Projet de M2

Ali Mohamed Houmed

Université de Picardie Jules Vernes

Faculté des Sciences d'Amiens

Systèmes Micro-électromécaniques

Réalisé par : **Ali Mohamed Houmed**

Sous la direction de : **Louis Dupaigne (MC-HDR)**

Laboratoire d'accueil : **LAMFA**

Table des matières

1 Notation

E, F : Espaces de Banach,
$Isom(E, F)$: L'ensemble des isomorphismes de E dans F,
f^{-1}, : La fonction réciproque de f,
$f|_V$: La restriction de f à V,
$f'(a), df_a$: La différentielle de f au point a,
$f'_y(a, b)$: La différentielle de f au point (a, b) par rapport à la second variable y,
$LASSE$: Les Assertions Suivants Sont Équivalents,
B_r : la boule ouverte de centre 0 et de rayon r,
$\bar{B_r}$: la boule fermée de centre 0 et de rayon r,

2 Théorème des Fonctions implicites

Définition 2.0.1 *Soit X, un espace métrique complet(non vide). La fonction f est dite* ***contractante*** *dans l'espace X si elle est lipschitzienne de rapport $0 \leq k < 1$*
i.e si $[d(f(u), f(v)) \leq \ kd(u, v) \ \forall \ u, v \ \in \ X]$.

2.1 Théorème de point fixe

Théorème 2.1 *Soit X un espace métrique complet, de métrique $d = d(u, v)$ avec $u, v \ \in \ X$. Si $f : X \to X$ est contractante alors f possède un unique point fixe .*

Preuve
Soit $x_0 \ \in X$. On pose $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ et successivement pour $n \geq 1$ on pose

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Existence
Montrons que (x_n) est une suite convergente, de limite a et que a est un point fixe de f, i.e $f(a) = a$. Vérifions par récurrence que la propriété

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \tag{1}$$

est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \qquad f \text{ est contractante} \\ &\leq kd(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Supposons que la propriété (1) est vraie au rang n et montrons-la au rang $n + 1$

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \qquad f \text{ est contractante} \\ &\leq kd(x_{n+1}, x_n) \qquad \text{d'après (1)} \\ &\leq k^{n+1} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, (1) est vrai. Montrons que (x_n) est de Cauchy.
Pour $1 \leq n < m$, par l'inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq k^{m-1} \ d(x_1, x_0) + \cdots + k^n d(x_1, x_0) \qquad \text{d'après (1)} \\ &\leq k^n \ (k^{m-n-1} + \cdots + 1) \ \ d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n \ \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} \ \ d(x_1, x_0) \qquad \text{comme } 1 - k^{m-n} \leq 1 \text{ on a} \\ &\leq k^n \ \frac{1}{1 - k} \ \ d(x_1, x_0) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand n} \to +\infty \end{aligned}$$

Donc (x_n) est de Cauchy. Puis X est complet, (x_n) converge. Soit a la limite de (x_n).
Montrons que a est un point fixe. i.e $f(a) = a$.
En faisant tendre n vers l'infini dans $x_{n+1} = f(x_n)$ on a : $f(a) = a$ Car

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

et car f est contractante, donc continue. Alors

$$a = f(a).$$

Unicité
Soit b un autre point fixe de f

$$\begin{array}{rcll} d(a,b) & = & d(f(a),f(b)) & f \text{ contractante} \\ & \leq & k\ d(a,b) & \\ \text{Donc}\quad (1-k)d(a,b) & \leq & 0 & \text{comme } k < 1 \\ d(a,b) & \leq & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow d(a,b) = 0$$

$$\Rightarrow a = b.$$

d'où l'unicité du point fixe.

2.2 Théorème d'inversion locale

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout x, alors f admet un inverse global $f^{-1} \in C^1$ qui vérifie $(f^{-1})'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$ pour tout x.
Plus généralement, si f une application entre deux espaces de Banach E et F l'hypothèse $f'(x) \neq 0$ devient $df_x = f'_x$ est inversible et la fonction f est alors localement inversible autour de x (et non pas globalement comme dans le cas réel).

Définition 2.2.1 *Une application $f : U \longrightarrow V$, avec U un ouvert de E, V un ouvert F, où E et F sont des espaces vectoriels normés, est un **difféomorphisme** de classe C^p, $p \geq 1$ si*

1. *f est bijective,*
2. *f et f^{-1} sont de classe C^p.*

Théorème 2.2 *Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ application de classe C^1. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinue de E sur F (i.e df_a^{-1} existe, df_a et df_a^{-1} sont continues). Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que :*

1. *la restriction $f|_V$ de f à V est une bijection de V sur W,*
2. *l'application inverse $g : W \longrightarrow V$ est continue,*
3. *g est de classe C^1 et pour tout $x \in V, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.*

Avant de démontrer ce théorème, on va montrer que f^{-1} est différentiable. Pour cela on va énoncer et démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme différentiable tel que, en $a \in U$, $f'(a) \in Isom(E,F)$. Alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et $df^{-1}(b) = a$*

