



**HAL**  
open science

# Application d'outils de la théorie du contrôle en halieutique

Suzanne Touzeau

► **To cite this version:**

Suzanne Touzeau. Application d'outils de la théorie du contrôle en halieutique. École CIMPA-UNESCO Modèles et outils mathématiques pour l'analyse et la régulation des systèmes halieutiques, Jul 2005, Nouadhibou, Mauritanie. hal-02827348

**HAL Id: hal-02827348**

**<https://hal.inrae.fr/hal-02827348v1>**

Submitted on 7 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École CIMPA-UNESCO-MAURITANIE

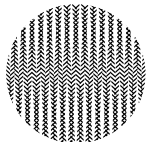
*Modèles et outils mathématiques pour l'analyse et la  
régulation des systèmes halieutiques*

11-24 juillet 2005, Nouadhibou, MAURITANIE

# Introduction à la théorie du contrôle et aux modèles dynamiques en halieutique

## SUPPORT DE COURS

Suzanne TOUZEAU



**INRA**

Institut National de la Recherche Agronomique

Unité de mathématiques et informatique appliquées  
F-78352 Jouy-en-Josas Cedex, FRANCE  
Suzanne.Touzeau@jouy.inra.fr



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation en halieutique</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Modèles classiques en halieutique . . . . .	7
1.2.1	Approche globale . . . . .	7
	a) Modèle de VERHULST–PEARL . . . . .	7
	b) Modèle de GRAHAM–SCHAEFER . . . . .	8
	c) Modèle de PELLA–TOMLINSON . . . . .	9
	d) Modèle général . . . . .	11
1.2.2	Approche structurale . . . . .	13
	a) Formulation générale . . . . .	13
	b) Modèle de BEVERTON–HOLT . . . . .	14
	c) Modèle de RICKER . . . . .	15
1.2.3	Les modèles « bio-économiques » . . . . .	16
1.3	Le recrutement . . . . .	19
1.3.1	Les relations stock-recrutement classiques . . . . .	19
1.3.2	Limites des relations stock-recrutement . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Contrôle en halieutique</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.1.1	Automatique . . . . .	23
2.1.2	Système pêche . . . . .	24
2.1.3	Exemple de modélisation des pré-recrutés . . . . .	25
	a) Présentation du modèle . . . . .	25
	b) Formalisation mathématique . . . . .	26
2.1.4	Exemple d'un système halieutique pêcheurs–stock . . . . .	27
	a) Description du modèle . . . . .	27
	b) Formalisation mathématique . . . . .	28
2.2	Identification . . . . .	28
2.2.1	Exemple du stock de flétan . . . . .	29
	a) Données . . . . .	29
	b) Méthode . . . . .	29
	c) Résultats . . . . .	29
2.3	Contrôle . . . . .	30
2.3.1	Exemple très simple de poursuite de consigne . . . . .	30
	a) Élaboration a priori de la loi de contrôle . . . . .	31
	b) Analyse du système commandé . . . . .	31
	c) Interprétation des résultats . . . . .	33
2.3.2	Stabilisation « viabiliste » . . . . .	33
	a) Présentation du système étudié . . . . .	33
	b) Approche « viabiliste » . . . . .	33

c) Application à notre système . . . . .	34
2.4 Conclusion . . . . .	36
<b>A Glossaire halieutique – automatique</b>	<b>37</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>43</b>

*Ce support de cours est fondé sur la thèse de Suzanne Touzeau [34]<sup>1</sup> et un article introduisant les outils de l'automatique et destiné à des halieutes, co-écrit avec Jean-Luc Gouzé [36].*

---

<sup>1</sup>thèse disponible en ligne à : <http://www.inria.fr/rrrt/tu-0455.html>

# Chapitre 1

## Modélisation en halieutique

### 1.1 Introduction

L'*halieutique* est la science étudie la relation entre l'homme et les populations qu'il exploite par la pêche. Par des avis scientifiques sur les mesures de gestion à mettre en place et par des études destinées à mieux connaître et comprendre le fonctionnement du système pêche, elle cherche à améliorer la situation des pêches. À cette fin, des modèles mathématiques spécifiques à ces populations marines exploitées ont été développés ; en particulier des modèles quantitatifs pour le diagnostic (VPA, cf. annexe A) et la prévision, en vue de fournir des avis sur les principaux stocks exploités. En comparaison, peu de modèles détachés des contraintes de gestion ont été élaborés dans un but heuristique.

En halieutique, les modèles utilisés pour l'évaluation des ressources prennent rarement en compte la totalité du cycle de vie d'une population marine exploitée. Souvent ne sont considérés que les individus susceptibles d'être exploités, qui constituent le *stock*. Le stock est donc plus une *unité de gestion* qu'une unité biologique. En sont exclus les larves et alevins, trop petits ou absents des lieux de pêche potentiels, et éventuellement de vieux poissons qui quittent les lieux de pêche, ou deviennent inaccessibles aux engins de pêche... Cette phase exploitable est ainsi limitée par le recrutement d'une part et la réforme de l'autre. Le recrutement correspond à l'entrée des jeunes individus dans le stock, tandis que l'âge de réforme intervient lorsque les individus ne sont plus exploitables.

Par rapport à la modélisation de processus industriels (moteurs, réacteurs chimiques, etc.), qui constituent le cadre d'étude des systèmes automatiques, les « systèmes pêche » présentent quelques difficultés particulières. Les stocks halieutiques ne suivent pas de lois ou de principes fondamentaux facilement quantifiables, comme c'est le cas en physique ou en chimie (e.g. les lois de conservation de l'énergie, etc.). Il est ainsi difficile de traduire sous forme d'un modèle mathématique le *comportement du stock* : par exemple, il n'est pas évident de traduire en équations la mortalité subie par le stock.

Il est en outre nécessaire de bien définir l'entité étudiée et de faire quelques hypothèses assez fortes afin d'en permettre la modélisation. Le stock est considéré comme un *ensemble d'individus uniforme et isolé*. Cela suppose l'uniformité des caractéristiques individuelles, ou de manière plus réaliste le brassage des individus, et cela exclut tout échange avec d'autres populations. On s'affranchit ainsi des comportements individuels et l'on peut considérer le stock comme unité de modélisation.

Ce chapitre a pour but de dresser un aperçu de la modélisation en halieutique. Il ne constitue bien évidemment pas une revue exhaustive, mais présente plusieurs *modèles classiques* utilisés couramment en halieutique, puis il décrit plus précisément le terme de *recrutement*. Nous ne présentons ici ni les modèles spatiaux, écosystémiques, ou trophiques, ni les modèles avec une composante bio-économique réaliste.

Un *glossaire halieutique – automatique* est présent en annexe A page 37 afin de faciliter la compréhension de ce chapitre.

## 1.2 Modèles classiques en halieutique

Nous présentons ici quelques modèles issus de la littérature et utilisés pour l'évaluation des stocks en halieutique. Ces modèles décrivent tous l'évolution au cours du temps du stock, i.e. de la phase exploitable de la population. Ils sont divisés en deux grands groupes. Les *modèles globaux* représentent le stock sous forme d'une unique variable ; ils décrivent toute la biomasse mais supposent qu'elle est entièrement accessible à la pêche. Les *modèles structuraux ou analytiques* distinguent plusieurs stades (classes d'âge, de taille...) sur le stock et leur associent à chacun une variable dynamique. Les modèles décrits ci-dessous sont regroupés selon ce critère et leur exposé a essentiellement été réalisé à partir du rapport de LAUREC et LE GUEN [17].

Dans le cas des modèles structuraux, il est nécessaire d'exprimer le *recrutement*, soit le terme d'entrée dans le premier stade du stock ; il est étudié dans la section suivante (cf. section 1.3).

Il existe aussi des modèles plus complexes où, à la dynamique du stock, on couple une dynamique de l'effort de pêche, fondée le plus souvent sur des critères économiques ; on les appelle des *modèles bio-économiques* et ils sont évoqués dans le dernier point de cette section.

### 1.2.1 Approche globale

L'approche globale consiste à représenter le stock par une seule variable dynamique, telle sa biomasse (masse totale du stock) ou son abondance (effectif total du stock). Les modèles globaux ne tiennent compte d'aucune structure démographique.

L'hypothèse de base de ces modèles est qu'à un état de stock donné, correspond un équilibre stable non nul avec le milieu. Un équilibre instable ne suffirait pas, car même si on le supposait atteint, les populations marines sont soumises à de fortes perturbations dans leur milieu naturel et rien ne garantirait leur pérennité.

#### a) Modèle de Verhulst–Pearl

C'est le modèle de base pour un *stock vierge*, i.e. non exploité, appelé aussi modèle logistique. Il est issu des travaux de VERHULST [40] et de PEARL [21].

$$\frac{dB(t)}{dt} = r \left( 1 - \frac{B(t)}{k} \right) B(t)$$

où  $k$  et  $r$  sont des constantes strictement positives :

$$\left| \begin{array}{ll} k : \text{biomasse à l'équilibre, ou capacité de charge} & (\text{en masse}) \\ r : \text{taux de croissance} & (\text{en unité de temps}^{-1}) \end{array} \right.$$

Dans ce modèle, le stock possède un point d'équilibre instable zéro et un point d'équilibre stable pour  $B = k$ . Cette propriété est nécessaire à la survie de l'espèce considérée.

La structure du modèle fait que  $B$  demeure positive si elle l'est au départ : quand  $B = 0$   $dB/dt = 0$ . De ce fait, on ne peut pas obtenir de biomasse négative, ce qui n'aurait aucun sens. La figure 1.1 montre la dynamique d'un tel modèle, pour différentes conditions initiales de biomasse : les valeurs d'équilibre 0 et  $k$ , ainsi que  $B_1$ ,  $B_2$  ( $0 < B_1 < B_2 < k$ ) et  $B_3$  ( $B_3 > k$ ).

REMARQUE : Ces équations sont aussi valables en nombre. On peut remplacer la biomasse par l'effectif du stock, autre variable positive caractéristique.



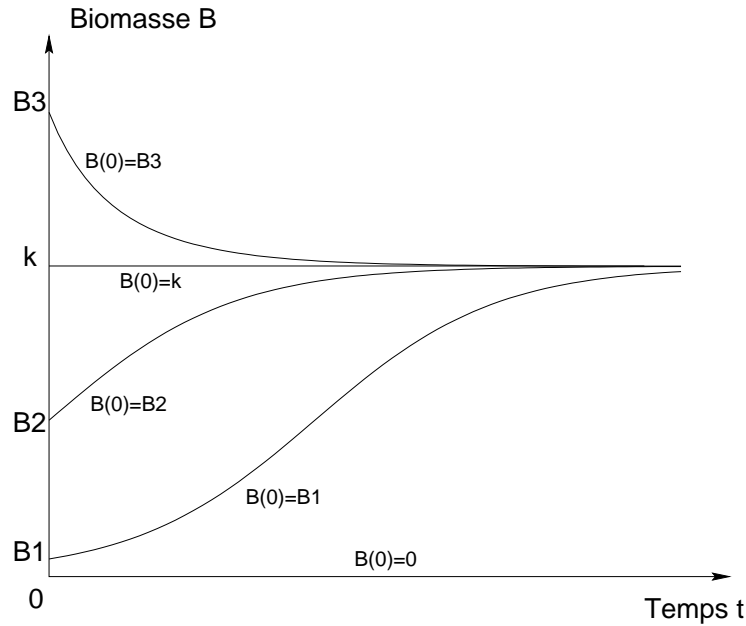


FIG. 1.1 – Dynamique d'un modèle logistique pour différentes conditions initiales de biomasse.

### b) Modèle de Graham–Schaefer

On introduit une *pêcherie* sur le stock vierge précédent. La capture réalisée par unité de temps est supposée proportionnelle et au stock et à l'effort déployé pendant cette unité de temps. La constante de proportionnalité est la capturabilité  $q$ . On obtient le modèle dit de SCHAEFER ou GRAHAM–SCHAEFER [12, 31] :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{k}\right) - qUX \\ \frac{dY}{dt} = qUX \end{cases}$$

en reprenant les notations précédentes et en introduisant les suivantes :

$$\begin{cases} U : \text{intensité de pêche} & (\text{en unité d'effort} \times \text{unité de temps}^{-1}) \\ Y : \text{capture} & (\text{en nombre ou en masse}) \\ q : \text{capturabilité} & (\text{en unité d'effort}^{-1}) \\ X : \text{effectif ou biomasse} & (\text{en nombre ou en masse}) \end{cases}$$

REMARQUES Ces équations sont valables en poids et en nombre :  $X$  est soit la biomasse, soit l'abondance du stock considéré. La capture suit cette mesure.

Si l'on considère le pêcheur comme un prédateur, ce modèle se rapproche du modèle dit de LOTKA–VOLTERRA, modèle type des systèmes proies–prédateurs [18].

**Équation aux captures (approche globale et structurale)** La capture constitue intrinsèquement une grandeur cumulée : ce sont les poissons pêchés pendant un intervalle de temps donné. La quantité  $qUX$  est au contraire une grandeur instantanée, le *taux de capture* selon SCHAEFER, et représente les poissons pêchés par unité de temps, i.e. la *capture instantanée*. Or on considère souvent l'équation aux captures sur un intervalle de temps donné  $\Delta t$ . À condition que le stock n'évolue pas pendant cette période et en notant  $E$  l'effort de pêche déployé sur cette période, l'équation aux captures devient :

$$Y = qEX \quad \text{avec : } E = \int_{\Delta t} U(t) dt$$

L'avantage de cette formalisation classique est que la production  $Y$  n'apparaît plus sous forme de variable dynamique, mais comme une variable de sortie, ce qui est plus réaliste dans ce cas. Son inconvénient majeur est qu'elle est dépendante d'un pas de temps, car elle donne la *capture intégrée*.

☞ Considérer la capture comme un *produit du stock* est en effet plus proche de la réalité. La capture représente la production du stock, résultat de son exploitation par les pêcheurs. En outre une situation d'équilibre du « système stock-capture dynamique », soit une situation où la capture n'évoluerait plus (stock épuisé ou plus de pêche), ne présente pas un grand d'intérêt.

Lorsque l'on prend  $Y = qEX$ , il ne faut cependant pas oublier de spécifier la période considérée pour évaluer l'effort et la capture ; souvent on utilise des modèles en temps discret (surtout pour les modèles structuraux) et naturellement le pas de temps « 1 an » est sous-entendu.

➔ Dans ce document, nous conservons l'équation aux captures instantanée, mais en l'exprimant d'une manière similaire à la formulation intégrée. On aura donc :

$$Y_1 = qE_1X$$

$Y_1$  représentant la capture *instantanée* (capture / unité de temps) ;

$E_1$  étant l'effort *instantané* ou l'intensité de pêche (effort / unité de temps) ;

que souvent on notera de manière un peu abusive :  $Y = qEX$ , pour rejoindre la notation classique intégrée.

**Dynamique et équilibres** La dynamique de ce modèle est la même que celle d'un modèle logistique (cf. figure 1.1), seulement l'équilibre non nul sous exploitation est décalé. À condition que l'effort  $E^*$  fixé soit compris entre 0 et  $r/q$ , il existe une valeur de stock à l'équilibre, inférieure à  $k$  :

$$X^* = k - \frac{qk}{r}E^*$$

La figure 1.2 représente la capture et la capture par unité d'effort à l'équilibre en fonction de l'effort :

$$cpue = Y/E = qX \text{ (en nombre ou masse par unité d'effort)}$$

qui donnent une bonne idée du rendement de la pêche.

☞ La décroissance en fonction de l'effort des cpue à l'équilibre peut ne pas sembler évidente au premier abord. Mais les cpue sont proportionnelles au stock. À stock constant, les cpue sont constantes elles aussi. Et à l'équilibre, elles sont proportionnelles au stock équilibré  $X^*$ , et celui-ci est plus faible si on augmente l'effort de pêche  $E^*$ , tout en restant à l'équilibre.

La capture instantanée équilibrée présente un maximum, appelé production maximale équilibrée, ou en anglais Maximum Sustainable Yield :  $MSY = rk/4$ . L'effort correspondant  $r/(2q)$  est qualifié, de manière un peu simpliste, d'optimal ; en effet, le critère implicite retenu consiste à maximiser la capture réalisée par unité de temps à l'équilibre. La figure 1.8 présente un critère un peu plus réaliste, car il intègre la notion de coût, mais toujours sur un modèle statique.

