Contrôle optimal périodique : Applications à la dépollution de l'eau

Thomas Guilmeau
Stage de fin d'études

Encadré par Alain Rapaport
INRAE Montpellier



ENSTA Paris : Promotion 2020
Parcours Sciences de l'Optimisation et des Données
Tuteur ENSTA : Hasnaa Zidani



Université Paris-Saclay
M1 Mathématiques Appliquées
M2 Optimisation

Début du stage : 13 avril 2020
Fin du stage : 25 septembre 2020



Mention de confidentialité

Le présent document n'est pas confidentiel. Il peut être diffusé au format papier ou bien au format électronique.

Abstract

Periodic solutions of the chemostat model are studied under integral constraints on the washout rate, aiming at improving average water quality. For the one-species chemostat, an optimal control, which may admit a singular arc, is synthesized for convex-concave growth functions. The optimal trajectories generalize the existing ones for convex and concave growth functions. Then, unicity of periodic positive solutions is considered. In the two-species chemostat, a non-generic counter-example were infinitely many positive periodic solutions exist is constructed. In the one-species gradostat, unicity is proven for a rather broad class of configurations. Contrary to many existing results, this result applies for any monotone growth function.

Key-words : Chemostat model ; Periodic control ; Pontryagin Maximum Principle ; Singular arc ; Competitive & cooperative systems ; Gradostat model.

Remerciements

Je voudrai tout d'abord remercier chaleureusement mon maître de stage, Alain Rapaport, grâce à qui j'ai pu apprendre énormément sur les bio-procédés, le contrôle et la recherche en général. Son implication constante, malgré les désagréments de la visio-conférence, m'aura été précieuse tout au long de ce stage.

J'adresse aussi mes remerciements à Antoine qui a bien voulu essayer de m'aider pour les figures de ce rapport, et à Louise pour sa relecture, ainsi qu'à tous ceux qui d'une façon ou d'une autre m'auront aidé durant ce stage.

Merci à Maëlle.

Table des matières

Mention de confidentialité **2**

Abstract **3**

Remerciements **4**

Introduction **7**

1 Contrôle optimal périodique dans le chemostat à une espèce **12**
1.1 Introduction 12
1.1.1 Présentation du problème 12
1.1.2 Hypothèses 14
1.1.3 $\nu(.)$ strictement convexe ou strictement concave 15
1.2 Une condition nécessaire d'optimalité pour les trajectoires avec ou sans arc singulier 17
1.2.1 Application du PMP 17
1.2.2 La condition de pente 19
1.2.3 Notations 22
1.3 Les trajectoires iB, cas sans arc singulier 24
1.3.1 Deux ensembles réduits à des singletons 24
1.3.2 Exclusion des trajectoires iB pour $i > 3$ 28
1.4 Cas avec arc singulier 30
1.4.1 Application des contraintes 30
1.4.2 Optimalité des trajectoires $BBSB$ 32
1.4.3 Exclusion des trajectoires dupliquées 35
1.5 Régime transitoire pour les trajectoires $3B$ 38
1.5.1 Un contrôle robuste aux incertitudes sur le modèle 38
1.6 Simulations numériques 39
1.6.1 Détermination numérique de la trajectoire optimale 39
1.6.2 Validation à l'aide d'un solveur 40
1.6.3 Gains apportés par l'insertion d'un arc singulier 43

1.7 Cas d'une fonction de croissance non-monotone 45
1.7.1 Application de la condition de pente 46
1.7.2 Etude des valeurs prises par une trajectoire optimale 47
1.8 Un résultat de dualité 49

2 Le cas du chemostat périodique à deux espèces 55
2.1 Introduction 55
2.1.1 Le Principe d'exclusion compétitive 56
2.1.2 Quelques résultats importants de la théorie 58
2.1.3 Une condition suffisante pour l'existence d'une solution périodique de coexistence 62
2.2 Solutions périodiques positives dans le chemostat à deux espèces avec un taux de dilution périodique : le problème de l'unicité 65
2.2.1 Un résultat sur la façon dont sont parcourues les solutions périodiques 66
2.2.2 Une classe d'exemples non-génériques avec une infinité de solutions périodiques positives 67
2.2.3 Plusieurs phénomènes à des échelles de temps différentes . . 73
2.3 Sur-rendements dans le cas de deux espèces 77
2.3.1 Possibilités de sur-rendement 77

3 Le modèle du gradostat 79
3.1 Introduction 79
3.1.1 Présentation du modèle 79
3.1.2 Modélisation du gradostat et hypothèses 81
3.2 Une configuration particulière 84
3.2.1 Modélisation et intérêt 84
3.2.2 Un résultat de réduction de dimension 85
3.2.3 Unicité des solutions périodiques 86
3.2.4 Discussion 90

Conclusion 91

Annexe A : Fonctions de croissance usuelles 92

Bibliographie 95

Liste des tables 98

Table des figures 99

Introduction

Ce travail, réalisé entre les mois d'avril 2020 et de septembre 2020 (entièrement en télétravail), porte sur plusieurs problèmes liés au modèle du chemostat périodique et issus du contrôle optimal et des systèmes dynamiques.

Le modèle du chemostat

Le chemostat [16, 29] est un dispositif mis au point dans les années 50 et est initialement conçu pour étudier le croissance de micro-organismes dans un environnement constant : *a static chemical environment*, expression dont est dérivée le mot chemostat. En particulier, le chemostat est pensé pour étudier la croissance des micro-organismes en fonction d'une ressource en particulier, choisi par l'expérimentateur, les autres aliments nécessaires à la survie des micro-organismes étant en excès. On parle donc de substrat limitant. En manipulant certains paramètres opératoires, on peut expérimentalement mettre en évidence la courbe de croissance d'une espèce donnée de micro-organismes en fonction de la concentration en substrat. Ce dispositif expérimental s'assortit aussi d'une riche modélisation mathématique.

Le chemostat est constitué d'un réacteur contenant une solution aqueuse de volume constant, avec une entrée par laquelle arrivent les nutriments, dont le substrat limitant, et d'une sortie qui évacue le substrat et les micro-organismes. Les débits d'entrée et de sortie sont identiques pour que le volume puisse rester constant. Ce réacteur est de plus supposé parfaitement mélangé, son contenu est donc homogène. Ainsi on parle souvent de *CSTR : continuously stirred tank reactor*. On verra au Chapitre 3 un modèle qui permet de relâcher cette hypothèse.

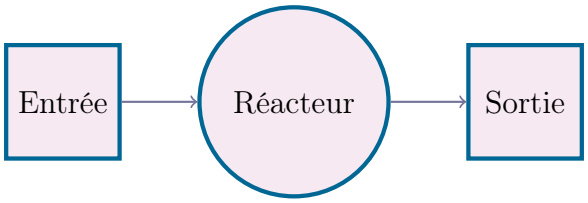


FIGURE 1 – Le chemostat, schéma de principe

Cependant, les usages du chemostat comme dispositif expérimental et modèle mathématique se sont très vite élargis au delà de la micro-biologie.

En écologie théorique, le chemostat permet d'observer dans un environnement maîtrisé des situations telles que la compétition entre deux espèces pour une ressource ou encore des chaînes trophiques simples, et des avancées importantes ont été réalisées pour comprendre mathématiquement ces comportements. Ainsi, en complexifiant la modélisation du chemostat, on peut mieux comprendre des phénomènes observés dans un environnement naturel complexe. Par exemple, on verra au Chapitre 2 qu'un environnement périodique permet la cohabitation de deux espèces en compétition pour une seule ressource.

Le chemostat est également un modèle privilégié pour l'étude mathématique du traitement de l'eau. Le substrat est alors une substance polluante que les micro-organismes vont consommer, assainissant ainsi l'eau en sortie. Dans ce cadre, le choix d'une loi de commande pour le débit peut être un puissant levier de performances, et la théorie du contrôle optimal peut permettre des gains substantiels en dépollution, comme cela sera montré au Chapitre 1.

La dynamique du chemostat est modélisé de façon assez simple par des équations différentielles ordinaires. Le substrat de concentration $s(.)$ est dégradé par n espèces de micro-organismes de concentrations $x = (x_1, ..., x_n)^T$ selon la vitesse de croissance spécifique $\mu_i(s, x)$ particulière à chaque espèce, avec un rendement Y_i. On note le débit $Q(.)$, et on suppose qu'il dépend du temps. Le réacteur est continuellement alimenté en substrat à la concentration s_{in}.

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{Q(t)}{V}(s_{in} - s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(s,x)}{Y_i} x_i, \\ \dot{x}_i = (\mu_i(s, x) - \frac{Q(t)}{V})x_i, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}. \end{cases} \tag{1}$$

Dans le suite, on notera $D(.)$ ou $u(.)$ dans le contexte de la synthèse d'une loi de commande, le taux de dilution $\frac{Q(t)}{V}$. Par ailleurs, dans le cas où $\mu_i(s, x) = \mu_i(s)$, on peut choisir sans perte de généralité $Y_i = 1$. En effet, il suffit alors d'effectuer le changement de variable $\tilde{x}_i = \frac{x_i}{Y_i}$. Dans les autres cas, il suffit de redéfinir $\mu_i(s, x)$, ce que l'on peut faire en conservant les propriétés de monotonie des fonctions de croissances.

De façon générale, les fonctions de croissance sont positives : les micro-organismes

ne meurent pas spontanément (même si on peut ajouter un terme de mortalité dans les équations (1), ce qui n'est pas considéré dans ce travail) ; et nulles en zéro : les micro-organismes ne croissent plus en l'absence de ressources pas spontanément. Les principales fonctions de croissance spécifiques sont résumées dans l'Annexe 3.

Tout au long de ce travail, on suppose que le taux de dilution est une fonction périodique du temps. Pour l'écologie, cela peut représenter un environnement qui varie périodiquement, avec des cycles "jour-nuit" par exemple. Pour le traitement des eaux et les bioprocédés, cela représente des opérations de pompage périodique, ou une maintenance journalière.

A partir de ce modèle, de nombreuses questions se posent. Du point de vue du contrôle optimal et de l'automatique, les questions naturelles sont la synthèse d'une commande minimisant un critère donné, mais aussi la stabilisation de certaines trajectoires. Ce point de vue est celui adopté tout au long du Chapitre 1. Du point de vue des systèmes dynamiques, on peut s'intéresser au comportement asymptotique de (1) : quelles espèces vont survivre ? le régime asymptotique est-il unique ? Ce point de vue sera plutôt celui adopté au Chapitre 2 dans le cas $n = 2$, et au Chapitre 3 pour un modèle un peu différent qui prend en compte des hétérogénéités spatiales.

Le contrôle périodique des systèmes dynamiques

Dans ce travail, le modèle du chemostat avec des taux de dilution périodique est considéré, dans le but de synthétiser des lois de commande optimales. Cependant, la notion de "contrôle optimal périodique" peut recouvrir de nombreux aspects. Pour illustrer cette discussion, on introduit un système commandé $\dot{x} = f(x, u(t))$, où x représente l'état du système et $u(.)$ le contrôle.

Si pour une raison ou pour une autre, une condition initiale $x(0) = x_0$ est fixée, alors on peut minimiser un critère du type $\frac{1}{T}\int_0^T l(x(\tau), u(\tau))d\tau$, en imposant la périodicité de l'état par $x(T) = x_0$. On se ramène donc à un problème d'optimisation avec des contraintes aux bords sur un horizon de temps fini qui correspond à une période. C'est sûrement le point de vue le plus simple sur la question et celui qui a été adopté au Chapitre 1, puisqu'on peut fixer naturellement une condition initiale.

Cependant, il existe d'autres problèmes à considérer lorsqu'on a $x(0) = x_0$. En particulier, le point de vue précédent ne considère pas de régime transitoire. Mais si on laisse au système le temps d'évoluer avant d'atteindre un régime périodique, les performances asymptotiques pourraient se révéler meilleures. On pourrait alors considérer des critères à minimiser du type $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} l(x(\tau), u(\tau))d\tau$, avec des contraintes sur la périodicité du contrôle du type $\frac{1}{T}\int_0^T g(u(\tau))d\tau = \bar{u}$, ou $u(t+T) = u(t)$ pour presque tout t. Sous des hypothèses suffisantes, la trajectoire

devrait aussi converger vers une trajectoire périodique.

Lorsque rien ne permet d'imposer une condition initiale, la périodicité de $x(.)$ s'exprime seulement pas l'égalité $x(0) = x(T)$. On peut alors tout à fait reprendre la minimisation du critère $\frac{1}{T}\int_0^T l(x(\tau), u(\tau))d\tau$ avec cette condition. Un tel problème est bien posé du point de vue théorique, mais soulève ensuite des problèmes pratiques. Si la résolution d'un tel problème permet d'exhiber un couple $(x^*(.), u^*(.))$ optimal, l'existence d'une trajectoire $x'(.)$ telle que $(x'(.), u^*(.))$ est admissible pour le problème peut poser problème si, par exemple, la solution $x'(.)$ est attractive. En pratique, cela signifie que l'on pourrait appliquer le contrôle optimal sans pour autant suivre la trajectoire optimale.

Une fois la trajectoire optimale $x^*(.)$ connue, il serait tout à fait possible d'essayer de la stabiliser, via une loi de commande en boucle fermée par exemple. De plus, on pourrait poser un autre problème d'optimisation pour amener en temps minimum le système vers la trajectoire optimale. L'approche privilégiée dans ce travail relève plutôt du domaine des systèmes dynamiques, et est celle qui a été adoptée dans les chapitres 2 et 3. Elle consiste à chercher à montrer que pour un contrôle $u(.)$ donné (et en particulier pour le contrôle optimal $u^*(.)$), il n'existe qu'une seule solution périodique associée, et qu'elle est attractive. Un tel résultat rendrait inutile la mise en place d'un feedback, potentiellement difficile à synthétiser, puisque le système convergerait naturellement vers la solution périodique optimale.

Une vue d'ensemble du travail effectué dans ce stage

Tout au long de ce stage, j'ai travaillé sur le modèle du chemostat périodique, en adoptant principalement deux points de vue : un point de vue plutôt orienté *contrôle optimal* et un point de vue plutôt orienté *systèmes dynamiques*.

Le Chapitre 1 est écrit depuis ce premier point de vue. En effet, pour un dispositif de dépollution de l'eau modélisé par un chemostat avec une seule souche microbienne, un contrôle optimal minimisant la concentration en substrat est synthétisé à l'aide du Principe du Maximum de Pontryagin pour une certaine classe de fonctions de croissance. Ces résultats généralisent ceux de [6, 7], qui ne concernent que les fonctions convexes ou concaves. Avec les résultats de ces deux articles précédents et ceux de ce travail, on connaît maintenant le contrôle optimal périodique des quatre fonctions de croissance les plus usuelles présentées dans l'Annexe A.

Le Chapitre 2 avait initialement pour objectif de prouver des résultats analogues à ceux du Chapitre 1 dans le cas du chemostat avec deux souches microbiennes. Cependant, le comportement asymptotique du chemostat périodique à deux espèces est moins bien connu que dans le cas d'une seule espèce. En particulier, une question importante liée à ce modèle concerne l'unicité des solutions

périodiques où les deux espèces coexistent n'est pas prouvée, bien que pressentie. La compréhension de ce phénomène du point de vue des systèmes dynamiques occupe donc ce chapitre, avec en particulier la construction d'un contre-exemple (non-générique) pour lequel il existe une infinité de solutions périodiques pour un contrôle donné.

Enfin, une extension du modèle du chemostat est étudiée au Chapitre 3. Il s'agit du modèle du gradostat, dans lequel plusieurs chemostat sont inter-connectés en réseau et qui permet de modéliser des inhomogénéités spatiales sans recourir à des équations aux dérivées partielles. Le gradostat en régime périodique a été beaucoup moins étudié que le chemostat. On arrive d'abord à étendre dans ce chapitre quelques résultats connus pour le chemostat. On s'intéresse aussi au problème de l'unicité des solutions périodiques et lorsque les réservoirs sont inter-connectés en série, on montre ce résultat sans autre hypothèse que la structure en cascade de la dynamique.

Simulations numériques

De nombreuses simulations numériques ont été réalisées au cours de ce travail, pour mieux comprendre les systèmes étudiés, obtenir des résultats quantitatifs et pour illustrer ce rapport. Elles ont toutes été réalisées dans le langage de programmation Julia [8].

Presque toutes les courbes présentées ont été obtenues en utilisant le package DifferentialEquations.jl [24], et une méthode de Tsitouras à l'ordre 5 comme solveur. La Section 1.6 joue toutefois un rôle particulier dans ce travail puisque toutes les méthodes numériques présentées dans cette section (à l'exception de l'utilisation du solveur Bocop) ont été programmées *ad hoc*.

Chapitre 1

Contrôle optimal périodique dans le chemostat à une espèce

1.1 Introduction

1.1.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la dépollution de l'eau avec un dispositif modélisé par un chemostat, et avec une seule souche de micro-organismes.

Le substrat, dont la concentration est notée $s(.)$ est donc dégradé par les micro-organismes, dont la concentration est notée $x(.)$ selon la vitesse de croissance spécifique $\mu(s,x)$ et avec un rendement Y. Dans le cas d'une espèce, la dynamique (1) s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{s} = D(t)(s_{in} - s) - \frac{\mu(s,x)}{Y}x, \\ \dot{x} = (\mu(s,x) - D(t))x. \end{cases} \tag{1.1}$$

On peut toujours choisir $Y = 1$ lorsque $\mu(s,x) = \mu(s)$. En effet, il suffit alors alors d'effectuer le changement de variable $x' = \frac{x}{Y}$. Dans notre étude, nous ne considérerons pas de vitesse de croissance spécifique qui dépende de x, on peut donc faire prendre $Y = 1$ sans perte de généralité.

Dans notre cas, on s'intéresse à des régimes variables où $D = \frac{Q}{V}$ est le taux de dilution et dépend du temps. En particulier, on cherche à obtenir un régime périodique pour une période $T > 0$ fixée. La masse équivalent carbone totale $b = s + x$ qui évolue selon la dynamique $\dot{b} = D(t)(s_{in} - b)$ évolue elle aussi périodiquement. Cependant, le seul régime périodique possible pour $b(.)$ est le régime constant $b = s_{in}$. La masse équivalent carbone reste donc constante telle que $s + x = s_{in}$, et on peut réécrire la dynamique uniquement en la variable s

$$\dot{s} = \big(u(t) - \nu(s)\big)\big(s_{in} - s\big), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

Le terme $u(.)$ représente le taux de dilution du chemostat D et sera le contrôle que l'on peut exercer sur le système. La fonction $\nu(.)$ est la vitesse de croissance spécifique et est en fait définie par $\nu(.) = \mu(., s_{in} - .)$. C'est un cas particulier de système contrôle-affine, avec $f(s) = -\nu(s)(s_{in} - s)$ et $g(s) = s_{in} - s$.

Les systèmes de dépollution sont souvent pilotés en régime constant. Ainsi, un enjeu peut alors être de trouver le régime constant optimal pour un critère donné, comme dans [11, 5]dans le cas où la dynamique ou le coût ne sont pas connus. Cependant, cette stratégie n'est pas nécessairement globalement optimale et introduire des variations périodique pourrait permettre de meilleures performances : meilleure dépollution ou plus d'eau écoulée.

L'utilisation de modes de fonctionnement périodiques plutôt que constants est un axe de recherche important pour l'amélioration des performances des réacteurs biologiques ou chimiques [2]. Parmi les outils présentés dans cette analyse, le π-critère [1] est un outil qui permet de déterminer s'il existe des fréquences pour lesquelles un contrôle périodique sinusoïdal proche du régime constant améliorerait le coût. Cette technique permet de prendre en compte des contraintes intégrales sur le contrôle (contrainte sur le débit écoulé), mais il ne permet pas non plus de déterminer un contrôle optimal global. Le π-critère peut néanmoins être utilisé pour initialiser un algorithme de continuation-optimisation comme dans [10]. Les auteurs de ce travail examinent plusieurs formes de forçages périodiques, et notent que les paramètres optimaux qu'ils déterminent sont souvent éloignés de ceux donnés par le π-critère.

Une caractérisation de la fonction valeur d'un problème général d'optimisation périodique est donnée à l'aide de la théorie de Hamilton-Jacobi-Bellman dans [22], mais introduit des conditions au bord difficiles à vérifier hors du cas linéaire-quadratique.

L'approche est différente dans [6, 7], puisque des conditions d'existence d'un sur-rendement sont données. De plus, un contrôle optimal global périodique lorsque ce sur-rendement existe est donné à l'aide du Principe du Maximum de Pontryagin. Ces conditions portent sur la convexité ou la concavité de la fonction de croissance.

Le présent travail, et en particulier le Chpaitre 1, s'inscrit dans la continuité de [6, 7], et vise à en étendre les résultats pour des fonctions de croissance fonctions convexes-concaves.

Dans le cadre de traitement des eaux, on s'intéresse d'une part à la qualité de l'eau traitée, liée à la concentration en substrat s, et d'autre part à la quantité d'eau traitée, liée au taux de dilution u. Habituellement, les performances en dépollution sont évaluées en prenant le moyenne de plusieurs mesures de la concentration en substrat sur une période. Ici, on va donc chercher à minimiser la concentration moyenne en substrat dans le chemostat par un contrôle périodique, avec la contrainte d'écouler une quantité d'eau donnée (correspondant à un ré-

gime constant) pendant la période d'étude, dans le cas de fonctions de croissance convexe-concave. On s'intéresse donc au problème suivant

$$\begin{aligned} \min_{u(.)\in\mathcal{U}} \quad & \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \\ \text{t.q.} \quad & s \text{ est solution de (1.2)}, \\ & s(0) = s(T), \\ & \int_0^T u(t)dt = \bar{u}T. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Un autre problème d'intérêt, qui est en quelque sorte le "dual" du précédent puisque objectif et contrainte sont inversés consiste à maximiser la quantité d'eau traitée avec la contraint d'atteindre une qualité donnée. Ce problème s'écrit

$$\begin{aligned} \max_{u(.)\in\mathcal{U}} \quad & \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \\ \text{t.q.} \quad & s \text{ est solution de (1.2)}, \\ & s(0) = s(T), \\ & \int_0^T s(t)dt = \bar{s}T. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ce problème sera traitée dans un second temps, en utilisant les résultats trouvés pour le problème (1.3).

Les contrôle sont pris dans l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \longrightarrow [D_-, D_+], u \text{ est mesurable}\}. \tag{1.5}$$

Dans la suite, on appellera *contrainte de périodicité* la contrainte

$$s(0) = s(T). \tag{1.6}$$

De même, on appellera *contrainte sur le contrôle* la contrainte

$$\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T. \tag{1.7}$$

1.1.2 Hypothèses

Pour que le problème admette au moins une solution, on suppose que $\bar{s} \in (0, s_{in})$, avec $\nu(\bar{s}) = \bar{u} \in (D_-, D_+)$.

On s'intéresse en particulier à une vitesse de réaction ν qui soit

— de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, s_{in}]$,

— nulle en 0 et strictement croissante,
— strictement convexe sur $[0, s_c)$, puis strictement concave sur $(s_c, +\infty)$, avec $s_c \in (0, s_{in})$,
— telle qu'il existe un unique point $s^* > s_c$, telle que la tangente à $\nu(.)$ en s^* coupe l'axe des abscisses en 0.

En particulier, ces hypothèses sont satisfaites par la fonction de Hill pour $n > 1$:

$$\nu(s) = \frac{\mu_{max} s^n}{K_s^n + s^n}. \tag{1.8}$$

Par ailleurs, on suppose que l'ensemble $(0, s_{in})$ est invariant pour la dynamique (1.2). En particulier, on suppose
— $(D_+ - \nu(s))(s_{in} - s) > 0$, $\forall s \in (0, s_{in})$, avec de plus $(D_+ - \nu(s))(s_{in} - s) = 0 \iff s = s_{in}$,
— $(D_- - \nu(s))(s_{in} - s) < 0$, $\forall s \in (0, s_{in})$, avec de plus $(D_- - \nu(s))(s_{in} - s) = 0 \iff s = 0$.

Lemme 1. *Soit un contrôle $u(.)$ vérifiant $\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T$, et $s(.)$ la solution de (1.2) associée, telle que $s(0) = s(T)$. Alors, il existe $t \in (0, T)$ tel que $s(t) = \bar{s}$.*

Comme les solutions sont périodiques, ce résultat permet d'écrire sans perte de généralité la contrainte $s(0) = s(T)$ dans le Problème (1.3) sous la forme$s(0) = s(T) = \bar{s}$

Démonstration. Remarquons d'abord que, comme $s(t) < s_{in}$, $pptt \in [0, T]$, on a

$$\int_0^T \frac{\dot{s}(t)}{s_{in} - s(t)} dt = \int_0^T \nu(\bar{s}) - s(t) dt.$$

En définissant $h(s) = \int_{\bar{s}}^{s} \frac{1}{s_{in} - \xi} d\xi$, et $y(t) = h(s(t))$, on a que $y(.)$ est T-périodique et que $0 = y(T) - y(0) = \int_0^T \nu(\bar{s}) - s(t)dt$.

Comme $\nu(.)$ est strictement croissante, et que $s(.)$ est absolument continue, on en déduit qu'il existe $t \in (0, T)$ tel que $s(t) = \bar{s}$. □

1.1.3 $\nu(.)$ strictement convexe ou strictement concave

On rappelle brièvement dans cette partie des résultats de [6] qui ont trait à l'existence de sur-rendements.

Proposition 1. *Si $\nu(.)$ est strictement convexe, alors toute solution non-constante $s(.)$ de (1.2) issue d'un contrôle $u(.)$ satisfaisant $\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T$ permet un sur-rendement.*

Démonstration. Supposons que $s(0) = \bar{s}$. D'après le Lemme 1, on a $\int_0^T \nu(s(t)) - \nu(\bar{s})dt = 0$.

L'inégalité de Jensen donne alors

$$\nu\Big(\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt\Big) < \frac{1}{T}\int_0^T \nu(s(t))dt = \nu(\bar{s}).$$

La stricte croissance de $\nu(.)$ donne alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt < \bar{s}.$$

□

Proposition 2. *Si $\nu(.)$ est strictement concave, alors aucune solution $s(.)$ non-constante de (1.2) issue d'un contrôle $u(.)$ satisfaisant la contrainte sur le contrôle (1.7) ne permet un sur-rendement.*

Démonstration. Il suffit de supposer $s(.)$ solution de (1.2) issue d'un contrôle $u(.)$ satisfaisant $\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T$ telle que $\int_0^T s(t)dt < T\bar{s}$, et de suivre les étapes de la preuve de la Proposition 1 pour conclure par l'absurde. □

1.2 Une condition nécessaire d'optimalité pour les trajectoires avec ou sans arc singulier

1.2.1 Application du PMP

On peut réécrire le problème (1.3) sous la forme suivante sans perdre en généralité :

$$\begin{aligned} \min_{u(.)\in\mathcal{U}} \quad & \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \\ \text{t.q.} \quad & \dot{s} = \big(u(t)-\nu(s)\big)\big(s_{in}-s\big), \\ & \dot{y_1} = u(t), \\ & (s,y_1)(0) = (\bar{s},0), \\ & (s,y_1)(T) = (\bar{s},\bar{u}T). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Cette écriture permet de transformer la contrainte intégrale en des conditions aux bords à l'aide d'une dynamique augmentée. De plus, comme l'ensemble des vecteurs vitesse est toujours convexe pour cette dynamique augmentée, le minimum est bien atteint.

Soit H le Hamiltonien associé à (1.9), défini par

$$H = H(s,u,p_s,p_1,\beta) = p_s\big(f(s)+ug(s)\big) + p_1u + \beta s, \tag{1.10}$$

avec (p_s,p_1) le coétat associé à (s,y_1), et β un scalaire.

Soit $u \in \mathcal{U}$ un contrôle optimal de (1.9), avec (s,y_1) la trajectoire associée. Alors il existe $\beta \in \{0,1\}$, et une application absolument continue $p : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui satisfait les équations adjointes

$$\begin{cases} -\dot{p_s} = p_s\big(f'(s)+u(t)g'(s)\big) + \beta, \\ -\dot{p_1} = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

avec $(\beta,p(t)) \neq (0,0)$, $pptt \in [0,T]$.Dans la suite, on notera $p_1(t) = p_1$.

Enfin, le contrôle $u(.)$ satisfait la condition de Hamilton

$$H\big(s(t),u(t),p_s(t),p_1,\beta\big) \leq H\big(s(t),v,p_s(t),p_1,\beta\big), \quad \forall v \in [D_-,D_+],\ \text{pp } t \in [0,T]. \tag{1.12}$$

Dans la suite, on définit la fonction de commutation $\phi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $\phi(t) = \nabla_u H\big(s(t),u(t),p_s(t),p_1,\beta\big)$. En particulier, $u(t) = D_-$ *pp.t* tel que $\phi(t) > 0$, et $u(t) = D_+$ *pp.t* tel que $\phi(t) < 0$.

Proposition 3. *Soit $s(.)$ une trajectoire que l'on suppose optimale pour le problème (1.9). S'il existe $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ tels que $\phi(t) = 0, pp.t \in [t_1, t_2]$, alors il existe $\tilde{s} \in (0, s_{in})$ tel que $s(t) = \tilde{s}$, $u(t) = \nu(\tilde{s})$ et $p_s(t) = \frac{1}{\nu'(\tilde{s})g(\tilde{s})}$ sur $[t_1, t_2]$. De plus, $\beta = 1$ et $p_1\nu'(\tilde{s}) = -1$.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que $g(s(t)) = s_{in} - s(t) > 0$ car l'ensemble $(0, s_{in})$ est invariant par la dynamique (1.2). On a donc $p_s(t) = -\frac{\psi_1}{g(s(t))}$, comme $\phi(t) = 0$.

Si $p_1 = 0$, alors $p_s(t) = 0$ sur $[t_1, t_2]$. On déduit ensuite de la dynamique de p_s que $\beta = 0$. Cela donne ensuite $-\dot{p_s} = p_s\big(f'(s) + u(t)g'(s)\big)$. Comme p_s est nulle sur $[t_1, t_2]$, on a que p_s est nulle sur $[0, T]$ entier. Mais cela est incompatible avec la condition $(\beta, p) \neq 0$. Ainsi, $p_1 \neq 0$.

