$.

Pour c_1 et c_2 , nous prenons $c_1 = \inf_{U=U_G, U_D} (\inf_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)|)$ et $c_2 = \sup_{U=U_G, U_D} (\sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)|)$

où $\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$ sont les valeurs propres du système de Saint-Venant.

Prise en compte de la topographie

En utilisant la méthode de **reconstruction hydrostatique** [Aud05] et [Bou04], nous obtenons un **schéma équilibre** préservant la positivité de la hauteur d'eau. La hauteur d'eau doit être reconstruite pour prendre en compte l'équilibre statique ainsi que les variations de topographie. Aux interfaces, nous définissons les grandeurs suivantes

$$z_{i+1/2} = \max(z_i, z_{i+1})$$

et

$$h_{i+1/2G} = \max(h_i + z_i - z_{i+1/2}, 0), h_{i+1/2D} = \max(h_{i+1} + z_{i+1} - z_{i+1/2}, 0).$$

On en déduit les variables reconstruites de part et d'autre de l'interface :

$$U_{i+1/2G} = (h_{i+1/2G}, h_{i+1/2G} u_i), U_{i+1/2D} = (h_{i+1/2D}, h_{i+1/2D} u_{i+1}).$$

Ces quantités sont utilisées à la place de U_i et U_{i+1} pour le calcul de $\mathcal{F}_{i+1/2}$. Afin de préserver l'équilibre au repos, le terme source est discrétisé :

$$S_i = S_{i+1/2G} - S_{i-1/2D} = \left(\frac{g}{2} ((h_i^n)^2 - (h_{i+1/2G}^n)^2) \right) - \left(\frac{g}{2} ((h_i^n)^2 - (h_{i-1/2D}^n)^2) \right).$$

Nous obtenons alors le schéma : $\frac{d}{dt} U_i + \frac{1}{\Delta x_i} (\mathcal{F}_{i+1/2G} - \mathcal{F}_{i-1/2D}) = 0$

avec $\mathcal{F}_{i-1/2D} = \mathcal{F}(U_{i-1/2G}, U_{i-1/2D}) + S_{i-1/2D}$, $\mathcal{F}_{i+1/2G} = \mathcal{F}(U_{i+1/2G}, U_{i+1/2D}) + S_{i+1/2G}$.

En combinant le schéma précédent à l'ordre 2 en espace avec la méthode de Heun pour l'ordre 2 en temps, nous obtenons un schéma d'ordre 2. Les variables $(U_i, z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont remplacées par des variables $(U_{i+1/2\pm, z_{i+1/2\pm}})_{i \in \mathbb{Z}}$ obtenues par reconstruction linéaire. Nous effectuons la reconstruction hydrostatique sur ces dernières.

Traitement de la pluie et des frottements

La **pluie** est traitée par un **splitting de Strang** : $\partial_t h = P$.

Pour les **frottements**, nous considérons la loi de **Darcy-Weisbach** : $S_f = \frac{f|u|}{gh}$.

Nous avons utilisé deux méthodes de traitement des frottements :

- le **traitement semi-implicite** introduit dans [Bri01]

$$q_i^{n+1} + \frac{f|q_i^n| q_i^{n+1}}{8h_i^n h_i^{n+1}} \Delta t = q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\mathcal{F}_{i+1/2G} - \mathcal{F}_{i-1/2D}).$$

En notant q_{i*}^{n+1} la partie de droite, on a : $q_i^{n+1} = \frac{q_{i*}^{n+1}}{1 + \Delta t f \frac{|u_i^n|}{8h_i^{n+1}}}$.