### c) Modèle de Pella–Tomlinson

Le modèle de PELLA–TOMLINSON [22] correspond en fait à une variante du modèle de SCHAEFER. Il introduit un paramètre  $m$  ( $m \neq 1$ ) au modèle, positif et sans dimension :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \begin{cases} rX(1 - (\frac{X}{k})^{m-1}) - qEX & \text{pour : } m > 1 \\ rX((\frac{k}{X})^{1-m} - 1) - qEX & \text{pour : } 0 \leq m < 1 \end{cases} \\ Y = qEX \end{cases}$$

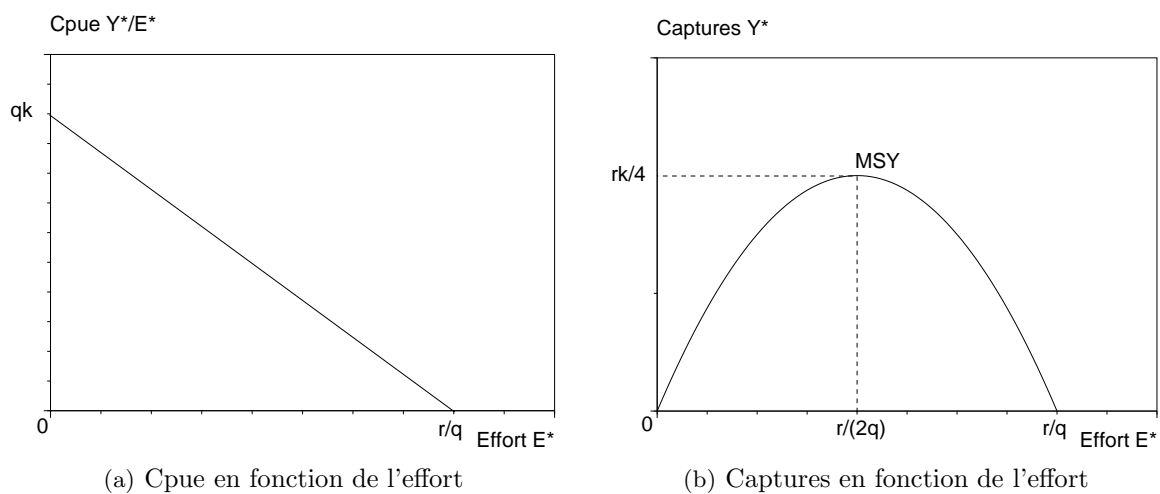


FIG. 1.2 – Caractéristiques du modèle de SCHAEFER à l'équilibre; mise en évidence du MSY (Maximum Sustainable Yield).

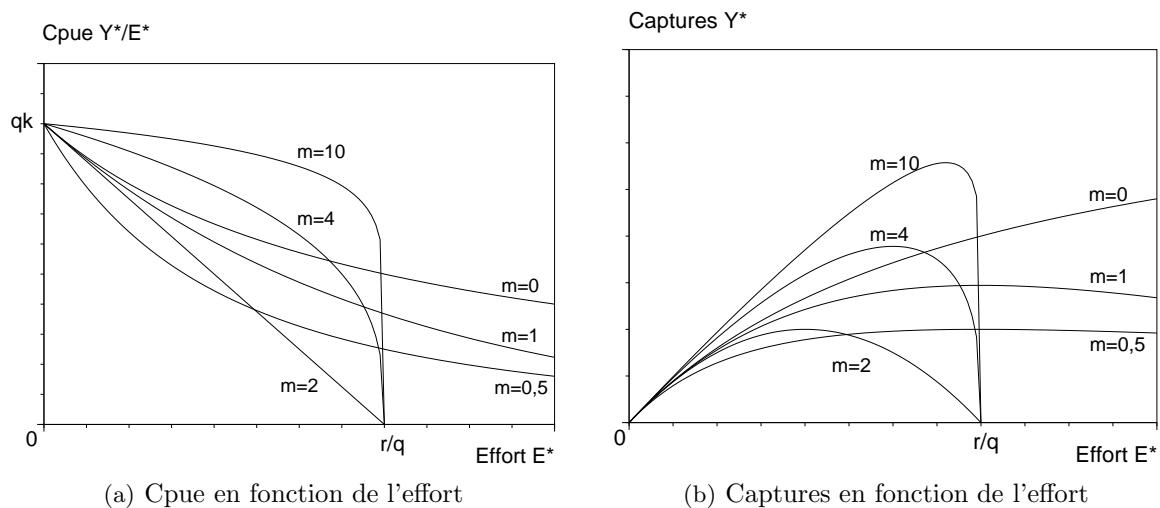


FIG. 1.3 – Caractéristiques du modèle de PELLA–TOMLINSON à l'équilibre, pour diverses valeurs de  $m$  : 0; 0,5; 1; 2; 4; 10.

Le cas  $m = 2$  correspond au modèle de SCHAEFER. Pour  $m = 1$  le taux d'accroissement naturel  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  n'a aucun sens. On le transforme pour obtenir le *modèle exponentiel* suivant :

$$\frac{dX}{dt} = rX \ln \frac{k}{X} - qEX$$

Dans tous les cas, ces modèles ont toujours deux équilibres, 0 instable et  $X^*$  strictement positif et stable. La figure 1.3 reprend, comme précédemment la figure 1.2, quelques caractéristiques de ces modèles à l'équilibre, pour diverses valeurs de  $m$ .

#### d) Modèle général

On considère un stock exploité, que l'on représente par son état  $X$ , sans considérer de structure sur le stock. On obtient un modèle de stock global dont l'évolution en temps continu est décrite par le modèle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) - qE(t)X(t) \\ Y(t) = qE(t)X(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec :

- $X$  : abondance ou biomasse du stock (en nombre ou masse)
- $E$  : effort de pêche instantané (en unité d'effort / u. de temps)
- $Y$  : capture instantanée (en nombre ou masse / u. de temps)
- $q$  : capturabilité supposée (en unité d'effort<sup>-1</sup>)
- $F$  : fonction d'évolution du stock sans pêche;  $F \in \mathcal{C}^1$

Nous supposons que la capturabilité  $q$  est un paramètre constant. La fonction  $F$  est choisie continûment dérivable pour la suite du problème et elle doit vérifier quelques contraintes ;

- L'état  $X$  et l'effort de pêche  $E$  sont deux grandeurs physiques positives. Un effort ou un nombre d'individus négatif n'a pas de sens. À partir d'une valeur initiale positive,  $X$  doit donc demeurer positive au cours du temps, et ce pour toute valeur de  $E$  positive.
- $X = 0$  doit être un équilibre du système avec ou sans pêche. En effet, un stock totalement épuisé le demeure et n'évolue plus. En outre pour que le stock soit viable, il faut qu'il existe un second point d'équilibre strictement positif et stable pour le stock vierge.

➔ Par conséquent la fonction  $F$  doit s'annuler en zéro et ainsi garantir que zéro est un équilibre du stock exploité ou non. Cela permet de plus d'assurer que le stock ne deviendra pas négatif : en effet, lorsque le stock diminue, il « s'arrête » en zéro. D'où :

$$F(0) = 0$$

➔ En outre, il doit exister une valeur  $k$  strictement positive qui soit un équilibre stable du système sans pêche. D'où :

$$F(k) = 0 \text{ et pour } X \neq k \text{ au voisinage de } k : F(X)(k - X) > 0$$

Un exemple est donné dans la figure 1.4.

REMARQUE En général, le point d'équilibre zéro est instable. Cependant, en cas de dépensation critique, il peut devenir stable. Il y a dépensation à droite de zéro,  $F$  est convexe. Pour qu'il y ait encore un équilibre stable strictement positif  $k$ , il faut qu'il existe un troisième équilibre intermédiaire instable  $k'$ , comme le montre la figure 1.5.

Ce phénomène semble assez naturel ; avec très peu d'individus, il peut arriver qu'une population ne puisse se développer et s'éteigne. C'est le cas en particulier chez les gros cétacés à migrations séparées mâle/femelle : ils ne se rencontrent plus et la reproduction n'a plus lieu.

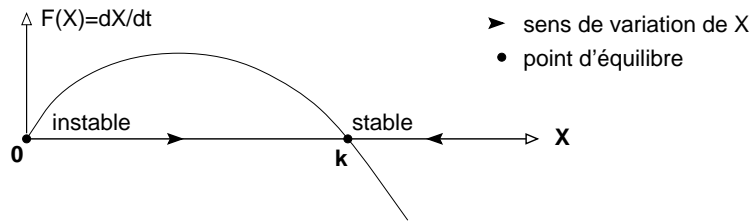


FIG. 1.4 – Équilibres d'un modèle global de stock vierge.

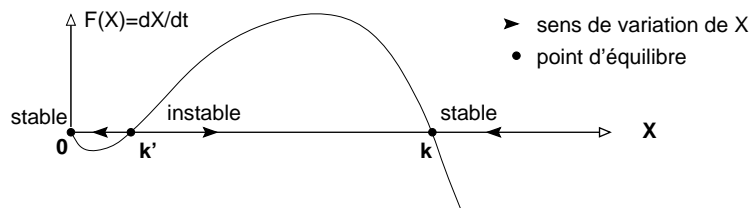


FIG. 1.5 – Équilibres d'un modèle global de stock vierge avec dépensation critique.

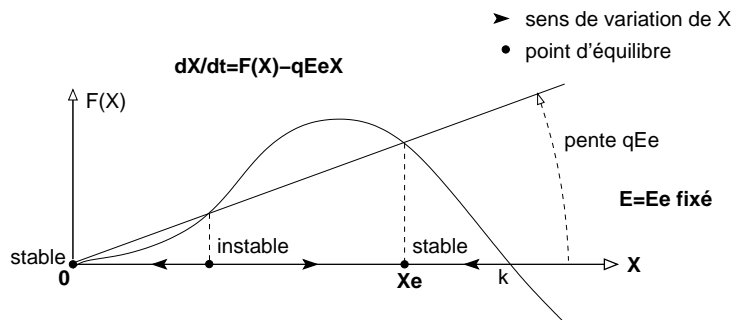


FIG. 1.6 – Équilibres d'un modèle global de stock exploité.

À partir de ces hypothèses, on déduit qu'il existe aussi un point d'équilibre non nul sur le stock exploité pour différentes valeurs de  $E_e$ . En effet, il existe un intervalle à gauche de  $k$  sur lequel  $F(X)$  est strictement positive. Tout point  $X_e$  de cet intervalle, associé à l'effort de pêche  $E_e = F(X_e)/qX_e$ , définit un point d'équilibre strictement positif du système (1.1).

☞ La stabilité du point d'équilibre  $X_e$  à  $E_e$  fixé n'est pas évidente. En effet à moins que  $F$  ne soit concave entre 0 et  $X_e$ , il est possible d'obtenir plusieurs points d'équilibre non nuls pour le système avec pêche. Un exemple est représenté dans la figure 1.6.

### 1.2.2 Approche structurale

Les modèles précédents donnent une vision très globale de l'évolution d'un stock. Mais pour parvenir à étudier l'impact de changements du diagramme d'exploitation (e.g. effet d'un changement de maille sur les mortalités par pêche), il faut dépasser l'approche globale et se pencher sur les mécanismes de la « boîte noire » du stock. Cela devrait également permettre une meilleure description du système, grâce à la prise en compte de la croissance pondérale et de la reproduction.

Comme leur nom l'indique, les modèles structuraux supposent une structure sur le stock. Il est ainsi possible d'étudier l'évolution de différents stades du stock. En outre, ils sont explicatifs et détaillent les différents processus affectant le stock.

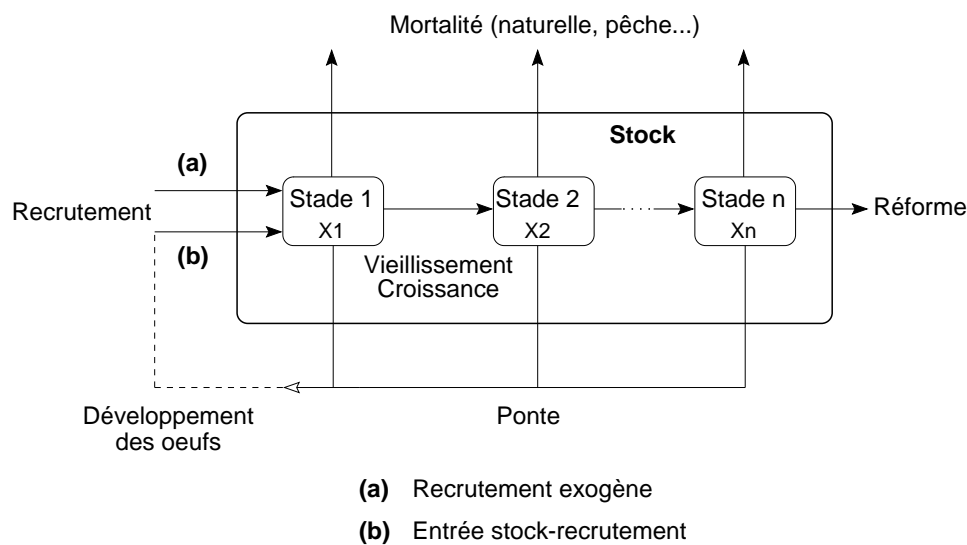


FIG. 1.7 – Schéma d'un stock halieutique structuré en stades.

#### a) Formulation générale

Le schéma général des modèles structuraux est représenté sur la figure 1.7. Y sont décrits les phénomènes essentiels influant sur la phase recrutée : mortalité, vieillissement... Le recrutement, qui constitue l'apport de nouveaux individus dans le stock, n'est pas détaillé ici et fait l'objet de la section 1.3.

Le stock est constitué de plusieurs cohortes ; chacune regroupe tous les poissons qui ont rejoint le stock au même moment. Dans les modèles structuraux, on suit le devenir d'une cohorte. Les lois d'évolution qui la gouvernent sont de manière générale :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = -Z(t) = -(F(t) + M(t)) & \text{Effectifs} \\ \frac{dC(t)}{dt} = F(t)N(t) & \text{Captures} \\ B(t) = W(t)N(t) & \text{Biomasse} \\ \frac{1}{W(t)} \frac{dW(t)}{dt} = G(t) & \text{Poids (croissance)} \\ \frac{dY(t)}{dt} = F(t)W(t)N(t) & \text{Rendements} \end{array} \right.$$

où :

- $N(t)$  : nombre de survivants de la cohorte à l'instant  $t$
- $B(t)$  : biomasse de la cohorte à l'instant  $t$
- $W(t)$  : poids moyen des individus de la cohorte à l'instant  $t$
- $Z(t)$  : taux de mortalité totale instantané pris à l'instant  $t$
- $F(t)$  : taux de mortalité par pêche instantané pris à l'instant  $t$
- $M(t)$  : taux de mortalité naturelle instantané pris à l'instant  $t$
- $G(t)$  : taux de croissance instantané pris à l'instant  $t$
- $C(t)$  : capture en nombre entre l'instant initial et l'instant  $t$
- $Y(t)$  : capture en masse entre l'instant initial et l'instant  $t$

Selon les lois retenues, on obtient divers modèles, dont les modèles de BEVERTON–HOLT et de RICKER.

### b) Modèle de Beverton–Holt

Dans le modèle de base de BEVERTON–HOLT [4], la mortalité naturelle est supposée constante et égale à  $M$ . La mortalité par pêche est supposée constante et égale à  $F$  au-delà de l'âge à la première capture  $t_c$ , et nulle auparavant. L'évolution des effectifs d'une cohorte est donc, si l'on note  $R$  le recrutement et  $t_r$  l'âge au recrutement :

$$\begin{array}{l} \text{Entre } t_r \text{ et } t_c : N(t) = R \exp^{-M(t-t_r)} \\ \text{Au-delà de } t_c : N(t) = N(t_c) \exp^{-(F+M)(t-t_c)} \end{array}$$

La croissance linéaire de chaque individu est décrite par une fonction explicite, celle de VON BERTALANFFY [41]. Si  $L(t)$  est la longueur moyenne d'un individu à l'instant  $t$ , on a :

$$L(t) = L_\infty(1 - \exp^{-K(t-t_0)})$$

BEVERTON et HOLT supposent en outre que la croissance pondérale est isométrique, d'où :

$$W(t) \propto L(t)^3 \Rightarrow W_\infty(1 - \exp^{-K(t-t_0)})^3$$

REMARQUE : Même si cette modélisation donne des résultats satisfaisants, comme il s'agit d'une courbe ajustée, il est souvent abusif de vouloir attribuer aux coefficients  $K$ ,  $L_\infty$  et  $t_0$  une quelconque signification biologique.

**Calculs de production** Sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , où  $t_1 \geq t_c$ , la capture en nombre est égale à :

$$C_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{F}{F+M} N(t_1) (1 - \exp^{-(F+M)(t_2-t_1)})$$

et la capture pondérale correspondante est :

$$Y_{t_1 \rightarrow t_2} = F \int_{t_1}^{t_2} N(t) W(t) dt = F N(t_1) W_\infty \sum_{n=0}^3 \Omega_n \frac{\exp^{-nK(t_1-t_0)} (1 - \exp^{-(F+M+nK)(t_2-t_1)})}{F + M + nK}$$

avec :  $\Omega_0 = 1$ ,  $\Omega_1 = -3$ ,  $\Omega_2 = 3$ ,  $\Omega_3 = -1$ .

