



**HAL**  
open science

## Projet de M2

Ali Mohamed Houmed

► **To cite this version:**

| Ali Mohamed Houmed. Projet de M2. 2021. hal-03105559

**HAL Id: hal-03105559**

**<https://hal.inrae.fr/hal-03105559>**

Submitted on 11 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université de Picardie Jules Vernes**

**Faculté des Sciences d'Amiens**

**Systemes Micro-électromécaniques**

Réalisé par : **Ali Mohamed Houmed**

Sous la direction de : **Louis Dupaigne (MC-HDR)**

Laboratoire d'accueil : **LAMFA**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Théorème des Fonctions implicites</b>	<b>4</b>
2.1	Théorème de point fixe . . . . .	4
2.2	Théorème d'inversion locale . . . . .	5
2.3	Théorème des fonctions implicites . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Application en EDP</b>	<b>10</b>
3.1	Exemple 1 . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>18</b>

# 1 Notation

$E, F$  : Espaces de Banach,  
 $Isom(E, F)$  : L'ensemble des isomorphismes de  $E$  dans  $F$ ,  
 $f^{-1}$ , : La fonction réciproque de  $f$ ,  
 $f|_V$  : La restriction de  $f$  à  $V$ ,  
 $f'(a), df_a$  : La différentielle de  $f$  au point  $a$ ,  
 $f'_y(a, b)$  : La différentielle de  $f$  au point  $(a, b)$  par rapport à la second variable  $y$ ,  
*LASSE* : Les Assertions Suivants Sont Équivalents,  
 $B_r$  : la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $r$ ,  
 $\bar{B}_r$  : la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$ ,

## 2 Théorème des Fonctions implicites

**Définition 2.0.1** Soit  $X$ , un espace métrique complet (non vide). La fonction  $f$  est dite **contractante** dans l'espace  $X$  si elle est lipschitzienne de rapport  $0 \leq k < 1$  i.e si  $[d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v) \forall u, v \in X]$ .

### 2.1 Théorème de point fixe

**Théorème 2.1** Soit  $X$  un espace métrique complet, de métrique  $d = d(u, v)$  avec  $u, v \in X$ . Si  $f : X \rightarrow X$  est contractante alors  $f$  possède un unique point fixe .

#### Preuve

Soit  $x_0 \in X$ . On pose  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$  et successivement pour  $n \geq 1$  on pose

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

#### Existence

Montrons que  $(x_n)$  est une suite convergente, de limite  $a$  et que  $a$  est un point fixe de  $f$ , i.e  $f(a) = a$ . Vérifions par récurrence que la propriété

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \tag{1}$$

est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) && f \text{ est contractante} \\ &\leq kd(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Supposons que la propriété (1) est vraie au rang  $n$  et montrons-la au rang  $n + 1$

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(f(x_{n+1}), f(x_n)) && f \text{ est contractante} \\ &\leq kd(x_{n+1}, x_n) && \text{d'après (1)} \\ &\leq k^{n+1}d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Donc pour tout  $n \geq 1$ , (1) est vrai. Montrons que  $(x_n)$  est de Cauchy.

Pour  $1 \leq n < m$ , par l'inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq k^{m-1} d(x_1, x_0) + \dots + k^n d(x_1, x_0) && \text{d'après (1)} \\ &\leq k^n (k^{m-n-1} + \dots + 1) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} d(x_1, x_0) && \text{comme } 1 - k^{m-n} \leq 1 \text{ on a} \\ &\leq k^n \frac{1}{1 - k} d(x_1, x_0) \longrightarrow 0 && \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc  $(x_n)$  est de Cauchy. Puis  $X$  est complet,  $(x_n)$  converge. Soit  $a$  la limite de  $(x_n)$ . Montrons que  $a$  est un point fixe. i.e  $f(a) = a$ .

En faisant tendre  $n$  vers l'infini dans  $x_{n+1} = f(x_n)$  on a :  $f(a) = a$  Car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

et car  $f$  est contractante, donc continue. Alors

$$a = f(a).$$

### Unicité

Soit  $b$  un autre point fixe de  $f$

$$\begin{aligned}d(a, b) &= d(f(a), f(b)) && f \text{ contractante} \\ &\leq k d(a, b) \\ \text{Donc } (1 - k)d(a, b) &\leq 0 && \text{comme } k < 1 \\ d(a, b) &\leq 0 \\ \Rightarrow d(a, b) &= 0 \\ \Rightarrow a &= b.\end{aligned}$$

d'où l'unicité du point fixe.

## 2.2 Théorème d'inversion locale

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Si  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x$ , alors  $f$  admet un inverse global  $f^{-1} \in C^1$  qui vérifie  $(f^{-1})'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$  pour tout  $x$ .

Plus généralement, si  $f$  une application entre deux espaces de Banach  $E$  et  $F$  l'hypothèse  $f'(x) \neq 0$  devient  $df_x = f'_x$  est inversible et la fonction  $f$  est alors localement inversible autour de  $x$  (et non pas globalement comme dans le cas réel).

**Définition 2.2.1** Une application  $f : U \rightarrow V$ , avec  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $V$  un ouvert  $F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés, est un **difféomorphisme** de classe  $C^p$ ,  $p \geq 1$  si

1.  $f$  est bijective,
2.  $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $C^p$ .

