Répartition des points critiques d'un processus ou champ gaussien isotrope

Céline Delmas, Jean-Marc Azaïs

Répartition des points critiques d'un processus ou champ gaussien isotrope

Céline Delmas [1] & Jean-Marc Azaïs [2]

[1] *INRA-MIAT*
24 chemin de Borde Rouge, Auzeville, CS 52627, 31327 Castanet Tolosan
celine.delmas@inra.fr
[2] *Institut de Mathématiques de Toulouse*
Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse
jean-marc.azais@math.univ-toulouse.fr

Résumé. On étudie la répartition des points critiques d'une fonction aléatoire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ suffisamment régulière (fonction de vraisemblance par exemple). Dans une première partie nous donnons l'espérance ainsi que la proportion exacte de chaque type de points critiques d'un champ gaussien isotrope $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^N\}$ sur un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^N$. Les résultats sont obtenus sous forme de fonctions de pfaffiens de matrices antisymétriques $N \times N$ quand N est pair et $(N+1) \times (N+1)$ quand N est impair. Les calculs sont effectués dans les cas $N = 2$, $N = 3$ et $N = 4$. Dans une deuxième partie nous explorons le phénomène d'attraction, répulsion ou neutralité entre les différents points critiques de $\mathcal{X}$. Nous prouvons, pour tout champ gaussien isotrope, la répulsion entre les points critiques pour $N = 1$, la neutralité pour $N = 2$ et l'attraction pour $N > 2$. Plus généralement nous étudions la fonction de corrélation entre les points critiques d'index k et les points critiques d'index $k + i$.

Mots-clés. Champs et processus gaussiens, Formules de Kac-Rice, Matrices aléatoires, Processus ponctuels.

Abstract. We study the repartition of the critical points of a smooth random function $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ (likelihood function for example). First we give the mean number and the exact proportion of each type of critical points of an isotropic Gaussian random field $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^N\}$ on a compact subset S of $\mathbb{R}^N$. Results are given as functions of pfaffians of $N \times N$ skew matrices when N is even and $(N+1) \times (N+1)$ skew matrices when N is odd. Calculations are made for $N = 2$, $N = 3$ and $N = 4$. In a second part we explore the phenomenon of attraction, repulsion or neutrality between the various critical points of $\mathcal{X}$. We prove, for any isotropic gaussian random field $\mathcal{X}$, repulsion between critical points for $N = 1$, neutrality for $N = 2$ and attraction for $N > 2$. More generally we study the correlation function between critical points with index k and critical points with index $k + i$.

Keywords. Gaussian processes and fields, Kac-Rice formula, Point processes, Random matrices.

1 Notations, hypothèses et définitions

Soit $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ gaussien stationnaire isotrope à valeurs réelles. Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. Nous supposons que $\mathcal{X}$ est centré de variance 1. Nous notons

$$E(X(s)X(t)) = r(||s-t||^2).$$

Nous supposons que r est de classe $\mathcal{C}^4$. Ce qui est équivalent à l'existence d'un huitième moment spectral fini λ_8. Nous avons:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathrm{Var}(X(t)) = r(0) \\
\lambda_2 &:= \mathrm{Var}(X_i'(t)) = -2r'(0) \\
\lambda_4 &:= \mathrm{Var}(X_{ii}''(t)) = 12r''(0) \\
\lambda_6 &:= \mathrm{Var}(X_{iii}'''(t)) = -120r'''(0) \\
\lambda_8 &:= \mathrm{Var}(X_{iiii}^{(4)}(t)) = 1680r^{(4)}(0),
\end{aligned}$$

qui sont tous finis d'après nos hypothèses.
On suppose que la loi de $X_1'(0), X_{11}''(0), X_{111}'''(0), X_{1111}^{(4)}(0)$ est non-dégénérée.