Sur l'arc singulier, on a aussi $\dot{\phi} = 0$, *pp.t* avec

$$\dot{\phi} = p_s\big(f(s)g'(s) - f'(s)g(s)\big) - \beta g(s).$$

En injectant l'expression de p_s sur $[t_1, t_2]$, et avec $g' = -1$, on trouve

$$\frac{p_1}{g(s(t))}\big(f'(s(t))g(s(t)) - f(s(t))\big) - \beta g(s(t)) = 0.$$

Supposons par contradiction que $\beta = 0$. Alors on a nécessairement l'égalité $f'(s(t))g(s(t)) - f(s(t)) = 0$, le cas $p_1 = 0$ ayant déjà été exclu.

Or, $f'(s(t))g(s(t)) - f(s(t)) = -\nu'(s(t))(s_{in} - s(t))^2$. Ainsi, soit $\nu'(s) = 0$, mais cela impliquerait $s = 0 \notin (0, s_{in})$, ou $s = s_{in}$, que l'on peut exclure aussi pour les mêmes raisons. On en conclut que $\beta = 1$.

L'équation $\dot{\phi} = 0$ donne alors $p_1 = -\frac{1}{\nu'(s(t))}$, $pp.t \in [t_1, t_2]$.

Avec les hypothèses sur ν, on en déduit que $s(.)$ doit être constante sur $[t_1, t_2]$, égale à une valeur $\tilde{s} \in (0, s_{in})$. On en déduit que $\dot{p_s} = 0$, ce qui implique $u(t) = \tilde{u} = \nu(\tilde{s})$ sur $[t_1, t_2]$, ce qui conclut la preuve.

□

Définition 1. *Soit $s(.)$ une solution de (1.2) sur $[0, T]$. On définit s_m, respectivement s_M, la valeur minimale, respectivement maximale, de $s(.)$ sur $[0, T]$.*

Ces deux valeurs existent et sont atteintes, car $s(.)$ est continue sur $[0, T]$ qui est compact.

Lemme 2. *Soit $s(.)$ une trajectoire que l'on suppose optimale avec un arc singulier en $\tilde{s}$. Alors $\tilde{s} > s_c$ et $s_m < s_c$.*

Démonstration. Si un arc singulier existe dans une trajectoire optimale, en $\tilde{s}$ dans un domaine où $\nu(.)$ est strictement convexe, d'après la Proposition 1, on peut

trouver une amélioration périodique non constante du coût. Donc $\tilde{s}$ n'est pas dans un domaine où $\nu(.)$ est strictement convexe.

Par ailleurs, si s_m est dans le domaine concave (et on suppose que $\bar{s}$ aussi), alors toute la trajectoire est dans la partie concave et reste constante car il n'existe pas de déviation périodique profitable d'après la Proposition 2. On aurait alors $s_m = \bar{s} = \tilde{s} = s_M$. □

On introduit ensuite une condition nécessaire d'optimalité, que l'on appellera *condition de pente*.

1.2.2 La condition de pente

Le PMP permet de caractériser la trajectoire sur un arc singulier, mais ne permet pas de dériver des conditions nécessaires suffisamment fortes sur les trajectoires optimales. On va donc utiliser en plus la conservation du Hamiltonien le long des trajectoires, afin d'obtenir une condition nécessaire d'optimalité plus forte, qui peut s'exprimer sous la forme d'une expression analytique.

Proposition 4. *Soit $s(.)$ une trajectoire optimale non-constante telle qu'il existe $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ tels que $\phi(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$, alors la valeur $\tilde{s}$ atteinte sur l'arc est telle que $s_M = \tilde{s}$ et satisfait*

$$\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s}) - \nu(s_m)}{\tilde{s} - s_m}. \tag{1.13}$$

Démonstration. Comme $s(.)$ est croissante, respectivement décroissante, quand $u = D_+$, respectivement $u = D_-$, les instants t_M et t_m où sont atteints s_M et s_m sont nécessairement des temps de commutation, i.e. des instants où $\phi(t) = 0$.

On en déduit que $p_s(t_M)g(s_M) = p_s(t_m)g(s_m) = -p_1$. Par ailleurs, d'après le PMP, le Hamiltonien est conservé le long des trajectoires extremales. On en déduit

$$\begin{aligned} H &= -\frac{p_1 f(s_M)}{g(s_M)} + s_M = -\frac{p_1 f(s_m)}{g(s_m)} + s_m, \\ &= p_1 \nu(s_M) + s_M = p_1 \nu(s_m) + s_m. \end{aligned}$$

On en déduit, avec la Proposition 3, que $\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(s_M) - \nu(s_m)}{s_M - s_m}$.

Par ailleurs, en supposant que $s_m < \tilde{s} < s_M$, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on a aussi $\phi(t) = 0$. En utilisant aussi la conservation du Hamiltonien, on aboutit à deux

autres équations similaires, donnant :

$$\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(s_M) - \nu(s_m)}{s_M - s_m},$$
$$\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s}) - \nu(s_m)}{\tilde{s} - s_m},$$
$$\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s}) - \nu(s_M)}{\tilde{s} - s_M}.$$

Comme $\tilde{s}$ et s_M sont dans la partie strictement concave de $\nu(.)$, on a $\nu(s_M) > \nu'(\tilde{s})(s_M - \tilde{s}) + \nu(\tilde{s})$, ce qui contredit l'une des équations de conservation du Hamiltonien.

On a donc $\tilde{s} = s_M$ et la condition de pente $\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s})-\nu(s_m)}{\tilde{s}-s_m}$.

□

Dans ce qui suit, on change de point de vue, puisqu'on va essayer de trouver les couples $(\tilde{s}, s_m)$ qui vérifient la condition de pente (1.13) sans se préoccuper de leur admissibilité.

Définition 2. *Soit $P : \tilde{s} \longmapsto P(\tilde{s})$, telle que $s_m := P(\tilde{s})$ vérifie la condition de pente (1.13).*

Lemme 3. *L'application $P : \tilde{s} \longmapsto s_m$ tel que $\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s})-\nu(s_m)}{\tilde{s}-s_m}$ est bien définie et est une bijection continue de $[s_c, s^*]$ dans $[0, s_c]$.*

Démonstration. on se donne $\tilde{s} \in [s_c, s^*]$.

Supposons d'abord par l'absurde qu'il existe $s_m \in (s_c, +\infty)$ tel que $\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s})-\nu(s_m)}{\tilde{s}-s_m}$. Comme $\nu(.)$ est strictement concave sur ce domaine, on a $\nu(s_m) > \nu(\tilde{s}) + \nu'(\tilde{s})(s_m - \tilde{s})$, ce qui contredit la condition de pente, car par construction, $\tilde{s} > s_m$.

On considère l'application $g : s_m \longmapsto \nu(\tilde{s}) - \nu(s_m) + \nu'(\tilde{s})(s_m - \tilde{s})$, définie sur $[0, s_c]$.

On a $g(0) = \nu(\tilde{s}) - \tilde{s}\nu'(\tilde{s})$. Comme l'application $s \longmapsto \nu(s) - s\nu'(s)$ est strictement croissante sur $(s_c, +\infty)$, que s^* est tel que $\nu(s^*) - s^*\nu'(s^*) = 0$ et que $\tilde{s} \leq s^*$, alors $g(0) \leq 0$.

Par ailleurs, $g(s_c) = \nu(\tilde{s}) - \nu(s_c) + \nu'(\tilde{s})(s_c - \tilde{s}) \leq 0$.

g étant continue sur $[0, s_c]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe $s_m \in [0, s_c]$ tel que $f(s_m) = 0$, c'est-à-dire que s_m vérifie la contrainte de pente pour $\tilde{s}$.

Supposons maintenant qu'il existe $s_1, s_2 \in [0, s_c]$ avec $s_1 < s_2$, tels que $g(s_1) = g(s_2) = 0$, et sans autre zéro de g dans (s_1, s_2) ni (s_2, s_c). Alors, la convexité de $\nu(.)$ permet de dire que $f(\frac{s_1+s_2}{2}) > 0$.

On en déduit, à l'aide du théorème de Rolle, qu'il existe $s_0 \in (s_1, s_2)$ tel que $g'(s_0) = 0$, ie. $\nu'(s_0) = \nu'(\tilde{s})$. De même, on en déduit que $g'(s_2) = 0$. On a donc deux points distincts, s_0 et s_2 dans $[0, s_c]$ de même dérivée que $\tilde{s}$. Comme $\nu(.)$ strictement convexe puis strictement concave, strictement croissante, cette situation est absurde. On a donc unicité du zéro de f.

On en déduit que $P : \tilde{s} \longmapsto s_m$ est bien définie et est une bijection de $[s_c, s^*]$ dans $[0, s_c]$. En particulier, $P(s_c) = s_c$ et $P(s^*) = 0$. Le caractère continu vient du théorème des fonctions implicites. □

On conclut cette section en donnant une condition similaire lorsque l'on suppose que la trajectoire optimale ne comporte pas d'arc singulier.

Proposition 5. *Soit $s(.)$ une trajectoire optimale non-constante que l'on suppose sans arc singulier. Alors les temps de commutation t_s sont tels que $s(t_s)$ peut prendre au plus trois valeurs, $s_M \leq s_I \leq s_m$ et il existe $p_1 \neq 0$ tel que $-\frac{1}{p_1} = \frac{\nu(s_1)-\nu(s_2)}{s_1-s}$, pour $s_1, s_2 \in \{s_M, s_m, s_I\}$ distincts.*

Une trajectoire sans arc singulier n'a pas forcément ses temps de commutation t_s tels que $s(t_s)$ atteigne les trois valeurs. Elle peut n'en atteindre que deux, qui seront alors nécessairement s_M et s_m.

Démonstration. La valeur de p_1 proposée dans la proposition est la même que la valeur du coétat p_1.

Montrons d'abord que $p_1 \neq 0$. Pour cela, on suppose par contradiction que $p_1 = 0$. Alors, $\phi(t) = p_s(t)g(s(t)) \ \forall t \in [0, T]$.

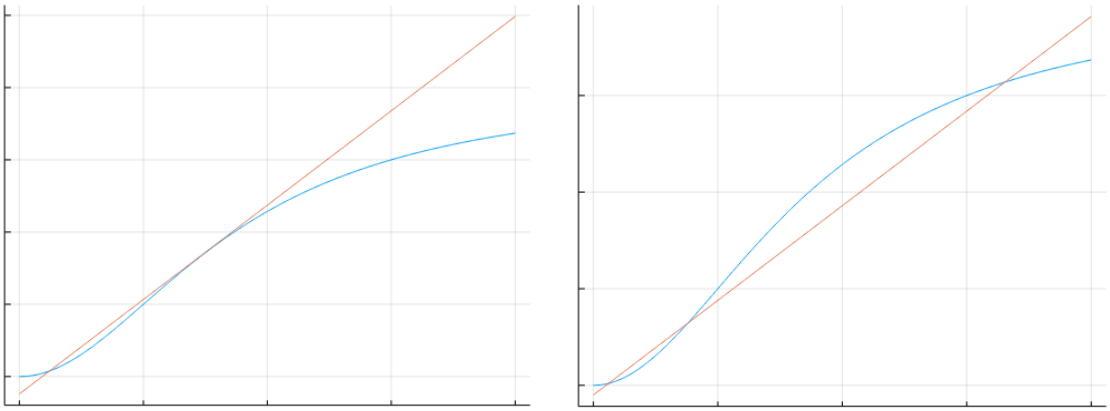
Soit $t_0 \in (0, T)$ tel que $\phi(t_0) = 0$ (un tel t existe nécessairement car la trajectoire n'est pas constante et n'est pas monotone). Alors $p_s(t_0) = 0$ et $-\dot{p_s}(t_0) = \beta$. On a alors $\beta \neq 0$. On choisit donc $\beta = 1$.

On en déduit que $p_s(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$. Ainsi, pour tout $t \geq t_0$, $\phi(t) \leq 0$, ce qui est clairement sous-optimal : la concentration $s(.)$ ne peut plus croître. Donc $p_1 \neq 0$.

Ensuite, supposons $t_1, t_2 \in [0, T]$ deux temps de commutation. On note $s_1 = s(t_1)$ et $s_2 = s(t_2)$ et on suppose $s_1 \neq s_2$. En appliquant les mêmes techniques que dans la preuve de la Proposition 4, on trouve que $-\frac{1}{p_1} = \frac{\nu(s_1)-\nu(s_2)}{s_1-s_2}$.

Comme la fonction $\nu(.)$ est strictement convexe puis strictement concave, on peut avoir au plus trois valeurs distinctes satisfaisant cette condition, dont deux qui doivent nécessairement être le maximum et le minimum de la trajectoire. □

Remarque 1. *Ces conditions très précises sur les points de commutation permettent d'ores et déjà de remarquer que si les signes de $\dot{s}(0^+)$ et de $\dot{s}(T^-)$ sont distincts, alors les signes de $\dot{s}(T^-)$ et de $\dot{s}(T^+)$ le sont aussi par périodicité. Une commutation a alors lieu en $s(t) = \bar{s}$. Cela peut arriver mais seulement dans le cas sans arc singulier et pour $s_m, \bar{s}, s_M$ satisfaisant la condition de pente.*



(a) Condition de pente dans le cas d'un arc singulier

(b) Condition de pente dans le cas sans arc singulier

FIGURE 1.1 – La condition de pente

Les propositions 4 et 5 permettent de beaucoup restreindre la forme des trajectoires candidates à l'optimalité. Dans les sections qui suivent, on étudie ces trajectoires possibles.

1.2.3 Notations

On définit tout d'abord une notion de *solution admissible* pour le Problème (1.9).

Définition 3. *Soit $s(.)$ une trajectoire solution de (1.2) sur $[0, T]$, issue du contrôle $u(.)$. Si $s(.)$ satisfait les contraintes de périodicité $s(0) = s(T) = \bar{s}$ et de contrôle $\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T$, alors on dira que $s(.)$ est admissible pour (1.9).*

Définition 4. *Soit $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$.*

On appelle iB les trajectoires admissibles pour (1.9) pour lesquelles la commande vérifie $u \in \{D_-, D_+\}$, avec i intervalles de mesure non nulle sur lesquels u vaut D_+ ou D_-, et $i - 1$ commutations.

Une trajectoire iB ne comporte donc pas d'arc singulier et est constituée de i portions de courbes, alternativement strictement croissantes et strictement décroissantes. Si une trajectoire iB est optimale alors elle vérifie la condition de pente présentée Proposition 5.

Éventuellement, on pourra préciser la monotonie d'une trajectoire $s(.)$ de type iB en notant iB^+ si la première portion est strictement croissante, et iB^- si la première portion est strictement décroissante.

Définition 5. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{s} \in (0, s_{in})$ et $(i_j)_{2\leq j\leq n}$.*

On note $(i_1B)S(i_2B)S...S(i_nB)$ les trajectoires admissibles de (1.9) pour lesquelles la commande vérifie $u \in \{D_-, \nu(\tilde{s}), D_+\}$, constituée de concaténations de trajectoires iB et d'arc singuliers en $\tilde{s}$.

Les trajectoires $(i_1B)S(i_2B)S...S(i_nB)$ généralisent les trajectoires iB en introduisant des arcs singuliers. On retrouve les trajectoires iB lorsque tous les arcs singuliers sont de longueur nulle.

On définit maintenant une fonction qui permettra de réécrire de façon très compacte les contraintes (1.6) et (1.7) sous la forme d'une intégrale en l'état.

Définition 6. *On définit la fonction $\eta : (0, s_{in}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, définie par*

$$\eta(s) = \frac{1}{(D_+ - \nu(s))(s_{in} - s)} - \frac{1}{(D_- - \nu(s))(s_{in} - s)}. \tag{1.14}$$

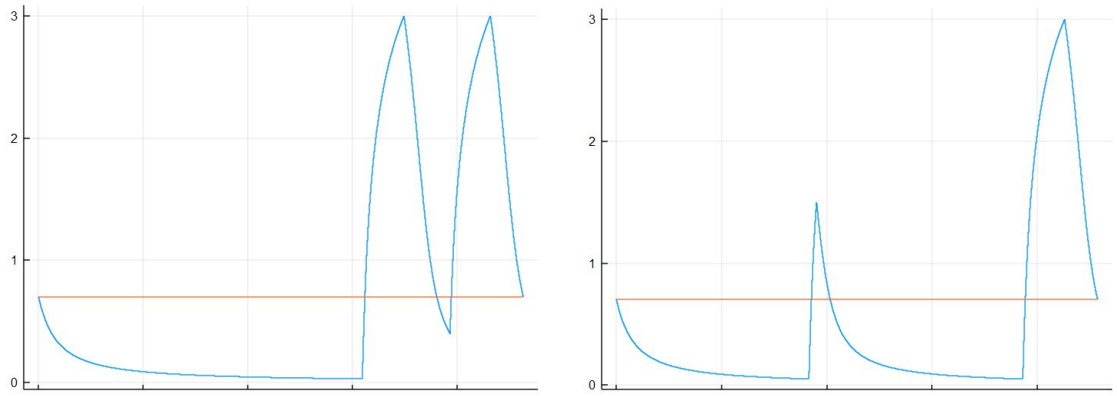
Par exemple, pour une trajectoire $3B$, les contraintes $s(0) = s(T)$ et $\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T$ s'écrivent respectivement

$$\int_{s_m}^{s_M} \eta(s)ds, \quad \text{et} \int_{s_m}^{s^M} \eta(s)\nu(s)ds.$$

1.3 Les trajectoires iB, cas sans arc singulier

Dans cette section, on s'intéresse aux trajectoires sans arc singulier. On va montrer que seules les trajectoires $3B$ sont candidates à l'optimalité. Certains des résultats prouvés dans cette section seront également utiles pour étudier le cas avec arcs singuliers.

On donne à titre d'exemple les trajectoires présentées Figures 1.2a et 1.2b, qui ont été tracée en tenant compte seulement de la contrainte de périodicité (1.6).



(a) Cas où s_M est atteint deux fois (b) Cas où s_m est atteint deux fois

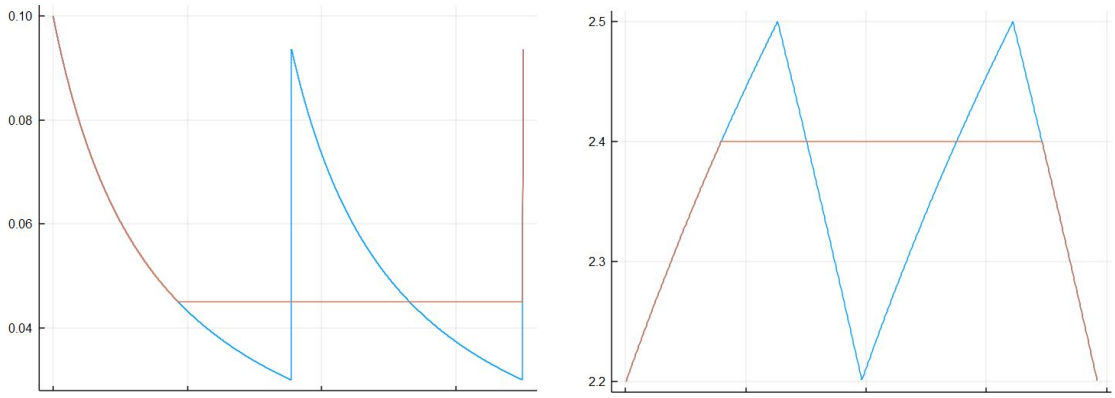
FIGURE 1.2 – Deux cas de trajectoires $5B$

1.3.1 Deux ensembles réduits à des singletons

Lemme 4. *Soit $s(.)$ une trajectoire telle qu'il existe $s_I, s_M \in (0, s_{in})$, $s_I < s_M$, $s_c < s_M$ et $(t_i)_{1\leq i\leq 5}$ des temps tels que $t_i < t_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq 4$, et que $s(t_1) = s(t_3) = s(t_5) = s_I$, et $s(t_2) = s(t_4) = s_M$. On suppose aussi que les temps $(t_i)_{2\leq i\leq 4}$ sont les seuls temps de commutation sur l'intervalle (t_1, t_5). Alors il existe $\tilde{s} \in (s_I, s_M)$, $t_d \in (t_1, t_5)$ et $\tilde{t} \in (0, t_5 - t_d)$ tels que $s(t_d + .)$ vérifie les contraintes (1.6) et (1.7) pour $T = \tilde{t}$ et $\bar{s} = \tilde{s}$.*

Remarque 2. *On peut également prouver un lemme symétrique pour des quantités $s_I, s_m \in (0, s_{in})$ telles que $s_I > s_m$.*

Les figures 1.3a et 1.3b illustrent ce lemme, en montrant en bleu la trajectoire $s(.)$ et en rouge l'arc singulier $\tilde{s}$ qui vérifier aussi la contrainte sur le contrôle (1.7).



(a) Cas du couple (s_m, s_I) (b) Cas du couple (s_I, s_M)

FIGURE 1.3 – Extremum atteint sur un ensemble non-connexe

Démonstration. Soit $\tilde{s} \in (s_I, s_M)$.

On définit ensuite

$$\tilde{t} = \int_{\tilde{s}}^{s_M} \eta(s)ds + \int_{s_I}^{s_M} \eta(s)ds.$$

Une telle définition nous assure que $s(.)$ vérifie bien (1.6) sur $(t_1, t_1 + \tilde{t})$. Reste maintenant la contrainte (1.7).

On définit deux fonctions de $\tilde{s}$, que l'on veut faire coïncider.

$$\begin{aligned} g(\tilde{s}) &= \tilde{t}\nu(\tilde{s}), \\ h(\tilde{s}) &= \int_{\tilde{s}}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds + \int_{s_I}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds. \end{aligned}$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} g(s_I) &= \Big(2\int_{s_I}^{s_M} \eta(s)ds\Big)\nu(s_I), & h(s_I) &= \Big(2\int_{s_I}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds\Big), \\ g(s_M) &= \Big(\int_{s_I}^{s_M} \eta(s)ds\Big)\nu(s_M), & h(s_M) &= \Big(\int_{s_I}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds\Big). \end{aligned}$$

Ainsi, $g(s_I) < h(s_I)$ et $g(s_M) > h(s_M)$ en utilisant la stricte croissance de $\nu(.)$.

Les applications $g(.)$ et $h(.)$ étant continues, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure donc qu'il existe $\tilde{s} \in (s_I, s_M)$ tel que $g(\tilde{s}) = h(\tilde{s})$. On conclut la preuve en définissant $t_d = \min\{t \in (t_1, t_5), s(t) = \tilde{s}\}$. Cette quantité est bien définie d'après le théorème des valeurs intermédiaires puisque $s(.)$ est continue. □

Proposition 6. *Soit $s(.)$ une trajectoire que l'on suppose optimale pour le problème (1.9). Si $s_M > s_c$ et que $s(.)$ n'a pas d'arc singulier en s_M, alors l'ensemble $\{t \in (0,T), s(t) = s_M\}$ est réduit à un singleton. De même, si $s_m < s_c$ et que $s(.)$ n'a pas d'arc singulier en s_m, alors $\{t \in (0,T), s(t) = s_m\}$ est réduit à un singleton.*

Démonstration. Supposons par contradiction une trajectoire $s(.)$ optimale pour (1.9), telle qu'il existe $t_1^M, t_2^M \in (0,T)$ vérifiant
— $t_1^M < t_2^M$,
— $s(t_1^M) = s(t_2^M) = s_M$,
— $s((t_i^M)^-) < s_M$, $s((t_i^M)^+) < s_M$, pour $i = 1, 2$,
— il existe $t_i \in (t_1^M, t_2^M)$ tel que $s(t_i) < s_M$.

L'ensemble $\{t \in (0,T), s(t) = s_M\}$ n'est donc pas connexe (la preuve pour de la connexité de $\{t \in (0,T), s(t) = s_m\}$ est identique) et donc pas réduit à un point.

Comme la trajectoire $s(.)$ est continue, il existe $s_I \in (0, s_{in})$, et une famille d'instants $(t_i)_{1 \leq i \leq 4}$ tels que
— $t_1 < t_1^M < t_2 < t_3 < t_2^M < t_4$,
— $t_2 + t_4 \leq t_3$,
— $s_i < s_M$,
— $s(t_i) = s_I$, $\forall 1 \leq i \leq 4$,
— $s_I < s(t)$, $\forall t \in (t_1, t_2) \cup (t_3, t_4)$.

On définit maintenant l'application $\phi : [0,T] \longrightarrow [0,T]$ définie par

$$\phi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq t_2, \\ t + (t_3 - t_2) & \text{si } t_2 < t \leq t_2 + t_4 - t_3, \\ t & \text{si } t_2 + t_4 - t_3 < t \leq t_3, \\ t + (t_4 - t_3) & \text{si } t_3 < t \leq T. \end{cases}$$

La trajectoire $s(\phi(.))$ correspond à la trajectoire $s(.)$ mais en réarrangeant le maximum en t_2^M de telle sorte qu'il soit à côté de celui en t_1^M. En effet, on a
— $s(\phi(t_1)) = s(\phi(t_2)) = s(\phi(t_2 + t_4 - t_3)) = s_I$,
— $s(\phi(t)) \geq s_I$, pour tout $t \in (t_1, T_2 + t_4 - t_3)$,
— $s(\phi(t_1^M)) = s(\phi(t_2^M + (t_3 - t_2))) = s_M$.

Cette construction est illustrée Figure 1.4.

Les intégrales définissant les contraintes (1.6) et (1.7) sont conservées après composition avec $\phi(.)$. Cette remarque vaut aussi pour le coût associé à cette trajectoire.

On peut donc appliquer le Lemme 4 à la trajectoire $s(\phi(.))$ entre les temps t_1 et $t_2 + t_4 - t_3$. On a donc l'existence de $\tilde{s} \in (s_I, s_M)$, de $t_0 \in (t_1, t_2 + t_4 - t_3)$ et de $\tilde{t} \in (0, t_4 - t_3 + t_2 - t_1)$ tel que $s(\phi(t_0 + .))$ vérifie les contraintes (1.6) et (1.7) pour $T = \tilde{T}$ et $\bar{s} = \tilde{s}$.

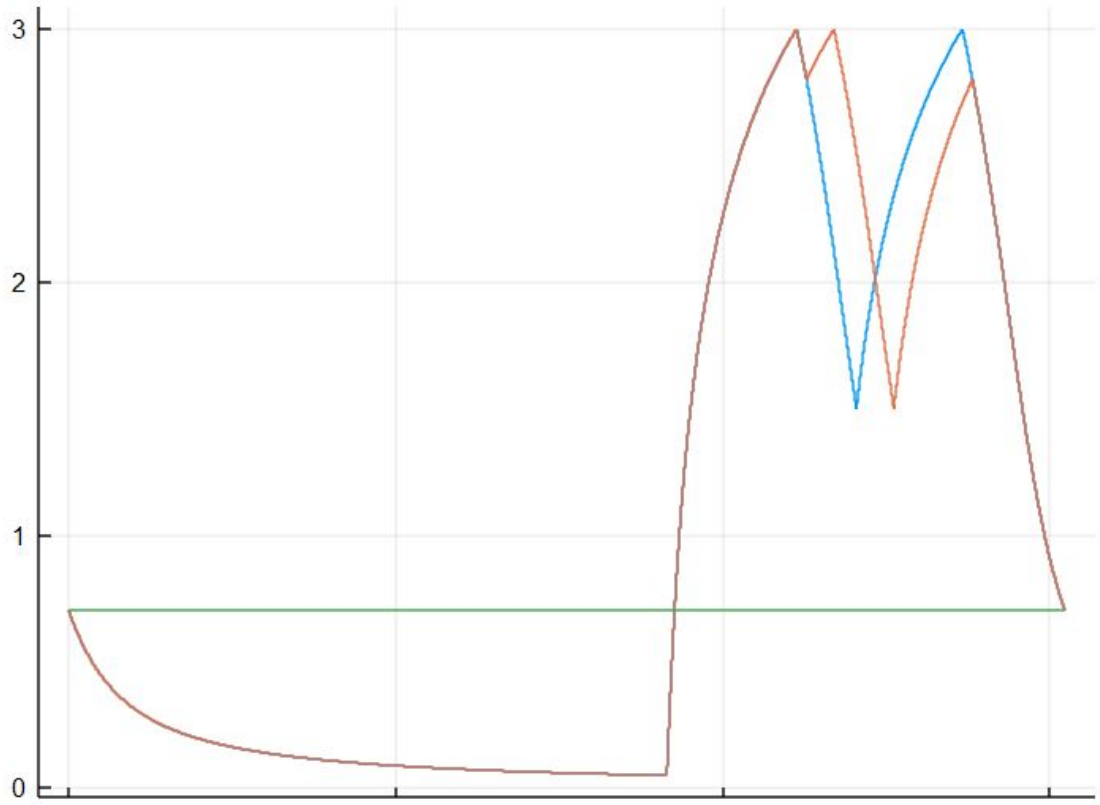


FIGURE 1.4 – Comparaison de $s(.)$ et $s(\phi(.))$

Comme $s_M > s_c$, on peut de plus imposer que $\tilde{s}$ et $\tilde{t}$ soient tels qu'on ne puisse pas avoir de trajectoire $s(.)$ vérifiant $s(0) = s(\tilde{t}) = \tilde{s}$ et sortant de l'intervalle $(s_c, +\infty)$.

Cette portion de trajectoire comporte trois commutations, elle ne peut donc pas être optimale, car la trajectoire optimale dans la partie strictement concave est la trajectoire constante.

Dans le cas de l'ensemble des temps où s_m est atteint, comme $s_m < s_c$, il suffit de prendre $\tilde{s}$ et $\tilde{t}$ tels qu'on ne puisse pas sortir de la partie convexe de $\nu(.)$ et $\tilde{t}$ et respecter la contrainte de périodicité. On sait alors que la trajectoire optimale est de type Bang-Bang à deux commutations.

