HAL open science

Bilan économique du stockage en réserve qualitative de vin de Champagne

Jacques-Alexandre J.-A. Laye, Maximilien Laye

► To cite this version:

Jacques-Alexandre J.-A. Laye, Maximilien Laye. Bilan économique du stockage en réserve qualitative de vin de Champagne. 5. Congrès ROADEF'2003, Feb 2003, Avignon, France. 10.1051/ro:2006012 . hal-02817447

HAL Id: hal-02817447
https://hal.inrae.fr/hal-02817447

Submitted on 6 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **40** (2006) 235–251
DOI: 10.1051/ro:2006012

BILAN ÉCONOMIQUE DU STOCKAGE EN RÉSERVE QUALITATIVE DE VIN DE CHAMPAGNE *

Jacques Laye[1] et Maximilien Laye[2]

Abstract. In the wine AOC system, the regulation of quantities performed by the professional organizations is aimed to smooth the variations of the quality of the wine due to the variations in the climate that affect the quality of the grapes. Nevertheless, this regulation could be damaging to the consumers due to the price increase resulting from the reduction of the quantities sold on the market. We propose a stochastic control model and a simulation tool able to measure the effects of this mechanism on the producer's profit and the consumer's surplus.

Résumé. Dans le cadre des appellations d'origine, la régulation de l'offre effectuée par les groupements de producteurs est sensée pallier de trop fortes variations de qualité du vin dues aux aléas climatiques qui conditionnent le rendement et la qualité du raisin récolté. Néanmoins, ce type de régulation pourrait s'avérer préjudiciable à l'intérêt des consommateurs en raison de l'élévation des prix résultant du stockage. Un logiciel basé sur un algorithme de contrôle stochastique nous permet de quantifier les effets d'une telle politique sur le surplus du producteur et du consommateur.

Mots Clés. Contrôle stochastique, stocks régulateurs.

Classification Mathématique. 60J20, 90B05, 90C40.

Reçu le 31 Décembre 2005.

* *Nous tenons à remercier Eric Giraud-Héraud et Hervé Tanguy du Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique, ainsi que les deux arbitres anonymes qui ont rapporté cet article, pour leurs précieux commentaires.*

[1] L.E.F. UMR INRA-ESR/ENGREF, 14 rue Girardet, CS 4216, 54042 Nancy Cedex, France ; `laye@nancy-engref.inra.fr`

[2] Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique, 1 rue Descartes, 75005 Paris, France ; `maximilien.laye@shs.polytechnique.fr`

© EDP Sciences 2006

Article published by EDP Sciences and available at http://www.edpsciences.org/ro or http://dx.doi.org/10.1051/ro:2006012

Introduction

Avec en moyenne 60% de la production et de la consommation, 70% des importations et 83% des exportations pour 45% des surfaces cultivées, l'Union Européenne domine le secteur viti-vinicole mondial avec une production finale dépassant les 12 milliards d'euros. L'Organisation Commune des Marchés (OCM) viti-vinicole est sans aucun doute la réglementation la plus complexe de la politique agricole commune dans la mesure où elle couvre non seulement les questions classiques propres à chaque OCM (prix, interventions, échanges, etc.) mais aussi d'autres questions plus spécifiques au secteur du vin (pratiques œnologiques et spécificités de la production-commercialisation). Sur le plan économique, le point qui semble à terme le plus déterminant est que la nouvelle OCM, mise en place à partir de l'an 2000, consacre une politique de soutien à la qualité. Dans le cadre des vins d'appellation d'origine contrôlée (AOC), cette politique est associée au renforcement du rôle des groupements de producteurs et des organismes de filière. L'objectif de ces organismes, dont les décisions sont le plus souvent rendues obligatoires, ne se limite plus aujourd'hui à la politique de promotion des produits et de mise en commun de moyens de recherche et développement. L'OCM prévoit que les groupements de producteurs et les organismes de filière peuvent définir des règles de commercialisation portant sur la régulation de l'offre à un niveau décentralisé, notamment par la mise en place de *réserves qualitatives*[1] lors de la première mise en marché, dans la mesure où l'on n'assisterait pas à un stockage excessif de la récolte ou à la fixation de prix. Ces mécanismes de régulation sont sensés pallier, par la mise en réserve et la sortie échelonnée des produits, les aléas climatiques qui se répercutent sur la quantité et la qualité du raisin récolté.

Abstraction faite des conditions climatiques, le *rendements agronomique* (calculé au niveau de la parcelle et déterminant la quantité de raisin produite par hectare) dépend de nombreux facteurs : la variété du raisin, l'âge du vignoble, le mode de plantation, la conduite de la culture... En général, au-delà d'un certain seuil, la recherche *ex-ante* de rendements élevés (par des pratiques culturales) se fait au détriment de la qualité du vin. En particulier, il existe une relation inverse entre rendement agronononomique et titre d'alcoométrie naturelle qui quantifie la qualité du raisin. La maîtrise des rendements a donc une double finalité : quantitative et qualitative. A ce titre, le cahier des charges de l'AOC défini par l'Institut National des Appellations d'Origine (INAO) définit les pratiques culturales et impose au rendement agronomique de l'année de ne pas dépasser un *rendement maximum* (rendement autorisé, rendement d'appellation, ou rendement butoir, selon les textes). Ceci permet d'homogénéiser les différentes parcelles d'une région d'AOC et de garantir un niveau de qualité en empêchant la course aux rendements élevés. Pourtant, si à pratique culturale fixée le rendement maximum est dépassé, la qualité ne sera pas détériorée. En effet, lorsque la récolte est le fruit d'un climat favorable, la qualité accompagne le plus souvent la quantité car les conditions

[1] Giraud-Héraud, Soler, Steinmetz et Tanguy [2] établissent sur le plan de la théorie économique le lien existant entre la logique d'appellation d'origine et la possibilité de réguler l'offre à un niveau décentralisé afin de maintenir un niveau qualitatif des produits.

favorables à la fructification de la vigne sont aussi celles qui permettent la bonne maturation du raisin[2]. Dans cette perspective, étant donné les aléas climatiques et la corrélation positive (à pratique culturale fixée) entre le rendement agronomique et la qualité, la volonté de se prémunir des trop fortes variations de qualité des vins peut justifier en soi la recherche d'un mécanisme de régulation qualitative. Cette régulation est un enjeu d'autant plus crucial que l'on se trouve en présence d'un vignoble septentrional, subissant de ce fait des aléas plus importants. Dans le cas de vins non millésimés, la mise en place de mécanismes de réserve qualitative par le biais des organisations de filière constitue l'instrument privilégié permettant l'assemblage optimal de plusieurs millésimes.