**Théorème 2.2** Soient  $E, F$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$  application de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe  $a \in U$  tel que  $df_a$  soit un isomorphisme bicontinue de  $E$  sur  $F$  (i.e  $df_a^{-1}$  existe,  $df_a$  et  $df_a^{-1}$  sont continues). Alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $f(a)$  tels que :

1. la restriction  $f|_V$  de  $f$  à  $V$  est une bijection de  $V$  sur  $W$ ,
2. l'application inverse  $g : W \rightarrow V$  est continue,
3.  $g$  est de classe  $C^1$  et pour tout  $x \in V$ ,  $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$ .

Avant de démontrer ce théorème, on va montrer que  $f^{-1}$  est différentiable. Pour cela on va énoncer et démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.2.1** Soit  $f : U \rightarrow V$  un homéomorphisme différentiable tel que, en  $a \in U$ ,  $f'(a) \in \text{Isom}(E, F)$ . Alors  $f^{-1}$  est différentiable en  $b = f(a)$  et  $df^{-1}(b) = a$

### Preuve

On pose  $f^{-1} = g$ ,  $f(a) = b$  et  $L = f'(a)$ .

$f$  est différentiable en  $a \in U$  si  $f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|\varepsilon(h)$

Comme  $U$  est un ouvert et  $a \in U$  pour  $h$  proche de 0,  $a+h \in U$ .

Par continuité de  $f$ ,  $f(a+h) - f(a) = k$  tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro.

Remarquons que

$$k = f(a+h) - f(a) \Leftrightarrow h = g(b+k) - g(b)$$

car

$$k + f(a) = f(a+h)$$

$$k + b = f(a+h)$$

$$g(k+b) = a+h$$

$$g(b+k) - g(b) = h$$

Par continuité de  $f$  et  $g$ ,  $k$  tend vers zéro si et seulement si  $h$  tend vers zéro.  
On a :

$$k = f(a+h) - f(a) = L.h + \|h\|\varepsilon(h)$$

Comme

$$f'(a) = L \in \text{Isom}(E, F), \quad L \text{ est bijective, donc } L^{-1} \text{ existe}$$

En appliquant  $L^{-1}$  aux deux membres, on obtient

$$L^{-1}k = h + \|h\|L^{-1}\varepsilon(h) = g(k+b) - g(b) + \|h\|L^{-1}\varepsilon(h)$$

Le lemme sera donc prouvé si on vérifie que  $\|h\|L^{-1}\varepsilon(h)$  est  $o(k)$  car

$$g(k+b) - g(b) - L^{-1}k = -\|h\|L^{-1}\varepsilon(h)$$

et

$$f'(a) \in \text{Isom}(E, F) \Rightarrow (f'(a))^{-1} = L^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$$

donc  $L^{-1}$  est linéaire et continue.

Or

$$\begin{aligned} L^{-1}k - \|h\|L^{-1}\varepsilon(h) &= h \\ \|h\| &\leq \|L^{-1}\| \|k\| + \|h\| \|L^{-1}\varepsilon(h)\| \\ \|h\| (1 - \|L^{-1}\varepsilon(h)\|) &\leq \|L^{-1}\| \|k\| \end{aligned}$$

Comme  $\|L^{-1}\varepsilon(h)\|$  tend vers zéro on a  $1 - \|L^{-1}\varepsilon(h)\| > 0$ , pour  $h$  petit et donc

$$\|h\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\varepsilon(h)\|} \|k\| \leq M \|k\|.$$

D'où

$$\|h\| \|L^{-1}\varepsilon(h)\| \leq M \|L^{-1}\varepsilon(h)\| \|k\|$$

Quand  $h$  tend vers zéro  $\|L^{-1}\varepsilon(h)\|$  tend vers zéro. Donc,  $\|h\|L^{-1}\varepsilon(h)$  est  $o(k)$ .

**Proposition 2.3** (Von Neumann) Soit  $E$  un espace de Banach,  $u \in \mathcal{L}_c(E)$  tel que  $\|u\| < 1$  alors  $\text{Id}_E - u$  est inversible, son inverse est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

### Preuve

D'une part, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$  converge absolument car  $\|u^n\| \leq \|u\|^n$  et  $\|u\| < 1$ .

D'autre part

$$(\text{Id}_E - u) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u^n = \text{Id}_E$$

de même pour

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \right) (\text{Id}_E - u) = \text{Id}_E,$$

d'où le résultat.

**Preuve** ( Du théorème d'inversion locale ) :

Pour tout  $r > 0$ , on note  $B_r$  la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $r$ , et  $\bar{B}_r$  la boule fermée correspondante. Supposons pour commencer que  $E = F$ ,  $a = 0$ ,  $f(a) = 0$ ,  $f'_0 = f'_a = Id_E$  et

$$(f'_a)^{-1}: E \longrightarrow E \\ x \longmapsto (f'_a)^{-1}[f(a+x) - f(a)]$$

Comme  $U$  est un ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $\bar{B}_r \subset U$ , et puisque  $f$  est de classe  $C^1$ , on a

$$\exists r > 0 \mid \|x - a\| \leq r \Rightarrow \|f'_x - f'_a\| = \|f'_x - Id_E\| \leq \epsilon = \frac{1}{2}$$

pour tout  $x \in B_r$ . Considérons maintenant  $x \in B_r$ . On a  $f'_x = Id_E - u$  avec

$$\|u\| = \|Id_E - f'_x\| \leq \frac{1}{2}$$

Par le *théorème de Von Neumann*,  $f'_x$  est un isomorphisme bicontinu qui vérifie

$$(f'_x)^{-1} = Id_E + u + \dots + u^n + \dots,$$

et de plus

$$\|(f'_x)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \quad (2)$$

**i.** Nous voulons montrer que  $f$  a un inverse local. Plus précisément, nous allons montrer que pour  $y \in B_{\frac{r}{2}}$ , il existe un unique  $x \in B_{\frac{r}{2}}$  vérifiant  $f(x) = y$ .

