



HAL
open science

Modélisation et simulation numérique d'un problème de ruissellement d'eau de pluie

Olivier Delestre

► **To cite this version:**

Olivier Delestre. Modélisation et simulation numérique d'un problème de ruissellement d'eau de pluie. Sciences du Vivant [q-bio]. 2005. hal-02827010

HAL Id: hal-02827010

<https://hal.inrae.fr/hal-02827010>

Submitted on 7 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation et simulation numérique d'un problème de ruissellement d'eau de pluie

Olivier Delestre

30 novembre 2005

Table des matières

1	Introduction	2
2	Système de Saint-Venant avec un fond plat	4
2.1	Propriétés	4
2.2	Approximation numérique	5
2.3	Consistance, stabilité et choix d'un flux numérique	6
2.4	Diffusion par rapport au maillage	7
3	Système de Saint-Venant avec topographie	9
3.1	Propriétés	9
3.2	Propriétés du schéma	10
3.3	Schémas explicitement équilibrés	11
3.4	Schéma de reconstruction hydrostatique	12
3.5	Simulation numérique	14
4	Système de Saint-Venant avec terme de frottement	18
4.1	Système de Saint-Venant avec terme de frottement générique	18
4.2	Système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach	19
4.3	Simulation numérique	20
5	Système de Saint-Venant avec terme d'infiltration	22
5.1	Modèle de Green-Ampt	22
6	Expérimentation	24

1 Introduction

Le but de ce stage est la simulation numérique d'un modèle de ruissellement de l'eau de pluie, tenant compte de la topographie du sol, de l'infiltration et des frottements.

Ce problème a été posé par l'INRA d'Orléans, et les résultats numériques pourront être confrontés à des expériences en laboratoire, à des mesures sur site, et à des simulations numériques effectuées à l'INRA.

Pour ce type d'écoulement, où la couche d'eau est peu épaisse, un modèle classique est un système d'équations aux dérivées partielles : les équations dites de Saint-Venant, dont les inconnues sont la hauteur d'eau et la vitesse d'écoulement de l'eau.

Le système de Saint-Venant est un système hyperbolique, introduit à la fin du dix neuvième siècle par Jean-Claude Adhémar Barré comte de Saint-Venant.

Ce dernier fut admis à l'âge de 15 ans à l'Ecole Polytechnique, et entra ensuite à l'Ecole des Ponts et Chaussées dont il sortit premier en 1825. Il présenta en 1834 deux études à l'Académie des Sciences, sur la mécanique théorique et la dynamique des fluides. Après une carrière au Service Technique de la Ville de Paris, il consacra sa retraite à ses recherches scientifiques et entra à l'Académie des Sciences en 1868. Il mourut en janvier 1886. Les équations désormais appelées "de Barré de Saint-Venant", publiées en 1871, sont encore aujourd'hui d'une extrême importance en hydraulique maritime ou fluviale, elles régissent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, d'où leur appellation anglaise "shallow water equations". On les obtient à partir des équations de Navier-Stokes, à l'aide d'hypothèses simplificatrices.

Du fait de leur validité expérimentale et de leur efficacité numérique largement reconnues, elles sont aujourd'hui très utilisées pour la simulation de nombreux phénomènes d'actualité : protection de l'environnement, pollution environnementale, catastrophes naturelles, évolution climatique, rupture de barrage, calcul des marées, étude des crues, sédimentologie...

On comprend alors aisément que toute expérimentation en vraie grandeur reste difficile, voire impossible à réaliser.

Pour comprendre ces phénomènes, une maîtrise de la mécanique des fluides à surface libre est indispensable.

Cette maîtrise a d'abord été assurée par des maquettes et des modèles physiques ; mais ces dernières années, ils ont cédé du terrain face à la résolution numérique de ces équations.

Ces derniers temps, la simulation numérique s'est imposée comme un outil fondamental pour l'hydraulique de l'environnement, favorisée par une progression très importante des capacités des ordinateurs.

Les équations de Saint-Venant posent des problèmes numériques spécifiques, dont voici deux exemples :

- "Séchage", la hauteur d'eau s'annule, les équations dégènèrent, et certains schémas calculent alors des hauteurs négatives... (voir [3])
- "Termes sources", provenant du modèle de topographie, mais aussi de l'alimentation en eau par la pluie et de l'infiltration dans le sol.

Il faut souligner qu'une bonne partie de ce stage a été réalisée à l'aide de [1] et de [2].

Nous nous intéresserons dans ce stage, uniquement, aux systèmes de Saint-Venant monodimensionnels. Ce stage est articulé de façon à obtenir un modèle

de plus en plus proche du problème qui nous intéresse : la simulation numérique d'un modèle de ruissellement d'eau de pluie.

La première partie de ce stage est consacrée au système de Saint-Venant homogène. Cette partie permet de rappeler les propriétés fondamentales de ce système : système hyperbolique en dehors des zones sèches, positivité de la hauteur d'eau. Puis de faire le choix d'un schéma numérique d'ordre un, consistant, stable et préservant la positivité de la hauteur d'eau. A la fin de cette partie, nous vérifierons que plus le maillage est fin, moins le schéma est diffusif, ce qui est attendu pour un schéma d'ordre un. Cela permet de déterminer les caractéristiques d'un maillage pour lequel la diffusion numérique peut être négligée.

La deuxième partie traite du système de Saint-Venant avec topographie. La présence d'un terme source topographique nécessite l'utilisation d'un schéma bien équilibré ou "well balanced". Ce schéma, obtenu par reconstruction hydrostatique, aura pour propriété principale la conservation d'états d'équilibre "simples".

Dans la troisième partie, nous nous intéresserons au système de Saint-Venant avec un terme de frottement. Pour résoudre celui-ci, nous reprendrons ce qui a été fait dans le livre de François Bouchut. Puis, nous adapterons cette méthode au terme de frottement de Darcy-Weisbach. La simulation consistera en l'observation de l'effet de frottements.

Dans la quatrième partie, le terme source supplémentaire sera un terme rendant compte des précipitations et de l'infiltration de l'eau dans le sol. Le terme d'infiltration sera traité à l'aide de l'équation de Green-Ampt. Ce terme sera pris en compte par une méthode de "splitting", en résolvant, sur un pas de temps, la partie hydrodynamique qui correspond au transport "horizontal" puis la partie précipitations-infiltration qui correspond à des échanges "verticaux" de l'eau. Enfin, la cinquième partie consistera en la validation du modèle par confrontation de résultats numériques avec les résultats d'une expérience réalisée à l'INRA.

