



**HAL**  
open science

# Un modèle de cycle de vie à préférences différenciées : solution par le calcul variationnel

Mabel Tidball, Robert Lifran

► **To cite this version:**

Mabel Tidball, Robert Lifran. Un modèle de cycle de vie à préférences différenciées : solution par le calcul variationnel. 2001. hal-02826896

**HAL Id: hal-02826896**

**<https://hal.inrae.fr/hal-02826896v1>**

Preprint submitted on 7 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Faculté des Sciences Economiques  
Espace Richter - Avenue de la mer, BP 9606  
34054 MONTPELLIER Cedex 1.  
Tel : 04 67 15 84 95 - Fax : 04 67 15 84 67 E-mail : lameta@lameta.univ-montp1.fr



« Un modèle de cycle de vie  
à préférences différenciées.  
Solution par le calcul variationnel. »  
Mabel TIDBALL et Robert LIFRAN  
DT n°2001-15

Laboratoire Montpellierain  
d'Economie Théorique et Appliquée  
UMR 5474

LAMETA

Document de travail

S WPL  
15-2001

# Life cycle model with changing preferences at retirement  
Solution by dual curve of variations

Un modèle de cycle de vie à préférences différenciées.  
Solution par le calcul variationnel.

M. Tidball et R. Litrain \*

Abstract

Nous présentons un modèle de cycle de vie dans lequel les préférences temporelles et l'élasticité intertemporelle de substitution sont différenciées entre période d'activité et période de retraite. Nous utilisons les techniques du calcul variationnel pour le résoudre, et fournir les équations des profils de la consommation et du patrimoine, ainsi que la durée optimale de carrière. Nous étudions le rôle des différents paramètres des préférences et des ressources viagères, d'abord en l'absence puis en présence d'un système de sécurité sociale. Le cas d'un système actuariellement neutre est analysé. Un des résultats majeurs du modèle est de montrer l'incidence du taux d'intérêt et de sa valeur relative par rapport aux taux d'intérêt subjectifs sur la durée d'activité.

Mots clés: Modèle de cycle de vie, Préférences, Durée d'activité, Systèmes de retraite, Pensions, Patrimoine.

Abstract

We model a life cycle consumption and retirement behavior of utility maximiser individual with different time and consumption preferences, according to whether he has retired or not. To solve this problem and calculate the optimal length of worklife, profile equations for consumption and wealth, we use a calculus of variations. We consider two cases: with and without Social Security pension. We emphasize the case of an actuarially fair pension scheme. Several simulations provide results on the sensibility of the retirement decision according to various parameters of preferences and life cycle resources.

Keywords: Life Cycle Models, Time Preference, Retirement Decision, Social Security System.

INRA-BSR, 2 Place Vala, 34060, Montpellier, Cedex 01. email: tidball@ensam.inra.fr  
† Les auteurs remercient: Alain Rapaport et Patrick Rio pour leurs conseils

Du cycle de vie  
Retraite  
D'une durée  
S WPL 2001-15

# Contents

1	Introduction	3
2	Modèle sans système de retraite	3
2.1	Énoncé du problème :	3
2.2	Analyse du problème. Calcul variationnel.	5
2.2.1	Calcul de $c = c(t, t_r, p_r)$ en $(t_r, T]$	6
2.2.2	Calcul de $c = c(t, t_r, p_r)$ en $[0, t_r]$	7
2.2.3	Calcul de $(t_r, p_r)$ optimal et du profil optimal du problème	7
2.3	Résolution du modèle sans système de retraite	8
2.3.1	Calcul de la consommation optimale en $(t_r, T]$ .	8
2.3.2	Calcul de la consommation optimale en $[0, t_r]$ .	9
2.3.3	Paramétrage des préférences	11
3	Modèle avec système de retraite.	13
3.1	Résolution via le calcul variationnel.	13
3.2	Résolution du modèle avec système de retraite	14
3.3	Généralisation	15
4	Conclusion et perspectives	16

# I Introduction

Y-a-t-il rupture ou continuité dans le profil de la consommation des ménages au moment et durant la retraite ? Et quel lien il y-a-t-il entre la consommation de la période active et celle de la retraite ? Ces questions ont été en grande partie gommées par l'hypothèse de stabilité des préférences<sup>1</sup> et par l'hypothèse complémentaire de lissage de la consommation qui fondent le modèle standard de cycle de vie (MODIGLIANI, BRUMBERG, 1954). Partant plus tôt en retraite, et vivant plus longtemps, les retraités constituent aujourd'hui un groupe de consommateurs de plus en plus importants numériquement et qualitativement, et qui pèsent de plus en plus dans la consommation des ménages. Or l'étude empirique de leurs comportements n'apporte pas d'évidence permettant de fonder des hypothèses simples (BANKS, BLUNDELL, TANNER, 1994). En effet, de nombreux effets individuels ou institutionnels viennent interagir avec les préférences individuelles. Dans ces conditions, il est utile de revenir à la modélisation.

En remettant en cause une des hypothèses de base du modèle de cycle de vie, et en lui substituant l'hypothèse de différenciation des préférences entre la vie active et la retraite, nous voulons en explorer les conséquences tout en conservant le cadre général (notamment l'hypothèse de perfection des marchés financiers) du modèle de cycle de vie. Bien que les bases empiriques pour cette hypothèse soient encore controversées, elle peut s'appuyer au plan théorique sur l'hypothèse beckerienne de la complémentarité temps-consommation dans la fonction de production domestique (BECKER, 1975). Dans ce contexte théorique en effet, il est peu probable que l'augmentation significative du loisir n'ait pas de conséquence sur les dépenses de consommation, toutes choses égales par ailleurs.

Le modèle proposé est un modèle de retraite, en ce sens que la date de retraite, ou la durée de vie active, est endogène. Les choix de l'agent portent sur le profil de consommation  $c(t)$ ,  $t \in [0, T]$  et sur une date de cessation d'activité  $t_r > T$ , à partir de laquelle il ne perçoit plus de revenu. Dans ce problème, l'existence d'une préférence pour le loisir ou d'une discontinuité des préférences sont nécessaires pour que l'agent cesse de travailler avant sa mort ( $t_r > T$ ). Nous avons choisi de modéliser une discontinuité des préférences<sup>2</sup>. Nous proposons une solution de ce problème à partir d'un calcul variationnel. Dans un second temps, nous introduisons dans le modèle un système de pension actuariellement neutre, et nous en étudions les propriétés en utilisant cette solution. Dans les deux cas, nous présentons des résultats (profils de consommation et de patrimoine, et date de retraite) sur la base d'un choix de paramètres pour les préférences et les ressources.

## 2 Modèle sans système de retraite

### 2.1 Énoncé du problème :

Considérons un modèle d'accumulation de richesse d'un individu sur un cycle de vie  $[t_0, T]$  ( $t_0$  date d'entrée dans la vie active et  $T$  date de décès) pour lequel nous faisons les hypothèses suivantes :

---

<sup>1</sup>Dans le modèle standard de cycle de vie, les préférences se décomposent en plusieurs paramètres : préférence temporelle, aversion au risque, élasticité intertemporelle de substitution de la consommation, et peuvent être déclinées par plusieurs formes fonctionnelles. La fonction critère du problème est composée de la somme des utilités instantanées de chaque période (BROWNING, 1991).  
<sup>2</sup>KESSELER et MASON ont étudié les conséquences distributionnelles d'une préférence temporelle dépendant de l'âge: KESSELER, MASON, 1988, p. 293

1. Un revenu instantané  $y(t)$ , fonction déterministe mesurable du temps, est supposé connu, sur un intervalle de temps  $[t_0, t_r]$ , où  $t_r$  est l'âge de retraite.
2. Les revenus  $y(t)$  et consommations  $c(t)$  futurs sont actualisés avec un taux d'intérêt  $\delta > 0$ .
3. Une contrainte viagère de budget sur l'horizon  $[t_0, T]$  impose un patrimoine minimum  $P$  (éventuellement nul) à transmettre par héritage:

$$(1) \quad P_0 + Y - C \geq P$$

où  $P_0$  est le patrimoine initial (à la date  $t_0$ ),  $Y$  et  $C$  les revenus et consommations actualisés sur la période  $[t_0, T]$ .<sup>3</sup>

4. Les choix de l'agent se résument à un profil de consommation  $c(t) > 0$  et à une date de prise de la retraite  $t_r$ , à partir de laquelle il ne perçoit plus de revenu.
5. La rationalité du décideur s'exprime par la maximisation d'une fonction d'utilité additive et temporellement séparable:

$$\int_{t_r}^{t_0} e^{-\sigma_1 \tau} U_1(c(\tau)) d\tau + \int_{T}^{t_r} e^{-\sigma_2 \tau} U_2(c(\tau)) d\tau.$$

C'est à dire que dans notre modèle la fonction d'utilité instantanée se décompose de la façon suivante:

$$U(t, c(t)) = \begin{cases} U_1(c(t)) & \text{si } t \leq t_r \\ U_2(c(t)) & \text{si } t > t_r. \end{cases}$$

Afin de rester dans un cadre assez général, nous ne précisons pas explicitement de choix des fonctions  $U_1, U_2$  mais faisons les hypothèses usuelles de différentiabilité, concavité et croissance des fonctions d'utilité sur leur domaine de définition. Les préférences de l'agent pour le futur sur ces deux périodes sont exprimées par des facteurs  $\sigma_1, \sigma_2$  respectivement.

