Exploitation d'une ressource non renouvelable, possibilite de stockage et regle d'Hotelling

Michel Moreaux, Jean-Pierre Amigues, Jean-Philippe Terreaux

Exploitation d'une ressource non renouvelable, possibilité de stockage et règle d'Hotelling

Monsieur Michel Moreaux, Monsieur Jean-Pierre Amigues, Monsieur Jean-Philippe Terreaux

Résumé
Exploitation d'une ressource non renouvelable,possibilité de stockage et règle d'Hotelling

Rares sont les modèles de l'entreprise minière qui tiennent compte explicitement des possibilités de stockage de la firme. Nous montrons qu'un monopole peut être conduit à stocker tout ou partie de sa production, en vue d'exploiter au mieux un accroissement anticipé de sa demande. Nous montrons, par ailleurs, que même pour une variation instantanée de la demande, la politique optimale du monopole consiste à lisser son plan de production, stocker en période de demande faible pour déstocker en période de demande élevée. La comparaison des politiques optimales d'exploitation, avec et sans possibilités de stockage, permet de conclure qu'un monopole disposant de capacités de stockage accroît la valeur marginale de la ressource qu'il détient, ainsi que la valeur de son plan optimal d'extraction et de vente. On montre que la règle d'Hotelling reste toujours valable.

Abstract
Exhaustible resource exploitation, inventory capacity and the Hotelling's rule

We consider the case of an exhaustible resource monopoly facing an instantaneous upward jump of his demand schedule. Allowing the firm for having inventory capacity, we show that a monopoly facing increasing marginal costs of extraction, may be interested in storing part or all of his production in low demand period, in order to optimize his selling policy. Even if the shift in demand is instanteneous, the optimal extraction policy for the monopolist must be continuous. We study extensively the optimal and selling policy in that context. We then compare optimal monopoly exploitation with an without inventory capacity. Being able to store the resource after extraction, the monopoly enjoys an higher present value of his initial resource stock, and higher profits from his optimal policy. Storage capacity tends also to shorten the extraction period length. Finally, we show that the so-called Hotelling's rule applies in this case.

Exploitation d'une ressource non renouvelable, possibilité de stockage et règle d'Hotelling

Jean-Pierre Amigues
Michel Moreaux
Jean-Philippe Terreaux

Rares sont les modèles de l'entreprise minière qui tiennent compte explicitement des possibilités de stockage de la firme. Nous montrons qu'un monopole peut être conduit à stocker tout ou partie de sa production, en vue d'exploiter au mieux un accroissement anticipé de sa demande. Nous montrons, par ailleurs, que même pour une variation instantanée de la demande, la politique optimale du monopole consiste à lisser son plan de production, stocker en période de demande faible pour déstocker en période de demande élevée. La comparaison des politiques optimales d'exploitation, avec et sans possibilités de stockage, permet de conclure qu'un monopole disposant de capacités de stockage accroît la valeur marginale de la ressource qu'il détient, ainsi que la valeur de son plan optimal d'extraction et de vente. On montre que la règle d'Hotelling reste toujours valable.

1. INTRODUCTION

La règle d'Hotelling[1] résume la spécificité de la théorie de l'entreprise minière qui exploite une ressource non renouvelable. Dans le cas le plus simple où coûts et recettes ne dépendent respectivement que de l'extraction et des ventes instantanées, le profit marginal instantané doit croître au taux de l'intérêt. Cette règle se généralise au cas où les coûts dépendent aussi de l'extraction cumulée et où les recettes sont fonction des ventes passées. Son expression est alors plus complexe. L'objet de cet article est de montrer que cette règle conserve sa remarquable simplicité lorsqu'on tient compte des possibilités de stockage : le profit marginal instantané, compris comme la

1. Hotelling [1931]. Pour un exposé, cf. par exemple Dasgupta et Heal [1979] ou Hartwick et Olewiler [1986], et pour des développements plus complets, Crampes et Moreaux [1989] et Moreaux [1988].

Revue économique — N° 2, mars 1990, p. 335-368.

différence entre la recette marginale et le coût marginal d'extraction, doit croître au taux de l'intérêt même s'il n'y a pas, à chaque instant, égalité des quantités vendues et des quantités extraites, ce qui est le cas si l'entreprise tire effectivement parti de ses possibilités de stockage et de déstockage.

Une entreprise d'exploitation d'une ressource naturelle, que celle-ci soit renouvelable (pêche, par exemple) ou non renouvelable (mine, par exemple) a toujours la possibilité de stocker sans coût la ressource qu'elle exploite en la laissant dans son milieu naturel. On pourrait donc penser qu'elle ne stockera jamais si le stockage de son produit est coûteux, que ce coût ait pour origine soit le stokage proprement dit, soit l'immobilisation des capitaux avancés pour prélever le bien dans son milieu.

Mais pouvoir stocker sans coût un facteur de production n'implique pas que l'on n'ait jamais intérêt à stocker le produit fini. D'une certaine façon, pour toute firme, tout facteur de production est stockable sans coût si son prix est stationnaire : il suffit de ne l'acheter qu'au moment de l'utiliser. On n'en a évidemment jamais conclu qu'une firme n'a pas intérêt à stocker sa production. De ce point de vue, une firme qui exploite une ressource naturelle se comporte comme toute autre firme dès lors que l'on distingue, ce qu'il faut faire, la ressource dans son milieu naturel qui est facteur pour la firme, de la ressource prélevée de son milieu qui est un produit pour la firme, son activité consistant précisément à effectuer ce prélèvement. Dans cet article, nous examinons comment la prise en compte des possibilités de stockage du produit modifie la théorie habituelle de la firme dont l'activité est l'exploitation d'une ressource naturelle à un seul usage[1].

Les conditions sous lesquelles il est optimal de stocker ressortissent à deux logiques différentes. La première est d'amortir les fluctuations de la demande et/ou des coûts. Une entreprise dont le coût marginal d'extraction est croissant, préférera, pour mieux tirer profit d'une hausse de sa demande, stocker pendant que celle-ci est faible, plutôt qu'égaliser à chaque instant sa recette marginale à son coût marginal d'extraction instantané augmenté de la valeur marginale instantanée de la ressource en terre. Nombreux sont les marchés de produits des entreprises minières qui présentent cette caractéristique. Un exemple classique est celui des combustibles de chauffage. Le cas symétrique d'une demande relativement étale et de coûts d'extraction fluctuants existe également : par exemple, certaines mines de montagne supporteraient des coûts prohibitifs si elles devaient maintenir leur activité en hiver[2].

Il n'est pas nécessaire que la demande et/ou les coûts fluctuent pour que stocker présente un intérêt. Supposons une fonction de demande et une fonction de coût toutes deux stationnaires. Posons de plus que les coûts marginaux et les moyens sont fortement décroissants, tout au moins jusqu'à un certain niveau d'extraction instantané, que de plus le coût total est nul ou suffisamment faible lorsque la firme ne produit pas, et enfin que la courbe de

1. Nous excluons le cas d'un produit minier ayant plusieurs usages dont les différentes demandes ne varieraient pas de façon synchrone.

2. Citons, par exemple, le cas de la mine de talc de Luzenac, la plus importante d'Europe et l'une des plus importantes du monde, située dans les Pyrénées ariégeoises.

recette moyenne instantanée est toujours au-dessous de la courbe de coûts moyens instantanés. Si la firme ne pouvait pas stocker, elle ne produirait pas puisqu'elle ne parviendrait jamais à couvrir son coût instantané par sa recette instantanée. Si le coût de stockage et le taux d'intérêt sont suffisamment faibles, l'accès au marché s'ouvre, la politique optimale consistant à extraire, vendre et stocker pendant certaines périodes, interrompre l'extraction et approvisionner le marché à partir des stocks au cours des périodes suivantes, et ainsi de suite.

Rares sont les modèles de l'entreprise minière qui tiennent compte des possibilités de stockage[1]. Ces modèles sont nécessairement assez complexes puisqu'ils impliquent que l'on caractérise l'évolution de deux variables d'état, le montant de la réserve en terre de la ressource et le montant de la ressource extraite. Le modèle que nous présentons ici ne doit être reçu que comme une introduction à la question. Le modèle avec lequel nous travaillerons est présenté à la section 2. On caractérise à la section 3 le sentier d'extraction en l'absence de possibilité de stockage. La méthode de construction des sentiers optimaux est présentée à la section 4, les sentiers optimaux d'extraction et de vente, et, donc par solde l'évolution de la réserve en terre et du stock de produit extrait, sont caractérisés aux sections 5, 6 et 7. La section 8 a pour objet la comparaison des politiques optimales avec et sans stockage et la mise en évidence de la forme particulièrement simple de la règle d'Hotelling même quand il y a stockage.

2. LE MODÈLE

Pour éviter toute confusion, conservons d'appeler « réserves » le volume en terre de la ressource et « stock » la quantité de minerai extraite et non encore vendue.

Soit un monopole disposant de réserves $\overline{R}$ qu'il peut extraire à un coût instantané stationnaire égal à :

$$C(q(t)) = c\, q(t)^2/2 \qquad (2.1)$$

où $q(t)$ est le niveau de l'extraction à l'instant t. On notera $C_m(q(t)) = cq(t)$ le coût marginal. Cette entreprise peut stocker le minerai extrait à un coût instantané proportionnel au stock détenu. Soit $k\,X(t)$ ce coût, où $X(t)$ est le stock à l'instant t. L'entreprise a accès à un marché des capitaux parfait sur lequel le taux d'intérêt instantané est constant et égal à r. La fonction inverse de demande est posée linéaire :

$$p(t) = \max\,\{a(t) - b\,y(t), 0\} \qquad (2.2)$$

1. Voir cependant l'étude assez peu connue de Lee et Orr [1975] (nous remercions G. Gaudet de nous l'avoir signalée) et celle de Pyndick [1982]. Il existe, par ailleurs, une littérature assez abondante sur la question des réservoirs naturels de gaz et de pétrole que la plupart des pays gros consommateurs d'énergie ont aménagés après la crise de 1973-1974 pour éviter d'être soumis à la menace d'un embargo. L'intégration de cette littérature à la théorie économique est à peine commencée, malgré les travaux pionniers de Kuller et Cummings [1974]. Pour une mise au point récente, voir Nystad [1988].

où $y(t)$ est la quantité absorbée par le marché à l'instant t. Elle est d'abord stationnaire puis passe, à l'instant θ, à un niveau supérieur auquel elle reste indéfiniment par la suite :

$$a(t) = \begin{cases} \underline{a} & \text{si } t < \theta \\ \bar{a} & \text{si } t \geq \theta \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\bar{a} > \underline{a} \geq 0$. On conviendra d'appeler période I l'intervalle $[0,\theta)$ et période II, l'invervalle $[\theta,\infty)$.

Examinons d'abord ce que serait le sentier d'extraction et donc de vente, si l'entreprise ne pouvait pas stocker.

3. LE SENTIER D'EXTRACTION EN L'ABSENCE DE POSSIBILITÉ DE STOCKAGE

En l'absence de possibilité de stockage q(t)=y(t), la politique du monopole est solution de :

$$\underset{\{q(t)\}}{\text{Max}} \int_0^\infty e^{-rt} \{(a(t) - b\, q(t))\, q(t) - c\, q(t)^2/2\}\, dt \tag{3.1}$$

$$\text{s/c} \quad \dot{\text{R}}(t) = -q(t), \quad \text{R}(0) = \bar{\text{R}}, \quad \text{R}(t) \geq 0 \tag{3.1.a}$$

Notons $\lambda^*(t)$ la valeur du multiplicateur, associé à la variable d'état $\text{R}(t)$, à l'optimum du problème. Puisque cette dernière n'apparaît pas dans le hamiltonien : $\lambda^*(t) = \lambda^*$. La politique optimale, obtenue comme solution de la condition de maximisation à chaque instant du hamiltonien par rapport à la variable de commande $q(t)$, est de la forme :

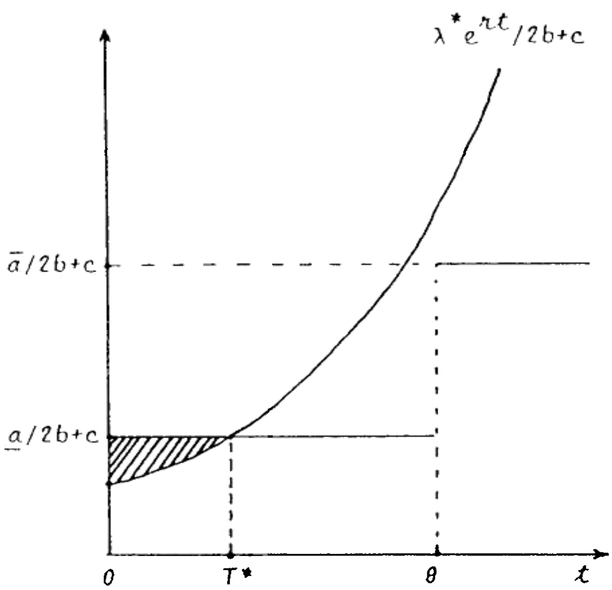
$$q^*(t) = \max \{(a(t) - \lambda^* e^{rt})/(2b + c),\, 0\} \tag{3.2}$$

Étant donné les conditions de demande et de coût, la totalité de la ressource doit être extraite. La valeur λ^* est déterminée par la condition d'épuisement des réserves, c'est-à-dire comme solution de l'équation :