Notons $\nabla X(t) = (X_1'(t), \dots, X_N'(t))$ le gradient de $X(t)$, et $\nabla^2 X(t) = (X_{ij}''(t), i \leq j = 1, \dots, N)$ le Hessien de $X(t)$. Notons $p_{\nabla X(t), \nabla X(s)}(x, y)$ la densité de probabilité de $(\nabla X(t), \nabla X(s))$ en (x, y).

On définit respectivement le nombre de points critiques $\mathcal{N}^c(S)$ et le nombre de points critiques d'index k, $\mathcal{N}_k^c(S)$, sur S par:

$$\mathcal{N}^c(S) = \#\{t \in S : \nabla X(t) = 0\} \tag{1}$$

$$\mathcal{N}_k^c(S) = \#\{t \in S : \nabla X(t) = 0, \mathrm{index}(\nabla^2 X(t)) = k\} \tag{2}$$

où l'index de $\nabla^2 X(t)$ signifie le nombre de valeurs propres négatives de $\nabla^2 X(t)$. On le notera $i(\nabla^2 X(t))$.

On peut montrer que la fonction de corrélation du processus ponctuel formé des points critiques de $\mathcal{X}$ est donnée par:

$$A^c(s,t) = E\Big(|\det(\nabla^2 X(s) \det(\nabla^2 X(t))| \Big/ \nabla X(s) = \nabla X(t) = 0\Big) p_{\nabla X(s), \nabla X(t)}(0,0). \tag{3}$$

De même la fonction de corrélation entre les points critiques d'index k et les points critiques d'index j est donnée par:

$$A^{k,j}(s,t) = E\Big(|\det(\nabla^2 X(s))| \mathbb{1}_{\{i(\nabla^2 X(s))=k\}} |\det(\nabla^2 X(t))| \mathbb{1}_{\{i(\nabla^2 X(t))=j\}} \tag{4}$$

$$\Big/ \nabla X(s) = \nabla X(t) = 0\Big) \times p_{\nabla X(s), \nabla X(t)}(0,0). \tag{5}$$

Comme $\mathcal{X}$ est stationnaire isotrope, $A^c(s,t)$ et $A^{k,j}(s,t)$ ne dépendent que de la norme $\rho := ||s-t||$. On les notera donc $A^c(\rho)$ et $A^{k,j}(\rho)$.

2 Résultats préliminaires

Soit G_n une matrice GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) de taille n c'est-à-dire une matrice symétrique dont tous les éléments sont des variables gaussiennes centrées indépendantes satisfaisant $E(G_{ii}^2) = 1$ et $E(G_{ij}^2) = \frac{1}{2}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous considérons:

$$\gamma_{n,p}(\lambda) := E\left(\det{}^p\left(G_n - \lambda Id_n\right)\right) \tag{6}$$

et:

$$\gamma_{n,p}^k(\lambda) := E\left(\det{}^p\left(G_n - \lambda Id_n\right) \mathbb{1}_{\{i(G_n - \lambda Id_n)=k\}}\right). \tag{7}$$

Une expression pour le calcul de (6) a été donnée par Mehta et Normand (2001) et Mehta (2004). Nous généralisons ce résultat pour obtenir une expression pour le calcul de (7). Les résultats sont obtenus sous forme de fonctions de pfaffiens de matrices antisymétriques $N \times N$ quand N est pair et $(N+1) \times (N+1)$ quand N est impair.

3 Espérance et proportion des points critiques

Sous les hypothèses données en section 1 nous obtenons:

$$E\left(\mathcal{N}_k^c(S)\right) = \frac{|S|}{(2\pi)^{N/2}\lambda_2^{N/2}}\left(\frac{2\lambda_4}{3}\right)^{N/2}(-1)^k E\left(\gamma_{N,1}^k(\lambda)\right) \tag{8}$$

$$E\left(\mathcal{N}^c(S)\right) = \frac{|S|}{(2\pi)^{N/2}\lambda_2^{N/2}}\left(\frac{2\lambda_4}{3}\right)^{N/2}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k E\left(\gamma_{N,1}^k(\lambda)\right) \tag{9}$$

où λ est une variable gaussienne centrée de variance $1/2$. Nous avons également

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k E\left(\mathcal{N}_k^c(S)\right) = 0.$$