Ce problème d'optimisation peut se formuler de la façon suivante, trouver  $t_r, c(\cdot)$  telle que :

$$V(t_r, c(\cdot)) = \max_{t_r, c(\cdot)} V(t_r, c(\cdot))$$

où

$$(2) \quad V(t_r, c(\cdot)) = \left\{ \int_{t_r}^{t_0} e^{-\sigma_1 \tau} U_1(c(\tau)) d\tau + \int_{T}^{t_r} e^{-\sigma_2 \tau} U_2(c(\tau)) d\tau \right\}$$

sous la contrainte (1), que l'on peut écrire :

$$(3) \quad P_0 - \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta \tau} y(\tau) d\tau - \int_{T}^{t_r} e^{-\delta \tau} c(\tau) d\tau \geq P.$$

<sup>3</sup>La contrainte viagère (1) est liée à l'hypothèse de perfection des marchés financiers. Si celle-ci n'est pas pertinente, le modèle devient un modèle avec contrainte de liquidité dans lequel la consommation s'ajuste aux ressources courantes.

$$p(t) = \begin{cases} P_0 + \int_t^{t_0} e^{-\delta\tau} (y(\tau) - c(\tau)) d\tau & \text{si } t > t_r \\ p_r & \text{si } t = t_r \\ P_0 + \int_{t_r}^t e^{-\delta\tau} y(\tau) d\tau - \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} c(\tau) d\tau & \text{si } t > t_r \end{cases}$$

c'est à dire

$$p_r = P_0 + \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} (y(\tau) - c(\tau)) d\tau.$$

Les données du problème sont donc:  $t_0, T, y(\cdot), \delta, \sigma_1, U_1, \sigma_2, U_2$ , (où  $\sigma_i$  et  $U_i$  sont les préférences),  $P_0$  et  $P$ . Pour résoudre ce problème:

- Nous prouverons qu'un profil optimal  $t_r, c(\cdot)$ , vérifie

$$P_0 + \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} y(\tau) d\tau - \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} c(\tau) d\tau = P.$$

Voir § 2.2.

- Nous trouverons la consommation optimale  $c_2(t_r, t_r, p_r)$  et le profit optimal  $V_2(t_r, p_r)$  en  $[t_r, T]$ . Voir § 2.2.1.

- Nous trouverons la consommation optimale  $c_1(t_r, t_r, p_r)$  et le profit optimal  $V_1(t_r, p_r)$  en  $[t_0, t_r]$ . Voir § 2.2.2.

- Si  $V(t_r, p_r) = V_1(t_r, p_r) + V_2(t_r, p_r)$  alors

$$\max_{t_r, c(\cdot)} V(t_r, c(\cdot)) = \max_{t_r, p_r} V(t_r, p_r).$$

Voir § 2.2.3.

## 2.2 Analyse du problème. Calcul variationnel.

Considérons le problème auxiliaire, à  $(t_r, p_r)$  fixés :

$$(4) \quad V_2(t_r, p_r) = \max_{c(\cdot)} \left\{ \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} U_2(c(\tau)) d\tau \right\}$$

sous la contrainte (3), c'est à dire :

$$p_r - \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} c(\tau) d\tau \geq P.$$

Montrons d'abord que l'optimum en (4) satisfait

$$(5) \quad p_r - \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} c(\tau) d\tau = P.$$

Si  $p_r = P$  alors  $c(t) = 0$  pour tout  $t$ .

**Remarque 2.1.** Nous devons aussi demander pour avoir  $c(t) > 0$  que  $\dot{p}(t) > 0 \forall t \in (t_r, T]$ .

$$(10) \quad e^{i\sigma - \sigma_2 t} U_2^2(-e^{\delta t} \dot{p}(t)) = cte.$$

qui, dans notre cas comme  $\frac{\partial \dot{p}}{\partial t} = 0$ , signifie:

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \right) = 0,$$

Ce problème est un problème de calcul de variations avec point final fixe. Si nous appelons  $f(t, p, \dot{p}) = e^{-\sigma_2 t} U_2^2(-e^{\delta t} \dot{p})$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $p = p^*(t)$  soit maximum est qu'il vérifie pour chaque point  $p = p^*(t)$  l'équation d'Euler-Lagrange suivante:

$$V_2^2(t_r, p_r) = \max_{p(\cdot)} \int_T^{t_r} e^{-\sigma_2 t} U_2^2(-e^{\delta t} \dot{p}(t)) dt.$$

Il s'agit donc de trouver

En absence de pension, le patrimoine accumulé sert à financer la consommation à la retraite.

$$(8) \quad \dot{p}(t) = -e^{-\delta t} c(t), \quad p(t_r) = p_r, \quad p(T) = P.$$

Définissons un problème équivalent. Soit:

$$(7) \quad p_r > P.$$

Nous devons résoudre (4) sous la contrainte (5). Noter que puisque  $c > 0$ , de (5) nous avons:

**2.2.1** Calcul de  $c = c(t, t_r, p_r)$  en  $(t_r, T]$

L'optimum satisfait (5).

contredit le fait que  $c^*$  est l'optimum. La contradiction vient de l'hypothèse (6). Par conséquent,

$$\int_T^{t_r} e^{-\sigma_2 \tau} U_2^2(c^*(\tau)) d\tau \leq \int_T^{t_r} e^{-\sigma_2 \tau} U_2^2(\bar{c}(\tau)) d\tau$$

donc  $\bar{c}$  satisfait la contrainte (3) et comme  $U_2$  est une fonction croissante

$$p_r - \int_T^{t_r} e^{-\delta \tau} \bar{c}(\tau) d\tau - P = b - a \frac{e^{-\delta t_r} - e^{-\delta T}}{\delta} \geq 0,$$

Définissons  $\bar{c}(t) = c^*(t) + a$  avec  $0 < a \leq \frac{b\delta}{e^{-\delta t_r} - e^{-\delta T}}$ . Alors

$$p_r - \int_T^{t_r} e^{-\delta \tau} c^*(\tau) d\tau - P = b > 0.$$

Donc il existe  $b = b(t_r, p_r) > 0$  tel que

$$(6) \quad p_r - \int_T^{t_r} e^{-\delta \tau} c^*(\tau) d\tau > P.$$

Supposons que l'optimum en (4),  $c^*(t)$ , satisfait



$$(17) \quad \max_{t_r, p_r} V(t_r, p_r) = V(t_r, \bar{p}_r) > V(\bar{t}_r, \bar{p}_r)$$

En effet si

$$(16) \quad \max_{t_r, p_r} V(t_r, p_r) = V(\bar{t}_r, \bar{p}_r).$$

alors

$$(15) \quad V(t_r, \bar{c}) = \max_{t_r, c(\cdot)} V(t_r, c(\cdot))$$

Plus encore, si ce  $(\bar{t}_r, \bar{c})$  est tel que

$$V(\bar{t}_r, \bar{c}) = V(\bar{t}_r, \bar{p}_r).$$

Si  $\bar{t}_r, \bar{c} \in \mathcal{M}$  alors par (14), il existe  $\bar{p}_r$  tel que  $(\bar{t}_r, \bar{c}) \in \mathcal{M}_{\bar{t}_r, \bar{p}_r}$  et  $V(\bar{t}_r, \bar{p}_r)$  telle que

$$\mathcal{M}_{\bar{t}_r, \bar{p}_r} = \{ (t_r, c(\cdot)) / c : [t_0, T] \rightarrow (0, \infty), p(t_r) = \bar{p}_r \}.$$

où, si  $t_0 \leq t_r \leq T$ ,

$$(14) \quad \mathcal{M} = \cup_{t_r, p_r} \mathcal{M}_{t_r, p_r}$$

il est facile de voir que

$$\mathcal{M} = \{ (t_r, c(\cdot)) / t_0 \leq t_r \leq T, c : [t_0, T] \rightarrow (0, \infty) \}$$

Si  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des profils admissibles, c'est à dire