Il existe donc une trajectoire $s^*(.)$ définie sur $[0, \tilde{t}]$ de coût inférieur à celui de la portion de trajectoire $t \in [0, \tilde{t}] \longmapsto s(\phi(t_0 + t))$. En remplaçant la portion de $s(\phi(.))$ étudiée par $s^*(.)$, on a construit une trajectoire admissible de coût inférieur strictement à celui de $s(\phi(.))$, ce qui contredit l'hypothèse d'optimalité de $s(.)$. Ainsi, le maximum d'une trajectoire optimale est atteint sur un unique point. □

1.3.2 Exclusion des trajectoires iB pour $i > 3$

Corollaire 1. *Une trajectoire iB, $i > 3$ ne peut pas être optimale pour le problème (1.9).*

Démonstration. On effectue la preuve dans les cas $4B$ et $5B$, les autres valeurs de i s'en déduisant facilement.

Dans le cas $4B$, on peut rapidement évacuer le cas où la trajectoire ne commuterait qu'en deux valeurs s_m et s_M puisque par périodicité, on pourrait translater la trajectoire en temps pour constater qu'elle doit nécessairement présenter une commutation en $\bar{s}$.

Supposons maintenant une trajectoire $4B$ qui commuterait en trois valeurs : $s_m, \bar{s}$ et s_M. La trajectoire doit nécessairement passer en s_M et en s_m pour vérifier la contrainte sur le contrôle (1.7), donc elle commute au moins une fois en s_M et au moins une fois en s_m. Il reste donc une commutation disponible. Si celle-ci a lieu en $\bar{s}$, soit la trajectoire présente une partie constante, soit elle ne peut pas effectuer une commutation comme $s_m < \bar{s} < s_M$. Une telle trajectoire ne peut donc pas exister.

On s'intéresse maintenant au cas d'une trajectoire $5B$. Supposons que la trajectoire $s(.)$ ne commute qu'en deux valeurs, son minimum s_m et son maximum s_M. On a alors facilement que s_m et s_M sont chacun atteints deux fois. La Proposition 11 assure alors que $s(.)$ ne peut pas être optimale.

Supposons maintenant que la trajectoire $s(.)$ présente des commutations en trois valeurs s_m, s_I et s_M, avec $s_m < s_I < s_M$ et vérifiant la condition de pente. Alors $s_m < s_c$ et $s_M > s_c$.

Comme la trajectoire est de type $5B$, elle présente quatre commutations. Si deux commutations ont lieu en s_m ou s_M, alors par la Proposition 11, $s(.)$ ne peut pas être optimale.

On examine maintenant le cas où deux commutations ont lieu en s_I. On peut facilement énumérer les cas possibles dans les cas $s_I < \bar{s}$, $s_I > \bar{s}$ et $s_I = \bar{s}$ et montrer que de telles trajectoires $5B$ n'existent pas. □

Remarque 3. *Le résultat de la Proposition 11 peut être utilisée pour exclure n'importe quelle trajectoire qui atteindrait son maximum, ou son minimum, en plusieurs points isolés. Elle peut aussi s'appliquer dans le cas avec des arcs singuliers, si par exemple la trajectoire atteint plusieurs fois le minimum s_m sans qu'il n'y ait d'arcs singuliers en cette valeur.*

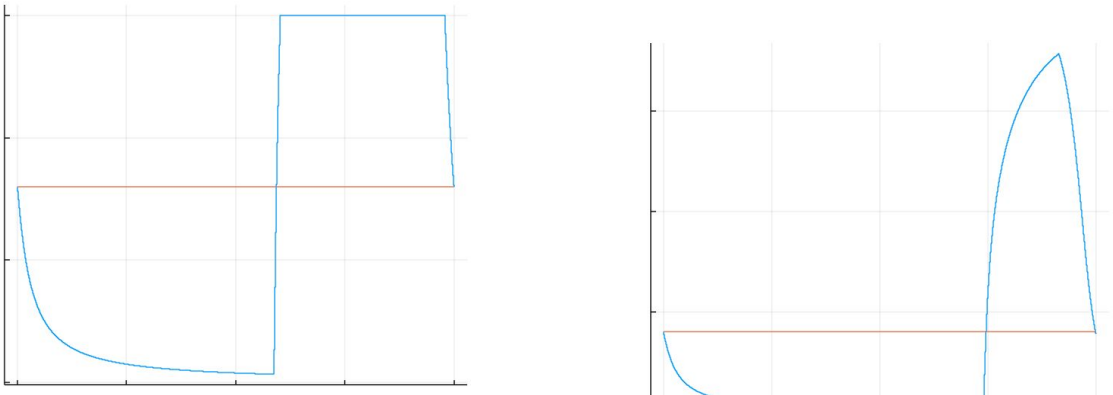
1.4 Cas avec arc singulier

On s'intéresse dans cette section à une classe particulière de trajectoires candidates à l'optimalité, qui est une extension des trajectoire $3B$, étudiées dans [6], qui sont optimales dans le cadre d'une fonction de croissance $\nu(.)$ strictement convexe.

Cette restriction se justifie par le fait que la condition de pente pour les arcs singuliers impose que les commutations aient lieu en deux valeurs $\tilde{s}$ et s_m telles que $\tilde{s} > s_c > s_m$, et que le Lemme 4 s'applique alors : une trajectoire optimale $s(.)$ ne peut passer qu'une seule fois en s_m. Les seules trajectoires candidates à l'optimalité comportant un arc singulier sont alors les trajectoires $B_-B_+SB_-$ et $B_+SB_-B_+$, qui sont seulement translatées dans le temps l'une par rapport à l'autre.

Définition 7. *On note s_m^{3B}, respectivement s_M^{3B}, la valeur minimale, respectivement maximale, atteinte sur la trajectoire $3B$.*

Remarque 4. *D'après [6], pour $T > 0$, il existe une unique trajectoire $B_+B_-B_+$ et une unique trajectoire $B_-B_+B_-$ satisfaisant les contraintes (1.6) et (1.7). Les deux trajectoires $B_-B_+B_-$ et $B_+B_-B_+$ sont en fait la même trajectoire, décalée dans le temps.*



(a) Trajectoire $BBSB$, avec un arc singulier au maximum

(b) Trajectoire $B_-B_+B_-$

FIGURE 1.5 – Les trajectoires $BBSB$ généralisent les trajectoires $3B$

1.4.1 Application des contraintes

Ici, on rajoute un arc singulier en $\tilde{s}$, de longueur $\tilde{t}$, à la trajectoire Bang-Bang à deux commutations sur la période T. Les trajectoires $3B$ deviennent un cas particulier, atteint pour $\tilde{t} = 0$. Pour le moment, on ne suppose pas nécessairement

que l'arc singulier est tel que $\tilde{s} = s_M$, ni qu'il est connexe. En effet, on se place seulement du point de vue de l'admissibilité vis-à-vis de (1.6) et (1.7).

Avec un changement de variable, la dynamique ne s'annulant jamais sur $(0, s_{in})$, la contrainte de périodicité $s(T) = s(0)$ peut s'écrire dans le cas d'une telle trajectoire

$$T = \tilde{t} - \int_{s_m}^{s_M} \eta(s)ds. \tag{1.15}$$

Lemme 5. *Pour tout $\tilde{t}$ tel que $T - \tilde{t} > 0$, il existe une unique fonction $\beta_{T-\tilde{t}} : [0, s_{in}] \longrightarrow [0, s_{in}]$, telle que*

- *$\beta_{T-\tilde{t}}$ est $\mathcal{C}^1$, croissante et bijective de $[0, sin]$ dans lui-même,*
- *$\beta_{T-\tilde{t}}(\alpha) > \alpha$ pour tout $\alpha \in (0, s_{in})$,*
- *la contrainte (1.6) soit vérifiée pour $s_m = \alpha$, $s_M = \beta_{T-\tilde{t}}(\alpha)$.*

Remarque 5. *La valeur de $\tilde{s}$ n'intervient pas explicitement dans ce théorème, mais la trajectoire sera admissible seulement s'il existe α tel que $\alpha \leq \tilde{s} \leq \beta_{T-\tilde{t}}(\alpha)$.*

Démonstration. La preuve est la même que celle du lemme 3.3 de [6], en prenant $T - \tilde{t}$ au lieu de T. Les hypothèses sont bien vérifiées par la dynamique que nous étudions. □

De la même façon qu'en (1.15), on peut écrire la contrainte de contrôle sous la forme

$$\bar{u}T - \tilde{u}\tilde{t} = \int_{s_m}^{s_M} \Big(\frac{D_+}{(D_+ - \nu(s))(s_{in} - s)} - \frac{D_-}{(D_- - \nu(s))(s_{in} - s)} \Big) ds, \tag{1.16}$$

$$= \int_{s_m}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds. \tag{1.17}$$

Dans cette équation, on note $\tilde{u} = \nu(\tilde{s})$ le contrôle associé à l'arc singulier.

Proposition 7. *Soit $T > \tilde{t} > 0$ et $\tilde{s} \in (s_c, s^*)$. Si D_+ est tel que $\nu(s_{in}) - D_+ < 0$, alors il existe une unique paire $(s_m, s_M) \in (0, s_{in})^2$ qui satisfait les contraintes (1.6) et (1.7), avec de plus $s_m < \frac{\bar{u}T - \tilde{u}\tilde{t}}{T - \tilde{t}} < s_M$.*

Remarque 6. *L'énoncé de la proposition ne fait pas intervenir les conditions $s_m \leq \bar{s} \leq s_M$ et $s_m \leq \tilde{s} \leq s_M$ qui ont une valeur implicite.*

Démonstration. La preuve est la même que celle de la Proposition 3.2 de [6], avec $T - \tilde{t}$ au lieu de T et $u^{\#} = \frac{\bar{u}T - \tilde{u}\tilde{t}}{T - \tilde{t}}$ au lieu de $\bar{u}$. □

Ainsi, s_m et s_M apparaissent comme des fonctions de $T, \tilde{t}, \tilde{s}$.

1.4.2 Optimalité des trajectoires $BBSB$

On avait jusqu'ici adopté deux points de vue séparés : d'une part, en partant des contraintes (1.6) et (1.7), et d'autre part, en partant du PMP. Ces deux approches donnent toutes les deux des résultats intéressants et il convient maintenant de faire le lien entre elles. En particulier, on voudrait prouver qu'il existe des valeurs de $\tilde{t}, \tilde{s}, T$ pour lesquelles il existe une trajectoire $BBSB$.

Lemme 6. *Soit $\tilde{s}$ tel que $\bar{s} < \tilde{s} < s_m^{3B}$. Alors il existe un unique $\tilde{t} \in (0, T)$ tel que la paire $(\tilde{s}, s_m(T, \tilde{t}, \tilde{s}))$ satisfasse les contraintes (1.6) et (1.7). La valeur de $\tilde{t}$ dépend de T et de $\tilde{s}$.*

Démonstration. Soient $s_M(T, \tilde{t}, \tilde{s})$ et $s_m(T, \tilde{t}, \tilde{s})$ (que l'on notera s_M et s_m dans la suite de la preuve) donnés par la Proposition (7). Alors les contraintes (1.6) et (1.7) sont respectées.

En les dérivant par rapport à $\tilde{t}$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} \eta(s_M) & -\eta(s_m) \\ \eta(s_M)\nu(s_M) & -\eta(s_m)\nu(s_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s_M}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial s_m}{\partial \tilde{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\tilde{u} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial s_M}{\partial \tilde{t}} = \frac{\nu(s_m) - \nu(\tilde{s})}{\eta(s_M)(\nu(s_M) - \nu(s_m))} < 0.$$

Par ailleurs, $s_M(T, 0, \tilde{s}) = s_M^{3B} > \tilde{s}$. Lorsque $\tilde{t} \longrightarrow T$, on a à l'aide de la contrainte de périodicité (1.6) que $s_M \longrightarrow \bar{s} < \tilde{s}$.

On en déduit qu'il existe un unique $\tilde{t}(\tilde{s}, T) \in (0, T)$ tel que $s_M(T, \tilde{t}(\tilde{s}), \tilde{s}) = \tilde{s}$. □

Définition 8. *On définit $Q : \tilde{s} \longmapsto s_m$ l'application qui à $\tilde{s}$ associe l'unique s_m vérifiant les contraintes de périodicité (1.6) et d'isopérimétrie du contrôle (1.7).*

Ainsi, si la trajectoire optimale comporte un arc singulier en $\tilde{s}$ alors il est de longueur $\tilde{t}(\tilde{s}, T)$ car la trajectoire respecte les contraintes (1.6) et (1.7).

On a donc d'une part la condition de pente qui à $\tilde{s}$ associe un unique s_m, et d'autre part les contraintes qui à $\tilde{s}$ associent un unique s_m. Il est intéressant de remarquer que les contraintes dépendent de T, mais pas la condition de pente. Une trajectoire avec un arc singulier candidate à l'optimalité devra donc nécessairement avoir $\tilde{s}$ tel que les "deux s_m" coïncident.

Proposition 8. *Soit $T > 0$, tel que $s_M^{3B} > s^*$, et $\bar{s} < s_c$. Il existe $\tilde{s} \in (\bar{s}, s_m^{3B})$ tel que $s_m = s_m(T, \tilde{t}(\tilde{s}, T), \tilde{s})$ défini par les contraintes (1.6) et (1.7) vérifie aussi la contrainte de pente.*

Démonstration. L'application $P : \tilde{s} \longmapsto s_m$ définie au Lemme (3) est une bijection continue de $[s_c, s^*]$ dans $[0, s_c]$ donc elle est monotone. Comme $P(s_c) > P(s^*)$, elle est strictement décroissante. En notant $\tilde{\bar{s}}$ l'unique $\tilde{s} \in (s_c, s^*)$ tel que $P(\tilde{\bar{s}}) = \bar{s}$, on a $s < \tilde{\bar{s}} \Rightarrow P(s) > \bar{s}$. Il existe donc $\tilde{s} \in (s_c, \tilde{\bar{s}})$ tel que $P(\tilde{s}) > Q(\tilde{s})$.

Par ailleurs, $Q(s^*)$ est bien définie par l'hypothèse $s_M^{3B} > s^*$, donc $Q(s^*) > P(s^*)$.

La continuité de P et Q assure ensuite l'existence de $\tilde{s} \in (s_c, s^*)$ tel que $P(\tilde{s}) = Q(\tilde{s})$. □

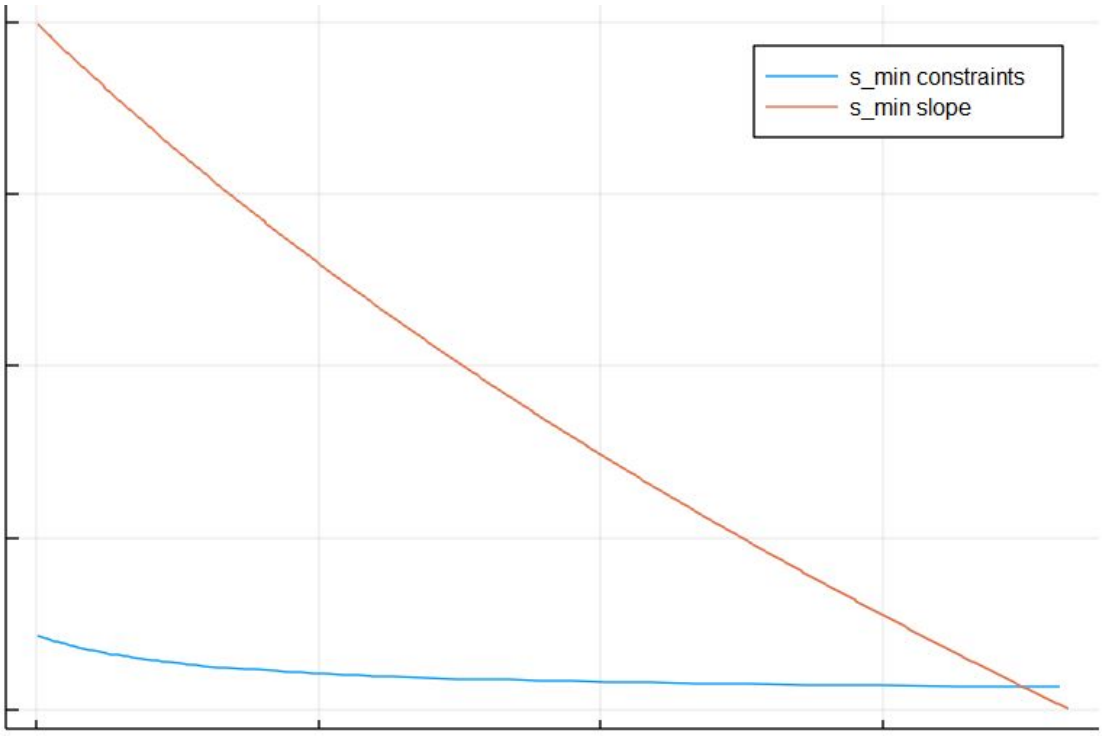


FIGURE 1.6 – Courbes $s_m(\tilde{s})$, en bleu selon les contraintes, en rouge selon la condition de pente

Pour essayer de discriminer parmi ces candidats arcs singuliers les minima locaux des maxima, on va s'intéresser au coût associé à chacune des ces trajectoires. On définit ainsi $J : \tilde{s} \longmapsto \frac{1}{T}\int_0^T s dt$. On peut par un changement de variable, se ramener à l'expression $J(\tilde{s}) = \frac{1}{T}\int_{s_m}^{\tilde{s}} \eta(s) s ds$, où $s_m = s_m(T, \tilde{t}(\tilde{s}, T), \tilde{s})$.

Proposition 9. *Il existe $\tilde{s}$ tel que la trajectoire BBSB associée soit un minimum local du coût (parmi les trajectoires BBSB) et on a*

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{s}} = \frac{\tilde{t}(\tilde{s}, T)}{T}\Big(1 - \nu'(s)\frac{\tilde{s} - s_m}{\nu(\tilde{s}) - \nu(s_m)}\Big).$$

Démonstration. De la même façon qu'au Lemme 6, on dérive les deux contraintes (1.6) et (1.7), cette fois par rapport à $\tilde{s}$.

On obtient

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\nu'(\tilde{s})\tilde{t}(\tilde{s})}{\nu(s_m) - \nu(\tilde{s})} - \eta(\tilde{s}),$$
$$\frac{\partial s_m}{\partial \tilde{s}} = \frac{\nu'(\tilde{s})\tilde{t}(\tilde{s})}{\eta(s_m)(\nu(s_m) - \nu(\tilde{s}))}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{s}} = \frac{\tilde{t}(\tilde{s})}{T}\big(1 - \nu'(s)\frac{\tilde{s} - s_m}{\nu(\tilde{s}) - \nu(s_m)}\big).$$

Ainsi, la courbe $P : \tilde{s} \longmapsto s_m$, dont on note le graphe $\mathcal{C}_P$ sépare le plan $(\tilde{s}, s_m)$ en deux parties : au-dessus de $\mathcal{C}_P$, $\frac{\partial J}{\partial \tilde{s}} > 0$, en-dessous de $\mathcal{C}_P$, $\frac{\partial J}{\partial \tilde{s}} < 0$.

D'après la preuve de la Proposition 8, il existe au moins un point $\tilde{s}$ tel que $Q(\tilde{s}^-) < P(\tilde{s}^-)$ et $Q(\tilde{s}^+) > P(\tilde{s}^+)$. On en déduit que ce point correspond à un minimum local du coût parmi les trajectoires $BBSB$. □

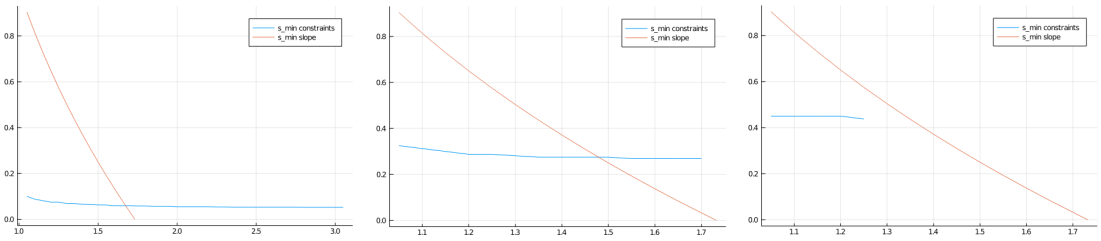
Proposition 10. *Soit $T > 0$, tel que $s_M^{3B} > s^*$. Alors la trajectoire $3B$ ne peut pas être optimale pour le problème (1.9).*

Démonstration. Supposons $s(.)$ une trajectoire $3B$ optimale.

On peut faire le lien entre la trajectoire Bang-Bang et les trajectoires $BBSB$ en considérant que la trajectoire Bang-Bang contient un arc singulier de longueur nulle en s_M^{3B}. $s(.)$ est admissible et optimale, donc on a $P(s_M^{3B}) = s_m^{3B}$ et $Q(s_M^{3B}) = s_m^{3B}$.

Comme $s_M^{3B} > s^*$ et que $s_m^{3B} \in (0, s_c)$, l'égalité $P(s_M^{3B}) = s_m^{3B}$ ne peut pas être vérifiée. La trajectoire $s(.)$ ne peut donc pas être optimale. □

Remarque 7. *La condition $s_M^{BB} > s^*$ (Figure 1.7a) présente dans les propositions 8 et 10 est suffisante, mais peut être légèrement relâchée : il suffit en effet que $Q(s_M^{BB}) > P(s_M^{BB})$ (Figure 1.7b). A l'inverse, si cette condition n'est pas vérifiée (Figure 1.7c), la trajectoire avec un arc singulier de longueur non nulle n'est pas optimale (la condition de pente et les contraintes ne peuvent pas être simultanément vérifiées), et l'optimum est atteint pour une trajectoire $3B$.*



(a) Courbes $s_m(\tilde{s})$, $T = 10$ (b) Courbes $s_m(\tilde{s})$,$T = 2$ (c) Courbes $s_m(\tilde{s})$, $T = 1$

FIGURE 1.7 – Condition de pente et admissibilité

1.4.3 Exclusion des trajectoires dupliquées

Dans cette sous-section, on va montrer qu'il n'est pas optimal de répliquer une trajectoire de type $BBSB$ plusieurs fois sur la période T. Pour cela, on va s'appuyer sur le lemme suivant, qui décrit comment construire une trajectoire pas forcément optimale, mais qui fait décroître le coût avec la longueur de la période T.

Remarque 8. *On peut conclure directement avec la Proposition 6, mais on propose une preuve alternative qui généralise le Lemme 3.5 de [6] au cas $BBSB$.*

Lemme 7. *Soit $T_1, T_2 > 0$ tels que $T_1 < T_2$. On définit les deux trajectoires $B_-B_+SB_-$ $s^1(.)$ et $s^2(.)$, définies respectivement sur $[0, T_1]$ et $[0, T_2]$, qui vérifient toutes les deux les contraintes (1.6) et (1.7) avec un arc singulier en $\tilde{s}$.*

Alors le coût associé à la trajectoire $s^2(.)$ est strictement inférieur à celui associé à la trajectoire $s^1(.)$.

Démonstration. Cette preuve est largement adaptée de la preuve du Lemme 3.5 de [6]. Ainsi, on insistera plutôt sur les différences liées aux arcs singulier.

De la même façon qu'au Lemme 6, on peut dériver les deux contraintes (1.6) et (1.7) pour obtenir

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial T} > 0,$$
$$\frac{\partial s_m}{\partial T} < 0.$$

On en déduit que $s_m^1 > s_m^2$ et que $\tilde{t}^1 < \tilde{t}^2$.

On définit par ailleurs les temps où les trajectoires quittent l'arc singulier $t_f^i = \max\{t \in [0, T_i], s^i(t) = \tilde{s}\}$, pour $i = 1, 2$.

On introduit maintenant l'ensemble $E = \{t \in [0,T], s^2(t) < s^1_m\} \cup (t^2_f - (\tilde{t}^2 - \tilde{t}^1, t^2_f)$ et les scalaires $\delta_1 = \lambda\big(\{t \in [0,T], s^2(t) < s^1_m\}\big)$ et $\delta_2 = \tilde{t}^2 - \tilde{t}^1$. Ici, $\lambda(.)$ représente la mesure de Lebesgue.

On peut alors définir l'application $\varphi : [0, T_1] \longrightarrow [0, T_2] \setminus E$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{sur } 0 \leq t < t^1_m, \\ t + \delta_1 & \text{sur } t^1_m \leq t < t^1_f, \\ t + \delta_1 + \delta_2 & \text{sur } t^1_f \leq t \leq T_1. \end{cases}$$

L'application ainsi définie est alors une bijection, telle que $s^1(t) = s^2(\varphi(t))$. On déduit que $\mu(E) = T_2 - T_1$. De la même façon que dans [6], on obtient

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_E \nu(s^2(t))dt = \bar{u}.$$

On définit maintenant $\hat{\nu} : [s^2_m, \tilde{s}] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\hat{\nu}(\xi) = \begin{cases} \nu(s^1_m) + \frac{\nu(\tilde{s}) - \nu(s^1_m)}{\tilde{s} - s^1_m}(\xi - s^1_m) & \text{pour } \xi \in [s^1_m, \tilde{s}], \\ \nu(\xi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $\hat{\nu}(.)$ est convexe et strictement croissante sur $[s^2_m, \tilde{s}]$, et telle que
— $\hat{\nu}(\xi) > \nu(\xi)$ sur $(s^1_m, \tilde{s})$,
— $\hat{\nu}(\xi) = \nu(\xi)$ sur $[s^2_m, s^1_m]$ et en $\tilde{s}$.
Le deuxième point implique que

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_E \hat{\nu}(s^2(t))dt = \bar{u}.$$

L'inégalité de Jensen donne alors

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_E s^2(t)dt \leq \hat{\nu}^{-1}(\bar{u}).$$

Par ailleurs, comme $\hat{\nu}(.)$ est affine sur $[s^1_m, \tilde{s}]$, on a

$$\hat{\nu}\Big(\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} s^1(t)dt\Big) = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \hat{\nu}(s^1(t))dt > \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \nu(s^1(t))dt = \bar{u}.$$

Les inégalités $\frac{1}{T_2 - T_1}\int_E s^2(t)dt \leq \hat{\nu}^{-1}(\bar{u})$ et $\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} s^1(t)dt > \hat{\nu}^{-1}(\bar{u})$ permettent ensuite d'obtenir le résultat

$$\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} s^2(t)dt < \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} s^1(t)dt,$$

ce qui conclut la preuve. □

Proposition 11. *Soit $s(.)$ une trajectoire admissible sur la période T, concaténation de deux trajectoires $BBSB$ $s^1(.)$ et $s^2(.)$ admissibles de périodes respectives T_1 et T_2. Alors $s(.)$ ne peut pas être optimale.*

Démonstration. Si $T_1 \neq T_2$ (on suppose sans perte de généralité que $T_1 < T_2$), alors on a $s^1_m > s^2_m$. On a donc trois valeurs de commutation distinctes ce qui est en contradiction avec la condition de pente pour les arcs singuliers. $s(.)$ ne peut donc pas être optimale.

On se place maintenant dans le cas où $T_1 = T_2 = \frac{T}{2}$. On note $s^1(.) = s^2(.) = s^{\frac{1}{2}}(.)$.

Le coût associé à $s(.)$ sur la période T est alors égal à celui associé à $s^{\frac{1}{2}}(.)$ sur $\frac{T}{2}$. Or $\frac{T}{2} < T$ donc d'après le Lemme 7, on peut construire une trajectoire $BBSB$ avec un arc singulier en la même valeur que l'arc singulier de $s^{\frac{1}{2}}(.)$ mais de coût strictement inférieur sur T.

On en déduit le résultat. □

1.5 Régime transitoire pour les trajectoires $3B$

Dans cette section, on s'intéresse aux trajectoires $3B$ et aux contrôles qui les génèrent (Bang-Bang avec deux commutations). Même si elles ne sont pas optimales en toute généralité pour le problème (1.3), elles sont optimales dans le cas $\nu(.)$ convexe et peuvent tout de mêmes apporter un sur-rendement par rapport à une trajectoire constante dans le cas d'une fonction de croissance convexe-concave (voir Section 1.6). En particulier, que se passe-t'il lorsque les temps de commutation t_1 et t_2 ne sont pas exactement connus ?

Cette question a un fort intérêt applicatif, puisqu'on ne connaît pas toujours précisément les paramètres de la fonction de croissance $\nu(.)$.

1.5.1 Un contrôle robuste aux incertitudes sur le modèle

Proposition 12. *Soit $u(.)$ et $v(.)$ deux contrôles différents de $\mathcal{U}$, Bang-Bang avec deux commutations et de moyenne $\bar{u}$ sur la période T. On suppose de plus que u et v prennent d'abord la valeur D_-. Alors il existe $\delta t \in (-T, T)$ tel que $u(.) = v(. + \delta t)$.*

Démonstration. On note t_1^u et t_2^u (respectivement t_1^v et t_2^v) les deux instants de commutation de u (respectivement de v).

Comme $u(.)$ est de moyenne $\bar{u}$ sur la période $[0, T]$, alors on a :

$$\begin{aligned} &D_- t_1^u + D_+(t_2^u - t_1^u) + D_-(T - t_2^u) = \bar{u}T, \\ &t_2^u - t_1^u = \frac{\bar{u} - D_-}{D_+ - D_-}T. \end{aligned}$$

Ce calcul, aussi valable pour $v(.)$ montre que la différence $t_2 - t_1$ est indépendante du choix de u ou de v. On a donc le résultat avec $\delta t = t_1^u - t_1^v$. □

Par ailleurs, si $u(.)$ est un contrôle optimal Bang-Bang pour le problème (1.3), de premier temps de commutation t_1 et avec $s(.)$ associé, alors on peut par une translation $t \longmapsto t - t_1$ sur le contrôle et la solution, obtenir le coût optimal avec $t_1 = 0$.

L'égalité $t_2 - t_1 = \frac{\bar{u} - D_-}{D_+ - D_-}T$ montre que la quantité $t_2 - t_1$ ne dépend pas de la fonction de croissance $\nu(.)$. Ainsi, on pourrait appliquer un contrôle Bang-Bang "générique" (par exemple avec $t_1 = 0$) et si la solution $s(.)$ converge vers une solution $T-$périodique, alors cette solution périodique sera une translation temporelle de la solution optimale obtenue avec le contrôle Bang-Bang exact, mais aura le même coût. Le résultat suivant achève cette construction.