Fixons donc  $y \in B_{\frac{r}{2}}$  et considérons la fonction

$$h: B_r \longrightarrow E \\ x \longmapsto y + x - f(x)$$

Elle est de classe  $C^1$ , pour tout  $x \in B_r$ ,

$$\|h'_x\| = \|Id_E - f'_x\| \leq \frac{1}{2},$$

donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout  $(x, x') \in (\bar{B}_r)^2$ ,

$$\|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| \quad (3)$$

En particulier, pour tout  $x \in \bar{B}_r$ ,

$$\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|.$$

Donc pour tout  $x \in \bar{B}_r$ ,

$$\|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Ainsi,  $h$  est une fonction de  $\bar{B}_r$  dans  $B_r$ , donc  $\bar{B}_r$  (qui est complet). Comme de plus  $h$  vérifie (3), donc contractante, on peut alors appliquer le théorème du point fixe qui entraîne l'existence et l'unicité de  $x \in \bar{B}_r$  tel que  $h(x) = x$  et comme  $h$  est à valeur dans  $B_r$ ,  $x \in B_r$ .

On a donc  $f(x) = y$ .

**Résumons :** nous avons montré pour tout  $y \in B_{\frac{r}{2}}$ , l'existence et l'unicité de  $x \in B_r$  tel que  $f(x) = y$ .

En notant  $V = f^{-1}(B_{\frac{r}{2}}) \cap B_r$  un ouvert, ceci s'interprète en disant que  $f|_V: V \longrightarrow W = B_{\frac{r}{2}}$

est une bijection.

ii. Soit  $g : W \rightarrow V$  l'application inverse de  $f$ . Désignons par  $h$  l'application  $h : x \rightarrow x - f(x)$  c'est l'application  $h$  précédente avec  $y = 0$ , de sorte que  $x = h(x) + f(x)$  pour tout  $x \in B_r$ . Pour montrer que  $g$  est continue, il suffit de remarquer que pour tout  $(x, x') \in B_r$

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &\leq \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\| \\ &\leq 2\|f(x) - f(x')\| \end{aligned}$$

On en déduit pour tout  $y, y' \in W$

$$\|g(y) - g(y')\| \leq 2\|f(g(y)) - f(g(y'))\| = 2\|y - y'\|. \quad (4)$$

Autrement dit  $g$  est lipschitzienne, donc continue.

iii. Montrons que  $g$  est différentiable en tout point de  $y \in W$  :

$$g(y + k) = g(y) + g'_y \cdot k + o(\|k\|) \text{ où } g'_y \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$f(a + h) = f(a) + f'_a \cdot h + o(\|h\|) \text{ où } g'_y = (f'_{g(y)})^{-1}$$

$$\|g(y + k) - g(y) - g'_y \cdot k\| = \|g(y + k) - g(y) - (f'_{g(y)})^{-1} \cdot k\| = o(\|k\|) \text{ car}$$

$h$  définie par  $g(y + k) = x + h$

$$y + k = f(x + h) - f(x) + f'_x \cdot h + o(\|h\|)$$

$$\Leftrightarrow k = f'_x \cdot h + o(\|h\|)$$

$$\Leftrightarrow h = (f'_x)^{-1} \cdot k + o(\|k\|)$$

### 2.3 Théorème des fonctions implicites

**Théorème 2.4** Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E \times F$ ,

$$\begin{aligned} f: \quad U &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une application de classe de  $C^1$ . Soit  $(a, b) \in U \times V$ , supposons  $f(a, b) = 0$  et  $f'_y(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$ , alors il existe :

1.  $V$  Un voisinage ouvert de  $(a, b)$  dans  $E \times F$ ,
2.  $W$  un voisinage ouvert de  $a$ ,
3. Une fonction  $g : W \rightarrow F$  de classe  $C^1$  tel que on a l'équivalence suivante : Pour tout  $(x, y) \in V$ ,  $f(x, y) = 0$  si et seulement si pour tout  $x \in W$   $y = g(x)$

**Preuve :**

On va se ramener au théorème d'inversion locale. Pour cela, considérons l'application

$$\begin{aligned} f_1: \quad U &\longrightarrow E \times G \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

### Vérifions les hypothèses de théorème d'inversion locale

$f_1$  est de classe  $C^1$ , puisque ses composantes le sont.

Sa dérivée est définie par :

$$f'_1(a, b) = \begin{bmatrix} 1_E & 0 \\ f'_x(a, b) & f'_y(a, b) \end{bmatrix}$$

Avec  $1_E \in \mathcal{L}(E, E)$ ,  $f'_x(a, b) \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $f'_y(a, b) \in \mathcal{L}(F, G)$

La différentielle de  $f'_1$  au point  $(a, b)$  pour tout point  $(h, k) \in E \times F$  est :

$$f'_1(a, b)(h, k) = (h, f'_x(a, b).h + f'_y(a, b).k)$$

$f'_1(a, b)$  est linéaire. Montrons qu'elle est bijective.