### 2.2.3 Calcul de $(t_r, p_r)$ optimal et du profil optimal du problème

**Remarque 2.2.** Nous devons aussi demander pour avoir  $c(t) > 0$  que  $y(t) - e^{\delta t} \bar{p}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_r]$ .

$$(13) \quad e^{(\delta - \sigma_1)t} U_1^1(y(t)) - e^{\delta t} \bar{p}(t) = cte.$$

qui, dans notre cas comme  $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ , signifie:

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \right) = 0$$

l'équation d'Euler-Lagrange suivante:  
 Comme dans l'analyse antérieure si nous appelons  $f(t, p, \dot{p}) = e^{-\sigma_1 t} U_1^1(y(t)) - e^{\delta t} \bar{p}(t)$  une condition nécessaire et suffisante pour que  $p = p^*(t)$  soit maximum est qu'il vérifie pour chaque point  $p = p^*(t)$

$$V_1(t_r, p_r) = \max_{p(\cdot)} \int_{t_r}^{t_0} e^{-\sigma_1 t} U_1^1(y(t)) - e^{\delta t} \bar{p}(t) dt.$$

Donc,  $c(t) = y(t) - e^{\delta t} \bar{p}(t)$ , nous voulons trouver

$$(11) \quad \bar{p}(t) = e^{-\delta t} (y(t) - c(t)), \quad p(0) = p_0, \quad p(t_r) = p_r.$$

Soient  $t_r, p_0$  et  $p_r$  fixés et:

### 2.2.2 Calcul de $c = c(t, t_r, p_r)$ en $[0, t_r]$

$$V_2(t_r, p_r) = - \int_T^{t_r} A p_2 e^{\beta_2 t} dt = - \left( \frac{p_r - P}{\beta_2} e^{\beta_2 t_r} - \frac{p_r - P}{\beta_2} \right) e^{\beta_2 T}$$

Nous pouvons maintenant calculer  $V_2$ . Soit  $\beta_2 = \gamma_2(\rho_2 + \delta) - \sigma_2 = \frac{1 - \gamma_2}{2\gamma_2 - 1} \sigma_2 + \gamma_2 \delta$ .

$$\begin{aligned} U_2(c(t), t_r, p_r) &= - \left( \frac{p_r - P}{\beta_2} e^{\beta_2 t_r} - \frac{p_r - P}{\beta_2} \right) e^{\beta_2 T} \\ c(t, t_r, p_r) &= - e^{\beta_2 t} \dot{p}(t) = - A p_2 e^{\beta_2 t} \\ \dot{p}(t) &= A p_2 e^{\beta_2 t} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{\beta_2 t_r} - e^{\beta_2 T}}{p_r - P} \\ B &= p_r - \frac{e^{\beta_2 t_r} - e^{\beta_2 T}}{p_r - P} \end{aligned}$$

$$p(t) = A e^{\beta_2 t} + B,$$

Exemple 1: Soit  $\rho_2 = \frac{1 - \gamma_2}{2\gamma_2 - 1} \sigma_2$ . L'équation d'Euler-Lagrange (9) nous donne:

### 2.3.1 Calcul de la consommation optimale en $(t_r, T)$ .

Dans ce paragraphe, nous donnons une forme fonctionnelle standard aux fonctions d'utilité  $U_1$  et  $U_2$ ;  $U_i(c(t)) = c(t)^{\gamma_i}$ , avec  $\gamma_i < 1$ , et nous calculons la consommation optimale.

## 2.3 Résolution du modèle sans système de retraite

$$\max_{t_r \in T_r, p_r \in P_r} (V_1(t_r, p_r) + V_2(t_r, p_r)).$$

Dans les deux paragraphes antérieurs nous avons trouvé la consommation optimale en chaque période et avant la retraite) et les profits optimaux  $V_1$  et  $V_2$  en fonction de  $t_r, p_r$ . Il faut imposer en général des contraintes sur  $t_r$  et  $p_r$  pour avoir  $c(t) > 0$ . Notons  $T_r$  l'ensemble des conditions à vérifier par  $t_r$  et  $P_r$  l'ensemble des conditions à vérifier par  $p_r$ . Alors nous avons ramené le problème (2) à celui de trouver

ce qui contredit (17). Donc (16) est vrai.

$$V(t_r, p_r) = \underline{V}(t_r, \underline{c}) \leq \underline{V}(t_r, \bar{c}) = \underline{V}(t_r, \bar{p}_r)$$

par (14) et (15), il existe  $\bar{c}$ , tel que

$$A_1 = \frac{e^{\rho_1 t_0} - e^{\rho_1 t_r}}{\rho_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})}, \quad B_1 = p_0$$

$$p(t) = Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t}) + A_1 (e^{\rho_1 t} - e^{\rho_1 t_0}) + B_1,$$

Exemple 1:  $U_1(c(t)) = c(t)^{\gamma_1}$ , avec  $\gamma_1 > 1$  et le revenu  $y(t)$  constant pour tout  $t$ ,  $y(t) = Y$ . Soit  $\rho_1 = \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1 \delta - \sigma_1}$ . L'équation d'Euler-Lagrange nous donne:

### 2.3.2 Calcul de la consommation optimale en $[0, t_r]$ .

Donc,  $V_2(t_r, p_r) = p_r - P$  pour toute consommation  $c(t)$  qui vérifie (5).

$$\max_{c(\cdot)} \int_T^{t_r} e^{-\delta \tau} c(\tau) d\tau \quad | \quad \int_T^{t_r} e^{-\delta \tau} c(\tau) d\tau = p_r - P.$$

Cas particulier:  $\delta = \sigma_2$ ,  $\gamma_2 = 1$ . L'équation (10) est vérifiée pour tout  $p(t)$  qui satisfait (8), ou son équivalent (5). Ce qui est tout à fait raisonnable parce que dans cette situation nous cherchons:

- $p_2 \neq 0$ . Si  $p_2 < 0$  alors  $A > 0$  et si  $p_2 > 0$  alors  $A < 0$ . Donc dans les deux cas  $c(t) = -e^{-\delta t} \dot{p}(t) > 0$ .
- Comme  $\delta + p_2 = \frac{1-\gamma_2}{\delta}$ , si  $\delta - \sigma_2 > 0$ ,  $c(t)$  est une fonction croissante et convexe et si  $\delta - \sigma_2 < 0$ ,  $c(t)$  est une fonction décroissante et convexe.
- $p_2 = 0$  alors  $\dot{p}(t) > 0$  et  $c(t) > 0$  et croissante convexe.

Remarque 2.3. De ces formules, nous pouvons déduire les propriétés suivantes, selon la valeur de  $p_2$ :

$$V_2(t_r, p_r) = (-A) \int_T^{t_r} e^{(\gamma_2 \delta - \sigma_2)t} dt = (p_r - P) \gamma_2 (T - t_r)^{1-\gamma_2}.$$

$$U_2(c(t), t_r, p_r) = \left( \frac{p_r - P}{p_r - P} e^{\delta t} \right)^{\gamma_2} \left( \frac{t_r - T}{t_r - T} \right)^{\gamma_2}$$

$$c(t, t_r, p_r) = \frac{p_r - P}{t_r - T} (-e^{\delta t})$$

$$\dot{p}(t) = A,$$

et

$$B = p_r - \frac{t_r - T}{(p_r - P) t_r}$$

$$A = \frac{t_r - T}{p_r - P} > 0$$

$$p(t) = At + B,$$

Si  $\gamma_2 \delta - \sigma_2 = 0$  alors l'équation d'Euler-Lagrange nous donne

Supposons que (19) est vérifié. Si  $p_1 \neq 0$ , alors  $\delta - \sigma_1 > 0$  implique que  $c(t)$  est une fonction croissante et convexe et  $\delta - \sigma_1 > 0$  que  $c(t)$  est une fonction décroissante et convexe. Si  $p_1 = 0$ ,  $c(t)$  est toujours une fonction croissante.

$$(19) \quad \log \left( (P - p_0) \delta Y^{-1} - e^{-\delta t_0} \right) > t_r > T.$$

Cette équation impose des conditions sur  $t_r$ . Il faut

$$(18) \quad P > p_r > p_0 + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r}).$$

c'est à dire que, avec la condition (7),  $p_r$  doit vérifier

$$p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r}) > 0,$$

Remarque 2.4. Noter qu'il existe un  $t_r > t_0$ , découlant de la contrainte  $c(t) > 0$ , Vt. Plus encore, pour tout  $p_1$ , pour avoir  $c(t) > 0$  il faut que

$$V_1(t_r, p_r) = (p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})) \gamma_1 (t_r - t_0)^{1-\gamma_1}.$$

$$c_1(t) = Y - e^{\delta t} p(t) = \frac{p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})}{e^{\delta t} (t_r - t_0)}$$

$$p(t) = Y e^{-\delta t} + A_1$$

et

$$A_1 = - \frac{p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})}{t_r - t_0}, \quad B_1 = p_0$$

$$p(t) = Y \delta^{-1} (e^{-\delta t} - e^{-\delta t_0}) + A_1 (t - t_0) + B_1,$$