Preuve
On pose $f^{-1} = g$, $f(a) = b$ et $L = f'(a)$.
f est différentiable en $a \in U$ si $f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|\varepsilon(h)$
Comme U est un ouvert et $a \in U$ pour h proche de 0, $a + h \in U$.
Par continuité de f, $f(a+h) - f(a) = k$ tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.
Remarquons que

$$k = f(a+h) - f(a) \Leftrightarrow h = g(b+k) - g(b)$$

car

$$k + f(a) = f(a+h)$$

$$k + b = f(a+h)$$

$$g(k+b) = a + h$$

$$g(b+k) - g(b) = h$$

Par continuité de f et g, k tend vers zéro si et seulement si h tend vers zéro.
On a :

$$k = f(a+h) - f(a) = L.h + ||h||\varepsilon(h)$$

Comme

$$f'(a) = L \in Isom(E,F),\ L\ est\ bijective,\ donc\ L^{-1}\ existe$$

En appliquant L^{-1} aux deux membres, on obtient

$$L^{-1}k = h + ||h||L^{-1}\varepsilon(h) = g(k+b) - g(b) + ||h||L^{-1}\varepsilon(h)$$

Le lemme sera donc prouvé si on vérifie que $||h||L^{-1}\varepsilon(h)$ est $o(k)$ car

$$g(k+b) - g(b) - L^{-1}k = -||h||L^{-1}\varepsilon(h)$$

et

$$f'(a) \in Isom(E,F) \Rightarrow (f'(a))^{-1} = L^{-1} \in Isom(F,E)$$

donc L^{-1} est linéaire et continue.
Or

$$L^{-1}k - ||h||\ \ L^{-1}\varepsilon(h) = h$$

$$||h||\ \leq\ ||L^{-1}||\ ||k||\ +\ ||h||\ ||L^{-1}\ \varepsilon(h)||$$

$$||h||\ (1 - ||\ L^{-1}\ \varepsilon(h)||)\ \leq\ ||\ L^{-1}||\ ||k||$$

Comme $||L^{-1}\varepsilon(h)||$ tend vers zéro on a $1 - ||L^{-1}\varepsilon(h)|| > 0$, pour h petit et donc

$$||h||\ \ \leq\ \ \frac{||L^{-1}||}{1 - ||L^{-1}\ \ \varepsilon(h)||}||k|| \leq\ M||k||.$$

D'où

$$||h||\ ||L^{-1}\ \ \varepsilon(h)||\ \leq\ M\ ||L^{-1}\ \ \varepsilon(h)||\ ||k||$$

Quand h tend vers zéro $||L^{-1}\ \ \varepsilon(h)||$ tend vers zéro. Donc, $||h||L^{-1}\ \ \varepsilon(h)$ est $o(k)$.

Proposition 2.3 *(Von Neumann) Soit E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$ alors $Id_E - u$ est inversible, son inverse est*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

Preuve
D'une part, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ converge absolument car $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ *et* $\|u\| < 1$.
D'autre part

$$(Id_E - u)(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u^n = Id_E$$

de même pour

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n)(Id_E - u) = Id_E,$$

d'où le résultat.
Preuve(Du théorème d'inversion locale) :

Pour tout $r > 0$, on note B_r la boule ouverte de centre 0 et de rayon r, et $\bar{B}_r$ la boule fermée correspondante . Supposons pour commencer que $E = F$, $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'_0 = f'_a = Id_E$ et

$$\begin{aligned}(f'_a)^{-1}\colon\ E &\longrightarrow E\\ x &\longmapsto (f'_a)^{-1}[f(a+x) - f(a)]\end{aligned}$$

Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\bar{B}_r \subset U$, et puisque f est de classe C^1, on a

$$\exists r > 0 \mid \|x - a\| \leq r \Rightarrow \|f'_x - f'_a\| = \|f'_x - Id_E\| \leq \epsilon = \frac{1}{2}$$

pour tout $x \in B_r$. Considérons maintenant $x \in B_r$. On a $f'_x = Id_E - u$ avec

$$\|u\| = \|Id_E - f'_x\| \leq \frac{1}{2}$$

Par le *théorème de Von Neumann*, f'_x est un isomorphisme bicontinu qui vérifie

$$(f'_x)^{-1} = Id_E + u + \cdots + u^n + \ldots,$$

et de plus

$$\|(f'_x)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \tag{2}$$

i. Nous voulons montrer que f a un inverse local. Plus précisément, nous allons montrer que pour $y \in B_{\frac{r}{2}}$, il existe un unique $x \in B_{\frac{r}{2}}$ vérifiant $f(x) = y$.
Fixons donc $y \in B_{\frac{r}{2}}$ et considérons la fonction

$$\begin{aligned}h\colon\ B_r &\longrightarrow E\\ x &\longmapsto y + x - f(x)\end{aligned}$$

Elle est de classe C^1, pour tout $x \in B_r$,

$$||h'_x|| = ||Id_E - f'_x|| \leq \frac{1}{2},$$

donc, d'après l'inégalité des accroissement finis, pour tout $(x, x') \in (\bar{B}_r)^2$,

$$||h(x) - h(x')|| \leq \frac{1}{2}||x - x'|| \tag{3}$$

En particulier, pour tout $x \in \bar{B}_r$,

$$||x - f(x)|| = ||h(x) - h(0)|| \leq \frac{1}{2}||x||.$$

Donc pour tout $x \in \bar{B}_r$,

$$||h(x)|| \leq ||y|| + ||x - f(x)|| \leq ||y|| + \frac{1}{2}||x|| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Ainsi, h est une fonction de $\bar{B}_r$ dans B_r, donc $\bar{B}_r$ (qui est complet). Comme de plus h vérifie (3), donc contractante, on peut alors appliquer le théorème du point fixe qui entraine l'existence et l'unicité de $x \in \bar{B}_r$ tel que $h(x) = x$ et comme h est à valeur dans B_r, $x \in B_r$.
On a donc $f(x) = y$.
Résumons : nous avons montré pour tout $y \in B_{\frac{r}{2}}$, l'existence et l'unicité de $x \in B_r$ tel que $f(x) = y$.
En notant $V = f^{-1}(B_{\frac{r}{2}}) \cap B_r$ un ouvert, ceci s'interprète en disant que $f|_V : V \longrightarrow W = B_{\frac{r}{2}}$

est une bijection.