#### Injectivité

$f'_1(a, b)$  est injective si pour tout  $(h, k) \in E \times F$  et  $(l_1, l_2) \in E \times F$

$$f'_1(a, b).(h, k) = f'_1(a, b).(l_1, l_2) \implies h = l_1 \text{ et } k = l_2$$

$$f'_1(a, b).(h, k) = f'_1(a, b).(l_1, l_2)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} h = l_1 \\ f'_x(a, b).h + f'_y(a, b).k = f'_x(a, b).l_1 + f'_y(a, b).l_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h = l_1 \\ k = (f'_y(a, b))^{-1}(f'_y(a, b).l_2 - f'_x(a, b).l_1) \text{ car } f'_y(a, b) \in \text{Isom}(F, G) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} h = l_1 \\ k = l_2 \end{cases} \end{aligned}$$

#### Surjectivité

$f'_1(a, b)$  est surjective si pour tout  $(l_1, l_2) \in E \times F$  il existe  $(h, k) \in E \times F$  tel que

$$f'_1(a, b).(h, k) = (l_1, l_2)$$

$$\Leftrightarrow (h, f'_x(a, b).h + f'_y(a, b).k) = (l_1, l_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = l_1 \\ k = (f'_y(a, b))^{-1}(l_2 - (f'_x(a, b).l_1)) \text{ car } f'_y(a, b) \in \text{Isom}(F, G) \end{cases}$$

Donc  $f'_1(a, b)$  est bijective. Pour montrer que  $f'_1(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$ , il reste à montrer la continuité de  $(f'_1(a, b))^{-1}$ . Or  $(f'_1(a, b))^{-1} \cdot (l_1, l_2) = (l_1, (f'_y(a, b))^{-1}(-f'_x(a, b).l_1 + l_2))$

#### Vérifions la continuité de $(f'_1(a, b))^{-1}$

$$\begin{aligned} \|(f'_1(a, b))^{-1}(l_1, l_2)\|_{E \times G} &\leq \|l_1\|_E + \|(f'_y(a, b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G, F)} \|l_2 - f'_x(a, b).l_1\|_G \\ &\leq (1 + \|(f'_y(a, b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G, F)} \|f'_x(a, b)\|_{\mathcal{L}(E, G)}) \|l_1\|_E + \|(f'_y(a, b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G, F)} \|l_2\|_F \\ &\leq (1 + \|(f'_y(a, b))^{-1}\|_{\mathcal{L}(G, F)} \|f'_x(a, b)\|_{\mathcal{L}(E, G)}) (\|l_1\|_E + \|l_2\|_F) \\ &\leq C \| (l_1, l_2) \|_{E \times F} \end{aligned}$$

Donc  $(f'_1(a, b))^{-1}$  est continue, par conséquent  $f'_1(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion locale qui dit que :

- Il existe dans  $E \times F$  un voisinage ouvert  $V$  de  $(a, b)$  ( $V \subset U$ ),

- Il existe dans  $E \times G$  un voisinage ouvert  $W$  de  $(a, 0) = f_1(a, b)$  tel que  $f_1$  est  $C^1$ -difféomorphisme de  $V$  sur  $W$

$$f_1 : V \longrightarrow W$$

Soit  $g_1$  le difféomorphisme réciproque de  $f_1$ ,

$$g_1 : W \longrightarrow V$$

Comme  $f_1$  et  $g_1$  sont réciproques  $f_1 \circ g_1 = Id_W$

$$\text{Pour tout } (x, z) \in W, \quad f_1 \circ g_1(x, z) = (x, z)$$

Comme  $g_1(x, z) \in V \subset E \times F$ , il existe  $(u, v) \in E \times F$  tel que  $g_1(x, z) = (u, v)$   
 $f_1(g_1(x, z)) = f_1(u, v) = (u, f(u, v)) = (x, z)$

Donc  $g_1$  est de la forme  $g_1(x, z) = (x, g(x, z))$  pour  $(x, y) \in W$

$g_1$  est de classe  $C^1$  car ses composantes le sont.

Posons  $z = 0, (x, y) \in V \quad f(x, y) = 0$ .

D'une part,  $x \in E$  si on identifie  $E$  à un sous espace vectoriel de  $E \times F$  on a :

$$x \in E \Rightarrow (x, 0) \in E \times F;$$

D'autre part,  $(x, 0) \in W$ . Donc  $x \in W \cap E$  qui est un ouvert.

Posons d'autre part  $g(x, 0) = g(x)$ ; c'est une fonction de classe de  $C^1$  dans l'ouvert  $W$ . Donc on a pour  $z = 0 \quad x \in W \quad \text{et} \quad y = g(x)$ . ■

### 3 Application en EDP

#### 3.1 Exemple 1

Montrer que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

admet une solution si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert borné régulier et  $\lambda > 0$  est suffisamment petit.

On vas adapter l'équation au théorème des fonctions implicites.

Soit,  $\lambda \in E = \mathbb{R}$ ,

$$u \in F = \left\{ v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}),$$

$$G = C^\alpha(\bar{\Omega}),$$

Posons

$$\begin{aligned} f: E \times F &\longrightarrow G \\ (\lambda, u) &\longmapsto -\Delta u - \lambda e^u \end{aligned}$$

1) Montrons que  $E, F$  et  $G$  sont de Banach.

i)  $E = \mathbb{R}$  est un espace vectoriel normé complet (de norme valeur absolue). Donc un Banach.

Reste à montrer que  $F$  et  $G$  sont de Banach. Rappelons d'abord la définition des espaces de fonctions holdériennes.