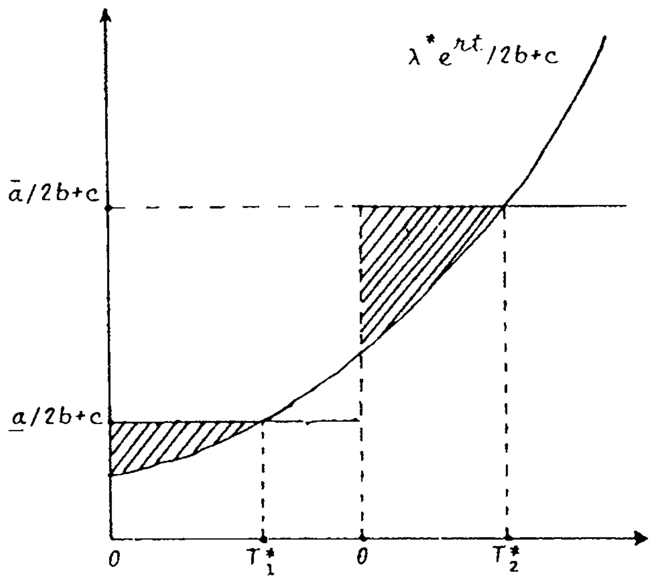
$$\int_0^\infty \max \{(a(t) - \lambda^* e^{rt})/(2b + c),\, 0\}\, dt = \bar{\text{R}} \tag{3.3}$$

Les structures possibles du sentier d'extraction sont illustrées aux graphiques 1a à 1c ci-dessous :

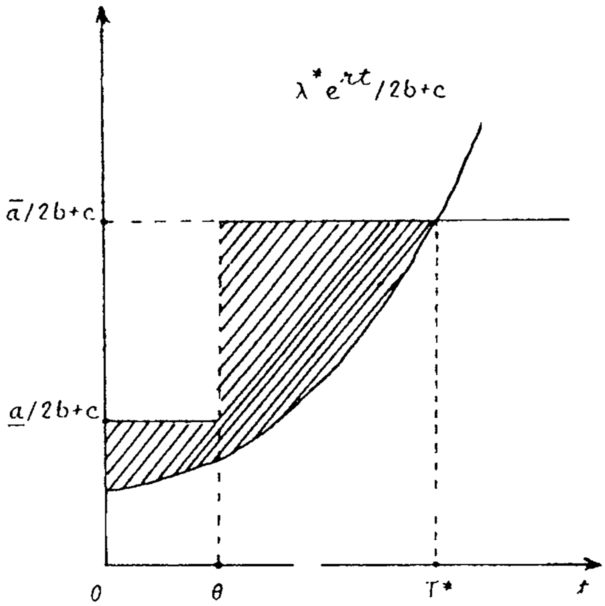
Graphique 1a



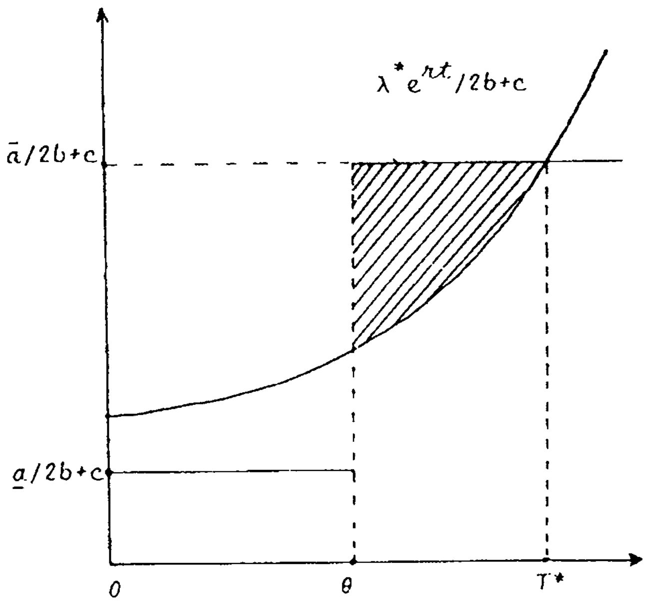
Graphique 1b



Graphique 1c



Graphique 1d



N.B. : La surface hachurée est égale à $\bar{R}$.

4. LES SENTIERS D'EXTRACTION ET DE VENTE EN CAS DE POSSIBILITÉ DE STOCKAGE

En l'absence de possibilité de stockage, l'extraction et la vente ont lieu soit sur un intervalle $[0, T^*)$, $T^* \leq \theta$, soit sur deux intervalles $[0, T^*_1)$ et $[\theta, T^*_2)$, soit sur un intervalle $[0, T^*)$, $T^* > \theta$, soit enfin sur un intervalle $[\theta, T^*)$. Puisque le coût marginal instantané d'extraction est croissant, le stockage permet éventuellement de diminuer les frais de mise sur marché si le plan d'extraction initial est localement croissant. Dans le premier cas recensé, l'extraction est constamment décroissante sur $[0, T^*)$, $T^* < \theta$, et le fait de pouvoir stocker n'offre aucune possibilité nouvelle d'arbitrage qui réduirait les coûts. Dans tous les autres cas, l'extraction croît de façon discontinue en $t = \theta$, impliquant une brusque hausse du coût marginal[1]. Le stockage ouvre alors la porte à de nouveaux arbitrages. La réduction de coût de mise sur marché qu'il permet au-delà de θ, modifie le plan d'extraction initial qui n'est plus optimal. Elle modifie aussi le plan de ventes puisque les profits nets au-delà de θ sont maintenant plus élevés. On en déduit que la valeur λ^* de la ressource doit augmenter. Cela induit une substitution intertemporelle des ventes : les ventes vont tendre à diminuer sur $[0, \theta)$, et à augmenter au-delà de θ, mais la période d'activité du marché ($\equiv \sup \{ t \mid y(t) > 0 \}$) prendra fin plus tôt (cf. section 8 pour une illustration).

Pour construire les plans d'extraction et de vente optimaux, on procédera comme suit. On déterminera d'abord la politique optimale d'une firme qui disposerait à la date θ d'un stock de minerai extrait égal à X_{II} et de réserves R_{II}. Notons $W_{II}^*(X_{II}, R_{II})$ la valeur à la date 0 du plan d'extraction et de déstockage optimal. On arrêtera ensuite la politique optimale d'une firme qui, au cours de la période $[0, \theta)$, disposerait de réserves R_I destinées soit à la vente, soit à la constitution d'un stock $X_I \leq R_I$. Notons $W_I^*(X_I, R_I)$ la valeur à la date 0 de la politique optimale de vente et de constitution du stock X_I au cours de la période I. Le plan global d'extraction et de vente optimales est constitué des politiques optimales des périodes I et II correspondant aux réserves R_I^* et R_{II}^* et au stock $X^* = X^*_I = X^*_{II}$ qui maximisent $W_I^*(X, R_I) + WI_I^*(X, R_{II})$ sous les contraintes $\bar{R} - R_I - R_{II} \geq 0$, $R_I - X \geq 0$ et $X \geq 0$.

5. LA POLITIQUE OPTIMALE DE LA PÉRIODE II

5.1. Position du problème

La politique optimale d'une entreprise qui dispose à la date θ de réserves R_{II} et d'un stock X_{II} est solution du problème :

$$\max_{\substack{X(\theta)\\ q(t),\, x(t)}} \int_{\theta}^{\infty} e^{-rt}\{[\bar{a} - b(q(t) - x(t))]\,(q(t)) - x(t)) - c\,q(t)^2/2 - k\,X(t)\}\,dt \quad (5.1)$$

1. Ce qui est important, c'est le fait que la croissance du sentier d'extraction soit suffisamment forte. Le fait qu'elle soit infinie en θ, puisqu'il y a discontinuité, n'est pas essentiel.

$$\dot{X}(t) = x(t) \tag{5.1.a}$$
$$\dot{R}(t) = - q(t) \tag{5.1.b}$$
$$q(t) - x(t) \geq 0 \tag{5.1.c}$$
$$q(t) \geq 0 \tag{5.1.d}$$
$$X(\theta) \leq X_{II} \tag{5.1.e}$$
$$R(\theta) = R_{II} \tag{5.1.f}$$
$$R(t) \geq 0 \tag{5.1.g}$$
$$X(t) \geq 0 \tag{5.1.h}$$

Les variables $X(t)$ et $R(t)$ et les variables de commande sont $q(t)$ et $x(t)$, l'extraction instantanée et la variation du niveau du stock. Comme on le verra par la suite, la totalité du stock n'est pas nécessairement utile. On note donc $X(\theta)$ la partie de X_{II} que l'entreprise désire garder, et pour laquelle elle supporte le coût de stockage en $t = \theta$, et on suppose qu'elle peut se débarrasser sans frais de $X_{II} - X(\theta)$, la partie inutile du stock.

Soit L le lagrangien associé à ce problème :

$$\begin{aligned} L = e^{-rt} \{[\bar{a} - b(q(t) - x(t))] (q(t) - x(t)) - cq(t)^2/2 - kX(t)\} \\ - \lambda(t)q(t) + \mu(t)x(t) + \alpha(t)q(t) + \beta(t)(q(t) - x(t)) + \gamma(t)X(t) + \delta(t)R(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Les conditions de premier ordre sont :

— conditions relatives aux multiplicateurs associés aux variables d'état :

$$\dot{\mu}(t) = ke^{-rt} - \gamma(t) \tag{5.3.a}$$

$$\dot{\lambda}(t) = - \delta(t) \tag{5.3.b}$$

— conditions de maximisation du lagrangien par rapport aux variables de commande :

$$e^{-rt} \{\bar{a} - 2b\,(q(t) - x(t)) - cq(t)\} + \alpha(t) + \beta(t) - \lambda(t) = 0 \tag{5.4.a}$$

$$e^{-rt} \{- \bar{a} + 2b\,(q(t) - x(t))\} + \mu(t) - \beta(t) = 0 \tag{5.4.b}$$

— autres conditions :

$$\alpha(t)q(t) = 0 \qquad \alpha(t) \geq 0 \tag{5.5.a}$$
$$\beta(t)(q(t) - x(t)) = 0 \qquad \beta(t) \geq 0 \tag{5.5.b}$$
$$\gamma(t)X(t) = 0 \qquad \gamma(t) \geq 0 \tag{5.5.c}$$
$$\delta(t)R(t) = 0 \qquad \delta(t) \geq 0 \tag{5.5.d}$$
$$\dot{X}(t) = x(t) \tag{5.5.e}$$
$$\dot{R}(t) = - q(t) \tag{5.5.f}$$

5.2. Propriétés générales des sentiers solution

Avant d'exploiter les conditions (5.3) à (5.5), il est utile de remarquer que les plans de vente et d'extraction optimaux ont la structure suivante (les démonstrations sont presque immédiates) :

a) les sentiers de vente et d'extraction sont continus ;

b) si le stock est nul à partir d'une certaine date, il le reste par la suite ;

c) il n'est jamais optimal de détenir un stock strictement positif pendant un invervalle de temps supérieur) τ tel que $k(1-e^{-r\tau})/r = e^{-r\tau}\bar{a}$;

d) on déduit des points b) et c) précédents que si $X(\theta) > 0$, il existe un intervalle $[\theta, \omega)$, $\theta < \omega < \infty$, tel que $X(t) > 0$ si $\in [\theta, \omega)$ et $X(t) = 0$ si $t \geq \omega$;

e) quel que soit l'intervalle de temps considéré, si $X(t) > 0$ ou si $R(t) > 0$, alors les ventes sont positives.

Déterminons quelles sont les politiques optimales au cours des deux sous-périodes $[0, \omega)$ et $[\omega, \infty)$, qui permettront de construire les scénarios optimaux en fonction de X_{Π} et R_{Π}.

5.3. La politique optimale sur la sous-période $[\theta, \omega)$

Puisque $X(t) > 0$, alors $\gamma(t) = 0$ d'une part et, d'autre part, $y(t) = q(t) - x(t) > 0$, d'où $\beta(t) = 0$. Distinguons selon que $q(t) > 0$ ou $q(t) = 0$.

5.3.1. *L'extraction est nulle*

Si $q(t) = 0$, alors $\alpha(t) \geq 0$. Les conditions (5.3.a) et (5.4.b) impliquent :

$$\dot{V}_m(y(t)) = k + rV_m(y(t)) \tag{5.6}$$

où $V_m(y)$ est la recette marginale lorsque les ventes sont égales à y. On a donc :

$$-2b\,\dot{y}(t) + 2br\,y(t) - (k + r\bar{a}) = 0 \tag{5.7}$$

équation différentielle dont la solution générale est :

$$y(t) = we^{rt} + (k + r\bar{a})/2br \tag{5.8}$$

La recette marginale instantanée $(\bar{a} - 2by(t))$ doit être non négative, d'où $y(t) < \bar{a} / 2b$. On en déduit que $w < 0$. Notons $y(t, w)$ la fonction (5.8) et $x(t, w) = y(t, w)$ la variation instantanée de stock. Puisque $w < 0$, $y(t) < 0$ et les ventes sont constamment décroissantes à taux croissant au cours de cette phase. Portant (5.8) dans (5.4.b), on obtient alors :

$$\mu(t) = e^{-rt}\,V_m(y(t)) = -ke^{-rt}/r - 2bw \tag{5.9}$$

solution générale de l'équation différentielle (5.3.a) où la constante d'intégration est $-2bw$.

