Commentaires sur les formules d'évaluation d'options

Jean-Marc Boussard

Commentaires sur les formules d'évaluation d'options

Jean-Marc Boussard

27 juin 1999

Les formules de Black et Scholes, et les autres formules pour l'évaluation des options sont au fond très simples, en tout cas, reposent sur des idées très simples.

1°) La valeur « normale » d'un titre est son espérance de gain : Imaginons que le quintal de blé dans un ans puisse valoir 100 F avec la probabilité 1/2 et 50 F avec la probabilité ½. Il est clair que l 'espérance de ce prix est 75 F. Si le taux d'intérêt est 10%, la valeur de ce stock aujourd'hui « devrait » donc être 75 -7,5 = 67,5 ; Alternativement, si mon stock aujourd'hui vaut 67,5 F, et si je sais que dans un an, il peut valoir 100 ou 50 F, le taux d'intérêt étant 10%, j'en déduis que les probabilités de chacun des deux événements sont égales, et donc de ½.

Cette hypothèse est déjà discutable, car il est bien évident que n'importe qui un peu « risk averse » n'achètera pas le pari précédent pour 75 F au taux d'intérêt 0, ni pour 67,5 F avec un taux de 10%. En fait, c'est la plus discutable de toutes, car elle est basée sur la loi des grands nombre : s'il existe sur la place un assureur qui a une énorme quantité de contrats indépendants de ce type, alors en effet, il peut acheter celui là sans risque pour son espérance. Mais un tel assureur existe il ?

2°) Dans ces conditions, une option augmente la valeur du stock : Si j'ai une option de vente de ce quintal pour 70 F, en vérité, la valeur espérée dans un an de mon stock de 1 Qx est maintenant de 70(1/2+ 100(1/2 = 85. La valeur présente est de 85-8,5 = 76,5, et la valeur de l'option est donc 76,5 - 67,5 = 9 F. C'est une estimation de la valeur du « cadeau » que fait la coopérative qui donne une avance de 70 F dont chacun sait qu'elle ne peut pas être remise en cause.

Ce calcul n'est pas complètement rigoureux, parce qu'il néglige la valeur de l'intérêt sur les 70 F, et surtout, parce qu'il néglige le fait que le pas de temps n'est pas l'année, mais le jour. Mais il correspond complètement à la philosophie du calcul de Black et Scholes. Ceux ci, évidemment, essaient de se débarrasser des probabilités des deux événements « prix = 100 » et « prix=50 ». Mais pour cela il font un raisonnement à l'envers, basé sur la rentabilité moyenne du placement, et cela revient comme ci dessus à déterminer implicitement ces probabilités. Il est donc faux de dire qu'on se passe de probabilités. En fait, on raisonne toujours en valeur moyenne.

Malgré ce raisonnement en valeur moyenne, une augmentation de la dispersion du résultat augmente la valeur de l'option. Si au lieu de 100 et 50, je refais les calculs avec des prix possibles de 125 et 25, mon espérance de vente avec option vaut 125(1/2 + 70(1/2 = 97,5. On retire

10%, ce qui fait 87,75, et permet d'évaluer l'option à 87,5- 67,5 = 20, au lieu de 9 tout à l'heure. Cela tient au fait que le prix à terme change l'espérance de résultat. C'est ce qui explique le rôle de la variance dans les formules basées sur la loi lognormale : Avec la possibilité d'exercer l'option, la distribution est tronquée. Mais cela n'a rien à voir avec une aversion pour le risque.