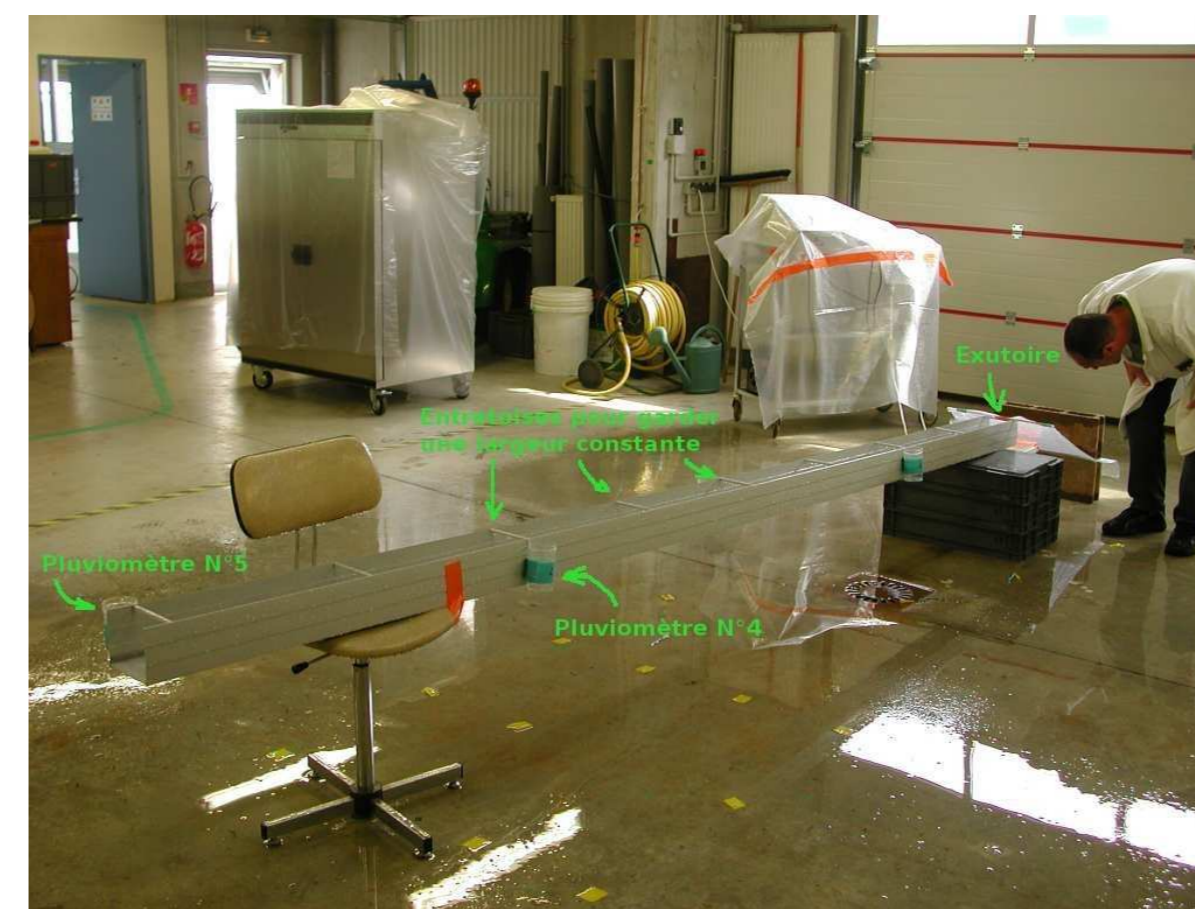
- la méthode de **topographie apparente** introduite dans [Bou04].

Cette méthode consiste à voir le système de Saint-Venant avec une nouvelle topographie :