Si  $p_1 = 0$ , alors l'équation d'Euler-Lagrange nous donne:

$$\left( - \frac{p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})}{e^{\delta t_r}} \right) p_1 \left( \beta_1^{-1} \left( e^{\beta_1 t_r} - e^{\beta_1 t_0} \right) \right).$$

$$V_1(t_r, p_r) = \int_{t_r}^{t_0} e^{-\sigma_1 t} \left( -A_1 p_1 e^{(\delta + p_1)t} \right) \gamma_1 dt =$$

Nous pouvons maintenant calculer  $V_1$ . Soit  $\beta_1 = \gamma_1 (p_1 + \delta) - \sigma_1 = \frac{1 - \gamma_1}{(2\gamma_1 - 1) \sigma_1 + \gamma_1 \delta}$ .

$$U_1(c_1(t_r, p_r)) = \left( \frac{p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})}{e^{\delta t_r}} \right) p_1 \left( e^{\beta_1 t_r} - e^{\beta_1 t_0} \right)$$

$$c_1(t_r, p_r) = Y - e^{\delta t_r} p(t_r) = - \frac{p_0 - p_r + Y \delta^{-1} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t_r})}{e^{\delta t_r}} p_1 e^{\beta_1 t_r}$$

$$p(t) = Y e^{-\delta t} + A_1 p_1 e^{\beta_1 t}$$

et

### 2.3.3 Paramétrage des préférences

Nous considérons les exemples particuliers présentés en § 2.3.2 et 2.3.1 pour trouver numériquement les  $t_r$  et  $p_r$  optimaux avec la procédure présentée en § 2.2.3.

Dans tous les exemples, nous prenons  $T = 90$ ,  $t_0 = 25$  et  $P_0 = 50$ .

Variation des ressources viagères: le salaire  $Y$  et le taux d'intérêt  $\delta$ .  
 Considérons l'exemple 1 de § 2.3.2 et § 2.3.1, pour les données suivantes:

$\gamma_1$	$\sigma_1$	$\rho_1$	$\gamma_2$	$\sigma_2$	$\rho_2$	$\delta$	$P$
0.5	0.025	0	0.75	0.0375	0	0.05	200

Nous avons les résultats optimaux  $(t_r, p_r)$  pour les différentes valeurs de  $Y$  suivantes ( $da$  est la durée de la période d'activité):

	$t_r$	$p_r$	$da$
$Y=100$	69.7	486.9	44.7
$Y=200$	65.3	944.9	40.3
$Y=300$	64	1400	39
$Y=400$	63.1	1860	38.1

Dans ce tableau, la durée d'activité est, à préférence constante, inversement proportionnelle au montant des ressources viagères.

L'augmentation des ressources viagères induit logiquement une diminution de la durée d'activité, qui passe de 44.7 à 38.1 ans (soit 7 années de retraite de plus), mais l'augmentation des ressources profite davantage à la consommation de retraite (qui passe de 487 à 1860) qu'à la diminution de la durée d'activité.

Avec les mêmes données nous considérons maintenant la variation en  $\delta$ , pour  $Y = 200$ .

	$\delta$	$t_r$	$p_r$	$da$
Cas 3	0.01	90	200	65
	0.025	66	1899	41
Cas 2	0.03	64.3	1691	39.3
	0.035	64	1476	39
	0.04	64.27	1278	39.27
	0.045	64.75	1101	39.75
Cas 1	0.05	65.3	944.9	40.3
	0.06	67.6	691	42.6
	0.07	68.3	505	43.3
	0.1	90	200	65

Lorsque le taux d'intérêt varie, cela a deux effets: le premier sur la valeur de la ressource viagère, le second sur le profil de consommation. Dans ce tableau il faut distinguer trois cas caractérisés par le signe de  $\delta - \sigma_i$ :

Le cas 1, pour  $0.0375 < \delta < 0.1$  où  $\delta > \sigma_i$  pour  $i = 1, 2$ . Le cas 2, pour  $0.025 < \delta < 0.035$  où  $\delta < \sigma_1$  et  $\delta > \sigma_2$ . Le cas 3, pour  $\delta < 0.025$  où  $\delta < \sigma_i$  pour  $i = 1, 2$  ( $\delta = 0.1$  dans notre tableau). Nous faisons l'interprétation en considérant que  $\delta$  décroisse de 0.1 à 0.01 (donc la valeur actuelle des ressources viagères est de plus en plus importante).

et les profils de consommation *actualisée* (c'est à dire la fonction  $c(t)e^{\delta t}$ ) et patrimoine optimal dans chaque cas. Pour  $K = 2$ , ce sont les figures 1 et 2, pour  $K = 3$  les figures 3 et 4, et pour  $K = 4$  les figures 5 et 6. Dans cet exemple  $\delta - \sigma_i = 0$  donc la consommation  $c(t)$  est une fonction constante et la consommation actualisée est décroissante dans chaque période. Nous constatons que la durée d'activité diminue quand la préférence pour la période de retraite ( $K$ ) augmente. Mais ce qui est remarquable, c'est le freinage de l'impacte sur  $t_r$  entre  $K = 3 - 4$  par rapport à  $K = 2 - 3$ .

Considérons:

	$t_r$	$p_r$	$da$
$K=2$	66.2	416.6	41.6
$K=3$	60.55	502.33	35.55
$K=4$	59.78	514.95	34.78

Nous avons les  $t_r, p_r$  optimaux suivants:

$\gamma_1$	$\sigma_1$	$\delta - \sigma_1$	$\gamma_2$	$\sigma_2$	$\delta - \sigma_2$	$\delta$	$P$	$Y$
0.5	0.05	0	0.5	0.05	0	0.05	200	100

différentes valeurs de  $K$ , avec:

Nous considérons maintenant une relation entre les profils aux 2 périodes,  $U_2(c) = KU_1(c)$  pour

$t_r = 90, p_r = P$ . L'agent travaille jusqu'au bout, sans prendre de retraite. Si nous considérons dans le même exemple,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.025$  nous trouvons

Nous pouvons vérifier que  $t_r$  et  $\gamma_2$  sont en relation inverse.

$t_r$	$p_r$	$\gamma_2 = 0.75$	63	950
		$\gamma_2 = 0.7$	70	456
		$\gamma_2 = 0.65$	74	402

en changeant la valeur de  $\gamma_2$ , nous avons:

$\gamma_1$	$\sigma_1$	$p_1$	$\sigma_2$	$p_2$	$\delta$	$P$	$Y$
0.5	0.025	0	0.0375	0	0.05	200	100

Considérons le cas où  $p_1 = p_2 = 0$  avec le vecteur de paramètres:

Variation de préférence:  $\gamma_2$  ou  $K$ .

passer par un minimum quand  $\delta = \sigma_2$ .

La variation du taux d'intérêt a un impact remarquable sur la durée d'activité. Cette dernière rétrécit:

cela conduit l'agent à travailler jusqu'au bout, car il n'a pas pu accumuler suffisamment pour sa retraite. Dans le cas 1 et 2 la consommation est décroissante pendant la durée d'activité et pendant la retraite; Dans le cas 3,  $\delta$  continue à diminuer, donc le revenu est plus important à long terme que dans la diminution de la durée d'activité; l'agent peut épargner pour profiter de sa retraite.

Dans le cas 2, les ressources sont plus importantes à long terme que dans le cas 1 et la consommation est croissante pendant la durée d'activité et décroissante pendant la retraite; cela conduit à une

$\delta = 0.1$  l'agent travaille jusqu'au bout.

Les ressources viagères décroissent; cela conduit à une augmentation de la durée d'activité. Pour Dans le cas 1, la consommation est croissante pendant la durée d'activité et pendant la retraite,

$$\left\{ \int_{t_r}^{t_0} e^{-\sigma_1 \tau} U_1(c(\tau)) d\tau + \int_{T}^{t_r} e^{-\sigma_2 \tau} U_2(c(\tau)) d\tau \right\} = \underline{V}(t_r, c(\cdot))$$

où

$$\underline{V}(t_r, c(\cdot)) = \max_{t_r, c(\cdot)} \underline{V}(t_r, c(\cdot))$$

Avec les techniques du calcul variationnel présentées dans ce travail on peut complexifier un peu le modèle précédent de la façon suivante. Considérons à nouveau un cycle de vie  $[t_0, T]$  où, comme avant,  $t_0, T$  sont fixes et un revenu instantané  $y(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t_r]$  est reçu par l'individu. Considérons maintenant que l'individu a le droit d'avoir une pension  $r(t)$  à partir du moment de sa retraite en échange d'une cotisation obligatoire en cours de sa vie active. Ce problème d'optimisation peut se formuler de la façon suivante, trouver  $\underline{t}_r, \underline{c}(\cdot)$  tels que :

### 3.1 Résolution via le calcul variationnel

Dans le contexte du modèle à préférences différenciées il est naturel de poser la question: en quoi l'existence d'un système obligatoire de Sécurité Sociale modifie les comportements par rapport au modèle standard.