ii. Soit $g : W \longrightarrow V$ l'application inverse de f. Désignons par h l'application $h : x \longrightarrow x-f(x)$ c'est l'application h précédente avec $y = 0$), de sorte que $x = h(x) + f(x)$ pour tout $x \in B_r$. Pour montrer que g est continue, il suffit de remarquer que pour tout $(x, x') \in B_r$

$$\begin{aligned} ||x - x'|| &\leq ||h(x) - h(x')|| + ||f(x) - f(x')|| \\ &\leq \frac{1}{2}||x - x'|| + ||f(x) - f(x')|| \\ &\leq 2||f(x) - f(x')|| \end{aligned}$$

On en déduit pour tout $y, y' \in W$

$$||g(y) - g(y')|| \leq 2||f(g(y)) - f(g(y'))|| = 2||y - y'||. \qquad (4)$$

Autrement dit g est lipschitzienne, donc continue.

iii. Montrons que g est différentiable en tout point de $y \in W$:

$$g(y + k) = g(y) + g'_y.k + o(\|k\|) \text{ où } g'_y \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$f(a + h) = f(a) + f'_a.h + o(\|h\|) \text{ où } g'_y = (f'_{g(y)})^{-1}$$

$$\|g(y + k) - g(y) - g'_y.k\| = \|g(y + k) - g(y) - (f'_{g(y)})^{-1}.k\| = o(\|k\|) \quad car$$

h définie par $g(y + k) = x + h$

$$y + k = f(x + h) - f(x) + f'_x.h + o(\|h\|)$$

$$\Leftrightarrow k = f'_x.h + o(\|h\|)$$

$$\Leftrightarrow h = (f'_x)^{-1}.k + o(\|k\|)$$

2.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème 2.4 *Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$,*

$$\begin{aligned} f : \quad U &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une application de classe de C^1. Soit $(a, b) \in U \times V$, supposons $f(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) \in Isom(F, G)$, alors il existe :

1. *V Un voisinage ouvert de (a, b) dans $E \times F$,*
2. *W un voisinage ouvert de a,*
3. *Une fonction $g : W \longrightarrow F$ de classe C^1 tel que on a l'équivalence suivante : Pour tout $(x, y) \in V, f(x, y) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in W$ $y = g(x)$*

Preuve :

On va se ramener au théorème d'inversion locale. Pour cela, considérons l'application

$$\begin{aligned} f_1 : \quad U &\longrightarrow E \times G \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

Vérifions les hypothèses de théorème d'inversion locale
f_1 est de classe C^1, puisque se composantes le sont.
Sa dérivée est définie par :

$$f_1'(a,b) = \begin{bmatrix} 1_E & 0 \\ f_x'(a,b) & f_y'(a,b) \end{bmatrix}$$

Avec $1_E \in \mathcal{L}(E,E)$, $f_x'(a,b) \in \mathcal{L}(E,G)$ et $f_y'(a,b) \in \mathcal{L}(F,G)$
La différentielle de f_1' au point (a,b) pour tout point $(h,k) \in E \times F$ est :

$$f_1'(a,b)(h,k) = (h, f_x'(a,b).h + f_y'(a,b).k)$$

$f_1'(a,b)$ est linéaire. Montrons qu'elle est bijective.
Injectivité
$f_1'(a,b)$ est injective si pour tout $(h,k) \in E \times F$ et $(l_1,l_2) \in E \times F$

$$f_1'(a,b).(h,k) = f_1'(a,b).(l_1,l_2) \Longrightarrow h = l_1 \ et \ k = l_2$$

$$f_1'(a,b).(h,k) = f_1'(a,b).(l_1,l_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} h &= l_1 \\ f_x'(a,b).h + f_y'(a,b).k &= f_x'(a,b).l_1 + f_y'(a,b).k \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} h &= l_1 \\ k &= (f_y'(a,b))^{-1}(f_y'(a,b)).l_2 \ car \ f_y'(a,b) \ \in \ Isom(F,G) \end{aligned} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} h &= l_1 \\ k &= l_2 \end{aligned} \right.$$

Surjectivité
$f_1'(a,b)$ est surjective si pour tout $(l_1,l_2) \in E \times F$ il existe $(h,k) \in E \times F$ tel que

$$f_1'(a,b).(h,k) = (l_1,l_2)$$

$$\Leftrightarrow (h, f_x'(a,b).h + f_y'(a,b).k) = (l_1,l_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} h &= l_1 \\ k &= (f_y'(a,b))^{-1}(l_2 - (f_x'(a,b)).l_1) \ car \ f_y'(a,b) \ \in \ Isom(F,G) \end{aligned} \right.$$