**Définition 3.1.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , pour tout  $0 < \alpha \leq 1$ , on dit que  $u$  est holdérienne d'exposant  $\alpha$  (lipschitzienne pour  $\alpha = 1$ ) s'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout couple de points  $(x, y)$  dans  $\bar{\Omega}$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

On note que  $u$  est continue et on pose

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

et

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

**Remarque 3.1.1** L'espace  $C^{k,\alpha}$  est constitué des fonctions de classe  $C^k$  dont toutes les dérivées partielles d'ordre  $k$  sont dans  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ . On le munie de la norme

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sum_{i=0}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \cdots + \sum_{|\alpha|=k} \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left[ \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

pour lequel il est complet.

Retour à la preuve

ii) Montrons que  $G = C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  est complet.

Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , or  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  s'injecte d'une manière continue dans  $C^0(\bar{\Omega})$ , donc  $(u_n) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  implique que  $(u_n) \in C^0(\bar{\Omega})$ . Comme  $C^0(\bar{\Omega})$  est complet,  $(u_n)$  converge vers une limite  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ .

Montrons que  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Reste à montrer que pour tout couple de points  $(x, y)$  dans  $\bar{\Omega}$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_n(x) - u(y) + u_n(x) - u_n(y) + u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u(x)| + |u_n(y) - u(y)| + |u_n(x) - u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u_n(y)| \quad \text{quand } n \text{ tend vers } \infty \\ &\leq C|x - y|^\alpha \quad \text{car } (u_n) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Donc  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , par conséquent  $G$  est complet. Donc  $G$  est un Banach

iii) Montrons que  $F$  est un Banach

$$\|u\|_F = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \|D^2 u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + [D^2 u]_\alpha$$

où

$$[D^2 u]_\alpha = \max_{i,j} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u|(x)$$

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|(x)$$

On remarque que  $C_0^{2,\alpha}$  s'injecte d'une manière continue dans  $C^2$ . Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $C_0^{2,\alpha}$ , elle est aussi dans  $C^2$ . Comme  $C^2$  est complet donc  $(u_n)$  converge vers une limite  $u$  dans  $C^2$ . Reste à montrer que pour tout  $x, y \in \bar{\Omega}$ ,  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ .

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_n(x) - u(y) + u_n(x) - u_n(y) + u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u(x)| + |u_n(y) - u(y)| + |u_n(x) - u_n(y)| \\ &\leq |u_n(x) - u_n(y)| \quad \text{quand } n \text{ tend vers } \infty \\ &\leq C|x - y|^\alpha \quad \text{car } (u_n) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Donc  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Montrons que  $u$  est nul au bord de  $\Omega$ .  $(u_n) \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  équivalent à  $(u_n) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  et  $(u_n) = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Or  $(u_n) = 0$  sur  $\partial\Omega$  tend vers  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  dans  $C^{2,\alpha}$ . Par conséquent  $F$  est complet. Donc  $F$  est un Banach

2.a) Montrons que  $f$  est différentiable par rapport à la premier variable, i.e

$$f(\lambda + k, u) = f(\lambda, u) + B.k + o(|k|) \forall k \in \mathbb{R}$$

Avec  $B \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, G)$

$$\begin{aligned} f(\lambda + k, u) &= -\Delta u - (\lambda + k).e^u \\ &= -\Delta u - \lambda e^u - e^u.k \\ &= f(\lambda, u) - e^u.k. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} B: \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto -e^u.k \end{aligned}$$

Clairement linéaire.

**i) Continuité**

$$|B.k| = |k|e^u$$

$$\sup_{k \in \mathbb{R}^*} \left| \frac{B.k}{k} \right| = e^u = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, G)}$$

**ii)**

$$f(\lambda + k, u) - f(\lambda, u) + B.k = 0, \forall k \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est bien différentiable par rapport à la première variable.

b) Montrons que  $f$  est différentiable par rapport à la second variable  $u$ , i.e

$$f(\lambda, u + h) = f(\lambda, u) + A.h + o(\|h\|) \forall h \in F$$

**Calculons  $A.h$**

$$\begin{aligned} A.h &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, u + \epsilon.h) - f(\lambda, u)}{\epsilon} \\ \frac{f(\lambda, u + \epsilon.h) - f(\lambda, u)}{\epsilon} &= \lambda e^u \frac{1 - e^{\epsilon h}}{\epsilon} - \Delta h \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, u + \epsilon.h) - f(\lambda, u)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda e^u \frac{1 - e^{\epsilon h}}{\epsilon} - \Delta h \end{aligned}$$

En appliquant la règle de l'Hospital on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, u + \epsilon.h) - f(\lambda, u)}{\epsilon} = f'_y(\lambda, u) = -\lambda e^u.h - \Delta h = A.h$$

Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} A: F &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto -\Delta h - \lambda e^u.h \end{aligned}$$

$A$  est Clairement linéaire.

**i) Continuité**

$$\|A.h\|_G = \|A.h\|_{C^0} + [A.h]_{C^{0,\alpha}}$$

$A$  continue équivaux à

$$\|A.h\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq C \|h\|_F \Leftrightarrow \begin{cases} \|A.h\|_{C^0} \leq C \|h\|_F \\ \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C \|h\|_F \end{cases} \quad (6)$$

Montrons la continuité de  $A$

$$\begin{aligned} \|A.h\|_{C^0(\Omega)} &= \|-\Delta h - \lambda e^u h\|_{C^0(\Omega)} \\ &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} |-\Delta h(x) - \lambda e^{u(x)} h(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\Delta h(x)| + \lambda \sup_{x \in \bar{\Omega}} |e^{u(x)} h(x)| \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
|\Delta h(x)| &= \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2} \right| \\
&\leq \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2} \right| \\
&\leq \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2} \right| + \dots + \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2} \right| \\
&\leq \|h\|_F
\end{aligned}$$