3°) Le reste des cheminements intellectuels qui aboutissent aux formules de B et S est purement mécanique, et même si c'est admirable sur la plan mathématiques, ça n'a qu'une importance relative. Le principe est d'appliquer le principe ci dessus à un temps infiniment petit (un délai infiniment court entre le choix de l'option, et son dénouement), puis de passer à la limite. Mais cela ne change pas du tout la philosophie de la chose. On comprend mieux avec l'exemple ci dessus (en fait inspiré de Cox, Ross et Rubinstein, qui me semblent les plus clairs sur la question) le rôle de la dispersion, et celui du taux d'intérêt de référence. On comprend pourquoi un « assureur », qui met ses risques en pool, peut avoir toujours intérêt à vendre des options « surévaluées », et à acheter celles qui sont « sous évaluées ». Il est important de noter que cette notion de sur et de sous évaluation dépend de la dispersion comme de la moyenne des contrats. Elle suppose que cette dispersion est constante, ou, du moins varie en un certain sens « plus lentement » (cette notion de « plus lentement mériterait, je pense de nombreux développements mathématiques que je suis incapable de conduire, un peu comme la notion de « variation infinitésimale ») que les prix. Je ne suis pas du tout sûr que cette hypothèse soit vérifiée.

4°) Tout ceci est complètement indépendant de l'aversion pour le risque. En réalité, il y a des raisons sérieuses pour acheter une option plus cher que la valeur de B et S si l'on a de l'aversion pour le risque (de même qu'on a intérêt à prendre un contrat d'assurance à espérance de gain négative). C'est cela le profit des assureurs. C'est pourquoi quand on dit que les coopératives font un « cadeau » aux sociétaires en leur offrant une option corespondant aux avances, en fait, on sous estime considérablement ce cadeau en l'évaluant par la méthode de B et S.
2°) Dans ces conditions, une option augmente la valeur du stock : Si j'ai une option de vente de ce quintal pour 70 F, en vérité, la valeur espérée dans un an de mon stock de 1 Qx est maintenant de 70(1/2+ 100(1/2 = 85. La valeur présente est de 85-8,5 = 76,5, et la valeur de l'option est donc 76,5 - 67,5 = 9 F. C'est une estimation de la valeur du « cadeau » que fait la coopérative qui donne une avance de 70 F dont chacun sait qu'elle ne peut pas être remise en cause.

Ce calcul n'est pas complètement rigoureux, parce qu'il néglige la valeur de l'intérêt sur les 70 F, et surtout, parce qu'il néglige le fait que le pas de temps n'est pas l'année, mais le jour. Mais il correspond complètement à la philosophie du calcul de Black et Scholes. Ceux ci, évidemment, essaient de se débarrasser des probabilités des deux événements « prix = 100 » et « prix=50 ». Mais pour cela il font un raisonnement à l'envers, basé sur la rentabilité moyenne du placement, et cela revient comme ci dessus à déterminer implicitement ces probabilités.

Il est donc faux de dire qu'on se passe de probabilités. En fait, on raisonne toujours en valeur moyenne.

Malgré ce raisonnement en valeur moyenne, une augmentation de la dispersion du résultat augmente la valeur de l'option. Si au lieu de 100 et 50, je refais les calculs avec des prix possibles de 125 et 25, mon espérance de vente avec option vaut 125(1/2 + 70(1/2 = 97,5. On retire 10%, ce qui fait 87,75, et permet d'évaluer l'option à 87,5- 67,5 = 20, au lieu de 9 tout à l'heure. Cela tient au fait que le prix à terme change l'espérance de résultat. C'est ce qui explique le rôle de la variance dans les formules basées sur la loi lognormale : Avec la possibilité d'exercer l'option, la distribution est tronquée. Mais cela n'a rien à voir avec une aversion pour le risque.