Pour calculer la production globale d'une cohorte, il suffit de choisir  $[t_c, +\infty[$  comme intervalle. Par souci de réalisme, on pourrait fixer un âge maximal (longévité  $t_l$ ) plutôt que prendre l'infini comme borne supérieure; surtout si un phénomène de réforme intervient. Mais le modèle est ainsi fait que la contribution des grands âges est facilement négligeable (décroissance exponentielle); on adopte donc cette solution, qui permet d'éviter le choix d'une borne, et qui en outre simplifie un peu les calculs. On a alors comme capture totale sur la cohorte :

$$C = \frac{F}{F + M} R \exp^{-M(t_c-t_r)}$$

$N(t_c) = R \exp^{-M(t_c-t_r)}$  est l'effectif de la cohorte à l'âge de première capture. Tous ces poissons vont mourir au bout d'un temps infini et  $C$  est la fraction de  $N(t_c)$  étant morte par pêche. La capture pondérale correspondante est :

$$Y = F R W_\infty \exp^{-M(t_c-t_r)} \sum_{n=0}^3 \Omega_n \frac{\exp^{-nK(t_c-t_0)}}{M + F + nK}$$

### c) Modèle de Ricker

La particularité du modèle de RICKER [25, 27] est d'être *discrétisé*. On considère que la cohorte traverse au cours de sa vie, des périodes successives sur lesquelles ses caractéristiques sont constantes : taux de croissance, mortalité naturelle et par pêche. Cela consiste en fait à approcher les fonctions de mortalité, croissance et pêche au cours du temps par des fonctions en escalier; si les intervalles de discrétisation ne sont « pas trop grands », l'estimation est bonne.

Ce modèle est donc plus souple que celui de BEVERTON–HOLT, car les hypothèses de constance des mortalités naturelle et par pêche sont trop contraignantes : elles ne dépendent pas de l'âge et excluent notamment tout phénomène saisonnier. La fonction de croissance a alors aussi une forme plus générale. Sur chaque intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, n$ ), les coefficients de mortalité naturelle et par pêche sont supposés constants et égaux à  $M_i$  et  $F_i$ . De même pour le facteur de croissance  $G_i$ . On parle ainsi de vecteurs mortalité et croissance.

L'évolution des effectifs se traduit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} N(t_r) = N(t_1) = R & \quad (\text{recrutement comme condition initiale}) \\ N(t) = N(t_i) \exp^{-(M_i+F_i)(t-t_i)} & \quad \text{pour : } t \in [t_i, t_{i+1}] \end{aligned}$$

Si l'âge de première capture est par exemple  $t_2$ , alors on a  $F_1 = 0$ . La croissance est régie par :

$$W(t) = W(t_i) \exp^{G_i(t-t_i)} \quad \text{pour : } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

**Généralisation à un stock** On voit qu'il est assez simple pour ce modèle de considérer simultanément plusieurs cohortes. Il suffit d'utiliser la discrétisation du temps comme des pseudo-classes d'âge. Ces dernières ont une durée qui n'est pas nécessairement égale à une unité de temps ;



mais pour pouvoir superposer les cohortes, les classes d'âge doivent toutes être de durée égale  $\Delta t$ .

On suppose que les taux caractéristiques sont plutôt des fonctions de la classe d'âge, indiquée par  $a$ , et non du temps. Ainsi on obtient le modèle de stock suivant, pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  :

$$\begin{aligned} N_a(t) &= N_{a-1}(t_i) \exp^{-(M_{a-1}+F_{a-1})(t-t_i)} & \text{avec : } R(t_i) &= N_0(t_i) \\ N_m(t) &= N_{m-1}(t_i) \exp^{-(M_{m-1}+F_{m-1})(t-t_i)} + N_m(t_i) \exp^{-(M_m+F_m)(t-t_i)} \end{aligned}$$

Il en est de même pour la croissance, toujours pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  :

$$W_a(t) = W_{a-1}(t_i) \exp^{G_{a-1}(t-t_i)}$$

$F_{a-1}$  est la mortalité de la  $a^{\text{ème}}$  classe,  $G_{a-1}$  son taux de croissance. On fait parfois dépendre  $F_{a-1}$  de l'intervalle de temps  $i$  : cela permet de faire varier le diagramme d'exploitation au cours du temps.

REMARQUES : On suppose qu'il y a  $m$  classes et qu'une fois dans la dernière, on y reste : c'est la classe des poissons d'âge  $m$  et plus (accumulation).

Pour simuler le stock sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_n]$ , il faut non seulement connaître les conditions initiales :  $N_a(t_0)$  et  $W_a(t_0)$  pour tout  $a \in \{1, \dots, m\}$ , mais aussi les conditions aux limites :  $R(t_i)$  et  $W_0(t_i)$  pour tout temps  $t_i$ . On peut simplifier en considérant que la croissance est indépendante de la cohorte ; ainsi  $W_0(t_i) = W_0$  est une constante et  $W_a(t_0)$  se calcule :

$$\begin{aligned} W_a &= W_a(t_i) \quad \forall i, a \\ &= W_0 \exp^{(G_0 + \dots + G_a)\Delta t} \end{aligned}$$

Souvent on choisit de considérer le modèle de RICKER uniquement aux instants  $t_i$ , ce qui donne un *modèle en temps discret*.

**Calculs de production** La capture totale réalisée pendant l'intervalle de temps  $i$ , soit  $[t_i, t_{i+1}]$ , est :

$$C_i = \sum_{a=1}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{a-1} N_a(t) dt = \sum_{a=1}^m \frac{F_{a-1}}{F_{a-1} + M_{a-1}} [N_{a-1}(t_i) - N_a(t_{i+1})]$$

La capture pondérale associée est :

$$Y_i = \sum_{a=1}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{a-1} W_a(t) N_a(t) dt = \sum_{a=1}^m \frac{F_{a-1}}{F_{a-1} + M_{a-1} - G_{a-1}} [B_{a-1}(t_i) - B_a(t_{i+1})]$$

REMARQUE : Souvent, on prend à la place d'une croissance exponentielle par morceau, un poids moyen  $W_{a-1}$  constant pour chaque classe d'âge  $a$ . Ainsi les calculs de capture pondérale sont plus simples :

$$Y_i = \sum_{a=1}^m W_{a-1} \frac{F_{a-1}}{Z_{a-1}} [N_{a-1}(t_i) - N_a(t_{i+1})]$$

### 1.2.3 Les modèles « bio-économiques »

Nous présentons ici quelques modèles couplant la dynamique du stock avec l'économie, des premiers pas à CLARK (1976), qui fait encore référence en la matière. Les aspects biologie/écologie et économie interviennent en gestion des pêches, qui est un domaine éminemment pluridisciplinaire. Les modèles bio-économiques intègrent généralement beaucoup de paramètres, vu le nombre de processus qu'ils prennent en compte. Cela les rend plus réalistes, mais d'utilisation et d'application plus difficiles.

**Dynamique de l'effort** Dans les premiers, SCHAEFER [31] s'est intéressé à modéliser la *dynamique du pêcheur*. À la suite de l'étude statique à l'équilibre du très classique modèle halieutique, dit de SCHAEFER (cf. 1.2.1), il a couplé la dynamique de ce stock à celle de l'effort de pêche. En reprenant les notations du paragraphe 1.2.1, le modèle qu'il obtient et dont il étudie la dynamique est le suivant :

$$\begin{aligned}dX/dt &= rX(1 - X/k) - qXE \\dE/dt &= aE(X - b)\end{aligned}$$

où  $X$  est l'abondance du stock,  $E$  l'effort de pêche (effort instantané, ou intensité),  $a$  et  $b$  des paramètres supplémentaires.  $a$  correspond au taux de croissance de l'effort, l'interprétation de  $b$ , niveau de stock critique, suit.

☞ L'intensité de pêche évolue selon un critère économique assez simple, fondé sur la théorie du facteur « marginal » qui suppose que le coût de la dernière unité d'effort appliquée est égal à ce qu'elle produit. Ainsi, tant que la pêcherie est rentable, les pêcheurs sont attirés et ils augmentent leur effort. Par suite, la population décroît et la capture par unité d'effort aussi. Jusqu'à ce que finalement la population atteigne un niveau  $b$  où les cpue sont si faibles, que les coûts engendrés par une unité d'effort supplémentaire sont supérieurs aux bénéfices que produiraient la capture correspondante. Au-dessous du niveau  $b$ , les pêcheurs ont tendance à quitter la pêcherie.

SMITH [33] s'est lui aussi penché sur un tel modèle, dans le cadre d'une étude plus vaste sur l'*économie de la production à partir de ressources naturelles*. Le contenu économique de ce modèle y est approfondi.

**Optimum bio-économique** GORDON [11] s'est intéressé à la théorie économique de la pêcherie. Il a entre autres introduit la notion d'équilibre bio-économique et d'optimum bio-économique. Ces notions s'appliquent toutes deux à un stock équilibré. L'*équilibre bio-économique* d'une pêcherie non contrôlée est atteint lorsque la population est à l'équilibre et que le gain net est nul ; soit pour cette deuxième condition, lorsque la valeur des débarquements équilibrés  $L$  est égale aux coûts totaux engendrés  $C$ . L'*optimum bio-économique* est un optimum « social », au sens où il maximise le gain des pêcheurs  $L - C$ . Ce point correspond toujours à un équilibre biologique, pour la capture et l'effort de pêche.

On peut illustrer cette théorie par un exemple très simple, représenté sur la figure 1.8, où :

- les coûts sont proportionnels à l'effort :  $C = aE$  ;
- la valeur d'une unité de capture est constante :  $L = bY$  ;
- l'équilibre biologique du stock est donné par le modèle de SCHAEFER.

**Gestion optimale** Dans son ouvrage, CLARK [6] développe et analyse des modèles classiques de pêcheries, ou plus généralement de ressources renouvelables exploitées. Il étudie essentiellement le couplage de ces modèles dynamiques avec des modèles économiques et détermine des *politiques de gestion optimales*. Les critères d'optimisation retenus sont économiques (maximiser les gains, la capture...) et les techniques font appel au contrôle optimal (Principe du Maximum).

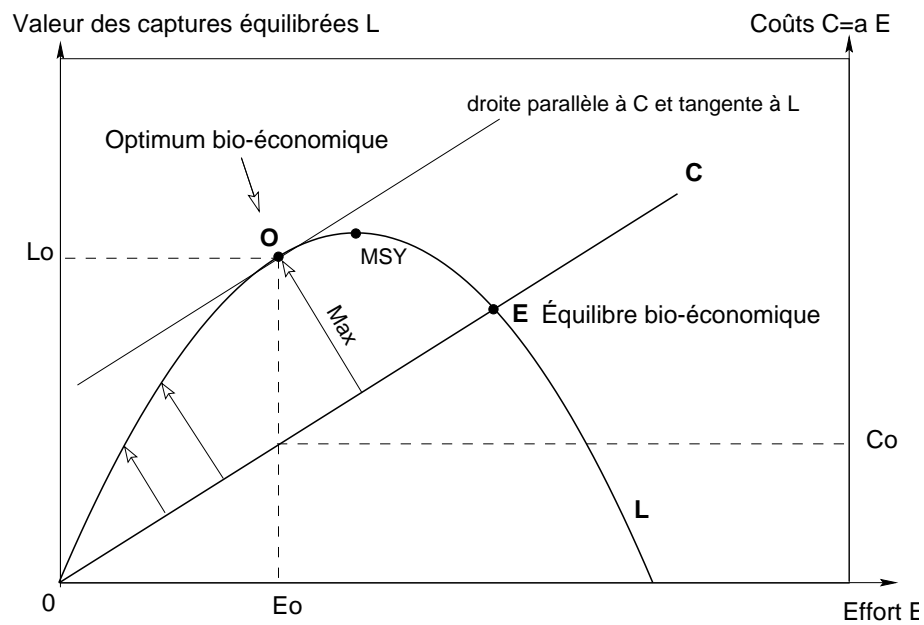


FIG. 1.8 – Illustration de l'équilibre et de l'optimum bio-économique selon GORDON à partir d'un modèle de stock de SCHAEFER à l'équilibre.

### 1.3 Le recrutement

Les modèles structuraux exposés dans la section précédente, présentent aussi une difficulté majeure : il faut boucler la boucle, exprimer le recrutement. Le recrutement est le terme d'entrée dans la première classe, qui assure le renouvellement du stock au cours du temps. Un modèle ainsi bouclé s'appelle un *modèle auto-régénérant*. S'il existe des données de capture sur les différents stades du stock, permettant d'estimer leur effectif et de caler de tels modèles, elles sont rares sur les stades antérieurs. Il faut néanmoins déterminer le recrutement.

Certains modèles font appel à un recrutement constant ou purement stochastique (un bruit), afin de rendre compte de l'influence des fluctuations environnementales ; le recrutement est alors une entrée exogène. Une autre manière de faire est d'introduire une *relation stock-recrutement*, qui détermine le recrutement à partir de l'effectif ou la biomasse du stock fécond. Tous ces concepts sont résumés dans la figure 1.7 et la description des relations classiques de stock-recrutement est l'objet de la première partie de cette section.

Prendre un recrutement constant ou sous forme d'un bruit n'est pas très satisfaisant, car cela nie toute relation entre le stock et sa progéniture. Mais l'utilisation de relations stock-recrutement a aussi ses *limites*, comme le montre la suite de cette section.

#### 1.3.1 Les relations stock-recrutement classiques

Les deux relations classiques les plus utilisées sont celle de RICKER, et celle de BEVERTON–HOLT. Elle sont représentées dans la figure 1.9. BEVERTON–HOLT justifient leur courbe par des hypothèses de compétition pour la nourriture [5], alors que RICKER explique la décroissance de sa relation pour de grands stocks féconds par de la prédation parentale des œufs et juvéniles [26], ou tout au moins de la compétition entre les âges adultes et larvaire.

Selon RICKER [29, 28] :

*« [...] des deux courbes les plus utilisées, celle de Ricker convient mieux quand le cannibalisme des adultes sur les jeunes constitue un important mécanisme régulateur, ou lorsqu'une forte densité a pour effet d'allonger la période nécessaire au jeune poisson pour traverser une phase de particulière vulnérabilité de taille, ou lorsqu'il y a décalage dans la réponse d'un prédateur ou parasite devant l'abondance des jeunes poissons qu'il consomme, avec surcompensation pour la plus faible densité des espèces proies. La courbe de Beverton–Holt est probablement appropriée, lorsque le niveau d'abondance est freiné par les disponibilités de nourriture ou d'habitat, ou lorsqu'un prédateur est en mesure de régler sur le champ et de façon soutenue son activité prédatrice, en fonction de l'abondance des proies en cause. »*

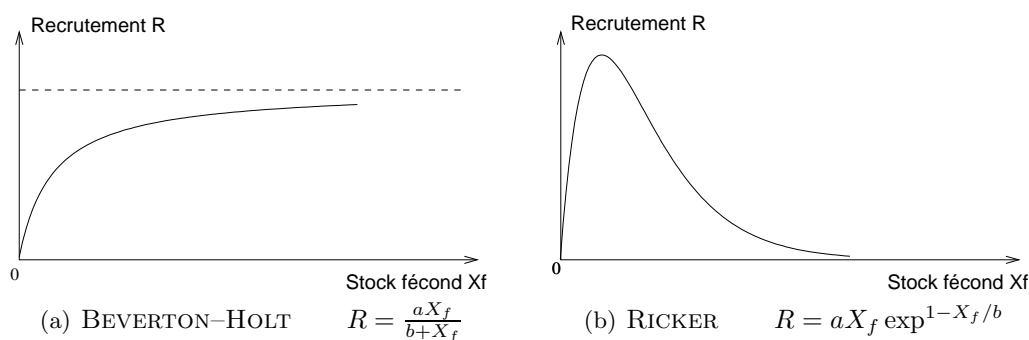


FIG. 1.9 – Relations stock-recrutement classiques.

**Élaboration de ces relations stock-recrutement** Si l'on se penche plus précisément sur l'élaboration de ces deux relations, on s'aperçoit que le mécanisme est le même : la mortalité des pré-recrutés est modélisée en temps continu, sous la forme d'une équation différentielle. À l'instant 0 a lieu la ponte, à l'instant  $T$  le recrutement. Considérant que le nombre d'œufs déposés à l'instant 0 est proportionnel au stock fécond à ce même instant, en intégrant l'équation différentielle entre 0 et  $T$ , on obtient le nombre de larves ayant survécu : i.e. le recrutement.

La différence entre les deux relations réside dans les termes de mortalité des pré-recrutés. Les deux modélisations différentes dérivent assez directement des hypothèses de compétition entre les pré-recrutés pour BEVERTON–HOLT et de cannibalisme parental pour RICKER. En plus d'un taux de mortalité linéaire, BEVERTON et HOLT supposent une mortalité densito-dépendante :

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\alpha - \beta P \text{ sur } [0, T]$$

tandis que RICKER introduit une mortalité stock-dépendante :

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\alpha - \beta S \text{ sur } [0, T]$$

où  $P$  représente le nombre de pré-recrutés,  $S$  le stock fécond à l'instant 0 et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres.