Donc $f_1'(a,b)$ est bijective. Pour montrer que $f_1'(a,b) \in Isom(F,G)$, il reste à montrer la continuité de $(f_1'(a,b))^{-1}$ Or $(f_1'(a,b))^{-1} \cdot (l_1,l_2) = (l_1, (f_y'(a,b))^{-1}(-f_x'(a,b)) \cdot l_1 + l_2)$
Vérifions la continuité de $(f_1'(a,b))^{-1}$

$$\begin{aligned} \|(f_1'(a,b))^{-1}(l_1,l_2)\|_{E\times G} &\leq \|l_1\|_E + \|(f_y'(a,b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G,F)}\|l_2 - f_x'(a,b).l_1\|_G \\ &\leq (1 + \|(f_y'(a,b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G,F)}\|f_x'(a,b)\|_{\mathcal{L}(E,G)})\|l_1\|_E + \|(f_y'(a,b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G,F)}\|l_2\|_F \\ &\leq (1 + \|(f_y'(a,b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G,F)}\|f_x'(a,b)\|_{\mathcal{L}(E,G)})(\|l_1\|_E + \|l_2\|_F) \\ &\leq C\|(l_1,l_2)\|_{E\times F} \end{aligned}$$

Donc $(f_1'(a,b))^{-1}$est continue, par conséquent $f_1'(a,b) \in Isom(F,G)$.Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion locale qui dit que :
- Il existe dans $E \times F$ un voisinage ouvert V de (a,b) $(V \subset U)$,
- Il existe dans $E \times G$ un voisinage ouvert W de $(a,0) = f_1(a,b)$ tel que f_1 est C^1-difféomorphisme de V sur W

$$f_1 : V \longrightarrow W$$

Soit g_1 le difféomorphisme réciproque de f_1,

$$g_1 : W \longrightarrow V$$

Comme f_1 et g_1 sont réciproques $f_1 o g_1 = Id_W$

$$Pour\ tout\ (x,z)\ \in W,\ \ f_1 o g_1(x,z) = (x,z)$$

Comme $g_1(x,z) \in V \subset E \times F$, il existe $(u,v) \in E \times F$ tel que $g_1(x,z) = (u,v)$
$f_1(g_1(x,z)) = f_1(u,v) = (u, f(u,v)) = (x,z)$
Donc g_1 est de la forme $g_1(x,z) = (x, g(x,z))$ pour $(x,y) \in W$
g_1 est de classe C^1 car ses composantes le sont.
Posons $z = 0$, $(x,y) \in V\ f(x,y) = 0$.
D'une part, $x \in E$ si on identifie E à un sous espace vectoriel de $E \times F$ on a :
$x \in E \Rightarrow (x,0) \in E \times F$;
D'autre part, $(x,0) \in W$. Donc $x \in W \cap E$ qui est un ouvert.
Posons d'autre part $g(x,0) = g(x)$; c'est une fonction de classe de C^1 dans l'ouvert W. Donc on a pour $z = 0 \quad x \in W\ \ et\ \ y = g(x)$. ■

3 Application en EDP

3.1 Exemple 1

Montrer que l'equation

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

admet une solution si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné régulier et $\lambda > 0$ est suffisamment petit.

On vas adapter l'équation au théorème des fonctions implicites.
Soit,$\lambda \in E = \mathbb{R}$,
$u \in F = \left\{ v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) | v = 0\ sur\ \partial\Omega \right\} = C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$,
$G = C^{\alpha}(\overline{\Omega})$,
Posons

$$\begin{aligned} f\colon\ E \times F &\longrightarrow G \\ (\lambda, u) &\longmapsto -\Delta u - \lambda e^u \end{aligned}$$

1) Montrons que E, F et G sont de Banach.
i) $E = \mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet (de norme valeur absolue). Donc un Banach.
Reste à montrer que F et G sont de Banach. Rappelons d'abord la définition des espaces de fonctions holdériennes.

Définition 3.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$,pour tout $0 < \alpha \leq 1$, on dit que u est holdérienne d'exposant α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$) s'il existe une constante C telle que, pour tout couple de points (x,y) dans $\bar{\Omega}$,*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}.$$

On note que u est continue et on pose

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

et

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = ||u||_{C^0(\bar{\Omega})} + +[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

Remarque 3.1.1 *L'espace $C^{k,\alpha}$ est constitué des fonctions de classe C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. On le munie de la norme*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sum_{i=0}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^\infty(\Omega)} + \cdots + \sum_{|\alpha|=k} \|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\|_{L^\infty(\Omega)} + [\frac{\partial^k u}{\partial x^k} u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

pour lequel il est complet.