Ce travail a été effectué :

- grâce aux conseils de S. Cordier, de F. Darboux et de F. James.
- à l'aide des logiciels : \LaTeX , Gfortran et Gnuplot.

2 Système de Saint-Venant avec un fond plat

On cherche à approcher les solutions du système de Saint-Venant homogène :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = 0 \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où g est la constante de gravité, $h(t, x) \in \mathbb{R}^+$ la hauteur d'eau et $u(t, x) \in \mathbb{R}$ la vitesse d'écoulement de l'eau.

Ce système peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (2)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \text{ et } F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix},$$

où $q(t, x) = h(t, x).u(t, x)$ est la quantité de mouvement, ou le débit.

2.1 Propriétés

On regarde les solutions $U = (h, hu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ du système (1).

- C'est un système d'Equations aux Dérivées Partielles non linéaire du premier ordre.

- Ce système est hyperbolique :

En effet,

$$\partial_x F(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2/h^2 + gh & 2q/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_x q \end{pmatrix} = A(U) \partial_x U,$$

donc le système s'écrit :

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0,$$

avec :

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2/h^2 + gh & 2q/h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix},$$

donc :

$$\text{Det}(A(U) - \lambda I) = \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - gh = (\lambda - u)^2 - gh.$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh} \text{ et } \lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}.$$

Si $h > 0$, on a $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$. Donc en dehors des zones sèches, le système de Saint-Venant est un système strictement hyperbolique.

- Le volume d'eau total est conservé (la première équation est conservative).
- La positivité de la hauteur d'eau doit être préservée.

2.2 Approximation numérique

On a le système sous la forme (2).

On voudrait approcher sa solution :

$$U(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0,$$

par des valeurs discrètes :

$$U_i^n = \begin{pmatrix} h_i^n \\ h_i^n u_i^n \end{pmatrix} \text{ avec } i \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

On considère une grille de points $x_{i+1/2}$ avec $i \in \mathbb{Z}$:

$$\dots < x_{-3/2} < x_{-1/2} < x_{1/2} < x_{3/2} < \dots \quad .$$

On considère un pas de temps constant :

$$\Delta t > 0,$$

et on définit les temps discrets par :

$$t_n = n \cdot \Delta t \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

On va utiliser ici la méthode des volumes finis. On découpe l'espace en cellules (volumes finis) :

$$C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[,$$

centrées sur :

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2},$$

et de longueur :

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} > 0,$$

puis on intègre le système considéré sur chaque cellule et sur un pas de temps. Apparaissent alors les moyennes des solutions sur chaque cellule :

$$U_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} U(t_n, x) dx.$$

On obtient des solutions constantes par morceaux (et donc discontinues) et des termes de bords (autrement dit, les flux échangés entre les cellules au niveau de leur frontière ou interface).

Ainsi, le flux sortant d'une cellule est égal à celui qui rentre dans la cellule voisine, d'où un algorithme conservatif.

Pour résoudre ce système, on utilise le schéma de volume fini suivant :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) = 0. \quad (3)$$

Remarque : ce schéma permet de calculer les " U^{n+1} ", en connaissant les " U^n ", il s'agit donc d'un schéma explicite.

$F_{i+1/2}^n$ (respectivement $F_{i-1/2}^n$) représente le flux numérique à l'interface entre les cellules C_i et C_{i+1} (respectivement C_{i-1} et C_i). Ces flux aux interfaces font intervenir les valeurs des variables aux interfaces, qui ne sont pas connues.

Développer une méthode volumes finis consiste donc à définir un flux numérique à partir des valeurs des variables aux noeuds du maillage.

On considère dans cette étude des schémas explicites à trois points.

Les flux aux interfaces sont de la forme :

$$\begin{cases} F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n) \\ F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) \end{cases}, \quad (4)$$

où \mathcal{F} est une fonction que l'on précisera appelée flux numérique.

Cependant, il est important d'imposer une condition de C.F.L. (Courant Friedrichs Levy) sur le pas de temps pour prévenir une explosion des valeurs numériques, cette condition est de la forme :

$$a.\Delta t \leq \Delta x_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

où a est une approximation de la vitesse de propagation.

2.3 Consistance, stabilité et choix d'un flux numérique

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer un flux numérique. Deux critères principaux jouent un rôle important dans son choix :

- **Consistance** : la consistance est la propriété minimale requise pour un schéma, pour assurer que l'on approche bien la solution de l'équation.

Définition 1 *On dit que le schéma (3)-(4) est consistant avec le système (2), si le flux numérique vérifie :*

$$\mathcal{F}(U, U) = F(U), \quad \forall U.$$

- **Stabilité** : la stabilité d'un schéma peut être analysée de différentes façons, ici on doit retenir la conservation d'un domaine convexe invariant.

Définition 2 *On dit que le schéma (3)-(4) préserve un domaine convexe invariant C pour le système (2), si sous une condition de C.F.L., on a :*

$$U_i^n \in C, \quad \forall i \Rightarrow U_i^{n+1} \in C, \quad \forall i.$$

Remarque : une difficulté apparaît en essayant d'obtenir l'implication, les trois valeurs U_{i-1}^n , U_i^n et U_{i+1}^n sont impliquées dans le calcul de U_i^{n+1} .

Alors au prix de la diminution de la C.F.L., on a la définition suivante :

Définition 3 *On dit que le flux numérique $\mathcal{F}(U_G, U_D)$ préserve un domaine convexe C par interface, pour le système (2), si pour :*

$$\sigma_G(U_G, U_D) < 0 < \sigma_D(U_G, U_D),$$

on a :

$$(U_G, U_D) \in C^2 \Rightarrow \begin{cases} U_G + \frac{\mathcal{F}(U_G, U_D) - F(U_G)}{\sigma_G} \in C \\ U_D + \frac{\mathcal{F}(U_G, U_D) - F(U_D)}{\sigma_D} \in C \end{cases},$$

où σ_G et σ_D sont des vitesses numériques.

• Flux de Rusanov : le flux numérique le plus simple pour résoudre un système de la forme (2), est le flux de Lax-Friedrichs :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - c \cdot \frac{U_D - U_G}{2}, \quad (5)$$

avec un paramètre :

$$c > 0.$$

On peut montrer que ce flux numérique est consistant, l'analyse du domaine invariant demande une analyse plus poussée qui dépasse le cadre de ce travail. On va utiliser un flux de Lax-Friedrichs amélioré, le flux de Rusanov, en prenant :

$$c = \sup_{U=U_G, U_D} \left(\sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)| \right),$$

donc on a :

$$c = \max(|u_G| + \sqrt{gh_G}, |u_D| + \sqrt{gh_D}). \quad (6)$$

Le flux de Rusanov préserve la positivité de la densité (h).