Cette étape est reprise et décrite pour ces deux modèles stock-recrutement dans l'ouvrage de CLARK [6, pp217–218, 229–230] et de manière un peu plus synthétique par HILBORN & WALTERS [13, pp257–261].

Sur cet intervalle de temps  $[0, T]$ , le nombre de reproducteurs et éventuellement de prédateurs du stock est implicitement supposé constant, la ponte est ponctuelle. L'élaboration de ces relations stock-recrutement passe donc par l'introduction d'une dynamique continue sur un modèle construit avec un pas de temps plus grand. Cela est plus adapté à un contexte de dynamique de stock discrète. Dans ce cas en effet, sur chaque pas de temps, les variables sont supposées constantes ; en outre les événements prennent place dans le modèle à des instants échantillonnés (i.e. à chaque pas de temps), ce qui est cohérent avec une ponte ponctuelle. Néanmoins l'hypothèse de constance des variables autres que celle décrivant les pré-recrutés, et ce pendant tout le développement de ces derniers, est assez forte.

☞ Il existe d'autres relations stock-recrutement (modèle de DERISO [8], généralisé ensuite par SCHNUTE [32] – modèles dépensatoires [13], etc...), mais les plus « classiques » sont celles de BEVERTON–HOLT et RICKER présentées ci-dessus. De manière générale, ces relations sont très utilisées, car elles sont pratiques et synthétiques. Comme l'on dispose généralement de peu ou pas de données sur les stades précédant le recrutement, elles constituent un outil fort utile pour l'évaluation des stocks [24].

### 1.3.2 Limites des relations stock-recrutement

Cependant, la confrontation de ces modèles aux données expérimentales est souvent décevante, comme le montrent par exemple les figures 1.10 et 1.11.

Cela peut s'expliquer par l'*effet de l'environnement* sur les pré-recrutés : divers facteurs physiques et biologiques peuvent influencer fortement sur l'évolution de ces stades particulièrement sensibles (petite taille...) ; par exemple la température de l'eau, le vent, la présence de nourriture sur les nourriceries... Et ils sont aussi soumis à des interactions avec d'autres espèces vivantes. Il n'est pas possible d'intégrer ou de modéliser ces phénomènes de manière générale. Mais sur un stock particulier, il est parfois possible de mettre en évidence l'influence marquée d'un ou

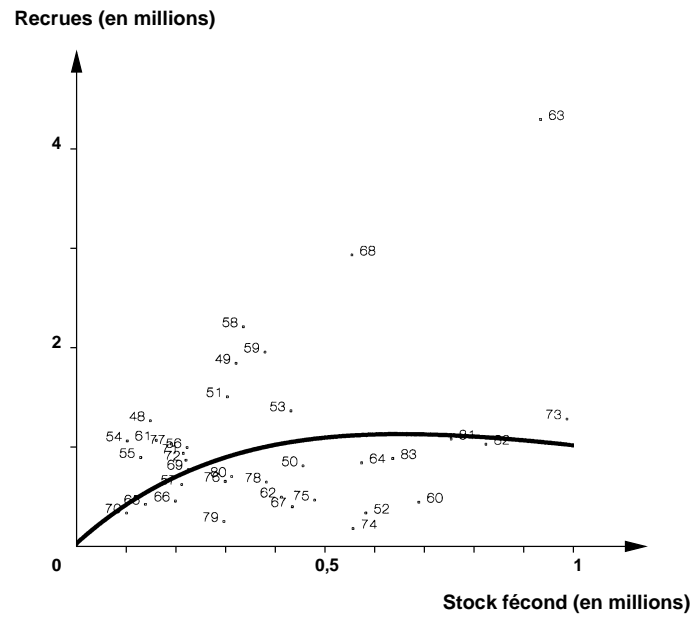


FIG. 1.10 – Exemple d’ajustement d’une courbe de RICKER sur des données stock-recrutement de saumon rouge de Rivers Inlet (données du Ministère des Pêches et des Océans – Canada). D’après [13, p268].

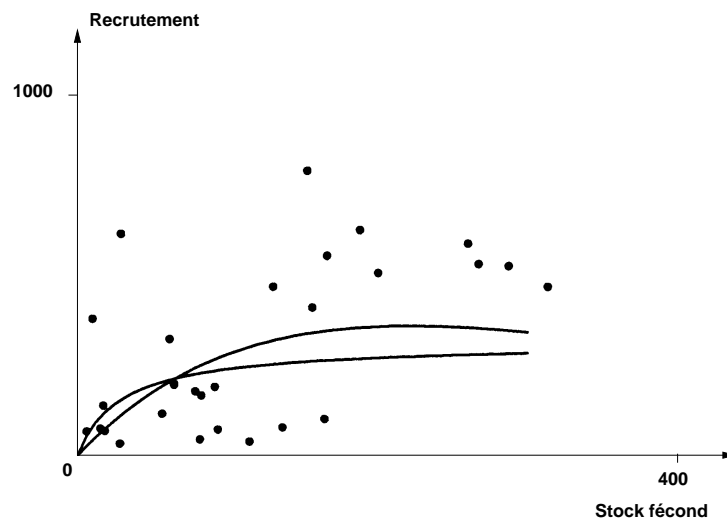


FIG. 1.11 – Exemple d’ajustement de courbes de RICKER et BEVERTON-HOLT sur des données stock-recrutement de hareng d’Islande (données de JAKOBSSON 1980 [14]). D’après [13, p276].

plusieurs facteurs sur le recrutement (voir par exemple les actes du colloque sur les « *Effects of ocean variability on recruitment and an evaluation of parameters used in stock assessment models* », Vancouver 1987 [2], dont est issu l'article synthétique [42] à ce propos).

Il ne faut pas non plus négliger le fait que les données ayant trait au recrutement ne sont pas parfaites : la *précision des mesures* n'est pas très bonne et le nombre d'études sur les stades œufs-larves limité, vu les difficultés (coûts...) qu'elles engendrent.

Sans dire pour autant que ces effets sont prépondérants, ils peuvent néanmoins masquer la relation entre le stock fécond et sa progéniture, ce qui conduit au « paradoxe du stock-recrutement » [30], où empiriquement on n'observe pas de relation. C'est pourquoi dans certains cas, des recrutements exogènes, recrutement constant ou aléatoire, sont utilisés.

Intuitivement il doit pourtant y avoir une relation entre le stock fécond et le recrutement. Le stock fécond revient en première approximation au nombre d'œufs pondus (cf. par exemple [5, 30] pour la relation entre stock et œufs). Mais elle n'est pas directe, car entre ces deux stades il y a une évolution. Exprimer une relation stock-recrutement revient en fait à intégrer l'histoire du développement des œufs en une simple relation.

C'est pourquoi il peut être intéressant d'intégrer les premiers stades de développement dans les modèles, sous une forme moins résumée que dans les relations stock-recrutement. PAULIK [19] s'était attaché à prendre en compte les premiers stades de développement, sous une forme statique : il combinait des fonctions de production des œufs, mortalité des œufs et mortalité larvaire. L'aspect dynamique était absent de sa modélisation.

Chez FISHER [10], les fonctions de survie des œufs et de croissance des larves sont examinées en détail au cours d'une année, puis sont combinées et introduites dans un modèle dynamique en temps discret (au niveau de la 1<sup>ère</sup> classe). Mais comme le pas de temps du modèle est d'un an (FISHER s'intéresse principalement à introduire la taille dans son modèle), on perd de vue la dynamique des larves : l'échelle de temps est trop grande.

Dans [35, 37] nous nous sommes attachés à intégrer de manière *dynamique* les pré-recrutés dans un modèle en temps continu, qui a l'avantage de ne pas présenter ce problème d'échelle de temps.

## Chapitre 2

# Contrôle en halieutique

Ce chapitre issu de l'article [36] a pour but de présenter quelques outils issus de l'automatique, appliqués à la résolution de problèmes dans un contexte halieutique. Ces outils sont introduits par le biais d'exemples simples, regroupés autour des thèmes suivants : modélisation, identification et contrôle. Chaque exemple illustre l'un de ces thèmes, étudié sur un système dynamique « pêcherie ».

### 2.1 Introduction

Dans cet article, nous voulons montrer comment appliquer à des questions halieutiques des outils issus de l'automatique, et ce essentiellement par le biais d'exemples. Nous présentons là une approche d'automaticiens face à quelques problèmes simples issus des pêcheries. Ces deux disciplines, l'automatique et l'halieutique sont rarement associées.

L'orientation de cet article étant une présentation d'outils d'automaciens à des biologistes et des halieutes, sont exposées dans cette section quelques notions de base en automatique. Afin d'explicitier ces notions, elles sont ensuite appliquées dans un contexte halieutique. Pour plus de détails, on peut se reporter à la littérature relative à ce domaine [15, 9, 3, 7] ou à l'application en biologie des systèmes dynamiques [20].

#### 2.1.1 Automatique

L'automatique peut être définie comme la science qui étudie le fonctionnement des systèmes. Elle comprend la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques.

Un système au sens automatique est isolé du monde extérieur. Les éléments qui le constituent sont organisés, interagissent entre eux et sont dynamiques. On décrit un système à l'aide de variables qui traduisent cette organisation. On le représente usuellement par un schéma-bloc (FIG. 2.1). Les variables décrivant le système sont les entrées, les sorties et, dans l'approche d'état (que nous employons tout au long de cet article), les variables d'état (appelées aussi variables internes).

Les *variables internes* (= vecteur  $X$ ) caractérisent l'état du système et ne sont généralement pas accessibles ; on doit souvent se contenter de les estimer. Les *entrées* (= vecteur  $U$ ) sont, de manière générale, maîtrisées ou connues et sont utilisées pour contrôler le système. Sinon, on les appelle plutôt des perturbations (bruits de mesure,...). Les *sorties* (= vecteur  $Y$ ) sont mesurées. Combinées avec la connaissance des entrées, elles permettent de reconstituer tout ou une partie de l'état du système.



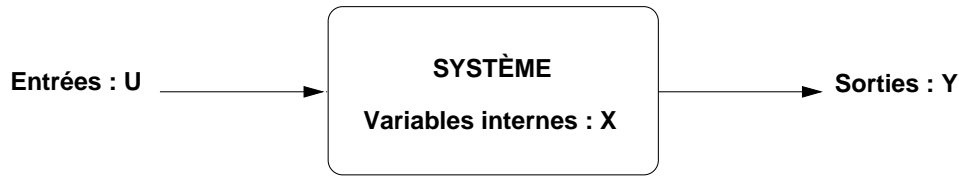


FIG. 2.1 – Schéma-bloc d'un système automatique.

Le modèle issu d'un système d'état a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), U(t), t) \\ Y(t) = g(X(t), U(t), t) \end{cases}$$

À partir de ce modèle générique, on peut distinguer trois phases dans l'étude du système : la modélisation, l'identification, et le contrôle.

La *modélisation* consiste à donner la forme des fonctions  $f$  et  $g$ . Ces fonctions comportent des paramètres ; l'*identification* permet de déterminer les valeurs de ces paramètres.

Ensuite il est possible de *contrôler* le système, i.e. d'élaborer une loi d'entrée sur  $f$ , de manière à obtenir le comportement voulu. Il peut y avoir plusieurs façons pour atteindre ce but ; le contrôle optimal consiste à chercher la « meilleure » façon, au sens d'un critère donné, i.e. celle qui optimise ce critère. Si le contrôle dépend des autres variables du système, états ou sorties, c.-à-d. :

$$U = U(t, X) \quad \text{ou} \quad U = U(t, Y)$$

on dit qu'il est en boucle fermée ou *feedback* ; sinon il s'agit d'un contrôle en boucle ouverte.

### 2.1.2 Système pêche

Le « système pêche » considéré dans cette section décrit le comportement d'un stock de poissons exploité. Le stock est représenté par son abondance  $X$  ;  $X$  est un vecteur si le stock est structuré en âge ou en stades. L'entrée naturelle sur ce système est l'effort de pêche : c'est ce qui est appliqué au stock et il est plus ou moins maîtrisable. Il en résulte des captures, que l'on peut mesurer et qui constituent les sorties du système (FIG. 2.2).

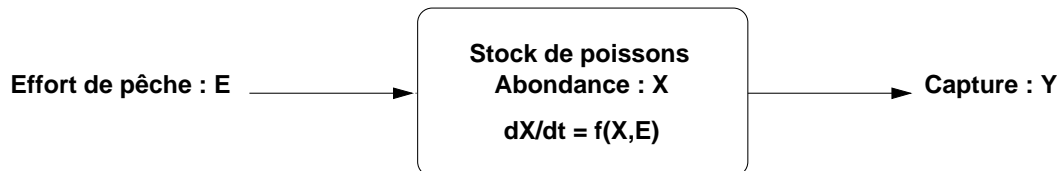


FIG. 2.2 – Schéma d'un système pêche.

EXEMPLE :

1<sup>ère</sup> étape : modélisation.

On choisit le modèle de Schaefer pour déterminer les fonctions  $f$  et  $g$ .

$$\begin{cases} \dot{X} = rX(1 - \frac{X}{k}) - qEX \\ Y = qEX \end{cases}$$

2<sup>ème</sup> étape : identification.

On identifie les paramètres  $r$ ,  $k$  et  $q$  à partir par exemple de données efforts/captures issues de relevés de pêche.

3<sup>ème</sup> étape : contrôle.

Cet exemple illustre le contrôle optimal. On choisit de maximiser les captures sur un horizon de 10 ans. Il faudrait poser le problème plus précisément avec ses contraintes pour se lancer dans une résolution précise. Mais cela consiste à pêcher à un niveau soutenable pendant les premiers temps, puis à la fin, à augmenter l'effort au maximum pour pêcher tout ce qu'il reste. On peut se reporter à l'ouvrage de Clark [6] pour plus de détails.

Dans la suite de ce document, nous allons décrire plus en détails certaines applications que nous avons rédigé un système d'équations différentielles. On pourrait raisonner en temps discret à peu près de la même façon.

### 2.1.3 Exemple de modélisation des pré-recrutés

Les modèles classiques en halieutique s'intéressent principalement à l'évolution temporelle des stocks de poissons (ou plus généralement de toute population marine exploitée). Un stock est une unité de gestion : il représente la fraction de la population *susceptible d'être exploitée* [17]. En sont écartés les individus trop jeunes et/ou trop petits (parfois aussi les individus trop âgés). L'entrée dans cette phase exploitable correspond au *recrutement*. Souvent donc, seule est représentée la dynamique du stock.

Il nous a semblé intéressant de représenter aussi la dynamique des pré-recrutés (œufs, larves, juvéniles). Dans le modèle qui suit, nous nous sommes attachés à détailler les phénomènes intervenant avant le recrutement, alors que la dynamique du stock est très simple.

#### a) Présentation du modèle

Nous avons choisi de représenter le stock par un modèle structuré « classique » à  $n$  classes d'âge, en lui adjoignant un stade 0 regroupant les pré-recrutés (œufs, larves, juvéniles). Plus précisément, il s'agit d'un modèle en temps continu de dimension  $(n+1)$ , où chaque stade est décrit par l'évolution de son effectif  $X_i$ . Le choix du temps continu s'explique en partie par le fait que nous nous intéressons à la dynamique des juvéniles : cette dernière est rapide et demande donc un pas de temps petit, voire infiniment petit. En outre il nous semble qu'à moins d'étudier l'évolution d'un stock initialement constitué d'une seule cohorte, le problème de « l'étalement numérique » n'est pas très important (en partant de  $N$  individus en classe 1, au bout d'un temps très petit, une proportion infime de la population est présente dans la classe  $n$ ).

Au niveau des pré-recrutés, nous avons modélisé la ponte et des termes de mortalités spécifiques. Pour ces derniers, nous nous sommes inspirés des hypothèses utilisées par Ricker [29] et Beverton–Holt [4] pour élaborer leurs relations stock-recrutement. Soit, outre la mortalité linéaire naturelle, nous introduisons dans le modèle du cannibalisme parental (cf. Ricker) et de la compétition intra-juvénile pour la nourriture ou l'habitat (cf. Beverton–Holt). Ce dernier terme de compétition s'exprime par de la mortalité densito-dépendante. Ces mécanismes sont repris et décrits pour ces deux modèles stock-recrutement dans l'ouvrage de Clark [6, pp217–218,229–230] et de manière un peu plus synthétique par Hilborn et Walters [13, 257–261].

La dynamique du stock est elle très simplifiée : mortalité naturelle et pêche (FIG. 2.3).