Proposition 13. *Soit $u(.)$ un contrôle de $\mathcal{U}$, étendu par périodicité sur $[0, +\infty)$. Alors il existe une unique solution positive $s(.)$ $T-$périodique de (1.2) associée à*

$u(.)$. De plus, si $\xi(.)$ est une solution de (1.2), avec $\xi(0) < s_{in}$, alors

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |s(t) - \xi(t)| = 0.$$

Démonstration. Cette preuve est largement adaptée de la preuve de la Proposition 3.2 (Chapitre 7) dans [29].

□

On peut donc appliquer ce résultat en particulier pour les contrôles Bang-Bang à deux commutations.

Corollaire 2. *Soit $u(.)$ un contrôle de $\mathcal{U}$, Bang-Bang avec deux commutations, étendu par périodicité sur $[0, +\infty)$, et soit $s_0 \in (0, s_{in})$. Alors $s(.)$ la solution de (1.2) avec $s(0) = s_0$ vérifie*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |s(t) - s^*(t)| = 0,$$

où $s^*(.)$ est une solution $T-$périodique de (1.2) associée à $u(.)$.

En particulier, si $s^*(.)$ est une translation d'une solution optimale de (1.3) (ce qui est le cas si une telle solution est atteinte pour des contrôle Bang-Bang), alors la moyenne de $s(.)$ va asymptotiquement converger vers l'optimum, sans pour autant l'avoir précisément calculé à l'avance.

1.6 Simulations numériques

Au vu des résultats des Propositions 6 et 11, il vient que la solution optimale est nécessairement de la forme d'une trajectoire $BBSB$ qui n'est pas répétée sur la période T, comme représenté Figure 1.5a. Cet ensemble contient les trajectoires Bang-Bang à deux commutations que l'on sait optimales dans le cas d'une fonction $\nu(.)$ convexe, mais aussi les trajectoires constantes, obtenues avec un arc singulier de longueur T, optimales dans le cas concave.

1.6.1 Détermination numérique de la trajectoire optimale

La détermination d'un couple $(s_m, \tilde{s})$ optimal et donc d'une trajectoire optimale, peut ensuite être réalisée numériquement comme cela est présenté sur la Figure 1.6 sur laquelle sont visibles toutes les possibilités admissibles ainsi que les caractères de minima ou de maxima local.

L'application $P : \tilde{s} \longmapsto s_m$ est calculé par une méthode de dichotomie.

L'application $Q : \tilde{s} \longmapsto s_m$ est également calculée par une méthode de dichotomie en cherchant, pour $\tilde{s}$ donné, s_m et $\tilde{t}$ tels que la trajectoire $BBSB$ correspondante soit continue et vérifie les contraintes de périodicité et de moyenne du contrôle.

Cependant, il existe plusieurs choix possibles pour mener ce calcul. On peut choisir de forcer une contrainte et d'essayer d'annuler l'autre en intégrant la dynamique obtenue. On peut aussi forcer les deux contraintes et essayer d'obtenir un raccord continu entre deux portions de trajectoire différentes. Ce dernier choix est difficile à mettre en oeuvre : par exemple la valeur s_m considérée peut être tellement basse que la portion de $s(.)$ reliant s_m et $\tilde{s}$ ne puisse plus exister, et on ne peut pas déterminer si la fonction à annuler est négative ou positive.

Ainsi, on choisit d'annuler la contrainte sur le contrôle (1.7) en imposant la contrainte de périodicité. Cette contrainte vaut

$$C(s_m) = \int_{s_m}^{\tilde{s}} \eta(s)\nu(s)ds + \Big(T - \int_{s_m}^{\tilde{s}} \eta(s)dt\Big)\nu(\tilde{s}) - \bar{u}T,$$

et on peut calculer sa dérivée $C'(s_m) = \eta(s_m)(\nu(\tilde{s}) - \nu(s_m)) > 0$.

Pour imposer la périodicité, il suffit d'intégrer la dynamique à rebours jusqu'à atteindre $\tilde{s}$ à partir de $\bar{s}$. Dans la détermination du contrôle optimal pour des applications de dépollution, ce choix correspond à mettre les incertitudes numériques sur la quantité d'eau écoulée plutôt que sur l'état final, ce qui prévient d'éventuelles dérives du système loin de son point de fonctionnement périodique.

Avec ces deux fonctions implémentées, on peut ensuite chercher $\tilde{s}$ comme un zéro de la fonction $P - Q$. Cette procédure est rapide car l'évaluation de P et Q nécessite peu d'itérations du fait de l'utilisation de dichotomie. De plus, la précision est réglable en ajustant le nombre d'itérations dans les recherches dichotomiques.

1.6.2 Validation à l'aide d'un solveur

On sait donc que l'on peut déterminer numériquement les trajectoires optimales en utilisant les l'optimalité des trajectoires $BBSB$. Toutefois, on peut se demander quelles seraient les performances d'un solveur pour notre problème, en terme de coût, mais aussi de respect des contraintes. Le solveur Bocop [31], a été utilisé à ces fins, dans sa version directe ainsi que dans sa version HJB.

La version directe de Bocop recourt à une discrétisation en temps de la dynamique, pour se ramener à un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie sous contraintes. Ce problème est ensuite résolu par un solveur utilisant une méthode de point intérieur. L'initialisation est donc un enjeu important pour utiliser ce solveur.

On a fixé

$$\nu(s) = \frac{\mu_{max} s^n}{K_s^n + s^n},$$

avec les paramètres

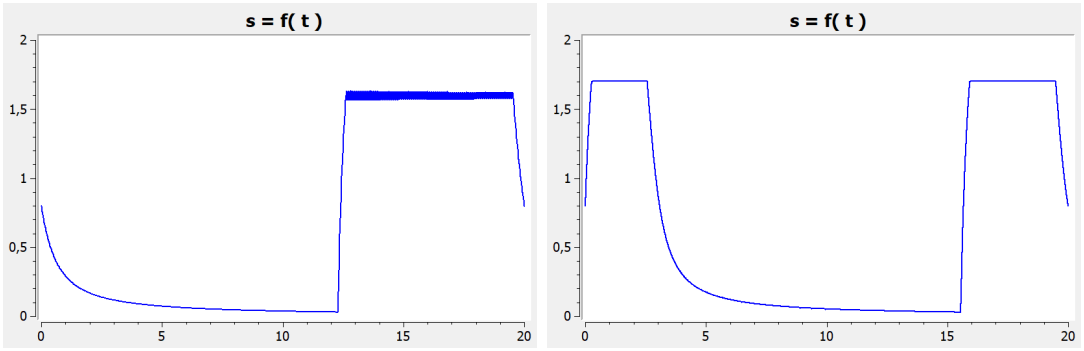
$$n = 2 \qquad K_s = \sqrt{3} \qquad \mu_{max} = 2.$$

Pour ces paramètres, on a $s_c = 1$ et $s^* = \sqrt{3}$.
On a également choisi les paramètres

$$s_{in} = 4 \qquad D_- = 0 \qquad D_+ = 1,2\nu(s_{in}) \qquad \bar{s} = 0,8 \qquad T = 20.$$

Les résultats obtenus avec le solveur confirment bien nos résultats théoriques et coïncident avec les résultats obtenus en calculant directement la trajectoire $BBSB$ optimale.

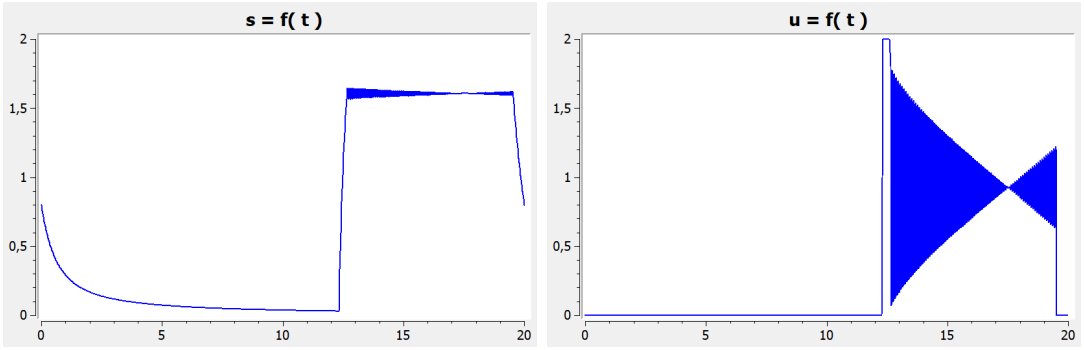
Cependant, même si le problème est simple, l'initialisation du solveur n'est pas évidente. En particulier, initialisé avec la solution $s(.)$ constante égale à $\bar{s}$, le solveur renvoie une meilleure solution si le nombre de pas de temps est petit.



(a) 500 pas de temps (b) 5000 pas de temps

FIGURE 1.8 – Le solveur Bocop ne renvoie pas toujours une trajectoire $BBSB$

Cependant, on peut résoudre ce problème en initialisant le problème à 5000 pas de temps avec la solution du problème à 500 pas de temps représentée Figure 1.8a. On obtient alors les figures suivantes.



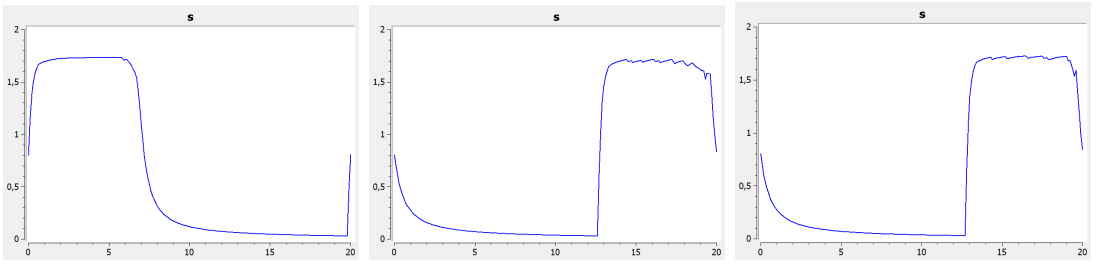
(a) Nouvelle trajectoire (b) Loi de contrôle associée

FIGURE 1.9 – Une meilleure façon d'initialiser le solveur Bocop

On peut noter un phénomène de *chattering* sur le contrôle, mais la trajectoire est bien une trajectoire $BBSB$.

Par ailleurs, comme le problème est de petite dimension, il est raisonnable d'utiliser également BocopHJB pour notre problème. Ce solveur est basé sur le Principe de la Programmation Dynamique et résout l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman pour un système discrétisé issu du système original. A partir de la fonction valeur ainsi calculée, on peut alors simuler une trajectoire optimale à partir de son point initial.

Les temps de calcul sont beaucoup plus longs, mais restent de l'ordre du quart d'heure pour les discrétisations considérées les plus fines.



(a) 300 valeurs pour l'état (b) 500 valeurs pour l'état (c) 800 valeurs pour l'état

FIGURE 1.10 – Résultats avec Bocop HJB

Les trajectoires représentées aux figures 1.10a, 1.10b et 1.10c sont très semblables et on peut donc s'interroger sur le bien-fondé d'une augmentation de la taille de la grille de discrétisation, mais la valeur du coût s'améliore avec la taille de la grille.

1.6.3 Gains apportés par l'insertion d'un arc singulier

On se propose de quantifier numériquement le gain sur le coût réalisé avec une trajectoire $BBSB$ par rapport à une trajectoire constante ou à une trajectoire $3B$.

De la même façon que pour les simulations réalisées avec Bocop, on a fixé $\nu(s) = \frac{\mu_{max} s^n}{K_s^n + s^n}$, avec les mêmes paramètres.

Plusieurs valeurs de $\bar{s}$ ont été testée pour couvrir les cas $\bar{s} < s_c$, $\bar{s} > s_c$ et $\bar{s} = s_c$.

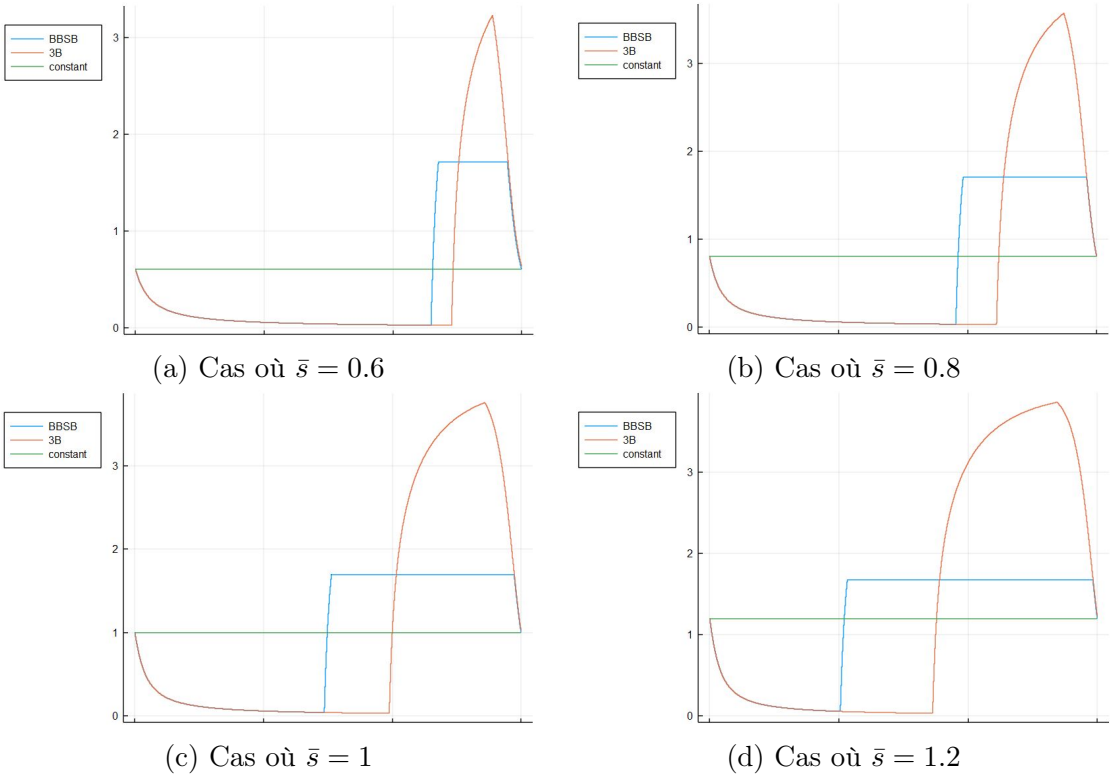
Valeur de $\bar{s}$	Coût 3B	Coût BBSB	Valeur de $\tilde{s}$	Valeur de $\tilde{t}$
0.6	0.462	0.428	1.710	3.57
0.8	0.756	0.663	1.704	6.38
1.0	1.086	0.915	1.695	9.46
1.2	1.425	1.166	1.676	12.7

TABLE 1.1 – Comparaison des performances des trajectoires $3B$, $BBSB$ et constantes

On constate que la trajectoire $BBSB$ permet toujours de diminuer le coût :
- de 28% par rapport à la trajectoire constante et de $7,3\%$ par rapport à la trajectoire $3B$ dans le cas $\bar{s} = 0.6$,
- de $2,8\%$ par rapport à la trajectoire constante et de 18% par rapport à la trajectoire $3B$ dans le cas où $\bar{s} = 1.2$.

Comme la trajectoire optimale est la trajectoire constante pour une fonction de croissance strictement concave, et la trajectoire $3B$ pour une fonction de croissance strictement convexe, il était à prévoir que les coûts associés aux trajectoires constante et $BBSB$ soient assez proches, et bien inférieurs à celui de la trajectoire $3B$, quand la condition initiale est dans la partie concave. De même, on pouvait s'attendre à ce que les coûts associés aux trajectoires $3B$ et $BBSB$ soient assez proches, et bien inférieurs à celui de la trajectoire constante, lorsque la condition initiale est dans la partie convexe.

Dans tous les cas, la trajectoire $BBSB$ permet une amélioration significative des performances.



(a) Cas où $\bar{s} = 0.6$

(b) Cas où $\bar{s} = 0.8$

(c) Cas où $\bar{s} = 1$

(d) Cas où $\bar{s} = 1.2$

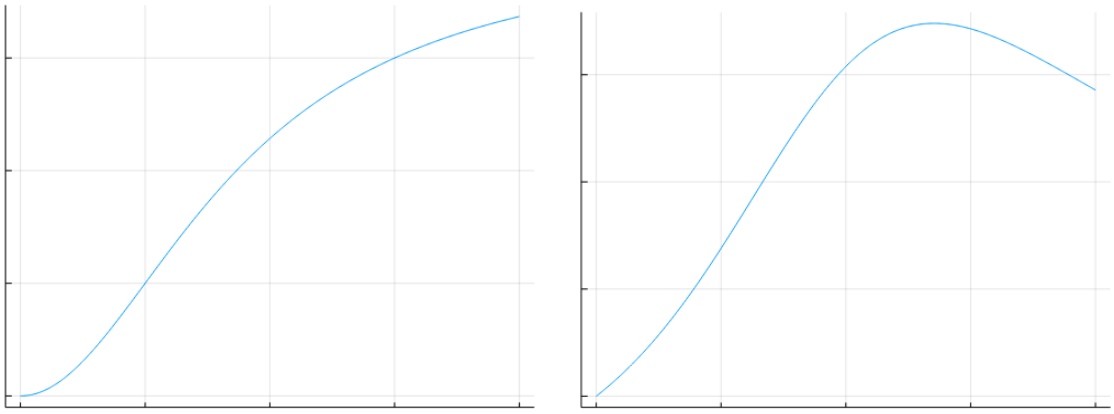
FIGURE 1.11 – Quatre cas de trajectoires $BBSB$, $3B$ et constantes

1.7 Cas d'une fonction de croissance non-monotone

Dans cette section, on s'intéresse au cas de fonctions de croissance spécifique $(s, x) \longmapsto \mu(s, x)$ telles que $s \longmapsto \nu(s) = \mu(s, s_{in} - s)$ croissantes puis décroissantes. Comme la vitesse de croissance spécifique est toujours positive et nulle en 0, les fonctions $\nu(.)$ qui ne sont pas monotones sont nécessairement de cette forme i.e. croissantes d'abord, et décroissantes ensuite.

En particulier, on suppose l'existence d'un maximum local atteint en la valeur $\hat{s}$ telle que $s_{in} > \hat{s} > s^* > s_c$. On suppose par ailleurs que s_c est la seule valeur en laquelle un changement de convexité a lieu sur $[0, \hat{s}]$. On n'exclut pas que la fonction $\nu(.)$ soit à nouveau convexe sur un intervalle (s_c^1, s_c^2), mais avec $\hat{s} < s_c^1$.

De telles courbes de croissance sont intéressantes en pratique car elles représentent des situations où se produit un phénomène *d'inhibition* : une concentration trop forte en substrat est toxique pour les micro-organismes.



(a) Fonction de croissance de Hill (b) Fonction de croissance avec inhibition

FIGURE 1.12 – Un phénomène d'inhibition pour une fonction de croissance de type Hill

Le but de cette section est de montrer que pour $\bar{s} < \hat{s} < s_{in}$, les solutions du problème (1.9) ne dépassent jamais la valeur $\hat{s}$. Ainsi, pour une telle condition initiale, on pourra supposer $\nu(.)$ strictement croissante comme cela a été fait dans les sections précédentes.

Cette hypothèse est d'abord d'ordre pratique : comme on est intéressé par la comparaison avec le fonctionnement en régime constant $(\bar{s}, \bar{D})$ qui permet les meilleures performances, on se restreint aux couples $(\bar{s}, \bar{D})$ tels que $\bar{s} = \inf\{s, \nu(s) < \bar{D}\}$. Cette relation implique donc que $\nu(.)$ soit croissante en $\bar{s}$ et donc que $\bar{s} < \hat{s}$.

Dans la suite, on suppose $u(.) \in \mathcal{U}$ une solution optimale de (1.3), avec $s(.)$ la trajectoire résultante. On suppose s_M, la valeur maximale atteinte par $s(.)$

sur $[0,T]$ vérifie $s_M > \hat{s}$. Ainsi, il existe un intervalle $[\hat{t}_1, \hat{t}_2] \subset [0,T]$ tel que $s(\hat{t}_1) = s(\hat{t}_2) = \hat{s}$ et $s((\hat{t}_1, \hat{t}_2)) > \hat{s}$.

On note s'_M l'unique valeur de la concentration telle que $s'_M < \hat{s} < s_M$ et $\nu(s'_M) = \nu(s_M)$.

1.7.1 Application de la condition de pente

Lemme 8. *Une trajectoire optimale $s(.)$ n'admet pas d'arc singulier sur $[\hat{t}_1, \hat{t}_2]$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $(t_1, t_2) \subset [\hat{t}_1, \hat{t}_2]$ tel que la fonction de commutation $\phi(.)$ soit nulle presque partout sur (t_1, t_2).

De la même façon que lors de la preuve de la Proposition (3), on peut montrer que $p_1 \neq 0$, et que $p_s(s_{in} - s) = p_1$ presque partout sur (t_1, t_2).

Supposons maintenant que $\beta = 0$. Alors $-\dot{p}_s = -p_s(f'(s) + u(t)g'(s))$. On en déduit que$p_s(.)$ ne peut pas s'annuler car elle serait alors constante égale à zéro, en contradiction avec $p_s(s_{in} - s) = p_1$, et est donc de signe constant.

On en déduit que $\phi = p_s(s_{in} - s) + p_1$ est également de signe constant, ce qui est absurde et contredit l'optimalité de $s(.)$. Donc $\beta = 1$.

L'équation $\dot{\phi} = 0$ donne alors $1 = \frac{p_1}{s_{in}-s}\nu'(s) \Rightarrow -p_1\nu'(s) = 1$.

On en déduit que $s(.)$ est constante égale à $\tilde{s}$ sur l'arc singulier et que l'arc singulier ne peut pas être atteint en $\hat{s}$, car $\nu'(\hat{s}) = 0$.

De la même façon qu'à la proposition (4), on peut alors montrer que la trajectoire $s(.)$ vérifie une condition de pente du type

$$\nu'(\tilde{s}) = \frac{\nu(\tilde{s} - \nu(s_m)}{\tilde{s} - s_m}.$$

Or, cette condition ne peut pas être vérifiée car $s_m < \tilde{s}$ et que $\nu(.)$ est strictement décroissante en $\tilde{s}$.

On en déduit le résultat. □

Remarque 9. *D'après la Proposition (4) l'arc singulier est atteint sur le maximum de la trajectoire, on en déduit donc que la trajectoire $s(.)$ n'admet pas d'arc singulier du tout.*

Lemme 9. *Si $s_m \leq s'_M$, une trajectoire optimale $s(.)$ ne commute pas en des valeurs de s telles que $s'_M < s < s_M$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $s_{comm} \in (s'_M, s_M)$ tel que la trajectoire $s(.)$ admette une commutation en s_{comm}. D'après l'hypothèse, on a $s_m < s_{comm} < s_M$.

On sait d'après le Lemme précédent que la trajectoire $s(.)$ n'admet pas d'arc singulier. D'après la Proposition (5), les points $(s_m, \nu(s_m))$, $(s_{comm}, \nu(s_{comm}))$ et $(s_M, \nu(s_M))$ doivent être alignés. Or, $\nu(s_{comm}) > \nu(s_M)$, donc la pente de cette droite doit être négative, ce qui rend impossible de passer par $(s_m, \nu(s_m))$ aussi. □

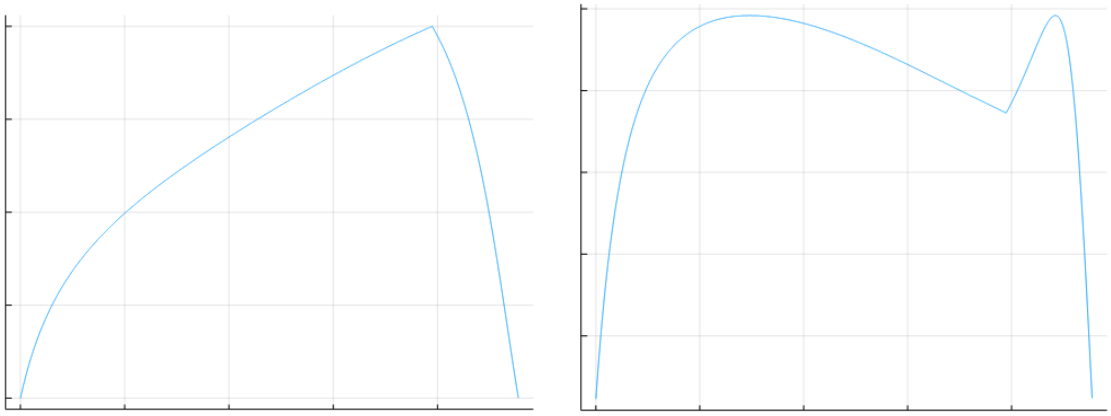
1.7.2 Etude des valeurs prises par une trajectoire optimale

Dans cette partie, on va raisonner par l'absurde pour montrer qu'une trajectoire optiamle $s(.)$ ne dépasse pas $\hat{s}$. On va donc supposer qu'une trajectoire optimale $s(.)$ soit telle que $s_m \leq s'_M$. Ainsi, il existe t_1, tels que

$$s(t_1) = s'_M, \qquad s(t_2) = \hat{s}, \qquad s(t_3) = s_M, \qquad s(t_4) = \hat{s}, \qquad s(t_5) = s'_M.$$

Lemme 10. *Il existe* $\tilde{s} \in (s'_M, \hat{s})$, $t_d \in (t_1, t_2)$ *et* $\tilde{t} \in (0, t_5 - t_d)$ *tels que*

$$\tilde{t}\nu(\tilde{s}) = \int_{t_d}^{t_d+\tilde{t}} u(t)dt.$$



(a) Courbe représentant $t \longmapsto s(t)$ (b) Courbe représentant $t \longmapsto \nu(s(t))$

FIGURE 1.13 – $t \longmapsto \nu(s(t))$ atteint deux fois son maximum dans le cas non-monotone

Démonstration. La preuve de ce lemme est sensiblement la même que celle du Lemme 4. Soit $\tilde{s} \in (s'_M, \hat{s})$. On définit

$$t_d = \min\{t \leq t_1, s(t) = \tilde{s}\},$$
$$\tilde{t} = \int_{\tilde{s}}^{s_M} \eta(s)ds.$$

On définit alors

$$g(\tilde{s}) = \tilde{t}\nu(\tilde{s}),$$
$$h(\tilde{s}) = \int_{\tilde{s}}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds.$$

On obtient ensuite

$$g(s'_M) < h(s'_M), \qquad\qquad g(\hat{s}) > h(\hat{s}).$$

Comme $g(.)$ et $h(.)$ sont continues, on en déduit le résultat, en utilisant l'égalité

$$\int_{t_d}^{t_d+\tilde{t}} u(t)dt = \int_{\tilde{s}}^{s_M} \eta(s)\nu(s)ds.$$

□

Remarque 10. *Le caractère non-monotone de $\nu(.)$ est crucial : si $s(.)$ croît strictement jusqu'à atteindre s_M, puis décroît strictement (Figure 1.13a), $\nu(s(.))$ atteint deux fois sont maximum $\nu(\hat{s})$ en t_2 puis en t_4, avec un minimum local en t_3 (Figure 2.2b).*

Corollaire 3. *Sous l'hypothèse $s_m < s'_M$, une trajectoire optimale $s(.)$ prend ses valeurs dans $(0, \hat{s})$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il existe t_d, $\tilde{t}$ et $\tilde{s}$ tels que $\int_{t_d}^{t_d+\tilde{t}} u(t)dt = \tilde{t}\nu(\tilde{s})$, $s(t_0) = \tilde{s}$ et $s(t_0 + \tilde{t}) = \tilde{s}$.

Ainsi, on peut tronquer la trajectoire $s(.)$ pour la même valeur de l'intégrale sur le contrôle. Les contraintes (1.6) et (1.7) seront toujours vérifiées. Mais pour $t \in (t_0, t_0 + \tilde{t})$, on a $s(t) > \tilde{s}$. Ainsi, cette troncature en $\tilde{s}$ permet d'améliorer le coût. □

De façon générale, ce résultat signifie que pour des valeurs de $\bar{s}$ et de T qui ne soient pas trop élevées, une trajectoire optimale $s(.)$ ne dépassera jamais la concentration $\hat{s}$.

1.8 Un résultat de dualité

Dans les sections précédentes, on s'est intéressé au cas de la minimisation de la concentration en substrat sous une contrainte intégrale sur le contrôle. Du point de vue de la dépollution, cela revient à produire sur la période d'étude une quantité fixée d'eau de la meilleure qualité possible.

Mais il est légitime de s'intéresser au problème "dual" (1.4), qui consiste à produire sur la période d'étude la plus grosse quantité d'eau possible à une qualité fixée. La contrainte intégrale va donc porter sur la concentration moyenne en substrat tandis que l'objectif à maximiser sera la moyenne du contrôle, qui est liée au débit moyen écoulé.

Remarque 11. *Le problème (1.3) est plus facile à traiter numériquement que (1.3). En effet, comme le contrôle ne prend que trois valeurs sur une trajectoire $BBSB$, le calcul de la moyenne du contrôle $u(.)$ est beaucoup plus facile que le calcul de la moyenne de l'état $s(.)$. Il est donc plus facile de vérifier si les contraintes sont respectées ou non. Cette observation mise à part, on pourrait mener la même analyse pour le problème (1.4) que celle qui a été menée dans les sections précédentes pour le problème (1.3). L'argument de dualité qui va suivre permet toutefois de s'épargner ces démarches.*

Afin de faire apparaître une propriété intéressante de dualité, on reformule (1.3) et (1.4) en les problèmes d'optimisation (1.18) et (1.19).

$$\begin{aligned} \min_{u(.)\in\mathcal{U}} \quad & \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \\ \text{t.q.} \quad & s \text{ est solution de (1.2)}, \\ & s(0) = s(T), \\ & \int_0^T u(t)dt \geq \bar{u}T. \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \max_{u(.)\in\mathcal{U}} \quad & \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \\ \text{t.q.} \quad & s \text{ est solution de (1.2)}, \\ & s(0) = s(T), \\ & \int_0^T s(t)dt \leq \bar{s}T. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Remarque 12. *On peut déjà souligner que les contraintes d'égalité dans (1.3) ont été remplacées par des contraintes d'inégalités, même si on verra que ces contraintes sont actives à l'optimum.*

On introduit une hypothèse sur le couple $(\bar{s}, \bar{D}) \in (0, s_{in}) \times (D_-, D_+)$, qui assure que l'équilibre en $s = \bar{s}, u = \bar{D}$ soit stable :

$$\bar{s} = \inf\{s, \nu(s) < \bar{D}\}. \tag{1.20}$$

Cette hypothèse assure que $\nu(.)$ soit strictement croissante autour de $\bar{s}$ et donc que l'équilibre $s = \bar{s}, u = \bar{D}$ est stable.