5.3.2. *L'extraction est positive*

Si $q(t) > 0$, alors $\alpha(t) = 0$, et $R(t) > 0$ d'où $\delta(t) = 0$ et $\lambda(t) = \lambda.y(t)$ est toujours déterminé comme solution de (5.7) :

$$y(t) = ze^{rt} + (k + r\bar{a})/2br \tag{5.10}$$

où $z < 0$. Le sentier d'extraction est défini par les conditions (5.4.a) et (5.10), d'où :

$$q(t) = [-(2bz + \lambda)e^{rt} - k/r]/c \tag{5.11}$$

5.3.3. *Interprétations*

La condition (5.6) spécifie que la firme ne peut réaliser aucun profit additionnel en modifiant localement les sentiers de vente et d'évolution du stock. Supposons qu'à plan de production fixé, $q(t)$ nul ou positif, l'entreprise envisage de réduire ses ventes à l'instant t d'un montant dy, puis de stocker cette quantité pour la vendre à l'instant $t + dt$. Le bilan de cette opération, évalué en $t + dt$, est le suivant :

— réduction de recette à l'instant t :

$$V_m(y(t))\, dy + rV_m(y(t))\, dy\, dt$$

— accroissement du coût de stockage :

$$k\, dy\, dt$$

— accroissement de recette à l'instant $t + dt$:

$$V_m(y(t))\, dy + \dot{V}_m(y(t))\, dy\, dt$$

La condition (5.6) implique la nullité de ce bilan.

$\mu(t)$ s'interprète comme la valeur d'une unité de stock supplémentaire à l'instant t. La condition (5.4.b), avec $\alpha(t) = 0$ si $X(t) > 0$, garantit qu'à chaque instant, la valeur marginale du stock $X(t)$ est juste égale à la recette marginale actualisée à cette date. Si $q(t) > 0$, combinant (5.4.a) et (5.4.b), on conclut que :

$$\mu(t) = e^{-rt}\, cq(t) + \lambda \tag{5.12}$$

Sur tout intervalle d'extraction effective, à chaque instant, la valeur du stock doit être égale au coût marginal d'extraction augmenté du coût marginal d'opportunité d'épuisement de la réserve. Combinant alors (5.12) et (5.3.a), on en déduit, puisque $\gamma(t) = 0$ si $t < \omega$, que :

$$\dot{\mu}(t) = -rcq(t)e^{-rt} + c\dot{q}(t)e^{-rt} = ke^{-rt}$$

soit :

$$c\dot{q}(t) = rcq(t) + k \tag{5.13}$$

La condition (5.13) est une condition de minimisation du coût de mise sur marché à plan de vente fixé. Si la firme augmente l'extraction à l'instant t d'un montant dq pour la réduire ensuite d'un même montant en $t + dt$, dq étant stocké entre t et $t + dt$, le bilan de l'opération, évalué en $t + dt$, s'établit ainsi :

— accroissement du coût d'extraction en t :

$$cq(t)\,dq + rcq(t)\,dq\,dt$$

— accroissement du coût de stockage :

$$k\,dq\,dt$$

— réduction du coût d'extraction en $t + dt$:

$$c(q(t) + \dot{q}(t)\,dt)\,dq$$

La condition (5.13) spécifie que ce bilan est nul.

Sous les conditions (5.3.a) et (5.4.b), la condition (5.4.a) est nécessaire à l'optimalité du plan d'extraction. C'est la condition bien connue en théorie de la firme minière, la règle d'Hotelling, selon laquelle à chaque instant, si l'on extrait et si l'on vend, le profit marginal d'extraction actualisé $e^{-rt}(V_m(y(t)) - cq(t))$ doit être constant (nous reviendrons sur ce point).

On notera que si $q(t) > 0$, (5.11) implique $2bz + \lambda < 0$ et la production est croissante à taux croissant. La variation instantanée du stock, $x(t)$ est égale à :

$$x(t) = -((2b + c)\,z + \lambda)\,e^{rt}/c - ((2b + c)\,k + rc\bar{a})/2bcr \qquad (5.14)$$

et $2bz + \lambda < 0$ et $z < 0$ impliquent :

$$(2b + c)\,z + \lambda < 0 \qquad (5.15)$$

On conviendra de noter $y(t, z)$ $q(t, z, \lambda)$ et $x(t, z, \lambda)$ les fonctions définies par (5.10), (5.11) et (5.14).

5.4. La politique optimale de la sous-période $[\omega, \infty)$

A partir de $t = \omega$, $X(t) = 0$ et si $R(t) > 0$ alors $y(t) = q(t)$. Au cours de cette phase d'extraction pour les seules ventes au même instant, la politique optimale est analogue à celle définie ci-dessus, à savoir :

$$q(t) = (\bar{a} - \lambda e^{-rt})/(2b + c) = y(t) \qquad (5.16)$$

Ventes et production diminuent donc à partir de ω jusqu'à une date ν à laquelle la réserve R_{II} est épuisée. ν est déterminée par la condition terminale :

$$\bar{a} - \lambda e^{r\nu} = 0 \qquad (5.17)$$

5.5. Les scénarios possibles

La continuité des sentiers d'extraction et de vente implique qu'au cours de la période II les seuls scénarios possibles sont les suivants.

Scénario 1. Il est constitué de deux phases successives. Au cours de la première, il y a extraction et déstockage. A l'issue de cette phase, le stock est épuisé, mais pas les réserves. Au cours de la seconde phase, on extrait pour vendre.

Scénario 2. La succession des deux phases du scénario 1 est précédée d'une phase au cours de laquelle les ventes ne sont alimentées que par le déstockage.

La pertinence de l'un ou l'autre scénario dépend de l'abondance du stock et du niveau des réserves.

5.5.1. *Pertinence du scénario 1*

Il est clair que pour un niveau donné R_{II} des réserves, si le stock X_{II} disponible en θ est suffisamment faible, la politique optimale correspond à un scénario de type 1. Pour caractériser complètement les sentiers dans ce cas, il faut déterminer quatre paramètres : la constante d'intégration z, le multiplicateur λ, la date ω de transition d'une phase à l'autre et la date ν d'épuisement des réserves. On dispose pour cela de quatre conditions.

i) Condition d'épuisement des réserves :

$$\int_{\theta}^{\omega} q(t, z, \lambda)\, dt + \int_{\omega}^{\nu} \{\bar{a} - \lambda\, e^{rt})/(2b + c)\}\, dt = R_{II} \tag{5.18}$$

ii) Condition d'épuisement du stock :

$$-\int_{\theta}^{\omega} x(t, z, \lambda)\, dt = X_{II} \tag{5.19}$$

Le stock étant faible, il sera utilisé en totalité de sorte que $X(\theta) = X_{II}$.

iii) Condition de raccordement des deux phases : le sentier d'extraction est continu en $t = \omega$, d'où :

$$q(\omega, z, \lambda) = -(2bz + \lambda)e^{r\omega}/c - k/rc = (\bar{a} - \lambda\, e^{r\omega})/(2b + c) \tag{5.20}$$

Cette condition est équivalente à la condition de continuité du sentier de vente en $t = \omega$, la variation instantanée du niveau du stock tendant vers 0 en $t = \omega$ [1].

1. C'est-à-dire $lim_{t\uparrow\omega} x(t) = 0$. En effet, au cours de la première phase, le respect de la condition de premier ordre (5.4.a) implique que :

$$\lim_{t\uparrow\omega} [\bar{a} - 2bx(t) - (2b + c)q(t) - e^{rt}\, \lambda] = 0$$

d'où, selon (5.20) :

$$\lim_{t\uparrow\omega} x(t) = \bar{a} - (2b + c)\, [(\bar{a} - \lambda\, e^{rt})/(2b + c)] - \lambda\, e^{rt} = 0$$

iv) Condition terminale (5.17)

On remarquera que $\mu(t)$ est défini :

— par (5.12) au cours de la première phase, à savoir :

$$\mu(t) = e^{-rt} \, cq(t) + \lambda \tag{5.21}$$

— par l'intégration de (5.3.a) au cours de la seconde phase, où maintenant $\gamma(t)$ n'est plus nul.

Un scénario de type 1 est représenté au graphique 2. En $t = \omega$, la dérivée à gauche de $y(t)$ a pour expression :

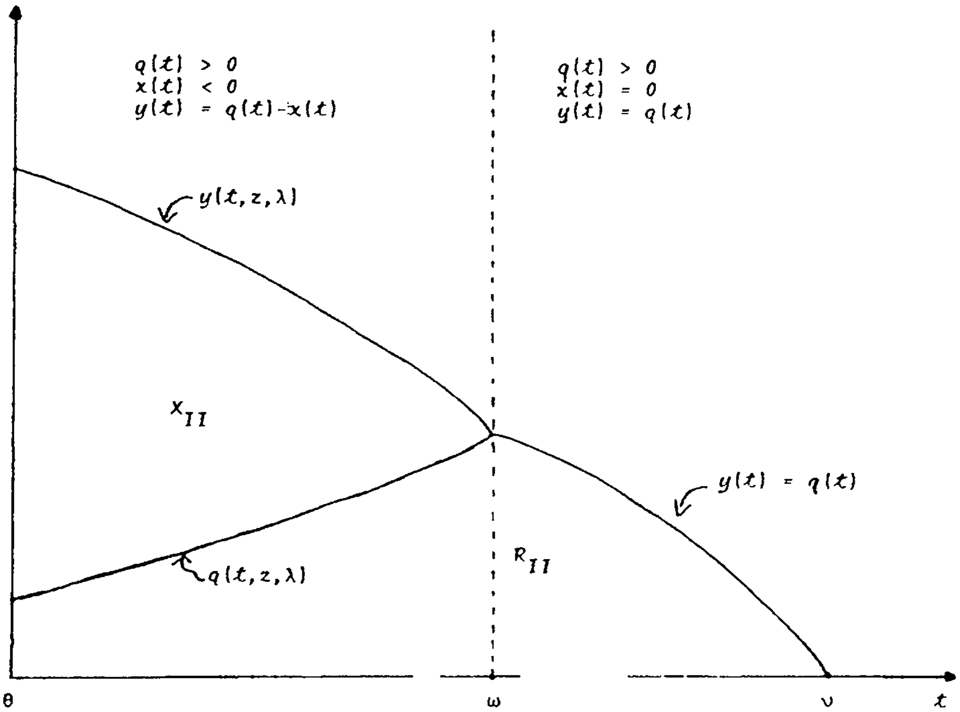
$$\lim_{t \uparrow \omega} \dot{y}(t) = rze^{r\omega}$$

et la dérivée à droite :

$$\lim_{t \downarrow \omega} \dot{y}(t) = \lim_{t \downarrow \omega} \dot{q}(t) = -r \, \lambda \, e^{r\omega}/(2b + c)$$

qui est supérieure à la dérivée à gauche puisque d'après (5.15), $z \; - \lambda \, / \, (2b + c)$.

Graphique 2. Scénario de type I



5.5.2. *Pertinence du scénario 2*

Pour des réserves R_{II} données, si X_{II} est suffisamment élevé, la politique optimale correspond à un scénario de type 2. Notons alors ρ la date de transition de la première phase où l'extraction est nulle, à la seconde phase où l'extraction devient positive, et désignons toujours par ω la date de passage de la seconde phase à la troisième où les ventes sont alimentées par la seule extraction : $\rho < \omega$.

La caractérisation des sentiers demande la détermination de sept paramètres : la partie $X(\theta)$ du stock disponible X_{II} qui sera effectivement utilisée, les constantes d'intégration w et z, le multiplicateur λ, les dates de transition ρ et ω et la date ν de fin d'activité du marché. Pour les six dernières variables, on dispose d'abord des six conditions suivantes. On montre ensuite comment déterminer $X(\theta)$.

(i) Condition d'épuisement des réserves :

$$\int_{\rho}^{\omega} q(t, z, \lambda)\, dt + \int_{\omega}^{\nu} \{(\bar{a} - \lambda\, e^{rt})/(2b + c)\}\, dt = R_{II} \tag{5.22}$$

(ii) Condition d'épuisement du stock effectivement utilisé :

$$-\int_{\theta}^{\rho} x(t, w)\, dt - \int_{\rho}^{\omega} x(t, z, \lambda)\, dt = X(\theta) \tag{5.23}$$

(iii) Condition de continuité du sentier de vente en $t = \rho$:

$$we^{r\rho} + (k + r\bar{a})/2br = ze^{r\rho} + (k + r\bar{a})/2br \tag{5.24}$$

qui implique $w = z$.

(iv) Condition de continuité du sentier d'extraction en $t = \rho$:

$$-(2bz + \lambda)\, e^{r\rho}/c - k/rc = 0 \tag{5.25}$$

(v) Condition de continuité du sentier d'extraction en $t = \omega$:

$$-(2bz + \lambda)\, e^{r\omega}/c - k/rc = (\bar{a} - \lambda\, e^{r\omega})/(2b + c) \tag{5.26}$$

Pour les mêmes raisons que celles invoquées dans le cas d'un scénario de type 1, cette condition est équivalente à la condition de continuité des ventes en $t = \omega$ avec $lim_{t\uparrow\omega} x(t) = 0$.

(vi) Condition terminale (5.17).