$$z_{app} = z + b \text{ où } \partial_x b = S_f.$$

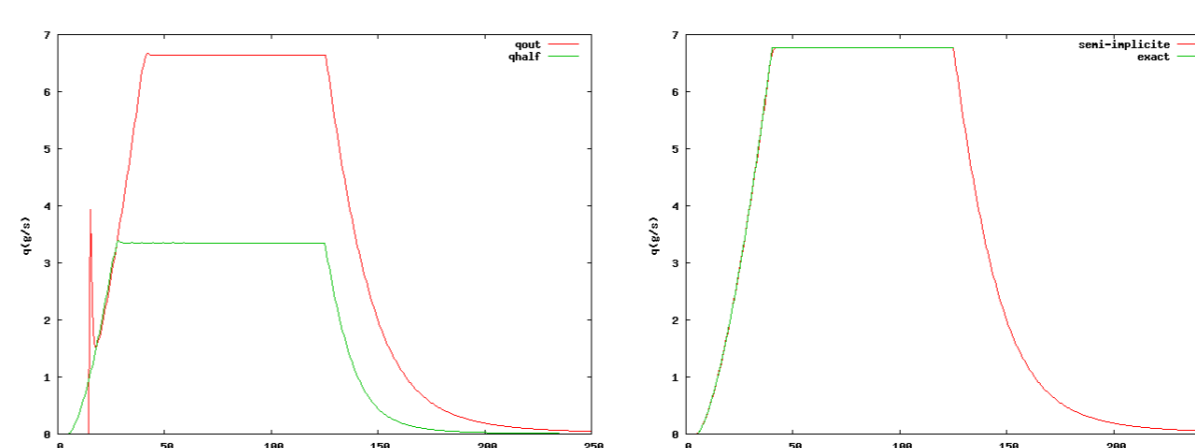
Ainsi, les états stationnaires sont préservés.

Expériences INRA

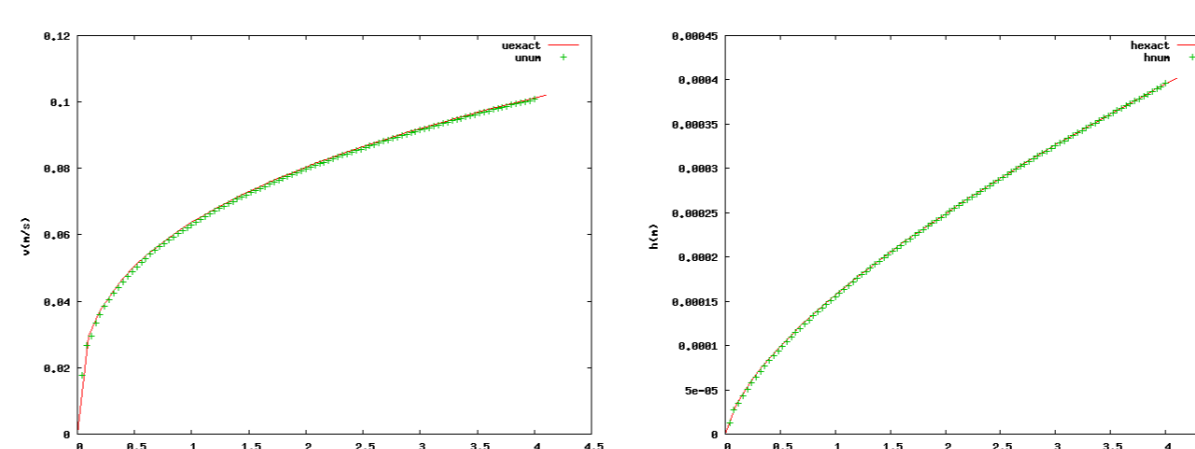


Une série d'expérimentations a été réalisée sur une gouttière en juin 2006 à l'INRA d'Orléans : des pluies d'intensité constante ont été simulées. On a fait varier la rugosité hydraulique (3 niveaux), la pente générale (3 niveaux) et la pluie (2 niveaux). Les mesures ont porté sur l'évolution temporelle du flux à l'aval.

