HAL open science

Introduction aux systèmes dynamiques

Céline Casenave

To cite this version:

Céline Casenave. Introduction aux systèmes dynamiques. Master. France. 2012, 34p. hal-03329958

HAL Id: hal-03329958

https://hal.inrae.fr/hal-03329958v1

Submitted on 31 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction aux systèmes dynamiques

Céline Casenave

Contents

1 Modèles considérés **3**

2 Points d'équilibre **4**

3 Définition de la notion de stabilité **6**

4 Critères de stabilité locale **9**
4.1 Préliminaires 10
4.2 Cas particulier des systèmes linéaires 13
4.2.1 En dimension $n = 1$ 13
4.2.2 En dimension $n > 1$ 15
4.3 Cas des systèmes non linéaires 17

5 Comportement des trajectoires dans le cas de systèmes linéaires de taille $n = 2$ **21**
5.1 Critère de stabilité 21
5.2 Classification des comportements de trajectoires 22
5.2.1 Cas où A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 23
5.2.2 Cas où A a deux valeurs propres réelles égales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 24
5.2.3 Cas où A a deux valeurs propres complexes conjuguées λ_1 et λ_2 . . 26

6 Modèle de proie prédateur de Lotka-Volterra **30**
6.1 Le modèle 30
6.2 Points d'équilibre 30
6.3 Stabilité des points d'équilibre 31
6.4 Simulation 32

1 Modèles considérés

On considère un système de la forme très générale[1]:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f(x(t),t), & \forall t \in]t_0, \infty[, \\ x(t_0) & = & x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \tag{1}$$

- t est la variable temporelle, ou autrement dit le temps;
- x est la variable d'état du système, qui dépend de t. C'est elle qui permet de décrire l'état du système auquel on s'intéresse au cours du temps. On la supposera ici à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: $\forall t$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Dans la suite, on notera x_i, $i = 1 : n$ les n composantes scalaires de x:

$$x(t) = (x_1(t),\, x_2(t),\, \ldots,\, x_n(t))^T\,; \tag{2}$$

- t_0 est l'instant initial, c'est à dire le temps à partir duquel on s'intéresse à l'évolution de $x(t)$;
- x_0 est la condition initiale, c'est à dire la valeur prise par $x(t)$ à l'instant initial t_0;
- f est la fonction du second membre de l'équation. On la supposera continue de $\mathbb{R}^n \times]t_0, \infty[$ dans $\mathbb{R}^n$. On notera dans la suite:

$$f(x,t) = (f_1(x,t),\, f_2(x,t),\, \ldots,\, f_n(x,t))^T\,. \tag{3}$$

Remarque 1 *Lorsque la fonction f ne dépend que d'une variable, c'est à dire lorsque l'on a $\dot{x} = f(x(t))$, on dit que le système est* ***autonome****. Lorsqu'il y a en plus dépendance par rapport à t, on parle de système* ***non autonome****.*

On appellera dans la suite **trajectoire solution** de (1), toute fonction $t \mapsto x(t)$ solution de (1).

On supposera que le système est bien posé, c'est à dire qu'à une condition initiale donnée x_0, il existe une et une seule trajectoire solution de (1).

L'objectif de ce cours est d'étudier l'allure des trajectoires solution de (1), pour comprendre comment le système se comporte en fonction de la valeur de la condition initiale.

Tout au long de ce document, on s'appuiera sur l'exemple concret décrit ci-dessous, que l'on analysera et que l'on simulera numériquement.

Exemple 2 ***Modèle de compétition de Lotka-Volterra****:*
On considère deux populations d'individus d'espèces distinctes, évoluant dans un milieu fermé. On note N_1 la population de l'espèce 1 et N_2 la population de l'espèce 2.

[1] $\dot{x}$ représente la dérivée de x par rapport au temps t, aussi notée $\frac{dx}{dt}$.

Un des modèles proposés pour décrire l'évolution de ces deux populations est le modèle de compétition de Lotka-Volterra qui s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{N}_1 & = & r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1+\alpha_{1,2}N_2}{K_1}\right) \\ \dot{N}_2 & = & r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2+\alpha_{2,1}N_1}{K_2}\right), \end{array}\right. \tag{4}$$

où:

- r_j *est le taux de croissance intrinsèque de la population* N_j*,*
- K_j *est la capacité d'accueil du milieu pour la population* N_j*, c'est à dire la population maximale* N_j *que le milieu peut accueillir,*
- $\alpha_{j,l}$ *traduit l'effet de la présence de la population* N_l *sur la population* N_j*.*
  Par exemple, si dans un lac on a deux espèces de poissons dont l'une est deux fois plus grosse que l'autre, on pourra alors avoir $\alpha_{1,2} \simeq 2$ *et* $\alpha_{2,1} \simeq \frac{1}{2}$*. En fait, ce n'est pas vraiment une égalité, car quand une espèce arrive dans un écosystème, elle apporte avec elle d'autres individus (prédateurs ou autres) qui prennent eux aussi de l'espace.*

Remarque 3 *Si il n'y avait que l'espèce* 1 *dans le milieu, on aurait* $-\frac{N_1}{K_1}$ *au lieu de* $-\frac{N_1+\alpha_{1,2}N_2}{K_1}$*. Le terme* $\frac{N_1}{K_1}$ *représente le pourcentage de la capacité maximale* K_1 *occupée par* N_1*. Le terme* $-\frac{\alpha_{1,2}N_2}{K_1}$ *représente le pourcentage de la capacité* K_1 *que* N_1 *ne pourra pas occuper à cause de* N_2*.*

On effectue alors le changement de variables suivant:

$$x_1 = \frac{N_1}{K_1},\ x_2 = \frac{N_2}{K_2},\ \tilde{r}_1 = r_1 K_1,\ \tilde{r}_2 = r_2 K_2,\ a = \alpha_{1,2}\frac{K_2}{K_1},\ b = \alpha_{2,1}\frac{K_1}{K_2}, \tag{5}$$

pour adimensionnaliser le système. On obtient alors:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & \tilde{r}_1 x_1 \left(1 - x_1 - a x_2\right) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x_2} & = & \tilde{r}_2 x_2 \left(1 - x_2 - b x_1\right) = f_2(x_1, x_2). \end{array}\right. \tag{6}$$

2 Points d'équilibre

Certains points de l'espace $\mathbb{R}^n$ jouent un rôle particulier pour les systèmes dynamiques: ce sont **les points d'équilibre**, dont la détermination constitue souvent la première étape de l'étude d'un système dynamique.

Définition 4 ***Point d'équilibre****:*

- ***cas non autonome****:* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *est un point d'équilibre du système* $\dot{x} = f(x,t)$ *si* $\exists t_e \geqslant t_0$ *tel que:*

$$f(\bar{x}, t) = 0,\ \forall t \geqslant t_e. \tag{7}$$

- ***cas autonome***: *$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x)$ si:*

$$f(\bar{x}) = 0. \tag{8}$$

Selon la définition donnée ci-dessus, les points d'équilibre sont des points de l'espace en lesquels la dérivée de x s'annule. En effet, soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de (1), alors:

$$x(t_e) = \bar{x} \Longrightarrow \dot{x}(t) = 0, \forall t \geqslant t_e. \tag{9}$$

Par conséquent, si une trajectoire arrive en ce point, elle y reste nécessairement.

Terminologie: les points d'équilibre sont aussi parfois appelés **points fixes** ou bien encore **points stationnaires**.

Exemple 5 *Revenons au modèle de compétition de Lotka Volterra (6). Les points d'équilibre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ de ce système vérifient:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & = & 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{r}_1 \bar{x}_1 \left(1 - \bar{x}_1 - a\bar{x}_2\right) & = & 0 \\ \tilde{r}_2 \bar{x}_2 \left(1 - \bar{x}_2 - b\bar{x}_1\right) & = & 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \bar{x}_1 = 0 \quad et \quad \bar{x}_2 = 0 \\ OU \\ \bar{x}_1 = 0 \quad et \quad \bar{x}_2 = 1 \\ OU \\ \bar{x}_1 = 1 \quad et \quad \bar{x}_2 = 0 \\ OU \\ 1 - \bar{x}_1 - a\bar{x}_2 = 0 \quad et \quad 1 - \bar{x}_2 - b\bar{x}_1 = 0 \end{array} \right. \tag{11}$$

On a donc 4 points d'équilibre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

$$E_0 = (0,0),\ E_1 = (1,0),\ E_2 = (0,1), \tag{12}$$

et $E_3 = (x_1^*, x_2^*)$ avec (x_1^*, x_2^*) qui vérifient:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 - x_1^* - ax_2^* & = & 0 \\ 1 - x_2^* - bx_1^* & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = 1 - ax_2^* \\ 1 - x_2^* - b(1 - ax_2^*) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{1-a}{1-ab} \\ x_2^* = \frac{1-b}{1-ab} \end{array} \right. \quad si\ ab \neq 0. \tag{13}$$

On a donc, si $ab \neq 0$:

$$E_3 = \left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab} \right). \tag{14}$$

Remarque 6 *Pour que le point d'équilibre E_3 ait une signification physique, il faut en plus que $x_1^* \geqslant 0$ et $x_2^* \geqslant 0$, ce qui impose des conditions sur les paramètres a et b. Il faut en effet que $1 - ab$, $1 - a$ et $1 - b$ soient de même signe.*

Une fois les points d'équilibre déterminés, plusieurs questions se posent: Y-a-t-il des trajectoires solution qui mènent à ces points d'équilibre? Comment se comportent les trajectoires au voisinage des points d'équilibre?