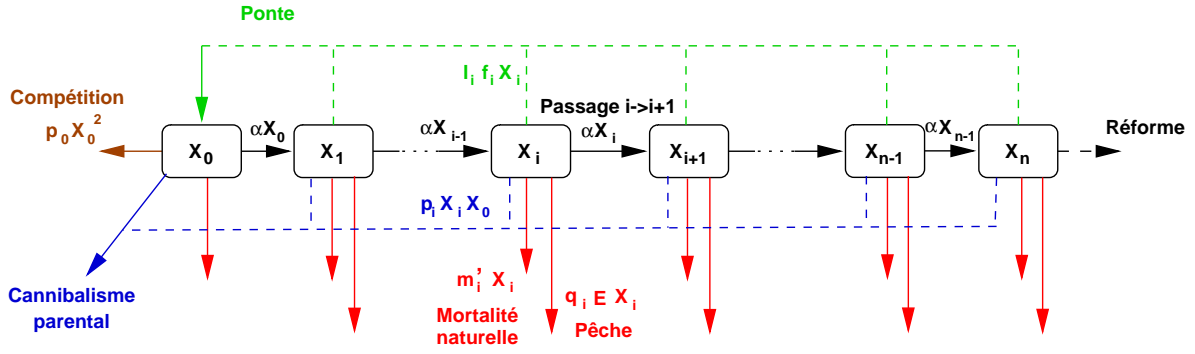


FIG. 2.3 – Structure du modèle dynamique stock/pré-recrutés.

### b) Formalisation mathématique

$$\dot{X}_0(t) = \underbrace{-\alpha X_0(t)}_{\text{passage } \rightarrow 1} - \underbrace{m_0 X_0(t)}_{\text{mort. lin.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_i l_i X_i(t)}_{\text{ponte } i \rightarrow 0} - \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i X_i(t) X_0(t)}_{\text{prédation de } i \rightarrow 0} - \underbrace{p_0 X_0(t)^2}_{\text{compétition}} \quad (2.1)$$

$$\dot{X}_i(t) = \underbrace{\alpha X_{i-1}(t)}_{\text{passage } i-1 \rightarrow i} - \underbrace{\alpha X_i(t)}_{\text{passage } i \rightarrow i+1} - \underbrace{m_i X_i(t)}_{\text{mort. nat.}} - \underbrace{q_i E X_i(t)}_{\text{pêche}} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

avec :	$E$	: effort de pêche
	$m_i$	: coefficient de mortalité naturelle
	$q_i$	: capturabilité
	$\alpha$	: coefficient de passage linéaire
	$p_0$	: paramètre de compétition juvénile
	$f_i$	: taux de fécondité de la classe $i$
	$l_i$	: efficacité reproductive de la classe $i$
	$p_i$	: taux de prédation de la classe $i$ sur la classe 0

Chaque stade  $i$  (0 à  $n$ ) du stock est soumis à mortalité naturelle ( $m_i$ ), mortalité par pêche ( $q_i E$ ) et passage ( $\alpha$ ) dans la classe supérieure.

À ce modèle linéaire très simple, on greffe au niveau du stade pré-recruté 0 un terme de ponte, supposée continue, permettant de boucler le système, ainsi que des termes de mortalité spécifiques aux pré-recrutés.

Plus précisément, le nombre d'œufs viables (par unité de temps) introduits dans le stade 0 est donné par la somme des ( $f_i l_i X_i$ ), où  $f_i$  est la proportion d'individus féconds, et  $l_i$  le nombre moyen d'œufs viables émis par un tel individu. Les juvéniles sont aussi éventuellement soumis à de la prédation parentale du stade  $i$  ( $p_i X_i X_0$ ) et de la compétition ( $p_0 X_0^2$ ).

On peut remarquer que l'on pourrait aisément introduire un terme de pêche moins élémentaire sur ce modèle. La capturabilité  $q_i$  représente pour un poisson de la classe  $i$  la probabilité, par unité d'effort, d'être pêché pendant une unité de temps. On pourrait la rendre dépendante de l'engin de pêche : par exemple, en tenant compte des variations de vulnérabilité du poisson par rapport à l'engin choisi, en évaluant l'efficacité de l'engin...

En outre l'effort de pêche, que l'on considère constant, pourrait très bien évoluer au cours du temps. Par exemple sous la forme d'un créneau de période un an pour tenir compte des saisons de pêche.

### 2.1.4 Exemple d'un système halieutique pêcheurs–stock

Nous considérons ici un système de pêche plus global, où l'on veut modéliser à la fois la dynamique du stock et celle des pêcheurs. Ces deux sous-systèmes sont décrits de manière assez grossière, car c'est ici le lien entre pêcheurs et stock qui nous intéresse. Nous allons considérer que les pêcheurs  $P$  sont représentés par leur effort global  $E$  et que le stock de poissons, d'abondance  $X$  n'est pas structuré (FIG. 2.4).

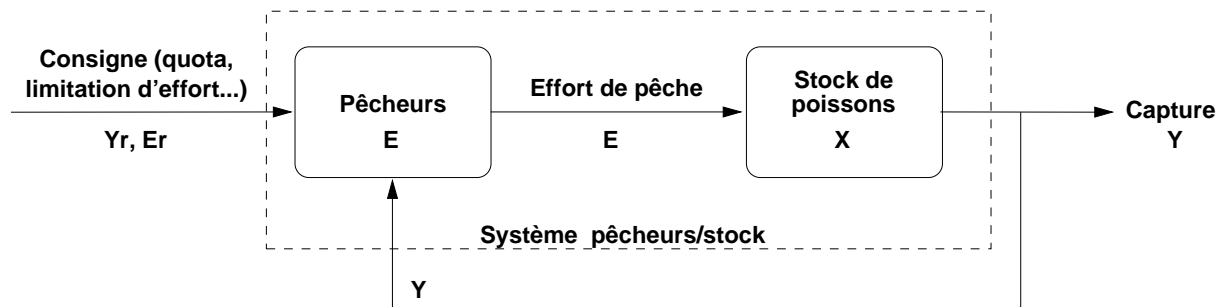


FIG. 2.4 – Schéma d'un système halieutique « pêcheurs–stock ».

#### a) Description du modèle

On peut décomposer le système global « pêcheurs–stock » en deux sous-systèmes. Sur le premier sous-système « pêcheurs », il y a : (i) deux entrées, la consigne quotas  $Y_r$  (ou limitation d'effort  $E_r$ ) et les captures  $Y$  ; et (ii) une sortie égale à la variable d'état, l'effort de pêche  $E$ . Sur le second sous-système « stock », il y a : (i) une entrée, l'effort  $E$  ; (ii) une sortie, les captures  $Y$  ; et (iii) une variable d'état, l'abondance du stock  $X$ .

L'association de ces deux sous-systèmes donne un système global bouclé « pêcherie ». Si l'on analyse ce système, il y a : (i) une entrée, la consigne quotas  $Y_r$  (ou limitation d'effort  $E_r$ ) ; (ii) une sortie, les captures  $Y$  ; (iii) deux variables d'état, l'effort de pêche  $E$  et l'abondance du stock  $X$  ; et (iv) un bouclage de la sortie sur l'entrée.

Nous avons choisi de décrire l'évolution du stock par un modèle de Schaefer, soit une croissance logistique, moins un terme de pêche proportionnel à la fois à l'abondance et à l'effort.

La dynamique des pêcheurs dérive aussi de ce modèle. Schaefer [31] a introduit une variable pour décrire l'évolution temporelle de la pêcherie. Avec un seuil critique de niveau de population  $X_s$ , au-dessous duquel la pêcherie croissait et au-dessus duquel elle diminuait, faute de rentabilité. Avec nos notations, cela donne :  $\dot{E} = kE(X - X_s)$ . On peut remarquer que couplé avec la dynamique du stock, on obtient un système proie-prédateur [18].

Mais nous avons rajouté un terme supplémentaire à la dynamique de l'effort, afin de prendre en compte la consigne : limiter l'effort et les captures. Nous introduisons dans ce but un quota de pêche  $Y_r$  et une valeur limite de l'effort  $E_r$  qui sont des recommandations, issues par exemple d'instances gouvernementales. Elles ne sont pas suivies à la lettre, mais ont une influence sur le comportement des pêcheurs.

## b) Formalisation mathématique

$$\begin{cases} \dot{E} = l_1(pY - cE) + l_2(Y_r - Y) + l_3(E_r - E) \\ \dot{X} = rX \left(1 - \frac{X}{k}\right) - qEX \\ Y = qEX \end{cases} \quad (2.3)$$

avec :	$E$	:	effort de pêche
	$X$	:	abondance du stock
	$Y$	:	captures
	$p$	:	prix de vente d'une unité de captures
	$c$	:	coût d'une unité d'effort / unité de temps
	$Y_r$	:	quotas sur les captures
	$E_r$	:	valeur de l'effort limite
	$r$	:	taux de croissance
	$k$	:	capacité biotique
	$q$	:	capturabilité
	$l_1, l_2, l_3$	:	coefficients de pondération des composantes de $\dot{E}$

Le comportement de la partie stock de ce modèle, i.e. le modèle de Schaefer, est décrit dans la littérature [17, 31].

On distingue trois composantes de la dynamique de l'effort, chacune pondérée par un poids  $l_i$  que l'on peut ajuster selon le type de comportement voulu. La première correspond à un critère de rentabilité et est similaire à celle avancée par Schaefer [31] : tant que les revenus des captures ( $pY$ ) sont supérieurs aux coûts ( $cE$ ) engendrés par l'effort correspondant, l'effort croît ; sinon, il diminue.

Les deux autres composantes correspondent aux limitations. La deuxième tend à faire augmenter l'effort si les quotas  $Y_r$  ne sont pas atteints, et l'inverse en cas de dépassement. Et la troisième tend aussi à augmenter l'effort tant qu'il est inférieur à sa valeur limite recommandée  $E_r$ , et inversement s'il la dépasse.

## 2.2 Identification

= Déterminer les valeurs des paramètres de  $f$  et  $g$ .

Pour déterminer les valeurs des paramètres intervenant dans les modèles, il existe deux grandes façons de procéder : (i) soit par connaissance empirique des paramètres biologiques qui interviennent ; (ii) soit à partir de relevés expérimentaux. C'est cette dernière solution dont nous donnons un exemple ci-dessous.

Admettons que nous sommes en possession d'un jeu de données suffisant, i.e. de relevés portant sur un nombre de variables suffisant (par rapport au nombre de paramètres à identifier), et ce pour de relativement longues séries temporelles. Auparavant nous avons retenu une structure de modèle que nous voulons identifier, cohérente avec les données disponibles. Il faut encore déterminer un critère, admettant comme variables les paramètres du modèle et faisant intervenir les données expérimentales ; les paramètres les plus adaptés aux données, au sens du critère choisi, sont ceux qui optimisent ce critère.

### 2.2.1 Exemple du stock de flétan

Nous allons présenter ici un exemple d'identification sur un modèle de Schaefer [31], à partir de données du flétan du Pacifique.

#### a) Données

Les données dont on dispose ont été communiquées par R.B. Deriso (pers. comm. via D. Pelletier) [8]. Elles concernent le flétan du Pacifique. Elles sont constituées des relevés de captures et de captures par unité d'effort (cpue) entre 1929 et 1987, à raison d'un relevé par an. Une partie de ces données provient de Ricker [28].

On en déduit aisément une série de 59 relevés expérimentaux d'effort et de captures, espacés régulièrement d'un an.

#### b) Méthode

On choisit ensuite de représenter notre système par le modèle de Schaefer suivant :

$$\dot{X}(t) = rX(t) \left( 1 - \frac{X(t)}{k} \right) - Y(t) \quad (2.4a)$$

$$Y(t) = qE(t)X(t) \quad (2.4b)$$

$$X(1929) = X_0 \quad (\text{condition initiale}) \quad (2.4c)$$

Les paramètres à identifier sont donc :  $r, k, q$  et  $X_0$ . Nous avons intégré la condition initiale du stock dans les paramètres du modèle, car il est nécessaire d'avoir la valeur du stock à un instant donné, afin de pouvoir intégrer l'équation différentielle.

Comme critère d'identification, on choisit de minimiser les écarts entre les captures réelles et les captures simulées, par une méthode des moindres carrés, sur les  $T + 1$  années des relevés. Cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des écarts. Dans ce cas, le problème correspondant s'exprime de la manière suivante :

$$\text{Trouver : } (r, k, q, X_0)_{opt} = \min_{\{r, k, q, X_0\}} \frac{1}{2} \int_{t=0}^T (Y_{exp.} - Y_{simul.})^2 dt$$

où :  $Y_{simul.}$  est calculée grâce à la relation (2.4b) avec  $U = U_{exp.}$  et  $X$  ;

$X$  étant obtenu par intégration de (2.4a) avec  $Y = Y_{exp.}$  et la condition initiale (2.4c).

La résolution numérique des problèmes d'identification a été réalisée sur le logiciel MATLAB, à l'aide de son *Optimization Toolbox*. La fonction implémentée, permettant de résoudre ces problèmes d'optimisation par les moindres carrés non-linéaires, fait appel à l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

#### c) Résultats

Par la méthode des moindres carrés décrite ci-dessus, nous avons obtenu les valeurs des paramètres optimaux suivantes :

$$\begin{cases} r = 0.278 & \text{en année}^{-1} \\ k = 1055 & \text{en } 10^6 \text{ Lb} \\ q = 0.222 & \text{en } 10^3 \text{ longueur d'engin.année}^{-1} \\ X_0 = 249 & \text{en } 10^6 \text{ Lb} \end{cases} \quad (2.5)$$

Les résultats obtenus sont assez satisfaisants, comme le montre la comparaison entre les captures expérimentales et simulées issues de ce modèle identifié (FIG. 2.5).

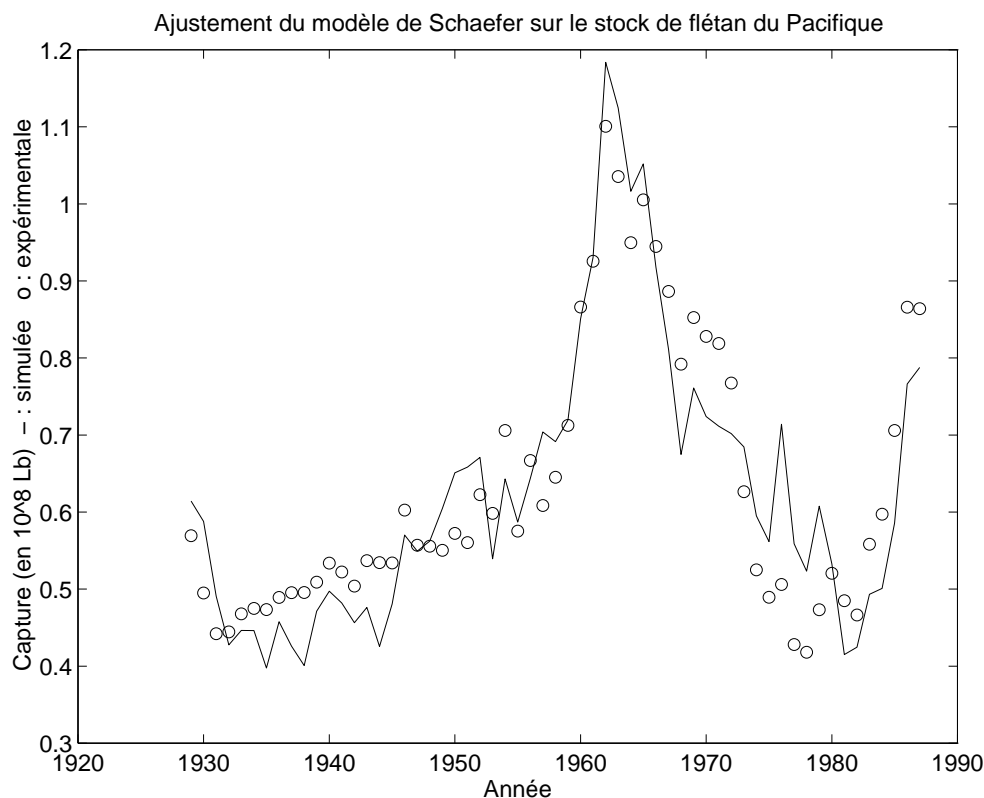


FIG. 2.5 – Comparaison, pour le flétan du Pacifique, entre les captures expérimentales et simulées par le modèle (2.4) avec les paramètres (2.5).

## 2.3 Contrôle

= Élaborer une loi d'entrée sur  $f$  de manière à obtenir un comportement voulu.

Dans cette section, nous présentons deux exemples simples de contrôle. Le premier illustre une poursuite de consigne ; son but est de rendre la sortie du système (captures) égale à une consigne donnée (quotas). Le second exemple est une approche « viabiliste » du contrôle [1].

### 2.3.1 Exemple très simple de poursuite de consigne

Cet exemple introduit une poursuite de consigne. De manière générale, cela consiste à élaborer une loi de contrôle sur le système, afin que la sortie (ou une partie de la sortie) de ce dernier suive la consigne indiquée. Le système que nous considérons ici est le « système pêche » présenté à la FIG. 2.2. La consigne de sortie est prise sous forme de quotas de pêche.

Tout d'abord, nous allons présenter une synthèse intuitive de la loi de commande, puis ensuite nous allons vérifier que le système ainsi commandé remplit bien notre objectif : suivre les quotas.