Il reste à déterminer si la totalité du stock disponible est utile. Remarquons qu'à tout instant les ventes ne peuvent pas dépasser le niveau $\bar{a}\, /\, 2b$ sinon la recette marginale deviendrait négative. Le sentier de vente étant décroissant, on en déduit que nécessairement :

$$we^{r\theta} + (k + r\bar{a})/2br \leq \bar{a}/2b \tag{5.27}$$

Si les sentiers solution des équations (5.17) et (5.22) à (5.26) pour $X(\theta) = X_{II}$ dans (5.23) vérifient la condition (5.27) alors la totalité du stock disponible est utile. L'examen de la condition (5.9) montre qu'alors $\mu(\theta)$, la valeur marginale du stock à l'instant θ, est positive (nulle dans le cas limite où (5.27) est vérifiée avec l'égalité). Sinon la firme n'a pas intérêt à utiliser la totalité du stock disponible et $X(\theta) < X_{II}$. Dans ce cas, w est déterminé par une condition de nullité de la recette marginale en $t = \theta$:

$$y(\theta) = we^{r\theta} + (k + r\bar{a})/2br = \bar{a}/2b \qquad (5.28)$$

et les sept paramètres apparaissent comme solutions des équations (5.17), (5.22) à (5.26) et (5.28).

$\mu(t)$ est défini par :

— (5.9) au cours de la première phase :

$$\mu(t) = — ke^{rt}/r — 2bw = — ke^{rt}/r — 2bz$$

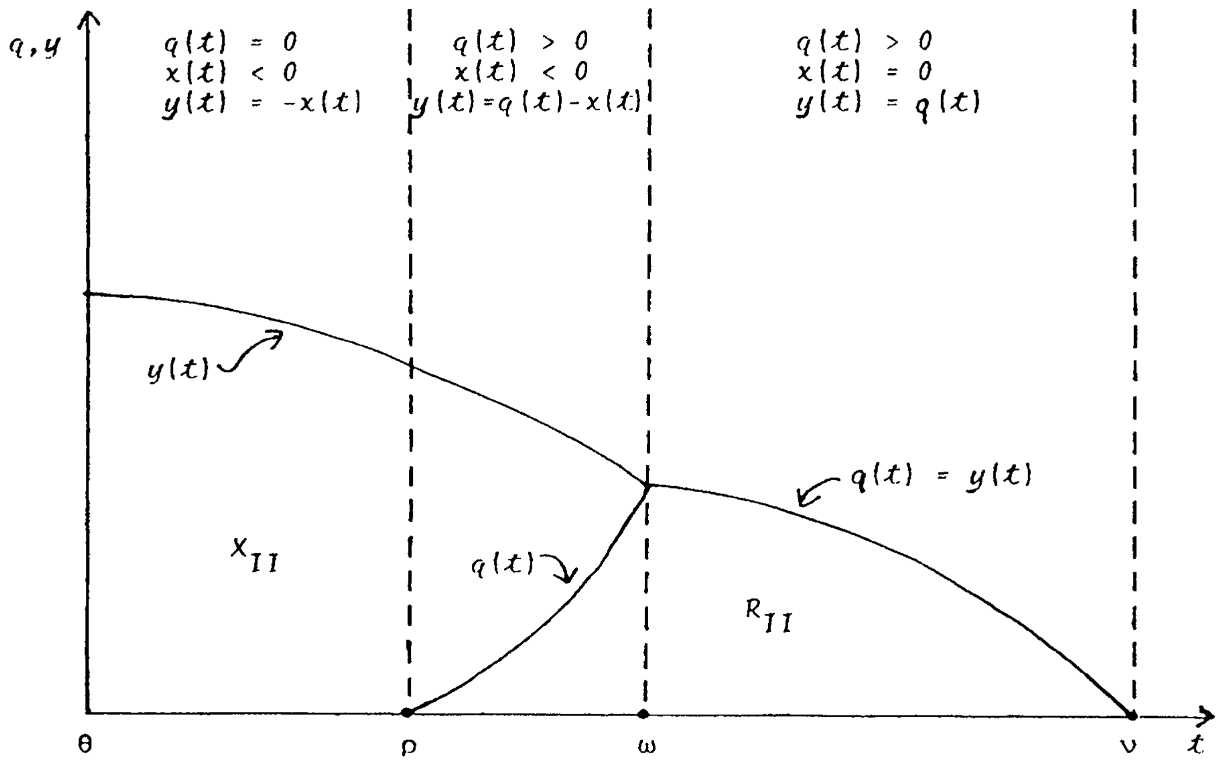
— (5.12) au cours de la seconde phase :

$$\mu(t) = e^{-rt}\, cq(t) + \lambda$$

— l'intégration de (5.3.a) au cours de la troisième où $\gamma(t)$ n'est pas nécessairement nul.

Les sentiers de vente et d'extraction correspondant à un scénario de type 2 sont représentés sur le graphique 3. Puisque $w = z$, le sentier de ventes est défini par la même fonction entre θ et ω. Comme dans le premier scénario la pente de ce sentier augmente en $t = \omega$.

Graphique 3. Scénario de type 2



5.6. Valeurs critiques du stock et de la réserve

Pour un montant donné R_{II} des réserves, il existe une valeur maximale du stock utile que l'on désignera par $\overline{X}_{II}$ pour laquelle les sentiers solutions de (5.17) et (5.22) à (5.26) avec $X(\theta) = X_{II}$ dans (5.23), sont tels que l'inégalité (5.27) est vérifiée. Cette valeur maximale $\overline{X}_{II}(.)$ est une fonction décroissante de R_{II}.

La plus grande valeur maximale $\overline{X}_{II}(0)$ est obtenue comme suit. Si $R_{II} = 0$, la politique optimale de vente correspond à une seule phase d'écoulement du stock au cours de laquelle $y(t) = we^{rt} + (k + r\bar{a})/2br$. D'après (5.28) $w = -e^{-r\theta}k/2br$ est la valeur de la constante d'intégration. Notons-la $\overline{w}$. Alors :

$$y(t, \overline{w}) = -(ke^{r(t-\theta)})/2br + (k + r\bar{a})/2br \tag{5.29}$$

Les ventes s'annulent à l'instant $\bar{\omega}_0$ tel que $y(\bar{\omega}_0, w) = 0$, soit :

$$ke^{r(\bar{\omega}_0 - \theta)} = k + r\bar{a} \tag{5.30}$$

D'après la remarque c) du paragraphe 5.2, $\bar{\omega}_0 - \theta$ défini par (5.30) est la durée maximale au-delà de laquelle l'entreprise n'a pas à détenir un stock positif. Le plus grand stock maximal utile est donc égal à :

$$\overline{X}_{II}(0) = \int_0^{\bar{\omega}_0} \{we^{rt} + (k + r\bar{a})/2br\}\, dt \tag{5.31}$$

Le plus petit stock maximal utile est obtenu comme limite de $\overline{X}_{II}(R_{II})$ lorsque $R_{II} = \infty$. Notons-le $\overline{X}_{II}(\infty)$. La politique optimale correspond à un scénario de type 1, avec une première phase $[\theta, \bar{\omega}_\infty)$ au cours de laquelle $q(t)$ passe de $q(\theta) = 0$ à $q(\bar{\omega}_\infty) = \bar{a} / (2b + c)$, à l'issue de laquelle le stock est nul, suivie d'une seconde phase d'extraction constante ($\lambda = 0$) à un niveau $q(t) = \bar{a} / (2b + c)$. Au cours de la première phase $y(t)$ et $q(t)$ sont définies par (5.10) et (5.11). On doit donc avoir $y(\theta) = \bar{a} / 2b$, soit :

$$z = -e^{-r\theta}\, k/2br \tag{5.32}$$

c'est-à-dire :

$$y = \overline{w} \tag{5.33}$$

La date de passage de la première à la seconde phase est définie par :

$$\overline{w}e^{r\bar{\omega}_\infty} + (k + r\bar{a})/2br = \bar{a}/(2b + c) \tag{5.34}$$

et le plus petit stock maximal utile est égal, puisque $R_{II} = \infty$ implique $\lambda = 0$, à :

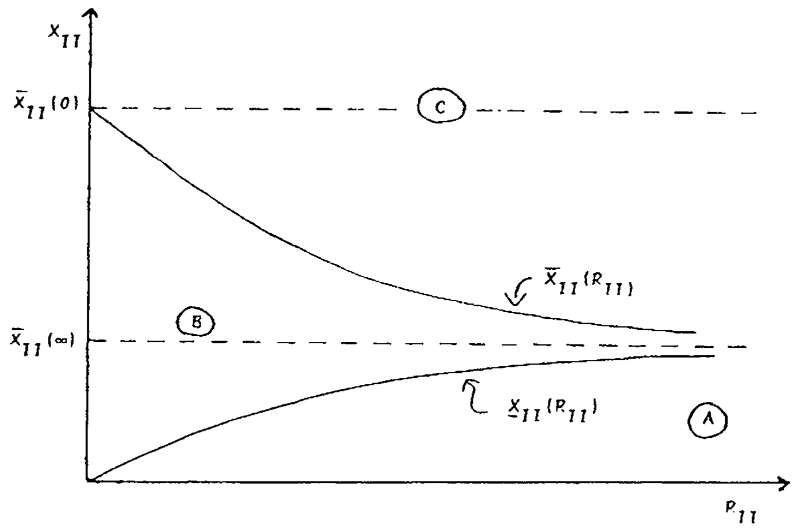
$$\overline{X}_{II}(\infty) = -\int_\theta^{\bar{\omega}_\infty} x(t, \overline{w}_\infty, 0)\, dt \tag{5.35}$$

On remarquera que $\overline{X}_{II}(.)$ est une fonction strictement décroissante de R_{II} que l'on peut donc inverser sur $(\overline{X}_{II}(\infty), \overline{X}_{II}(0))$. Pour tout X_{II} dans cet intervalle, on notera $\overline{R}_{II}(X_{II})$ la fonction inverse.

Considérons maintenant un R_{II} donné, $R_{II} < \infty$. Lorsque $X_{II} \geq \overline{X}_{II}(R_{II})$, le scénario comprend trois phases : déstockage sans extraction, puis déstockage et extraction et enfin extraction seule, le stock étant épuisé. Toute légère réduction du stock ne modifie pas ce scénario. Pour $X_{II} > 0$ mais voisin de 0, le scénario est un scénario à deux phases : extraction et déstockage, puis extraction uniquement. Il existe une valeur limite du stock que l'on désignera par $\underline{X}_{II}(R_{II}) < \overline{X}_{II}(R_{II})$ pour laquelle et en deçà de laquelle le scénario comprend deux phases et au-delà de laquelle il en comprend trois. Il est clair que cette fonction est une fonction croissante qui tend vers 0 lorsque R_{II}, et qui est bornée supérieurement par $\overline{X}_{II}(\infty)$.

On a représenté sur le graphique 4 les différents scénarios en fonction de X_{II} et R_{II}.

Graphique 4



— sur l'axe des abscisses (0 excepté), il n'y a qu'une phase d'extraction ;

— sur l'axe des ordonnées (0 excepté), il n'y a qu'une phase de déstockage :

— dans la zone A, comprenant la courbe $\underline{X}_{II}(R_{II})$ et la surface sous cette courbe, le scénario est à deux phases ;

— dans les zones B et C, le scénario est à trois phases. Dans la zone B, la totalité du stock est utile, dans la zone C, $X(\theta) < X_{II}$.

5.7. Valeurs de la politique optimale et des multiplicateurs

La valeur $W^*_{II}(X_{II}, R_{II})$ de la politique optimale dépend des réserves et du stock comme suit.

Pour un niveau donné du stock X_{II}, W^*_{II} est une fonction strictement croissante de R_{II}, bornée supérieurement. Toute réserve supplémentaire a une valeur marginale positive : l'entreprise réalisera toujours un profit marginal positif en l'extrayant, peut-être dans un futur éloigné. Pour un niveau donné R_{II} de la réserve, W^*_{II} est une fonction croissante de X_{II} sur $[0, \overline{X}_{II}(R_{II}))$ et constante ensuite.

Les valeurs marginales du stock et de la réserve sont égales à $\mu(\theta)$ et λ. Puisqu'elles dépendent de R_{II} et X_{II}, notons les $\mu^*_{II}(\theta, R_{II}, X_{II})$ et $\lambda^*_{II}(\theta, R_{II}, X_{II})$. Il faut souligner que ces valeurs marginales sont toujours définies même le long de la courbe $\overline{X}_{II}(R_{II})$ où il y a changement de type de scénario et donc changement de l'expression de la fonction W^*_{II} ; de plus $\mu^*_{II}(.)$ et $\lambda^*_{II}(.)$ sont des fonctions continues de R_{II} et X_{II} (mais pas nécessairement différentiables, en particulier sur la courbe $\underline{X}_{II}(.)$).

Pour R_{II} fixé, μ^*_{II} est une fonction continue de X_{II}, positive et décroissante sur $[0, \overline{X}_{II}(R_{II})]$ et identiquement nulle sur $[\overline{X}_{II}(R_{II}), \infty)$. Pour $X_{II} \leq \overline{X}_{II}(\infty)$, μ^*_{II} est une fonction décroissante de R_{II} et toujours positive. Pour $X_{II} \in (\overline{X}_{II}(\infty), \overline{X}_{II}(0))$, μ^*_{II} est une fonction continue de R_{II}, décroissante sur $[0, \overline{R}_{II}(X_{II}))$ et identiquement nulle sur $[\overline{R}_{II}(X_{II}), \infty)$. Ensuite si $X_{II} \geq \overline{X}_{II}(0)$, μ^*_{II} est constamment nul, quel que soit le niveau des réserves R_{II}.

Pour X_{II} fixé, λ^*_{II} est une fonction continue décroissante de R_{II} qui tend vers 0 lorsque R_{II} tend vers l'infini. Pour R_{II} fixé, fini, λ^*_{II} est une fonction continue de X_{II}, décroissante sur l'intervalle $[0, \overline{X}_{II}(R_{II}))$ puis constante à un niveau positif sur $[\overline{X}_{II}(R_{II}), \infty)$.