De même

$$|e^{u(x)}h(x)| \leq \|h\|_F e^{\|u\|_F}$$

Donc

$$\|A.h\|_{C^0(\Omega)} \leq C\|h\|_F$$

Reste à montrer que

$$[A.h]_{C^{0,\alpha}} \leq C\|h\|_F$$

$$\begin{aligned}
|Ah(x) - Ah(y)| &\leq |\Delta h(x) - \Delta h(y)| + \lambda|e^{u(x)}h(x) - e^{u(y)}h(y)| \\
&\leq \|h\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}|x-y|^\alpha + \lambda\{e^{u(x)}|h(x) - h(y)| + |h(y)||e^{u(x)} - e^{u(y)}|\} \\
\frac{|Ah(x) - Ah(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \|h\|_F + \lambda e^{\|u\|_F} \|\nabla h\|_{L^\infty} |x-y|^{1-\alpha} + \lambda \|h\|_F \|\nabla e^u\|_{L^\infty} |x-y|^{1-\alpha} \\
&\leq \|h\|_F + \lambda e^{\|u\|_F} \|h\|_F \text{diam}(\bar{\Omega})^{1-\alpha} + \lambda e^{\|u\|_F} \|u\|_F \|h\|_F \text{diam}(\bar{\Omega})^{1-\alpha} \\
&\leq C\|h\|_F
\end{aligned}$$

Donc  $A$  est linéaire et continue.

iii) Montrons que

$$\|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_G = o(\|h\|_F), \forall h \in F$$

i.e

$$\|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_G = o(\|h\|_F) \Leftrightarrow \begin{cases} \|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_{C^0(\Omega)} = o(\|h\|_F) \\ \|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) + A.h\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = o(\|h\|_F) \end{cases} \quad (7)$$

Donc

$$f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h = \lambda e^u (-e^h + 1 + h) \quad \text{or } e^h = 1 + h + \frac{(th)^2}{2} \quad \text{avec } t \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda e^{u(x)} \frac{(th)^2}{2} \\
|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h| &\leq \lambda e^{u(x)} \left(\frac{h^2}{2}\right) \\
&\leq \lambda e^{\|u\|_F} \left(\frac{\|h\|_F^2}{2}\right) = C\|h\|_F^2 \quad \text{avec } C = \lambda \frac{e^{\|u\|_F}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h\|_{C^0} &\leq O(\|h\|_F^2) \\
\Rightarrow \|f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h\|_{C^0} &= o(\|h\|_F) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0
\end{aligned}$$

Reste à montrer que

$$[f(\lambda, u+h) - f(\lambda, u) - A.h]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = o(\|h\|_F)$$

$$\begin{aligned}
\lambda e^u(-e^h + 1 + h)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \lambda[e^u(\int_0^h (h-t)e^t dt)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\
\left[ e^u(\int_0^h (h-t)e^t dt) \right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \frac{|e^{u(x)} \int_0^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt - e^{u(y)} \int_0^{h(y)} (h(y)-t)e^t dt|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq |x-y|^{-\alpha} |e^{u(x)} - e^{u(y)}| \left| \int_0^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt \right| \\
&+ |x-y|^{-\alpha} |e^{u(y)}| \left| \int_0^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt - \int_0^{h(y)} (h(y)-t)e^t dt \right| \\
&\leq |x-y|^{-\alpha} \|\nabla e^u\|_{L^\infty(\Omega)} |x-y| \|h\|_F^2 e^{\|h\|_F} \\
&+ |e^{u(y)}| |x-y|^{-\alpha} \left| \int_0^{h(y)} (h(x)-t)e^t dt + \int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt - \int_0^{h(y)} (h(y)-t)e^t dt \right| \\
&\leq \|u\|_F e^{\|u\|_F} |x-y|^{1-\alpha} \|h\|_F^2 e \quad (\text{si } \|h\|_F \leq 1) \\
&+ |e^{u(y)}| |x-y|^{-\alpha} \left| \int_0^{h(y)} (h(x)-t)e^t dt + \int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt - \int_0^{h(y)} (h(y)-t)e^t dt \right| \\
&\leq \|u\|_F e^{\|u\|_F} |x-y|^{1-\alpha} \|h\|_F^2 e + e^{\|u\|_F} |x-y|^{-\alpha} \left\{ \left| \int_0^{h(y)} (h(x)-h(y))e^t dt \right| \right. \\
&+ \left. \left| \int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt \right| \right\} \\
&\leq C|x-y|^{-\alpha} \{ |x-y| \|h\|_F^2 + |h(x)-h(y)| e^{h(y)} - 1 + \left| \int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt \right| \} \\
&\leq C|x-y|^{1-\alpha} \{ \|h\|_F^2 + \|h\|_F^2 e^{\|h\|_F} \} + |x-y|^{-\alpha} \left| \int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt \right|
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt &= -(h(x)-h(y))e^{h(y)} + e^{h(x)} - e^{h(y)} \\
&= e^{h(x)} - e^{h(y)} - e^{h(y)}(h(x)-h(y)) \\
&= \frac{1}{2}e^{h(y)+th(x)}(h(x)-h(y))^2 \quad \text{Par le développement limité} \\
\left| \int_{h(y)}^{h(x)} (h(x)-t)e^t dt \right| &\leq C\|h\|_F^2 |x-y|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[e^u(-e^h + 1 + h)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &\leq C|x-y|^{1-\alpha} \|h\|_F^2 \\
&\leq C \text{diam}(\Omega)^{1-\alpha} \|h\|_F^2 \\
&\leq C\|h\|_F^2 \\
&\leq O(\|h\|_F^2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [e^u(-e^h + 1 + h)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = o(\|h\|_F)$$

Donc  $f$  est différentiable par rapport à la second variable.