Au schéma de Rusanov, on associe la condition de C.F.L. :

$$2 \cdot \sup_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_1(U_i^n)|, |\lambda_2(U_i^n)|) \cdot \Delta t \leq \Delta x_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4 Diffusion par rapport au maillage

On a réalisé "la rupture d'un barrage" avec différents maillages :

M	Δt	J	Δx
50	0.01	50	0.2
100	0.005	100	0.1
1600	0.0003125	1600	0.00625

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} 5 & \text{pour } 0 \leq x < 5 \text{ m} \\ 2 & \text{pour } 5 \leq x \leq 10 \text{ m} \end{cases},$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s}.$$

Puis, on a regardé la situation après 0,5s. On a vérifié que plus le maillage était fin, moins le schéma était diffusif. Ce qui était attendu pour un schéma d'ordre un.

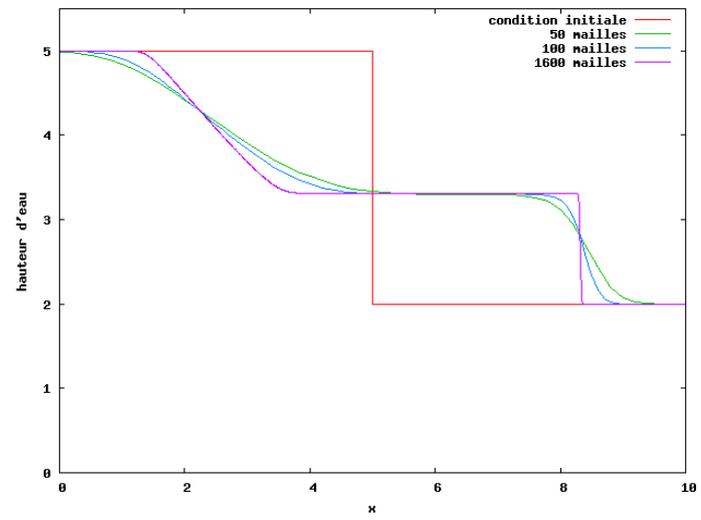


FIG. 1 – Dépendance par rapport au maillage

3 Système de Saint-Venant avec topographie

Pour ce qui va suivre, on souhaite tenir compte de la topographie du terrain. Pour cela, on cherche à approcher les solutions du système de Saint-Venant usuel (avec topographie) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

où le nouveau terme : $z(x) \in \mathbb{R}$ est la topographie du sol, que l'on suppose ici indépendante du temps, puisque l'on ne tient pas compte de l'érosion.

Ce système peut encore s'écrire :

$$\partial_t U + \partial_x F(U, Z) + B(U, Z)\partial_x Z = 0,$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, Z = gz, F(U, Z) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \text{ et } B(U, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

3.1 Propriétés

On regarde les solutions $U = (h, hu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ du système (7).

- Pour $z = Cte$, on retrouve le système de Saint-Venant homogène (1).
- Le système usuel (7) est invariant par translation dans Z (quand on ajoute une constante à Z , on ne modifie pas les équations).
- Les états d'équilibre sont les solutions $U(x)$ indépendantes du temps, donc :

$$\partial_t U = 0,$$

et ainsi les états d'équilibre sont solutions de :

$$\partial_x F(U, Z) = -B(U, Z)\partial_x Z,$$

soit encore :

$$\partial_x F(U, Z) + B(U, Z)\partial_x Z = 0, \quad (8)$$

de façon plus précise, à partir de (7), en multipliant l'équation sur h par u , on a :

$$u\partial_t h + u\partial_x(hu) = 0,$$

avec l'équation en hu , on a :

$$h\partial_t u + hu\partial_x u + gh\partial_x h + gh\partial_x z = 0,$$

en faisant la différence, puis en divisant par h , on obtient :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2 + g(h+z)) = 0..$$

Les états d'équilibre sont donc les fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} hu = Cte \\ u^2/2 + g(h+z) = Cte \end{cases}. \quad (9)$$

Ces solutions jouent un rôle important, car elles sont en général obtenues quand le temps tend vers l'infini.

Cependant, ces états stationnaires sont non triviaux. En effet, à cause du terme de topographie, le système de Saint-Venant présente des états d'équilibre complexes (où les inconnues ne sont pas constantes).

Ainsi, on s'intéressera à des états d'équilibre plus simples. Notamment, la préservation d'une zone d'équilibre au repos qui est de la forme :

$$\begin{cases} u = 0 \\ h + z = Cte \end{cases} \quad (10)$$

Cet état d'équilibre est important pour la crédibilité des résultats (conservation d'une flaque d'eau).

3.2 Propriétés du schéma

Comme pour le système de Saint-Venant homogène, on utilise un schéma du premier ordre à trois points :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2-}^n - F_{i-1/2+}^n) = 0, \quad (11)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{i-1/2+}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, Z_{i-1}, U_i^n, Z_i) \\ F_{i+1/2-}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, Z_i, U_{i+1}^n, Z_{i+1}) \end{cases}, \quad (12)$$

où les fonctions \mathcal{F}_G et \mathcal{F}_D sont les flux numériques à gauche et à droite.

- Le schéma doit préserver les états d'équilibre discrets qui approchent les états d'équilibre exacts.

Ces derniers sont les fonctions $(U(x), Z(x))$ qui vérifient (8).

Alors, les états d'équilibre discrets sont des suites discrètes $(U_i, Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifiant une approximation de (8).

Cette approximation est une relation de la forme :

$$D(U_i, Z_i, U_{i+1}, Z_{i+1}) = 0,$$

reliant :

$$U_i, U_{i+1}, Z_i \text{ et } Z_{i+1}.$$

Pour alléger les notations, on adoptera souvent une forme locale :

$$D(U_G, Z_G, U_D, Z_D) = 0.$$

Comme les états d'équilibre vérifient (9), alors les états d'équilibre discrets vérifient :

$$\begin{cases} h_G u_G = h_D u_D \\ u_G^2/2 + g(h_G + z_G) = u_D^2/2 + g(h_D + z_D) \end{cases}.$$

En particulier, les états d'équilibre discrets au repos vérifient :

$$\begin{cases} u_G = u_D = 0 \\ h_G + z_G = h_D + z_D \end{cases}. \quad (13)$$

- Le schéma ne doit dépendre que de $\Delta Z = Z_D - Z_G$, et pas séparément de Z_G et de Z_D : car il doit préserver l'invariance par translation dans Z .