3 Définition de la notion de stabilité

Lorsqu'on souhaite étudier le comportement des trajectoires solution autour d'un point d'équilibre, on s'intéresse d'abord à **la stabilité du point d'équilibre**, qui, comme nous le verrons dans la suite, est une notion assez intuitive.

Le modèle mathématique du système que l'on étudie nous dit que, si une trajectoire passe par un point d'équilibre, elle y reste, puisque la vitesse $\dot{x}$ est alors nulle. Dans la réalité cependant, il y a toujours des petites perturbations qui font que le système ne reste pas exactement en ce point. Prenons l'exemple d'un pendule: on imagine que l'on accroche une masse au bout d'une tige, supposée rigide, et que l'on accroche l'autre bout de la tige à un clou planté dans un mur: on note θ l'angle que fait la tige avec la verticale (voir figure 1). Un point d'équilibre évident de ce système est atteint lorsque la tige est à la verticale, la masse étant en bas: cela correspond au cas où l'angle θ vaut 0, et lorsque la vitesse de rotation du pendule est nulle (i.e. $\dot{\theta} = 0$). Imaginons que le pendule soit à cet état d'équilibre. Un peu de vent vient perturber le système, qui s'écarte alors légèrement de ce point d'équilibre (i.e. $\theta = \epsilon_1$ et $\dot{\theta} = \epsilon_2$). La question est alors de savoir si le système va revenir ou non à ce point d'équilibre. Dans le cas du pendule, et de ce point d'équilibre, la réponse est intuitive: oui, le système va revenir à cet état d'équilibre, en oscillant, les oscillations s'amortissant au fil du temps. Dans ce cas, on dit que le point d'équilibre est **stable**.
Le pendule possède cependant un second point d'équilibre auquel on ne pense pas toujours: il correspond au cas où la vitesse de rotation est nulle: $\dot{\theta} = 0$, et où $\theta = 180°$, c'est à dire lorsque la tige est à la verticale, mais la masse est "au dessus" du clou. En effet, à ce point là, si il n'y a aucune perturbation, la dérivée $\dot{x}$ est aussi nulle: les forces (poids et tension de la tige) se compensent parfaitement. Cependant, à la moindre perturbation (coup de vent par exemple), les forces ne s'équilibreront plus et le poids de la masse entrainera le système et l'éloignera de ce point d'équilibre, dont on dit qu'il est **instable**.

Une définition mathématique de cette notion est donnée en suivant: c'est la stabilité au sens de Lyapunov. On se placera ici dans le cas d'un système autonome.

Définition 7 ***Point d'équilibre stable (au sens de Lyapunov)***

1. *Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système:*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f(x(t)), & \forall t \in]t_0, \infty[, \\ x(t_0) & = & x_0, & t_0 \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \tag{15}$$

*est dit **stable** si:*

- $f(\bar{x}) = 0$
- *et si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t, x_0) - \bar{x}|| \leqslant \varepsilon, \forall t \geqslant t_0, \tag{16}$$

où $x(t, x_0)$ est la solution du système (15) à l'instant t.

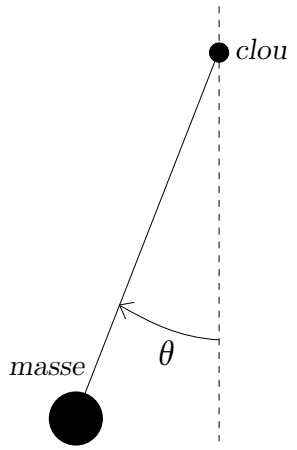


Figure 1: Schéma d'un pendule.

2. *Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (15) est dit* ***instable*** *si il n'est pas stable.*

Remarque 8 *La définition d'un point d'équilibre instable peut également être donnée en utilisant des quantitificateurs, comme pour le point d'équilibre stable, en prenant la contraposée. On a alors:*
Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (15) est dit ***instable*** *si:*

- $f(\bar{x}) = 0$
- *et si* $\exists \varepsilon > 0$ *tel que,* $\forall \delta > 0$*:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow \exists T \geqslant t_0 \text{ tel que } ||x(t, x_0) - \bar{x}|| > \varepsilon, \forall t > T, \tag{17}$$

où $x(t, x_0)$ est la solution du système (15) à l'instant t.

D'après la définition précédente, lorsqu'un point d'équilibre $\bar{x}$ d'un système est stable au sens de Lyapunov, on est assuré que si l'on est suffisamment proche de ce point d'équilibre, on va le rester. Cependant, rien ne nous dit que la trajectoire solution va tendre ou pas vers ce point d'équilibre: elle pourrait très bien rester proche sans jamais converger vers la valeur. Elle pourrait par exemple osciller.

Pour compléter la définition donnée précédemment, on introduit maintenant la notion d'**équilibre asymptotiquement stable**.

Définition 9 ***Point d'équilibre asymptotiquement stable (au sens de Lyapunov)***

Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (15) est dit ***asymptotiquement stable*** *(A.S.) si:*

- *il est stable,*

- *et si* $\exists \delta > 0$ *tel que:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} ||x(t) - \bar{x}|| = 0. \tag{18}$$

On appelle ***bassin d'attraction*** *du point d'équilibre* $\bar{x}$ *l'ensemble des valeurs de* x_0 *à partir desquelles la trajectoire solution va converger vers le point d'équilibre* $\bar{x}$*.*

Avec cette notion de stabilité asymptotique, on est maintenant assuré que, au moins dans un voisinage du point d'équilibre, les trajectoires vont converger vers le point d'équilibre. On peut maintenant se demander à quelle vitesse aura lieu la convergence.

Pour répondre à cette question, on introduit la notion de **stabilité exponentielle**.

Définition 10 ***Point d'équilibre exponentiellement stable (au sens de Lyapunov)***

Un point d'équilibre $\bar{x}$ *du système (15) est dit* ***exponentiellement stable*** *(E.S.) si:*

- *il est stable,*
- *et si* $\exists\, \delta,\, \alpha,\, \beta > 0$ *tels que:*

$$||x_0 - \bar{x}|| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t) - \bar{x}|| \leqslant \alpha ||x_0 - \bar{x}|| e^{-\beta t},\ \forall t \geqslant t_0. \tag{19}$$

Remarque 11
- *un point d'équilibre E.S. est nécessairement A.S.*
- *le contraire est faux: un point d'équilibre A.S. n'est pas nécessairement E.S.*

La notion de stabilité exponentielle permet de caractériser la vitesse de convergence. Au voisinage d'un point d'équilibre E.S., on sait non seulement que les trajectoires vont converger vers l'équilibre, mais en plus qu'elle vont le faire à une vitesse exponentielle.

Les trois définitions de stabilité données jusqu'ici (stabilité, stabilité asymptotique, stabilité exponentielle) sont des définitions "locales": c'est à dire qu'elles ne permettent de définir le comportement des trajectoires que dans un voisinage du point d'équilibre. Une définition de **stabilité globale** est donnée ci-dessous:

Définition 12 ***Point d'équilibre globalement stable (au sens de Lyapunov)***

Un point d'équilibre $\bar{x}$ *du système (15) est dit* ***globalement asymptotiquement stable*** *(G.A.S.) (respectivement* ***globalement exponentiellement stable*** *(G.E.S.)) si il est A.S. (respectivement E.S.) quelle que soit la condition initiale* x_0*. On dit aussi qu'il est A.S. (respectivement E.S.) au sens large.*

Exemple 13 *Nous allons maintenant simuler numériquement le modèle de compétition de Lotka-Volterra (6) pour différentes valeurs de la condition initiale et tracer l'allure des trajectoires. Les trajectoires solution obtenues peuvent être tracées de différentes manières. On peut d'abord visualiser l'évolution de la population* x_1 *et celle de la population* x_2 *au cours du temps. Pour une condition initiale* (x_1^0, x_2^0) *donnée, on obtient*

alors un tracé dont un exemple est donné en figure 2.
Une autre méthode consiste à tracer les trajectoires dans ***le plan de phase****, qui, dans notre cas, est le plan x_1 en fonction de x_2 (ou x_2 en fonction de x_1). On visualise donc l'évolution de la population x_1 en fonction de la population x_2. Autrement dit, pour une condition initiale donnée (x_1^0, x_2^0), et pour tout temps t, on regarde le point $(x_1(t), x_2(t))$ et son évolution au cours du temps. L'ensemble des tracés des trajectoires solution issues de différentes conditions initiales constitue ce que l'on appelle un* ***portrait de phase****. Le portrait de phase du modèle proie-prédateur est donné en figure 3.*

Quelle que soit la représentation choisie (évolution temporelle ou dans le plan de phase), on constate que les trajectoires solutions convergent toutes vers le point d'équilibre E_3 (égal sur la simulation numérique à $(0.68, 0.45)$), même si l'on part de conditions initiales proches des autres points d'équilibre. D'après les simulations, le point d'équilibre E_3 semble donc être stable, et les autres points d'équilibre instables.