Les exemples les plus anciens que l'on peut citer dans l'exploitation de la réserve qualitative sont ceux du vin de Porto au Portugal et du vin de Champagne en France. A Bordeaux, en Beaujolais ou en Vallée du Rhône, les interprofessions cherchent actuellement à mettre en place des systèmes similaires et la plupart des grands vignobles européens envisagent aujourd'hui de mieux exploiter cette possibilité de commande stratégique de l'offre. L'expérience la plus avancée à ce jour de mise en place d'une réserve qualitative étant celle du vignoble champenois, elle servira de fil conducteur à notre étude et au calibrage du modèle (Sect. 1). Il s'agit du vignoble français le plus septentrional, il subit de ce fait d'importants aléas climatiques. De plus, le Comité Interprofessionnel des Vins de Champagne (CIVC) est l'une des premières et des plus importantes interprofessions françaises, ce qui rend l'étude des instruments de régulation particulièrement parlante dans cette région. En Champagne[3], une fois la récolte effectuée, le jus de raisin est mis en cuve où il subit une première fermentation à l'issue de laquelle s'effectue le *tirage* des quantités de *vin clair* que l'on souhaite mettre en bouteille. Le vigneron peut cependant ne tirer qu'une partie de ce vin clair, le solde constituant une réserve qui lui permet de pallier les aléas en termes de quantité et de qualité des années à venir. C'est ce que l'on appelle la *mise en réserve individuelle*. Une fois le tirage effectué, on obtient le *vin sur latte* qui après vinification se retrouve sur le marché en bouteilles disponibles à la vente. Par la définition d'un *rendement autorisé tirable*, le CIVC instaure une politique de *blocage* qui permet de coordonner les décisions individuelles. En effet, si l'interprofession fixe un tel rendement, le vigneron n'a plus à se préoccuper de la constitution d'une réserve puisque les quantités dépassant le rendement autorisé tirable seront bloquées dans la réserve qualitative. Afin de donner l'intuition de l'intérêt que ce stockage représente, supposons que survienne une récolte abondante et de qualité. Dans un premier temps, la partie du rendement qui dépasse le rendement maximum autorisé par l'INAO est éliminée. Le rendement résultant de la différence entre ce rendement maximum et le rendement autorisé tirable est bloqué. Supposons qu'à cette récolte succède

[2]On revient, au début de la présentation du modèle (Sect. 1), sur la corrélation entre quantité récoltée et qualité du raisin.

[3]Le processus de production du champagne est ici simplifié afin de se focaliser plus particulièrement sur le mode de régulation de l'offre.

une récolte peu abondante et de qualité basse. L'interprofession a alors la possibilité de débloquer les quantités de la réserve qualitative et d'augmenter ainsi la quantité et la qualité moyenne du vin clair disponible à la mise en bouteille.

Cependant, le système de blocage/déblocage en réserve qualitative est contesté. Le fait que les décisions des organismes de filière soient rendues obligatoires nécessite une force de rappel du point de vue des risques que représente une coordination forcée sur les quantités commercialisées. Cette coordination peut être dangereuse, du point de vue de l'intérêt public, en raison de l'élévation artificielle des prix pour les consommateurs. Certaines interprofessions pourraient en effet être tentées de faire passer la régulation des volumes pour une régulation de la qualité, ce qui serait contraire aux règles de libre circulation et de concurrence qui existent au niveau communautaire. Si l'on prend en compte ces considérations, ce mécanisme de régulation devrait faire l'objet d'une étude permettant de déterminer ses impacts du point de vue de la politique de la concurrence, en quantifiant le bien-être social résultant de la mise en place de ce mécanisme, et en comparant les résultats obtenus avec ceux d'une situation de *libre concurrence entre vignerons*[4] sur le marché.

On propose une formalisation mathématique du mécanisme de réserve qualitative en termes de processus markovien commandé. Comme on l'a souligné plus haut, c'est le blocage tel qu'il s'effectue en Champagne qui servira de référence mais les principes du modèle pourraient être appliqués à d'autres régions viticoles. La mise en œuvre d'un logiciel basé sur un algorithme de programmation stochastique permet une appréciation quantifiée des effets de la stratégie optimale de mise en réserve par un organisme de filière agissant en "monopole local". Les entrants essentiels pour effectuer ce bilan économique sont les caractéristiques spécifiques du vignoble d'appellation d'origine sur le plan de l'offre (capacité de production en fonction des droits de plantation, capacité de mise en réserve de la production, etc.) et de la demande (taille du marché et possibilité de valorisation auprès des consommateurs) en prenant explicitement en compte les caractéristiques structurelles liées aux aléas subis par la région viticole considérée, en termes de qualité et de quantité (production annuelle aléatoire). Le modèle fournit, entre autres, une évaluation des quantités commercialisées, de la qualité moyenne des produits, ainsi que du surplus du producteur et des consommateurs. On analyse les résultats de deux scénarios de simulation à la lumière des hypothèses du modèle et, pour finir, on discute de l'originalité de notre démarche en faisant le lien avec la littérature qui s'intéresse à l'impact de la mise en place de stocks régulateurs sur le bien-être social.

1. Le modèle

On considère une région viticole, ou vignoble, dont la surface S résulte des droits de plantation qui lui sont délivrés. On suppose que le vignoble, dont les vignerons

[4] La section 1.3 décrit cette situation où l'on suppose que l'interprofession n'est pas autorisée à dicter ses consignes de stockage en réserve qualitative.

sont regroupés au sein d'une interprofession, produit un vin d'AOC en situation de monopole. En ce qui concerne les aléas climatiques, on suppose qu'ils se répercutent sur deux variables aléatoires : la quantité et la qualité du raisin. Comme on l'a vu dans l'introduction, la corrélation entre quantité récoltée et qualité du raisin est négative lorsqu'il y a recherche *ex-ante* d'un rendement élevé par les producteurs *via* les pratiques culturales, et positive lorsqu'*ex-post*, et à pratiques culturales fixées, le climat est favorable. Puisqu'on s'intéresse ici aux vins d'AOC, on suppose que les pratiques culturales sont fixées par l'INAO ainsi qu'un rendement maximum $R_{\max}$ que la région est autorisée à produire en raisin. Cependant on choisit dans le modèle de ne pas corréler positivement la qualité à la quantité. En effet, outre le fait que cette corrélation est difficile à établir rigoureusement, elle pèserait en faveur du bilan économique du mécanisme de réserve qualitative (plus la quantité récoltée est élevée plus il y a de quantités disponibles au stockage, et plus la qualité du stock est élevée puisque la qualité accompagne la quantité). Or, l'objectif étant d'étudier la légitimité du contrôle de l'offre par l'interprofession, on souhaite se placer d'emblée dans un cadre plutôt défavorable à la réserve qualitative, c'est-à-dire construire une modélisation "dans le pire cas" pour le consommateur[5]. Formellement, on considère que le rendement agronomique et la qualité du raisin sont des variables aléatoires indépendantes. Le rendement agronomique α_i de l'année i est caractérisé par sa moyenne $\bar{\alpha}$ et son écart-type σ_α (l'aléa étant modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale). La qualité objective du raisin k_i correspondant au rapport de la concentration en sucre et de l'acidité du raisin utilisé, est caractérisée par sa moyenne $\bar{k}$ et son écart-type σ_k (loi normale). Les coûts de production du raisin et de transformation en vin sont supposés nuls car ils ne modifient pas la stratégie de mise en réserve.