Dans un système obligatoire (SHEINSKI, 1978). Qu'en est-il avec les préférences différenciées? SHEINSKI a montré que l'âge de départ en retraite est plus faible en présence d'épargne optimale. Dans le cas contraire, il va compléter les cotisations par un effort d'épargne en l'absence de SS, l'agent va s'endetter contre les ressources des pensions à venir pour rétablir son cotisation au régime de retraite. En effet, si le taux de cotisation est supérieur au taux d'épargne et le niveau de consommation constant, est indépendant du taux de cotisation (GRAWFORD et LILIBN, 1981, SHESHINSKI, 1978). Il y a substituabilité parfaite entre épargne privée et effet, le capital humain n'est pas modifié, ni en conséquence la contrainte viagère de budget (3), que les marchés financiers soient parfaits et la durée de vie certaine. Sous ces hypothèses en 1996). On montre que, si les préférences sont stables au cours du cycle de vie, l'introduction actuelles des cotisations versées et des pensions perçues. Le système est dit contributif (LEGRAS, Dans un modèle déterministe, le principe de neutralité actuarielle garantit l'égalité des valeurs

### 3 Modèle avec système de retraite.

Les profils de consommation et de patrimoine optimaux pour  $K = 2, \sigma_2 = 0.03$  sont donnés dans les figures 7 et 8.

$\sigma_2 = 0.03$	71.7	554.18	46.7
$\sigma_2 = 0.02$	66.2	416.6	41.6
	$t_r$	$p_r$	$da$

Comme  $\delta - \sigma_2 < 0$  la consommation et la consommation actualisée optimales sont des fonctions croissantes et nous trouvons les valeurs optimales suivantes en comparaison avec celles trouvées pour  $\sigma_2 = 0.02$ :

2	0.5	0.03	positive	0.5	0.03	positive	0.05	200	100
$K$	$\gamma_1$	$\sigma_1$	$\delta - \sigma_1$	$\gamma_2$	$\sigma_2$	$\delta - \sigma_2$	$\delta$	$P$	$Y$

$R/Y=0.15$	57.2	290.4	32.2	19.98	0.5
$R/Y=0.05$	62.4	280.4	37.4	15.4	0.65
	$t_r$	$p_r$	$da$	$Y_{ac}$	$R/Y_{ac}$

Considérons maintenant le cas  $K = 3$  avec  $s = 0.1$  et  $R/Y$  variable. Nous avons:

Selon la variation du taux de cotisation  $s$  la durée d'activité diminue quand  $s$  diminue, en effet  $p_r$  augmente dans ce cas, et le ressources de retraite également.

$s=0.2$	61.5	266.3	36.5	16.12	10	0.62
$s=0.1$	59.8	286.2	34.8	17.55	10	0.57
$s=0.01$	58.6	320.12	33.6	18.63	10	0.53
	$t_r$	$p_r$	$da$	$Y_{ac}$	$R$	$R/Y_{ac}$

Considérons maintenant le cas  $K = 3$  avec variation de  $s$  à pension constante. Nous avons

Nous constatons que la durée d'activité et plus petite (pour les mêmes données) dans le système avec retraite que dans celui sans retraite (voir tableaux A et B).

Les profils de consommation et patrimoine optimaux dans le cas  $K = 3$  sont donnés dans les figures 9, 10 et dans le cas  $K = 4$  dans les figures 11, 12. Comme auparavant la durée d'activité diminue quand  $K$  augmente.

Tableau B

$K=4$	52.24	320.1	27.24	25.61	10	0.39
$K=3$	59.8	286.2	34.8	17.55	10	0.57
	$t_r$	$p_r$	$da$	$Y_{ac}$	$R$	$R/Y_{ac}$

Il faut interpréter  $R/Y$  parce que  $Y$  est considéré au temps  $t_0$  et  $R$  au temps inconnu  $t_r$ . Une fois trouvée la valeur optimale de  $t_r$  on montre en  $Y_{ac}$  la valeur du montant actualisé du revenu au temps  $t_r$ . Dans cet exemple nous avons

0.5	0.05	0	0.5	0.05	0	0.05	200	100	0.1	0.1
$\gamma_1$	$\sigma_1$	$\delta - \sigma_1$	$\gamma_2$	$\sigma_2$	$\delta - \sigma_2$	$\delta$	$P$	$Y$	$R/Y$	$s$

Nous considérons, comme dans la section § 2.3.3,  $U_2(c) = KU_1(c)$  pour différentes valeurs de  $K$  et  $y(t) = Y$  constant. Nous devons ajouter deux autres paramètres, le rapport  $R(t_r)/Y(t_r)$ , qui correspond au taux de remplacement et  $s$  qui correspond au taux de cotisation. Nous considérons les données suivantes (les mêmes que dans le § 2.3.3).

### 3.2 Résolution du modèle avec système de retraite

Le calcul variationnel de ce problème est très similaire à celui réalisé dans les sections précédentes. Il faut seulement modifier le calcul de la consommation optimale en  $(t_r, T]$ . Mais les calculs dans  $(t_r, T]$  sont les mêmes que le calcul de la consommation optimale en  $(t_0, t_r]$  en changeant  $y(t)$  en  $r(t)$ .

où  $0 < s < 1$  est le taux de cotisation.

$$P_0 + \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} (1 - s)y(\tau) d\tau + \int_{t_r}^{T} e^{-\delta\tau} r(\tau) d\tau - \int_{t_r}^{t_0} e^{-\delta\tau} c(\tau) d\tau = P$$

sous la contrainte, que l'on peut écrire :



Le choix de  $t_r$  et  $p_r$  optimaux pour l'individu résultera du meilleur des deux cas.

- $V_2(t_r, p_r)$  est calculé comme en § 2.2.2 en changeant  $y(t)$  en  $r(t)$  et avec condition initiale  $p(t_r) = p_r$  et condition finale  $p(T) = F$ .
- $V_1(t_r, p_r)$  est calculé comme en § 2.2.2 (avec condition initiale  $p(t_0) = F_0$  et condition finale  $p(t_r) = p_r$ ).

où

$$\max_{t_r, p_r, t_r \leq t_{max}} (V_1(t_r, p_r) + V_2(t_r, p_r))$$

Cas 2-  $t_r > t_{min}$ . Dans ce cas nous pouvons calculer le profit optimal en considérant que par rapport au cas étudié dans cet article les seules différences sont que dans la période de retraite l'individu reçoit une retraite  $r(t)$  et que  $t_r \leq t_{max}$ . Donc nous cherchons :

- $V_2(p_{min})$  est calculé comme en § 2.2.1 avec condition initiale  $p(t_{min}) = p_{min}$  et condition finale  $p(T) = F$ .
- $V_2(t_r, p_r, p_{min})$  est calculé comme en § 2.2.1 avec condition initiale  $p(t_r) = p_r$  et condition finale  $p(t_{min}) = p_{min}$ .
- $A = \{(t_r, p_r, p_{min}) : t_r \leq t_{min}, p_r \geq p_{min} \geq F\}$  et  $V_1(t_r, p_r)$  est calculé comme en § 2.2.2 (avec condition initiale  $p(t_0) = F_0$  et condition finale  $p(t_r) = p_r$ ).

où

$$\max_{(t_r, p_r, p_{min}) \in A} (V_1(t_r, p_r) + V_2(t_r, p_r, p_{min})) + V_2(p_{min})$$

Cas 1-  $t_r \leq t_{min}$ . Dans ce cas nous pouvons calculer le profit optimal de la façon suivante:

Nous devons considérer les cas suivants:

avec  $t_{min} \leq t_{max}$  et  $t_{max}$  fixé.  
 Considérons maintenant que l'individu a le droit d'avoir une pension  $r(t)$  mais à partir d'un certain temps  $t_{min}$  (où durée d'activité minimal) fixé par exemple par la loi. Et supposons que  $t_r \leq t_{max}$ ,

### 3.3 Généralisation

Pour  $K = 3$  et  $s = 0.1$ ,  $t_r = 32$ . Ce résultat fait ressortir l'impact redistributif d'un système de Sécurité Sociale (LEGROS 1996), qui ne respecterait pas la contrainte actuarielle.

$$t_r = -\frac{\delta \ln \frac{Y(1-s) + R}{1 - sY e^{-\delta t_0} + R e^{-\delta T}}}{\delta}$$

et  $r(t)$  sont toujours constants:

Cette équation fixe la valeur de  $t_r$  et introduit donc une contrainte dans le choix de l'agent. Ici  $y(t)$

$$(20) \quad \int_{t_r}^{t_0} (1-s)y(t)e^{-\delta t} dt = \int_T^{t_r} r(t)e^{-\delta t} dt.$$

Considérons maintenant que nous imposons la contrainte de neutralité actuarielle du système de Sécurité Sociale, c'est à dire

#### 4 Conclusion et perspectives

L'abandon de l'hypothèse habituelle de stabilité des préférences au cours du cycle de vie, et son remplacement par une hypothèse de différenciation des préférences entre la vie active et la retraite, conduit notamment à souligner l'interaction entre taux d'intérêt et préférences temporelles et son impact sur la durée d'activité.