**3) Montrons que  $f \in C^1$**

Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté nous allons noter  $C^k$  à la place de  $C^k(\Omega)$ .

$f \in C^1$  si  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, u)$  est continue et  $\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u)$  est continue.

Montrons que  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, u)$  est continue.

Pour cela montrons que si  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  dans  $E$  et si  $u_n \rightarrow u$  dans  $F$  alors

$$\|e^{u_n} - e^u\|_{\mathcal{L}(E,G)} \rightarrow 0$$

Or

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}(E,G)} &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_G}{\|x\|_E} \\ \|f\|_G &= \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f(\lambda_n, u_n)}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial f(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right\|_{\mathcal{L}(E,G)} &= \|(e^{u_n} - e^u)k\|_{\mathcal{L}(E,G)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(e^{u_n} - e^u)k\|_G}{|k|} \\ \|(e^{u_n} - e^u)k\|_G &= \|(e^{u_n} - e^u)k\|_{C^0} + [(e^{u_n} - e^u)k]_{C^{0,\alpha}} \end{aligned}$$

**Montrons d'abord que  $\|(e^{u_n} - e^u)k\|_{C^0} \rightarrow 0$**

$$\begin{aligned} |(-e^{u_n} + e^u)k| &\leq |(e^{u_n} - e^u)||k| \\ &\leq \|\nabla(e^x)\|_{L^\infty(u_n, u)} \|u_n - u\|_F |k| \\ &\leq \|(u_n, u)\|_{L^\infty(u_n, u)} e^{\|u_n\|_F + \|u\|_F} \|u_n - u\|_F |k| \\ \frac{|(-e^{u_n} + e^u)k|}{|k|} &\leq (\|u_n\|_F + \|u\|_F) e^{\|u_n\|_F + \|u\|_F} \|u_n - u\|_F \quad \text{tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } \infty \end{aligned}$$

**Montrons maintenant que  $[(e^{u_n} - e^u)k]_{C^{0,\alpha}} \rightarrow 0$**

$$\begin{aligned} [(e^{u_n} - e^u)k]_{C^{0,\alpha}} &= |(-e^{u_n(x)} + e^{u(x)})k - (e^{u_n(y)} - e^{u(y)})k| |x - y|^{-\alpha} \\ &\leq (|e^{u_n(x)} - e^{u(x)}| + |e^{u_n(y)} - e^{u(y)}|) |k| |x - y|^{-\alpha} \\ &\leq 2 \|\nabla(e^x)\|_{L^\infty(u_n, u)} \|u_n - u\|_F |k| \text{diam}(\Omega)^{-\alpha} \\ \frac{[(e^{u_n} - e^u)k]_{C^{0,\alpha}}}{|k|} &\leq C \|u_n - u\|_F \quad \text{tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } \infty \end{aligned}$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, u)$  est continue.

Reste à montrer que  $\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u)$  est continue.

Pour cela montrons que si  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  dans  $E$  et si  $u_n \rightarrow u$  dans  $F$  alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f(\lambda_n, u_n)}{\partial u_n} - \frac{\partial f(\lambda, u)}{\partial u} \right\|_{\mathcal{L}(F,G)} &= \|(-\Delta - \lambda_n e^{u_n}) - (-\Delta - \lambda e^u)\|_{\mathcal{L}(F,G)} \rightarrow 0 \\ \left\| \frac{\partial f(\lambda_n, u_n)}{\partial u_n} - \frac{\partial f(\lambda, u)}{\partial u} \right\|_{\mathcal{L}(F,G)} &= \sup_{h \neq 0} \frac{\|(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h\|_G}{\|h\|_F} \end{aligned}$$

Or

$$\|(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h\|_G = \|(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h\|_{C^0} + [(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}}$$

**Montrons d'abord que  $\|(\lambda_n e^{u_n} - \lambda e^u)h\|_{C^0} \rightarrow 0$**

$$\begin{aligned} |(-\Delta - \lambda_n e^{u_n})h - (-\Delta - \lambda e^u)h| &= |(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h| \\ &\leq |-(\lambda_n - \lambda)e^{u_n} - \lambda e^u| \|h\|_F \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| e^{\|u_n\|_F} \|h\|_F + |\lambda| |e^{u_n} - e^u| \|h\|_F \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| e^{\|u_n\|_F} \|h\|_F + |\lambda| \|\nabla(e^x)\|_{L^\infty(u_n, u)} \|u_n - u\|_F \|h\|_F \\ &\leq 0 \\ \implies \frac{\|(-\Delta - \lambda_n e^{u_n})h - (-\Delta - \lambda e^u)h\|_{C^0}}{\|h\|_F} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Montrons maintenant que**  $[(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} [(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}} &= \frac{|(-\lambda_n e^{u_n(x)} + \lambda e^{u(x)} - (-\lambda_n e^{u_n(y)} + \lambda e^{u(y)}))h|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \left| -\lambda_n e^{u_n(x)} + \lambda e^{u(x)} - (-\lambda_n e^{u_n(y)} + \lambda e^{u(y)}) \right| |x-y|^{-\alpha} \|h\|_F \\ &\leq |-(\lambda_n - \lambda)e^{u_n(x)} - \lambda(e^{u_n(x)} - e^{u(x)}) - (\lambda_n e^{u_n(y)} - \lambda e^{u(y)})| |x-y|^{-\alpha} \|h\|_F \\ &\leq 2(|\lambda_n - \lambda|e^{\|u_n\|_F} + 2|\lambda| \|u_n - u\|_F e^{\|u_n\|_F + \|u\|_F}) \|h\|_F |x-y|^{-\alpha} \\ \implies \frac{[(-\lambda_n e^{u_n} + \lambda e^u)h]_{C^{0,\alpha}}}{\|u\|_F} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc  $f \in C^1$