Retour à la preuve
ii)Montrons que $G = C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est complet.
Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, or $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecte d'une manière continue dans $C^0(\bar{\Omega})$, donc $(u_n) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ implique que $(u_n) \in C^0(\bar{\Omega})$. Comme $C^0(\bar{\Omega})$ est complet, (u_n) converge vers une limite $u \in C^0(\bar{\Omega})$.
Montrons que $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Reste à montrer que pour tout couple de points (x, y) dans $\bar{\Omega}$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_n(x) - u(y) + u_n(x) - u_n(y) + u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u_(x)| + |u_n(y) - u(y)| + |u_n(x) - u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u_n(y)| \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers } \infty \\ &\leq C|x - y|^\alpha \qquad \textit{car } (u_n) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Donc $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, par conséquent G est complet. Donc G **est un Banach**
iii) Montrons que F est un Banach

$$\|u\|_F = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \|D^2 u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + [D^2 u]_\alpha$$

où

$$[D^2 u]_\alpha = \max_{i,j} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |\nabla u|(x)$$

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \max_{i,j \in 1,\ldots n} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}|(x)$$

On remarque que $C_0^{2,\alpha}$ s'injecte d'une manière continue dans C^2. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $C_0^{2,\alpha}$, elle est aussi dans C^2. Comme C^2 est complet donc (u_n) converge vers une limite u dans C^2. Reste à montrer que pour tout $x, y \in \bar{\Omega}$, $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha$.

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_n(x) - u(y) + u_n(x) - u_n(y) + u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u_(x)| + |u_n(y) - u(y)| + |u_n(x) - u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u_n(y)| \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers } \infty \\ &\leq C|x - y|^\alpha \qquad \textit{car } (u_n) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Donc $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Montrons que u est nul au bord de Ω. $(u_n) \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ équivalent a $(u_n) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $(u_n) = 0$ sur $\partial\Omega$. Or $(u_n) = 0$ sur $\partial\Omega$ tend vers $u = 0$ sur $\partial\Omega$ dans $C^{2,\alpha}$. Par conséquent F est complet. Donc F **est un Banach**

2.a) Montrons que f est différentiable par rapport à la premier variable, i.e

$$f(\lambda + k, u) = f(\lambda, u) + B.k + o(|k|) \forall k \in \mathbb{R}$$

Avec $B \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, G)$

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda+k,u) & = & -\Delta u-(\lambda+k).e^{u} \\ & = & -\Delta u-\lambda e^{u}-e^{u}.k \\ & = & f(\lambda,u)-e^{u}.k. \end{array}$$

Avec

$$\begin{aligned} B\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto -e^{u}.k \end{aligned}$$

Clairement linéaire.
i) Continuité
$|B.k| = |k|e^{u}$
$\sup_{k\in\mathbb{R}^*} |\frac{B.k}{k}| = e^{u} = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},G)}$
ii)

$$f(\lambda+k,u)-f(\lambda,u)+B.k=0, \forall\ k\ \in\ \mathbb{R}$$

Donc f est bien différentiable par rapport à la première variable.
b) Montrons que f est différentiable par rapport à la second variable u, i.e

$$f(\lambda,u+h)=f(\lambda,u)+A.h+o(\|h\|)\forall h\in F$$

Calculons $A.h$

$$A.h=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\lambda,u+\epsilon.h)-f(\lambda,u)}{\epsilon}$$

$$\frac{f(\lambda,u+\epsilon.h)-f(\lambda,u)}{\epsilon}=\lambda e^{u}\frac{1-e^{\epsilon h}}{\epsilon}-\Delta h$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\lambda,u+\epsilon.h)-f(\lambda,u)}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\lambda e^{u}\frac{1-e^{\epsilon h}}{\epsilon}-\Delta h$$

En appliquant la règle de l'Hospital on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\lambda,u+\epsilon.h)-f(\lambda,u)}{\epsilon}=f'_y(\lambda,u)=-\lambda e^{u}.h-\Delta h=A.h$$

Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} A\colon\ F &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto -\Delta h-\lambda e^{u}.h \end{aligned}$$

A est Clairement linéaire.
i) Continuité

$$\|A.h\|_G=\|A.h\|_{C^0}+[A.h]_{C^{0,\alpha}}$$

A continue équivaux à

$$\|A.h\|_{C^{\alpha}(\Omega)}\leq C\|h\|_F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \|A.h\|_{C^0} & \leq & C\|h\|_F \\ \sup_{x,y\in\bar{\Omega},x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} & \leq & C\|h\|_F \end{array}\right. \tag{6}$$

Montrons la continuité de A

$$\begin{array}{rcl} \|A.h\|_{C^0(\Omega)} & = & \|-\Delta h-\lambda e^{u}h\|_{C^0(\Omega)} \\ & = & \sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}|-\Delta h(x)-\lambda e^{u(x)}h(x)| \\ & \leq & \sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}|\Delta h(x)|+\lambda\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}|e^{u(x)}h(x)| \end{array}$$

Or

$$\begin{aligned}
|\Delta h(x)| &= |\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2}| \\
&\leq |\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2}| + ... + |\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2}| \\
&\leq \sup_{x\in\bar{\Omega}} |\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2}| + ... + \sup_{x\in\bar{\Omega}} |\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2}| \\
&\leq \|h\|_F
\end{aligned}$$