Dans le modèle sans système de retraite, la durée d'activité apparaît très sensible aux paramètres de comportement, et aux profils d'épargne et de consommation qu'ils induisent sur les deux périodes du cycle de vie. Dans le modèle avec système de retraite, et avec la contrainte de neutralité actuarielle de celui-ci, la durée d'activité est fixée par la contrainte. Lorsqu'on abandonne cette contrainte, la durée d'activité optimale peut être calculée de la même façon que dans le modèle sans système de retraite, mais il y alors un effet redistributif du régime de Sécurité Sociale. Si un tel modèle paraît plus légitime et réaliste que le modèle standard, l'estimation économétrique de ses paramètres en est néanmoins plus délicate. Nous avons ici travaillé avec une différenciation des préférences correspondant à une discontinuité, permettant une recherche de la solution optimale par le calcul variationnel. Une formulation analytique explicite de la solution optimale, obtenue ici numériquement pourrait être recherchée en utilisant les deux contrôles imbriqués. Nous pourrions de la même façon produire les résultats avec une variation continue des préférences.

## References

- [1] BANKS, J., BLUNDELL, R., TANNER, S., 1994, Is there a Retirement-Savings Puzzle? Evidence from UK micro-data. London, Institute for Fiscal Studies, working paper, 30 p.
- [2] BECKER, G., 1975, The allocation of Time and Goods over the Life Cycle, Columbia University Press,
- [3] BROWNING, M., 1991, A simple Nonadditive Preference Structure for Models of Household Behavior over Time, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No 3, pp. 607-637.
- [4] CRAWFORD, V.P., LILLEN, D.M., 1981, Social Security and the Retirement Decision, *Quarterly Journal of Economics*, pp. 505-528.
- [5] CLARK, R., KRIPS, J., SPENGLER, J., 1978, Economics of Aging: A Survey, *Journal of Economic Literature*, Vol. XVI, pp. 919-962.
- [6] DAVIES, J.B., 1981, Uncertain Lifetime, Consumption, and Dissaving in retirement, *Journal of Political Economy*, Vol. 89, No 3, pp. 561-577.
- [7] DUBOIS-LAMBERT, A., 1997, Les stratégies patrimoniales des travailleurs indépendants en vue de la retraite, Thèse, Université de Montpellier I, 358 p. te.
- [8] EHRLICH, I., CHUMA, H., 1990, A Model of the Demand for Longevity and the Value of Life Extension, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No 4, pp. 761-782.
- [9] FABEL, O., 1993, Social Security, optimal retirement and savings, *European Journal of Political Economy*, Vol. 10, pp. 783-802.
- [10] KESSLER, D., MASSON, A. 1988, Wealth distributional Consequences of Life Cycle Models, in *Modelling the Accumulation and Distribution of Wealth*, Oxford, Clarendon Press, pp. 287-318.
- [11] LEGROS, F. 1996, Neutralité Actuarielle et Propriétés Redistributives des Systèmes de Retraite, *Economie et Statistiques*, n° 291-292, P. 173.
- [12] MODIGLIANI, F., BRUMBERG, R., Utility Analysis and the Consumption Function : An interpretation of Cross-Section Data,
- [13] NALBURFF, B., ZECKHAUSER, R.J., 1985 , Pensions and Detirement Decision, in *Pension, Labor and Individual Choice*, NBER, pp. 283-316.
- [14] SEIBERSTAD, A. SYDSAETER K., 1987, Optimal Control Theory with Economic Applications, North-Holland.
- [15] SHESHINSKI, E., 1978. A Model of Social Security and Retirement Decisions, *Journal of Public Economics*, Vol. 10, pp.337-360.
- [16] YAARI, M. 1965, Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of the Consumer, *Rev. Econ. Studies* 32, pp. 137-150.