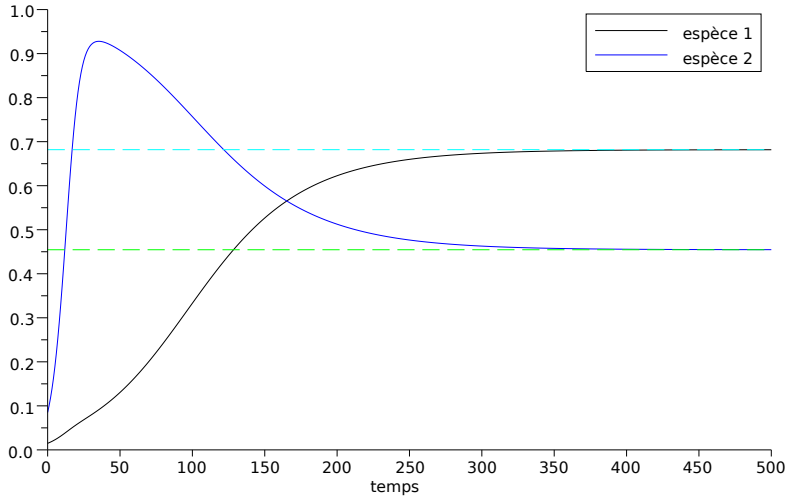


Figure 2: Simulation du modèle de compétition (6) de Lotka-Volterra: représentation de l'évolution des populations de proies et de prédateurs au cours du temps. Avec les paramètres choisis pour la simulation, on a $E_3 \sim (0.68, 0.45)$.

La question que l'on se pose maintenant est de savoir comment on vérifie en pratique qu'un point d'équilibre est stable ou non? et si il est possible, par l'étude de la stabilité des points d'équilibre, de prévoir le comportement qualitatif des trajectoires ?

4 Critères de stabilité locale

Dans ce paragraphe, on va chercher des critères pratiques simples pour vérifier si un point d'équilibre est stable ou pas.

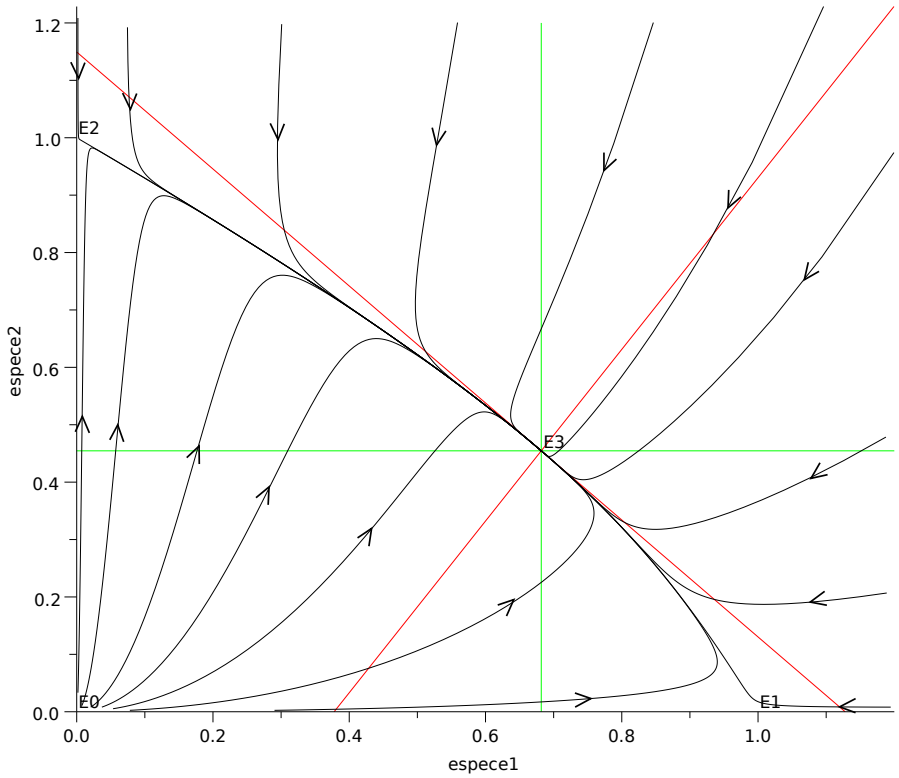


Figure 3: Simulation du modèle de compétition (6) de Lotka-Volterra: visualisation des trajectoires solution dans le plan de phase.

4.1 Préliminaires

Avant de donner les critères pratiques de stabilité, certains rappels d'algèbre linéaire sont nécessaires. La définition de plusieurs quantités relatives aux matrices sont données ci-après.

Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dans la suite, on notera I_k la matrice identité de taille k, c'est à dire la matrice diagonale de taille $k \times k$ définie par:

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Définition 14 ***Déterminant d'une matrice:***
Soit $a_{k,l}$ le coefficient de la matrice A situé sur la $k^{ème}$ ligne et la $l^{ème}$ colonne de A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

On note $A_{k,l}$ la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en enlevant à A sa $k^{ème}$ ligne et sa $l^{ème}$ colonne:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Le déterminant de A, noté $\det(A)$, est la quantité définie par la récurrence suivante:

- *si $n = 1$, $A = [a_{1,1}]$ et :*
$$\det(A) = a_{1,1}; \tag{23}$$
- *si $n > 1$:*
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}), \tag{24}$$
quelle que soit la valeur de l choisie entre 1 et n.

Remarque 15 *D'après la définition précédente, le déterminant d'une matrice carrée A de taille 2×2 de la forme:*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \tag{25}$$

est donné par:

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma. \tag{26}$$

Définition 16 ***Polynôme caractéristique de*** A
La fonction:

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n) \tag{27}$$

est un polynôme de degré n en λ appelé ***polynôme caractéristique*** *de A et noté $\mathcal{P}_A$.*

Définition 17 ***Valeurs propres et spectre de*** A

- *On appelle* ***valeur propre*** *de la matrice A toute valeur λ pour laquelle il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que:*
$$Av = \lambda v. \tag{28}$$
- *L'ensemble des valeurs propres de la matrice A est appelé* ***spectre*** *de A et est noté $Spec(A)$.*

Remarque 18 *Les valeurs propres d'une matrice appartiennent à l'espace des complexes $\mathbb{C}$: elles peuvent donc être complexes, c'est à dire de la forme:*

$$\lambda_j = u_j + \mathrm{i}v_j, \tag{29}$$

où u_j est la partie réelle de λ_j, qui est notée $\Re(\lambda_j)$, v_j est la partie imaginaire de λ_j, qui est notée $\Im(\lambda_j)$, et i est le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Lorsque λ_j est réelle, cela correspond simplement au cas particulier où $\Re(\lambda_j) = u_j = 0$.

Remarque 19 ***Valeurs propres de matrices particulières***

- ***Matrice diagonale****: Soit A une matrice carrée diagonale de taille $n \times n$, c'est à dire une matrice de la forme (21) avec $a_{k,l} = 0$, $\forall k \neq l$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0) & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

  Les valeurs propres de A sont les valeurs des coefficients de la matrice situés sur la diagonale:

$$Spec(A) = \{a_{k,k},\, k = 1 : n\}. \tag{31}$$

- ***Matrice triangulaire****: Soit A une matrice carrée triangulaire inférieure (respectivement supérieure) de taille $n \times n$, c'est à dire une matrice de la forme (21) avec $a_{k,l} = 0$, $\forall l > k$ (respectivement avec $a_{k,l} = 0$, $\forall l < k$):*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \left(\textit{respectivement } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0) & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \right). \tag{32}$$

  Les valeurs propres de A sont les valeurs des coefficients de la matrice situés sur la diagonale:

$$Spec(A) = \{a_{k,k},\, k = 1 : n\}. \tag{33}$$

Proposition 20 *Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Plus précisément, on dit que $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A de multiplicité m si:*

$$\det(A - \lambda I_n) = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)^m P(\lambda), \tag{34}$$

avec P polynôme de degré $n - m$ tel que:

$$P(\bar{\lambda}) \neq 0. \tag{35}$$

Définition 21 ***Matrice inversible***

Un matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite inversible, si il existe une matrice B de taille $n \times n$ telle que:

$$AB = BA = I_n. \tag{36}$$

La matrice B est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Proposition 22 *Un matrice carrée A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul:*

$$\det(A) \neq 0. \tag{37}$$

Définition 23 ***Matrice diagonalisable***

Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite ***diagonalisable*** *si il existe une matrice carrée $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, d'inverse P^{-1}, et une matrice $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonale, telles que:*

$$A = PDP^{-1}. \tag{38}$$

P est appelée la ***matrice de passage****.*

Proposition 24 *Si A est diagonalisable, alors:*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{39}$$

où λ_i, $i = 1 : n$, sont les valeurs propres de A.
Si λ_j est une valeur propre de A de multiplicité m_j, alors:

$$\underbrace{\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+m_j-1}}_{m_j \text{ valeurs propres égales}}. \tag{40}$$

4.2 Cas particulier des systèmes linéaires

Les rappels étant faits, on s'intéresse maintenant au cas particulier des systèmes linéaires, pour lesquels on va exhiber une condition pratique simple permettant de vérifier la stabilité des points d'équilibre.