Réserve qualitative. La réserve a une capacité maximum $X_{\max}$, instaurée par décret pour éviter qu'une proportion trop élevée de récoltes anciennes ne détériore la qualité du mélange de vin clair stocké dans le passé. On néglige le coût de stockage puisque la mise en place de réserves qualitatives requiert avant tout un investissement en équipement en cuves, coût fixe qui n'influence pas les décisions annuelles de stockage. On considère un processus de régulation simplifié où la quantité tirée u résultant du rendement autorisé tirable constitue la seule variable stratégique[6], la seule réaction possible face aux aléas sur la quantité et la qualité. Puisque u correspond au volume que chacun des viticulteurs est autorisé à mettre en bouteille pour à terme être commercialisé, le solde est stocké en réserve qualitative. La décision concernant ce volume, dictée par l'interprofession, est destinée à coordonner les décisions individuelles des vignerons. La réserve est définie comme le stock disponible avant tirage, issu à la fois du stock de l'année précédente après

[5]A savoir : région productrice en monopole, prenant, comme on va le voir dans les sections suivantes, des décisions optimales de stockage en vue de maximiser son profit, faisant face à des consommateurs plus sensibles à la restriction de l'offre qu'au lissage de la qualité... On revient sur ce point dans l'analyse des résultats des simulations (Sect. 1.4).

[6]On suppose, pour synthétiser les décisions de blocage et de déblocage en une seule décision que la totalité de la récolte est intégrée au stock issu des campagnes précédentes.

tirage et de la récolte de l'année en cours. Plus précisément, le rendement agronomique α_{i+1} de la récolte de raisin de qualité k_{i+1} de l'année $i+1$ s'ajoute à la quantité X_i présente dans la réserve de vin clair héritée de la campagne précédente i. Une fois cette quantité ajoutée à la réserve, elle en modifiera l'état en termes de quantité disponible X_{i+1} et en termes de qualité K_{i+1}. Le vignoble peut parfaitement déterminer un état (X_i, K_i), une fois que les paramètres α_i et k_i lui sont révélés en début de campagne. Connaissant cet état de la réserve, l'interprofession prend sa décision de tirage d'une quantité u_i, qui, après vinification, sera commercialisée. Lors de l'intégration dans la réserve qualitative de la quantité α_{i+1}, deux situations peuvent se présenter : soit *(i)* l'intégration dans la réserve de cette quantité ne conduit pas à un dépassement de capacité de la réserve, c'est-à-dire que $X_i - u_i + \alpha_{i+1} < X_{\max}$, soit *(ii)* elle conduit à un dépassement de capacité, ce qui se produit si $X_i - u_i + \alpha_{i+1} \geqslant X_{\max}$. On peut déterminer la quantité présente dans la réserve et sa qualité selon ces deux cas :

(i) Pas de dépassement de capacité. En posant la condition $u_i \leqslant X_i$ traduisant le fait qu'une commande n'est admissible que si elle n'excède pas le niveau de la réserve disponible, on a :

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i - u_i + \alpha_{i+1} & \text{si} \quad u_i \leqslant X_i \\ X_{i+1} = \alpha_{i+1} & \text{si} \quad u_i > X_i. \end{cases}$$

La qualité de la réserve, moyenne pondérée par les quantités des qualités de la réserve précédente après tirage et de la récolte courante s'écrit alors :

$$\begin{cases} K_{i+1} = [K_i(X_i - u_i) + k_{i+1}\alpha_{i+1}]/X_{i+1} & \text{si} \quad u_i \leqslant X_i \\ K_{i+1} = k_{i+1} & \text{si} \quad u_i > X_i \end{cases}$$

(ii) Dépassement de capacité. Dans ce cas la réserve est toujours comblée jusqu'à la capacité maximum, $X_{i+1} = X_{\max}$, mais toujours de façon à maximiser la qualité de ma réserve :

$$\begin{cases} K_{i+1} = [K_i(X_i - u_i) + k_{i+1}(X_{\max} - X_i + u_i)]/X_{\max} & \text{si} \quad k_{i+1} \leqslant K_i \\ K_{i+1} = [K_i(X_{\max} - \alpha_{i+1}) + k_{i+1}\alpha_{i+1}]/X_{\max} & \text{si} \quad k_{i+1} > K_i. \end{cases}$$

En clair, si $k_{i+1} \leqslant K_i$, c'est-à-dire si la qualité du raisin issu de la dernière récolte vient détériorer la qualité de la réserve, alors celle-ci est comblée, l'excédent étant jeté. Si par contre $k_{i+1} > K_i$, c'est-à-dire si la qualité du raisin issu de la dernière récolte vient améliorer la qualité de la réserve, alors une quantité appropriée est vidée de la réserve de façon à y intégrer le maximum de quantités issues de cette nouvelle récolte de qualité supérieure. Ce phénomène de substitution des quantités de la réserve par des quantités d'une récolte de qualité supérieure peut même mener à vider intégralement la réserve dans le cas où $\alpha_{i+1} > X_{\max}$ et alors $K_{i+1} = k_{i+1}$.

Etant donné ces règles de fonctionnement, on va pouvoir modéliser la suite des états de la réserve qualitative par un processus markovien commandé (voir la Sect. 1.2).

Demande des consommateurs. On utilise le modèle classique de Mussa et Rosen [5], que l'on présente ici brièvement. Dans ce modèle, la demande est supposée être fonction du prix du bien mais aussi de sa qualité, considérée sous son aspect économique comme un paramètre affectant positivement la disponibilité à payer des consommateurs. A ce titre, on prend en compte le goût des consommateurs pour la qualité du bien offert. De manière formelle, chaque consommateur est identifié à son goût θ pour la qualité, uniformément[7] réparti sur $[0, \bar{\theta}]$, où $\bar{\theta}$ représente l'hétérogénéité des goûts des consommateurs. La consommation d'une unité du bien de qualité K au prix p entraîne une utilité θK, le surplus d'un consommateur de type θ étant donné par $S(\theta, K, p) = \theta K - p$. En clair, le bien-être est d'autant plus élevé que la qualité est haute et que le consommateur a du goût élevé pour la qualité (expertise), mais plus le prix est élevé plus ce bien-être est diminué. Le consommateur θ n'achète le bien que si celui-ci lui procure un surplus positif. Ainsi, si un vin de qualité K est commercialisé, le marché n'est couvert que sur le segment $[\frac{p}{K}, \bar{\theta}]$. On en déduit la demande $D(p) = M \int_{\frac{p}{K}}^{\bar{\theta}} f(\theta)\mathrm{d}\theta = M(\bar{\theta} - \frac{p}{K})/\bar{\theta}$ où M désigne la *taille du marché*[8]. En posant $u = D(p)$, ce qui revient à égaliser l'offre (correspondant dans notre modèle à la décision de tirage) avec la demande, on obtient le prix du vin $p = \frac{\bar{\theta}K}{M}(M-u)$, en fonction de la quantité mise en vente u et de la qualité K de la réserve dont cette quantité est issue. On en déduit le profit de la région productrice $\Pi = pD(p) = \frac{\bar{\theta}K}{M}(M - u)u$ et le surplus des consommateurs mesuré par $W_c = M \int_{\frac{p}{K}}^{\bar{\theta}} S(\theta, K, p) f(\theta)\mathrm{d}\theta = MK(\bar{\theta} - \frac{p}{K})^2/2\bar{\theta} = \bar{\theta}Ku^2/2M$. Le surplus W_c a une dépendance linéaire par rapport à la qualité et quadratique par rapport à la quantité du vin. Le choix de cette modélisation revêt de ce fait un intérêt particulier étant donné que l'un des objectifs du bilan économique est de déterminer si la régulation de l'offre est préjudiciable aux consommateurs. En effet, on se place dès lors dans une situation où ceux-ci sont plus sensibles à une réduction de l'offre qu'à une augmentation de la qualité.