De même

$$|e^{u(x)}h(x)| \quad \leq \quad \|h\|_F e^{\|u\|_F}$$

Donc

$$\|A.h\|_{C^0(\Omega)} \leq C\|h\|_F$$

Reste à montrer que

$$[A.h]_{C^{0,\alpha}} \leq C\|h\|_F$$

$$\begin{aligned}
|Ah(x) - Ah(y)| &\leq |\Delta h(x) - \Delta h(y)| + \lambda|e^{u(x)}h(x) - e^{u(y)}h(y)| \\
&\leq \|h\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}|x-y|^\alpha + \lambda\{e^{u(x)}|h(x) - h(y)| + |h(y)||e^{u(x)} - e^{u(y)}|\} \\
\frac{|Ah(x) - Ah(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \|h\|_F + \lambda e^{\|u\|_F}\|\nabla h\|_{L^\infty}|x-y|^{1-\alpha} + \lambda\|h\|_F\|\nabla e^u\|_{L^\infty}|x-y|^{1-\alpha} \\
&\leq \|h\|_F + \lambda e^{\|u\|_F}\|h\|_F diam(\bar{\Omega})^{1-\alpha} + \lambda e^{\|u\|_F}\|u\|_F\|h\|_F diam(\bar{\Omega})^{1-\alpha} \\
&\leq C\|h\|_F
\end{aligned}$$

Donc A est linéaire et continue.
iii) Montrons que

$$\|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_G = o(\|h\|_F), \forall\ h \ \in \ F$$

i.e

$$\|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_G = o(\|h\|_F) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_{C^0(\Omega)} &=& o(\|h\|_F) \\ \|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &=& o(\|h\|_F) \end{array} \right. \quad (7)$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h &= \lambda e^u(-e^h + 1 + h) \qquad \text{or } e^h = 1 + h + \frac{(th)^2}{2} \qquad \text{avec } t \in (0,1) \\
&= \lambda e^{u(x)}\frac{(th)^2}{2} \\
|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h| &\leq \lambda e^{u(x)}(\frac{h^2}{2}) \\
&\leq \lambda e^{\|u\|_F}(\frac{\|h\|_F^2}{2}) = C\|h\|_F^2 \qquad \text{avec } C = \lambda\frac{e^{\|u\|_F}}{2} \\
\|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h\|_{C^0} &\leq O(\|h\|_F^2) \\
\Rightarrow \|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h\|_{C^0} &= o(\|h\|_F) \qquad \text{quand } h \text{ tend vers } 0
\end{aligned}$$

Reste à montrer que

$$[f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = o(\|h\|_F)$$

$$
\begin{aligned}
\lambda e^u(-e^h+1+h)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \lambda[e^u(\int_0^h (h-t)e^t dt]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\
\left[e^u(\int_0^h (h-t)e^t dt\right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \frac{\left|e^{u(x)}\int_0^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt - e^{u(y)}\int_0^{h(y)}(h(y)-t)e^t dt\right|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq |x-y|^{-\alpha}|e^{u(x)}-e^{u(y)}|\left|\int_0^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt\right| \\
&+ |x-y|^{-\alpha}|e^{u(y)}|\left|\int_0^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt - \int_0^{h(y)}(h(y)-t)e^t dt\right| \\
&\leq |x-y|^{-\alpha}\|\nabla e^u\|_{L^\infty(\Omega)}|x-y|\|h\|_F^2 e^{\|h\|_F} \\
&+ |e^{u(y)}||x-y|^{-\alpha}\left|\int_0^{h(y)}(h(x)-t)e^t dt + \int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt - \int_0^{h(y)}(h(y)-t)e^t d\right. \\
&\leq \|u\|_F e^{\|u\|_F}|x-y|^{1-\alpha}\|h\|_F^2 e \qquad (\text{si } \|h\|_F\leq 1) \\
&+ |e^{u(y)}||x-y|^{-\alpha}\left|\int_0^{h(y)}(h(x)-t)e^t dt + \int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt - \int_0^{h(y)}(h(y)-t)e^t d\right. \\
&\leq \|u\|_F e^{\|u\|_F}|x-y|^{1-\alpha}\|h\|_F^2 e + e^{\|u\|_F}|x-y|^{-\alpha}\{\left|\int_0^{h(y)}(h(x)-h(y))e^t dt\right| \\
&+ \left|\int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt\right|\} \\
&\leq C|x-y|^{-\alpha}\{|x-y|\|h\|_F^2 + |h(x)-h(y)||e^{h(y)}-1| + |\int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt|\} \\
&\leq C|x-y|^{1-\alpha}\{\|h\|_F^2 + \|h\|_F^2 e^{\|h\|_F}\} + |x-y|^{-\alpha}|\int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt|
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt &= -(h(x)-h(y))e^{h(y)} + e^{h(x)} - e^{h(y)} \\
&= e^{h(x)} - e^{h(y)} - e^{h(y)}(h(x)-h(y)) \\
&= \frac{1}{2}e^{h(y)+th(x)}(h(x)-h(y))^2 \qquad \text{Par le développement limité} \\
|\int_{h(y)}^{h(x)}(h(x)-t)e^t dt| &\leq C\|h\|_F^2|x-y|^2
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
[e^u(-e^h+1+h)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &\leq C|x-y|^{1-\alpha}\|h\|_F^2 \\
&\leq C diam(\Omega)^{1-\alpha}\|h\|_F^2 \\
&\leq C\|h\|_F^2 \\
&\leq O(\|h\|_F^2)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow [e^u(-e^h+1+h)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = o(\|h\|_F)$$

Donc f est différentiable par rapport à la second variable.
3) Montrons que $f \in C^1$
Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté nous allons notés C^k à la place de $C^k(\Omega)$.
$f \in C^1$ si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, u)$ est continue et $\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u)$ est continue.