6. LA POLITIQUE OPTIMALE DE LA PÉRIODE I

6.1. Position du problème

La politique optimale d'une entreprise qui disposerait de réserves R_I et pourrait les affecter soit à la vente, soit à la constitution d'un stock au moins égal à X_I, $X_I \leq R_I$, entre 0 et θ est solution du problème :

$$\underset{q(t),\, x(t)}{\text{Max}} \int_0^{\theta} e^{-rt} \{[\underline{a} - b(q(t) - x(t))]\,(q(t) - x(t)) - cq(t)^2/2 - kX(t)\}\, dt \qquad (6.1)$$

$$\dot{X}(t) = x(t) \qquad (6.1.a)$$

$$\dot{R}(t) = -q(t) \qquad (6.1.b)$$

$$q(t) - x(t) \geq 0 \qquad (6.1.c)$$

$$q(t) \geq 0 \qquad (6.1.d)$$

$$X(\theta) \geq X_I \qquad (6.1.e)$$

$$R(0) = R_I \qquad (6.1.f)$$

$$X(0) = 0 \qquad (6.1.g)$$

$$R(t) \geq 0 \qquad (6.1.h)$$

$$X(t) \geq 0 \qquad (6.1.i)$$

Le lagrangien est de la même forme que dans le problème (5) au paramètre $\bar{a}$ près, ainsi que les conditions de premier ordre. Les conditions de transversalité associées aux contraintes terminales sont :

$$\lambda^* \geq 0 \qquad R(\theta) = 0 \qquad (6.2.a)$$

$$\mu(\theta) \geq 0 \qquad \mu(\theta)\,(X(\theta) - X_I) = 0 \qquad (6.2.b)$$

On prendra garde au fait que dans ce problème, $\mu(\theta)$ s'interprète comme un coût marginal total de constitution du stock X_I : coût marginal d'extraction + coût de stockage + coût d'opportunité de la ressource.

6.2. Propriétés générales des sentiers solution

Il est utile, comme à la section précédente, de remarquer que les sentiers optimaux d'extraction et de vente ont la structure générale suivante :

a) les sentiers de vente et d'extraction sont continus ;

b) si le stock est nul à deux instants t et $t + \tau$, $\tau > 0$, il est nul sur la totalité de l'intervalle $(t, t + \tau)$;

c) si les ventes sont nulles à un certain instant t, elles sont nulles sur l'intervalle (t, θ).

On déduit des points b) et c) que :

— il existe, si $X_I > 0$, deux sous-périodes $[0, \sigma)$ et $[\sigma, \theta)$ au cours desquelles le stock est respectivement nul puis positif ;

— il existe éventuellement deux sous-périodes $(0, \psi)$ et $[\psi, \theta)$ au cours desquelles les ventes sont respectivement positives puis nulles.

Dans tous les cas, la totalité du stock R_I n'est pas nécessairement extraite, alors $\lambda = 0$.

6.3. Les scénarios possibles

Il ressort de ce qui précède que la politique optimale au cours de la première période ne peut être qu'une combinaison des quatre phases *a priori* possibles :

— *Phase de type 1* : l'entreprise extrait et vend à chaque instant ce qu'elle extrait de sorte que $q(t) = y(t) > 0$, $x(t) = 0$ et donc $\alpha(t) = \beta(t) = 0$. Au cours d'une telle phase :

$$q(t) = y(t) = (\underline{a} - \lambda\, e^{rt})/(2b + c) > 0 \qquad (6.3)$$

et production et ventes sont décroissantes.

— *Phase de type 2* : l'entreprise extrait, vend et fait varier son stock de sorte que $q(t) > 0$, $y(t) > 0$ et donc $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ d'une part, et d'autre part $x(t) \neq 0$ et donc $X(t) \neq 0$ d'où $\gamma(t) = 0$. Au cours d'une telle phase $y(t)$, $q(t)$ et $x(t)$ sont respectivement égaux à $y(t, z, \lambda)$, $q(t, z, \lambda)$ et $x(t, z, \lambda)$ définies par des relations analogues à (5.10), (5.11) et (5.14) où $\bar{a}$ est remplacé par $\underline{a}$. Au cours d'une telle phase les ventes sont donc décroissantes et la production croissante (cf. ci-dessus, p. 342).

— *Phase de type 3* : l'entreprise ne produit que pour le stock et les ventes sont nulles : $y(t) = 0$, $q(t) = x(t) > 0$, donc $\beta(t) \geq 0$ et $\alpha(t) = \gamma(t) = 0$. On déduit des conditions de premier ordre de maximisation du lagrangien par rapport aux variables de commande que :

$$\mu(t) = e^{-rt}\, cq(t) + \lambda \qquad (6.4)$$

En différenciant cette égalité, sachant que $\mu(t) = ke_{-rt}$ puisque $\gamma(t) = 0$, on obtient :

$$q(t) = ve^{rt} - k/rc \qquad (6.5)$$

La production est donc croissante au cours d'une telle phase. On notera $q(t, v)$ la fonction définie par [6.5].

— *Phase de type 4* : l'entreprise n'extrait pas et ne vend pas, c'est-à-dire $q(t) = y(t) = x(t) = 0$.

Étant donné les formes des sentiers de vente et de production au cours des différentes phases, les remarques précédentes, en particulier la continuité de ces sentiers et le fait que $X(0) = 0$, X_I est positif, les seuls scénarios possibles sont :

— *scénario 1* : phase de type 2 sur $[0, \theta)$;

— *scénario 2* : phase de type 3 sur $[0, \theta)$, on ne produit que pour constituer le stock ;

— *scénario 3* : phase de type 2 sur $[0, \psi)$ suivie d'une phase de type 3 sur $[\psi, \theta)$;

— *scénario 4* : phase de type 1 sur $[0, \sigma)$, suivie d'une phase de type 2 sur $[\sigma, \psi)$, suivie enfin d'une phase de type 3 sur $[\psi, \theta)$;

— *scénario 5* : phase de type 1 sur $[0, \sigma)$, suivie d'une phase de type 2 sur $[\sigma, \theta)$;

— *scénario 6* : phase de type 1 sur $[0, \psi)$, suivie d'une phase de type 4 sur $[\psi, \sigma)$, suivie enfin d'une phase de type 3 sur $[\sigma, \theta)$;

— *scénario 7* : phase de type 4 sur $[0, \sigma)$, suivie d'une phase de type 3 sur $[\sigma, \theta)$.

6.4. Scénarios optimaux

Le type de scénario correspondant à une politique optimale de vente et d'extraction au cours de la période I dépend de l'importance respective de R_I et X_I, ainsi qu'évidemment des paramètres du modèle. La discussion exhaustive de cette dépendance étant très lourde, nous ne traiterons que deux cas polaires où R_I est très grand ou rare (dans un sens que l'on va préciser) et nous renvoyons à Amigues et Moreaux [1989] pour une discussion complète. Dans chacue cas, nous montrons comment le scénario pertinent change lorsque X_I varie de 0 à R_I.

6.4.1. *La ressource allouée à la période I est très abondante*

On dira que la ressource R_I est abondante si, pour X_I suffisamment proche de R_I, il n'y a jamais de vente au cours de la période I. Montrons que cela suppose que R_I soit au moins égal à une certaine valeur limite $\hat{R}_I$. Supposons $X_I = R_I$. Alors l'entreprise n'extrait que pour le stock et au cours de la phase de type 3 où elle extrait :

$$q(t) = ve^{rt} - k/rc$$

La politique optimale ou bien ne comprend qu'une seule phase 3 (scénario 2), ou bien comprend une phase 4, suivie d'une phase 3 (scénario 3). Elle sera du premier type s'il existe $v^* > k/rc$, tel que :

$$\int_0^\theta (v^* e^{rt} - k/rc)\, dt = X_I = R_I$$

Supposons que ce soit le cas. Remarquons maintenant que l'entreprise n'extraira pas pour vendre si le coût marginal d'extraction est supérieur à la plus forte recette marginale possible, c'est-à-dire $\underline{a}$, même si elle dispose de ressources en excédent du stock à constituer. Il en sera ainsi quand l'extraction pour la seule constitution du stock devrait être telle qu'en $t = 0$, $q(t) \geq \underline{a}/c$, soit :

$$v^* \geq (r\underline{a} + k)/rc$$

Posons $\hat{v} = (r\underline{a} + k)/rc$, le stock accumulé pour $v = \hat{v}$ est égal à :

$$\hat{X}_I = [(e^{r\theta} - 1)\,(r\underline{a} + k)/c - \theta k/c]/r \tag{6.6}$$

Pour $R_I > \hat{X}_I$ et $X_I \in (\hat{X}_I, R_I)$ il n'y aura extraction que pour constituer le stock, bien que la ressource ne soit pas en totalité extraite. C'est en ce sens qu'elle est abondante. Dès que $X_I < \hat{X}_I$, l'extraction pour la seule constitution du stock impliquerait $q(0) < \underline{a}/c$ et sur un intervalle $[0, \tau)$ on aurait $q(t) < \underline{a}/c$. Il serait donc préférable d'augmenter l'extraction en début de période pour vendre, ce qui est possible puisque $X_I < R_I$. Pour $X_I < \hat{X}_I$ mais suffisamment proche de $\hat{X}_I$ la politique optimale correspond donc au scénario 3 : phase de type 2 sur un intervalle $[0, \psi)$ (NB : $\sigma = 0$ dans le cas présent) où $y(t)$, $q(t)$ et

$x(t)$ sont de la forme (5.10), (5.11) et (5.14) respectivement, suivie d'une phase de type 3 où $q(t)$ est de la forme (6.5). Puisque $\lambda = 0$, la ressource n'étant pas utilisée en totalité, il n'y a que trois paramètres à déterminer : z, x et ψ, par les trois conditions suivantes :

— Condition d'accumulation du stock :

$$\int_0^{\psi} x(t, z, 0)\, dt + \int_{\psi}^{\theta} q(t, v)\, dt = X_I$$

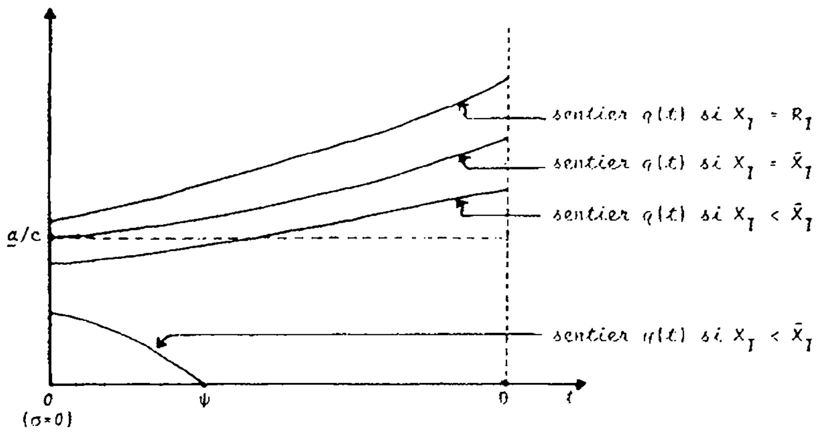
— Condition de continuité du sentier d'extraction en $t = \psi$:

$$q(\psi, z, 0) = q(\psi, v)$$

— Égalité du coût marginal d'extraction à $\underline{a}$ en $t = \psi$:

$$q(\psi, z, 0) = \underline{a}/c$$

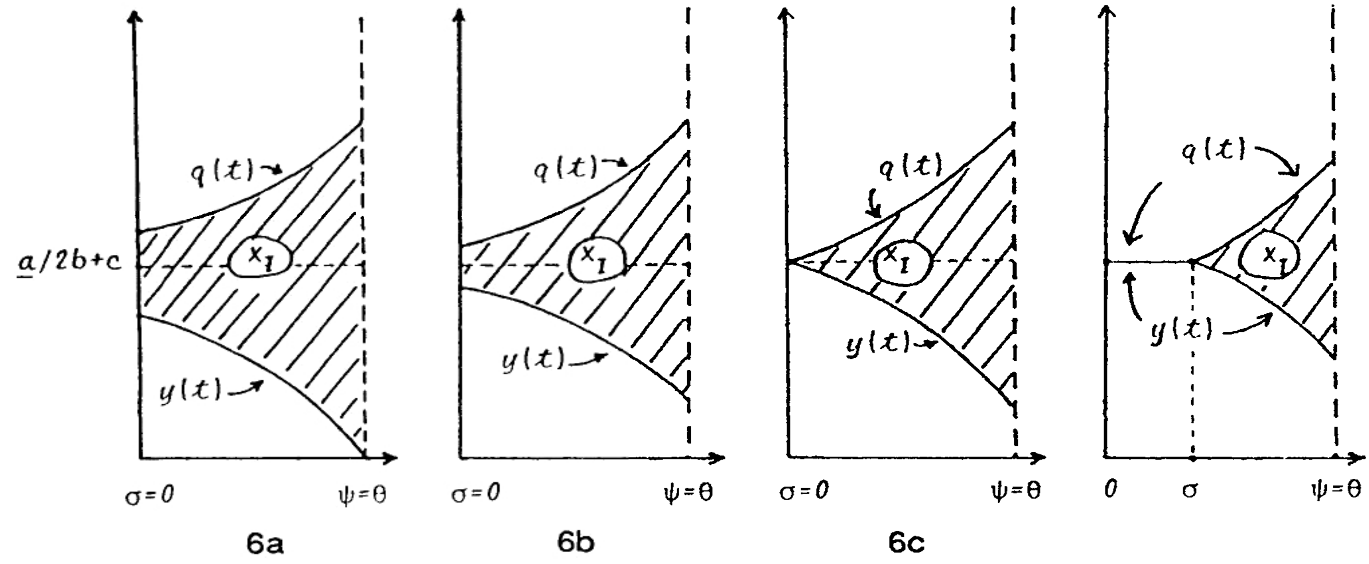
La condition de continuité du sentier d'extraction implique : $-2bz/c = v$, c'est-à-dire que le sentier d'extraction est donné par la même fonction, $q(t) = ve^{rt} - k/rc$, sur la totalité de l'intervalle $[0, \theta)$. Ces sentiers sont représentés sur le graphique 5.