1.1. Incitations au blocage sur deux périodes

Avant de traiter le cas en horizon infini (Sect. 1.2), et afin de donner l'intuition des incitations au blocage en réserve qualitative que représentent les aléas (sur la quantité récoltée et sur la qualité du raisin), on présente ici un problème simplifié, sur deux périodes, en supposant que l'aléa ne porte que sur une seule des deux variables (quantité ou qualité). La région cherche à maximiser en u (quantité mise en vente) la somme du profit de première période et du profit espéré de seconde période : $\Pi_1 + E(\Pi_2)$. Le solde de la récolte est bloqué en réserve qualitative en première période et on suppose que l'intégralité de la cuve est débloquée en deuxième période.

[7]Relâcher l'hypothèse de répartition uniforme des goûts, hypothèse presque toujours retenue dans les modèles pour des raisons de simplicité mathématique, n'affecte les résultats que quantitativement.

[8]La taille du marché est définie comme l'ordonnée à l'origine de la fonction de demande qui est linéaire et décroissante avec le prix.

Proposition 1.1. *La quantité bloquée en première période vaut* $(\alpha_1 - \bar{\alpha})/2$ *si l'aléa ne porte que sur la quantité et* $\bar{\alpha}(k_1 - \bar{k})/4k_1$ *si l'aléa ne porte que sur la qualité.*

Démonstration. Si l'aléa ne porte que sur la quantité, on pose $k_1 = k_2 = \bar{k}$. On a $\Pi_1 = \frac{\bar{\theta}\bar{k}}{M}(M-u)u$ et $E(\Pi_2) = \frac{\bar{\theta}\bar{k}}{M}[M - (\alpha_1 - u + \bar{\alpha})](\alpha_1 - u + \bar{\alpha})$. En effet la quantité espérée à la période 2 vaut $E(\alpha_2) = \bar{\alpha}$. La fonction $\Pi = \Pi_1 + E(\Pi_2)$ est concave, elle atteint son maximum en $u^* = (\alpha_1 + \bar{\alpha})/2$, d'où une quantité bloquée $(\alpha_1 - \bar{\alpha})/2$, qui est positive si le rendement à la période 1 dépasse le rendement moyen.

Si l'aléa ne porte que sur la qualité, on pose $\alpha_1 = \alpha_2 = \bar{\alpha}$. On a : $\Pi_1 = \frac{\bar{\theta}k_1}{M}(M-u)u$ et $E(\Pi_2) = \frac{\bar{\theta}K_2}{M}[M - (2\bar{\alpha} - u)](2\bar{\alpha} - u)$ où la qualité moyenne de la cuve à la période 2 vaut $K_2 = [(\bar{\alpha} - u)k_1 + \bar{\alpha}\bar{k}]/(2\bar{\alpha} - u)$. En effet à l'étape 2 la qualité espérée vaut $E(k_2) = \bar{k}$. La fonction $\Pi = \Pi_1 + E(\Pi_2)$ est concave, elle atteint son maximum en $u^* = \bar{\alpha}(3k_1 + \bar{k})/4k_1$, d'où une quantité bloquée $\bar{\alpha}(k_1 - \bar{k})/4k_1$, qui est positive si la qualité observée à la période 1 dépasse la qualité moyenne.

L'introduction d'un taux d'actualisation ne viendrait affecter ces résultat que quantitativement. □

En conclusion du problème à deux périodes, on peut dire que la présence d'aléas incite la région à bloquer en réserve qualitative et que la quantité stockée sera d'autant plus importante que la quantité récoltée à la première étape dépasse la quantité moyenne et que la qualité récoltée dépasse la qualité moyenne.

1.2. Décision optimale de tirage en horizon infini

On s'intéresse maintenant au problème en horizon infini. Soit E l'ensemble des états de la réserve en quantité et en qualité. On discrétise E en supposant que $X_i \in \{0, ..., X_{\max}\}$ et que $K_i \in \{0, ..., K_{\max}\}$. La commande $u_i \in F$ correspond à la quantité tirée à la date i afin d'être mise en vinification, où F désigne l'espace des commandes. Les règles de fonctionnement de la réserve qualitative et la connaissance des lois suivies par les variables aléatoires $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{k}$ permettent de construire la matrice de transition M^u du processus markovien correspondant à la commande u. Une stratégie s déterministe, en boucle fermée[9], est une application de E dans F, qui à tout état (x, k) du stock associe une commande u. Il s'agit pour l'interprofession de trouver la stratégie optimale s^* de mise en marché (le solde étant mis en réserve qualitative) permettant de maximiser l'espérance de profit intertemporel[10] de la région $\Pi^{(\infty)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \Pi_i(X_i, K_i, u_i)/(1+\lambda)^i$, où $\lambda > 0$ est le taux d'actualisation.

[9]Puisqu'on est en information parfaite, on se limite à ces stratégies.

[10]En notant $\bar{\Pi}$ un majorant des profits, on peut associer un coût $C_i(X_i, K_i, u_i) = \bar{\Pi} - \Pi_i(X_i, K_i, u_i)$ à toute stratégie.

Tel qu'il vient d'être formulé, ce problème peut être résolu par l'algorithme de Howard [3], qui est issu de la démonstration du théorème 3.1 présenté en annexe (Sect. 3). Ce théorème démontre l'existence et l'unicité de l'équation de Bellman dans le cas particulier de la programmation dynamique à horizon infini et à coût actualisé. L'intérêt de l'algorithme de Howard est qu'il permet d'obtenir explicitement une suite de stratégies s'améliorant de façon monotone à chaque itération et dont on peut contrôler le coût. Il s'agit d'une méthode "acteur-critique", c'est-à-dire une méthode où une stratégie est d'abord "appliquée" (calcul du coût associé à cette stratégie), puis "critiquée" (par minimisation) pour obtenir une nouvelle stratégie. On montre que cet algorithme converge linéairement, c'est-à-dire que l'écart entre le coût de la stratégie courante et la stratégie optimale est majoré en valeur absolue par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1.

1.3. Simulations

Dans cette section, on ne donne qu'un exemple du type d'analyse qui peut être menée grâce au modèle : la simulation d'une politique qui consisterait à augmenter la capacité de la réserve qualitative du vignoble champenois. Ceci nous permet de nous focaliser sur l'impact de la capacité de stockage (variable importante pour analyser la légitimité de la mise en place de réserves qualitatives), mais le modèle pourrait aussi permettre de s'intéresser à l'impact des caractéristiques de la région étudiée (telles que la localisation du vignoble qui conditionne les aléas sur la matière première), ou encore de tester l'impact de changements de réglementation (modification des droits de plantation, par exemple).