**4) Montrons que**  $f'_y(0,0) \in \text{Isom}(F, G)$

$$\begin{aligned} f'_y(\lambda, u): F &\rightarrow G \\ h &\mapsto -\Delta h \end{aligned}$$

$f'_y(\lambda, u) \in \mathcal{L}(F, G) \forall \lambda \in E, \forall u \in F$  en particulier  $f'_y(0,0) \in \mathcal{L}(F, G)$

Montrons que  $f'_y(0,0)$  est bijective i.e  $\forall k \in C^\alpha(\Omega) \exists! h \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$  tel que  $-\Delta h = k$  dans  $\Omega$  c'est équivalent à dire

$$\begin{cases} -\Delta h = k & \text{dans } \Omega \\ h = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

D'après le théorème de Shauder (vue en cours) qui dit :

Si  $k \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  alors il existe un unique  $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ . De plus

$$\|h\|_F \leq C \|k\|_G$$

Donc  $f'_y(0,0)$  est bijective.

Reste à montrer que  $(f'_y)^{-1}$  est continue. Comme  $F$  et  $G$  sont de Banach et que  $f'_y$  est bijective et continue, on a d'après le théorème d'isomorphisme de Banach  $(f'_y)^{-1}$  **est continu**. Ceci dit tous les hypothèses de théorème des fonctions implicites sont vérifiés. Par conséquent il existe

- $V$  un voisinage ouvert de  $(0,0)$  dans  $E \times F$ ,
- $W = (-\epsilon, \epsilon)$  un voisinage ouvert de  $0$ ,
- une fonction  $g : W \rightarrow F$  de classe  $C^1$  tel que on a l'équivalence suivante

$$\forall (\lambda, u) \in V, f(\lambda, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall \lambda \in W \quad u = g(\lambda)$$

i.e, Donc pour chaque  $\lambda \in W = (-\epsilon, \epsilon)$ , il existe  $u = g(\lambda) \in F$  tel que

$$f(\lambda, u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

**5) Montrons que l'EDP n'a pas de solution si**  $\lambda > \lambda_1(-\Delta; \Omega)$

D'une part rappelons tous d'abord le théorème de **principe de maximum**.

**Théorème 3.1** Soit  $\Omega$  un domaine borné et  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq \lambda e^u & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

alors  $u > 0$  dans  $\Omega$  ou soit  $u = 0$  dans  $\Omega$ .

D'autre part montrons ce résultat ;  $e^t > t \forall t \in \mathbb{R}$ .

Pour  $t < 0$  on a  $e^t > t$ ; car  $\forall t \in \mathbb{R} e^t > 0$

Pour  $t \geq 0$  on a  $e^t > t$ ; car  $g(t) = e^t - t \Rightarrow g(t) \geq 1 \forall t \in \mathbb{R}$ , en particulier  $g(t) \geq 0$ .

Résonnant par absurde.

Supposons que l'EDP admet une solution classique pour  $\lambda > \lambda_1(-\Delta; \Omega)$ . i.e il existe  $u \in C^2$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On veut montrer que  $\lambda \leq \lambda_1(-\Delta; \Omega)$

Soit  $\phi_1$  la fonction propre du Laplacien, par le théorème du cours on sait que la fonction propre du Laplacien est de signe constant.

Supposons que  $\phi_1 > 0$  et  $\lambda \leq \lambda_1$ . Multiplions l'EDP par  $\phi_1$  et intégrons sur  $\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u \phi_1 &= \int_{\Omega} \lambda e^u \phi_1 \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 &= \lambda \int_{\Omega} e^u \phi_1 && \text{Par Green et le fait que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u(-\Delta \phi_1) &= \lambda \int_{\Omega} e^u \phi_1 && \text{à nouveau Green} \\ \lambda_1 \int_{\Omega} u \phi_1 &= \lambda \int_{\Omega} e^u \phi_1 && \text{car } -\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k \text{ } k \in \{1, \dots, n\} \\ \lambda_1 \int_{\Omega} u \phi_1 &< \lambda \int_{\Omega} e^u \phi_1 && \text{car } \forall t \in \mathbb{R} e^t > t \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} (u - e^u) \phi_1 < 0 \Rightarrow \phi_1 < 0 \text{ par le principe du maximum. Absurde car on a supposé que } \phi_1 > 0.$$

Donc cela implique  $(\lambda_1 - \lambda) < 0$ , par conséquent  $(\lambda_1 < \lambda)$ . D'où le résultat.

Ainsi l'**EDP** n'a pas de solution pour  $\lambda < \lambda_1(-\Delta; \Omega)$ .

## 4 Bibliographie

- [1] Gilles Christol, Anne Cot et Charles-M, Topologie, ellipses.
- [2] Gilles Christol, Anne Cot et Charles-M, Calcul différentiel, ellipses.
- [3] Paul Donato, Calcul différentiel pour la licence, Dunod.
- [4] Henri Carton, Cours de Calcul différentiel, Hermann.
- [5] Xavier Gourdon, Analyse, Les maths en tête, ellipses