On définit ensuite deux ensembles :

$$\mathcal{S} = \{\bar{s}, \quad \exists \bar{D} \text{ tel que } (\bar{s}, \bar{D}) \text{ vérifie (1.20)}\},$$
$$\mathcal{D} = \{\bar{D}, \quad \exists \bar{s} \text{ tel que } (\bar{s}, \bar{D}) \text{ vérifie (1.20)}\}.$$

Par ailleurs, on reste dans le cadre des hypothèses présentées à la sous-section 1.1.2.

Définition 9. *Pour $T > 0$, $\bar{D} \in \mathcal{D}$ et $\bar{s} \in \mathcal{S}$, on définit les deux fonctions valeur*

$$V_T(\bar{D}) = \inf_{u(.)\in\mathcal{U}} \Big\{ \frac{1}{T} \int_0^T s(t)dt \text{ tel que } s(0) = s(T), \int_0^T u(t)dt = \bar{D} \Big\},$$
$$W_T(\bar{s}) = \sup_{u(.)\in\mathcal{U}} \Big\{ \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \text{ tel que } s(0) = s(T), \int_0^T s(t)dt = \bar{s} \Big\}.$$

Remarque 13. *Habituellement, en contrôle optimal et en particulier dans le cadre de la théorie de Hamilton-Jacobi-Bellman [3], les fonctions valeur dépendent de la condition initiale. Ici, le point de vue est légèrement différent puisque les fonctions $V_T(.)$ et $W_T(.)$ dépendent de la valeur de la contrainte et les conditions initiales, et finales, sont fixées par la contrainte de périodicité.*

On va montrer que ces deux fonctions sont les fonctions valeur des problèmes (1.18) et (1.19) respectivement.

Proposition 14. *L'application V_T est la fonction valeur du problème (1.18) et est strictement croissante.*

Démonstration. Soit $u(.)$ un contrôle optimal de (1.18), non-constant, tel que $\int_0^T u(t)dt > T\bar{D}$, et $s(.)$ la solution de (1.2) issue de $u(.)$. Pour simplifier, on notera dans la suite $\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$.

On note alors $E = \{t \in [0, T], u(t) > \bar{D}\}$. On a alors $\lambda(E) > 0$, où $\lambda(.)$ est la mesure de Lebesgue.

On définit ensuite $\gamma = \min\left(\frac{\bar{u}-\bar{D}}{\lambda(E)}, \bar{D} - D_-\right)$, et

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) - \gamma \text{ si } t \in E, \\ u(t) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme $\gamma > 0$, on a $\tilde{u}(t) \leq u(t) \leq D_+$, pour tout $t \in E$. De plus, $u(t) - \gamma \geq u(t) - \bar{D} + D_-$. Par définition de E, on a donc $\tilde{u}(t) \geq D_-$ pour tout $t \in E$. Donc $\tilde{u}(t) \in [D_-, D_+]$ pour tout $t \in [0, T]$, et $\bar{D} \leq \langle \tilde{u} \rangle < \langle u \rangle$.

On introduit maintenant $\tilde{s}(., s_0)$, qui est la solution de (1.2) issue du contrôle $\tilde{u}$ et avec la condition initiale s_0.

Comme $\langle \tilde{u} \rangle > 0$ et que $\tilde{s}(., s_0)$ est à valeurs positives, $\tilde{s}(T, 0) > 0$.

Par ailleurs, $\tilde{u}(t) \lneq u(t)$ pour $t \in [0, T]$, $\tilde{s}(T, \bar{s}) < \bar{s}$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\tilde{s}_0 \in (0, \bar{s})$ tel que $\tilde{s}(T, \tilde{s}_0) = \tilde{s}_0$.

Ainsi, $\tilde{s}(., \tilde{s}_0)$ est périodique de période T et vérifie $\tilde{s}(t, \tilde{s}_0) < s(t)$. On a donc

$$\int_0^T \tilde{s}(t, \tilde{s}_0) dt < \int_0^T s(t) dt.$$

Ce résultat contredit l'optimalité de $s(.)$. On en déduit que la contrainte d'inégalité est saturée à l'optimum est donc que V_T est la fonction valeur du problème (1.18).

On va maintenant montrer la croissance de V_T.

On considère $\bar{D}_1, \bar{D}_2$, tels que $\bar{D}_1 < \bar{D}_2$, et $D_1(.), D_2(.)$ les solutions de (1.18) associées.

$D_2(.)$ et la trajectoire résultante $s_2(.)$ sont admissibles pour le problème associé à $V_T(\bar{D}_1)$ comme $\langle D_2 \rangle > \bar{D}_1$. Mais la contrainte n'est pas saturée, donc $D_2(.)$ et $s_2(.)$ sont sous-optimales pour la problème associé à $V_T(\bar{D}_1)$.

On en déduit que $V_T(\bar{D}_1) < V_T(\bar{D}_2)$. □

Ainsi, les solutions du problèmes (1.18) sont exactement celles du problème (1.9) déjà étudié, c'est-à-dire des trajectoires $BBSB$.

Lemme 11. *L'application $V_T(.)$ est continue sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Soit $\bar{u}_0 \in \mathcal{D}$.

On va montrer en utilisant la Proposition 4.4 dans [9] que $V_T(.)$ est continue en $\bar{u}_0$.

Dans ce livre, les auteurs considèrent des problèmes de la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & f(x, u), \\ \text{t.q.} \quad & G(x, u) \in K, \end{aligned}$$

avec

- X, Y et U des espaces de Banach et K un ensemble convexe fermé non vide de Y,
- $G : X \times U \longrightarrow Y$ et $f : X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Par ailleurs, on définit les multifonctions $\phi : U \longrightarrow Y$ et $\mathcal{S} : U \longrightarrow X$ telles que

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \{x \in X, G(x,u) \in K\}, \\ Sol(u) &= \underset{x \in \phi(u)}{\arg\min}\, f(x,u). \end{aligned}$$

Dans la suite, on va plutôt faire apparaître la dynamique (1.2) sous la forme de l'inclusion différentielle

$$\dot{s} \in \Big([D_-, D_+] - \nu(s)\Big)\Big(s_{in} - s\Big), \text{p.p. } t \in [0,T]. \tag{1.21}$$

Pour notre problème, on prend :

$X = \{s(.) \in W^{1,1}([0,T],(0,s_{in}) \text{ telles que } s(.) \text{ est solution de (1.21) et } s(0) = s(T)\}$,
$Y = \mathbb{R}$,
$K = \{0\}$,
$U = [D_-, D_+]$.

Par ailleurs, d'après le théorème de Filippov, pour tout $s(.)$ vérifiant l'inclusion différentielle (1.21), il existe $u(.) \in L^1([0,T],U) = \mathcal{U}$ tel que

$$\dot{s} = (u(t) - \nu(s))(s_{in} - s), ppt \in [0,T].$$

On peut donc définir

$$\begin{aligned} f(s(.),\bar{u}) &= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt, \\ G(s(.),\bar{u}) &= \int_0^T u(t)dt - \bar{u}T, \\ \phi(\bar{u}) &= \{s(.) \in X \text{ tels que } G(s(.),\bar{u}) = 0\}. \end{aligned}$$

On vérifie ensuite plusieurs hypothèses pour pouvoir appliquer le résultat de [9].

(i) La fonction coût $(s(.),\bar{u}) \longmapsto \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$ est continue sur $X \times U$.

(ii) On veut montrer que le graphe de la multifonction $\phi(.)$ est fermé. Pour cela, il est plus aisé de recourir à une autre formulation de la multifonction $\phi(.)$, faisant intervenir la dynamique augmentée $(s(.),y(.))$ déjà présentée en (1.9) :

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \in \bigcup_{u \in U} \begin{pmatrix} (u - \nu(s))(s_{in} - s) \\ u \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

On a alors l'équivalence

$$s(.) \in \phi(\bar{u}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (s(.), y(.)) \text{ est solution de (1.22) p.p.} t \in [0,T], \\ s(0) = s(T), \\ y(0) = y(T) - \bar{u}T. \end{cases}$$

Ainsi, on considère deux suite $(s_n(.), y_n(.))^T$ et $(\bar{u}_n)$ qui sont telles que $(s_n(.), y_n(.))^T \in \phi(\bar{u}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $(s(.), y(.))^T$ et $\bar{u}$ tels que $(s_n(.), y_n(.))^T$ converge vers $s(.)$ dans $W^{1,1}([0,T], (0, s_{in}) \times \mathbb{R}_+)$ et que $(\bar{u}_n)$ converge vers $\bar{u}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme la suite $(\dot{s}_n(.), \dot{y}_n(.))^T$ converge en norme L^1. On en déduit donc en intégrant que $s(0) = s(T)$ et $y(0) = y(T) - \bar{u}T$. De plus, l'ensemble des solutions de (1.22) est fermé, donc en déduit que $s(.) \in \phi(\bar{u})$, ce qui montre que le graphe de $\phi(.)$ est fermé.

(iii) Soit $\bar{u}$ dans un voisinage de $\bar{u}_0$, et $s(.)$ une trajectoire de $\phi(\bar{u})$. On sait que $s(.)$ atteint le point $\bar{s}$ tel que $\nu(\bar{s}) = \bar{u}$ et que l'on peut considérer sans perte de généralité que $s(0) = s(T) = \bar{s}$, d'après le Lemme 1. Par continuité de $\nu(.)$, $\bar{s}$ est dans un voisinage de $\bar{s}_0$, donc $\bar{s} \in (0, s_{in})$. On en déduit que $f(s(.), \bar{u}) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \leq s_{in}$.

Ainsi, l'ensemble de niveau $\{s(.) \in \phi(\bar{u}) \text{ tel que } \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \leq s_{in}\}$ est inclus dans X qui est compact par le théorème de compacité des trajectoires.

(iv) Soit V_X un voisinage de $Sol(\bar{u}_0)$.

On introduit l'application $H_0 : \mathcal{U} \longrightarrow W^{1,1}([0,T])$ qui à $u(.)$ associe la trajectoire solution de (1.2) pour le contrôle $u(.)$ et la condition initiale $\bar{s}_0$ telle que $\nu(\bar{s}_0) = \bar{u}_0$. Cette application est continue par continuité des trajectoires par rapport aux commandes.

On introduit également l'application $F : X \longrightarrow U$, qui à une trajectoire $s(.)$ de (1.21) associe $\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$ l'intégrale du contrôlé associé à la trajectoire d'après le théorème de Filippov.

Par continuité de H_0, $H_0^{-1}(V_X)$ est un ouvert de $\mathcal{U} = L^1([0,T], U)$, qui contient $H_0^{-1}(Sol(\bar{u}_0))$, et donc des contrôle $u(.)$ de moyenne $\bar{u}_0$.

En tant qu'ouvert de $L^1([0,T], U)$, $H^{-1}(V_X)$ contient aussi des contrôles $u_-(.)$ ou $u_+(.)$ dont les moyennes sur $[0,T]$ $\bar{u}_-$ ou $\bar{u}_+$ sont arbitrairement proches de $\bar{u}_0$, mais telles que $\bar{u}_- < \bar{u}_0 < \bar{u}_+$.

Les trajectoires $s_-(.)$ et $s_+(.)$ solutions de (1.2) pour les contrôles $u_-(.)$ et $u_+(.)$ sont donc dans V_X, et on en déduit que $F(V_X)$ contient l'intervalle $(\bar{u}_-, \bar{u}_+) = V_U$, voisinage de $\bar{u}_0$.

Soit $\bar{u} \in V_U$, $\bar{u} \in F(V_X)$, donc par définition de $F(.)$, il existe $s(.) \in V_X$ tel que $s(.)$ soit solution de la dynamique (1.2) pour un contrôle $u(.)$ tel que $\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$. Donc $s(.) \in \phi(\bar{u})$.

Ces quatre hypothèses vérifiées, on peut appliquer la Proposition 4.4 de [9]. On en déduit la continuité de $V_T(.)$ sur $\mathcal{D}$.

□

Proposition 15. *Soit $T > 0$ et $\bar{s} \in \mathcal{S}$. Alors on a*

$$W_T(\bar{s}) = \max\{\bar{D}, V_T(\bar{s}) = \bar{D}\} = V_T^{-1}(\bar{s}).$$

Démonstration. Comme la fonction $\nu(.)$ est strictement croissante, l'ensemble $\mathcal{S}$ est ouvert. La continuité et la croissance de $V_T(.)$ donnent alors $V_T(\mathcal{D}) = \mathcal{S}$, et $V_T^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{D}$.

Soit $\bar{s} \in \mathcal{S}$. On note $D^* = V_T^{-1}(\bar{s})$, avec $u(.)$ et $s(.)$ le contrôle et la trajectoire associés. En particulier, $s(0) = s(T)$ et $\langle s \rangle = \bar{s}$.

Le contrôle $u(.)$ est sous-optimal pour le problème (1.9) : $W_T(\bar{s}) \geq \langle u \rangle = D^*$.

Supposons qu'il existe $\tilde{u}(.)$ optimal pour le problème (1.19) tel que $\langle \tilde{u} \rangle > D^*$. On note $\tilde{s}(.)$ la trajectoire associée. On a $\langle \tilde{s} \rangle \leq \bar{s}$.

La croissance de V_T donne $V_T(D^*) < V_T(\langle \tilde{u} \rangle$. Or, par définition de V_T, on a

$$V_T(\langle \tilde{u} \rangle) \leq \langle \tilde{s} \rangle \leq \bar{s} = V_T(D^*),$$

ce qui contredit l'inégalité stricte précédente.

On doit donc avoir $W_T(\bar{s}) = D^* = V_T^{-1}(\bar{s})$.

Comme V_T est strictement monotone, la contrainte $\langle s \rangle \geq \bar{s}$ doit donc être active. On en déduit que $W_T(.)$ est bien la fonction valeur du problème (1.19). □

Ce résultat permet donc d'étendre l'optimalité des trajectoires $BBSB$ au problème (1.19).

Chapitre 2

Le cas du chemostat périodique à deux espèces

2.1 Introduction

Dans le Chapitre 1, nous avons considéré le modèle du chemostat avec une seule souche microbienne en présence du substrat. Dans ce chapitre, on va considérer le modèle du chemostat dans le cas où deux souches microbiennes, de concentration respectives x_1 et x_2, sont en présence du substrat de concentration s. Pour un taux de dilution D, qui peut être constant ou dépendre du temps, le modèle s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{s} = D(s_{in} - s) - \mu_1(s)\frac{x_1}{Y_1} - \mu_2(s)\frac{x_2}{Y_2}, \\ \dot{x}_1 = (\mu_1(s) - D)x_1, \\ \dot{x}_2 = (\mu_2(s) - D)x_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans ce système la quantité Y_i est le rendement de l'espèce i. Dans la suite, on peut le supposer égal à 1, en effectuant le changement de variables $x_1' = \frac{x_1}{Y_1}$, $x_2' = \frac{x_2}{Y_2}$.

On se place dans le cas d'un contrôle $D = u(.)$ $T-$périodique, de moyenne $\bar{u} > 0$. De la même façon que dans le cas d'une espèce, la masse équivalent carbone totale $b = s + x_1 + x_2$ suit la dynamique $\dot{b} = u(t)(s_{in} - b)$. On en déduit donc comme au Chapitre 1 que la quantité $s + x_1 + x_2$ tend exponentiellement vers s_{in} si $\int_0^{+\infty} u(t)dt = +\infty$, hypothèse ici vérifiée. Asymptotiquement, le système (2.1) se comporte alors de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu_1(s_{in} - x_1 - x_2) - u(t))x_1, \\ \dot{x}_2 = (\mu_2(s_{in} - x_1 - x_2) - u(t))x_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarque 14. *L'ensemble* $I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq s_{in}\}$ *est invariant par la dynamique (2.2).*

Remarque 15. *Le système (2.2) peut être réécrit sous forme intégrale pour* $t \geq 0$ *avec :*

$$x_i(t) = \exp\left(\int_0^T (s(\theta) - u(\theta))d\theta\right) x_i(0),$$

où $s(.) = s_{in} - x_1(.) - x_2(.)$.

Contrairement aux proies et aux prédateurs du modèles de Lotka-Volterra qui sont en compétition directe, les deux souches microbiennes ne s'influencent qu'indirectement, à travers la concentration s. Elles sont en compétition pour la même ressource.

On remarque déjà que le système comporte une dimension supplémentaire, qui va rendre son étude plus compliquée. Ainsi, pour un taux de dilution $D > 0$ donné, on peut déjà voir que le système (2.1) pourrait admettre plusieurs comportements asymptotiques : lessivage des deux espèces, lessivage d'une seule espèce, coexistence des deux espèces...

Dans ces conditions, le problème de contrôle optimal correspondant peut alors être formulé de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(.)\in\mathcal{U}} & \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T (s_{in} - x_1 - x_2)(t)dt \\ \text{t.q.} & (x_1, x_2)(.) \text{ est solution de (2.2)}, \\ & (x_1, x_2)(0) = (x_1, x_2)(T), \\ & \displaystyle\int_0^T u(t)dt = \bar{u}T. \end{array} \tag{2.3}$$

2.1.1 Le Principe d'exclusion compétitive

Le Principe d'exclusion compétitive [29, 16] décrit le comportement asymptotique du système (2.1) dans le cas d'un taux de dilution constant $D > 0$. Pour des fonctions de croissance $\mu(.)$ croissantes (de plus, on rappelle que $\mu(0) = 0$), on peut définirle seuil de croissance comme suit.

Définition 10. *Le seuil de croissance est, pour un taux de dilution* D *fixé, la quantité* s *telle que* $\mu(s) = D$. *On la notera* $\lambda(D)$. *Si une telle quantité n'existe pas, on prendra* $\lambda(D) = +\infty$.

Remarque 16. *Cette définition doit être adaptée pour le cas de fonctions de croissance non-monotones comme les fonctions de Haldane. Dans ce cas, on peut définir par exemple* $\lambda(D) = \inf\{s \geq 0,$ *tels que* $\mu(s) \geq D\}$.

Dans le cas où plusieurs espèces sont en compétition pour une seule ressource, avec des fonctions de croissance qui ne dépendent que de la concentration en substrat s, le Principe d'exclusion compétitive indique que le seul équilibre stable est l'équilibre où seule l'espèce avec le seuil de croissance minimal est génériquement présente. Le seuil de croissance permet donc de déterminer l'espèce qui consomme la ressource s le plus efficacement, et qui va donc se développer au détriment des autres.

Dans une optique de traitement biologique, on pourrait donc penser qu'il suffirait d'imposer un taux de dilution constant $D = \bar{u}$, et d'attendre que l'espèce la adaptée survive, car cette espèce est celle qui va garantir la concentration en substrat minimale. Une espèce invasive ne pourrait donc s'installer qu'à la condition qu'elle améliore les performances du chemostat, ce qui semble souhaitable à première vue.

Cependant, dans les applications, une souche peut fournir des services que ne fournissent pas toutes les autres souches : dégradation d'un autre substrat par exemple. Par ailleurs, en régime périodique, l'installation d'une deuxième espèce peut dégrader les performances en dépollution, comme on peut le voir sur la Figure 2.10a.

Enfin, le Principe d'exclusion compétitive ne s'applique pas toujours directement, et parfois, il ne s'applique pas du tout. On peut citer plusieurs situations :

- Le Principe d'exclusion compétitive, qui est un résultat asymptotique, s'applique, mais le régime transitoire est long et des espèces moins performantes peuvent s'imposer momentanément pendant le régime transitoire [25],
- Les fonctions de croissance peuvent aussi dépendre de la concentration en micro-organismes. Dans ce cas, le modèle (2.1) permet aussi de prendre en compte la compétition *intra-spécifique* [12]. Lorsqu'elle est assez forte, plusieurs espèces peuvent cohabiter et le Principe d'exclusion compétitive ne s'applique pas.
- Enfin, et c'est le cas qui nous intéresse le plus, lorsque le système (2.1) est non-autonome et varie périodiquement, favorisant d'abord une espèce puis l'autre, alors la cohabitation est possible. Ce phénomène peut avoir lieu via des variations de la concentration en substrat en entrée, du taux de dilution, ou des deux à la fois [30], et s'applique à d'autres modèles de compétition, comme le modèle de Lotka-Volterra [23].

Les résultats du Chapitre 1 et de [6] montrent qu'utiliser un taux de dilution périodique plutôt que constant peut améliorer les performances du chemostat à une espèce. Ainsi, on peut se demander si on peut encore améliorer ces performances en ajoutant une deuxième espèce. Par ailleurs, une espèce invasive peut s'installer dans le chemostat piloté périodiquement et potentiellement dégrader ses performances. On va donc étudier les possibilités de sur-rendement dans le chemostat à

deux espèces.

2.1.2 Quelques résultats importants de la théorie

On va présenter ici quelques éléments de la théorie pour le modèle du chemostat avec deux espèces et un taux de dilution périodique, qui est largement présentée dans [29] (Chapitre 7).

Un premier point important à souligner est que le système (2.2) est de la forme $\dot{x} = f(t, x)$, avec $f(t + T, x) = f(t, x)$ pour tout t, x. Le système est donc non-autonome et périodique en temps. De façon analogue aux systèmes autonomes, de tels systèmes admettent des *équilibres*, qui sont en fait des solution périodiques $x(.)$ vérifiant $x(t + T) = x(t)$. La stabilité locale de ces solutions périodiques, si elles existent, peut également être analysée en linéarisant autour de cette solution. Pour une solution périodique $x(.)$, on s'intéressera donc au système

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))z. \tag{2.4}$$

Dans le cas de (2.2) , et en notant $s = s_{in} - x_1 - x_2$ et en omettant les dépendances en temps, la matrice jacobienne du système est

$$J = \begin{pmatrix} -\mu_1'(s)x_1 + \mu_1(s) - u & -\mu_1'(s)x_1 \\ -\mu_2'(s)x_2 & -\mu_2'(s)x_2 + \mu_2(s) - u \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Ce système est également $T-$périodique, et on appelle *solution fondamentale* de ce système une application $Z(.) : \mathbb{R} \longrightarrow M_n$ vérifiant $\dot{Z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))Z$.

Le théorème de Floquet [4] permet alors de caractériser ces solutions :

Proposition 16. *Si $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n$ est une application continue et $T-$périodique, alors toute solution fondamentale $Z(.)$ du système $\dot{z} = A(t)z$ est de la forme*

$$Z(t) = P(t)e^{Bt},$$

avec $P(t)$ et B des matrices $n \times n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $P(t+T) = P(t)$. Les valeurs propres de e^{BT} sont appelées les coefficients de Floquet et les valeurs propres de B sont les exposants de Floquet. De plus, les exposants de Floquet λ et les coefficients de Floquet μ sont liés par la relation $\mu = e^{T\lambda}$.

Ces coefficients, difficiles à calculer en pratique, permettent de caractériser la stabilité de la solution périodique $x(.)$.

Définition 11. *Une solution $x(.)$ est stable (au sens de Lyapunov), si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour une solution $y(.)$ et un temps t_0,*

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta \Longrightarrow |x(t) - y(t)| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Définition 12. *Une solution $x(.)$ est uniformément asymptotiquement stable si elle est stable au sens de Lyapunov et s'il existe $b > 0$ tel que pour une solution $y(.)$ et un temps t_0,*

$$|x(t_0) - y(t_0)| < b \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} |x(t) - y(t)| = 0,$$

avec convergence uniforme en t_0.

Proposition 17. *Si tous les coefficients de Floquet μ de (2.4) vérifient $|\mu| < 1$, alors la solution $x(.)$ est uniformément asymptotiquement stable.*

S'il existe un coefficient de Floquet tel que $|\mu| > 1$, alors elle est instable.

Dans le cas du système (2.2), la théorie de Floquet permet de caractériser les solutions périodiques de (2.2) dans lesquelles une seule espèce est présente, ainsi que la solution de lessivage où les deux espèces s'éteignent.

Proposition 18. *Soit $i = 1, 2$. Si $\mu_i(.)$ est monotone sur $[0, s_{in}]$, et que $\mu_i(s_{in}) \leq \bar{u}$, alors*

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0.$$

Cette propriété ne dépend pas de l'effet de la compétition, si $\mu_i(s_{in}) \leq \bar{u}$, alors l'espèce i n'est pas assez performante et sera lessivée en présence ou non d'un compétiteur. Ainsi, dans la suite, on fera l'hypothèse

$$\mu_i(s_{in}) > \bar{u}, \quad i = 1, 2.$$

Remarque 17. *Les quantités $\mu_i(s_{in}) - \bar{u}$ sont les exposants de Floquet de l'équilibre périodique de lessivage $(0, 0)$. Ainsi, l'hypothèse (2.1.2) assure que le lessivage est instable.*

Proposition 19. *Soit $i = 1, 2$. Il existe une unique solution positive périodique $\xi_i(.)$ telle que*

$$\begin{cases} (\xi_1(.), 0) \text{ soit solution de (2.2) si } i = 1, \\ (0, \xi_2(.)) \text{ soit solution de (2.2) si } i = 2. \end{cases}$$

De plus, si $(x_1(.), 0)$, avec $x_1(0) > 0$ est une solution de (2.2), alors

$$\lim_{t \to +\infty} |\xi_1(t) - x_1(t)| = 0.$$

On a le résultat analogue pour $\xi_2(.)$.

Cette proposition décrit entièrement les équilibres à une espèce de (2.2). La suivante permet d'étudier leur stabilité à l'aide des exposants de Floquet précédemment présentés.

Proposition 20. *Les exposants de Floquet de la solution périodique* $(\xi_1(.), 0)$ *sont*

$$\lambda_{1,1} = -\frac{1}{T}\int_0^T \xi_1(t)\mu_1'(s_{in} - \xi_1(t))dt, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{T}\int_0^T (\mu_2(s_{in} - \xi_1(t)) - u(t))dt.$$

De plus, $\lambda_{1,1} < 0$.

On a un résultat exactement analogue pour la solution $(0, \xi_2(.))$.
Pour la solution $(\xi_1(.), 0)$, le système (2.4) devient

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\mu_1'(s)\xi_1 + \mu_1(s) - u & -\mu_1'(s)\xi_1 \\ 0 & \mu_2(s) - u \end{pmatrix} z.$$

On peut alors trouver une solution fondamentale $\Phi(.)$ de la forme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\int_0^T (-\mu_1'(s)\xi_1 + \mu_1(s) - u)dt\right) & c(t) \\ 0 & \exp\left(\int_0^T (\mu_2(s) - u)dt\right) \end{pmatrix},$$

dont on peut ensuite déduire les coefficients de Floquet.

Remarque 18. *Les exposants* $\lambda_{1,2}$ *et* $\lambda_{2,1}$ *sont difficiles à calculer analytiquement, mais sont loin d'être inutiles pour autant puisqu'ils sont très faciles à calculer numériquement : il suffit de calculer les solutions sur les faces, qui sont uniques et attractives.*

On présente aussi un outil important pour l'étude des systèmes non-autonomes périodiques de la forme $\dot{x} = f(t, x)$, avec $f(t+T, x) = f(t, x)$ pour tout t, x. Il s'agit de l'application de Poincaré $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, qui à y associe Py tel que $Py = y(T)$, avec $y(.)$ solution de $\dot{x} = f(t, x)$ avec $y(0) = y$. Cette application avance le système d'une période, et permet de se ramener à un système autonome en temps discret tout en rendant compte du comportement asymptotique du système en temps continue. Ainsi, à une solution périodique correspond un point fixe de l'application de Poincaré.

En plus de son caractère périodique, le système (2.2) est également *compétitif* [17, 18]. Formellement, cette propriété s'énonce comme suit :

Définition 13. *Un système de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2), \end{cases}$$

est dit compétitif si

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2) \leq 0, \quad i \neq j.$$

Cette propriété signifie qu'un accroissement d'une des populations va freiner le développement de l'autre population. Ce type de propriété est courant en biologie et en écoloqie, et couvre à la fois la compétition *directe*, comme dans le modèle de Lotka-Volterra, et la compétition *indirecte* comme dans le modèle du chemostat où les deux espèces sont en compétition pour une ressource. On peut facilement vérifier que le système (2.2) est compétitif. Lorsque les termes non-diagonaux sont positifs ou nuls, le système est dit *coopératif*. Les systèmes compétitifs ou coopératifs sont dits *monotones* car leur dynamique ont la propriété de préserver certaines relations d'ordre, ce qui permet de donner des résultats intéressants sur leur comportement asymptotique. En particulier, un système monotone de dimension n a une dynamique aussi compliquée qu'un système de dimension $n-1$.

Définition 14. *On définit l'ordre partiel $\leq_K$ sur $\mathbb{R}^2$ par la relation*

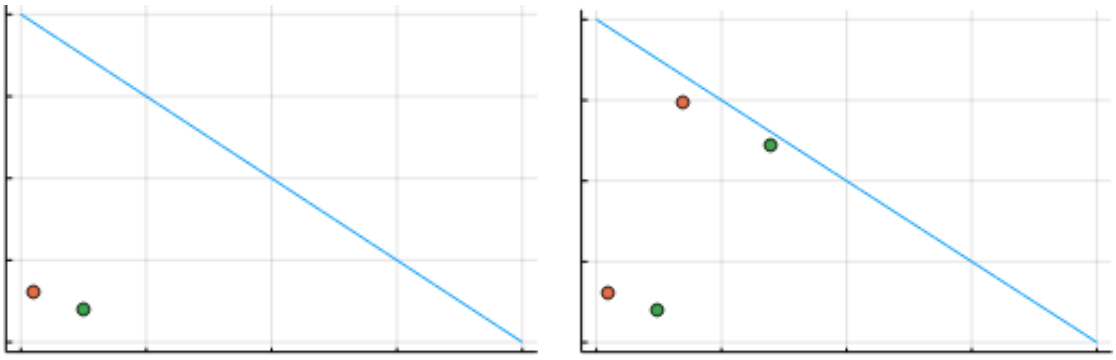
$$x \leq_K y \iff \begin{cases} x_1 \leq y_1, \\ x_2 \geq y_2. \end{cases}$$

Cet ordre sur $\mathbb{R}^2$ permet de capturer l'état de la compétition entre les deux espèces. Si $x \leq_K y$, alors l'espèce 2 est plus avantagée par rapport à l'espèce 1 dans l'état x que dans l'état y.