Graphique 5 : $R_I > \hat{X}_I$

Continuons à réduire la valeur de X_I. Le scénario reste d'abord le même, simplement v diminue. Remarquons qu'on a toujours $\lambda = 0$, car l'extraction totale est inférieure à $\hat{X} < R_I$. Pour des valeurs de X_I encore plus faibles, la succession des scénarios sera soit celle représentée sur le graphique 6, soit celle représentée sur le graphique 7, selon les valeurs des paramètres a, b, c, k et θ. Enfin, lorsque $X_I = 0$, $q(t) = \underline{a} / (2b + c)$ sur la totalité de l'intervalle $[0, \theta)$ (on trouvera dans l'appendice 1 les conditions permettant de déterminer les constantes d'intégration et les dates de changement de phases dans les différents scénarios).

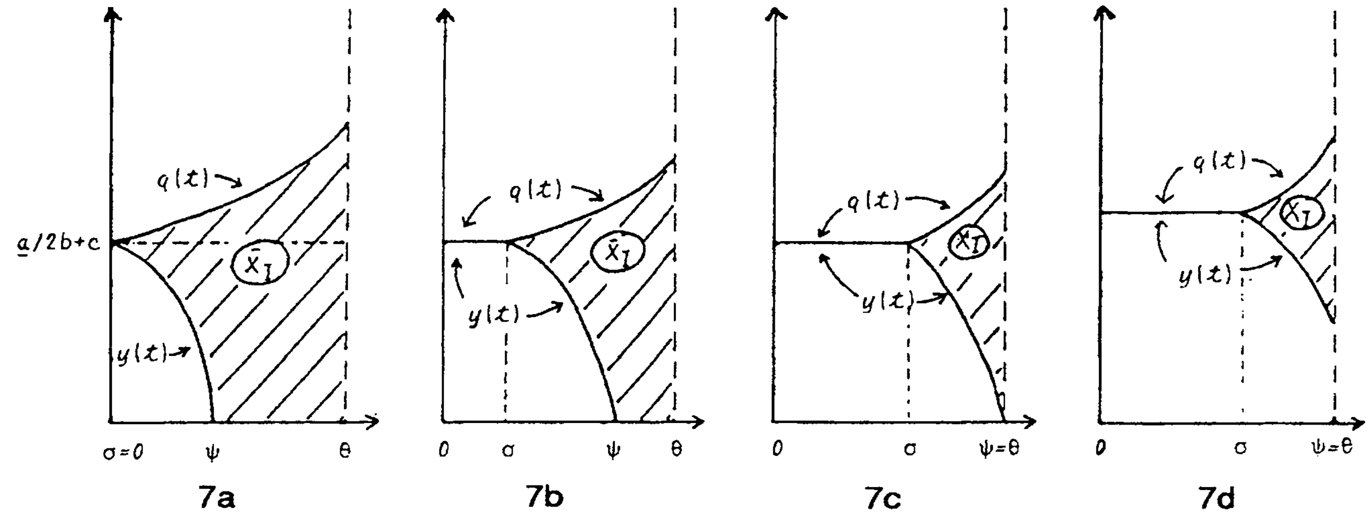
Graphique 6



Scénario 1 Scénario 5

N.B. : Les graphiques 6a, 6b, 6c et 6d correspondent à des niveaux décroissants de X_I

Graphique 7



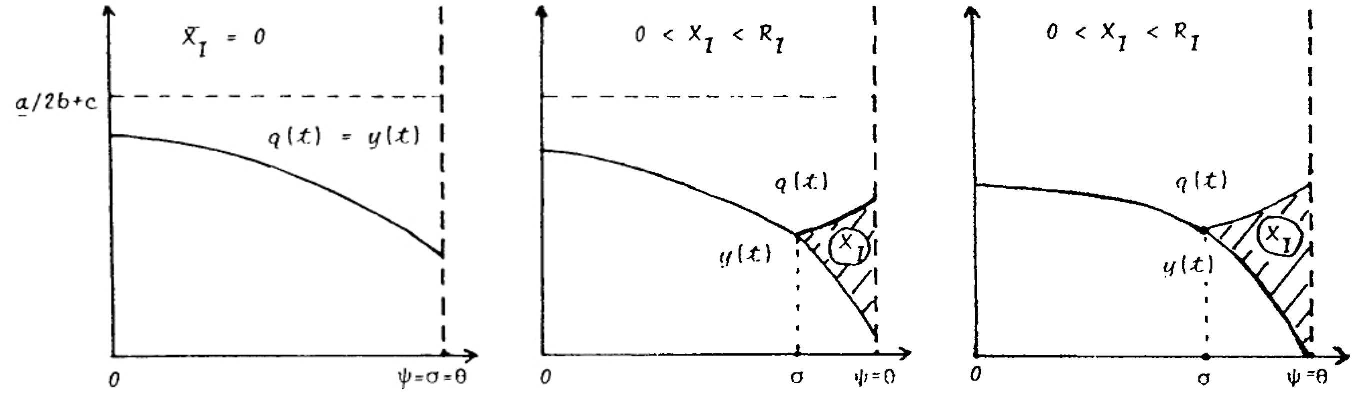
Scénario 4 Scénario 5

N.B. : Les graphiques 7a, 7b, 7c et 7d correspondent à des niveaux décroissants de X_I

6.4.2. La ressource allouée à la période I est rare

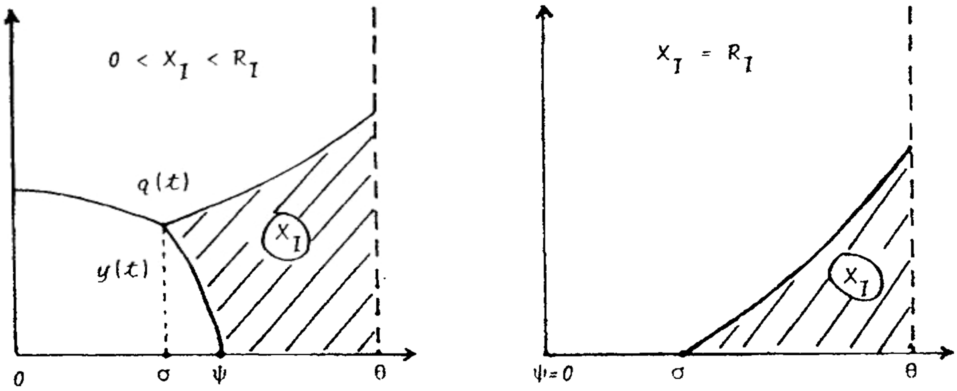
Par R_I faible, on entend que R_I est suffisamment petit pour que, même si le stock à accumuler est nul, les ventes sont constamment décroissantes au cours de la période I. Les enchaînements possibles de scénarios sont représentés sur les graphiques 8 et 9 ; le cas du graphique 9 correspond à un niveau de R_I inférieur à celui du graphique 8.

Graphique 8



8a 8b 8c

Scénario 5

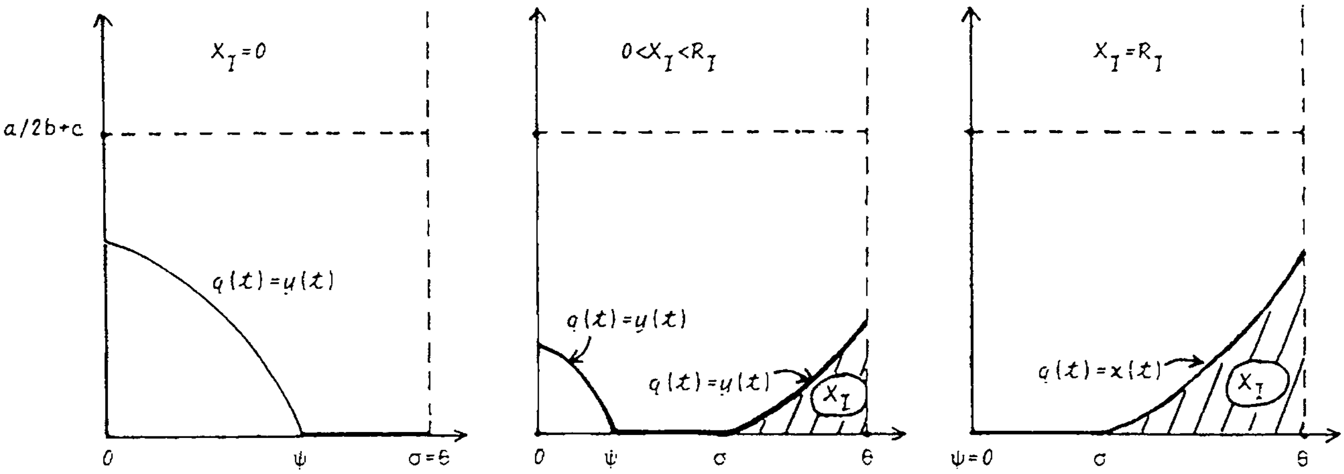


8d 8e

Scénario 4 Scénario 7

N.B. : En $t = \sigma$, la dérivée à gauche de $y(t)$ est supérieure à sa dérivée à droite. La fonction $q(t)$ change d'expression en $t = \sigma$ mais pas en $t = \psi$. Les graphiques 8a, 8b, 8c, 8d et 8e correspondent à des niveaux croissants de X_I.

Graphique 9



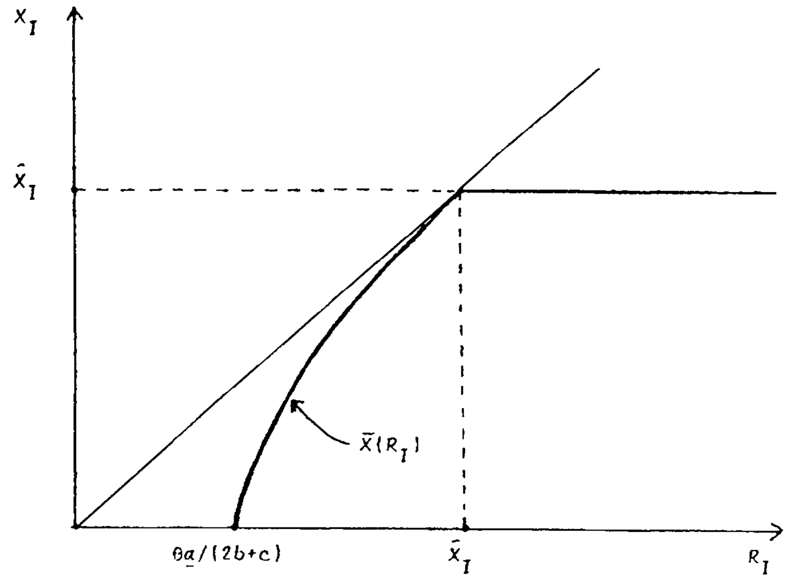
9a 9b 9c

Scénario 7

6.5. Valeur de la politique optimale et des multiplicateurs

La valeur $W^*_I(X_I, R_I)$ d'une politique optimale est une fonction décroissante de X_I pour R_I donné lorsque X_I varie de 0 à R_I. Pour X_I donné, c'est une fonction croissante de R_I pour R_I variant de X_I à $\overline{R}_I(X_I)$ où $\overline{R}_I(X_I)$ est la limite au-delà de laquelle W^*_I reste constante. Définissons $\Delta R_I(X_I)$ comme la différence $\overline{R}_I(X_I) - X_I$. Il ressort clairement de la discussion ci-dessus (p. 354) que $\Delta R_I(X_I)$ est une fonction décroissante passant de $\theta \underline{a} / (2b + c)$ lorsque $X_I = 0$ à 0 pour toute valeur de $\hat{X}_I$ supérieure à $\hat{X}_I$ défini par (6.6). On notera $\overline{X}_I(R_I)$ la fonction inverse de $R_I(.)$ sur l'intervalle $(\theta \underline{a} / (2b + c), \hat{X}_I)$.

Graphique 10



Le coût marginal total du stock (coût d'extraction, de stockage et d'opportunité de la ressource) est donné par $\mu(t)$ et la valeur marginale de la réserve par λ. Notons $\mu^*_I(t, R_I, X_I)$ et $\lambda^*_I(R_I, X_I)$ les fonctions donnant ces évaluations marginales en fonction de R_I et X_I.

Pour R_I donné μ^*_I est une fonction continue et croissante de X_I jusqu'à $X_I = R_I$. Pour $X_I > R_I$ on sort du domaine des possibles, c'est-à-dire $(\partial W^*_I / \partial X_I) +$ n'est pas définie en $X_I = R_I$. Pour X_I donné μ^*_I est une fonction décroissante de R_I pour R_I croissant de X_I à $\overline{R}_I(X_I)$, constante ensuite.