### a) Élaboration a priori de la loi de contrôle

Notre but dans cet exemple est de suivre la consigne :  $\text{captures} = \text{quotas}$ , sur un stock exploité donné. Le contrôle sur notre système est l'effort de pêche  $E$ . On cherche donc à élaborer un effort qui, appliqué au stock de poissons, permette de suivre la consigne.

Pour cela on introduit un comparateur dans notre système, qui calcule l'erreur :  $\varepsilon = Y_r - Y$ , puis on multiplie cette erreur par un gain  $A$ , qui sert d'amplificateur. Si l'on suppose que :  $\dot{E} = A(Y_r - Y)$ , la loi d'effort qui dérive de cette équation a, a priori, bien le comportement voulu. En effet, si les quotas sont dépassés, l'effort diminue (et donc a priori les captures aussi), tandis qu'il augmente si les quotas sont dépassés. Il suffit donc finalement d'intégrer cette erreur amplifiée pour obtenir le contrôle  $E$  (FIG. 2.6).

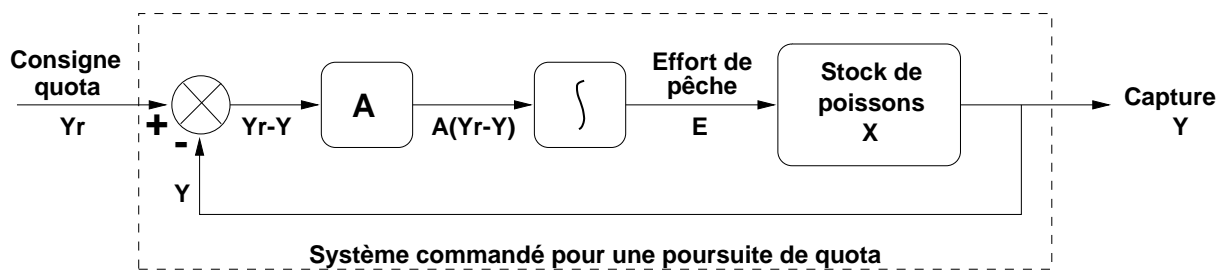


FIG. 2.6 – Schéma d'un système halieutique avec poursuite de consigne « quotas ».

### b) Analyse du système commandé

Vérifions à présent que le comportement du système est bien conforme à notre objectif, à savoir poursuite de la consigne « quotas ».

Comme modèle pour le stock, on prend le modèle de Schaefer [31], ce qui nous donne le système complet commandé suivant :

$$\dot{X} = rX \left(1 - \frac{X}{k}\right) - qEX \quad (2.6)$$

$$\dot{E} = A(Y_r - Y) \quad (2.7)$$

$$Y = qEX \quad (2.8)$$

Pour l'étude de ce système, nous avons choisi des valeurs simples pour les paramètres. Elles ne sont pas nécessairement réalistes, aucune unité n'est précisée, mais ce modèle sans dimension permet une meilleure compréhension et des calculs allégés. Soit donc :

$$\begin{aligned} r &= k = q = 1 \\ A &= 3 \\ Y_r &= 0,2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le système devient donc :

$$\dot{X} = X(1 - X) - EX \quad (2.6')$$

$$\dot{E} = 3(0,2 - EX) \quad (2.7')$$

Les points d'équilibre sont les points qui annulent  $\dot{X}$  et  $\dot{E}$ . Ils vérifient donc :  $E + X = 1$  et  $EX = 0,2$ ; ou encore l'équation suivante :  $X^2 - X + 0,2 = 0$ . Il y a donc deux points d'équilibre, qui sont bien dans le plan réel, avec des coordonnées strictement positives, et qui sont :



Équilibre <b>Eq 1</b> $X_1^* = \frac{1+\sqrt{0,2}}{2}$ $E_1^* = \frac{1-\sqrt{0,2}}{2}$	Équilibre <b>Eq 2</b> $X_2^* = \frac{1-\sqrt{0,2}}{2}$ $E_2^* = \frac{1+\sqrt{0,2}}{2}$
---	---

Les points obtenus vérifient bien la consigne : *captures = quotas*. Il faut donc à présent étudier à partir de quelles conditions initiales il est possible d'atteindre ces points d'équilibre.

Si l'on se place dans le plan de phase, i.e. dans le plan où l'on a l'effort sur un axe et l'abondance du stock sur l'autre, on peut déterminer le sens de variation de chacune des variables, selon divers secteurs du plan. On matérialise la résultante des variations en  $X$  et en  $E$  par une flèche. On peut ainsi voir si les points d'équilibre sont stables et d'où il est possible de converger vers eux (FIG. 2.7).

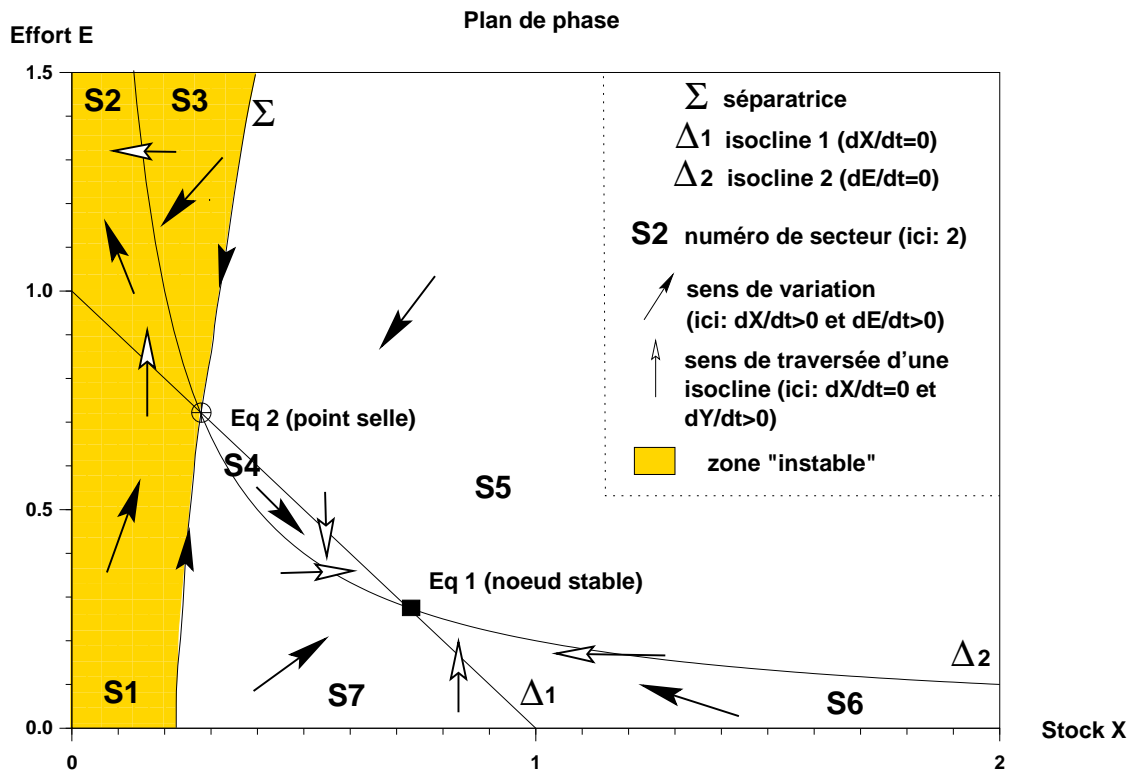


FIG. 2.7 – Plan de phase associé au système (2.6',2.7')

Grâce à cette représentation graphique, on voit donc que le point d'équilibre Eq 1 est un nœud stable et le point d'équilibre Eq 2 un point selle, donc instable. En ces deux points les captures sont égales aux quotas et l'on est à l'équilibre. Il est intéressant de remarquer que le point stable est celui pour lequel l'abondance du stock est plus élevée et l'effort de pêche plus faible.

Les secteurs du plan sont délimités par les isoclines  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et une séparatrice  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est la trajectoire particulière qui converge vers le point d'équilibre instable Eq 2. Elle est obtenue par simulation numérique. Comme toute trajectoire, elle ne peut être franchie. À gauche de cette séparatrice (zone jaune), à partir des secteurs S1, S2 et S3, toutes les trajectoires tendent vers un stock nul et un effort très grand. À droite de la séparatrice, à partir des secteurs S4, S5, S6 et S7, les trajectoires convergent toutes vers l'équilibre stable Eq 1.

### c) Interprétation des résultats

On a donc défini deux zones dans le plan de phase séparées par  $\Sigma$ . La première zone est celle dite « instable » (secteurs 1-3, zone jaune) ; elle est caractérisée par un stock d'effectif faible. La seconde est la zone de convergence ; elle recouvre les stocks plus abondants.

Si le stock est bas (zone instable), quel que soit le niveau d'exploitation appliqué, avec la loi de contrôle élaborée ci-dessus on va totalement épuiser le stock. En général dans ce cas, les captures sont inférieures aux quotas (secteurs S1-2) ; pour réaliser la consigne, on augmente alors l'effort de pêche, et ainsi on parvient à un effort très grand mais un stock nul. Toujours avec un stock bas, il arrive que les quotas soient dépassés (secteur S3) ; dans ce cas, l'effort commence par diminuer, mais le stock aussi car il est surexploité ; ainsi on repasse sous les quotas (secteur S2), l'effort augmente, le stock s'épuise et l'on se retrouve dans le cas précédent : effort très grand, stock nul.

Si au contraire le stock est important (zone de convergence), la loi de contrôle élaborée ci-dessus permet d'atteindre les quotas au bout d'un certain temps. Elle diminue l'effort et les captures dans les secteurs S4-5 et les augmente dans les secteurs S6-7. Ainsi le système tend vers des valeurs d'effort, de stock et de captures respectant les quotas, valeurs d'équilibre données par Eq 1. C'est un niveau d'exploitation intéressant car il correspond à stock assez élevé. En outre, ce contrôle est assez robuste face à des petites perturbations, car Eq 1 est un point stable sur la zone de convergence.

En conclusion, le contrôle synthétisé ci-dessus remplit bien son objectif  $captures = quotas$  à condition que le stock initial ne soit pas à un niveau trop faible, sinon il épuise le stock.

## 2.3.2 Stabilisation « viabiliste »

### a) Présentation du système étudié

Dans cet exemple, on considère le système suivant :

$$\dot{X} = rX(1 - X/k) - qEX \quad (2.10)$$

$$\dot{E} = U \quad (2.11)$$

$$Y = qEX \quad (2.12)$$

Le système est très semblable à celui représenté sur la FIG. 2.2, avec un modèle de Schaefer, sauf que là on ne contrôle pas le système par l'effort de pêche  $E$  mais par sa dérivée  $U$ , i.e. par la vitesse de variation de l'effort. C'est plus réaliste, car ainsi l'effort varie continûment et non pas de manière brusque. Le contrôle est alors du type : « veuillez diminuer l'effort à telle vitesse, soit veuillez détruire un bateau par an », et non : « veuillez appliquer tel effort, soit veuillez pêcher avec tant de bateaux ». En outre on borne  $U$ , ainsi l'effort ne peut pas varier trop vite.

De même que précédemment, nous allons poursuivre l'étude avec un modèle adimensionnel, où les paramètres sont choisis arbitrairement. Soit :  $r = k = q = 1$ . Le modèle précédent devient :

$$\dot{X} = X(1 - X) - EX \quad (2.10')$$

$$\dot{E} = U \text{ avec : } -1 \leq U \leq 1 \quad (2.11')$$

$$Y = EX \quad (2.12')$$

### b) Approche « viabiliste »

Le but ici est d'essayer de rester dans un domaine  $D$  donné. On cherche à savoir si, partant d'un point de ce domaine  $D$ , il existe un contrôle admissible (i.e. respectant les contraintes de bornitude) nous permettant d'y demeurer.

Ainsi on peut définir un sous-domaine limite  $D_l$  de notre domaine initial  $D$  tel que si et seulement si on ne part pas de  $D_l$ , quel que soit le contrôle  $U$ , on est certain de quitter  $D$ . Ce qui signifie aussi que si on part de  $D_l$ , on peut trouver un contrôle  $U$  pour rester dans  $D$  (et par suite dans  $D_l$ ).

Ce type d'étude est connue sous le terme d'étude de viabilité [1].

### c) Application à notre système

On cherche à rester autour d'un point équilibre de référence du système, de manière à ce que les captures et l'effort de pêche ne s'éloignent pas trop de leurs valeurs d'équilibre. Cela constitue un pseudo-critère économique : peu de variations de captures et d'effort garantit aux pêcheurs des revenus et des coûts à peu près constants.

Le point d'équilibre que l'on choisit est :

$$X^* = 0,3 \quad E^* = 1 - X^* = 0,7 \quad (2.13)$$

À l'équilibre, le contrôle  $U$  est nul. Le domaine  $D$  dans lequel on veut rester est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{min} = 0,6 &\leq E \leq E_{max} = 1 \\ Y_{min} = 0,15 &\leq Y \leq Y_{max} = 0,35 \end{aligned} \quad (2.14)$$

La contrainte est :

$$-1 \leq U = \dot{E} \leq 1 \quad (2.15)$$

À partir de là, on va utiliser une résolution graphique du problème. On se place comme précédemment dans le plan de phase  $(X, E)$ .

Tout d'abord, on met en évidence le point d'équilibre indiqué en (2.13) et le domaine  $D$  défini par (2.14). On représente aussi les deux droites,  $X = 0$  et  $\Delta$ , pour lesquelles  $\dot{X}$  issu de (2.10') s'annule (FIG. 2.8). En effet les trajectoires peuvent « s'arrêter » sur ces droites, car les points de ces droites sont tous des équilibres de (2.10') : il suffit alors de prendre  $U = 0$  pour qu'ils deviennent des équilibres du système complet (2.10', 2.11'). La droite  $X = 0$  n'est pas très intéressante néanmoins (stock épuisé).

Ensuite, on étudie le sens de variation de  $X$ , i.e. le signe de  $\dot{X}$ , aux bornes du domaine  $D$ . On le matérialise par des flèches horizontales (FIG. 2.9). Là où les flèches sont rentrantes aux bornes de  $D$ , on ne peut sortir du domaine. Sur le bord bas, le bord haut, le côté droit et le côté gauche / partie inférieure du domaine, il n'y a pas de problème, les flèches sont rentrantes. Par contre sur le côté gauche / partie supérieure du domaine, les flèches sont sortantes.

En effet dans la zone supérieure gauche de  $D$ , l'effort de pêche est trop élevé et donc l'abondance du stock s'affaiblit ; tant et si bien que l'on ne peut plus assurer le niveau de captures  $Y_{min}$  si l'on maintient l'effort à ce niveau.

La solution pour tenter de rester dans le domaine  $D$  quand on approche de la zone critique supérieure gauche est donc de diminuer l'effort de pêche le plus vite possible, cad. pour  $\dot{E} = U_{min} = -1$ . En traçant un faisceau de trajectoires avec ce contrôle minimal, on peut identifier la *trajectoire limite*. Si l'on part d'un point de  $D$  à gauche de cette trajectoire limite, quoi que l'on fasse, on sort de  $D$ . Et si l'on part à droite de cette trajectoire limite, un contrôle admissible (vérifiant (2.15)) bien choisi permet de demeurer dans  $D$  ; et par conséquent à droite de cette trajectoire (FIG. 2.10).

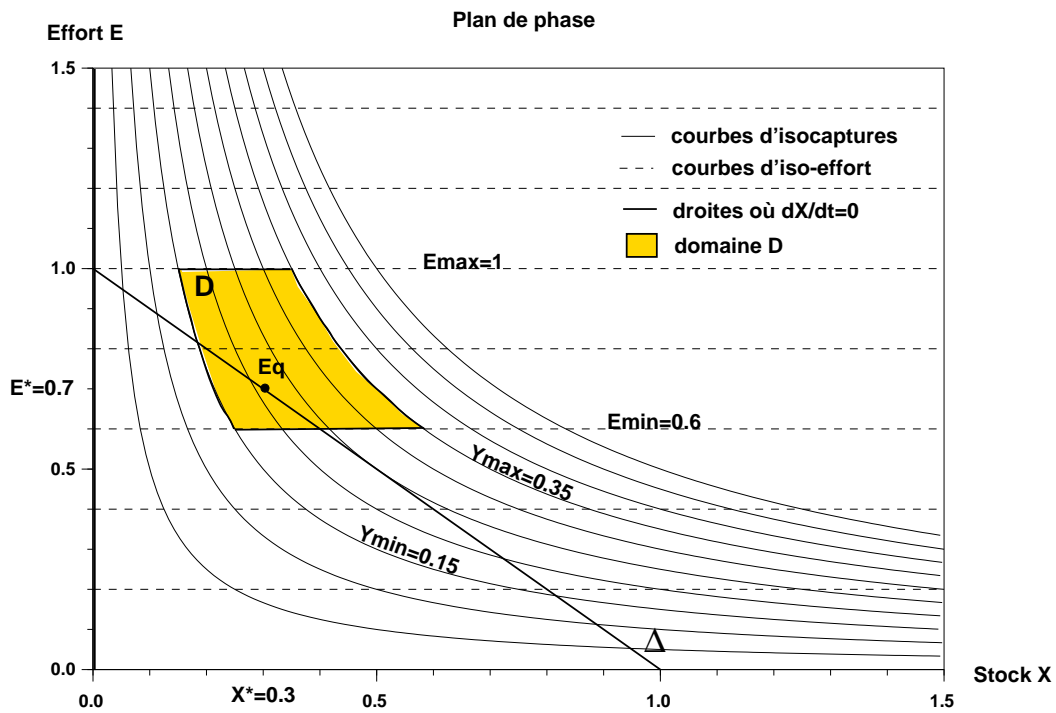


FIG. 2.8 – Mise en évidence du domaine D (2.14) dans lequel on veut maintenir le système (2.10', 2.11', 2.12').