On définit également l'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}^2$ défini composante par composante.

Le modèle (2.2) compétitif conserve l'ordre $\leq_K$ au cours du temps via son application de Poincaré :

Proposition 21. *Soit $x, y \in I$.*
- *Si $x \leq_K y$, alors $Px \leq_K Py$.*
- *Si $Px \leq Py$, alors $x \leq y$.*



(a) Deux conditions initiales ordonnées pour l'ordre compétitif $\leq_K$

(b) L'ordre compétitif $\leq_K$ est conservé par P

Cette propriété est vraie pour tous les modèles compétitifs en dimension 2. Pour les systèmes coopératifs, il suffit d'échanger les deux ordres.

Remarque 19. *Les systèmes compétitifs et les systèmes coopératifs sont très liés : un système compétitif est coopératif en temps rétrograde et réciproquement.*

Le caractère compétitif de (2.2) est utilisé pour prouver une autre propriété importante sur le comportement asymptotique du chemostat en régime périodique.

Proposition 22. *Si la suite $(P^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors il existe $\bar{x}$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} P^n x_0 = \bar{x}.$$

En temps continu, si $x(.)$ et $p(.)$ sont deux solutions de (2.2), avec pour conditions initiales respectives x_0 et $\bar{x}$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - p(t)| = 0.$$

Cette propriété dont la preuve repose sur la compétitivité de (2.2), indique donc que toute solution de (2.2) issue d'une condition initiale dans I converge vers une solution périodique. En effet, l'ensemble I est invariant et borné donc toute solution partant de cet ensemble reste bornée.

Remarque 20. *Cette propriété ne permet pas de dire si les deux espèces sont présentes dans la solution $p(.)$.*

2.1.3 Une condition suffisante pour l'existence d'une solution périodique de coexistence

Pour pouvoir résoudre un problème de contrôle optimal périodique à deux espèces (2.3), l'ensemble des contrôle $u(.)$ définis sur $[0, T]$, mesurables de moyenne donnée $\bar{u}$ qui assurent la condition de périodicité $(x_1, x_2)(0) = (x_1, x_2)(T) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ doit être non-vide.

Définition 15. *On dit que les espèces 1 et 2 sont en situation de coexistence forte s'il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$x_i(t) > \epsilon, \quad \forall t \geq 0, \forall i = 1, 2.$$

Remarque 21. *Il existe plusieurs définitions de coexistence (ou de persistance) dans un système dynamique [13]. A titre de comparaison, la notion de coexistence forte présentée ici implique la persistance uniforme :*

$$\exists \epsilon > 0, \quad \liminf_{t\to+\infty} x_i(t) > \epsilon, \quad \forall i = 1, 2.$$

Cette notion est la plus forte parmi celles présentées dans [13], la condition de coexistence forte est donc assez difficile à satisfaire.

A notre connaissance, il n'existe à ce jour que des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'une solution $T-$périodique de coexistence pour un contrôle $u(.)$ donné. Ce critère [19] fait principalement intervenir la stabilité des solutions périodiques où une seule espèce est présente dans le chemostat. Pour écrire ce résultat, on note $E_1(.)$ la solution périodique $(\xi_1(.), 0)$ et $E_2(.)$ la solution périodique $(0, \xi_2(.))$. A $E_1(.)$ et $E_2(.)$ correspondent deux points fixes de P, E_1 et E_2.

Proposition 23. *L'application P a un point fixe positif si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

- *Les équilibres E_1 et E_2 sont tous les deux stables,*
- *Les équilibres E_1 et E_2 sont tous les deux instables,*
- *Il existe $x \geq 0$ et $z \in \omega(x)$ tels que $z_1, z_2 > 0$.*

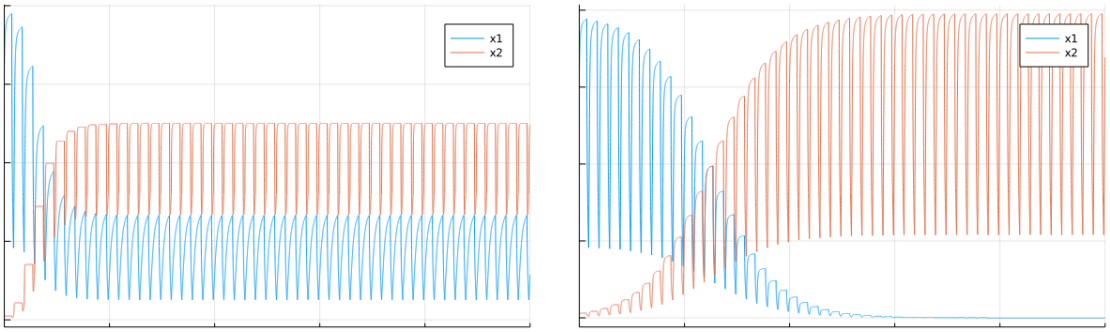
Ainsi, on voit que le calcul des exposants de Floquet $\lambda_{1,2}$ et $\lambda_{2,1}$ permet de tester si la première ou la deuxième hyptohèse s'applique. Dans le cas où les deux solutions périodiques à une espèce $(0, x_2)(.)$ et $(x_1, 0)(.)$ sont instables, on peut encore préciser le résultat en précisant la convergence vers ces points fixes [29], ainsi que leur localisation.

Proposition 24. *Si $\lambda_{1,2} > 0$ et $\lambda_{2,1} > 0$, alors il existe deux points fixes de P, E_* et E_{**}, possiblement identiques, tels que*

- *$E_2 <_K E_{**} \leq_K E_* < E_1$,*
- *Si $E_2 <_K x_0 \leq_K E_{**}$, alors $\lim_{n\to+\infty} P^n x_0 = E_{**}$,*
- *Si $E_* \leq_K x_0 < E_1$, alors $\lim_{n\to+\infty} P^n x_0 = E_*$,*
- *Si x_0 a ses deux composantes strictement positives, alors il existe $\bar{x}$, point fixe de P tel que $E_{**} \leq_K \bar{x} \leq_K E_*$ et vérifiant $\lim_{n\to+\infty} P^n x_0 = \bar{x}$.*

Cette proposition assure de la convergence vers une solution périodique de coexistence forte depuis toute condition initiale où les deux espèces cohabitent. En particulier, si $E_* = E_{**}$, alors il existe une unique solution périodique de coexistence vers laquelle converge toutes les conditions initiales de coexistence. Cependant, et comme on le verra à la section suivante, il est très difficile de dire si cette égalité sera vérifiée, ni même de caractériser davantage E_* et E_{**}.

Ce résultat a tout de même un intérêt pratique puisque dans certains cas, le calcul numérique des coefficients de Floquet peut être utilisé pour prédire l'issue de l'introduction d'une quantité même minime d'une autre espèce.



(a) Cas $\lambda_{1,2}, \lambda_{2,1} > 0$ (b) Cas $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_{2,1} < 0$

FIGURE 2.2 – Deux issues possibles de la compétition

Remarque 22. *En théorie, avoir les inégalités* $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_{2,1} < 0$ *ne garantit pas pour autant que l'espèce* 1 *va toujours être lessivée.*

2.2 Solutions périodiques positives dans le chemostat à deux espèces avec un taux de dilution périodique : le problème de l'unicité

La condition suffisante assurant l'existence d'une solution périodique de coexistence forte pour la dynamique (2.2) ne donne aucune indication sur le nombre de solutions périodiques de coexistence. Cette question est intéressante d'un point de vue théorique, mais aussi d'un point de vue pratique : une fois l'étude du contrôle optimal menée à terme, si l'état est mal connu et que le système converge vers une autre solution périodique moins performante en implémentant le contrôle optimal, les performances en dépollution s'en trouveront affectées. De plus, si on pouvait dans le cas d'une espèce imposer $s(0) = s(T) = \bar{s}$, dans le cas de deux espèces, il n'existe pas de condition au bord naturelle qui déterminerait entièrement une condition initiale naturelle. Par exemple, poser $(x_1 + x_2)(0) = (x_1 + x_2)(T) = \bar{s}$, ce qui ne détermine pas entièrement x_1 et x_2, et donc ne détermine pas entièrement la condition au bord.

Il ne semble pas exister de résultat général sur l'unicité des solutions périodiques de coexistence pour les systèmes compétitifs [28]. Par ailleurs, aucune des simulations effectuées dans le cadre de ce travail, mais aussi de celles présentées dans les travaux [29, 23, 30] ne montre l'existence de plus d'une solution périodique de coexistence pour les fonctions de croissance usuelles. Ainsi, on peut penser qu'il doit être possible de mettre en évidence des conditions suffisantes assurant l'unicité d'un équilibre. Cependant, aucun résultat de ce type n'existe à notre connaissance pour le modèle du chemostat à deux espèces (2.2).

Il existe des résultats réduisant les comportements des systèmes dynamiques décrit par l'itération d'une application T à la trichotomie suivante :

— Pour tout $x \geq 0$, l'orbite $\cup_{j=0}^{\infty} T^j(x)$ n'est pas bornée ;
— Pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, $\lim_{j\to+\infty} T^j(x) = 0$;
— Il existe un unique point fixe q dans l'intérieur de $\mathbb{R}^n_+$ tel que pour tout $x \geq 0$, $\lim_{j\to+\infty} T^j(x) = q$.

Cette trichotomie peut être assurée par des hypothèses de coopérativité et de concavité de la dynamique comme dans [26]. Ce résultat pourrait s'appliquer dans le chemostat en temps rétrograde sous certaines hypothèses sur $\mu_1(.)$ et $\mu_2(.)$. Mais comme nous avons interdit le lessivage avec l'hypothèse (2.1.2), en temps rétrograde, le lessivage deviendrait attractif, ce qui ne permet pas de conclure. Ce résultat a ensuite été généralisé [20] aux applications T vérifiant des hypothèses de monotonicité et de sous-homogénéité, pour n'importe quel ordre $<$ généré par

un cône :

$$\begin{aligned} &x \geq 0 \Longrightarrow T(x) > 0, \\ &x \leq y \Longrightarrow T(x) \leq T(y), \\ &T(\lambda x) \leq \lambda T(x), \quad \forall \lambda \in (0,1), x > 0. \end{aligned}$$

Ce résultat permet de travailler directement avec l'ordre compétitif et donc de conserver l'hypothèse de répulsivité de l'équilibre de lessivage. Cependant, des simulations numériques tendent à montrer que l'hypothèse de sous-homogénéité n'est pas vérifiée par l'application P.

Ainsi, le problème de l'unicité des solutions périodiques de coexistence pour le modèle (2.2) reste un problème ouvert et difficile mais aussi intéressant et stimulant.

Au cours de ce stage, on a quand même pu montrer un critère garantissant l'impossibilité de l'existence de deux solutions périodiques de coexistence égales à un décalage en temps près. De plus, la section suivante présente des exemples où une infinité de solutions périodiques de coexistence peut exister. Cependant, ces exemples sont extrêmement non-génériques, laissant à penser que l'unicité des solutions périodiques est le cas le plus général. Enfin, on présente des pistes d'études qui n'ont pas pu être explorées à fond au cours de ce stage, mais qui pourraient se révéler intéressantes.

2.2.1 Un résultat sur la façon dont sont parcourues les solutions périodiques

Dans cette section, on montre que deux solutions périodiques positives de (2.2) ne peuvent pas être égales à un décalage en temps près sous une condition facile à vérifier du contrôle $u(.)$. Ce résultat permet donc d'exclure le cas où le système (2.2) admet plusieurs solutions périodiques qui sont en fait décalées dans le temps : on les confondrait dans le portrait de phase.

Proposition 25. *Soit $(x_1, x_2)(.)$ et $(x_1', x_2')(.)$ deux solutions $T-$périodiques de (2.2), telles qu'il existe $\tau > 0$ vérifiant*

$$(x_1', x_2')(t + \tau) = (x_1, x_2)(t), \quad \forall t.$$

Alors le contrôle $u(.)$ est $\tau-$périodique.

Démonstration. Soit $i = 1, 2$ et $t \in \mathbb{R}$. En intégrant la dynamique (2.2), on a

$$\begin{aligned} x_i'(t+\tau) &= \exp\Big(\int_0^{t+\tau} (\mu_i(s'(\theta)) - u(\theta))d\theta\Big) x_i'(0), \\ &= \exp\Big(\int_0^{t+\tau} (\mu_i(s'(\theta)) - u(\theta))d\theta\Big) x_i(-\tau), \text{ et} \\ x_i'(t+\tau) = x_i(t) &= \exp\Big(\int_{-\tau}^{t} (\mu_i(s(\theta)) - u(\theta))d\theta\Big) x_i(-\tau). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_{-\tau}^{t} (\mu_i(s(\theta)) - u(\theta))d\theta = \int_0^{t+\tau} (\mu_i(s'(\theta)) - u(\theta))d\theta.$$

En utilisant $s'(. + \tau) = s(.)$, on en déduit que

$$\int_{-\tau}^{t} (\mu_i(s(\theta)) - u(\theta))d\theta = \int_{-\tau}^{t} (\mu_i(s(\theta)) - u(\theta + \tau))d\theta.$$

Enfin, on a que pour tout $t \geq 0$, le contrôle $u(.)$ vérifie

$$\int_{-\tau}^{0} u(\theta)d\theta = \int_t^{t+\tau} u(\theta)d\theta.$$

Cette équation signifie que l'application $t \longmapsto \int_t^{t+\tau} u(\theta)d\theta$ est constante, et donc que $u(.)$ est $\tau-$périodique. □

La contraposée de ce résultat permet facilement de montrer qu'il n'existe pas de cycle limite auquel correspondraient deux solutions périodiques, décalées dans le temps. Il suffit de s'assurer que le contrôle $u(.)$ admet comme seules périodes les quantités kT, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2.2.2 Une classe d'exemples non-génériques avec une infinité de solutions périodiques positives

Cette construction semble contredire les observations numériques précédemment mentionnées, mais elle repose en fait sur deux propriétés qui ne sont pas du tout génériques : les fonctions de croissance doivent être affines dans un voisinage de leur intersection et la moyenne du contrôle doit être exactement située à l'intersection de ces deux fonctions. Ainsi, en pratique, il sera quasiment impossible d'observer ce résultat. De plus, aucune de ces propriétés ne semble pouvoir être relâchée sans perdre le résultat de multiplicité. Cette construction peut donc

jouer le rôle de contre-exemple pour, par exemple, tester d'éventuelles conditions suffisantes assurant l'unicité de la solution périodique positive de (2.2).

Dans la suite, on se donne un contrôle $T-$périodique $u(.)$ mesurables à valeurs dans un ensemble $[D_-, D_+]$ et de moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \bar{u}$. On suppose de plus que le contrôle $u(.)$ n'admet pas d'autre période que T.

Lemme 12. *Si $u(.)$ est à valeurs dans $[D_-, D_+]$ avec $D_- > 0$ $\bar{s} \in (D_-, D_+)$, alors il existe $\underline{s} \in (0, s_{in})$ tel que pour tout $s_0 \in (\underline{s}, s_{in})$, $s(.)$ solution de (2.1) pour la condition initiale $s(0) = s_0$ vérifie $s(t) \leq \underline{s}$, $\forall t \geq 0$.*

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + u(t)(s_{in} - s),\\ &\geq -\max(\mu_1(s), \mu_2(s))(x_1 + x_2) + u(t)(s_{in} - s).\end{aligned}$$

Comme $s_{in} \geq x_1 + x_2$, on a de plus

$$\dot{s} \geq -\max(\mu_1(s), \mu_2(s))s_{in} + D_-(s_{in} - s).$$

On va montrer qu'il existe $\underline{s} \in (0, s_{in})$ qui annule le membre de droite. En $s = 0$, cette quantité vaut $D_- s_{in} > 0$. Pour s tel que $\max(\mu_1(s), \mu_2(s)) = D_-$, alors le membre de droite vaut $-D_- s < 0$.

On obtient alors le résultat par continuité du membre de droite. □

Ce lemme montre que $s(.)$ solution de (2.2) ne s'approche pas arbitrairement proche du bord $s = 0$, pour peu que le contrôle ne prenne pas des valeurs trop faibles. On va pouvoir tirer parti de ce résultat pour construire des fonctions de croissance affines sur $[\underline{s}, s_{in}]$ mais qui vérifient tout de même $\mu(0) = 0$, ce qui permettra de laisser l'ensemble I invariant.

Dans tout ce qui suit, on considère $\bar{u} > 0$, $\underline{s} \in (0, s_{in})$, et deux fonctions de croissance $\mu_1(.)$ et $\mu_2(.)$ telles que :

- Pour $i = 1, 2$, il existe $a_i, b_i > 0$ tels que $\mu_i(s) = a_i s + b_i$ pour $s \in [\underline{s}, s_{in}]$.
- Pour $i = 1, 2$, $\mu_i(.)$ soit Lipschitz-continue et croissante strictement sur $[0,_{in}]$, avec $\mu_i(0) = 0$.
- Il existe $\bar{s} \in (\underline{s}, s_{in})$ tel que $\mu_1(\bar{s}) = \mu_2(\bar{s}) = \bar{u}$.

De telles fonctions peuvent être construites en prolongeant des fonctions affines par un polynôme de degré 2 croissant sur $[0, \underline{s})$ et s'annulant en 0.

Ainsi, avec de telles fonctions de croissance et avec le résultat du Lemme 12, pour une condition initiale $s_0 > \underline{s}$ (condition que l'on supposera vérifiée par la suite), il est possible de considérer $\mu_1(.)$ et $\mu_2(.)$ affines pour toutes les valeurs prises par $s(.)$ au cours du temps.

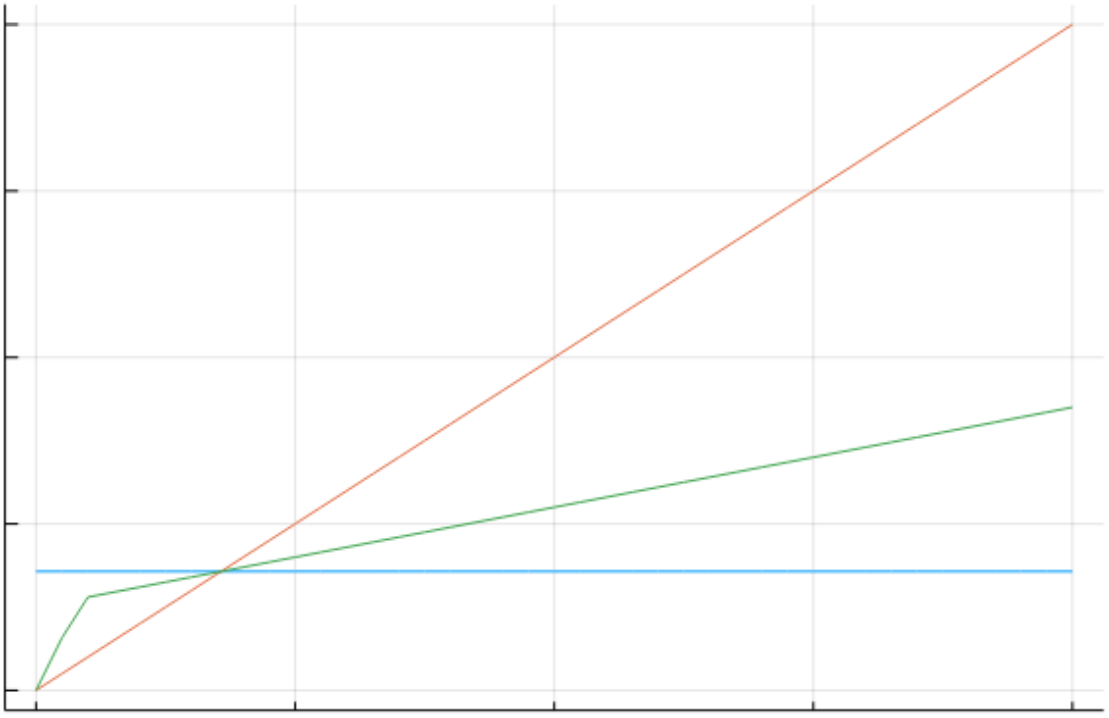


FIGURE 2.3 – $\bar{u}$ en bleu, avec $\mu_1(.)$ et $\mu_2(.)$ affines sur $[\underline{s}, s_{in}]$.

Dans ces conditions, on définit la quantité suivante, qui va être d'un grand intérêt pour la suite de l'étude :

Définition 16. *Soient $x_1(.)$ et $x_2(.)$ solutions non-nulles de (2.1), on définit le ratio pondéré par les puissances par*

$$r = \frac{x_1^{\frac{1}{a_1}}}{x_2^{\frac{1}{a_2}}}. \tag{2.6}$$

L'introduction de la quantité r ainsi définie est motivée par le calcul qui suit :

$$\begin{aligned} x_i(T) &= \exp\Big(\int_0^T (\mu_i(s(t)) - u(t))dt\Big)x_i(0), \\ &= \exp\Big(T\Big(\frac{1}{T}\int_0^T \mu_i(s(t))dt - \bar{u}\Big)\Big)x_i(0), \\ &= \exp\Big(T\Big(\mu_i\big(\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt\big) - \mu_i(\bar{s})\Big)\Big)x_i(0), \\ &= \exp\Big(T\Big(a_i\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt - a_i\bar{s}\Big)\Big)x_i(0), \\ &= \Big(\exp\Big(\int_0^T (s(t) - \bar{s})dt\Big)\Big)^{a_i} x_i(0). \end{aligned}$$

On voit bien que l'égalité $\mu_1(\bar{s}) = \mu_2(\bar{s}) = \bar{u}$ et le caractère affine de μ_1 et μ_2 sont à la base de ce calcul, qui illustre que la seule différence entre l'espèce 1 et l'espèce 2 est l'exposant a_1 ou a_2 appliqué au terme $\exp\Big(\int_0^T (s(t) - \bar{s})dt\Big)$.

Proposition 26. *Soit $r(.)$ solution de (2.6), alors pour tout $t \geq 0$, on a*

$$r(t) = \exp\left(\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\int_0^t (\bar{u} - u(\theta))d\theta\right) r(0).$$

Démonstration. On calcule

$$\dot{r} = \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} - \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)u(t)\right) r.$$

Comme on a supposé $a_i\bar{s} + b_i = \bar{u}$ pour $i = 1, 2$, on en déduit

$$\dot{r} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)(\bar{u} - u(t))r.$$

Cette équation peut s'intégrer directement, ce qui donne le résultat. □

Corollaire 4. *Soit $r(.)$ solution de (2.6), alors $r(.)$ est $T-$périodique, ce qui signifie en particulier que les deux espèces x_1 et x_2 coexistent fortement.*

Remarque 23. *Contrairement aux quantités x_1 ou x_2 par exemple qui suivent un éventuel régime transitoire avant de converger vers une solution périodique, le ratio r est toujours périodique :*

$$r(kT) = r(0), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

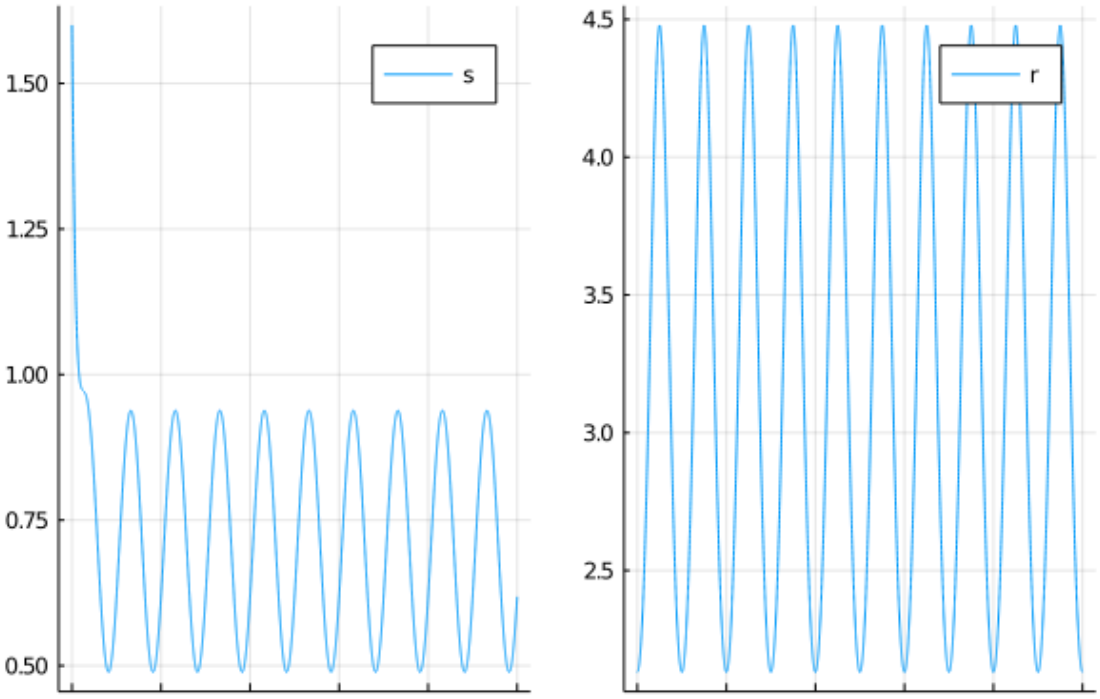


FIGURE 2.4 – $s(.)$ suit un régime transitoire contrairement à $r(.)$

Corollaire 5. *Soit $r^1(.)$ et $r^2(.)$ deux solutions de (2.6) avec les conditions initiales respectives $r^1(0)$ et $r^2(0)$, alors la quantité $t \longmapsto \frac{r^1(t)}{r^2(t)}$ est constante égale à $\frac{r^1}{r^2}(0)$.*

Proposition 27. *Le système (2.2) avec les fonctions de croissance spécifiques construites dans cette section admet une infinité de solutions périodiques de co-existence.*

Démonstration. Soit $r_0 \in (0, +\infty)$. Il existe $x_1(0), x_2(0) > 0$ tels que $r_0 = \frac{x_1(0)^{\frac{1}{a_1}}}{x_2(0)^{\frac{1}{a_2}}}$. D'après la Proposition 22, la trajectoire $(x_1, x_2)(.)$ de (2.2) telle que $(x_1, x_2)(0) = (x_1(0), x_2(0))$ converge vers une solution périodique notée $p_{r_0}(.)$. Cette solution vérifie

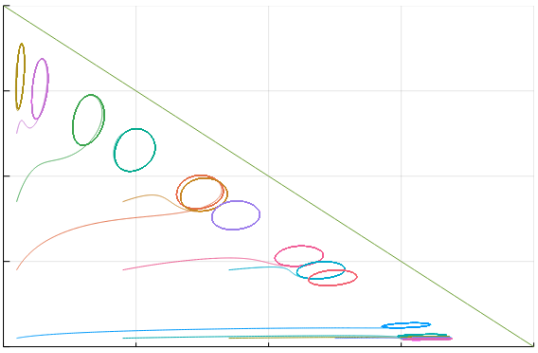
$$\frac{(p_{r_0})_1(kT)^{\frac{1}{a_1}}}{(p_{r_0})_2(kT)^{\frac{1}{a_2}}} = r_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Cette construction n'est pas bijective puisque plusieurs couples $(x_1(0), x_2(0))$ peuvent atteindre r_0, mais permet d'associer à tout $r \in (0, +\infty)$ au moins une solution périodique p_r. On va maintenant montrer que pour deux valeurs de r distinctes, les solutions $p_r(.)$ associées sont aussi distinctes.

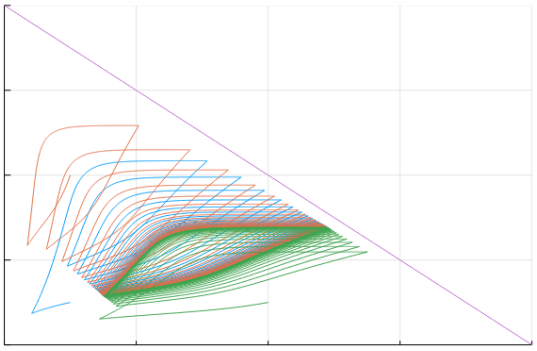
Soit $r, \rho \in (0, +\infty)$, avec deux solutions périodiques $p_r(.)$ et $p_\rho(.)$ associées. Les quantités r et ρ, dans le sens donné par (2.7), sont conservés sur les trajectoires

$p_r(.)$ et $p_\rho(.)$ respectivement. De plus, on a supposé que $u(.)$ admettait T comme seule période, donc on peut appliquer la Proposition 25. On en déduit que les solutions périodiques $p_r(.)$ et $p_\rho(.)$ sont donc différentes et correspondent à deux cycles limites distincts.

On peut donc construire ainsi une infinité de solutions $T-$périodiques atteignables de (2.2), ce qui conclut la preuve. □



(a) Cas linéaire avec intersection en $\bar{u}$: Une infinité de solutions périodiques de coexistence



(b) Cas non-linéaire : Convergence vers une seule solution périodique de coexistence

FIGURE 2.5 – Portait de phase du système (2.2) pour différentes conditions initiales

Remarque 24. *Soit $(x_1, x_2)(.)$ une solution $T-$périodique de (2.2). On a donc pour $i = 1, 2$ la relation*

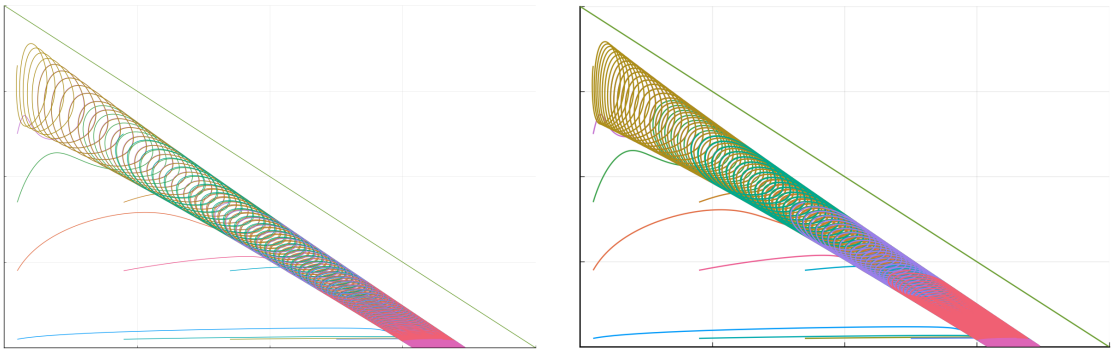
$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T \mu_i(s(t))dt = \mu_i\left(\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt\right).$$

Comme $\bar{u} = \mu_i(\bar{s})$, on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \bar{s}.$$

Ainsi, toutes les solutions périodiques de la Figure 2.6a ont une concentration moyenne en substrat $\bar{s}$. Graphiquement, toutes les solutions semblent proches de la droite $x_1 + x_2 = s_{in} - \bar{s}$.