Un logiciel basé sur l'algorithme décrit dans la section précédente et détaillé en annexe fournit, en fonction des données du problème, la matrice des commandes qui à tout état de la réserve associe une commande optimale de tirage. Un tableau de bord qui simule le fonctionnement de la réserve sur la période de temps considérée permet de comparer le bilan économique d'une situation où la réserve qualitative est utilisé de façon optimale, à une situation de référence : la *libre concurrence entre vignerons*. Dans cette situation on considère que l'organisme de filière n'est pas autorisé à dicter des consignes de mise en réserve aux vignerons. La stratégie individuelle qui consiste à mettre la totalité des quantités disponibles sur le marché est alors dominante. En effet, la mise en réserve individuelle n'a d'effet ni sur la qualité moyenne ni sur le prix de vente du vin que le consommateur constate sur le marché et qui déterminent sa décision d'achat. Dans l'impossibilité d'être coordonnées par l'interprofession, les décisions individuelles de stockage se solderaient alors par une perte de profit pour le vigneron.

Pour chacun des deux scénarios qui vont être présentés (1 : capacité de reserve en Champagne, 2 : capacité de réserve doublée), des séries de rendements agronomiques et de qualités de raisin sont générées aléatoirement en fonction des caractéristiques du vignoble, afin de répéter ce bilan économique et ainsi obtenir des pourcentages moyens de variation par rapport à la situation de concurrence entre vignerons. Pour chaque scénario, l'expérience est ainsi répétée 100 fois.

Scénario 1. On simule le vignoble sur une période de 20 ans. Sa superficie est de 30 000 hectares. Le rendement agronomique, ramené en millions de bouteilles (Mb) suit une loi normale centrée en 270 Mb, et d'écart-type[11] 100 Mb. La qualité moyenne du vin ($\bar{k} = 50$), obtenue en normalisant l'hétérogénéité des goûts des consommateurs ($\bar{\theta} = 1$), est affectée par un facteur de millésime correspondant à la qualité du raisin de l'année. Cette qualité du raisin est centrée en 1 et d'écart-type $0,2$. Le rendement maximum autorisé fixé par l'INAO est de 13000 kg/ha, ce qui correspond à 330 Mb. La réserve maximum ($X_{\max}$) est quant à elle limitée à 445 Mb. La taille du marché[12] est fixée à $M = 1000$ Mb. Enfin, le taux d'actualisation est fixé à 5% ($\lambda = 0,05$).

Scénario 2. Dans un deuxième temps on teste, sur les mêmes données, une politique qui consisterait à autoriser le doublement de la capacité de mise en réserve ($X_{\max} = 890$ Mb).

Resultats. Le tableau suivant résume le bilan économique obtenu dans les scénarios 1 et 2. Pour chaque variable économique, on donne la moyenne et les valeurs extrêmes (pour les 100 simulations) du pourcentage de variation due au mécanisme de blocage par rapport à la situation de concurrence entre vignerons (en %) :

Tableau 1. Pourcentage de variation blocage/concurrence.

Scénario	**scénario 1**			**scénario 2**		
Variables	moy	min	max	moy	min	max
Quantité vendue	−0,36	−1,35	0,00	−0,52	−3,40	0,00
Qualité moyenne	0,06	0,00	0,22	0,03	0,00	0,14
Ecart-type de la qualité	−16,46	−26,25	−10,52	−30,91	−56,17	−18,32
Ecart-type de qualité×quantité	−29,36	−44,16	−20,63	−50,89	−82,74	−32,74
Prix	0,93	−0,50	4,44	3,64	0,14	9,73
Profit de la région productrice	2,37	1,22	3,98	4,20	2,30	7,50
Surplus des consommateurs	−8,02	−10,65	−4,96	−6,89	−12,54	0,49
Surplus Total	0,71	−0,57	1,68	2,45	0,75	5,42

[11]L'importance de cet écart-type est due à la septentrionalité du vignoble champenois. L'ensemble des données fournies par le CIVC sont confidentielles, mais à titre d'exemple, sur la période 1972–1997, les récoltes extrêmes ont pour valeurs 90 Mb et 330 Mb.

[12]La taille du marché, définie comme l'ordonnée à l'origine de la fonction de demande que l'on suppose linéaire, est ici construite à partir de la série de prix et de bouteilles vendues en Champagne, par régression linéaire.

1.4. Analyse des résultats

Scénario 1. La restriction de l'offre liée à la régulation provoque, en moyenne, une augmentation des prix par rapport à la situation de concurrence. Il en résulte une augmentation du profit de la région productrice au détriment des consommateurs (perte de surplus de 8,02% en moyenne). Cette perte de surplus pour les consommateurs est due au fait que la hausse des prix est rarement compensée par une hausse de la qualité moyenne. Même si le mécanisme de réserve permet théoriquement une hausse de la qualité moyenne à condition qu'il y ait substitution de quantités stockées dans la réserve par des quantités issues d'une nouvelle récolte de qualité supérieure, il faut, pour que cette substitution ait lieu, que l'intégration dans la réserve des quantités récoltées entraîne un dépassement de la contrainte de capacité $X_{\max}$. Si ce phénomène est possible pour d'autres paramètres (en particulier lorsque le rendement agronomique et le rendement autorisé par l'INAO sont suffisamment importants par rapport à la capacité de mise en réserve), il n'est cependant qu'anecdotique dans la série de simulations correspondant aux paramètres choisis ici. Ainsi, sans ce phénomène de substitution, la qualité moyenne reste pratiquement la même avec ou sans mise en réserve (+0,06% par blocage), cette réserve n'étant plus qu'un moyen de mélanger les différents millésimes afin d'échelonner au mieux leur mise en marché, sans pour autant permettre d'améliorer la qualité moyenne du vin qui est alors identique à la qualité moyenne du raisin. Le phénomène le plus remarquable est le lissage au cours du temps de la qualité. En effet, la baisse de l'écart-type des qualités offertes aux consommateurs à chaque période dépasse 16%. Ce résultat est encore plus parlant lorsque les qualités sont pondérées par les quantités vendues. La baisse moyenne de l'écart-type atteint alors pratiquement 30%.

Scénario 2. On remarque que lorsque la capacité de mise en réserve est doublée, il en va de même de l'intensité du phénomène de lissage de la qualité. L'augmentation du profit de la région productrice augmente dans une moindre mesure et le surplus des consommateurs est quant à lui moins affecté que dans le scénario 1. Cela suggère que l'effet principal de la réserve qualitative est plus le lissage de la qualité que la hausse des prix due à la restriction de l'offre.