Montrons que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, u)$ est continue.
Pour cela montrons que si $\lambda_n \to \lambda$ dans E et si $u_n \to u$ dans F alors

$$\|e^{u_n} - e^u\|_{\mathcal{L}(E,G)} \to 0$$

Or

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,G)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_G}{\|x\|_E}$$
$$\|f\|_G = \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

Donc

$$\|\frac{\partial f(\lambda_n, u_n)}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial f(\lambda, u)}{\partial \lambda}\|_{\mathcal{L}(E,G)} = \|(e^{u_n} - e^u)k\|_{\mathcal{L}(E,G)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(e^{u_n} - e^u)k\|_G}{|k|}$$
$$\|(e^{u_n} - e^u)k\|_G = \|(e^{u_n} - e^u)k\|_{C^0} + \left[(e^{u_n} - e^u)k\right]_{C^{0,\alpha}}$$

Montrons d'abord que $\|(e^{u_n} - e^u)k\|_{C^0} \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{rcl} |(-e^{u_n} + e^u)k| & \leq & |(e^{u_n} - e^u)||k| \\ & \leq & \|\nabla(e^x)\|_{L^\infty(u_n,u)}\|u_n - u\|_F|k| \\ & \leq & \|(u_n, u)\|_{L^\infty(u_n,u)} e^{\|u_n\|_F + \|u\|_F}\|u_n - u\|_F|k| \\ \frac{|(-e^{u_n} + e^u)k|}{|k|} & \leq & (\|u_n\|_F + \|u\|_F)e^{\|u_n\|_F + \|u\|_F}\|u_n - u\|_F \qquad \text{tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } \infty \end{array}$$

Montrons maintenant que $\left[(e^{u_n} - e^u)k\right]_{C^{0,\alpha}} \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{rcl} \left[(e^{u_n} - e^u)k\right]_{C^{0,\alpha}} & = & |(-e^{u_n(x)} + e^{u(x)})k - (e^{u_n(y)} - e^{u(y)})k)||x-y|^{-\alpha} \\ & \leq & \left(|e^{u_n(x)} - e^{u(x)}| + |e^{u_n(y)} - e^{u(y)}|\right)|k||x-y|^{-\alpha} \\ & \leq & 2\|\nabla(e^x)\|_{L^\infty(u_n,u)}\|u_n - u\|_F|k|diam(\Omega)^{-\alpha} \\ \frac{\left[(e^{u_n} - e^u)k\right]_{C^{0,\alpha}}}{|k|} & \leq & C\|u_n - u\|_F \qquad \text{tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } \infty \end{array}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, u)$ est continue.

Reste à montrer que $\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u)$ est continue.
Pour cela montrons que si $\lambda_n \to \lambda$ dans E et si $u_n \to u$ dans F alors

$$\|\frac{\partial f(\lambda_n, u_n)}{\partial u_n} - \frac{\partial f(\lambda, u)}{\partial u}\|_{\mathcal{L}(F,G)} = \|(-\Delta - \lambda_n e^{u_n}) - (-\Delta - \lambda e^u)\|_{\mathcal{L}(F,G)} \to 0$$
$$\|\frac{\partial f(\lambda_n, u_n)}{\partial u_n} - \frac{\partial f(\lambda, u)}{\partial u}\|_{\mathcal{L}(F,G)} = \sup_{h \neq 0} \frac{\|(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h\|_G}{\|h\|_F}$$

Or

$$\|(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)\|_G = \|(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)\|_{C^0} + \left[(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)\right]_{C^{0,\alpha}}$$

Montrons d'abord que $\|(\lambda_n e^{u_n} - \lambda e^u)h\|_{C^0} \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{rcl} |(-\Delta - \lambda_n e^{u_n})h - (-\Delta - \lambda e^u)h| & = & |(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h| \\ & \leq & |-(\lambda_n - \lambda)e^{u_n} - \lambda e^{u_n} + \lambda e^u|\|h\|_F \\ & \leq & |\lambda_n - \lambda|e^{\|u_n\|_F}\|h\|_F + |\lambda||e^{u_n} - e^u|\|h\|_F \\ & \leq & |\lambda_n - \lambda|e^{\|u_n\|_F}\|h\|_F + |\lambda|\|\nabla(e^x)\|_{L^\infty(u_n,u)}\|u_n - u\|_F\|h\|_F \\ & \leq & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|(-\Delta - \lambda_n e^{u_n})h - (-\Delta - \lambda e^u)h\|_{C^0}}{\|h\|_F} \to 0$$

Montrons maintenant que $[(-\lambda_n e^{u_n}+\lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}} \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{rcl}
[(-\lambda_n e^{u_n}+\lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}} & = & \dfrac{|(-\lambda_n e^{u_n(x)}+\lambda e^{u(x)}-(-\lambda_n e^{u_n(y)}+\lambda e^{u(y)}))h|}{|x-y|^\alpha} \\
& \leq & \left|-\lambda_n e^{u_n(x)}+\lambda e^{u(x)}-(-\lambda_n e^{u_n(y)}+\lambda e^{u(y)})\right| |x-y|^{-\alpha}\|h\|_F \\
& \leq & |-(\lambda_n-\lambda)e^{u_n(x)}-\lambda(e^{u_n(x)}-e^{u(x)})-(\lambda_n e^{u_n(y)}-\lambda e^{u(y)})||x-y|^{-\alpha}\|h\| \\
& \leq & 2(|\lambda_n-\lambda|e^{\|u_n\|_F}+2|\lambda|\|u_n-u\|_F e^{\|u_n\|_F+\|u\|_F})\|h\|_F|x-y|^{-\alpha}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{[(-\lambda_n e^{u_n}+\lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}}}{\|u\|_F} \longrightarrow 0$$