On peut se demander s'il n'est pas possible de relâcher l'une des deux hypothèses principales (linéarité et intersection en $\bar{u}$. Cependant, dès que l'une ou l'autre de ces hypothèses est perturbée, il semble que l'unicité de la solution périodique redevienne la norme.



(a) Cas linéaire perturbé : intersection en $\bar{u} + \epsilon$

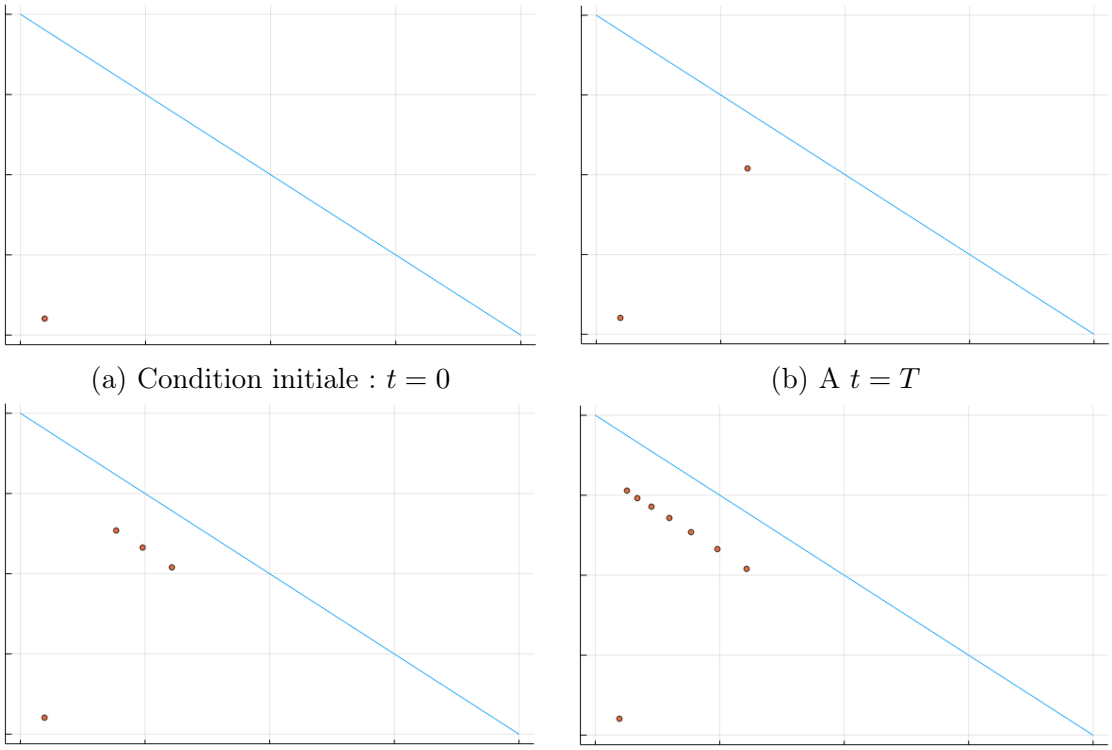
(b) Cas linéaire perturbé : $\mu_2(.)$ est très faiblement convexe

FIGURE 2.6 – Portait de phase du système (2.2) perturbé pour différentes conditions initiales

2.2.3 Plusieurs phénomènes à des échelles de temps différentes

Au cours des nombreuses simulations effectuées pour ce travail, il ressort que la dynamique (2.2) semble exhiber un comportement que l'on pourrait rapprocher de celui d'un système *lent-rapide* : les points $(x_1, x_2)(kT)$ semblent d'abord se rapprocher d'une droite de pente -1 pour ensuite la suivre et atteindre leur équilibre.

Ainsi, le système agit comme si la dynamique (2.2), ou plutôt l'application de Poincaré associée T, était composition de deux phénomènes ayant lieu à des échelles de temps différentes : d'abord atteindre une certaine droite d'équation $x_1 + x_2 = k$ qui, pour poursuivre l'analogie avec les systèmes lents-rapides, jouerait le rôle de *variété lente*, puis suivre de cette droite jusqu'à l'équilibre.



(a) Condition initiale : $t = 0$ (b) A $t = T$

(c) A $t = 3T$ (d) A $t = 7T$

FIGURE 2.7 – Evolution du système $(x_1, x_2)(.)$ au cours du temps

Pour mieux comprendre analytiquement ce phénomène, on peut réécrire (2.2) en les variables $s(.)$ et $p(.)$, où p représente la proportion de l'espèce 1 dans la biomasse totale, c'est-à-dire

$$p = \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

On a alors la dynamique sous la forme

$$\begin{cases} \dot{s} = (u(t) - (p\mu_1(s) + (1-p)\mu_2(s)))(s_{in} - s), \\ \dot{p} = p(1-p)(\mu_1(s) - \mu_2(s)). \end{cases} \tag{2.8}$$

Heuristiquement, on peut supposer que la quantité $(\mu_1 - \mu_2)(s)$ est "plus petite" que la quantité $-(p\mu_1(s) + (1-p)\mu_2(s) - u(t))$, la variable p sera donc une variable "plus lente" que la variable s. Cela correspond à l'observation : la droite $x_1 + x_2 = k$ correspond à une quantité $s = x_1 + x_2$ telle que $x_1 + x_2 = (P(x_1, x_2))_1 + (P(x_1, x_2))_2$.

Numériquement, on peut aussi essayer de constater comment cette propriété se manifeste sur l'application de Poincaré P. En particulier, on peut penser qu'il doit être possible de mettre en évidence deux comportements distincts de $x \longmapsto P(x)$

selon que x est proche ou non de la droite de pente -1 qui joue le rôle de "variété lente". Pour cela, deux grandeurs ont été calculées numériquement, avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour la simulation de la Figure 2.7.

La première est un coefficient de Lipschitz sur une boule de rayon $R > 0$ de P, défini en $x \in I$ par

$$L(x) = \max_{y_1, y_2 \in B(x,R)} \frac{|P(y_1) - P(y_2)|}{|y_1 - y_2|}.$$

Comme les valeurs atteintes proches de zéro étaient très grande par rapport aux valeurs proches du point fixe de P, on les a tronquées (ici à la valeur 5.0) pour gagner en visibilité dans les graphiques. On obtient alors la figure suivante :

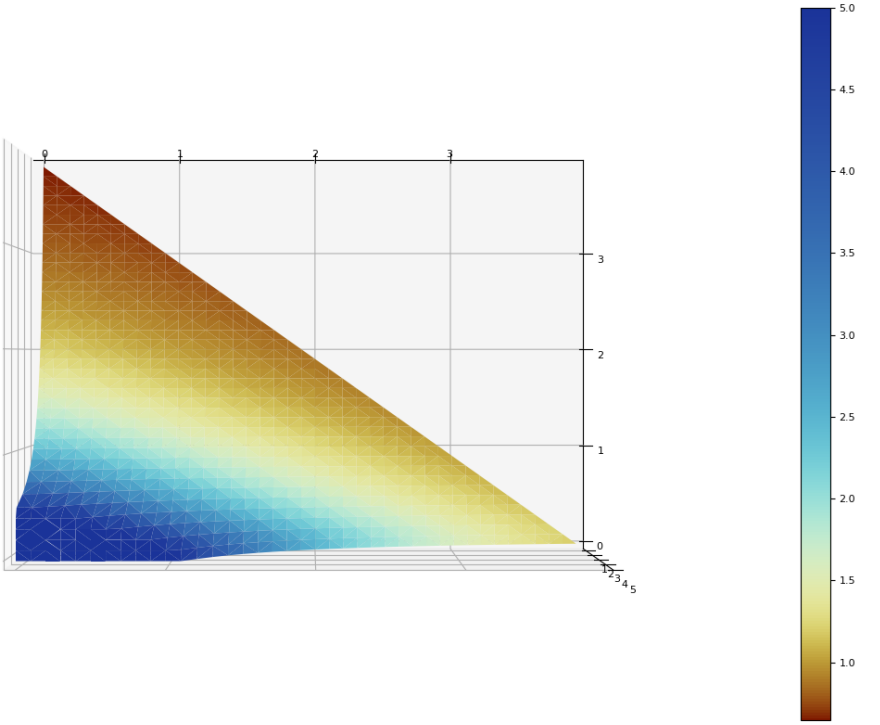


FIGURE 2.8 – Coefficients de Lipschitz locaux de P

On remarque que l'opérateur P tend à être localement contractif dans une zone proche de celle où se trouve son point fixe. On ne voit toutefois pas émerger une structure qui exhiberait un comportement particulier sur des bandes de pente -1.

La deuxième grandeur sert à montrer à quel point P va projeter loin un point x donné. Ainsi, on a simplement calculé la quantité

$$D(x) = |P(x) - x|.$$

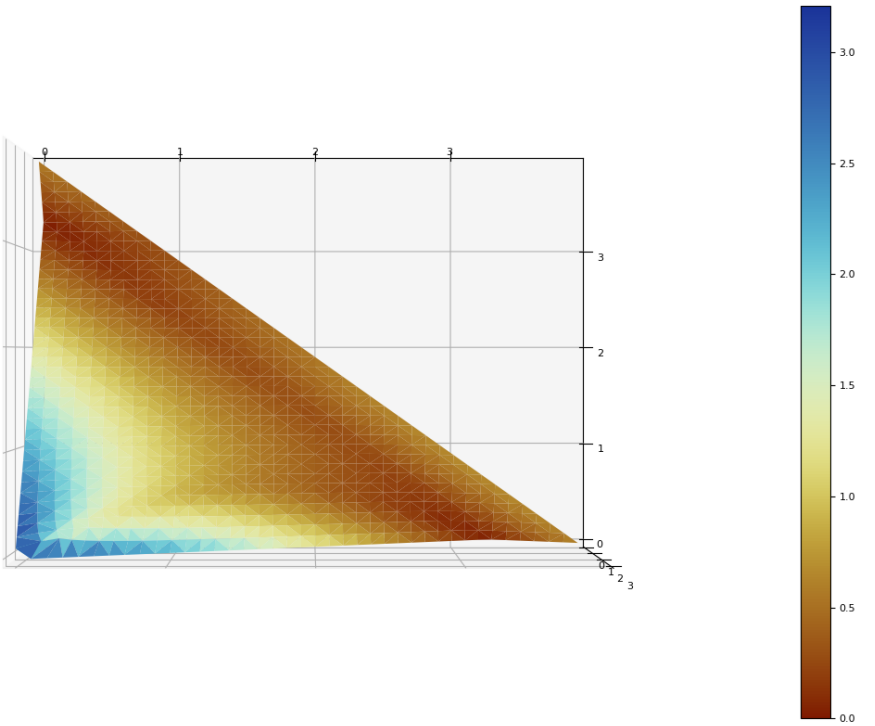


FIGURE 2.9 – Norme de $P(x) - x$

Cette figure fait plus clairement apparaître une bande de pente -1, sur laquelle la norme $|P(x) - x|$ est très faible. Ainsi, une fois sur cette bande, la suite $(x_1, x_2)(kT)$ varie beaucoup moins, comme on peut le voir en Figure 2.7.

2.3 Sur-rendements dans le cas de deux espèces

2.3.1 Possibilités de sur-rendement

Les résultats de cette section sont analogues à ceux de [6, 7] et visent à examiner la possibilité de sur-rendement selon la convexité des fonctions de croissance $\mu_1(.), \mu_2(.)$.

On présente tout d'abord un résultat un peu plus général que celui de la Proposition 2 et qui empêche le sur-rendement.

Proposition 28. *Soit $u(.)$ un contrôle $T-$périodique, et $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in (0, s_{in})$ tels que $\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \bar{u} = \mu_i(\bar{s}_i)$ pour $i = 1, 2$. S'il existe $i \in \{1, 2\}$, $\hat{\mu}_i(.)$ telle que*

- *$\hat{\mu}_i(.)$ est continue, concave et croissante,*
- *$\mu_i(s) \leq \hat{\mu}_i(s)$, pour tout $s \in (0, s_{in})$,*
- *$\mu_i(\bar{s}_i) = \hat{\mu}_i(\bar{s}_i)$,*

Alors pour toute solution $s(.) = (s_{in} - x_1 + x_2)(.)$ $T-$périodique de (2.2), on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \geq \bar{s}_i.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt < \bar{s}_i$. La croissance de $\hat{\mu}_i(.)$ donne

$$\hat{\mu}_i\left(\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt\right) \leq \hat{\mu}_i(\bar{s}_i) = \mu_i(\bar{s}_i).$$

Par concavité, on a ensuite

$$\hat{\mu}_i\left(\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt\right) \geq \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\mu}_i(s(t))dt \geq \frac{1}{T}\int_0^T \mu_i(s(t))dt.$$

Comme $s(.)$ est $T-$périodique, on a $\frac{1}{T}\int_0^T \mu_i(s(t))dt = \frac{1}{T}\int u(t)dt$, et on peut alors déduire que

$$\frac{1}{T}\int s(t)dt \geq \bar{s}_i.$$

□

Corollaire 6. *Si $\mu_1(.)$ et $\mu_2(.)$ vérifie les hypothèses de la Proposition 28, alors le contrôle optimal pour le Problème (2.3) est d'appliquer $u(t) = \mu_{i^*}(\bar{s}_{i^*})$ où $\bar{s}_{i^*} = \min(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$. Seule l'espèce i^* sera alors présente dans le chemostat sous ce régime de fonctionnement d'après le principe d'exclusion compétitive.*

Remarque 25. *Une espèce dont la fonction de croissance vérifie les hypothèses de 28 va introduire une borne inférieure de la fonction valeur du Problème 2.3.*

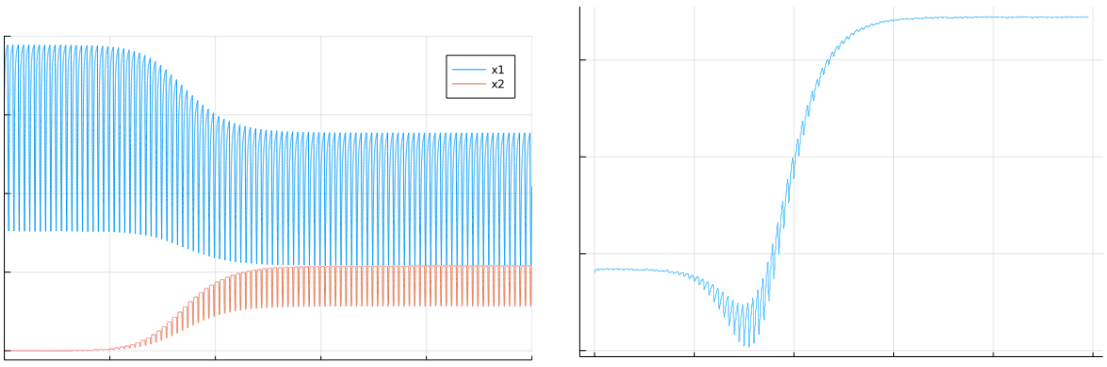
On peut ensuite constater que la convexité permet toujours le sur-rendement dans le cas de deux espèces.

Proposition 29. *Soit $u(.)$ un contrôle $T-$périodique, et $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in (0, s_{in})$ tels que $\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \bar{u} = \mu_i(\bar{s}_i)$ pour $i = 1, 2$. S'il existe $i \in \{1, 2\}$, tel que $\mu_i(.)$ soit convexe croissante, Alors pour toute solution $s(.) = (s_{in} - x_1 + x_2)(.)$ $T-$périodique de (2.2), on a*

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \leq \bar{s}_i.$$

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle de la Proposition 1. □

Remarque 26. *Cette proposition ne permet toutefois pas de comparer les performances en dépollution du chemostat à une espèce et du chemostat à deux espèces.*



(a) Invasion d'une seconde espèce

(b) Moyenne mobile $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t)dt$

FIGURE 2.10 – Dégradation des performances avec l'installation d'une deuxième espèce convexe

Chapitre 3

Le modèle du gradostat

3.1 Introduction

3.1.1 Présentation du modèle

Dans ce chapitre, un nouveau modèle est introduit, qui permet de rendre de compte de phénomènes de spatialisation : le modèle dit du gradostat. Seul le gradostat avec une seule espèce de micro-organismes sera considéré, il s'agit donc d'une extension du modèle du chemostat mono-espèce vu au Chapitre 1.

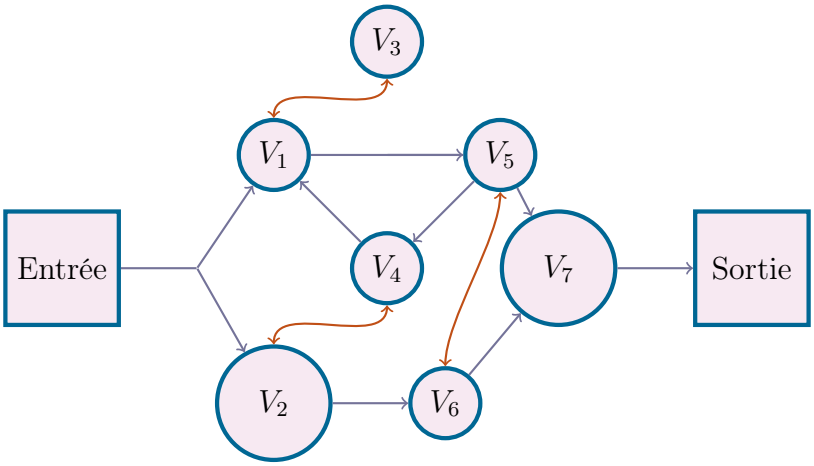


FIGURE 3.1 – Schéma de principe du gradostat "général"

Contrairement au chemostat *classique* dans lequel un seul réservoir supposé homogène est considéré, le gradostat comporte plusieurs réservoirs, chacun d'entre eux étant supposé homogène. Ces réservoirs sont reliés entre eux pour constituer un réseau, et des phénomènes de diffusion peuvent également avoir lieu entre les

réservoirs, comme cela est illustré Figure 3.1 (les flèches représentant les débits étant représentées en bleu et celles représentant la diffusion en rouge).

L'intérêt de ce modèle est double : selon l'agencement des réservoirs, il permet d'une part de prendre en compte des disparités spatiales dans les concentrations sans avoir besoin d'utiliser des modèles plus complexes d'équations aux dérivées partielles. Par exemple, plusieurs compartiments en série peuvent modéliser un gradient (discretisé) de la concentration en substrat dans une direction. C'est d'ailleurs pour étudier la croissance d'une population de bactéries soumises à un gradient de ressources qu'il a été initialement mis au point par Lovitt et Wimpenny [21]. Plus généralement, il permet une représentation simplifiée d'hétérogénéités dans un milieu complexe (porosité, brassage imparfait,...). D'autre part, il permet de représenter une gamme plus riche de dispositifs de dépollution, ouvrant la voie à une étude mathématique des performances en dépollution qui tient compte de la disposition spatiale du ou des réservoirs [14, 15] .

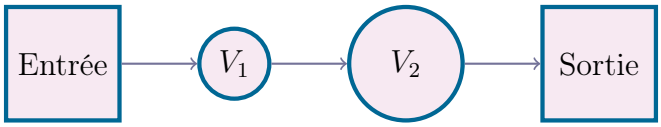


FIGURE 3.2 – Deux réservoirs en série

On introduit tout d'abord un modèle très général à n réservoirs, dans le cas non-autonome. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, on note x_i, respectivement s_i, la concentration en micro-organisme, respectivement en substrat, du réservoir i. L'espèce de micro-organismes présente est caractérisée par la fonction de croissance $\mu(.,.)$. On introduit également V_i le volume du réservoir i. Enfin, on notera $X = (x_1, ..., x_n)^T$ et $S = (s_1, ..., s_n)^T$ les vecteurs représentant les concentrations en micro-organismes en en substrat. On a alors la dynamique

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{1}{Y} \operatorname{diag}\{(\mu(s_i, x_i))_i\}X + M(t)S + E(t)S^{in}, \\ \dot{X} = \operatorname{diag}\{(\mu(s_i, x_i))_i\}X + M(t)X + E(t)X^{in}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans le système (3.1), le vecteur X^{in}, respectivement S^{in}, représente d'éventuels apports externes de micro-organismes, respectivement de substrat. De la même façon que pour le modèle du chemostat, le rendement Y peut être choisi égal à 1 sans perte de généralité. La matrice M représente les termes d'échanges entre les réservoirs, et la matrice E les termes d'apport externes. Pour expliciter leurs coefficients, on introduit les notations suivantes pour tout $i, k \in \{1, ..., n\}$:

— $Q_i^{in}(.)$ est $T-$périodique et à valeurs positives et représente le débit d'entrée depuis l'extérieur vers le réservoir i,

— $Q_i^{out}(.)$ est $T-$périodique et à valeurs positives et représente le débit de sortie vers l'extérieur depuis le réservoir i,

— $Q_{ik}(.)$ est $T-$périodique et à valeurs positives et représente le débit depuis le réservoir i vers le réservoir k,
— $d_{ik} = d_{ki} \geq 0$ est le coefficient de diffusion entre les réservoirs i et k.
Avec ces notations, on peut écrire la matrice $E(t)$ sous la forme suivante :

$$E(t) = \text{diag}\left\{\left(\frac{Q_i^{in}(t)}{V_i}\right)_i\right\}.$$

La matrice M est définie coefficient par coefficient par

$$M_{ij}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{V_i}\left(\sum_{k\neq i} Q_{ik}(t) + d_{ik} + Q_i^{out}(t)\right) & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{V_i}(Q_{ji}(t) + d_{ij}) & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

3.1.2 Modélisation du gradostat et hypothèses

On va d'abord supposer que les débits en entrée et en sortie sont identiques en chacun des réservoirs du gradostat. Cette hypothèse est très standard dans le modèle du gradostat. Autrement dit, on suppose que pour tout réservoir i, la loi de Kirchoff est vérifiée pour tout temps t :

$$\sum_{k\neq i} Q_{ik}(t) + Q_i^{out}(t) = \sum_{j\neq i} Q_{ji}(t) + Q_i^{in}(t), \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{3.2}$$

Depuis le premier modèle de gradostat, qui était en série, de nombreux autres types de réseaux ont été utilisés, qui ne partagent pas tous les mêmes propriétés. L'objectif de cette section est donc de situer le modèle employé dans ce travail par rapport à d'autres possibilités.

Tout d'abord, une propriété importante du modèle du gradostat et commune aux deux modèles qui sont comparés ici est la coopérativité du système (3.1) [17, 18]. La relation d'ordre naturelle de $\mathbb{R}^n$ sera donc préservée par la dynamique.

On va maintenant écrire les hypothèses sur la structure du réseau que forme le gradostat. En particulier, on introduit deux ensembles qui représentent les réservoirs directement connectés à l'entrée et ceux directement connectés à la sortie.

$$I = \{i \in \{1, ..., n\}, \text{ tels que } Q_i^{in} \not\equiv 0\},$$
$$O = \{i \in \{1, ..., n\}, \text{ tels que } Q_i^{out} \not\equiv 0\}.$$

On dit qu'il existe un chemin permanent entre les réservoirs i et j s'il existe $k > 0$, et $(i_l)_{0\leq l\leq k}$ tels que $i_0 = i$, $i_k = j$ et $M(t)_{i_l,i_{l+1}} > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. On dit de même qu'il existe un chemin intermittent entre les réservoirs i et j s'il existe un ensemble de mesure non-nulle $I_T \subset [0, T]$ tel qu'il existe $k > 0$, et $(i_l)_{0\leq l\leq k}$ tels que $i_0 = i$, $i_k = j$ et $M(t)_{i_l,i_{l+1}} > 0$ pour tout $t \in I_T$.

Dans les travaux [29, 27], le modèle considéré ne prend pas en compte explicitement les phénomènes de diffusion, seuls apparaissent des débits, mais demande l'irréductibilité de la matrice d'incidence du graphe représentant les connexions entre les réservoirs, c'est-à-dire que pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$ distincts, il existe un chemin permanent entre i et j. Cela signifie qu'un flux de substrat peut "remonter" le gradostat dans n'importe quelle direction.

Dans notre modèle, on demande seulement à avoir une hypothèse qui assure que chaque réservoir débouche sur une sortie, éventuellement via l'intermédiaire d'autres réservoirs. Autrement dit, on demande que tout élément de I soit relié à un élément de O par un chemin intermittent. De ce point de vue, les hypothèses prises dans ce travail sont donc relativement faibles.

Enfin, on va supposer que les vecteurs X^{in} et S^{in} sont de la forme

$$X^{in} = x^{in}\mathbb{1}, \quad S^{in} = s^{in}\mathbb{1}, \tag{3.3}$$

où $\mathbb{1} = (1, ..., 1)^T$ et $x^{in}, s^{in} \geq 0$.

Cette hypothèse n'est pas faite dans [27], et constitue une extension de l'hypothèse analogue faite dans les chapitres précédents. Son rôle sera discuté dans la section suivante.

On introduit la variable $Z = S + X$, qui représente la masse totale présente dans chaque compartiment. On a alors la dynamique

$$\dot{Z} = M(t)Z + E(t)Z^{in}, \tag{3.4}$$

où $Z^{in} = S^{in} + X^{in} = z^{in}\mathbb{1}$, avec $z^{in} = s^{in} + x^{in}$.

On introduit également la variable $\tilde{Z} = Z - Z^{in}$.

Lemme 13. *La variable $\tilde{Z}$ suit la dynamique*

$$\dot{\tilde{Z}} = M(t)\tilde{Z}. \tag{3.5}$$

Démonstration. Soit $t \geq 0$, on commence par calculer $M(t)Z^{in}$. Soit $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned}
(M(t)Z^{in})_i &= \sum_j M_{ij}(t) z^{in}, \\
&= \frac{z^{in}}{V_i}\left(\sum_{j\neq i}(Q_{ji}(t) + d_{ij}) - \sum_{k\neq i}(Q_{ik}(t) + d_{ik}) - Q_i^{out}(t)\right), \\
&= -\frac{Q_i^{in}(t)}{V_i} z^{in}, \text{ d'après la loi de Kirchoff (3.2)}, \\
&= -E(t)Z^{in}.
\end{aligned}$$

Ainsi, avec (3.4), on a

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{Z}} &= M(t)Z + E(t)Z^{in}, \\ &= M(t)(Z - Z^{in}),\end{aligned}$$

ce qui conclut le résultat. □

Une question naturelle à ce stade est de savoir si 0 est asymptotiquement stable pour la dynamique (3.5). Dans le cas autonome, la structure de M permet d'obtenir un tel résultat en montrant qu'elle est Hurwicz. Dans notre cas, les débits sont autorisés à s'annuler momentanément, ce qui rend difficile l'application de ces résultats.

3.2 Une configuration particulière

Dans cette section, on considère une configuration de n réservoirs en série, avec pour chaque réservoir un débit d'entrée et de sortie.

3.2.1 Modélisation et intérêt

Cette configuration représente n réservoirs les uns à la suite des autres, le réservoir i se déversant dans le réservoir $i+1$. On ne considère pas d'éventuels phénomènes de diffusion entre réservoirs dans ce modèle. Ainsi, chaque réservoir est indépendant de tous les autres, sauf de celui qui le précède. On peut également remarquer que le premier réservoir se comporte exactement comme un chemostat classique à un réservoir.

La concentration en substrat dans le réservoir i suit alors la dynamique suivante :

$$\dot{s}_i = \frac{1}{V_i}\Big(Q_i^{in}(t)s_{in} + Q_{i-1,i}(t)s_{i-1} - Q_i^{out}(t)s_i - Q_{i,i+1}(t)s_i\Big) \\ - \mu(s_i)(s_{in} - s_i), \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (3.6)$$

Pour pouvoir écrire la dynamique sous cette forme, on pose par convention que $s_0(.) \equiv 0$, ou bien que $Q_{0,1}(.) \equiv 0$. De plus, on a $Q_{n,n+1}(.) \equiv 0$.

On peut alors écrire la dynamique générale pour $S = (s_1, ..., s_n)^T$ sous la même forme que (3.1) : $\dot{S} = M(t)S + E(t)S^{in} - \text{diag}\left\{(\mu(s_i)(s_{in} - s_i))_i\right\}$. Le terme $M(t)$ est très différent par rapport à l'équation (3.1). En effet, il n'y a plus de termes de diffusion et admet une structure triangulaire inférieure particulière :

$$(M(t))_{ij} = \begin{cases} -\frac{Q_{i,i+1}(t)+Q_i^{out}(t)}{V_i} & \text{si } i = j, \\ \frac{Q_{i-1,i}(t)}{V_i} & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Cette structure reflète le caractère "cascade" du système envisagé. Cette structure est assez riche : en ajoutant une entrée et une sortie à chaque réacteur, elle généralise le gradostat en série de la Figure **??**, qui est déjà un modèle particulièrement étudié [14], mais aussi le gradostat en parallèle sans diffusion, en ajoutant éventuellement un transport unilatéral.

On peut remarquer que la diffusion n'apparaît pas dans ce modèle. En effet, la diffusion n'est pas un processus unilatéral et casse la structure triangulaire de (3.7).