Figure 2: Patrimoine optimale  $K = 2, \delta = 0.05$

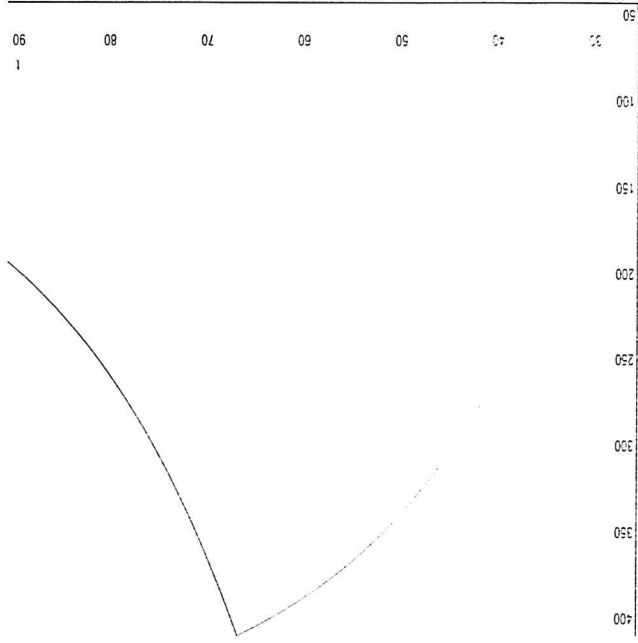


Figure 1: Consommation optimale  $K = 2, \delta = 0.05$

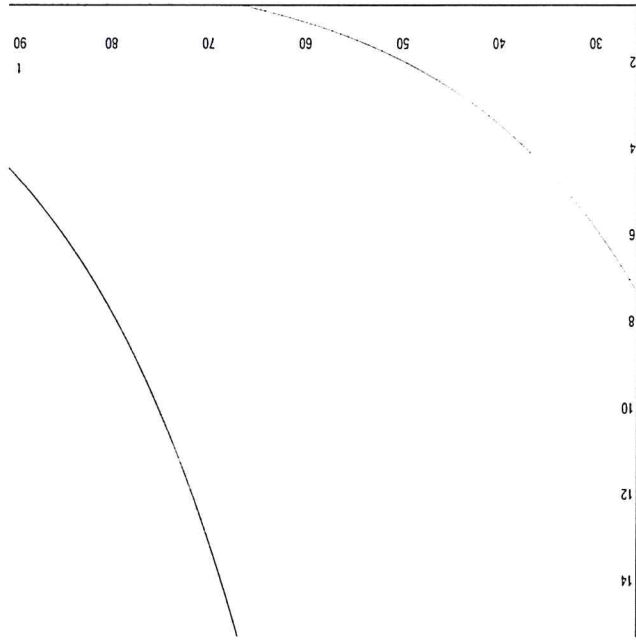


Figure 4: Patrimoine optimale  $K = 3, \delta = 0.05$

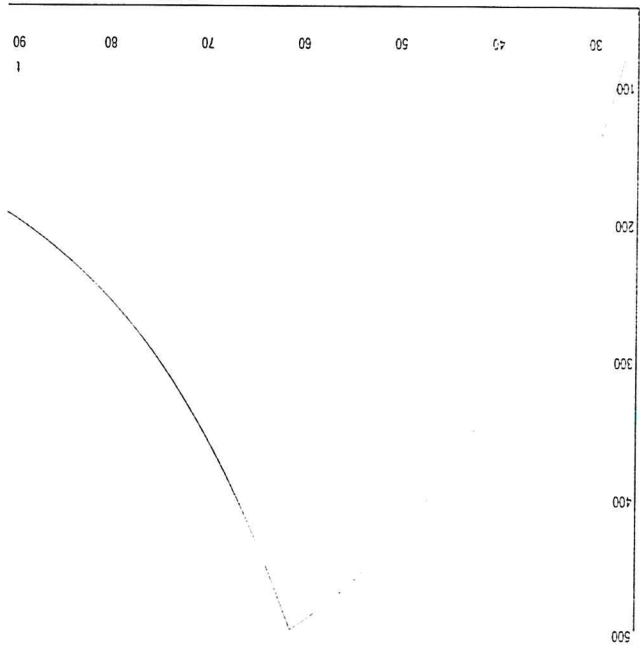


Figure 3: Consommation optimale  $K = 3, \delta = 0.05$

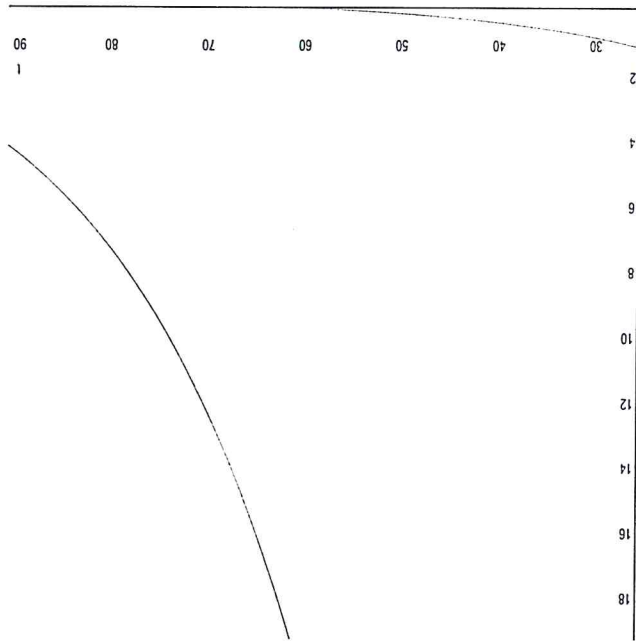


Figure 6: Patrimoine optimale  $K = 4, \delta = 0.05$

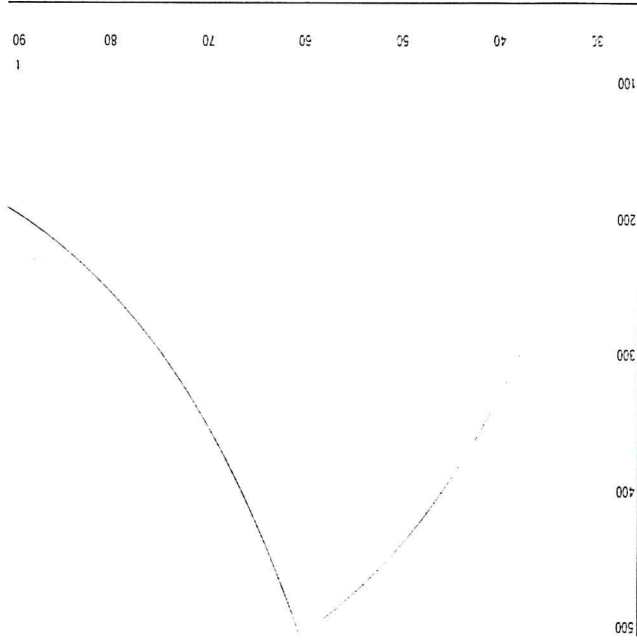


Figure 5: Consommation optimale  $K = 4, \delta = 0.05$

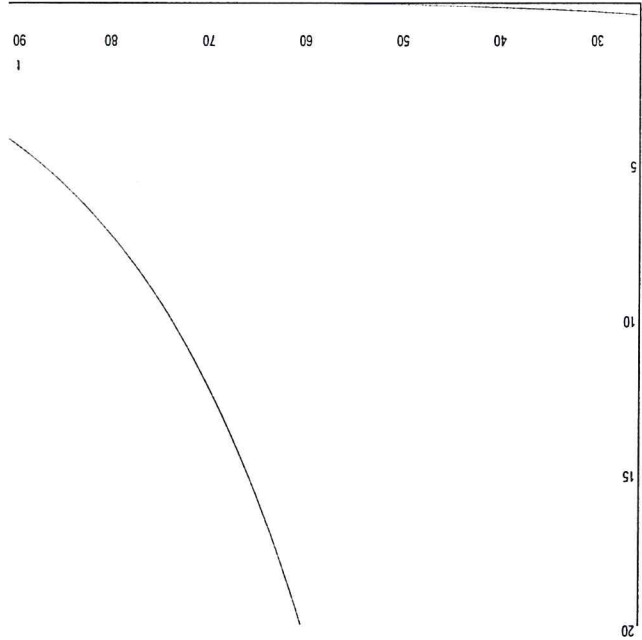


Figure 8: Patrimoine optimale  $K = 2, \sigma_i = 0.03$

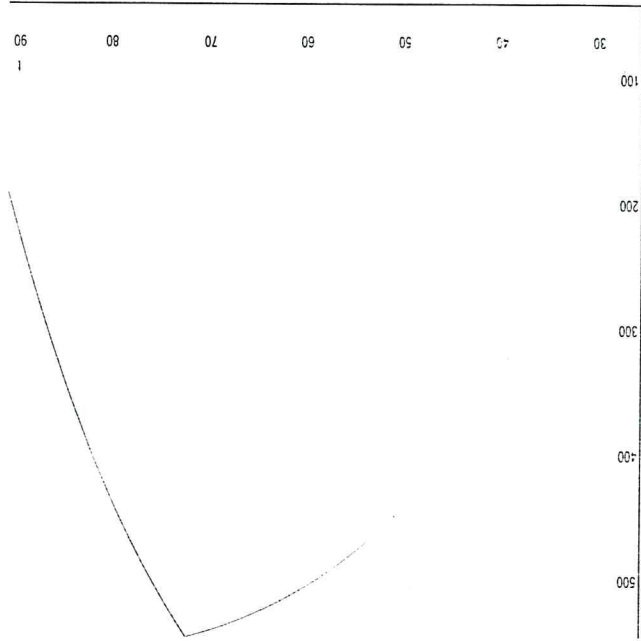


Figure 7: Consommation optimale  $K = 2, \sigma_i = 0.03$

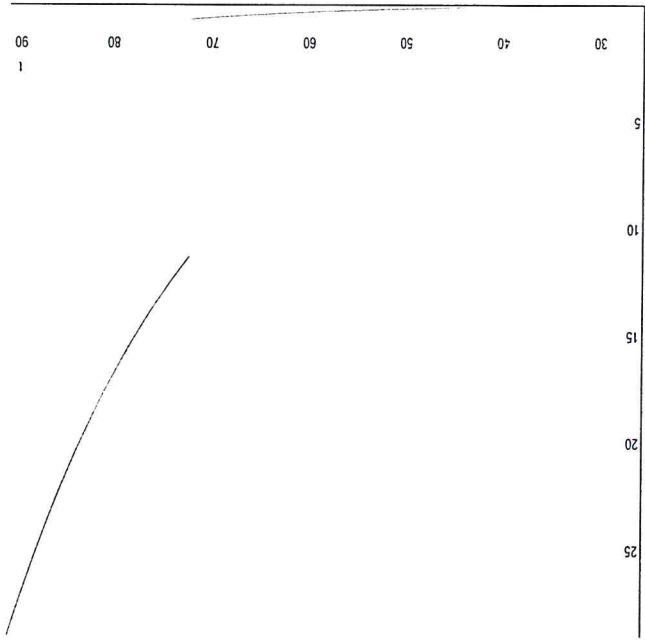


Figure 10: Patrimoine optimal avec pension  $K = 2$

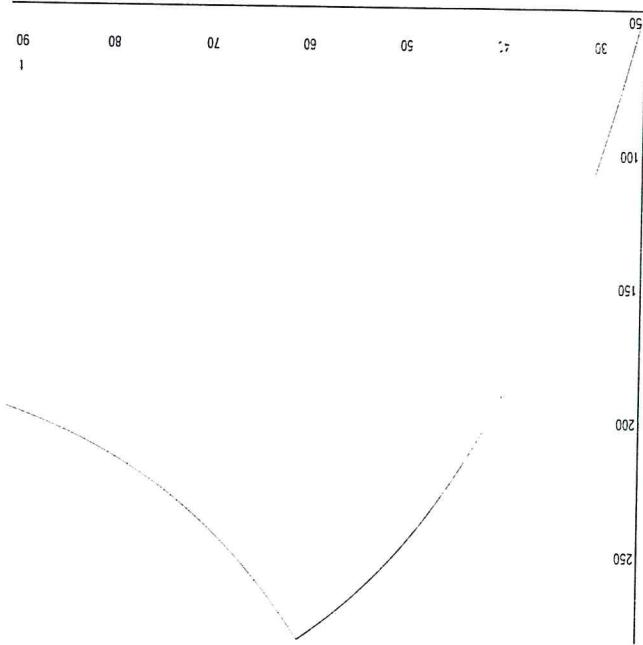


Figure 9: Consommation optimale avec pension  $K = 2$

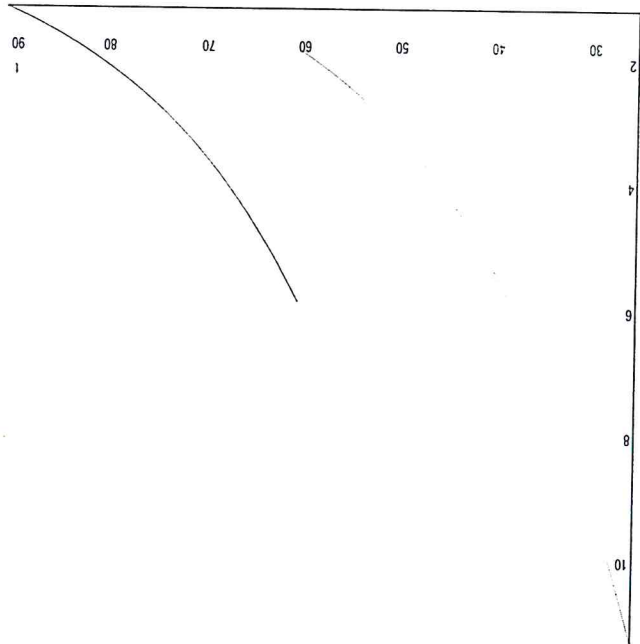




Figure 12: Patrimoine optimal avec pension  $K = 3$

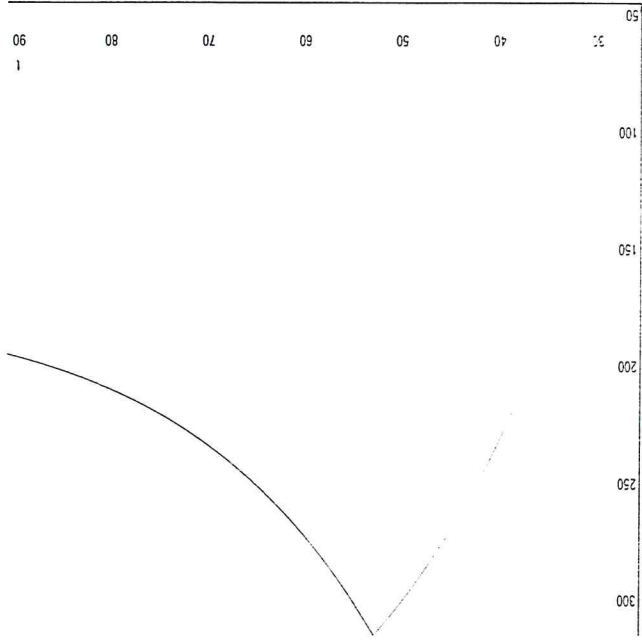
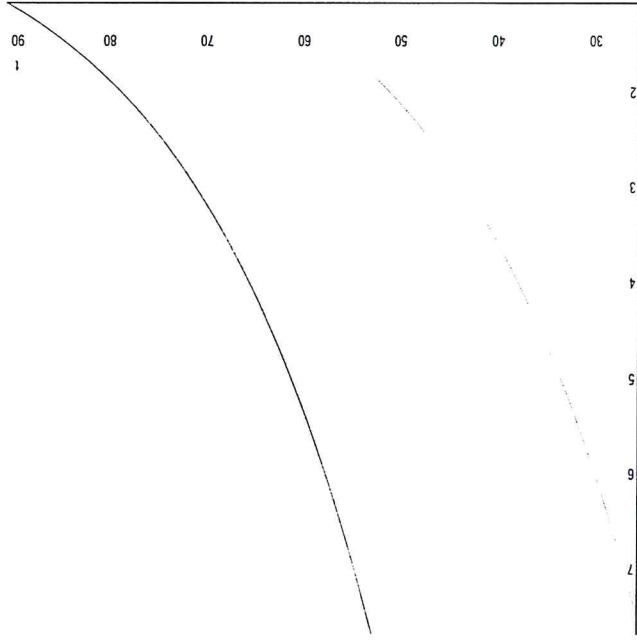


Figure 11: Consommation optimale avec pension  $K = 3$



## Documents de travail déjà parus

- DT n°1997-01 : Thierry BLAYAC et Daniel SERRA,  
« Tarifs publics et redistribution spatiale. Une application aux transports ferroviaires. »
- DT n°1997-02 : Valérie CLEMENT, Daniel SERRA et Emmanuel SOL,  
« Egalitarisme et responsabilités : un test expérimental d'une théorie récente de la justice. »
- DT n°1997-03 : Ayman ACHOUCHE,  
« La recherche des cycles économiques dans les prix des métaux par l'analyse dynamique à plusieurs facteurs. »
- DT n°1997-04 : Sandrine MICHEL,  
« Néoclassiques et régulationnistes : nouveaux apports sur la contribution de l'éducation à la croissance. »
- 1998
- DT n°1998-01 : Thierry BLAYAC et Anne CAUSSE,  
« Valeurs du temps de transport : l'apport de la modélisation micro-économétrique du choix modal. »
- 1999
- DT n°1999-01 : Valérie CLEMENT,  
« Ethique sociale et 'expérimentations' »
- 2000
- DT n°2000-01 : Stéphane AYMARD et Daniel SERRA,  
« Les jeux expérimentaux : un tour d'horizon des résultats récents. »
- DT n°2000-02 : Stéphane AYMARD et Daniel SERRA,  
« Dynamique Optimization and Backward Induction : An Experimental Study. »

DT n°2001-01 : Jean-Philippe TERREAUX, « La Graufesenque : éléments d'explication de l'expansion et du déclin des activités. »