3°) Le reste des cheminements intellectuels qui aboutissent aux formules de B et S est purement mécanique, et même si c'est admirable sur la plan mathématiques, ça n'a qu'une importance relative. Le principe est d'appliquer le principe ci dessus à un temps infiniment petit (un délai infiniment court entre le choix de l'option, et son dénouement), puis de passer à la limite. Mais cela ne change pas du tout la philosophie de la chose. On comprend mieux avec l'exemple ci dessus (en fait inspiré de Cox, Ross et Rubinstein, qui me semblent les plus clairs sur la question) le rôle de la dispersion, et celui du taux d'intérêt de référence. On comprend pourquoi un « assureur », qui met ses risques en pool, peut avoir toujours intérêt à vendre des options « surévaluées », et à acheter celles qui sont « sous évaluées ». Il est important de noter que cette notion de sur et de sous évaluation dépend de la dispersion comme de la moyenne des contrats. Elle suppose que cette dispersion est constante, ou, du moins varie en un certain sens « plus lentement » (cette notion de « plus lentement mériterait, je pense de nombreux développements mathématiques que je suis incapable de conduire, un peu comme la notion de « variation infinitésimale ») que les prix. Je ne suis pas du tout sûr que cette hypothèse soit vérifiée.

4°) Tout ceci est complètement indépendant de l'aversion pour le risque. En réalité, il y a des raisons sérieuses pour acheter une option plus cher que la valeur de B et S si l'on a de l'aversion pour le risque (de même qu'on a intérêt à prendre un contrat d'assurance à espérance de gain négative). C'est cela le profit des assureurs. C'est pourquoi quand on dit que les coopératives font un « cadeau » aux sociétaires en leur offrant une option corespondant aux avances, en fait, on sous estime considérablement ce cadeau en l'évaluant par la méthode de B et S.

'

De ce point de vue, il faut noter une ambiguïté du mode de raisonnement ci dessus. Les formules de B&S donnent la valeur d'une option pour un prix d'exercice donné. Mais comme il y a une infinité de prix d'exercice possibles, pourquoi choisir l'un plutôt que l'autre ? Pourquoi une option à 70 F, dans l'exemple ci dessus, plutôt que 80, ou n'importe quoi entre 100 et 50 ? Quel prix choisiront un agriculteur et un meunier pour une vente à terme ?

Avec B&S, on ne peut répondre à la question. Ou plutôt, si fermier et meunier sont neutres au risque, n'importe quel contrat pour n'importe quel prix à terme se ramène à l'échange de deux options, l'une à la baisse pour le fermier, l'autre à la hausse pour le meunier, et il suffit que celui qui détient l'option qui vaut le plus cher paye la moitié de la différence à celui pour laquelle elle est meilleur marché pour que tout le monde soit content. En fait, « l' option » à 75 F, la moyenne du prix, est dans ce cas le meilleur contrat, celui qui évite des paiements supplémentaires.

Mais naturellement, cela ne reflète que la partie émergée de l'iceberg. En réalité, le choix de la valeur d'option n'est pas indifférent, et dépend de l'aversion pour le risque des contractants. De fait, le fermier est disposé à s'assurer contre la baisse, et pour cela il est prêt à payer le droit d'avoir un prix de réserve vers le bas plus cher que la valeur de cette option. Il en est de même pour le meunier, pour un prix de réserve vers le haut. Il existe donc, en dehors de la moyenne, une plage de valeurs possibles pour un prix à terme qui convient à la fois au meunier et au fermier. Dans cette plage, la valeur subjective des options pour l'un comme pour l'autre est différente de la valeur espérée de B&S, et il doit exister (ca doit être facile à montrer) un prix d'option qui équilibre les valeurs des deux : C'est le « prix de marché à terme » - évidement différent de la moyenne dès lors que les aversions pour le risque et les capacités d'endettement (Il faut bien voir que les « achats d'option » exigent en pratique d'être financées) ne sont pas les mêmes pour l'un et pour l'autre.

C'est donc bien l'existence d'une aversion pour le risque qui génère l'utilité des marchés à terme. Le paradoxe est de calculer les valeurs d'option comme si elle n'existait pas. Cela tient au fait que B&S se posent en « gros assureurs », et cela, dans l'hypothèse que les marchés sont lognormaux...ce qui reste à démontrer.

Voilà l'état de mes réflexions. C'est plus long que je ne pensais, et me voilà avec l'esquisse d'un papier pour Economie Rurale. Je vais y réfléchir