Définition 25 ***Systèmes linéaires***
Un système de la forme (15) est dit ***linéaire****, si f est de la forme:*

$$f(x) = Ax, \tag{41}$$

où A est une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

4.2.1 En dimension $n = 1$

On s'intéresse dans un premier temps au système linéaire scalaire (c'est à dire de dimension $n = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{42}$$

où[2] $a \in \mathbb{R}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

[2] $\mathbb{R}^*$ représente l'ensemble des réels non nuls.

Un tel système admet un seul point d'équilibre $\bar{x} = 0$.
La solution de l'équation (42) est donnée par:

$$x(t) = x_0 e^{at}, \forall t \geqslant 0. \tag{43}$$

Preuve. $\forall t \geqslant 0$, on a $\dot{x} - ax = 0$. En multipliant l'équation par e^{-at}, on obtient alors, $\forall t \geqslant 0$:

$$e^{-at}\dot{x} - ae^{-at}x = 0 \Longleftrightarrow e^{-at}\frac{dx}{dt} + \frac{d(e^{-at})}{dt}x = 0 \Longleftrightarrow \frac{d(e^{-at}x)}{dt} = 0$$

En intégrant cette équation entre 0 et t, $\forall t \geqslant 0$, on obtient alors:

$$e^{-at}x(t) - e^{-a\times 0}x(0) = 0 \Longleftrightarrow x(t) = x_0 e^{at}.$$

□

Etudions la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = 0$.

Stabilité simple au sens de Lyapunov:
Soit δ tel que $|x_0 - \bar{x}| \leqslant \delta$, on a:

$$|x_0 - \bar{x}| = |x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at} \leqslant \delta e^{at}. \tag{44}$$

Deux cas se distinguent alors selon que a est de signe positif ou négatif. En effet, si $a > 0$ alors, plus t sera grand, plus e^{at} sera grand. Si au contraire $a < 0$, plus t sera grand, plus e^{at} sera proche de 0. On a donc:

- si $a < 0$:

$$\forall t \geqslant 0,\ |x_0 - \bar{x}| = |x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at} \leqslant \delta e^{at} \leqslant \delta. \tag{45}$$

  On a donc:

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta = \varepsilon \text{ tel que } |x_0 - \bar{x}| \leqslant \delta \Rightarrow |x(t, x_0) - \bar{x}| \leqslant \varepsilon. \tag{46}$$

  D'après la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est alors stable.

- si $a < 0$, alors:

$$\lim_{t\to\infty} |x_0|e^{at} = \infty, \tag{47}$$

  d'où:

$$\forall \varepsilon,\ \forall x_0 \neq 0,\ \exists T > t_0 \text{ tel que } |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0|e^{at} > \varepsilon,\ \forall t > T. \tag{48}$$

  D'après la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est alors instable.

On montre donc que le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (42) est stable si et seulement si $a < 0$. Essayons d'affiner l'étude en nous intéressant à la stabilité asymptotique et exponentielle.

Stabilité asymptotique:
On se place dans le cas où $a < 0$. On a:

$$\forall x_0 \neq 0, \lim_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}| = \lim_{t\to\infty} |x_0 e^{at}| = 0 = \bar{x}. \tag{49}$$

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est donc asymptotiquement stable.

Stabilité exponentielle:
On se place toujours dans le cas où $a < 0$. On a:

$$\forall x_0 \neq 0, |x(t, x_0) - \bar{x}| = |x_0| e^{at}, \forall t \geqslant t_0. \tag{50}$$

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est donc exponentiellement stable.

Stabilité globale
On se place toujours dans le cas où $a < 0$. Toutes les stabilités ont été vérifiées indépendamment de la valeur de la condition initiale. Par conséquent, le point d'équilibre $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement et exponentiellement stable.

Conclusion 26 *Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (42) est G.A.S et E.A.S si $a < 0$.*

Plus généralement, le coefficient a peut être complexe. Dans ce cas, le même raisonnement que précédemment peut être effectué, à la seule différence que la valeur absolue d'un nombre réel est "remplacée" par le module d'un nombre complexe, qui est défini par:

$$|u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}. \tag{51}$$

On a alors en particulier $|e^{at}| = e^{\Re(a)t}$, et la condition de stabilité ne porte alors plus sur le signe de a mais sur le signe de la partie réelle de a (c'est à dire de $\Re(a)$). On a donc:

Proposition 27 *Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (42) avec $a \in \mathbb{C}$ est G.A.S et E.A.S si $\Re(a) < 0$.*

Remarque 28 *Ce résultat est une généralisation au cas où a est complexe, et reste valable pour a réel puisque, si a réel, alors $\Re(a) = a$.*

4.2.2 En dimension $n > 1$

On s'intéresse maintenant au cas plus général des systèmes linéaires de taille n, c'est à dire des systèmes de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{52}$$

où A est une matrice carrée de taille $n \times n$ et[3] $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Supposons que la matrice A est inversible et diagonalisable.

Remarque 29 *Si A est à la fois inversible et diagonalisable, alors elle n'admet aucune valeur propre nulle.*

Les points d'équilibre du système (52) sont les solutions de l'équation $Ax = 0$. Comme A est inversible, la seule solution $\bar{x}$ de cette équation est:

$$\bar{x} = 0_n. \tag{53}$$

Etudions la stabilité de ce point d'équilibre. La matrice A est diagonalisable; il existe donc une matrice de passage P inversible telle que:

$$A = PDP^{-1}, \tag{54}$$

avec D matrice diagonale définie par (39).

On a donc:

$$\dot{x} = Ax = PDP^{-1}x. \tag{55}$$

En multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient:

$$P^{-1}\dot{x} = DP^{-1}x. \tag{56}$$

Notons alors $y = P^{-1}x$. On a:

$$\dot{y} = Dy \quad \Leftrightarrow \quad \dot{y}_i = \lambda_i y_i,\ \forall i = 1:n, \tag{57}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t},\ \forall i = 1:n. \tag{58}$$

Par conséquent:

$$\forall i = 1:n,\ \lim_{t\to\infty} |y_i(t)| = \lim_{t\to\infty} |y_i(0)|e^{\Re(\lambda_i)t} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Re(\lambda_i) < 0 \\ \infty & \text{si } \Re(\lambda_i) > 0, \end{cases} \tag{59}$$

d'où, en notant $p_{i,k}$ le coefficient situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ème}}$ colonne de P:

$$\forall i = 1:n,\ \lim_{t\to\infty} |x_i(t)| = \lim_{t\to\infty} |(Py)_i(t)| \tag{60}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} y_k(t) \right| = 0 \text{ si } \Re(\lambda_k) < 0,\ \forall k = 1:n. \tag{61}$$

Proposition 30 *Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système linéaire (52) est G.A.S. et E.A.S. si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.*

[3] 0_n désigne le vecteur nul, c'est à dire le vecteur $0_n = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ fois}}^T$.

Remarque 31 *Considérons le système linéaire plus général suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(x - x_e), \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{62}$$

où x_e est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ constant. L'unique point d'équilibre $\bar{x}$ de ce système est égal à x_e. Si on effectue le changement de variable $y = x - x_e$, on obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y} & = & Ay, \\ y(0) & = & x_0 - x_e, \end{array} \right. \tag{63}$$

et on se ramène au système précédent (52).

4.3 Cas des systèmes non linéaires

Plaçons nous maintenant dans le cas plus général des systèmes non linéaires autonomes de la forme (15). Pour étudier la stabilité de tels systèmes, on va se ramener au cas linéaire, par linéarisation autour d'un point d'équilibre du modèle considéré.

Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de (15), et B une boule ouverte[4] de $\mathbb{R}^n$ centrée en $\bar{x}$. On suppose $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{B}$, c'est à dire dérivable par rapport à x_i pour tout $i = 1 : n$, et de dérivées partielles continues. La formule de Taylor à l'ordre 1 nous donne alors, pour tout h tel que $\bar{x} + h \in B$:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})h + R(h), \tag{64}$$

où $J_f(\bar{x})$ est la matrice jacobienne de f en $\bar{x}$, c'est à dire la matrice:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_1(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(\bar{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_n(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{65}$$

et $R(h)$ est un "reste", qui est négligeable devant $\|h\|$, ce que l'on note également $R(h) = o(\|h\|)$, c'est à dire:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0. \tag{66}$$

Comme $f(\bar{x}) = 0$, et si l'on considère un h suffisamment petit, on obtient alors l'approximation linéaire du système, aussi appelée **linéarisé** du système, donnée par:

$$\dot{h} \quad = \quad J_f(\bar{x})h. \tag{67}$$

Définition 32 ***Point d'équilibre hyperbolique***
*Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système (15) est dit **hyperbolique** si $J_f(\bar{x})$ n'admet aucune valeur propre à partie réelle nulle (i.e. telle que $\Re(\lambda_j) = 0$).*
*Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit **non hyperbolique**.*

[4] La boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée en $\bar{x}$ et de rayon r est l'ensemble, noté B, défini par: $B := \{y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||y - \bar{x}|| < r\}$ où $||.||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

D'après le **théorème de Hartman-Grobman** (non mentionné ici), on sait que, si le point d'équilibre considéré est hyperbolique, les trajectoires solutions du système (15) et celles de son linéarisé sont qualitativement équivalentes autour du point d'équilibre, c'est à dire qu'elles ont la même allure. Etudier le comportement des trajectoires solution du linéarisé autour de son point d'équilibre $\bar{h} = 0$ permet donc d'étudier le comportement des trajectoires solution de (15) autour du point d'équilibre $\bar{x}$. Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{x}$ de (15), il "suffit" donc d'étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{h} = 0$ de son linéarisé. C'est ce qu'explique le théorème suivant:

Theorem 33 ***Théorème de Lyapunov*** *(1ère méthode de Lyapunov)*
Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre hyperbolique de (15).

- *Si toutes les valeurs propres de $J_f(\bar{x})$ sont à partie réelle strictement positive (i.e. $\Re(\lambda_j) < 0, \forall j$), alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est* ***localement exponentiellement stable****.*
- *Si $J_f(\bar{x})$ possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est* ***instable****.*

Ce théorème ne permet pas de conclure dans le cas de point d'équilibre non hyperbolique. Dans ce cas en effet, l'approximation obtenue par linéarisation n'est plus bonne, le reste R n'étant plus négligeable. Pour obtenir une bonne approximation, il faudrait développer la formule de Taylor à l'ordre 2 et exprimer le terme en h^2. Cependant, l'approximation obtenue ne serait plus linéaire, et les outils précédents ne pourraient donc pas être utilisés.
Dans le cas de points d'équilibre non hyperboliques, on utilisera donc la 2ème **méthode de Lyapunov** (non mentionnée ici), basée sur la généralisation de la notion d'énergie.

Exemple 34 *Utilisons maintenant les critères de stabilité sur l'exemple du modèle de compétition de Lotka-Volterra (6). Ce modèle est non linéaire, et posséde 4 points d'équilibre:*

$$E_0 = (0,0),\ E_1 = (1,0),\ E_2 = (0,1),\ E_3 = \left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab}\right). \tag{68}$$

La jacobienne du second membre f du modèle s'écrit:

$$J_f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1\,(1-2x_1-ax_2) & -a\tilde{r}_1 x_1 \\ -b\tilde{r}_2 x_2 & \tilde{r}_2\,(1-2x_2-bx_1) \end{bmatrix}. \tag{69}$$

On a donc:

- $J_f(E_0) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{r}_2 \end{bmatrix}$, *d'où:*

$$Spec\,(J_f(E_0)) = \{\tilde{r}_1,\ \tilde{r}_2\}\,. \tag{70}$$

Les deux valeurs propres de la jacobienne sont donc strictement positives. D'après la 1ère méthode de Lyapunov:

$$E_0 \text{ est donc instable.} \tag{71}$$

- $J_f(E_1) = \begin{bmatrix} -\tilde{r}_1 & -a\tilde{r}_1 \\ 0 & \tilde{r}_2(1-b) \end{bmatrix}$, *d'où:*

$$Spec\,(J_f(E_1)) = \{-\tilde{r}_1,\, \tilde{r}_2(1-b)\}\,. \tag{72}$$

D'après la 1ère méthode de Lyapunov, on a donc:

$$E_1 \text{ est stable si et seulement si } b > 1. \tag{73}$$

- $J_f(E_2) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1(1-a) & 0 \\ -b\tilde{r}_2 & -\tilde{r}_2 \end{bmatrix}$, *d'où:*

$$Spec\,(J_f(E_2)) = \{\tilde{r}_1(1-a),\, -\tilde{r}_2\}\,. \tag{74}$$

D'après la 1ère méthode de Lyapunov, on a donc:

$$E_2 \text{ est stable si et seulement si } a > 1. \tag{75}$$

- $J_f(E_3) = \begin{bmatrix} -\tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab} & -a\tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab} \\ -b\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} & -\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} \end{bmatrix}$. *Le calcul des valeurs propres de $J_f(E_3)$ n'est pas immédiat dans ce cas, car la matrice n'a pas une forme particulière (diagonale ou triangulaire). Il nous faut donc calculer les racines du polynôme caractéristique de $J_f(E_3)$, c'est à dire du polynôme:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{J_f(E_3)}(\lambda) &= \det\,(J_f(E_3) - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab} - \lambda & -a\tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab} \\ -b\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} & -\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} - \lambda \end{bmatrix} \\
&= \left(-\tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab} - \lambda\right)\left(-\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} - \lambda\right) - ab\tilde{r}_1\tilde{r}_2\frac{(1-b)(1-a)}{(1-ab)^2} \\
&= \lambda^2 + \left(\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} + \tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab}\right)\lambda + \tilde{r}_1\tilde{r}_2\frac{(1-b)(1-a)}{(1-ab)}.
\end{aligned}$$

Pour cela, on calcule dans un premier temps le discriminant du polynôme donné par[5]*:*

$$\Delta = \left(\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} + \tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab}\right)^2 - 4\tilde{r}_1\tilde{r}_2\frac{(1-b)(1-a)}{(1-ab)} = \left(\tilde{r}_2\frac{1-b}{1-ab} - \tilde{r}_1\frac{1-a}{1-ab}\right)^2.$$

[5] Le discriminant du polynôme $c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ est la quantité définie par: $\Delta = c_1^2 - 4c_0c_2$.

Comme $\Delta \geqslant 0$, le polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{J_f(E_3)}$ admet 2 valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 données par[6]*:*

$$\lambda_1 = \frac{-\tilde{r}_2 \frac{1-b}{1-ab} - \tilde{r}_1 \frac{1-a}{1-ab} - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{76}$$

$$\text{et } \lambda_2 = \frac{-\tilde{r}_2 \frac{1-b}{1-ab} - \tilde{r}_1 \frac{1-a}{1-ab} + \sqrt{\Delta}}{2}. \tag{77}$$

Le point d'équilibre est stable si et seulement si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. Or, si $1 - ab$, $1 - a$ et $1 - b$ sont de même signe, alors $\lambda_1 < 0$. Etudions maintenant le signe de λ_2. On a:

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < \tilde{r}_2 \frac{1-b}{1-ab} + \tilde{r}_1 \frac{1-a}{1-ab} \tag{78}$$

[6]Lorsque le discriminant Δ du polynôme $c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ est positif ou nul, le polynôme admet deux racines réelles (distinctes ou égales selon que $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$) données par $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

5 Comportement des trajectoires dans le cas de systèmes linéaires de taille $n = 2$

On considère un système linéaire de taille $n = 2$ de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(x - x_e), \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{79}$$

où x_e est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et A est une matrice carrée, de taille 2×2 et à coefficients réels, c'est à dire de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{80}$$

avec α, β, γ et δ dans $\mathbb{R}$. On suppose dans la suite que A possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2.

5.1 Critère de stabilité

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = x_e$ de (52), il faut pouvoir conclure sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de A. Cependant, il n'est pas nécessaire de connaitre explicitement ces valeurs propres. Un critère est proposé ci-dessous, permettant de conclure quant à la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = x_e$ sans calcul explicite des valeurs propres de A.

Proposition 35 *Le point d'équilibre $\bar{x} = x_e$ de (80) est stable si et seulement si:*

$$\det(A) > 0 \text{ et } Tr(A) < 0, \tag{81}$$

où $Tr(A)$ est la trace de la matrice A, c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux.