DT n°2001-02 : Olivier DARNÉ, Vivien GUIRAUD et Michel TERRAZA, « Comparison of Standard and Fractional Seasonal Unit Root Tests : A Study of Power and Forecasting. »

DT n°2001-03 : Marielle MONTEILS, « Evaluation empirique du modèle de croissance endogène de Lucas. »

DT n°2001-04 : Catherine KYRTSOU, Walter LABYS et Michel TERRAZA, « Testing for Nonlinearity in Metal Prices : Deterministic Chaos or Stochasticity ? »

DT n°2001-05 : Jean-Philippe TERREAUX et Madjid BOUZIT, « Mesures de protection contre les risques naturels et coûts des dommages. »

DT n°2001-06 : Catherine KYRTSOU et Michel TERRAZA, « Is-it possible to study chaotic and ARCH behaviour jointly ? Application of a noisy Mackey-Glass equation with heteroskedasticity errors to the Paris Stock Exchange returns series. »

DT n°2001-07 : Olivier DARNÉ, Javier LITAGO et Michel TERRAZA, « Tests de racines unitaires saisonnières pour des données journalières. »

DT n°2001-08 : Thierry VIGNOLO, « Reputation by Imitation : An Evolutionary Interpretation of the Chain-Store Game. »

DT n°2001-09 : Nicolas MARCHETTI et Daniel SERRA, « La localisation des équipements collectifs générateurs de nuisances : modélisation et expérimentation. »

DT n°2001-10 : Olivier DARNÉ, Vivien GUIRAUD et Michel TERRAZA, « Forecasts of the Seasonal Fractional Integrated Series. »

- DT n°2001-11 : Amélie CHARLES, Jean-Baptiste LESOURD, Michel TERRAZA et René THIEBLEMONT,  
 « Weekend Effect and Seasonal Volatility : The Case of the CAC40 Index. »
- DT n°2001-12 : Claude DIEBOLT,  
 « La théorie de l'engorgement. »
- DT n°2001-13 : Ibrahima BAH,  
 « Recevabilité optimale des dossiers de surendettement. »
- DT n°2001-14 : Daniel SERRA et Fabrice YAFIL,  
 « Fonctions d'utilité multivariées, aversion au risque et assurance maladie : une étude expérimentale. »
- DT n°2001-15 : Mabel TIDBALL et Robert LIFRAN,  
 « Un modèle de cycle de vie à préférences différenciées. Solution par le calcul variationnel. »
- DT n°2001-16 : Claude DIEBOLT et Marielle MONTEILS,  
 « La croissance endogène : une analyse cliométrique. »

**Contacts :**

Directeur de la Publication : Claude DIEBOLT, [clau.de.diebolt@lameta.univ-montp1.fr](mailto:clau.de.diebolt@lameta.univ-montp1.fr)  
Assistante de la Publication : Amélie CHARLES, [charles@lameta.univ-montp1.fr](mailto:charles@lameta.univ-montp1.fr)