Donc $f \in C^1$

4) Montrons que $f'_y(0,0) \in Isom(F,G)$

$$\begin{aligned} f'_y(\lambda,u) \colon\ F &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto -\Delta h \end{aligned}$$

$f'_y(\lambda,u) \in \mathcal{L}(F,G) \forall\lambda \in E, \forall \in F$ en particulier $f'_y(0,0) \in \mathcal{L}(F,G)$
Montrons que $f'_y(0,0)$ est bijective i.e $\forall k \in C^\alpha(\Omega) \exists! h \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ tel que $-\Delta h = k$ dans Ω c'est équivalent à dire

$$\begin{cases} -\Delta h & = & k & \text{dans } \Omega \\ h & = & 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

D'après le théorème de Shauder(vue en cours) qui dit :
Si $k \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ alors il existe un unique $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. De plus

$$\|h\|_F \leq C\|k\|_G$$

Donc $f'_y(0,0)$ est bijective.

Reste à montrer que $(f'_y)^{-1}$ est continue. Comme F et G sont de Banach et que f'_y est bijective et continue, on a d'après le théorème d'isomorphisme de Banach $(f'_y)^{-1}$ **est continue.** Ceci dit tous les hypothèses de théorème des fonctions implicites sont vérifiés. Par conséquent il existe
- V un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $E \times F$,
- $W = (-\epsilon,\epsilon)$ un voisinage ouvert de 0,
- une fonction $g : W \longrightarrow F$ de classe C^1 tel que on a l'équivalence suivante

$$\forall(\lambda,u) \in V, f(\lambda,u)=0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall\lambda \in W \quad u=g(\lambda)$$

i.e, Donc pour chaque $\lambda \in W = (-\epsilon,\epsilon)$, il existe $u = g(\lambda) \in F$ tel que

$$f(\lambda,u)=0 \Rightarrow \begin{cases} -\Delta u & = & \lambda e^u & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

5) Montrons que l'EDP n'a pas de solution si $\lambda > \lambda_1(-\Delta;\Omega)$
D'une part rappelons tous d'abord le théorème de **principe de maximum**.

Théorème 3.1 *Soit Ω un domaine borné et $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\bar\Omega)$ tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u & \geq & \lambda e^u & \textit{dans } \Omega \\ u & \geq & 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

alors $u > 0$ dans Ω ou soit $u = 0$ dans Ω.

D'autre part montrons ce résultat ; $e^t > t \; \forall \; t \; \in \; \mathbb{R}$.

Pour $t < 0$ on a $e^t > t$; car $\forall \; t \; \in \mathbb{R} \; e^t > 0$
Pour $t \geq 0$ on a $e^t > t$; car $g(t) = e^t - t \Rightarrow g(t) \geq 1 \;\; \forall \; t \in \mathbb{R}$, en particulier $g(t) \geq 0$.

Résonnant par absurde.
Supposons que l'EDP admet une solution classique pour $\lambda > \lambda_1(-\Delta; \Omega)$. i.e
il existe $u \in C^2$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda e^u & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On veut montrer que $\lambda \leq \lambda_1(-\Delta; \Omega)$
Soit ϕ_1 la fonction propre du Laplacien, par le théorème du cours on sait que la fonction propre du Laplacien est de signe constant.
Supposons que $\phi_1 > 0$ et $\lambda \leq \lambda_1$. Multiplions l'EDP par ϕ_1 et intégrons sur Ω

$$\begin{array}{rcll} \int_\Omega -\Delta u \phi_1 & = & \int_\Omega \lambda e^u \phi_1 & \\ \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 & = & \lambda \int_\Omega e^u \phi_1 & \text{Par Green et le fait que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \int_\Omega u(-\Delta \phi_1) & = & \lambda \int_\Omega e^u \phi_1 & \text{à nouveau Green} \\ \lambda_1 \int_\Omega u \phi_1 & = & \lambda \int_\Omega e^u \phi_1 & \text{car } -\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k \; k \in \{1, ..., n\} \\ \lambda_1 \int_\Omega u \phi_1 & < & \lambda \int_\Omega e^u \phi_1 & \text{car } \forall \; t \; \in \mathbb{R} \; e^t > t \\ (\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega (u - e^u) \phi_1 & < 0 & & \Rightarrow \phi_1 < 0 \text{ par le principe du maximum.Absurde car on a supposé que } \phi_1 > 0. \end{array}$$

Donc cela implique $(\lambda_1 - \lambda) < 0$, par conséquent $(\lambda_1 < \lambda)$. D'où le résultat.
Ainsi l'**EDP** n'a pas de solution pour $\lambda < \lambda_1(-\Delta; \Omega)$.

4 Bibliographie

[1] Gilles Christol, Anne Cot et Charles-M, Topologie, ellipses.
[2] Gilles Christol, Anne Cot et Charles-M, Calcul différentiel, ellipses.
[3] Paul Donato,Calcul différentiel pour la licence, Dunod.
[4] Henri Carton, Cours de Calcul différentiel, Hermann.
[5] Xavier Gourdon, Analyse, Les maths en tête, ellipses