Ainsi, dans le schéma, on a :

$$\begin{cases} F_{i-1/2+}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, U_i^n, \Delta Z_{i-1/2}) \\ F_{i+1/2-}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, U_{i+1}^n, \Delta Z_{i+1/2}) \end{cases}, \quad (14)$$

avec :

$$\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Comme on a :

$$Z_i^{n+1} = Z_i^n, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N},$$

alors on n'a pas besoin de formule pour Z .

Remarque : comme on l'a vu précédemment, le système à l'équilibre est de la forme (8).

Ainsi, on définit les états d'équilibre discrets par la relation :

$$F(U_D, Z_D) - F(U_G, Z_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)\Delta Z = 0, \quad (15)$$

avec $\Delta Z = Z_D - Z_G$ et $B(U_G, U_D, \Delta Z)$ qui est une discrétisation consistante de $B(U, Z)$.

Or pour le système de Saint-Venant usuel (7), on a :

$$F(U, Z) = F(U) \text{ et } B(U, Z) = B(U),$$

donc le système à l'équilibre est de la forme :

$$\partial_x F(U) + B(U)\partial_x Z = 0, \quad (16)$$

on définit alors les états d'équilibre discrets par la relation :

$$F(U_D) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)\Delta Z = 0. \quad (17)$$

Dès que l'on a choisi les états d'équilibre discrets, on définit les schémas équilibre ou well-balanced de la façon suivante :

Définition 4 *Le schéma (11)-(14) est équilibré relativement à un état d'équilibre, si pour cet état d'équilibre, on a :*

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, Z_G, U_D, Z_D) = F(U_G, Z_G) \\ \mathcal{F}_D(U_G, Z_G, U_D, Z_D) = F(U_D, Z_D) \end{cases} .$$

Remarque : si au temps t_n , on a un état d'équilibre U_i alors au temps t_{n+1} , on a toujours cet état d'équilibre.

On veut un schéma équilibre pour les états d'équilibre au repos (10).

Comme $h + z = Cte$, alors pour tout $h_G, h_D \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G((h_G, 0), (h_D, 0), \Delta Z) = \mathcal{F}_G((h_G, 0), (h_D, 0), g(h_G - h_D)) = (0, gh_G^2/2) \\ \mathcal{F}_D((h_G, 0), (h_D, 0), \Delta Z) = \mathcal{F}_D((h_G, 0), (h_D, 0), g(h_G - h_D)) = (0, gh_D^2/2) \end{cases} .$$

3.3 Schémas explicitement équilibrés

Par schémas explicitement équilibrés, on signifie qu'ils sont définis par la résolution d'états d'équilibre discrets.

Comme on l'a vu précédemment, le système à l'équilibre est de la forme (16).

On a défini des états d'équilibre discrets par la relation (17).

Supposons que F n'ait pas de point critique. Alors, il existe un unique U_G^{*D} et un unique U_D^{*G} vérifiant :

$$\begin{cases} F(U_G^{*D}) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)\Delta Z = 0 \\ F(U_D) - F(U_D^{*G}) + B(U_G, U_D, \Delta Z)\Delta Z = 0 \end{cases} . \quad (18)$$

On définit les flux numériques par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D^{*G}) \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D) \end{cases} ,$$

où $\mathcal{F}(U_G, U_D)$ est un flux numérique de classe \mathcal{C}^1 , consistant avec le système de Saint-Venant homogène (on peut donc prendre le flux de Rusanov).

Proposition 1 *Le schéma (18), avec :*

$$\begin{cases} F(U_G) = \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D^{*G}) \\ F(U_D) = \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D) \end{cases}$$

est équilibré et consistant.

Démonstration de l'équilibre :

Si on a un état d'équilibre discret :

$$F(U_D) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)\Delta Z = 0,$$

alors on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D) = F(U_G) \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D) = F(U_D) \end{cases} .$$

Remarques :

- Cette méthode est très simple, mais n'est pas adaptée pour traiter les points critiques : elle ne garantit pas l'unicité de U_G^{*D} et de U_D^{*G} .
- Une variante de ce schéma est :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D^{*G}) - F(U_G^{*D}) + F(U_G) \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D^{*G}) - F(U_D^{*G}) + F(U_D) \end{cases} ,$$

où l'on a :

$$\begin{cases} F(U_G^{*D}) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)(\Delta Z)_+ = 0 \\ F(U_D) - F(U_D^{*G}) + B(U_G, U_D, \Delta Z)(\Delta Z)_- = 0 \end{cases} , \quad (19)$$

avec :

$$\Delta Z = (\Delta Z)_+ + (\Delta Z)_-, \quad (20)$$

où :

$$\begin{cases} (\Delta Z)_+ = \max(0, \Delta Z) \\ (\Delta Z)_- = \min(0, \Delta Z) \end{cases} .$$

3.4 Schéma de reconstruction hydrostatique

Le schéma de reconstruction hydrostatique est particulièrement adapté à la résolution du système de Saint-Venant avec topographie.

Sa construction peut être vue comme une modification du schéma explicitement équilibré, impliquant les valeurs U_G^{*D} et U_D^{*G} .

Ces dernières sont obtenues en résolvant les états d'équilibre (19)-(20).

Les points critiques nous empêchent d'obtenir des solutions uniques :

$$U_G^{*D} \text{ et } U_D^{*G}.$$

Alors, on remplace les relations d'état d'équilibre (9), par des relations plus simples :

$$\begin{cases} u = Cte \\ g(h+z) = Cte \end{cases} \quad (21)$$

Ces relations coïncident avec celles initiales pour les états d'équilibre au repos (10), donc quand $u = 0$.

De plus, la singularité due aux points critiques est supprimée quand on résout le système avec deux constantes arbitraires.

En notant $U = (h, hu)$ comme précédemment, les flux numériques sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^*, U_D^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ g/2(h_G^2 - (h_G^*)^2) \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^*, U_D^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ g/2(h_D^2 - (h_D^*)^2) \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (22)$$

où $\mathcal{F}(U_G, U_D)$ est le flux numérique choisi pour le système de Saint-Venant homogène.

Les états reconstruits U_G^* et U_D^* sont définis en accord avec les états d'équilibre (21), par :

$$\begin{cases} U_G^* = (h_G^*, h_G^* u_G), U_D^* = (h_D^*, h_D^* u_D) \\ h_G^* = (h_G + z_G - z^*)_+ \\ h_D^* = (h_D + z_D - z^*)_+ \end{cases} \quad (23)$$

Les parties positives : $(\)_+$ assurent l'obtention de densités : h_G^* et h_D^* positives.