Preuve. Dans le cas d'une matrice de la forme de A, on a:

$$Tr(A) = \alpha + \delta. \tag{82}$$

Le déterminant d'une matrice de la forme de A est quant à lui défini par:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta. \tag{83}$$

Le polynôme caractéristique de A peut lui aussi se calculer d'après cette formule. On a:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \gamma\beta \tag{84}$$

$$= \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \gamma\beta = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A). \tag{85}$$

Les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Celui-ci s'écrit donc sous la forme:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = K(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = K\lambda^2 - K(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + K\lambda_1\lambda_2. \tag{86}$$

Les polynômes (85) et (86) devant être égaux, on obtient, par identification des coefficients:

$$\begin{aligned} K &= 1, && (87)\\ Tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2, && (88)\\ \det(A) &= \lambda_1\lambda_2. && (89) \end{aligned}$$

Les coefficients de la matrice A étant réels, on sait que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont soit toutes les deux réelles, soit complexes conjuguées, c'est à dire de la forme:

$$\lambda_1 = u + iv \text{ et } \lambda_2 = u - iv. \tag{90}$$

- Cas où λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:
  On a alors:

  $$\bar{x} \text{ stable} \Leftrightarrow \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \tag{91}$$

  et

  $$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ de même signe, et } \lambda_1 + \lambda_2 < 0 && (92)\\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \bar{x} \text{ stable.} && (93) \end{aligned}$$

  D'où l'équivalence:

  $$\bar{x} \text{ stable} \Leftrightarrow \det(A) > 0 \text{ et } Tr(A) < 0. \tag{94}$$

- Cas où $\lambda_1 = u + iv$ et $\lambda_2 = u - iv$:
  On a alors $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = u^2 + v^2 > 0$ quel que soit le signe de u et de v, et:

  $$\bar{x} \text{ stable} \Leftrightarrow u < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 2u < 0 \Leftrightarrow Tr(A) < 0. \tag{95}$$

□

Dans le cas où $n = 2$, pour vérifier si l'état d'équilibre $\bar{x} = x_e$ de (80) est bien stable, il suffit donc de calculer le déterminant et la trace de la matrice A. Le calcul des valeurs propres de A n'est pas nécessaire pour cela.

5.2 Classification des comportements de trajectoires

On va maintenant s'intéresser au comportement qualitatif des trajectoires solutions de (80).

On suppose que le point d'équilibre $\bar{x} = x_e$ de (80) est hyperbolique.

On suppose aussi qu'il existe une matrice carrée P de taille $n \times n$ inversible telle que:

$$A = PBP^{-1}, \tag{96}$$

où B est une matrice carrée de taille 2×2 de forme particulière (diagonale, triangulaire, etc). Cette forme particulière sera précisée dans la suite.
On dit alors que les matrices A et B sont **semblables**. En particulier, on peut montrer qu'elles ont mêmes valeurs propres.

On a alors:

$$\dot{x} = A(x - x_e) \Longleftrightarrow \dot{x} = PBP^{-1}(x - x_e) \Longleftrightarrow P^{-1}\dot{x} = BP^{-1}(x - x_e). \tag{97}$$

En posant

$$z = P^{-1}(x - x_e), \tag{98}$$

on a (puisque $\dot{x_e} = 0$):

$$\dot{z} = P^{-1}\dot{x} = BP^{-1}(x - x_e) \Longleftrightarrow \dot{z} = Bz. \tag{99}$$

Pour étudier le système en x, on va donc d'abord étudier le système en z et on "transposera" ensuite le résultat à x en utilisant la relation qui le lie, c'est à dire:

$$z = P^{-1}(x - x_e) \Longleftrightarrow x = x_e + Pz. \tag{100}$$

Le comportement des trajectoires solutions du système linéaire (80) de dimension 2 dépend de la nature (réelle ou complexe) et du signe (de la partie réelle) des valeurs propres de A. Les différents cas possibles sont donnés en suivant.

5.2.1 Cas où A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2

Dans ce cas, A est diagonalisable et:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{101}$$

On a alors:

$$\dot{z} = Bz \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 & = & \lambda_2 z_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & z_1(0)e^{\lambda_1 t}, \\ z_2(t) & = & z_2(0)e^{\lambda_2 t}. \end{array} \right. \tag{102}$$

- si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors

$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = 0, \tag{103}$$

  avec $|z_1(t)|$ qui décroit plus vite que $|z_2(t)|$. Le point d'équilibre est appelé un **noeud attractif**.

- si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, alors

$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = \infty. \tag{104}$$

  Le point d'équilibre est appelé un **col** ou un **point selle**.

- si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors

$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = \infty, \tag{105}$$

avec $|z_1(t)|$ qui croit moins vite que $|z_2(t)|$. Le point d'équilibre est appelé un **noeud répulsif**.

Les allures des trajectoires autour de ce type de points d'équilibre sont données dans le tableau 1.

5.2.2 Cas où A a deux valeurs propres réelles égales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Dans ce cas, on peut avoir:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ (si } A \text{ est diagonalisable) ou } B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{(forme de Jordan).} \tag{106}$$

- si $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, on a alors:

$$\dot{z} = Bz \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{z}_1 & = & \lambda z_1 \\ \dot{z}_2 & = & \lambda z_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z_1(t) & = & z_1(0)e^{\lambda t}, \\ z_2(t) & = & z_2(0)e^{\lambda t}. \end{array} \right. \tag{107}$$

La variable z_1 étant proportionnelle à z_2: $z_1(t) = \frac{z_2(0)}{z_1(0)} z_2(t)$, les trajectoires dans le plan de phase sont donc des droites. De tels points d'équilibre sont des cas particulier de noeuds attractif ou répulsif (selon le signe de λ). . On a:

  - si $\lambda < 0$, alors:

$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = 0, \tag{108}$$

    et le noeud est attractif;
  - si $\lambda > 0$, alors:

$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = \infty, \tag{109}$$

    et le noeud est répulsif.

- si $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, on a alors:

$$\dot{z} = Bz \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{z}_1 & = & \lambda z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 & = & \lambda z_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{z}_1(t) & = & \lambda z_1(t) + z_2(0)e^{\lambda t} \\ z_2(t) & = & z_2(0)e^{\lambda t}. \end{array} \right. \tag{110}$$

Cherchons la solution analytique de l'équation en z_1:

$$\dot{z}_1(t) = \lambda z_1(t) + z_2(0)e^{\lambda t}. \tag{111}$$

La solution de (111) se décompose en la somme de la solution de l'équation homogène associée (EHA) et d'une solution particulière. L'EHA, obtenue en

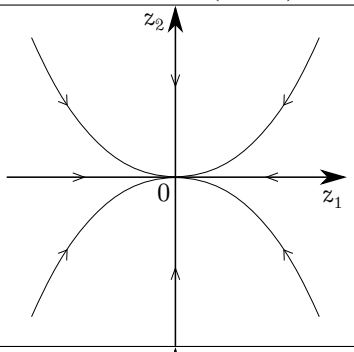
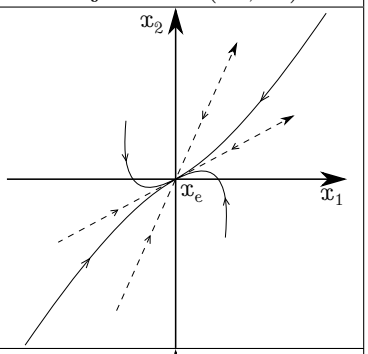
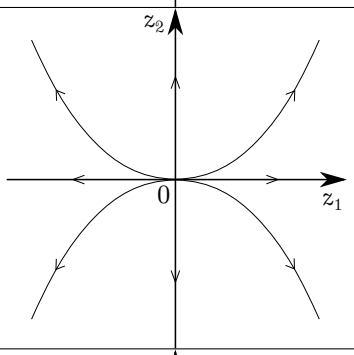
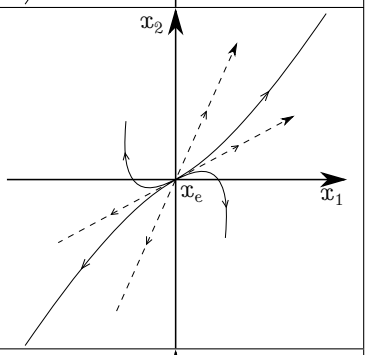
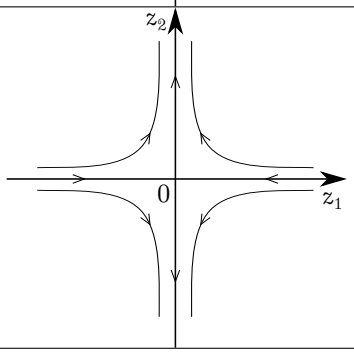
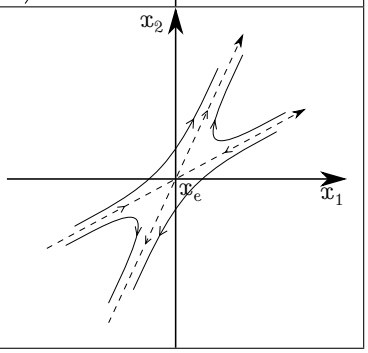
Nom et conditions	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)
Noeud attractif $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$		
Noeud répulsif $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$		
Col ou Point selle $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$		

Table 1: Cas où A a deux valeurs propres réelles distinctes et non nulles λ_1 et λ_2

remplaçant $z_2(0)e^{\lambda t}$ par 0 dans (111), s'écrit $\dot{z}_1 = \lambda z_1$ et a donc pour solution $z_1^{EHA}(t) = z_1(0)e^{\lambda t}$. Une solution particulière de (111) est donnée par $z_1^{part}(t) = tz_2(0)e^{\lambda t}$. La solution de $\dot{z} = Bz$ s'écrit donc au final:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & z_1(0)e^{\lambda t} + tz_2(0)e^{\lambda t}, \\ z_2(t) & = & z_2(0)e^{\lambda t}. \end{array} \right. \tag{112}$$

Ces points d'équilibre sont des noeuds dégénérés, attractif ou répulsif (selon le signe de λ). On a:

- si $\lambda < 0$, alors:
$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = 0, \tag{113}$$
et le noeud est attractif;
- si $\lambda > 0$, alors:
$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = \infty, \tag{114}$$
et le noeud est répulsif.