D'une façon générale, les résultats des simulations montrent que la réserve qualitative a un impact non négligeable sur la variabilité de la qualité des vins proposés aux consommateurs sans affecter le surplus total. En effet, si l'incitation du producteur à la mise en réserve qualitative est liée à l'intérêt d'un meilleur échelonnement des quantités commercialisées, le blocage a aussi pour "effet secondaire" ce lissage de la qualité. Dans le même temps, la "contre-performance" observée en termes de surplus du consommateur est toujours contrebalancée par l'augmentation du profit de la région malgré le choix d'une modélisation "dans le pire cas" pour le consommateur. Cette contre-performance doit être nuancée à la lumière d'hypothèses qui s'inscrivent *a priori* dans un cadre plutôt défavorable à la légitimité de la régulation de l'offre par l'interprofession. Relâcher certaines des hypothèses suivantes peut-être envisagé, en fonction des réalités du vignoble étudié, ce qui se solderait par une amélioration des résultats en termes de surplus du consommateur :

(*i*) Tout d'abord, la région est modélisée comme un monopole et l'interprofession est supposée coordonner parfaitement les décisions des vignerons tout en prenant des décisions optimales de mise en marché.

(*ii*) Le surplus des consommateurs est une fonction quadratique de la quantité et linéaire de la qualité, il est dès lors difficile de compenser la raréfaction du bien par l'amélioration de la qualité.

(*iii*) La réserve qualitative contribue à lisser les variations de la qualité, mais on ne considère pas dans la modélisation de la demande que le consommateur y est sensible. Dans un modèle où le consommateur valorise une certaine stabilité de la qualité, hypothèse d'autant plus justifiée qu'il s'agit de vins dont la consommation reste occasionnelle tel que le Champagne[13], celui-ci pourrait voir son surplus affecté positivement par le lissage de la qualité. Parallèlement, du point de vue du producteur, l'intérêt pour le lissage de la qualité pourrait alors être justifié dans la pratique par un coût de reconquête du marché lorsque les consommateurs sont "déçus" par la qualité observée à une date donnée (par rapport à la qualité espérée) et ceci dans le contexte d'asymétrie d'information qui est celui du marché du vin[14]. Dans ce cas, les consommateurs ont tendance à ajuster leurs croyances, ce qui se répercute sur leur consommation à venir. Le lissage de la qualité peut alors être vu comme un moyen pour la région productrice de maintenir sa réputation, ce qui viendrait conforter l'incitation à une mise en réserve dès lors bénéfique à la fois pour le producteur et pour les consommateurs.

(*iv*) On a choisi de fixer les pratiques culturales. Cependant, la réserve a pour effet de garantir à la région une quantité annuelle disponible supérieure au rendement agronomique moyen autorisé. Forte de cette garantie, la région pourrait alors revoir ses pratiques culturales afin d'abaisser le rendement agronomique moyen. Or, la recherche de rendements agronomiques plus faibles se solderait par une augmentation de la qualité moyenne qui bénéficierait aux consommateurs.

(*v*) Une autre hypothèse du modèle concerne l'indépendance des variables aléatoires régissant la quantité et la qualité du raisin issu de chaque campagne. Or, un climat propice à la productivité de la vigne l'est aussi à la maturation des raisins. La prise en compte d'une telle corrélation entre la quantité et la qualité aurait pour conséquence d'améliorer la qualité moyenne de la réserve *via* d'importantes récoltes de qualité haute qui viendraient plus que contrebalancer les faibles récoltes de qualité basse, voire se substituer à elles. Ici aussi, le surplus des consommateurs s'en trouverait affecté positivement.

[13]Tandis qu'un amateur de Bordeaux peut accepter la variabilité de ce vin, le consommateur pourra rechercher une certaine stabilité pour le Champagne de marque.

[14]Le vin étant l'archétype du bien d'expérience.

(*vi*) Enfin, si les deux scénarios considérés restent représentatifs du type d'analyse que l'on peut entreprendre grâce à l'outil développé, il faut souligner que le bilan économique d'une politique de blocage étant lié aux caractéristiques du vignoble, chaque situation mérite une étude particulière. En ce qui concerne les données retenues dans ces deux scénarios de simulation, il est à noter que le rendement maximum autorisé par l'INAO est inférieur à la quantité de monopole que la région productrice souhaiterait commercialiser annuellement si cette contrainte n'existait pas. Aussi, dans une telle situation, le blocage n'est en aucun cas un moyen de s'approcher de la quantité de monopole. Avec ou sans réserve qualitative, une perte de surplus importante pour les consommateurs, tel que ce surplus est modélisé ici, est imputable à la raréfaction du vin directement liée au respect du cahier des charges de l'AOC, *via* la limitation des rendements autorisés[15].

2. Discussion

En économie, les modèles de programmation stochastique sont couramment utilisés (finance, économie de l'environnement et gestion des ressources naturelles, etc.). En ce qui concerne plus particulièrement l'analyse des effets en termes de bien-être social de phénomènes de stabilisation par le biais de stocks régulateurs, c'est surtout la stabilisation des prix qui est traitée. Etant donné la relation linéaire qui existe entre la qualité et le prix dans notre modèle, l'effet de stabilisation de la qualité résultant du stockage doit être mis en parallèle avec cette littérature. Les travaux pionniers de Waugh [10], Oi [7] et Massel [4] ont pour objectif de comparer, du point de vue du bien-être social, la situation où la régulation par un stock régulateur est absente, avec la situation où une autorité publique parvient à instaurer une politique ayant pour résultat une stabilisation parfaite des prix. Ces articles ont donné lieu à de nombreuses extensions (voir par exemple [1, 6, 8, 9]) qui poursuivent le même objectif d'analyse du bien-être, mais aucun de ces travaux ne s'intéressent à la façon dont le stockage doit être fait, d'un point de vue opérationnel, afin d'atteindre l'objectif de stabilisation parfaite. Qui plus est, ces analyses ne répondent pas à la question de l'optimalité de la politique de stockage (la stabilisation parfaite pouvant être sous-optimale, et ce d'autant plus qu'on a affaire, comme c'est le cas dans le secteur qui nous intéresse, à un stockage privé). L'objectif minimum de notre démarche est d'éclairer les débats, au niveau des institutions, sur la légitimité du mécanisme de réserve qualitative, mais cette démarche n'exclut pas *a priori* de jeter les bases d'outils d'aide à la décision permettant le pilotage d'un vignoble, ce qui requiert, au delà de l'analyse du bien-être, la résolution du problème d'optimisation du stockage. En ce sens, notre démarche se rapproche plus des travaux de Williams et Wright [11–15] qui, dans des modèles stochastiques de gestion de stocks, font intervenir des algorithmes complexes et des simulations

[15] Le rendement maximum autorisé, dont la fonction première et indispensable est d'éviter la recherche *ex-ante* de rendements élevés par des pratiques de la part des producteurs qui détériorent la qualité du raisin, a *ex-post* pour effet de limiter les quantités alors même qu'un rendement important peut être accompagné d'une qualité haute, lorsque le climat est favorable.

numériques. Ces auteurs mettent en évidence la forte dépendance qui existe entre les hypothèses du modèle choisi et les effets attendus en termes de bien-être. Ceci les conduit à penser qu'il n'est pas possible d'obtenir des lois générales sur les effets du stockage sur le bien-être (de petites différences sur les hypothèses pouvant mener à des résultats contradictoires), ce qui semble plaider pour une étude au cas par cas, telle que celle que nous avons décrite, en fonction des réalités rencontrées dans les secteur motivant la recherche.