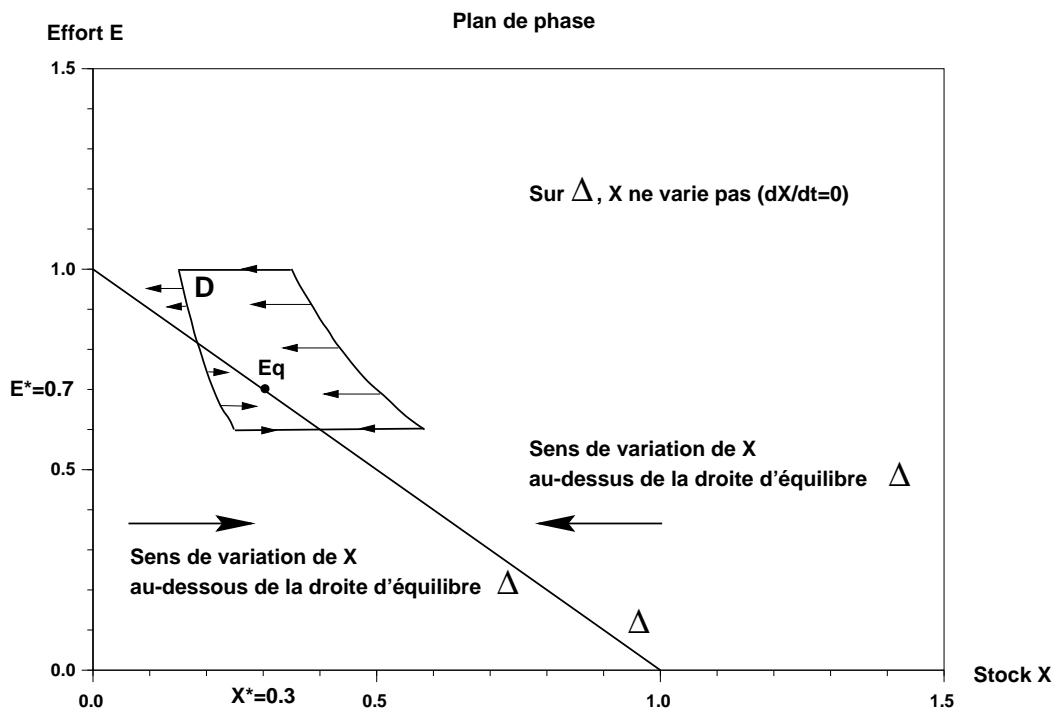


FIG. 2.9 – Détermination du sens de variation de l'abondance X du stock aux bornes du domaine D.

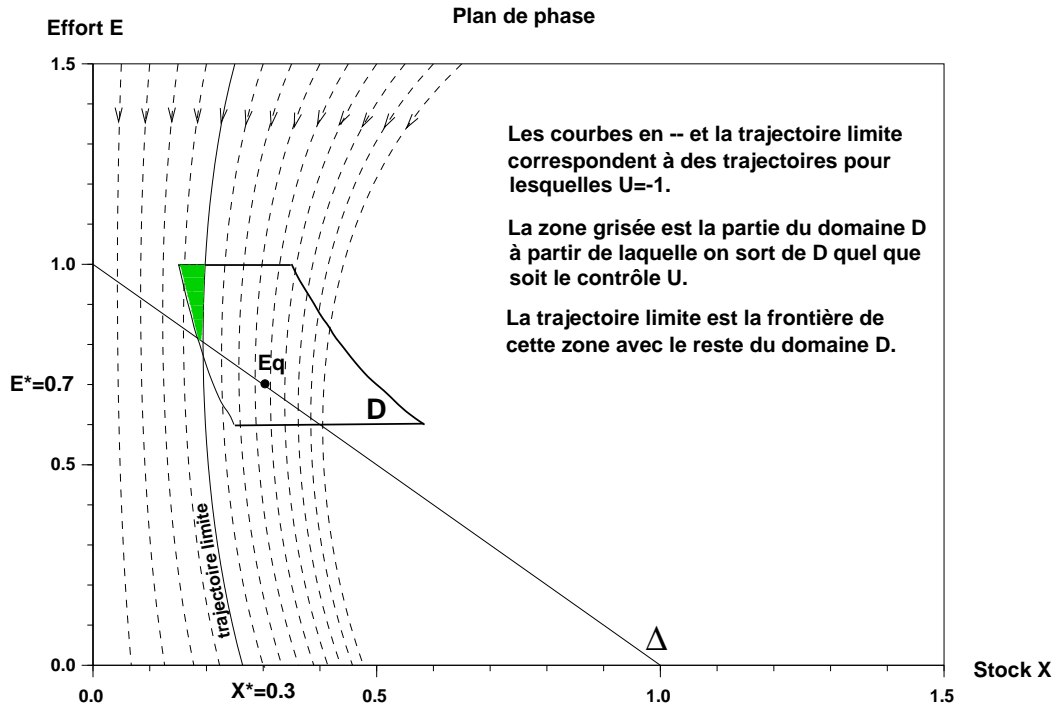


FIG. 2.10 – Identification de la zone interdite (zone verte) du domaine  $D$ .

Grâce à cette méthode graphique, on identifie donc une zone interdite du domaine  $D$ , située dans le coin supérieur gauche du domaine. Si l'on évite cette zone, grâce à un contrôle intelligent, on peut conserver un niveau de captures et d'effort proche du point d'équilibre de référence. L'interprétation économique de ce résultat est un peu grossière : revenus et coûts à peu près constants si l'on reste à droite de la trajectoire critique. Mais ce résultat, par son approche « domaine solution » (et non « trajectoire solution »), a l'avantage d'être assez robuste en cas de petites perturbations.

## 2.4 Conclusion

Nous avons montré dans cet article qu'il est possible d'appliquer des outils de l'automatique à des problèmes de pêche. Certes, le contenu halieutique des exemples présentés ici n'est pas très développé ; ces applications sont en outre fort peu réalistes. Néanmoins, ce sont des « cas d'école », simples, de manière à illustrer, dans un contexte de pêche, l'utilisation de la théorie des systèmes et du contrôle.

La résolution de problèmes plus complexes et réalistes est possible, mais demande un travail et une interaction halieute-automaticien qui dépasse le cadre et le sujet de cet article.

## Annexe A

# Glossaire halieutique – automatique

La partie halieutique de ce glossaire est réalisée à partir de l'ouvrage de LAUREC–LE GUEN [17], la partie *automatique* à partir de D'ANDRÉA-NOVEL & COHEN DE LARA [7].

**Abondance :** L'abondance est l'effectif total du stock.

☞ *cf. stock*

**Approche d'état / approche fréquentielle :** Soient  $u$  le vecteur entrée,  $y$  le vecteur sortie et  $x$  l'état d'un système;  $t$  représente le temps. Un modèle du système issu de l'approche d'état a la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Cas général} & \text{Cas linéaire} \\ \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) & = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & = Cx(t). \end{array} \right.$$

En opposition avec la représentation d'état ou interne par les fonctions  $f$  et  $g$  ou par les matrices  $(A, B, C)$  dans le cas linéaire, il existe une approche externe ou entrée/sortie. Cette dernière caractérise un système linéaire par sa **fonction de transfert**  $G$ . Elle permet, dans un espace spécial dit fréquentiel, de déduire la sortie  $Y$  de l'entrée  $U$  :

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Le passage de la variable temporelle  $y(t)$  à la variable  $Y(s)$  se fait par la transformation de LAPLACE.

La représentation entrée/sortie est moins riche que l'approche d'état, car elle ne permet pas de voir les modes inobservables et non commandables du système. Le lien entre ces deux approches, toujours dans le cas linéaire, est donné par la relation suivante :

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B.$$

☞ *cf. système, transformation de Laplace*

**Automatique :** L'automatique peut être définie comme la science qui étudie et contrôle des systèmes dynamiques. L'approche système est une caractéristique de cette science qui va de la théorie à l'application.

**Biomasse :** La biomasse est la masse totale du stock.

☞ *cf. stock*

**Capturabilité :** La capturabilité est la probabilité d'être capturé par une unité d'effort, pour un poisson pris au hasard dans un ensemble donné. Elle est notée  $q$ . Le schéma suivant (figure A.1) décompose le coefficient de capturabilité en plusieurs termes, qu'il est souvent difficile de distinguer, d'où l'intérêt de la notion globale de capturabilité.

La **vulnérabilité** varie selon la taille ou l'âge : un jeune poisson est moins vulnérable à cause de sa petite taille, un vieux poisson à cause de sa rapidité. D'autres facteurs interviennent, tels la saison, le sexe, les courants, le rythme nyctéméral, la nature du fond, la profondeur...

Un animal est dit **accessible** s'il est présent sur les lieux de pêche. La phase accessible est limitée par l'âge de recrutement et l'âge éventuel de réforme; elle ne demeure pas nécessairement constante, à cause des migrations.

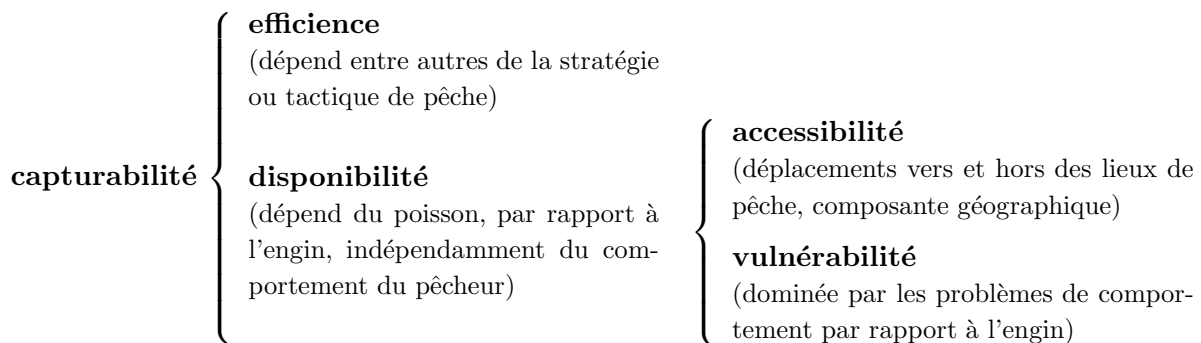


FIG. A.1 – La capturabilité; d'après [17].

**Capture :** La capture ou prise est définie comme le nombre ou la masse de poissons pêchés par une flottille déterminée pendant une période donnée.

**Classe d'âge :** La classe à laquelle appartient un poisson est définie par référence au nombre de « premier janvier » qu'a connu l'animal. La population comporte en général à tout moment des animaux d'âges différents. Dans le cas le plus favorable, la reproduction prend place chaque année sur une unique et courte période, ce qui permet de distinguer facilement des groupes d'animaux nés la même année. À chaque année est ainsi associée une classe d'âge (ou groupe d'âge).

Dans la réalité, les dates de naissance ne sont pas connues avec une grande précision, d'autant plus que la reproduction peut s'étaler sur plusieurs semaines, voire plusieurs mois. Il est également difficile de déterminer l'âge des vieux animaux. La dernière classe  $n$  comprend donc généralement tous les animaux d'âge supérieur ou égal à  $n$ .

☞ *cf. cohorte*

**Cohorte :** Une cohorte est constituée par l'ensemble des animaux nés une année donnée. Au fil des années, une cohorte passe d'une classe d'âge à l'autre.

☞ *cf. classe d'âge*

**Contrôle / commande :** Le contrôle consiste à élaborer une loi d'entrée sur le système, de manière à lui faire suivre un comportement donné. Si le contrôle dépend des autres variables du système, états ou sorties, on dit qu'il est en boucle fermée ou *feedback*; s'il ne dépend que du temps, on dit qu'il est en boucle ouverte.

**Commandabilité :** Un système est dit commandable (ou *contrôlable*) si, partant d'un état initial  $X_0$  quelconque, il est possible de trouver un contrôle  $U$  en temps fini permettant

d'amener cet état en tout point  $X_1$  de l'espace. C'est une notion liée, comme son nom l'indique, au fait que l'on maîtrise le système. Grâce au contrôle, on peut amener un système commandable où l'on veut.

☞ *cf. observabilité, réalisation minimale*

**Cpue :** La cpue, capture par unité d'effort (ou catch per unit of effort), traduit le rendement de la pêche. Elle est définie comme le rapport de la capture réalisée pendant un intervalle de temps donné et de l'effort déployé à cet effet.

☞ *cf. capture, effort de pêche*

**Effort de pêche :** Nous considérons qu'il s'agit de l'effort nominal, soit le *point de vue du pêcheur* sur l'exploitation. L'effort de pêche appliqué à un stock d'animaux aquatiques est une mesure de l'ensemble des moyens de capture mis en œuvre par les pêcheurs sur ce stock, pendant un intervalle de temps donné. L'effort est donc mesuré en longueur de ligne déployée, traits de chalut...

C'est l'intégration de l'intensité de pêche sur un intervalle de temps donné et il est relié à la mortalité par pêche. Avec les notations suivantes :

$P$ : prises/captures instantanées, taux de capture	(nombre <i>ou</i> masse / u. de temps)
$q$ : capturabilité	(unité d'effort <sup>-1</sup> )
$X$ : abondance <i>ou</i> biomasse du stock	(nombre <i>ou</i> masse)
$U$ : effort instantané, intensité de pêche	(unité d'effort / u. de temps)
$Y$ : capture sur $\Delta t$	(nombre <i>ou</i> masse)
$E$ : effort de pêche sur $\Delta t$	(unité d'effort)

les captures instantanées sont, par définition de l'intensité de pêche :

$$P(t) = q(t) U(t) X(t).$$

Si le stock et la capturabilité ne varient pas sur l'intervalle de temps  $\Delta t$ , alors en intégrant l'équation précédente, on obtient l'équation aux captures suivante :

$$Y = q E X.$$

Cette formulation est la plus classique car on considère généralement des grandeurs annuelles intégrées ( $\Delta t = 1$  an).

☞ *cf. mortalité par pêche*

REMARQUE : Dans ce document, nous conservons l'équation aux captures instantanées, mais en l'exprimant d'une manière similaire à la formulation classique intégrée, que souvent on notera par abus :  $Y = qEX$  au lieu de  $P = qUX$ .

**Halieutique :** L'halieutique est la science étudie la relation entre l'homme et les populations qu'il exploite par la pêche. Par des avis scientifiques sur les mesures de gestion à mettre en place et par des études destinées à mieux connaître et comprendre le fonctionnement du système pêche, elle cherche à améliorer la situation des pêches.

**Identifiabilité :** Soit un système donné, représenté par un modèle dont on connaît la forme. Un modèle est dit identifiable, si à partir de l'observation de la sortie  $Y$  et en supposant l'entrée  $E$  connue, on peut en déduire de manière unique la valeur de ses paramètres.

**Identification :** Soit un système muni d'une forme de modèle donnée. L'identification revient à déterminer les valeurs des paramètres associés à ce modèle.

**Métier :** Un métier correspond à une pratique de la pêche donnée. Il se caractérise en général par le choix d'un engin, d'une espèce cible et d'un lieu de pêche à un moment donné. Il peut y avoir sur un lieu de pêche plusieurs métiers définissant chacun une entrée en phase exploitable différente. Un âge au recrutement est associé à chacun.



**Mortalité par pêche :** La mortalité par pêche  $F$  est le *point de vue du poisson* sur l'exploitation. Elle est définie comme le rapport entre la capture réalisée par unité de temps et la valeur du stock à cet instant. Soit avec les notations précédentes :

$$F(t) = P(t)/X(t) = q(t)U(t),$$

ou si l'on considère que les variables sont constantes pendant un intervalle de temps donné :

$$F = C/X = qE.$$

☞ cf. effort de pêche

**Observabilité :** Un système est dit observable si, en supposant que l'on observe la sortie  $Y$  à tout instant, il est possible de trouver un contrôle  $U$  en temps fini qui permette de déterminer l'état à l'instant initial  $X_0$ . La sortie est la variable que l'on observe. La notion d'observabilité est liée au fait que connaissant cette sortie, à condition d'exciter un peu le système grâce au contrôle, on peut en déduire son état.