Les allures des trajectoires autour de ce type de points d'équilibre sont données dans le tableau 2.

5.2.3 Cas où A a deux valeurs propres complexes conjuguées λ_1 et λ_2

Dans ce cas, on a:

$$\lambda_1 = u + \mathrm{i}v \text{ et } \lambda_2 = u - \mathrm{i}v, \tag{115}$$

où $u \in \mathbb{R}$ est la partie réelle des deux valeurs propres, et $v \in \mathbb{R}^+$ est la partie imaginaire de λ_1 que l'on supposera positive (la partie imaginaire de λ_2 étant $-v$) et non nulle (sinon on se ramène au cas réel). Dans ce cas, une décomposition de A est telle que:

$$B = \begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix}. \tag{116}$$

On a alors:

$$\dot{z} = Bz \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & uz_1 + vz_2 \\ \dot{z}_2 & = & -vz_1 + uz_2. \end{array} \right. \tag{117}$$

On peut montrer (la preuve n'est pas donnée ici) que la solution de ce système s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & e^{ut}\left(z_1(0)\cos(vt) - z_2(0)\sin(vt)\right), \\ z_2(t) & = & e^{ut}\left(z_2(0)\cos(vt) + z_1(0)\sin(vt)\right). \end{array} \right. \tag{118}$$

Le comportement des solutions va ensuite dépendre du signe de u. Dans tous les cas cependant, la présence des fonctions cosinus et sinus dans la solution va engendrer des oscillations. On a:

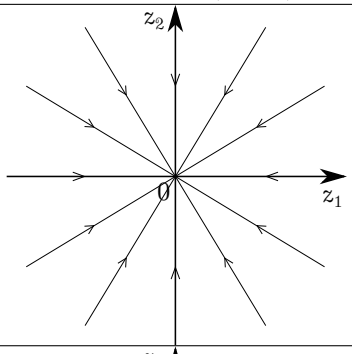
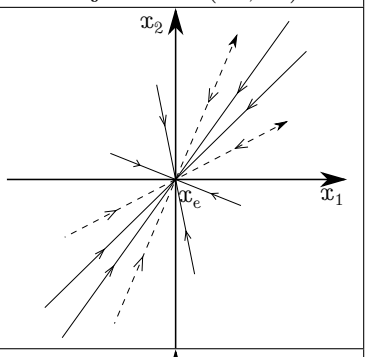
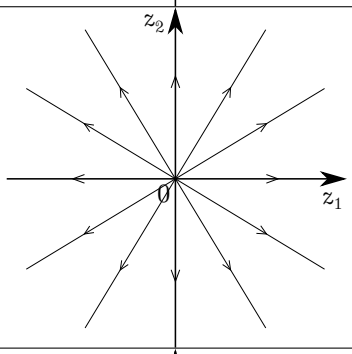
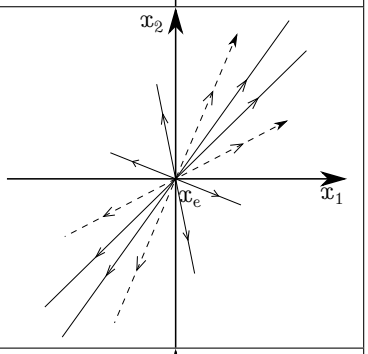
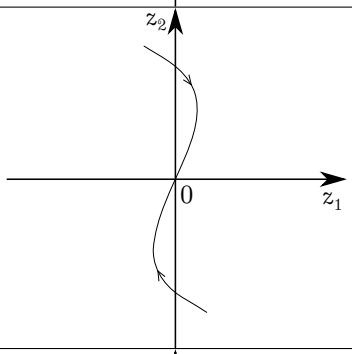
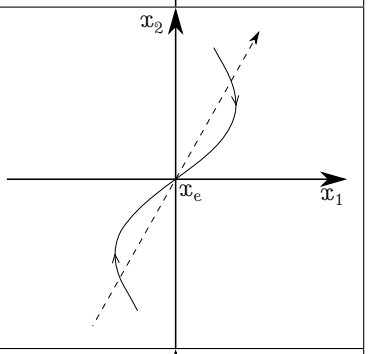
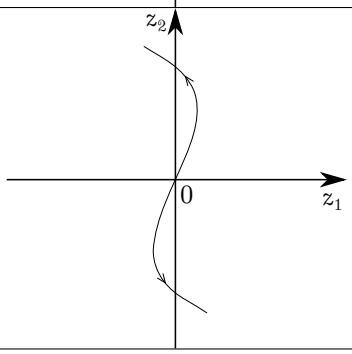
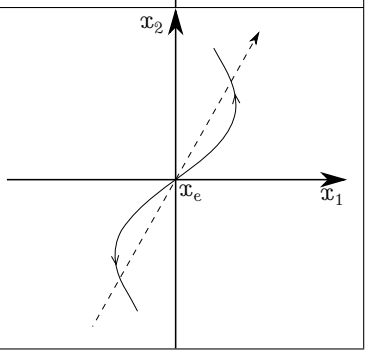
Nom et conditions	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)
Cas particulier de Noeud attractif $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$		
Cas particulier de Noeud répulsif $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$		
Noeud attractif dégénéré $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$		
Noeud répulsif dégénéré $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$		

Table 2: Cas où A a deux valeurs propres réelles égales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

- si $u < 0$, alors:
$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = 0. \tag{119}$$
Le point d'équilibre est appelé un **foyer attractif**. Dans le plan (z_1, z_2), les trajectoires décrivent une spirale qui tourne autour de 0 en se rapprochant (voir tableau 3). Pour retrouver le sens de rotation de la spirale, on remarquera que:
  - dans le cadrant où $z_1 > 0$ et $z_2 > 0$, on a $\dot{z}_2 < 0$,
  - dans le cadrant où $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$, on a $\dot{z}_2 > 0$,
  - dans le cadrant où $z_1 > 0$ et $z_2 < 0$, on a $\dot{z}_1 < 0$,
  - dans le cadrant où $z_1 < 0$ et $z_2 > 0$, on a $\dot{z}_1 > 0$.

- si $u > 0$, alors:
$$\lim_{t\to\infty} |z_1(t)| = \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} |z_2(t)| = \infty. \tag{120}$$
Le point d'équilibre est appelé un **foyer répulsif**. Là encore, les trajectoires décrivent une spirale qui tourne autour de 0, mais en s'éloignant de 0 (voir tableau 3). De même que pour le cas où $u < 0$, on peut retrouver le sens de rotation de la spirale en remarquant que:
  - dans le cadrant où $z_1 > 0$ et $z_2 > 0$, on a $\dot{z}_1 > 0$,
  - dans le cadrant où $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$, on a $\dot{z}_1 < 0$,
  - dans le cadrant où $z_1 > 0$ et $z_2 < 0$, on a $\dot{z}_2 < 0$,
  - dans le cadrant où $z_1 < 0$ et $z_2 > 0$, on a $\dot{z}_2 > 0$.

- si $u = 0$, alors le point d'équilibre n'est plus hyperbolique. Néanmoins, ce type de point d'équilibre reste intéressant. Dans ce cas, on a en effet:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & z_1(0)\cos(vt) - z_2(0)\sin(vt), \\ z_2(t) & = & z_2(0)\cos(vt) + z_1(0)\sin(vt), \end{array} \right. \tag{121}$$
ce qui est l'équation paramètrique d'un cercle de rayon $\sqrt{z_2^2(0) + z_2^2(0)}$. En effet:
$$z_2^2(t) + z_2^2(t) = z_2^2(0) + z_2^2(0), \forall t. \tag{122}$$
Dans le plan (z_1, z_2), les trajectoires solutions décrivent donc un cercle autour de 0, qui se transforme en ellipse dans le plan (x_1, x_2). Ce point d'équilibre est appelé un **centre**.

Les allures des trajectoires autour de ce type de points d'équilibre sont données dans le tableau 3.