3. Annexe

Cette annexe présente la démonstration de l'algorithme de Howard. Une chaîne de Markov commandée est définie par la donnée d'un espace fini d'états E, d'un ensemble d'actions F (éventuellement, seul un sous ensemble des couples état-action sont admissibles), et d'une application de F dans $\mathbb{R}^{E\times E}$ qui à toute action u associe la matrice de transition M^u qui décrit l'évolution de la chaîne de Markov lorsque l'action u est choisie. Les matrices de transitions sont supposées être indépendantes du temps. Une stratégie associe une action admissible en fonction du passé des observations. On suppose que l'on est en observation parfaite, et l'on montre que l'on ne perd rien si on se limite aux stratégies déterministes (la décision prise à chaque instant est un élément de F et non une mesure de probabilité sur F) en boucle fermée (l'action choisie ne dépend que de l'état courant). On note S l'ensemble de ces stratégies. Lorsqu'une stratégie $s \in S$ est fixée, on peut construire une matrice de transition M^s qui intègre la commande dictée par s dans chaque état. On a alors une chaîne de Markov homogène en temps.

E étant fini, on se place dans la base canonique associée à l'ensemble E, c'est-à-dire que l'on numérote ses éléments sans perte de généralité, et que l'on identifie un état et son indice. On appelle *coût élémentaire* une application c de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$ qui donne le coût associé à l'état et à la commande choisie à chaque étape. Cette application est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $\boldsymbol{c}^u$ contenant à la ligne correspondant à l'état x le coût $c_x^u \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au cas à horizon infini, on introduit donc un taux d'actualisation λ. A état initial et stratégie fixés, on associe l'espérance de la somme actualisée des coûts élémentaires, et l'on cherche à minimiser ce coût total. Formellement, pour tout $x \in E$, on cherche à résoudre :

$$v_x^* = \min_{s\in S} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_{x^n}^{u^n}/(1+\lambda)^{n+1} \middle| x^0 = x\right]$$

où $\{x^n\}$ et $\{u^n\}$ sont les suites des états et des commandes. Par définition, $x^0 = x$.

On notera $\boldsymbol{v}^* \in \mathbb{R}^E$ l'application qui associe à tout état initial $x \in E$ le coût minimal v_x^*. Comme précédemment, $\boldsymbol{v}^*$ est un vecteur dont la ligne correspondant à l'état x contient le réel v_x^*.

Théorème 3.1. *Supposons F compact, $u \longrightarrow (M^u, \boldsymbol{c}^u)$ continue. Supposons que $\forall u \in F$ et $\forall x \in E$ $c_x^u \geqslant 0$, et $\lambda > 0$. Notons $A^u = M^u - I$, où I est la matrice identité de dimension $\mid E \mid$. La solution $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^E$ de :*

$$\min_{u\in F}\{((A^u - \lambda I)\boldsymbol{v})_x + c_x^u\} = 0, \forall x \in E$$

existe, est unique, et donne le coût optimal pour tout état initial. De plus,

$$s : x \longrightarrow u^* \in \arg\min_{u\in F}\{(A^u\boldsymbol{v})_x + c_x^u\}$$

définit une stratégie optimale, et cette stratégie est markovienne.

Démonstration. Pour établir cette preuve, on commence par rappeler deux résultats sur les matrices de transition, puis on fait le lien entre l'équation et l'optimalité du coût (principe de Bellman), pour enfin montrer l'existence et l'unicité de la solution.

Lemme 3.2. *Soit M une matrice de transition d'une chaîne de Markov. Toutes les valeurs propres de M ont un module inférieur à 1.*

Démonstration. Il suffit de prendre la norme infinie de M qui est égale à 1, l'égalité étant obtenue pour le vecteur (1...1). □

Définition 3.3. *Principe de maximum.* Un opérateur A satisfait au principe du maximum [resp. principe du maximum positif] si et seulement si :

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^E, \forall x \in \arg\max_{x\in E} v_x, (A\boldsymbol{v})_x \leqslant 0$$

[resp. $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^E, \max_{x\in E} v_x \geqslant 0 \Rightarrow \forall x \in \arg\max_{x\in E} v_x, (A\boldsymbol{v})_x \leqslant 0$].

On définit de même le principe du maximum strictement positif (inégalité stricte). Ensuite on définit aussi le principe du minimum, du minimum négatif et du minimum strictement négatif.

Lemme 3.4. *Soit M une matrice de transition d'une chaîne de Markov, I la matrice identité de même dimension. Alors $A = M - I$ satisfait au principe du maximum et du minimum, et $A - D$, D diagonale avec $D_{ii} \leqslant 0$ (resp. $D_{ii} < 0$), satisfait au principe du maximum (resp. strictement) positif et au principe du minimum (resp. strictement) négatif.*

Démonstration. Soit $x \in \arg\max_{x\in E} v_x$, on a alors : $(A\boldsymbol{v})_x = \sum_y M_{xy}v_y - v_x \leq \sum_y M_{xy}v_x - v_x \leq 0$, puisque $M_{xy} \geqslant 0$, $\sum_y M_{xy} = 1$ et $v_y \leqslant v_x$. □

Principe d'optimalité de Bellman

$v_x^* = \min_{s\in S} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_{x^n}^{u^n}/(1+\lambda)^{n+1}\middle| x^0 = x\right]$

Par additivité des coûts, on a : la $(1+\lambda)v_x^* = \min_{u\in F} c_x^u + \min_{s\in S} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_{x^{n+1}}^{u^{n+1}}/(1+\lambda)^{n+1}\middle| x^0 = x\right]$

$(1+\lambda)v_x^* = \min_{u\in F} c_x^u + \min_{u\in F} E\left[\min_{s'\in S} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_{x^{n+1}}^{u^{n+1}}/(1+\lambda)^{n+1}\middle| x^1\right]\middle| x^0 = x\right]$

$(1+\lambda)v_x^* = \min_{u\in F} c_x^u + \min_{u\in F} E\left[v_{x^1}^*\middle| x^0 = x\right]$

$(1+\lambda)v_x^* = \min_{u\in F} c_x^u + \min_{u\in F} (M^u v^*)_x$

si bien que $\boldsymbol{v}^*$ vérifie bien l'équation,$\forall x \in E$:

$$\min_{u\in F}\{((A^u - \lambda I)\boldsymbol{v})_x + c_x^u)\} = 0$$

Reste à montrer l'existence et l'unicité de cette solution.

Existence. On construit la solution au moyen de l'itération sur les stratégies suivante :

– Etape $(2i-1)$. A une stratégie s_i on associe $\boldsymbol{v}^i$ solution de :

$$(A^{s_i} - \lambda I)\boldsymbol{v}^i + \boldsymbol{c}^{s_i} = 0$$

où $A^{s_i} = M^{s_i} - \lambda I$, M^{s_i} étant la matrice de transition de la chaîne de Markov associée à la stratégie s_i. Cette solution existe et est unique puisque $A^{s_i} - \lambda I$ est inversible. En effet, les valeurs propres de M^{s_i} ont un module inférieur à 1, donc celles de $A^{s_i} - \lambda I$ sont strictement négatives.