La valeur z^* (resp. Z^*) est définie par :

$$z^* = \max(z_G, z_D) \quad (\text{resp. } Z^* = \max(Z_G, Z_D)).$$

Comme $\Delta Z = Z_D - Z_G$, on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} gh_G^* = (gh_G - (\Delta Z)_+)_+ \\ gh_D^* = (gh_D - (-\Delta Z)_+)_+ \end{cases},$$

ce qui montre que \mathcal{F}_G et \mathcal{F}_D ne dépendent que de ΔZ .

Ce schéma est très rapide (puisque les flux sont définis directement) et il est très stable.

Proposition 2 *On considère un flux numérique \mathcal{F} consistant avec le système de Saint-Venant homogène (c'est à dire avec $z = Cte$) qui préserve la positivité de la densité par interface.*

Alors le schéma défini par les flux numériques (22), avec :

$$\begin{cases} U_G^* = (h_G^*, h_G^* u_G), U_D^* = (h_D^*, h_D^* u_D) \\ gh_G^* = (gh_G - (\Delta Z)_+)_+ \\ gh_D^* = (gh_D - (-\Delta Z)_+)_+ \end{cases},$$

- préserve la positivité de h par interface,
- est équilibré, il préserve les états d'équilibre au repos (13),
- est consistant avec le système de Saint-Venant usuel (7).

Le schéma est stable et les densités restent positives sous la même condition de C.F.L. que celle du système homogène.

3.5 Simulation numérique

On a réalisé "la rupture d'un barrage" dans une parabole, avec différents maillages :

M	Δt	J	Δx
2500	0.001	200	0.01
12500	0.0002	1000	0.002
25000	0.0001	2000	0.001

La topographie était :

$$z(x) = (x - 1)^2 \text{ pour } 0 \leq x \leq 2 \text{ m.}$$

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} \max(0, 0.36 - z(x)) & \text{pour } 0 \leq x < 1 \text{ m} \\ 0 & \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{cases}$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s.}$$

Puis, on a regardé la situation après 2,5s. On a remarqué que pour différents maillages, on n'avait pas le même résultat. En effectuant des animations, on a visualisé des comportements oscillatoires qui semblaient s'amortir.

Ensuite, on a effectué le tracé de la fonction $hmax$ définie par :

$$hmax(t) = \max_{0 \leq x \leq 2} (h(t, x)) \text{ pour } 0 \leq t \leq 2,5 \text{ s,}$$

et de la fonction V définie par :

$$V(t) = \int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx \simeq \sum_{i=J/4}^{3J/4} \left(\frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \right)^2 \cdot \Delta x,$$

où V est la semi-norme H^1 de h .

On a pu ainsi constater que plus le maillage était fin, moins les oscillations étaient amorties. Ce qui était attendu pour un schéma d'ordre un. Un prolongement intéressant consisterait en la mise en oeuvre d'un schéma d'ordre deux (comme dans [1]).

Enfin, on a effectué le tracé de la fonction S_h définie par :

$$S_h(t) = \int_0^2 h(t, x) dx$$

On a pu observer le caractère conservatif du schéma, en visualisant l'évolution de S_h en fonction du temps.

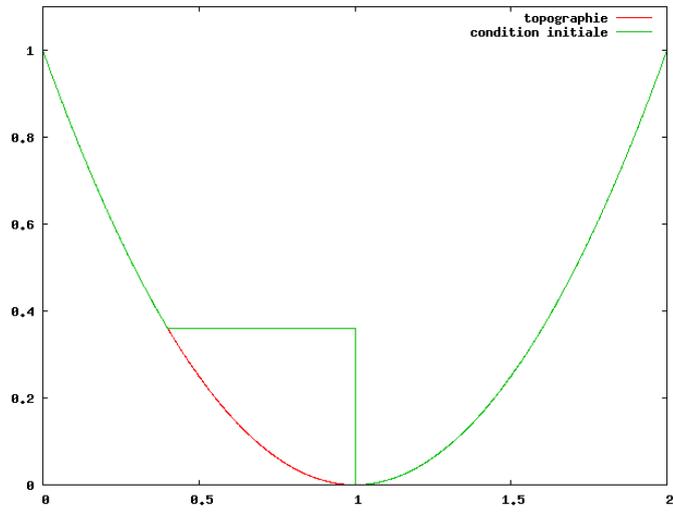


FIG. 2 – Situation initiale

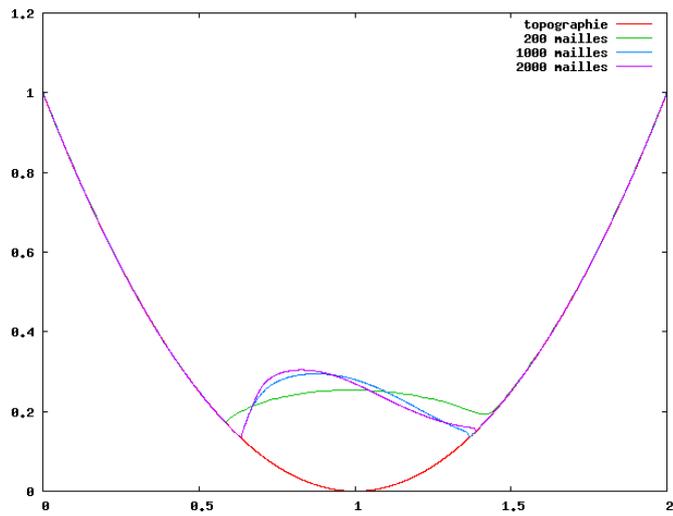
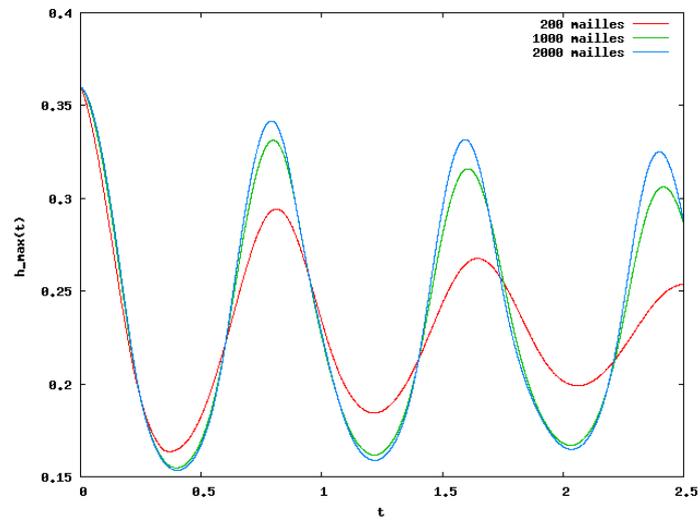
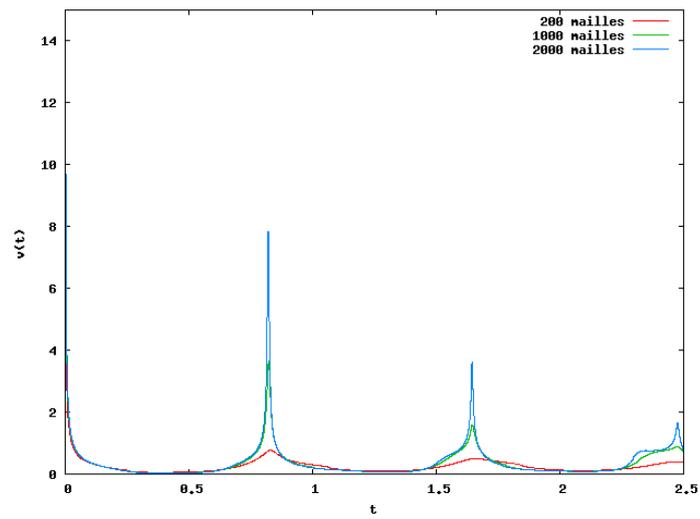
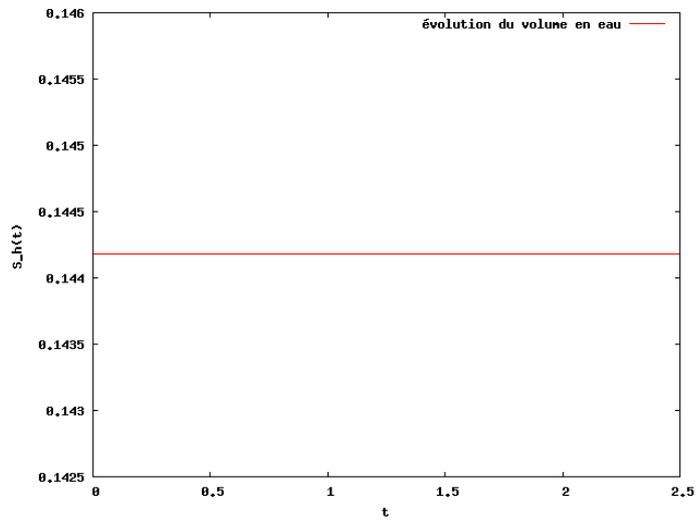