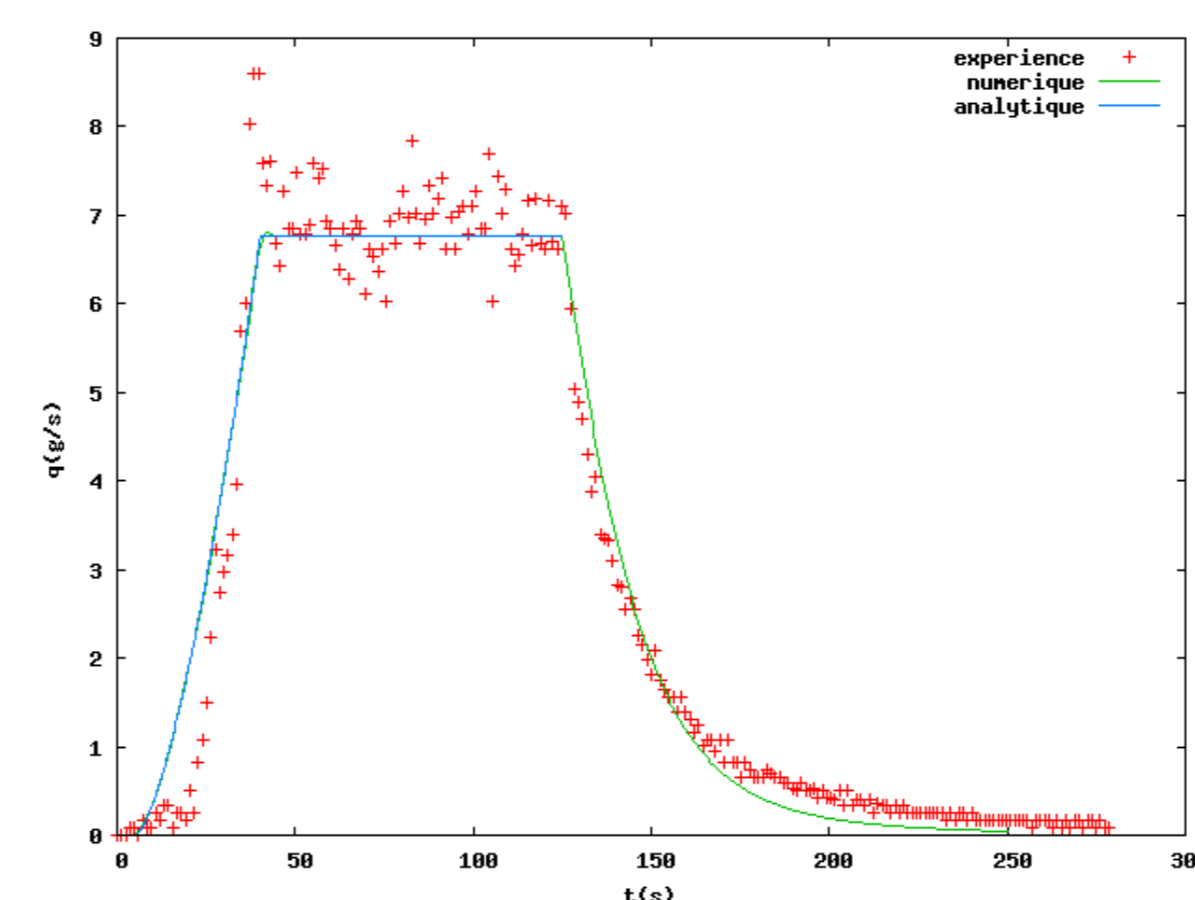
Validations numériques



Nous avons comparé les deux façons de traiter les frottements sur un évènement pluvieux. Avec la méthode de topographie apparente, nous obtenons un pic au niveau de la transition sec/mouillé. Le traitement semi-implicite ne présente pas cet inconvénient.



La pluie simulée étant constante et homogène, nous avons été en mesure de déterminer une solution exacte en temps et en espace. La comparaison avec les profils de vitesse et de hauteur à l'équilibre montre un bon accord.



La solution exacte nous a permis de déterminer un coefficient de frottement permettant le calage avec les résultats expérimentaux. Nous superposons la simulation numérique, les résultats expérimentaux et la solution exacte.

Perspectives

Nous allons nous intéresser à des situations plus complexes en dimension 1 et en dimension 2. On pourrait étendre le domaine d'application du modèle en ajoutant du transport de polluant, de l'infiltration et de l'érosion.

Les partenaires

Ce travail s'intègre dans le projet ANR METHODE



References

- [Aud05] Audusse E., Bristeau M.-O., A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes, *J. Comp. Phys.* **206**, (2005) 311-333.
- [Bou04] Bouchut F., *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser (2004).
- [Bri01] Bristeau M.-O., Coussin B., Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes, *Inria report RR-4282*, (2001).
- [Est00] Esteves M. et al., Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain: numerical results versus observed values, *J. Hydrol.* **228**, (2000), 265-282.