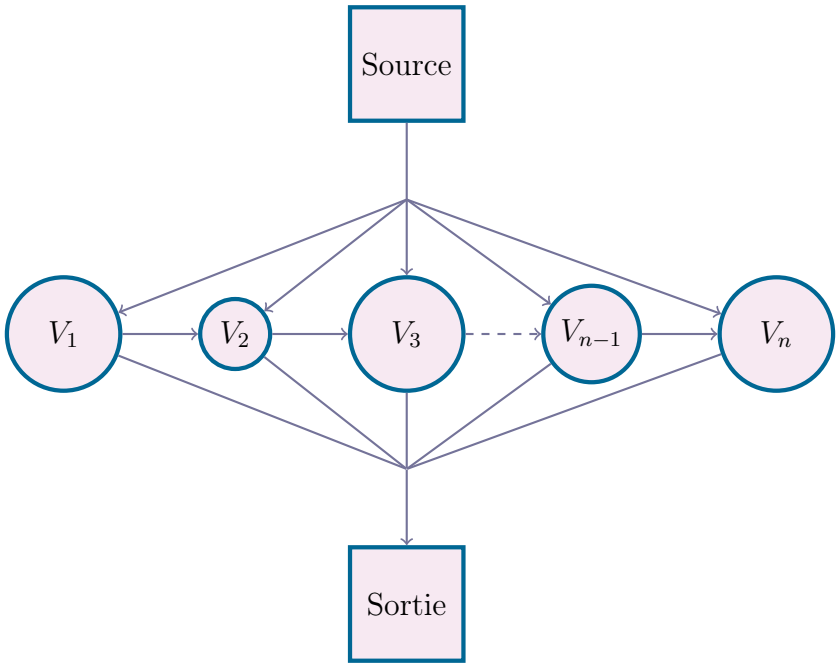


FIGURE 3.3 – n réservoirs en série, avec entrée et sortie

3.2.2 Un résultat de réduction de dimension

Dans le modèle du chemostat simple, on pouvait écrire asymptotiquement la dynamique uniquement en l'une des deux variables, car le système tendait vers la variété $s + x = s_{in}$. Un résultat analogue est prouvé dans cette section.

Proposition 30. *Pour tout* $1 \leq i \leq n$*, on a :*

$$\lim_{t \to +\infty} (s_i + x_i)(t) = s^{in} + x^{in}.$$

Démonstration. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\dot{Z}_i = \frac{1}{V_i} \left(Q_i^{in}(t) z^{in} + Q_{i-1,i}(t) Z_{i-1} - Q_i(t) Z_i \right).$$

On va montrer le résultat par itérations dans chaque réservoir. Comme le premier réservoir se comporte comme le chemostat classique, on a

$$\lim_{t \to +\infty} Z_1(t) = z^{in}.$$

Supposons maintenant que $Z_{i-1}(.) \equiv z^{in}$, la dynamique dans le réservoir i s'écrit alors

$$\dot{Z}_i = \frac{Q_i(t)}{V_i} \left(Z_i - z^{in} \right).$$

On reconnaît la dynamique du chemostat classique, on a donc

$$\lim_{t\to+\infty} Z_i(t) = z^{in}.$$

Comme les trajectoires sont bornées, on a bien le résultat. □

Remarque 27. *Dans [27], l'hypothèse d'irréductibilité est utilisée pour montrer que $Z(.)$ converge vers une solution périodique positive. Dans notre modèle, cette hypothèse d'irréductibilité est relâchée en une hypothèse de connexion à la sortie, qui ne permet pas a priori de conclure, et en rajoutant l'hypothèse (3.3), on peut finalement aboutir à un résultat plus précis que celui de [27].*

3.2.3 Unicité des solutions périodiques

On prouve dans cette section un résultat d'unicité des solutions périodiques pour le modèles (3.6). Ce résultat ne repose pas sur des hypothèses de concavité de la dynamique, mais sur la structure en cascade du système. On échange donc en quelque sorte des hypothèses sur la fonction de croissance par des hypothèses sur le réseau lié au gradostat.

Définition 17. *On appelle débit passant pour le réservoir i la quantité*

$$Q_i(t) = Q_i^{in}(t) + Q_{i-1,i}(t) = Q_i^{out} + Q_{i,i+1}(t).$$

La deuxième égalité est garantie par la loi de Kirchoff (3.2).

On montre maintenant deux lemmes qui serviront pour prouver les résultats principaux de cette section.

Lemme 14. *L'ensemble $(0, s_{in})^n$ est invariant par la dynamique (3.6).*

Démonstration. On prouve ce résultat par récurrence. Comme la concentration s_1 suit la dynamique du chemostat classique, on sait que $(0, s_{in})$ est invariant pour la dynamique suivie par s_1.

Soit $2 \leq i \leq n$, tel que $(0, s_{in})$ est invariant pour la dynamique suivie par s_{i-1}. On a alors

$$\dot{s}_i \leq \left(\frac{Q_i(t)}{V_i} - \mu(s_i)\right)(s_{in} - s_i),$$

d'où le résultat en reconnaissant la dynamique du chemostat à une espèce standard. □

Lemme 15. *Soit $i \geq 2$ et $s_i(.)$ une solution $T-$périodique de (3.6). Alors*

$$\int_0^T \left(\frac{Q_i(t)}{V_i} - \mu(s_i(t)) - \frac{Q_i(t)}{V_i}\frac{s_{in} - s_{i-1}(t)}{s_{in} - s_i(t)}\right) dt = 0,$$

Démonstration. Avec le débit passant $Q_i(t) = Q_i^{in}(t) + Q_{i-1,i}(t) = Q_i^{out}(t) + Q_{i,i+1}(t)$ on peut réécrire la dynamique de s_i sous la forme

$$\dot{s}_i = \left(\frac{Q_i(t)}{V_i} - \mu(s_i(t)) - \frac{Q_i(t)}{V_i} \frac{s_{in} - s_{i-1}(t)}{s_{in} - s_i(t)} \right) (s_{in} - s_i(t)).$$

En effet, l'ensemble $(0, s_{in})$ est invariant par la dynamique. Ici, le terme en s_{i-1} est interprété comme un terme source $s_{i-1}(.)$ fixé.

Comme s_i est $T-$périodique, la quantité $\xi_i = \log(s_{in} - s_i)$ l'est aussi et en intégrant $\dot{\xi}_i$ sur $[0, T]$, on obtient

$$\int_0^T \left(\frac{Q_i(t)}{V_i} - \nu(s_i(t)) - \frac{Q_i(t)}{V_i} \frac{s_{in} - s_{i-1}(t)}{s_{in} - s_i(t)} \right) dt = 0.$$

□

Remarque 28. *On avait déjà un résultat analogue pour le chemostat à une espèce (Lemme 1). La seule différence ici est la présence d'un terme supplémentaire lié au réservoir précédent.*

Pour la suite du développement, on définit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $f(t, S) = M(t)S + E(t)S^{in} - \text{diag}\{(\mu(s_i)(s_i n - s_i))_i\}$. On a donc $\dot{S} = f(t, S)$. On introduit également $P : [0, s_{in}] \to [0, s_{in}]$ l'application de Poincaré liée à ce système. Enfin, pour $S_0 \in [0, s_{in}]^n$, on note $S(., S_0)$ la solution de (3.6) vérifiant $S(0, S_0) = S_0$.

On rappelle également que la dérivée de l'application de Poincaré en un point S_0 est définie par $P'(S_0) = \Phi(T)$, où $\Phi(.)$ est une solution fondamentale de l'équation de sensibilité

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \left(\frac{\partial f}{\partial S}(t, S(t, s_0)) \right) \Phi, \\ \Phi(0) = Id_n. \end{cases}$$

La matrice $\frac{\partial f}{\partial S}(t, S(t, s_0))$ s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial S}(t, S(t, s_0)) = \begin{pmatrix} d_1(t) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1}(t) & d_2(t) & \ddots & & & \vdots \\ a_{3,1}(t) & a_{3,2}(t) & d_3(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1}(t) & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n-1}(t) & d_n(t) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$d_i(t) = -\frac{Q_i(t)}{V_i} - \mu'(s_i)(s_{in} - s_i) + \mu(s_i).$$

On constate que cette matrice est sous-diagonale. C'est cette structure qui va permettre de montrer l'unicité de solutions périodiques, en permettant de calculer explicitement les coefficients de Floquet associés à un point fixe de P. On pourra alors montrer que tout point fixe de P dans $(0, s_{in})^n$ est stable, ce qui permettra d'établir l'unicité d'un éventuel point fixe de P.

Lemme 16. *S'il existe $\bar{S} \in (0, s_{in})^n$, tel que $P(\bar{S}) = \bar{S}$. Alors $\bar{S}$ est unique.*

Démonstration. Soit $\Phi(.)$ une solution de

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \left(\frac{\partial f}{\partial S}(t, S(t, \bar{S}))\right) \Phi, \\ \Phi(0) = Id_n. \end{cases}$$

Alors pour tout $t \geq 0$, on a

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{2,1}(t) & k_2(t) & \ddots & & & \vdots \\ b_{3,1}(t) & a_{3,2}(t) & k_3(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n1}(t) & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n,n-1}(t) & k_n(t) \end{pmatrix},$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $k_i(t) = \exp\left(\int_0^t d_i(\tau)d\tau\right)$. Donc $k_i(t) > 0$.

Par ailleurs, les valeurs propres de $\Phi(T)$ sont les coefficients de Floquet liés à la solution $S(., \bar{S})$, on peut donc les calculer explicitement. En particulier, pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$\begin{aligned} k_i(T) &= \exp\left(\int_0^T d_i(\tau)d\tau\right), \\ &= \exp\left(\int_0^T \left(-\frac{Q_i(\tau)}{V_i} - \mu'(s_i(t))(s_{in} - s_i) + \mu(s_i(t))\right) d\tau\right), \\ &= \exp\left(\int_0^T \left(-\mu'(s_i(t))(s_{in} - s_i(t)) - \frac{Q_i(\tau)}{V_i}\frac{s_{in} - s_{i-1}}{s_{in} - s_i(t)}\right) d\tau\right), \text{ d'après le Lemme 15.} \end{aligned}$$

On en déduit que toutes les valeurs propres de $\Phi(T)$ sont à valeurs propres de module strictement inférieurs à 1. On en déduit donc de la théorie de Floquet que la solution $S(., \bar{S})$ est uniformément asymptotiquement stable. On en déduit l'unicité, car P ne peut pas admettre deux équilibres uniformément asymptotiquement stables sans au moins un équilibre instable pour les séparer, ce qui est rendu impossible par ce résultat. □

Il reste maintenant à prouver qu'un tel point fixe existe.

Lemme 17. *L'application de Poincaré admet un point fixe dans* $(0, s_{in})^n$.

Démonstration. On considère la dynamique

$$\dot{s} = \frac{1}{V}\Big(Q^{in}(t)s_{in} + Q_{>}s_{-}(t) - Q(t)s\Big) - \mu(s)(s_{in} - s), \tag{3.9}$$

où pour tout t, on a

$$\begin{cases} Q^{in}(t) + Q_{>}(t) = Q(t), \\ s_{-}(t) \in (0, s_{in}). \end{cases}$$

Cette dynamique représente la concentration en substrat dans un réservoir, en considérant le substrat issu du réservoir précédent comme un terme source $s_{-}(.)$.

D'après le Lemme 14, la dynamique (3.9) laisse $(0, s_{in})$ invariant.

On introduit $P_r : [0, s_{in}] \longrightarrow [0, s_{in}]$ l'application de Poincarré associée à la dynamique considérée. On a les deux inégalités

— $P_r(0) > 0$,

— $P_r(s_{in}) < s_{in}$.

Par continuité de P_r, on peut déduire par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\bar{s} \in (0, s_{in})$ tel que $P_r(\bar{s}) = \bar{s}$.

Comme ce résultat est indépendant du choix du terme source $s_{-}(.)$, on peut mener ce raisonnement itérativement dans chaque réservoir, et ainsi obtenir le résultat.

□

Les deux propositions précédentes servent à établir l'unicité et l'existence d'un point fixe de P dans $(0, s_{in})^n$. On peut maintenant écrire le résultat principal de cette section, dont la preuve repose sur les deux résultats précédents.

Proposition 31. *Le système (3.6) admet une unique solution périodique dans* $(0, s_{in})^n$ *qui est uniformément asymptotiquement stable.*

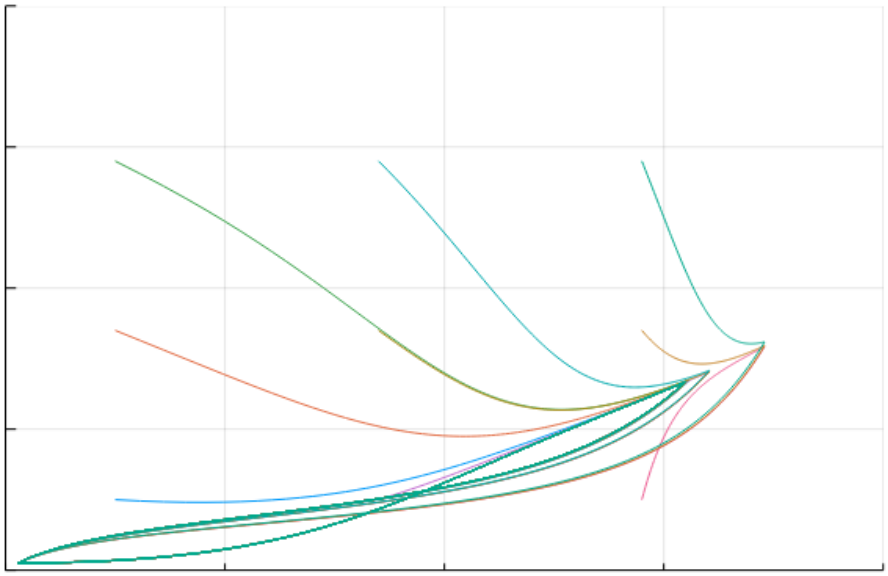


FIGURE 3.4 – Convergence vers l'unique solution périodique dans le gradostat en série (2 réservoirs)

3.2.4 Discussion

Il a été vu au Chapitre 2 que caractériser l'unicité des solutions périodiques d'un système non-autonome, même monotone, est un problème généralement difficile en dimension plus grande que 1. En particulier, à notre connaissance, le seul type de résultat permettant de conclure sur ce point sont des résultats comme ceux de [26, 20], présentés en Section 2.2.

Dans [27], l'unicité des solutions périodiques dans un modèle de gradostat périodique est également démontrée. Ce résultat utilise les théorèmes précédemment mentionnés, et ne s'applique donc qu'aux fonctions de croissance concave (comme la fonction de Monod). Au Chapitre 1, le rôle de la convexité de la fonction de croissance a été mis en évidence pour permettre un sur-rendement. On aurait donc d'une part besoin de la convexité pour atteindre un sur-rendement, et d'autre part de la concavité pour que le système converge naturellement vers la solution optimale lorsque le contrôle optimal est appliqué (une discussion détaillée de ce problème est donnée en introduction).

Notre résultat n'utilise aucune hypothèse sur les fonctions de croissance grâce à la structure en cascade du système (3.6) qui a permis en quelque sorte de considérer chaque réservoir indépendemment des autres et donc de se ramener au cas scalaire. Ce résultat peut donc être vu comme une première étape pour des travaux ultérieurs, qui pourraient être des analogues aux résultats de [6, 7] et du Chapitre 1 pour le modèle (3.6).

Conclusion

Plusieurs systèmes dynamiques périodiques issus des bio-procédés ont été considérés au cours de ce travail, tant du point de vue de la théorie du contrôle optimal que de celle des systèmes dynamiques.

Dans le cas du chemostat à une espèce, un contrôle optimal périodique minimisant la concentration moyenne en substances polluantes a été synthétisé pour des fonctions de croissance convexe-concave. Ce résultat généralise des travaux portant sur des fonctions de croissance concaves ou convexes et complète la connaissance des contrôles maximisant la qualité moyenne de l'eau pour les fonctions de croissance usuelles.

Des modèles en dimension supérieures ont ensuite été considérés, avec la question de l'unicité des solution périodiques positives comme principal objet d'étude.

Le modèle du chemostat périodique à deux espèces est bien connu, mais la question de l'unicité n'a toujours pas été résolue. Dans ce travail, un contre-exemple non-générique est construit, qui peut permettre de mieux comprendre les propriétés qui permettraient l'unicité, pour par exemple, trouver et prouver des conditions suffisantes pour l'unicité.

Un modèle de gradostat à une espèce qui généralise notamment le gradostat en série est ensuite présenté. Pour ce modèle, de dimension n, l'unicité des solutions périodiques positives est prouvée, grâce à la structure en cascade du réseau notamment. Ce résultat ouvre des nouvelles perspectives pour le contrôle de bio-procédés, puisque pour un tel modèle une trajectoire optimale serait naturellement stable et attractive. Il reste toutefois à synthétiser cette trajectoire et le contrôle associé.

Annexe A

Dans cette annexe, quatre fonctions de croissance parmi les plus usuelles sont présentées. Ces fonctions de croissance modélisent la consommation du substrat par les micro-organismes.

Fonction de croissance de Monod La fonction de croissance de Monod est simple et est parmi les plus utilisées : elle est croissante concave et s'exprime par :

$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s}{K_s + s}.$$

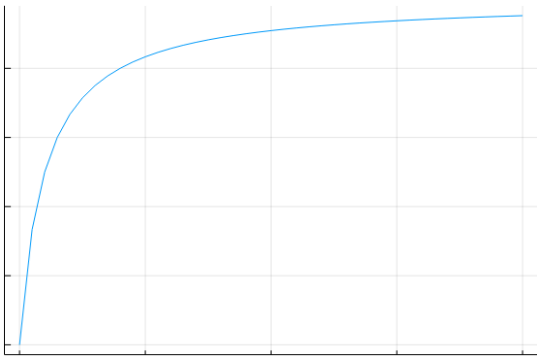


FIGURE 3.5 – Fonction de croissance de Monod

Fonction de croissance de Haldane La fonction de croissance de Haldane n'est pas monotone, elle est croissante puis décroissante. Ce changement de monotonie représente un phénomène d'*inhibition* : une trop forte concentration en substrat est toxique pour les micro-organismes.

$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s}{K_s + s + s^2/K_I}.$$

Le maximum de cette fonction est atteint en $\hat{s} = \sqrt{K_s K_I}$. Par ailleurs, la fonction de Haldane n'est pas strictement concave, mais vérifie les hypothèses de la Proposition 28.

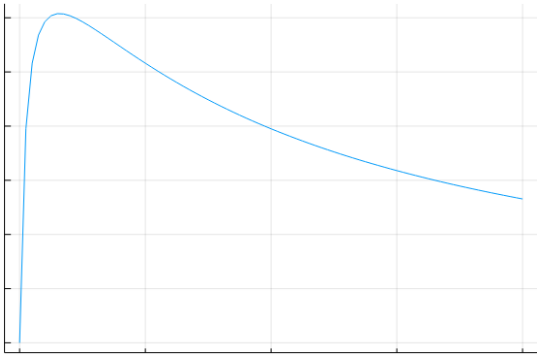


FIGURE 3.6 – Fonction de croissance de Haldane

Fonction de croissance de Hill Cette fonction de croissance est croissante, convexe puis concave et modélise un effet *Allee* : les miro-organismes ont du mal à s'établir à faibles concentrations.

$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s^n}{K_s^n + s^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette fonction change de concavité en $s_c = K_s \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Ainsi, localement et pour $s < s_c$, la fonction de Hill est convexe et vérifie donc les hypothèses de la Proposition 1. Lorsque $s(.)$ prend des valeurs au delà de s_c, il faut recourir aux résultats du Chapitre 1 pour le cas convexe-concave.

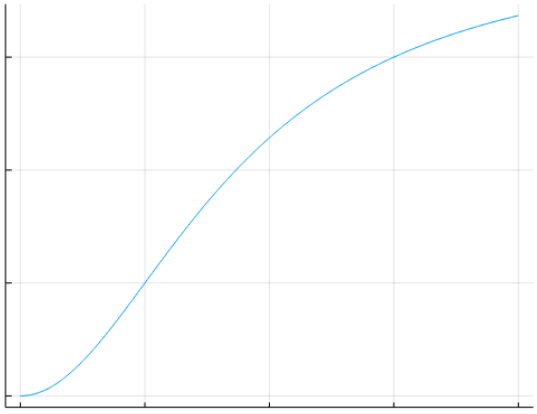


FIGURE 3.7 – Fonction de croissance de Hill

Fonction de croissance de Comtois La fonction de croissance de Comtois dépend de la concentration en substrat s, mais aussi de la concentration en micro-organimes x. Décroissante en x, elle permet ainsi de modéliser la compétition

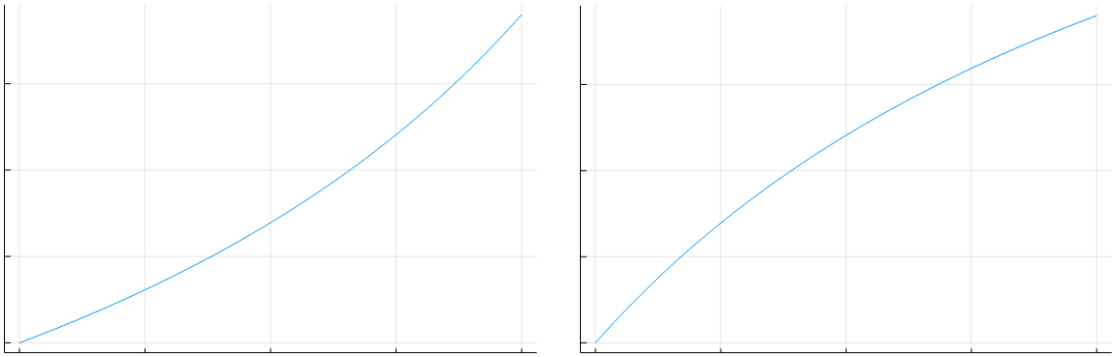
intra-spécifique : trop nombreux les micro-organismes d'une même espèce sont en compétition pour l'accès à la ressource.

$$\mu(s,x) = \frac{\mu_{max} s}{Kx + s}.$$

Lorsque l'on peut écrire $s_{in} = s + x$, on retrouve une fonction de la variable s uniquement :

$$\nu(s) = \mu(s, s_{in} - s).$$

La fonction $\nu(.)$ est convexe lorsque $K > 1$ et concave pour $K < 1$.



(a) Cas $K > 1$ (b) Cas $K < 1$

FIGURE 3.8 – Fonction de croissance de Comtois

Bibliographie

[1] E.-M. Abulesz et G. Lyberatos. « Periodic optimization of continuous microbial growth processes ». In : *Biotechnology and Bioengineering* (1987). doi : https://doi.org/10.1002/bit.260290904.

[2] J.E. Bailey. « Periodic Operations of Chemical Reactors : a Review ». In : *Chemical Engineering Communications* (1973). doi : 10.1080/00986447408960421.

[3] M. Bardi et I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, Boston, MA, 1997. isbn : 978-0-8176-4754-4.

[4] L. Barreira et C. Valls. *Ordinary Differential Equations : Qualitative Theory*. American Mathematical Society, 2012. isbn : 978-0821887493.

[5] G. Bastin et al. « On Extremum Seeking in Bioprocesses with Multivalued Cost Functions ». In : *Biotechnology Progress* (2009). doi : 10.1002/btpr.87.

[6] T. Bayen, A. Rapaport et F.-Z. Tani. « Optimal periodic control for scalar dynamics under integral constraint on the input ». In : *Mathematical Control and Related Fields* (2019). doi : 10.3934/mcrf.2020010.

[7] T. Bayen, A. Rapaport et F.-Z. Tani. « Improvement of performances of the chemostat used for continuous biological water treatment with periodic controls ». In : *Automatica* (2020). doi : 10.1016/j.automatica.2020.109199.

[8] J. Bezanson et al. « Julia : A Fresh Approach to Numerical Computing ». In : *SIAM Review* (2017). doi : 10.1137/141000671.

[9] J.F. Bonnans et A. Shapiro. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer, New York, NY, 2000. isbn : 978-1-4612-7129-1.

[10] G. D'Avino et al. « On the choice of the optimal periodic operation for a continuous fermentation process ». In : *Biotechnology Progress* (2010). doi : 10.1002/btpr.461.

[11] D. Dochain, M. Perrier et M. Guay. « Extremum seeking control and its application to process and reaction systems : A survey ». In : *Mathematics and Computer in Simulation* (2010). doi : 10.1016/j.matcom.2010.10.022.

[12] R. Fekih-Salem, C. Lobry et T. Sari. « A density-dependent model of competition for one resource in the chemostat ». In : *Mathamtical Biosciences* (2017). doi : 10.1016/j.mbs.2017.02.007.

[13] H.I. Freedman et P. Moson. « Persistence Definitions and their Connections ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* (1990). doi : 10.2307/2048133.

[14] C.D.de Gooijer et al. « Bioreactors in series : An overview of design procedures and practical applications ». In : *Enzyme and Microbial Technology* (1996). doi : 10.1016/0141-0229(95)00090-9.

[15] J. Harmand et D. Dochain. « The optimal design of two interconnected (bio)chemical reactors revisited ». In : *Computer & Chemical Engineering* (2005). doi : 10.1016/j.compchemeng.2005.08.003.

[16] J. Harmand et al. *Le Chemostat, théorie mathématique de la culture continue de micro-organismes*. ISTE Editions, 2017. isbn : 978-1-78406-218-7.

[17] M.W. Hirsch. « Systems of Differential Equations Which Are Competitive or Cooperative : I. Limit Sets ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* (1982). doi : 10.1137/0513013.

[18] M.W. Hirsch. « Systems of Differential Equations Which Are Competitive or Cooperative : II. Convergence Almost Everywhere ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* (1985). doi : 10.1137/0516030.

[19] S.B. Hsu, H.L. Smith et P. Waltman. « Competitive Exclusion and coexistence for competitive systems on ordered Banach spaces ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* (1996). doi : 10.1090/S0002-9947-96-01724-2.

[20] U. Krause et R.D. Nussbaum. « A Limit Set Trichotomy for Self-Mappings of Normal Cones in Banach Spaces ». In : *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* (1993). doi : 10.1016/0362-546X(93)90074-3.

[21] R.B.W. Lovitt et J.W.T. Wimpenny. « The Gradostat : a Bidirectional Compound Chemostat and Its Application in Microbiological Research ». In : *journal of General Microbiology* (1981). doi : 10.1099/00221287-127-2-261.

[22] C. Maffezzoni. « Hamilton-Jacobi Theory for Periodic Control Problems ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* (1974). doi : 10.1007/BF00933172.

[23] P. de Mottoni et A. Schiaffino. « Competition systems with periodic coefficients : A geometric approach ». In : *Journal of Mathematical Biology* (1981). doi : 10.1007/BF00276900.

[24] C. Rackauckas et Q. Nie. « Differentialequations. jl–a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia ». In : *Journal of Open Research Software* (2017).

[25] A. Rapaport, D. Dochain et J. Harmand. « Long run coexistence in the chemostat with multiple species ». In : *Journal of Theoretical Biology* (2009). doi : 10.1016/j.jtbi.2008.11.015.

[26] H.L. Smith. « Cooperative systems of differential equations with concave nonlinearities ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* (1986). doi : 10.1016/0362-546X(86)90087-8.

[27] H.L. Smith. « Microbial growth in periodic gradostats ». In : *Rocky Mountains Journal of Mathematics* (1990). doi : 10.1216/rmjm/1181073069.

[28] H.L. Smith. « Monotone dynamical systems : Reflections on new advances & applications ». In : *Discrete & Continuous Dynamical Systems* (2017). doi : 10.3934/dcds.2017020.

[29] H.L. Smith et P. Waltman. *The Theory of the Chemostat, dynamics of microbial competition*. Cambridge University Press, 1995. isbn : 0-521-47027-7.

[30] G. Stephanopoulos, A.G. Frederickson et R. Aris. « The growth of competing microbial populations in a CSTR with periodically varying inputs ». In : *American Institute of Chemical Engineers Journal* (1979). doi : 10.1002/aic.690250515.

[31] Inria Saclay Team Commands. *BOCOP : an open source toolbox for optimal control*. http://bocop.org. 2017.

Liste des tableaux

1.1 Comparaison des performances des trajectoires $3B$, $BBSB$ et constantes 43

Table des figures

1 Le chemostat, schéma de principe 8

1.1 La condition de pente 22
1.2 Deux cas de trajectoires $5B$ 24
1.3 Extremum atteint sur un ensemble non-connexe 25
1.4 Comparaison de $s(.)$ et $s(\phi(.))$ 27
1.5 Les trajectoires $BBSB$ généralisent les trajectoires $3B$ 30
1.6 Courbes $s_m(\tilde{s})$, en bleu selon les contraintes, en rouge selon la condition de pente 33
1.7 Condition de pente et admissibilité 35
1.8 Le solveur Bocop ne renvoie pas toujours une trajectoire $BBSB$ . . 41
1.9 Une meilleure façon d'initialiser le solveur Bocop 42
1.10 Résultats avec Bocop HJB 42
1.11 Quatre cas de trajectoires $BBSB$, $3B$ et constantes 44
1.12 Un phénomène d'inhibition pour une fonction de croissance de type Hill 45
1.13 $t \longmapsto \nu(s(t))$ atteint deux fois son maximum dans le cas non-monotone 47

2.2 Deux issues possibles de la compétition 64
2.3 $\bar{u}$ en bleu, avec $\mu_1(.)$ et $\mu_2(.)$ affines sur $[\underline{s}, s_{in}]$. 69
2.4 $s(.)$ suit un régime transitoire contrairement à $r(.)$ 71
2.5 Portait de phase du système (2.2) pour différentes conditions initiales 72
2.6 Portait de phase du système (2.2) perturbé pour différentes conditions initiales 73
2.7 Evolution du système $(x_1, x_2)(.)$ au cours du temps 74
2.8 Coefficients de Lipschitz locaux de P 75
2.9 Norme de $P(x) - x$ 76
2.10 Dégradation des performances avec l'installation d'une deuxième espèce convexe 78

3.1 Schéma de principe du gradostat "général" 79
3.2 Deux réservoirs en série 80

3.3 n réservoirs en série, avec entrée et sortie 85
3.4 Convergence vers l'unique solution périodique dans le gradostat en série (2 réservoirs) 90
3.5 Fonction de croissance de Monod 92
3.6 Fonction de croissance de Haldane 93
3.7 Fonction de croissance de Hill 93
3.8 Fonction de croissance de Comtois 94