☞ cf. commandabilité, réalisation minimale

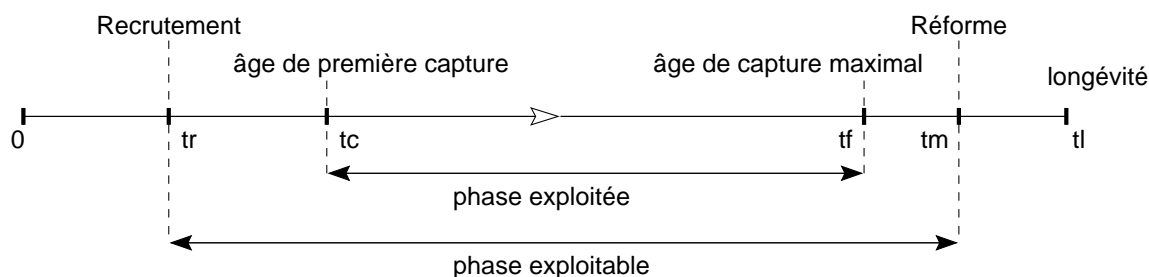


FIG. A.2 – Phases de la vie d'une cohorte ; d'après [17].

**Phase exploitable :** Un individu est dit exploitable s'il est susceptible d'être pêché. La phase exploitable est comprise entre le recrutement et la réforme.

☞ cf. recrutement, réforme, figure A.2

**Phase exploitée :** Selon les métiers présents sur les lieux de pêche, un animal exploitable n'est pas nécessairement exploité. Si l'animal est trop jeune ou trop petit pour risquer d'être capturé par l'un des métiers présents, il y a *échappement*. Sinon, dès lors qu'un animal n'est pas happé par le chalut, il y a *évitement* ; soit parce que grâce à la rapidité de sa nage, il évite le filet, soit parce qu'il est enfoui ou plaqué au sol. On distingue donc à l'intérieur de la phase exploitable, une phase dite exploitée.

☞ cf. figure A.2

**Population :** Une population en halieutique est l'ensemble des individus vivant dans un écosystème déterminé et possédant des caractères communs transmissibles par hérédité. Apparaît ainsi une double exigence d'*isolement* et d'*homogénéité*. Ce terme d'homogénéité peut avoir deux sens : uniformité des caractéristiques individuelles ou brassage. Le second, plus réaliste, est généralement retenu.

**Réalisation minimale :** Un système linéaire en représentation d'état est dit minimal si son état est de taille minimale dans la classe de tous les systèmes ayant la même fonction de transfert. On peut montrer qu'un tel système est une réalisation minimale si et seulement si il est commandable et observable.

☞ cf. commandabilité, observabilité

**Recrutement :** C'est le processus par lequel la fraction la plus jeune de la population s'intègre pour la première fois à l'ensemble des poissons accessibles à la pêche. Le recrutement ne s'accompagne pas toujours d'un phénomène biologique marqué comme une migration. On définit donc plus généralement l'*âge au recrutement* comme l'âge du plus petit animal exploitable pour un ensemble de métiers donné.

☞ cf. *phase exploitable*, figure A.2

**Réforme :** C'est le processus qui conduit les individus à quitter définitivement les lieux de pêche au-delà d'un certain âge. De même, l'*âge de réforme* correspond à l'âge au-delà duquel, quelle qu'en soit la cause, les animaux ne sont plus exploitables.

☞ cf. *phase exploitable*, figure A.2

**Relation stock-recrutement :** Une relation stock-recrutement est une fonction reliant le recrutement, i.e. l'entrée des jeunes individus dans le stock, au stock fécond, constitué de l'ensemble des femelles matures.

☞ cf. *recrutement*

**Stock :** Le stock est défini comme l'ensemble des animaux exploitables. Il est associé dans le cas idéal à une population biologique, mais dans la pratique il peut être plurispécifique. C'est donc plus une *unité de gestion*, liée à l'exploitation, qu'une unité biologique.

☞ cf. *population*

**Système :** Un système au sens automatique est isolé du monde extérieur et caractérisé à l'aide de variables qui traduisent son organisation : les entrées sont de manière générale maîtrisées ou connues et servent à contrôler le système ; les sorties sont observées et mesurées ; dans l'approche d'état, les variables internes (ou d'état) décrivent l'état du système ; dans l'approche fréquentielle un système linéaire est caractérisé par sa fonction de transfert, qui relie les sorties aux entrées.

On représente usuellement un système par un schéma-bloc, comme sur la figure A.3.

☞ cf. *approche d'état / approche fréquentielle*

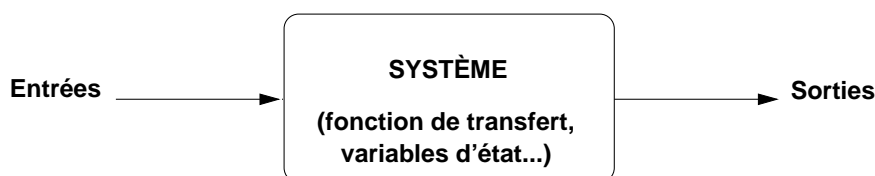


FIG. A.3 – Schéma-bloc décrivant un système automatique.

**Transformation de Laplace :** C'est une transformation qui associe à toute fonction  $f$  localement intégrable de la variable réelle  $t$ , nulle pour  $t < 0$  et vérifiant des conditions restrictives convenables, la fonction  $F$  de la variable complexe  $s$  définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

☞ cf. *approche d'état / approche fréquentielle (fonction de transfert)*

**VPA** : La VPA, de l'anglais **V**irtual **P**opulation **A**nalysis, ou analyse des cohortes en français, consiste à reconstituer les mortalités par pêche d'un stock structuré en  $A$  classes d'âge, sur une période de  $T$  années, à partir des données de capture par âge. Elle est fondée sur le modèle de RICKER en temps discret (cf. section 1.2.2) et elle permet d'estimer les effectifs de chaque classe d'âge sur la période considérée.

Pour cela, on suppose connues sur toute la période de temps :

- toutes les mortalités naturelles ;
- les mortalités par pêche terminales (i.e. pour la dernière année  $T$ ) de toutes les cohortes encore exploitées ;
- celles de la dernière classe  $A$  pour les cohortes n'étant plus exploitées l'année  $T$ .

Ces deux dernières hypothèses constituent la condition aux limites de la VPA, représentée sur la figure A.4, et à partir de laquelle on peut reconstituer les mortalités par pêche antérieures. En effet, d'après le modèle de RICKER, on a :

$$C(a, t) = N(a, t) \frac{F(a, t)}{F(a, t) + M(a)} \left( 1 - e^{-F(a, t) - M(a)} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$C(a - 1, t - 1) = N(a, t) \frac{F(a - 1, t - 1)}{F(a - 1, t - 1) + M(a - 1)} \left( e^{F(a - 1, t - 1) + M(a - 1)} - 1 \right) \quad (\text{A.2})$$

avec :

- $N(a, t)$  : effectif de la classe d'âge  $a$  l'année  $t$  (*inconnu*)
- $F(a, t)$  : mortalité par pêche de la classe  $a$  l'année  $t$  (*inconnue*)
- $M(a)$  : mortalité naturelle de la classe  $a$  (*connue*)
- $C(a, t)$  : capture réalisée sur la classe  $a$  l'année  $t$  (*connues*)

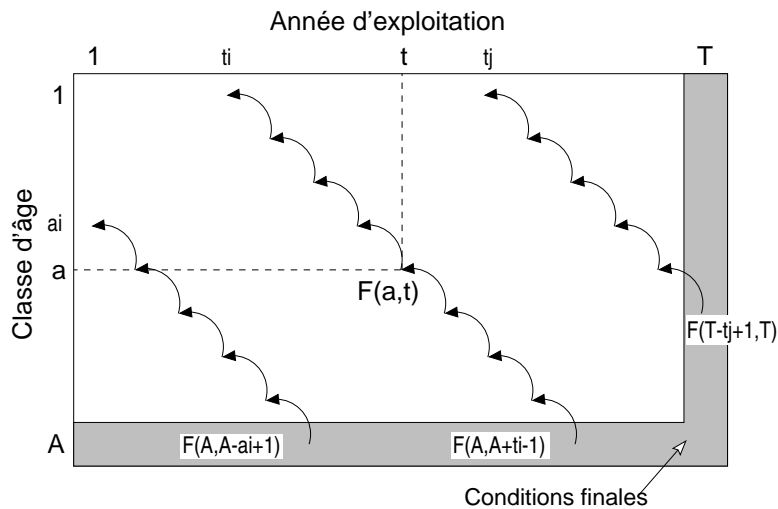


FIG. A.4 – Schéma de résolution de la VPA par cohorte ; d'après [23].

Connaissant la mortalité par pêche  $F(a, t)$ , l'équation (A.1) permet de déduire l'effectif  $N(a, t)$  de la cohorte cette année-là ; grâce à l'équation (A.2) on peut alors déterminer la mortalité par pêche  $F(a - 1, t)$  de cette même cohorte l'année précédente ; d'où  $N(a - 1, t - 1)$  par l'équation (A.1) et ainsi de suite en remontant dans le temps le long d'une cohorte.

Il existe d'autres VPA plus sophistiquées où l'on fait intervenir une « calibration » avec les efforts de pêche [23, 16], ce qui permet d'estimer les mortalités par pêche terminales.

# Références bibliographiques

- [1] AUBIN, J.-P. *Viability theory*. Systems and control : foundations and applications. Birkhäuser, Boston, 1991.
- [2] BEAMISH, R. J., AND MCFARLANE, G. A., Eds. *Effects of ocean variability on recruitment and an evaluation of parameters used in stock assessment models* (1989), no. 108 in Can. Spec. Publ. Fish. Aquat. Sci. Symposium held in Vancouver, Oct. 26–29, 1987.
- [3] BELTRAMI, E. *Mathematics for dynamic modeling*. Academic Press, San Diego (California), 1987.
- [4] BEVERTON, R. J. H., AND HOLT, S. J. *On the dynamics of exploited fish populations*. Chapman & Hall, London, 1993. First edition in 1957.
- [5] BEVERTON, R. J. H., AND HOLT, S. J. Section 6 : Recruitment and egg-production. In *On the dynamics of exploited fish populations*. Chapman & Hall, London, 1993, pp. 44–67. First edition in 1957.
- [6] CLARK, C. W. *Mathematical bioeconomics : the optimal management of renewable resources*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [7] D'ANDRÉA NOVEL, B., AND COHEN DE LARA, M. *Commande linéaire des systèmes dynamiques*. Masson, Paris, 1994.
- [8] DERISO, R. B. Harvesting strategies and parameter estimation for an age-structured model. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 37 (1980), 268–282.
- [9] FAURRE, P., AND ROBIN, M. *Éléments d'automatique*. Dunod, 1984.
- [10] FISHER, M. E. An age-structured fish population model with coupled size and population density. *Mathematical Biosciences* 86 (1987), 15–34.
- [11] GORDON, H. S. The economic theory of a common-property resource : the fishery. *J. Pol. Econ.* 82 (Apr. 1954), 124–142.
- [12] GRAHAM, M. Modern theory of exploiting a fishery, and application to North Sea trawling. *J. Cons. int. Explor. Mer* 37, 3 (1977).
- [13] HILBORN, R., AND WALTERS, C. J. *Quantitative fisheries stock assessment : choice, dynamics & uncertainty*. Chapman & Hall, New York, 1992.
- [14] JAKOBSSON, J. Exploitation of the Icelandic spring- and summer-spawning herring in relation to fisheries management, 1947–1977. *Rapp. P-v. Réun. Cons. Perm. Int. Explor. Mer.* 177 (1980), 23–42.
- [15] KWAKERNAAK, H., AND SIVAN, R. *Linear control systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [16] LAUREC, A. Étalonnage de l'analyse des cohortes en halieutique. In *Biométrie et Environnement*, J. D. Lebreton and B. Asselain, Eds. Masson, Paris, 1993, pp. 205–239.
- [17] LAUREC, A., AND LE GUEN, J.-C. Dynamique des populations marines exploitées – Tome I : concepts et modèles. Rapports scientifiques et techniques 45, CNEXO (cf. Éditions de l'IFREMER), 1981.

- [18] MURRAY, J. D. *Mathematical biology*, vol. 19 of *Biomathematics*. Springer, Berlin, 1989.
- [19] PAULIK, G. J. Studies of the possible form of the stock-recruitment curve. *Rapp. P.-v. Réun. Cons. int. Explor. Mer* 164 (1973), 303–315.
- [20] PAVÉ, A. *Modélisation en biologie et en écologie*. Aléas, Lyon, 1994.
- [21] PEARL, R. *The biology of population growth*. Alfred A. Knopf, New York, 1925.
- [22] PELLA, J. J., AND TOMLINSON, P. K. A generalized stock production model. *Bull. IATTC* 13, 3 (1969), 419–496.
- [23] PELLETIER, D. *Les sources d'incertitude en gestion des pêcheries : évaluation et propagation dans les modèles*. Thèse de Doctorat, Institut National Agronomique Paris-Grignon, octobre 1991.
- [24] RICE, J. C. Quantitative methods in recruitment. In *Report from the National Workshop on Recruitment, held in St. John's, Newfoundland, Feb. 1988* (1988), M. Sinclair, J. T. Anderson, M. Chadwick, J. Gagné, W. D. McKone, J. C. Rice, and D. Ware, Eds., no. 1626 in Canadian Technical Report of Fisheries and Aquatic Sciences, pp. 148–164.
- [25] RICKER, W. E. A method of estimating minimum size limits for obtaining maximum yield. *Copéia* 2 (1945), 84–94.
- [26] RICKER, W. E. Stock and recruitment. *J. Fish. Res. Board Can.* 11, 5 (1954), 559–623.
- [27] RICKER, W. E. Handbook of computations for biological statistics of fish populations. Bulletin 119, Fisheries Research Board of Canada, 1958.
- [28] RICKER, W. E. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. Bulletin 191, Fisheries Research Board of Canada, 1975. See [29] for French translation.
- [29] RICKER, W. E. Calcul et interprétation des statistiques biologiques des populations de poissons. Bulletin 191F, Ministère des Pêches et des Océans du Canada, 1980. French translation of [28].
- [30] ROTHSCHILD, B. J. *Dynamics of marine fish populations*. Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1986.
- [31] SCHAEFER, M. B. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Bulletin of Mathematical Biology* 53, 1/2 (1991), 253–279. Reprinted from the *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission* 1, 2 (1954), 27–56.
- [32] SCHNUTE, J. A general theory for analysis for catch and effort data. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 42 (1985), 414–429.
- [33] SMITH, V. L. Economics of production from natural resources. *Am. Econ. Rev.* 58 (1968), 409–431.
- [34] TOUZEAU, S. *Modèles de contrôle en gestion des pêches*. Thèse de Doctorat en Science, Université de Nice – Sophia Antipolis, France, mars 1997. Spécialité : Sciences de l'Ingénieur.
- [35] TOUZEAU, S., AND GOUZÉ, J.-L. Une modélisation du recrutement. In *Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement : Journées du Programme Environnement, Vie et Sociétés du CNRS (textes sélectionnés)* (1997), F. Blasco, Ed., Elsevier, pp. 281–292.
- [36] TOUZEAU, S., AND GOUZÉ, J.-L. Exemples d'application de l'automatique à l'halieutique. In *Dynamique des populations marines* (1998), vol. 35 of *Cahiers Options Méditerranéennes*, CIHEAM, Zaragoza, España, pp. 119–133.
- [37] TOUZEAU, S., AND GOUZÉ, J.-L. On the stock-recruitment relationships in fish population models. *Environ. Model. Assess.* 3, 1-2 (Mar. 1998), 87–93.

- 
- [38] TOUZEAU, S., AND GOUZÉ, J.-L. Regulation of a fishery : from a local optimal control problem to an “invariant domain” approach. *Natur. Resource Modeling* 14, 2 (Summer 2001), 311–333.
- [39] TOUZEAU, S., AND GOUZÉ, J.-L. Régulation d’une pêcherie : d’un problème local de contrôle optimal à une approche par domaine invariant. In *Colloque Automatique et Agronomie* (Montpellier, France, janvier 2003), CNRS, INRA, Agro-Montpellier, pp. 71–84. Article.
- [40] VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et Phys.* 10 (1838), 113–121.
- [41] VON BERTALANFFY, L. A quantitative theory of organic growth. *Human Biology* 10, 2 (1938), 181–213.
- [42] WOOSTER, W. S., AND BAILEY, K. M. Recruitment of marine fisheries revisited. In *Effects of ocean variability on recruitment and an evaluation of parameters used in stock assessment models* (1989), R. J. Beamish and G. A. McFarlane, Eds., no. 108 in Can. Spec. Publ. Fish. Aquat. Sci., pp. 153–159.