Pour X_I fixé, λ^*_I est une fonction décroissante de R_I pour R_I croissant de X_I à $\overline{R}_I(X_I)$, valeur de R_I à partir de laquelle elle s'annule. Notons que $(\partial W^*_I / \partial R_I) -$ n'est pas définie en $R_I = X_I$. Pour R_I fixé et inférieur ou égal à $\theta \underline{a} / (2b + c)$, λ^*_I est une fonction croissante de X_I pour X_I variant de 0 à R_I ; pour $R_I \in (\theta \underline{a} / 2b + c), \hat{X})$, λ^*_I est nulle pour X_I croissant de 0 à $\overline{X}_I(R_I)$ et croissante pour X_I variant de $\overline{X}_I(R_I)$ à R_I ; enfin si $R_I \geq \hat{X}_I$, λ^*_I est nul, quel que soit $X_I \in [0, R_I]$.

7. LES NIVEAUX OPTIMAUX DU STOCK ET DES RÉSERVES AFFECTÉS À CHACUNE DES PÉRIODES

Le niveau du stock X à constituer et les parties R_I et R_{II} de la réserve que l'entreprise doit affecter à chacune des périodes $[0, \theta)$ et $[\theta, \infty)$ sont solutions du problème :

$$\max_{R_I, R_{II}, X} \; W_I^*(X, R_I) + W_{II}^*(X, R_{II}) \tag{7.1}$$

$$\bar{R} - R_I - R_{II} \geq 0 \tag{7.1.a}$$

$$R_I - X_I \geq 0 \tag{7.1.b}$$

$$R_I \geq 0, R_{II} \geq 0, X \geq 0 \tag{7.1.c}$$

Puisque le domaine défini par les contraintes est compact et les fonctions W^*_I et W^*_{II} continues, ce problème admet une solution. On peut démontrer qu'elle est unique. Soit (X^*, R^*_I, R^*_{II}) cette solution. Il convient de distinguer deux cas. Celui dans lequel $R^*_I - X^*_I > 0$, où il y a extraction pour vente au cours de la période I et celui où $R^*_I - X^*_I = 0$, la totalité de la ressource affectée à la période I servant à constituer le stock[1].

7.1. Le plan optimal implique qu'il y ait extraction pour vente au cours de la première période

Dans ce cas $R^*_I > 0$, $R^*_I - X^*_I > 0$ et $R^*_{II} > 0$. Les conditions de premier ordre caractérisant la solution du programme (7.1) sont les conditions de Kuhn et Tucker habituelles où les multiplicateurs associés aux contraintes (7.1.b) et (7.1.c) sont nuls, le multiplicateur associé à la contrainte (7.1.a) ne l'étant pas. Donc :

$$\frac{\partial W_I^*(X^*, R_I^*)}{\partial R_I} = \lambda \qquad \frac{\partial W_{II}^*(X^*, R_{II}^*)}{\partial R_{II}} = \lambda \tag{7.2}$$

et :

$$\frac{\partial W_I^*(X^*, R_I^*)}{\partial X} + \frac{\partial W_{II}^*(X^*, R_{II}^*)}{\partial X} = 0 \tag{7.3}$$

Les égalités (7.2) sont équivalentes à :

$$\lambda_I^*(R_I^*, X^*) = \lambda_{II}^*(R_{II}^*, X^*) = \lambda \tag{7.4}$$

Les valeurs marginales des ressources allouées à chaque période doivent être égales.

1. Ce sera le cas si $\bar{a} - \underline{a}$ est suffisamment grand et θ et r suffisamment petits, pour k et c donnés.

L'égalité (7.3) est équivalente à :

$$\mu^*_{\mathrm{I}}(\mathrm{R}^*_{\mathrm{I}}, \mathrm{X}^*) = \mu^*_{\mathrm{II}}(\theta, \mathrm{R}^*_{\mathrm{II}}, \mathrm{X}^*) \tag{7.5}$$

Le coût marginal de constitution du stock X* au cours de la première période (c'est-à-dire le coût marginal d'extraction + stockage + le coût marginal d'opportunité [c'est-à-dire le coût de renoncement à vendre au cours de cette période = λ^*_{I}]) doit être égal à la valeur marginale du stock X* avec lequel l'entreprise démarre à la seconde période. On sait que (cf. sections 5 et 6) :

$$\mu^*_{\mathrm{I}}(\theta, \mathrm{R}^*_{\mathrm{I}}, \mathrm{X}^*) = e^{-r\theta}\, cq^*_{\mathrm{I}}(\theta) + \lambda^*_{\mathrm{I}}(\mathrm{R}^*_{\mathrm{I}}, \mathrm{X}^*)$$

$$\mu^*_{\mathrm{II}}(\theta, \mathrm{R}^*_{\mathrm{II}}, \mathrm{X}^*) = e^{-r\theta}\, cq^*_{\mathrm{II}}(\theta) + \lambda^*_{\mathrm{II}}(\mathrm{R}^*_{\mathrm{II}}, \mathrm{X}^*)$$

où $q^*_{\mathrm{I}}(.)$ et $q^*_{\mathrm{II}}(.)$ sont les sentiers d'extraction optimaux au cours de la première et de la seconde période respectivement. On déduit de (7.4) et (7.5) que le sentier d'extraction est continu en $t = \theta$. De plus, puisque $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) > 0$:

$$q^*_{\mathrm{I}}(\theta) = \begin{cases} \nu^*_{\mathrm{I}}\, e^{r\theta} - k/rc & \text{si les ventes sont nulles en fin de période I} \\ -(2bz^*_{\mathrm{I}} + \lambda^*_{\mathrm{I}})\, e^{r\theta}/c - k/rc & \text{si les ventes sont positives en fin de période I} \end{cases}$$

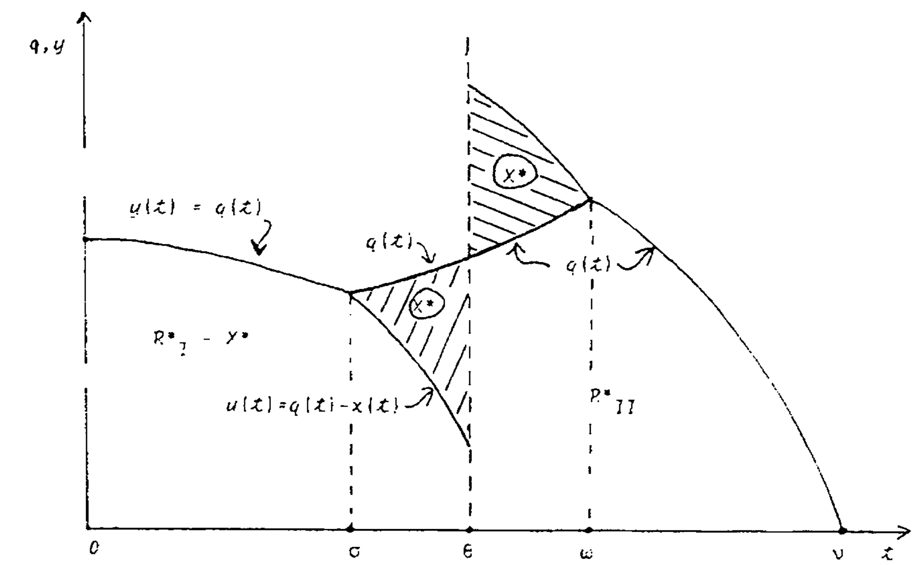
Puisque $q^*_{\mathrm{II}}(\theta) > 0$ d'une part et puisque, d'autre part, les ventes sont positives au début de la seconde période :

$$q^*_{\mathrm{II}}(\theta) = -(2bz^*_{\mathrm{II}} + \lambda^*_{\mathrm{II}})\, e^{r\theta}/c - k/rc$$

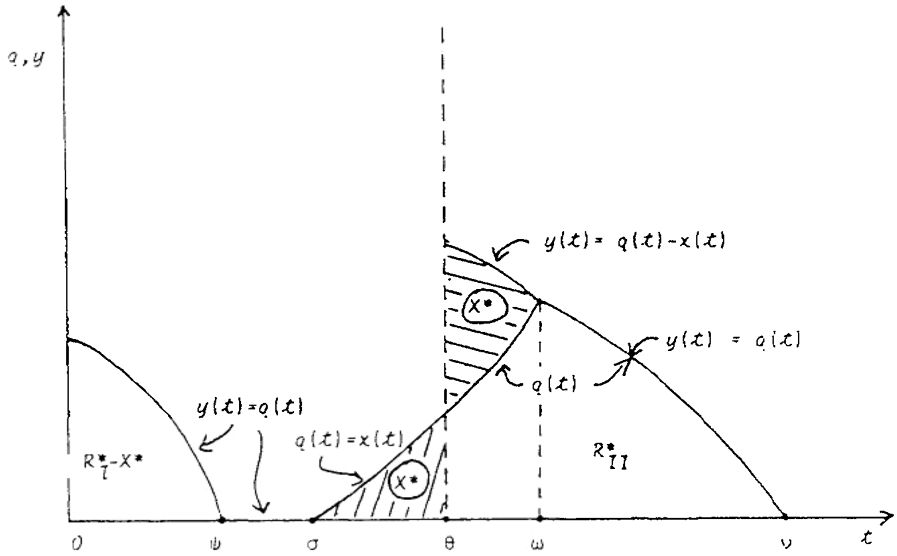
De $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) = q^*_{\mathrm{II}}(\theta)$ on déduit que $q(t)$ est donné par la même fonction aux périodes I et II au voisinage de $t = \theta$.

Des politiques optimales correspondant au cas traité dans ce paragraphe sont représentés sur le graphique 11 (ventes positives en θ–) et 12 (ventes nulles en θ–).

Graphique 11



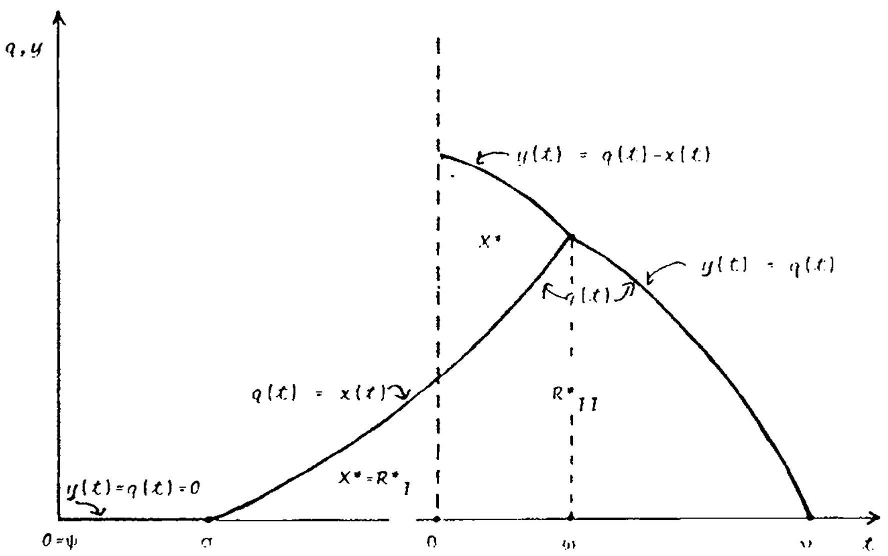
Graphique 12



7.2. Le plan optimal implique que toute la ressource affectée à la première période sert à constituer le stock

Dans ce cas, $X^* = R^*_I$ et ni $(\partial W^*I/\partial RI)-$ ni $(\partial W^*I/\partial XI)+$ ne sont définies. On montre (cf. appendice 2) que néanmoins le sentier d'extraction doit être continu en t = q et que q(t) est donné par la même fonction aux périodes I et II, au voisinage de $t = \theta$. Une politique optimale correspondant à ce cas est représentée sur le graphique 13.

Graphique 13



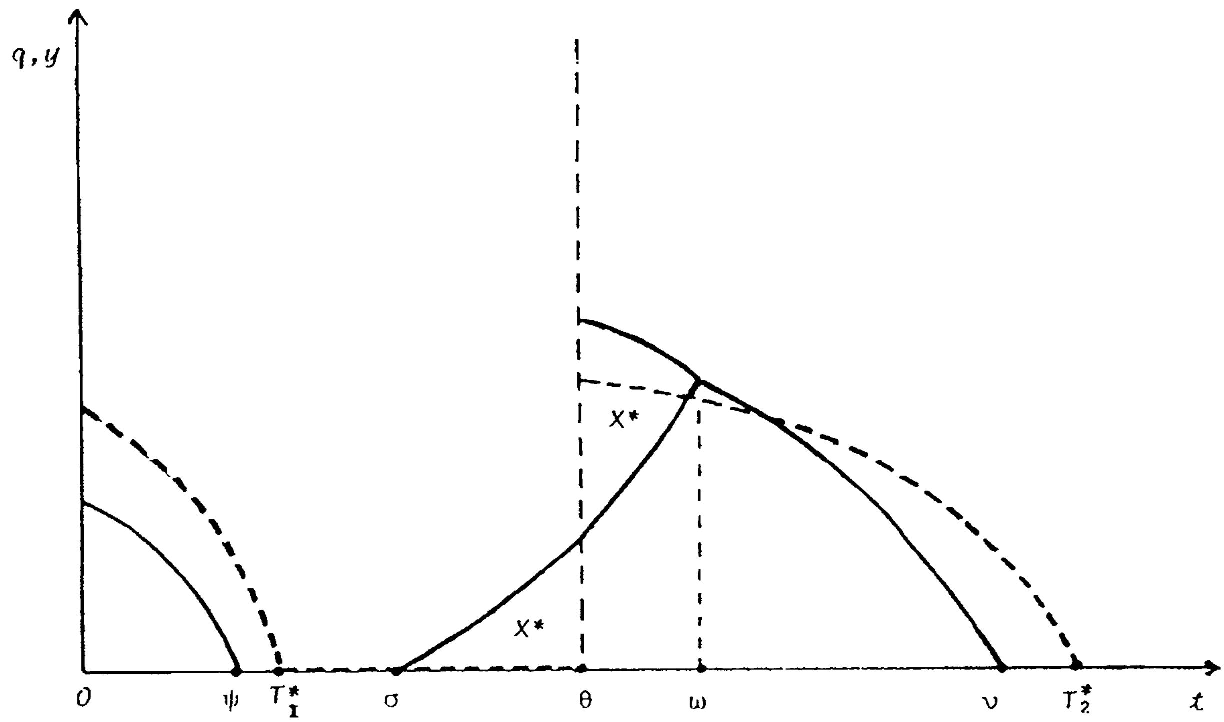
8. COMPARAISON DES POLITIQUES OPTIMALES AVEC ET SANS STOCKAGE, ET RÈGLE D'HOTELLING

8.1. Modification des sentiers d'extraction et de vente consécutive au stockage

Ayant la possibilité de stocker avant la date θ, l'entreprise peut réduire le coût de l'offre après cette date et donc mieux exploiter l'accroissement de demande au-delà de θ. Pour des réserves données, la valeur du plan d'exploitation optimale a pour effet de réduire les ventes au cours de la première période avant θ, pour les accroître au cours de la seconde, après θ, tout en avançant la date ν de fin d'activité du marché.