La proportion de points critiques d'index k est donc donnée par $\dfrac{(-1)^k E\left(\gamma_{N,1}^k(\lambda)\right)}{\sum_{k=0}^{N}(-1)^k E\left(\gamma_{N,1}^k(\lambda)\right)}$.
Le calcul exact de ces quantités est effectué pour $N = 2$, $N = 3$ et $N = 4$.

Des résultats analogues sont obtenus pour l'espérance du nombre de points critiques au-dessus d'un niveau.

4 Fonction de corrélation entre les points critiques

Nous donnons dans cette section l'expression asymptotique (quand $\rho \to 0$) de la fonction de corrélation entre les différents points critiques de $\mathcal{X}$. Nous généralisons ainsi les résultats de Beliaev, Cammarota et Wigman (2017) à tous les champs gaussiens isotropes et à toutes les dimensions N.

Soit $A^c(\rho)$ la fonction de corrélation entre les points critiques. Sous les hypothèses données en section 1 nous obtenons quand $\rho \to 0$,

$$A^c(\rho) \simeq \rho^{2-N} \frac{\gamma_{N-1}}{2^3 3^{(N-1)/2} \pi^N} \left(\sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \right)^N \frac{(\lambda_2 \lambda_6 - \lambda_4^2)}{\lambda_2 \lambda_4}, \tag{10}$$

où γ_{N-1} est défini par $\gamma_{N-1} := E\left(\gamma_{N-1,2}(\lambda)\right)$ et λ est une variable gaussienne centrée de variance 1/3.

Soit $A^{k,k+1}(\rho)$ la fonction de corrélation entre les points critiques d'index k et les points critiques d'index $k+1$, $k = 0, \dots, N-1$. Sous les hypothèses données en section 1 nous obtenons quand $\rho \to 0$,

$$A^{k,k+1}(\rho) \simeq \rho^{2-N} \frac{\gamma_{N-1}^k}{2^4 3^{(N-1)/2} \pi^N} \left(\sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \right)^N \frac{(\lambda_2 \lambda_6 - \lambda_4^2)}{\lambda_2 \lambda_4}, \tag{11}$$

où γ_{N-1}^k est défini par $\gamma_{N-1}^k := E\left(\gamma_{N-1,2}^k(\lambda)\right)$ et λ est une variable gaussienne centrée de variance 1/3.

Bibliographie

Adler, R.J. (1981). *The Geometry of Random Fields*. Wiley, New York.

Adler, R.J. et Taylor, J. (2007). *Random Fields and Geometry*. Springer, New York.

Auffinger, A. et Ben Arous, G. (2013). Complexity of random smooth functions on the high-dimensional sphere. *The annals of Probability*, **41**, **6**, 4214–4247.

Azaïs, J.M. et Wschebor, M. (2009). *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Azaïs, J.M., Cierco-Ayrolles, C., Croquette, A. (1999). Bounds and asymptotic expansions for the distribution of the maximum of a smooth stationary Gaussian process. *ESAIM: Probab. Statist*, **3**, 107–129.

Beliaev, D., Cammarota, V., Wigman, I. (2017). Two Point Function for Critical Points of a Random Plane Wave. *International Mathematics Research Notices*.
doi: 10.1093/imrn/rnx197

de Bruijn, N. G. (1955). On some multiple integrals involving determinants. *J. Indian Math. Soc*, **19**, 133–151.

Mehta, M.L. (2004). *Random Matrices*. 3rd ed. Academic Press, San Diego, CA.

Mehta, M. L., Normand, J. M. (2001). Moments of the characteristic polynomial in the three ensembles of random matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34(22)**, 4627.