FIG. 3 – Situation après 2,5s

FIG. 4 – Evolution de h_{\max} en fonction de t FIG. 5 – Evolution de V en fonction de t

FIG. 6 – Evolution de S_h en fonction du temps

4 Système de Saint-Venant avec terme de frottement

4.1 Système de Saint-Venant avec terme de frottement générique

On considère maintenant le système de Saint-Venant avec topographie et une force extérieure f :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + h\partial_x Z = hf \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

où $h(t, x)$ est la hauteur d'eau, $u(t, x)$ est la vitesse de l'eau, $Z = g.z(x)$ (avec z la topographie du sol) et f est la force extérieure.

On peut avoir une relation de la forme :

$$f(t, x) = g(h, u),$$

maintenant, on a :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2 + g(h+z)) = f,$$

et les états d'équilibre au repos sont donc les fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} u = 0 \\ \partial_x(u^2/2 + g(h+z)) = f \end{cases}.$$

L'idée pour résoudre le système (24), est d'identifier le système (24) au système de Saint-venant usuel avec une nouvelle topographie :

$$Z + B,$$

où :

$$\partial_x B = -f.$$

Maintenant, B dépend uniquement du temps alors qu'il devrait être indépendant du temps. Mais en utilisant des temps discrets t_n , on peut geler la valeur sur un intervalle de temps. Ainsi, on prend $\partial_x B^n = -f^n$ et on résout le système de Saint-Venant sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) avec la topographie $Z + B^n$.

Remarque : pour les solutions stationnaires, cette approximation est exacte, ainsi les solutions stationnaires sont préservées.

On définit :

$$\Delta B_{i+1/2}^n = -f_{i+1/2}^n \Delta x_{i+1/2},$$

avec :

$$\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i.$$

On obtient une approximation de $U = (h, hu)$ par le schéma (11), avec :

$$\begin{cases} F_{i-1/2+}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, U_i^n, \Delta Z_{i-1/2} + \Delta B_{i-1/2}^n) \\ F_{i+1/2-}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, U_{i+1}^n, \Delta Z_{i+1/2} + \Delta B_{i+1/2}^n) \end{cases}, \quad (25)$$

où $\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i$ et les fonctions \mathcal{F}_G et \mathcal{F}_D sont les flux numériques associés au problème de Saint-Venant usuel (7).

4.2 Système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach 19

Si ces flux sont consistants avec le système de Saint-Venant usuel (7), alors le nouveau schéma est consistant avec le système (24).

De plus, si les flux numériques sont équilibrés relativement aux états d'équilibre au repos, alors le nouveau schéma préserve les données vérifiant :

$$\begin{cases} u_i = 0 \\ g(h_{i+1} + z_{i+1}) = g(h_i + z_i) + f_{i+1/2} \Delta x_{i+1/2} \end{cases} .$$

Ces dernières relations peuvent être considérées comme des états d'équilibre discrets approchant les relations :

$$\begin{cases} u = 0 \\ \partial_x(g(h + z)) = f \end{cases} .$$

Remarque : dans le livre de François Bouchut, on peut lire que cette méthode a été utilisée pour résoudre le système de Saint-Venant avec force de Coriolis et le système de Saint-Venant avec force de frottement de Coulomb.

4.2 Système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach

On considère maintenant le système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + h\partial_x Z = -ghS_f \end{cases} ,$$

avec :

$$S_f = \frac{Fu|u|}{8gh} ,$$

soit :

$$f = -g.S_f = -\frac{Fu|u|}{8h} ,$$

où F est le facteur de friction de Darcy-Weisbach.

Remarque : ce facteur peut-être déterminé par un calibrage ou par des tables, ce facteur dépend de la nature du sol.

Ce système est de la forme (24), on peut donc appliquer la méthode précédente pour résoudre ce système (ce qui semble être une nouveauté).

On utilise donc le schéma précédent (11)-(25). Remarque : on peut considérer que si la hauteur d'eau est nulle, il n'y a pas d'eau, donc pas de frottement.