– Etape $(2i)$. A un vecteur de coût $\boldsymbol{v}^i$ on associe une nouvelle stratégie s_{i+1} où :

$$s_{i+1} : x \in E \longrightarrow u \in \arg\min_{u\in F}\{((A^u - \lambda I)\boldsymbol{v}^i)_x + c_x^u\}$$

qui a bien un sens puisque F est compact et $u \longrightarrow (A^u, \boldsymbol{c}^u)$ est continue.

On note dans la suite $A^i = A^{s_i} - \lambda I$ et $\boldsymbol{c}^i = \boldsymbol{c}^{s_i}$. On a construit par cette méthode d'itération sur les stratégies deux suites $\{\boldsymbol{v}^i\}$, $\{s_i\}$. On va montrer que $\{\boldsymbol{v}^i\}$ est une suite décroissante positive qui admet une limite qui est solution de l'équation de la programmation dynamique.

(i) La suite $\{\boldsymbol{v}^i\}$ *est positive.* Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors $\min_x v_x^i < 0$. Pour un x réalisant le minimum on aurait, à cause du principe du minimum strictement négatif (vérifié par A^i) : $(A^i\boldsymbol{v}^i)_x > 0$, or, comme $c_x^i \geqslant 0$, on a une contradiction avec l'équation de l'étape $(2i-1)$.

(ii) La suite $\{\boldsymbol{v}^i\}$ *est décroissante.* En effet on a : $A^i\boldsymbol{v}^i + \boldsymbol{c}^i = 0$. Par différence entre deux équations successives on obtient :

$0 = A^i\boldsymbol{v}^i - A^{i+1}\boldsymbol{v}^{i+1} + \boldsymbol{c}^i - \boldsymbol{c}^{i+1} = A^{i+1}(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{v}^{i+1}) + (A^i - A^{i+1})\boldsymbol{v}^i + \boldsymbol{c}^i - \boldsymbol{c}^{i+1}$

D'après la définition de l'étape $(2i)$ de l'algorithme, on a : $A^i\boldsymbol{v}^i + \boldsymbol{c}^i \geqslant A^{i+1}\boldsymbol{v}^i + \boldsymbol{c}^{i+1}$

et donc $A^{i+1}(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{v}^{i+1}) \leqslant 0$. Enfin, A^{i+1} vérifie le principe de minimum strictement négatif, donc, si pour un x réalisant le minimum on a $v_x^i - v_x^{i+1} \leqslant 0$, alors on aurait $A^{i+1}(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{v}^{i+1}) > 0$, ce qui est exclu. De là on a : $\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{v}^{i+1} \geqslant 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}^i \geqslant \boldsymbol{v}^{i+1}$.

(iii) La limite de $\boldsymbol{v}^i$ est solution. La suite $\boldsymbol{v}^i$ est décroissante minorée, elle est donc convergente. Notons $\boldsymbol{v}^*$ sa limite. $s_i(x) \in F$ compact, il existe donc une sous-suite convergente $\{s_{i'}\}$, notons s^* sa limite. Les hypothèses de continuité entraînent que $A^{i'} \longrightarrow A^*$ et $\boldsymbol{c}^{i'} \longrightarrow \boldsymbol{c}^*$ avec $A^* = A^{s^*} - \lambda I$ et $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}^{s^*}$. Puisque : $(A^{i'}\boldsymbol{v}^{i'-1} + \boldsymbol{c}^{i'})_x \leqslant ((A^u - \lambda I)\boldsymbol{v}^{i'-1} + \boldsymbol{c}^u)_x$, $\forall u \in F$, $\forall x \in E$, et $A^{i'}\boldsymbol{v}^{i'} + \boldsymbol{c}^{i'} = 0$, on a : $0 = A^*\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{c}^* \leqslant (A^s - \lambda I)v^* + \boldsymbol{c}^s$, $\forall s \in S$. Ce qui montre l'existence d'une solution à l'équation de la programmation dynamique.

Unicité. S'il y avait deux solutions $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{v}^2$ avec s_1 et s_2 deux stratégies optimales correspondantes, on aurait $A^1\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{c}^1 \leqslant A^2\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{c}^2$. On a $A^1\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{c}^1 - A^2\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{c}^2 = 0$, qui se réécrit $A^2(\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2) + (A^1 - A^2)\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{c}^1 - \boldsymbol{c}^2 = 0$. Par hypothèse, $(A^1 - A^2)\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{c}^1 - \boldsymbol{c}^2 \leqslant 0$, d'où $A^2(\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2) \geqslant 0$. On en déduit que $\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2 \leqslant 0$ par le principe du maximum vérifié par A^2. Par symétrie du raisonnement on montre que $\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}^1 \leqslant 0$. Et donc on a $\boldsymbol{v}^1 = \boldsymbol{v}^2$. □

Références

[1] R. Edward and C.P. Hallwood, The Determination of Optimum Buffer Stock Intervention Rules. *Quart. J. Economics* **94** (1980) 151–166.

[2] E. Giraud-Héraud, L.-G. Soler, S. Steinmetz and H. Tanguy, La régulation interprofessionnelle dans le secteur viti-vinicole est-elle fondée économiquement ? *bulletin de l'OIV 71* (1998) 813–814.

[3] R.A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes.* Jointly published by MIT Technology Press and Wiley (1960).

[4] B. Massel, Price Stabilization and Welfare. *Quart. J. Economics* **83** (1961) 284–298.

[5] M. Mussa and S. Rosen, Monopoly and product quality. *J. Economic Theory* **18** (1978) 301–317.

[6] D. Newbery and J.E. Stiglitz, *The Theory of Commodity Price Stabilization.* Oxford University Press (1981).

[7] W. Oi, The Desirability of Price Instability Under Perfect Competition. *Econometrica* **29** (1961) 58–64.

[8] S.J. Turnovsky, Price Expectations and the Welfare Gains from Price Stabilization. *Amer. J. Agricultural Economics* **56** (1974) 706–716.

[9] S.J. Turnovsky, The Distribution of Welfare gains from Price Stabilization : the case of Multiplicative Disturbances. *Inter. Economic Rev.* **17** (1976) 133–148.

[10] F.V. Waugh, Does the Consumer Benefit from price Instability ? *Quart. J. Economics* **53** (1944) 602–614.

[11] J.C. Williams and B.D. Wright, *Storage and Commodity Markets.* Cambridge University Press (1991).

[12] B.D. Wright and J.C. Williams, The Economic Role of Commodity Storage. *Economic J.* **92** (1982) 596–614.

[13] B.D. Wright and J.C. Williams, The Roles of Public and Private Storage in Managing Oil Import Disruptions. *Bell J. Economics* **13** (1982) 341–353.

[14] B.D. Wright and J.C. Williams, The Welfare Effects of the Introduction of Storage. *Quart. J. Economics* **99** (1984) 169–192.

[15] B.D. Wright and J.C. Williams, The Incidence of Market-Stabilizing Price Support Schemes. *Economic J.* **98** (1988) 1183–1198.