On a représenté sur le graphique 14 les transformations du plan optimal de vente et d'extraction que permet le stockage pour un montant assez faible des réserves qui impliquerait d'arrêter temporairement de vendre et d'extraire en l'absence de possibilité de stockage. Les sentiers avec possibilité de stockage sont tracés en traits pleins et en traits pointillés, sans cette possibilité.

Graphique 14. Modification du plan d'exploitation consécutive à la possibilité de stocker



8.2. Règle d'Hotelling

L'introduction d'une possibilité de stockage modifie peu la règle d'Hotelling. Tant que l'entreprise ne produit pas pour le seul stock, on a $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ et les conditions (5.4.a) deviennent :

$$\underline{a} - 2b\,(q(t) - x(t)) - cq(t) = \lambda\, e^{rt} \text{ période I}$$

$$\bar{a} - 2b\,(q(t) - x(t)) - cq(t) = \lambda\, e^{rt} \text{ période II}$$

Le profit marginal compris comme la différence entre la recette marginale diminuée du coût marginal d'extraction doit croître au taux de l'intérêt. Mais alors que s'il n'y avait pas stockage, cette règle suffisait pour définir la politique optimale de la firme (sous réserve du respect des conditions de second ordre), elle ne suffit plus lorsqu'il est possible de stocker.

APPENDICE I

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES
DANS LES DIFFÉRENTS SCÉNARIOS DE LA PÉRIODE I

Dans les développements qui suivent, il faut comprendre par fonctions $y(t, z, \lambda)$, $q(t, z, \lambda)$ et $x(t, z, \lambda)$, les fonctions (5.10), (5.11) et (5.14) respectivement où $\underline{a}$ est substitué à $\bar{a}$, et par fonction $q(t, \nu)$, la fonction (6.5).

Scénario 1 : Une seule phase de type 2 au cours de laquelle l'entreprise extrait, vend et accumule son stock sur la totalité de la période I. Ce scénario n'est possible que s'il existe $z < 0$ et $\lambda \geq 0$ tels que :

$$X_I < \int_0^\theta q(t, z, \lambda)\, dt \leq R_I \tag{A.1}$$

et :

$$\int_0^\theta x(t, z, \lambda)\, dt = X_I \tag{A.2}$$

avec $\lambda = 0$ si la seconde inégalité de (A.1) est stricte. Il faut de plus $q(t, z, \lambda)$, $y(t, z, \lambda)$ et $x(t, z, \lambda)$ positifs sur $[0, \theta)$ et $q(t, z, \lambda) < \underline{a}/c$ sur $(0, \theta)$.

Scénario 2 : Une seule phase de type 3 au cours de laquelle l'entreprise n'extrait que pour accumuler son stock. Ce scénario n'est possible que s'il existe $v > 0$ tel que :

$$\int_0^{\theta} q(t, v)\, dt = X_I \tag{A.3}$$

De plus $q(0, v) \geq \underline{a}/c$ si $X_I < R_I$.

Scénario 3 : Phase de type 2 où la firme extrait, vend et accumule sur $[0, \psi)$, suivie d'une phase de type 3 où la firme extrait pour le seul stock sur $[\psi, \theta)$. Ce scénario n'est possible que s'il existe $z < 0$, $\lambda \geq 0$ et $y \in (0, \theta)$ tels que :

$$\int_0^{\psi} x(t, z, \lambda)\, dt + \int_{\psi}^{\theta} q(t, z, \lambda)\, dt = X_I \tag{A.4}$$

$$q(\psi, z, \lambda) = \underline{a}/c \tag{A.5}$$

$$\int_0^{\theta} q(t, z, \lambda)\, dt \leq R_I \tag{A.6}$$

où l'inégalité stricte dans (A.6) implique $\lambda = 0$. Ces conditions sont formulées de façon différente de celle donnée dans le texte au paragraphe 6.4.1. On a écrit ici implicitement la condition de continuité du sentier d'extraction, en posant directement que $q(t)$ est donnée par la même fonction $q(t, z, \lambda)$ sur la totalité de l'intervalle $[0, \theta)$. On a vu précédemment que la continuité du sentier impliquait cette identité de la fonction sur l'intervalle.

Scénario 4 : Phase de type 1 sur $[0, \sigma)$ où l'entreprise n'extrait que pour vendre, suivie d'une phase de type 2 sur $[\sigma, \omega)$ où elle extrait, vend et accumule, suivie enfin d'une phase de type 3 sur $[\omega, \theta)$ où elle n'extrait que pour accumuler. Ce scénario n'est possible que s'il existe $z < 0$, $\lambda \geq 0$, σ et ψ, $\sigma < \psi$, tels que :

$$\int_0^{\sigma} (\underline{a} - e^{rt})/(2b + c)\, dt + \int_{\sigma}^{\theta} q(t, z, \lambda)\, dt \leq R_I \tag{A.7}$$

avec $\lambda = 0$ si l'inégalité est stricte,

$$\int_{\sigma}^{\theta} q(t, z, \lambda)\, dt - \int_{\sigma}^{\psi} y(t, z, \lambda)\, dt = X_I \qquad \text{(A.8)}$$

$$y(\sigma, z, \lambda) = (\underline{a} - \lambda\, e^{r\sigma})/(2b + c) \qquad \text{(A.9)}$$

$$y(\psi, z, \lambda) = 0 \qquad \text{(A.10)}$$

Là encore on a écrit implicitement la condition de continuité du sentier d'extraction en $t = \psi$.

Scénario 5 : Phase de type 1 sur $[0, \sigma)$ où l'entreprise n'extrait que pour vendre, suivie d'une phase de type 2 sur $[0, \theta)$ où l'entreprise extrait pour vendre et accumuler. Ce scénario n'est possible que s'il existe $z < 0$, $1 \geq 0$ et $\sigma \in (0, \theta)$ tels que :

$$\int_{0}^{\sigma} (\underline{a} - \lambda\, e^{rt})/(2b + c)\, dt + \int_{\sigma}^{\theta} q(t, z, \lambda)\, dt \leq R_I$$

avec $\lambda = 0$ si l'inégalité est stricte,

$$\int_{\sigma}^{\theta} x(t, \nu)\, dt = X_I \qquad \text{(A.12)}$$

$$q(\sigma, z, \lambda) = (\underline{a} - \lambda\, e^{r\sigma})/(2b + c) \qquad \text{(A.13)}$$

Scénario 6 : Phase de type 1 où l'entreprise n'extrait que pour vendre sur l'intervalle $[0, \psi)$, suivie d'une phase de type 4 sur $[\psi, \sigma)$ où l'entreprise ni n'extrait, ni ne vend, suivie enfin d'une phase où elle n'extrait que pour accumuler. Ce scénario suppose $X_I = R_I$. Ce scénario n'est possible que s'il existe $\nu > 0$, $\lambda > 0$, ψ et σ, $0 < \psi < \sigma < \theta$, tels que :

$$\int_0^{\psi} (\underline{a} - \lambda e^{rt})/(2b + c)\, dt + \int_{\sigma}^{\theta} q(t, v)\, dt = R_I \tag{A.14}$$

$$\int_{\sigma}^{\theta} q(t, v)\, dt = X_I \tag{A.15}$$

$$\underline{a} - \lambda e^{r\psi} = 0 \tag{A.16}$$

$$q(\sigma, v) = 0 \tag{A.17}$$

Scénario 7 : Phase de type 4 sur $[0, \psi)$ où l'entreprise n'extrait pas, suivie d'une phase de type 3 où l'entreprise n'extrait que pour le stock. Ce scénario suppose $X_I = R_I$. Il n'est possible que s'il existe $v > 0$ et $\psi \in (0, \theta)$ tels que :

$$\int_{\psi}^{\theta} q(t, v)\, dt = X_I \tag{A.18}$$

$$q(\psi, v) = 0 \tag{A.19}$$

APPENDICE 2

Puisqu'il y a stockage au cours de la période I, $q^*_I(\theta) > 0$. Supposons $q^*_{II}(\theta) > q^*_I(\theta)$. On sait que $q^*_I(t)$ est croissante sur $(\theta - \varepsilon, \theta)$ et $q^*_{II}(t)$ croissante sur $(\theta, \theta + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Considérons une réduction $- dq < 0$ du niveau de l'extraction q^* $(\theta + dt_{II})$ en $\theta + dt_{II}$ compensée par un accroissement d'un même montant dq de l'extraction q^* $(\theta - dt_I)$ en $\theta - dt_I$, stocké sur l'intervalle $dt = dt_I + dt_{II}$ de sorte que le plan de ventes de la période II n'est pas affecté. Le bilan de cette modification des plans d'extraction et de stockage s'établit comme suit, en valeur à l'instant $t + dt_{II}$:

– Réduction du coût d'extraction en $\theta + dt_{II}$:

$$c q^*_{II} (\theta + dt_{II})\, dq > c q^*_{II} (\theta)\, dq$$

– Accroissement du coût d'extraction en $\theta - dt_{\mathrm{I}}$:

$$cq^*_{\mathrm{I}}\,(\theta) - dt_{\mathrm{I}})\,dq + rc\,q^*_{\mathrm{I}}\,(\theta - dt_{\mathrm{I}})\,dt\,dq$$
$$< cq^*_{\mathrm{I}}\,(\theta)\,dq + rc\,q^*_{\mathrm{I}}\,(\theta)\,dt\,dq$$

– Accroissement du coût de stockage :

$$k\,dt\,dq$$

et $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) < q^*_{\mathrm{II}}(\theta)$ implique que si dt_{I} et dt_{II}, donc dt, sont suffisamment petits, le bilan de l'opération est positif. Un argument analogue montrerait qu'on ne peut pas avoir $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) > q^*_{\mathrm{II}}(\theta)$. (N.B. : dans ce cas, en plus on pourrait économiser le coût de stockage). Donc $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) = q^*_{\mathrm{II}}(\theta)$. Puisque $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) = \nu^*_{\mathrm{I}} e^{r\theta} - k/rc$ et $q^*_{\mathrm{II}}(\theta) = -\,(2bz^*_{\mathrm{II}} + \lambda^*_{\mathrm{II}})\,e^{r\theta}/c - k/rc$, alors $q^*_{\mathrm{I}}(\theta) = q^*_{\mathrm{II}}(\theta)$ implique $\nu^*_{\mathrm{I}} = -\,(2bz^*_{\mathrm{II}} + \lambda^*_{\mathrm{II}})\,/c$, de sorte que $q^*_{\mathrm{I}}(t)$ et $q^*_{\mathrm{II}}(t)$ ont la même expression au voisinage de θ.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AMIGUES J.-P., MOREAUX M. [1989], *La théorie de l'entreprise minière : extraction et stockage*, GREMAQ RT 89. F, Université de Toulouse I.

CRAMPES C., MOREAUX M. [1989], *La théorie de l'entreprise minière : problèmes particuliers*, GREMAQ RT 8904, Université de Toulouse I.

DASGUPTA P. S., HEAL G. M. [1979], *Economic theory and exhaustible resources*, Cambridge, Cambridge University Press.

HARTWICK J. M., OLEWILER N. D. [1986], *The economics of natural resource use*, New York, Harper and Row.

HOTELLING H. [1931], « The economics of exhaustible resources », *Journal of Political Economy*, 39, p. 137-175.

KULLER R. G., CUMMINGS R. G. [1974], « An economic model of production and investment for petroleum resevoirs », *American Economic Review*, 64, p. 66-69.

LEE D. R., ORR D. [1975], « The private discount rate and resource " conservation " », *Canadian Journal of Economics*, 8, p. 351-363.

MOREAUX M. [1988], *La théorie de l'entreprise minière : les principes de base*, GREMAQ R. T. n° 8813, Université de Toulouse I.

NYSTAD A. N. [1988], « Petroleum reservoir management : a reservoir economic approach », *Natural Resource Modelling*, 2, p. 345-382.

PINDYCK R. S. [1982], « Jointly produced exhaustible resources », *Journal of Environmental Economics and Management*, 9, p. 291-300.