On prend donc :

$$f_{i+1}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i^n = h_{i+1}^n = 0 \\ \frac{-F u_{i+1/2}^n |u_{i+1/2}^n|}{8h_{i+1/2}^n} & \text{sinon} \end{cases} ,$$

avec :

$$u_{i+1/2}^n = \frac{h_i^n u_i^n + h_{i+1}^n u_{i+1}^n}{h_i^n + h_{i+1}^n} ,$$

et :

$$h_{i+1/2}^n = \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} .$$

4.3 Simulation numérique

On pose :

$$Cf = \frac{F}{8}$$

On a réalisé "la rupture d'un barrage" dans une parabole, avec différentes valeurs pour Cf :

$$0, 0.0001, 0.001 \text{ et } 0.01.$$

Remarque : le cas $Cf = 0$ correspond à une situation sans frottement.

On a pris :

$$M = 25000, \Delta t = 0.0001, J = 2000 \text{ et } \Delta x = 0.001.$$

La topographie était :

$$z(x) = (x - 1)^2 \text{ pour } 0 \leq x \leq 2 \text{ m.}$$

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} \max(0, 0.36 - z(x)) & \text{pour } 0 \leq x < 1 \text{ m} \\ 0 & \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{cases},$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s.}$$

Puis, on a regardé la situation après 2,5s. On a remarqué que pour différents coefficients de frottement, on n'avait pas le même résultat.

Ensuite, on a effectué le tracé de la fonction $hmax$ définie par :

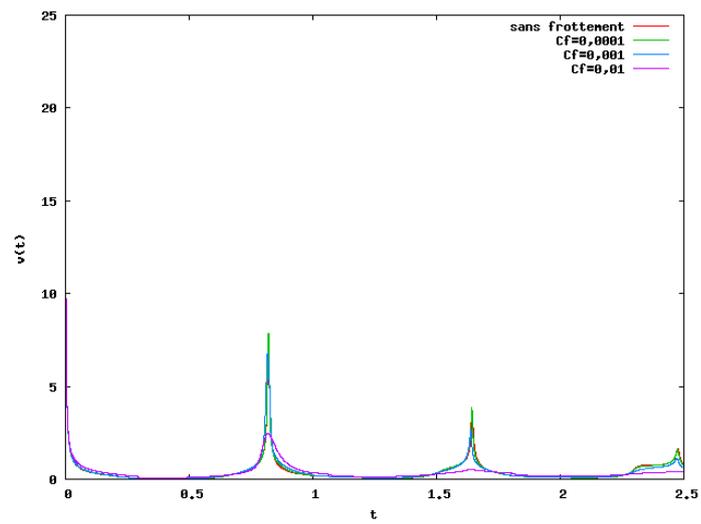
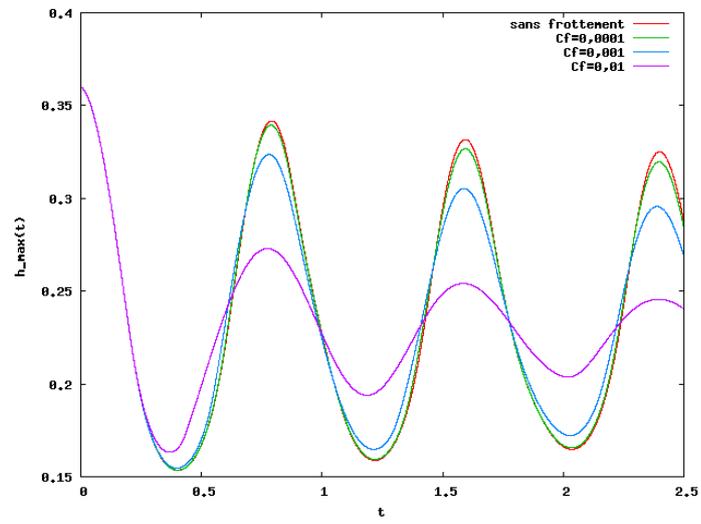
$$hmax(t) = \max_{0 \leq x \leq 2} (h(t, x)) \text{ pour } 0 \leq t \leq 2,5 \text{ s,}$$

et de la fonction V définie par :

$$V(t) = \int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx \simeq \sum_{i=J/4}^{3J/4} \left(\frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \right)^2 \cdot \Delta x,$$

où V est la semi-norme H^1 de h .

On a pu ainsi constater que plus le coefficient de frottement était grand, plus les oscillations étaient amorties. Ce qui est en accord avec le bon sens.



5 Système de Saint-Venant avec terme d'infiltration

Dans cette partie, on considère le système de Saint-Venant avec topographie et un terme source e décrivant les échanges "verticaux" en eau (infiltration dans le sol et pluie) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = e \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + h\partial_x Z = 0 \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

avec :

$$e = P - T^{inf},$$

où P est le taux de pluie et T^{inf} est le taux d'infiltration.

Pour calculer le taux d'infiltration, on utilise le modèle de Green-Ampt.

5.1 Modèle de Green-Ampt

A chaque noeud i du maillage, on peut calculer la capacité d'infiltration I_i^C (c'est à dire le flux que le sol peut infiltrer), à l'aide du modèle de Green-Ampt :

$$I_{i,n}^C = K_i \cdot \left(\frac{\Psi_{i,n} \cdot \Delta\theta_i}{I_{i,n}} + 1 \right),$$

où K_i est la conductivité effective, $\Psi_{i,n}$ est le front de succion humide et $I_{i,n}$ est la hauteur d'eau infiltrée.

On a :

$$\Psi_{i,n} = h_i^f + h_{i,n},$$

où h_i^f est la succion matricielle au niveau du front et $h_{i,n}$ est la hauteur d'eau à la surface.

Et on a :

$$\Delta\theta_i = \theta_S - \theta_O,$$

où θ_O est la teneur en eau initiale et θ_S est la teneur en eau à saturation.

Le taux d'eau "disponible" à l'infiltration est :

$$W_{i,n}^a = P_i + \frac{q_{i,n}^{on}}{\Delta x} + \frac{h_{i,n}}{\Delta t},$$

où P_i est le taux de pluie, $q_{i,n}^{on}$ est la somme des flux de part et d'autre du noeud i .

On a deux situations possibles :

- $W_{i,n}^a \leq I_{i,n}^C$,

alors toute l'eau s'infiltrer, et on a :

$$T_{i,n}^{inf} = W_{i,n}^a,$$

- $W_{i,n}^a > I_{i,n}^C$, alors l'eau s'accumule à la surface et on a :

$$T_{i,n}^{inf} = I_{i,n}^C.$$

On a donc :

$$e_{i,n} = P_i - T_{i,n}^{inf} = \begin{cases} P_i - \left(P_i + \frac{q_{i,n}^{on}}{\Delta x} + \frac{h_{i,n}}{\Delta t} \right) & \text{si } W_{i,n}^a \leq I_{i,n}^C \\ P_i - I_{i,n}^C & \text{si } W_{i,n}^a > I_{i,n}^C \end{cases},$$

donc $e_{i,n}$ peut varier de :

$$e_{i,n}^{min} = -\left(\frac{q_{i,n}^{on}}{\Delta x} + \frac{h_{i,n}}{\Delta t}\right)$$

(dans ce cas toute l'eau à la surface s'infiltré),

à :

$$e_{i,n}^{max} = P_i$$

(dans ce cas le sol est imperméable).

6 Expérimentation

Le but de cette partie, est de comparer des résultats expérimentaux et des résultats obtenus par simulation numérique.

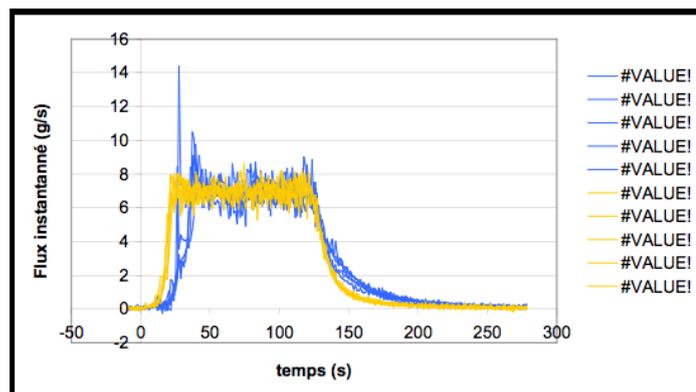
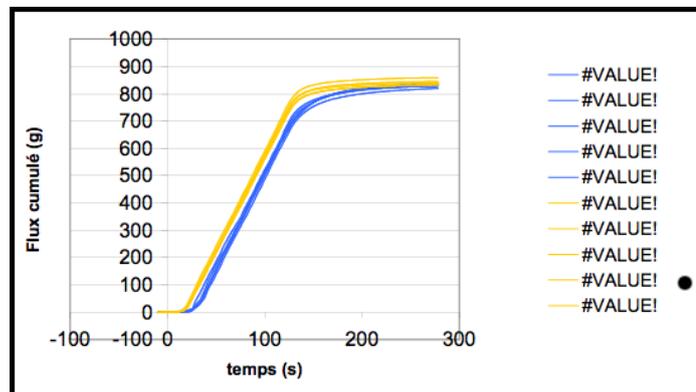
L'expérience a été effectuée sur le site de l'INRA d'Orléans. Elle consistait à simuler expérimentalement une pluie dans un canal. Pour ces simulations, il s'agissait d'un canal à fond lisse de 4m de long et l'intensité de la pluie était de 55mm/h (sans apport en amont).

Deux configurations furent testée : une faible pente (5% environ) et une forte pente (25% environ).

Après installation du dispositif, il y a eu le démarrage de la pluie artificielle et de la mesure du flux à l'aval (pesée automatique par balance électronique).

Pour chacune des deux configurations (5% et 25% de pente), 5 répétitions ont été effectuées.

Confrontation avec la simulation numérique.



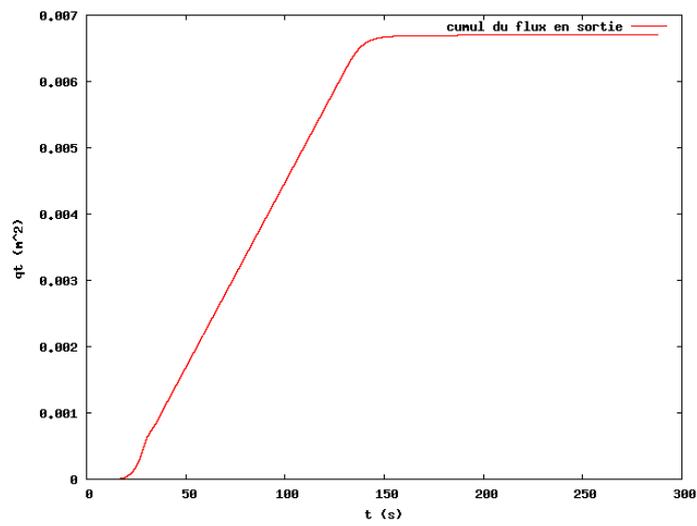
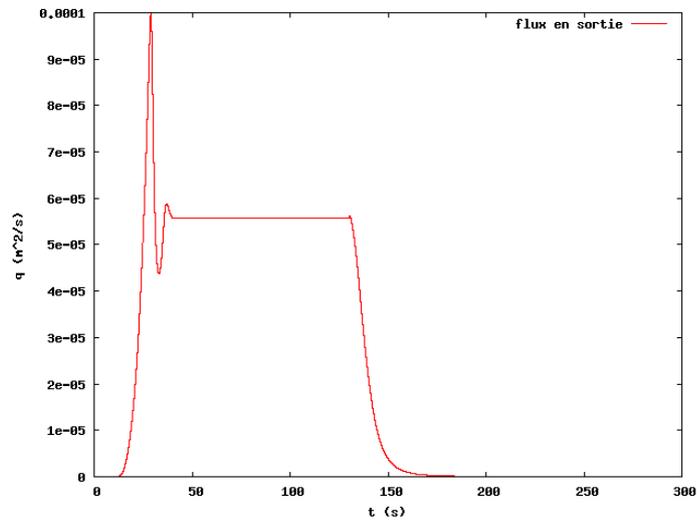




FIG. 7 – Le dispositif expérimental

Références

- [1] F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser (2004).
- [2] E. Audusse, *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*, Thèse, Université Paris VI (2004).
- [3] M. Esteves et al., Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values, *J. Hydrol.* **228**, (2000), 265-282.
- [4] C.W. Rose et al., Overland flow to and through segment of uniform resistance, *J. Hydrol.* **255**, (2002), 134-150.
- [5] W.L. Hogarth et al., Addendum to overland flow to and through a segment of unifor resistance, *J. Hydrol.* **283**, (2003), 218-224.
- [6] W. Zhang et T.W. Cundy, Modeling of two-dimensional overland flow, *Water Resour. Res.* **25**, (1989), 2019-2035.
- [7] F.R. Fiedler et J.A. Ramirez, A numerical method for simulating discontinuous shallow flow over an infiltrating surface, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **32**, (2000), 219-240.
- [8] W.H. Green et G.A. Ampt, Studies on soil physics : 1, The flow of air and water through soils, *J. Agric. Sci.* **4**, (1911), 1-24.
- [9] L.A. Richards, Capillary conduction of liquids through porous mediums, *Physics*, (1931), 318-333.
- [10] J.M. Hervouet, *Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*, Presses des Ponts et Chaussées, (2003).