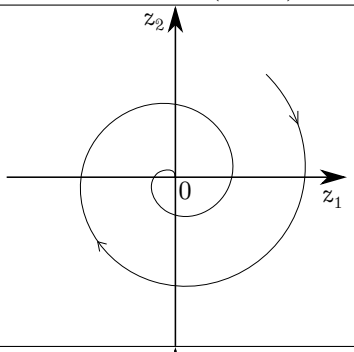
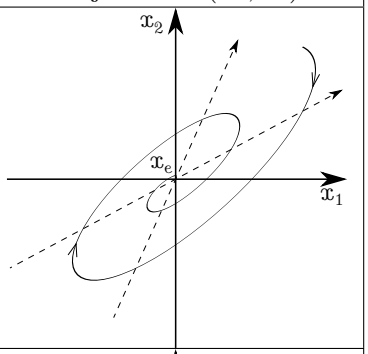
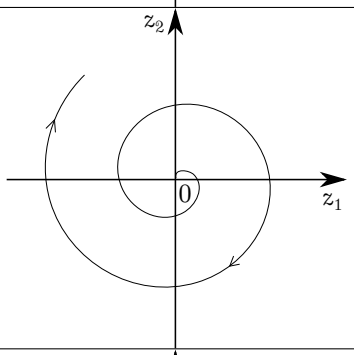
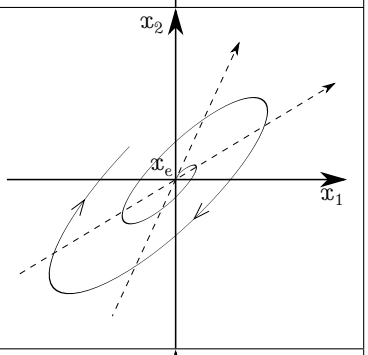
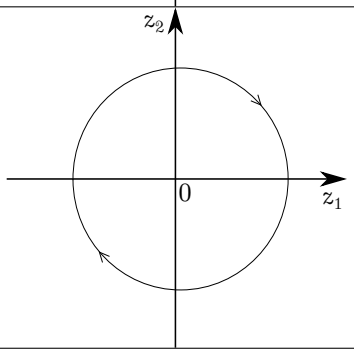
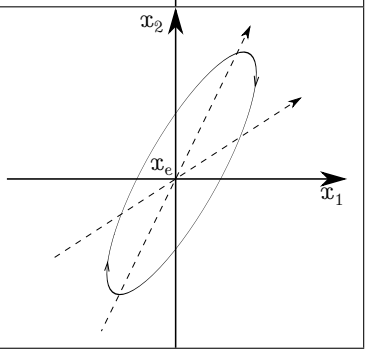
Nom et conditions	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)
Foyer attractif $\lambda_1 = u + \mathrm{i}v$ $\lambda_2 = u - \mathrm{i}v$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $u < 0$		
Foyer répulsif $\lambda_1 = u + \mathrm{i}v$ $\lambda_2 = u - \mathrm{i}v$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $u > 0$		
Centre $\lambda_1 = \mathrm{i}v$ $\lambda_2 = -\mathrm{i}v$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ $u = 0$		

Table 3: Cas où A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = u + \mathrm{i}v$ et $\lambda_2 = u - \mathrm{i}v$.

6 Modèle de proie prédateur de Lotka-Volterra

6.1 Le modèle

On considère un système composé de deux populations distinctes: les proies et les prédateurs. On note x la population de proies, et y la population de prédateurs (qui peuvent être exprimées par exemple en nombre d'individus, mais également en masse totale, etc). Les évolutions démographiques de ces deux populations dépendent l'une de l'autre: en effet, sans proies, la population de prédateurs ne peut croitre, et risque même de diminuer; au contraire, sans prédateurs, la population de proies pourrait exploser.
Vito Volterra a proposé un modèle pour décrire l'évolution de ces deux populations[1]:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ax - bxy \\ \dot{y} & = & -cy + dxy. \end{array} \right. \tag{123}$$

Dans ce modèle, on voit apparaitre plusieurs termes dont la signification est donnée ci-dessous, et qui sont basés sur diverses hypothèses précisées dans la suite:

- $+ax$ est le terme de croissance naturelle des proies (en l'absence de prédateurs). Cette croissance suit une loi mathusienne, c'est à dire que l'accroissement de la population par unité de temps est proportionnelle à la population. Le coefficient de proportionalité a est le taux de croissance des proies en l'abscence de prédateur.

- $-bxy$ est le terme de mortalité des proies par prédation. On fait ici l'hypothèse que, pour qu'il y ait prédation, il faut qu'il y ait rencontre entre les 2 espèces, et on suppose que le nombre de rencontres est proportionnel à la population des deux espèces. Le nombre de rencontres "possibles" entre les deux populations est donc donné par xy; le nombre de rencontres "réelles" est égal à pxy où p est la probabilité de rencontre. En notant t_p le taux de prédation, c'est à dire le nombre de proies tuées par unité de temps et par rencontre entre proies et prédateurs, le terme de mortalité des proies par prédation est bien donné par $-t_p pxy = -bxy$ avec $b = t_p p$.

- $-cy$ est le terme de mortalité naturelle des prédateurs en l'absence de proies. Le coefficient c est donc le taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies.

- $+dxy$ est le terme de croissance des prédateurs du fait de la prédation. Comme pour b, le coefficient d prend en compte le taux de prédation et la probabilité de rencontre entre proies et prédateurs.

Les coefficients a, b, c et d sont supposés dans la suite strictement positifs.

6.2 Points d'équilibre

Etudions les points d'équilibre du modèle de Lotka-Volterra (123), qui est un exemple de système autonome. Les points d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y})$ de ce système sont tels que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a\bar{x} - b\bar{x}\bar{y} & = & 0 \\ -c\bar{y} + d\bar{x}\bar{y} & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (a - b\bar{y})\bar{x} & = & 0 \\ (-c + d\bar{x})\bar{y} & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \bar{y} = 0 \\ \text{ou} \\ \bar{x} = \frac{c}{d} \text{ et } \bar{y} = \frac{a}{b}. \end{array} \right. \tag{124}$$

On a donc deux points d'équilibre, que l'on notera E_1 et E_2, et qui sont donnés par:

$$E_1 = (0,0) \text{ et } E_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right). \tag{125}$$

6.3 Stabilité des points d'équilibre

Revenons au modèle de Lotka-Volterra (123). Rappelons que ce système admet deux points d'équilibre $E_1 = (0,0)$ et $E_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ (cf equation (125)). Le modèle (123) est bien de la forme (15) avec f définie comme suit:

$$f : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}. \tag{126}$$

Pour étudier la stabilité de E_1 et E_2, calculons d'abord la matrice jacobienne de f en (x,y). On a:

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix}. \tag{127}$$

Evaluons cette matrice jacobienne en les points d'équilibre E_1 et E_2. On a:

$$J_f(E_1) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \text{ et } J_f(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}. \tag{128}$$

- $J_f(E_1)$ est une matrice diagonale: ses valeurs propres, qui se lisent directement sur la diagonale de la matrice, sont donc a et $-c$. Comme a et c sont supposés strictement positifs, $J_f(E_1)$ admet une valeur propre strictement négative: d'après la 1ère méthode de Lyapunov, le point d'équilibre E_1 est donc instable.

- Les valeurs propres de $J_f(E_2)$ ne peuvent pas se déterminer immédiatement, comme pour $J_f(E_1)$. Pour les calculer, on va passer par l'intermédiaire du polynôme caractéristique de $J_f(E_2)$, dont on calculera ensuite les racines (cf définitions 16 et 17). Le polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{J_f(E_2)}$ de $J_f(E_2)$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{J_f(E_2)}(\lambda) &= \det(J_f(E_2) - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & -\lambda \end{bmatrix} && (129) \\ &= \lambda^2 + \frac{abcd}{bd} = \lambda^2 + ac. && (130) \end{aligned}$$

  Les racines de ce polynôme sont les valeurs telles que:

$$\mathcal{P}_{J_f(E_2)}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + ac = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -ac = (-1)ac = i^2 ac \Leftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{ac}. \tag{131}$$

  La matrice $J_f(E_2)$ possède donc deux valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{ac}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{ac}$ qui ont toutes les deux une partie réelle nulle. Le point d'équilibre E_2 n'est donc pas hyperbolique, et la 1ère méthode de Lyapunov ne permet pas de conclure quant à sa stabilité.

6.4 Simulation

Nous allons maintenant simuler numériquement le modèle de Lotka-Volterra (123) pour différentes valeurs de la condition initiale et tracer l'allure des trajectoires. Les trajectoires solution obtenues peuvent être tracées de différentes manières. On peut d'abord visualiser l'évolution de la population de proies x et celle de la population de prédateurs y au cours du temps. Pour une condition initiale (x_0, y_0) donnée, on obtient alors un tracé dont un exemple est donné en figure 4.
Une autre méthode consiste à tracer les trajectoires dans **le plan de phase**, qui, dans notre cas, est le plan y en fonction de x (ou x en fonction de y). On visualise donc l'évolution de la population des prédateurs y en fonction de la population des proies x. Autrement dit, pour une condition initiale donnée (x_0, y_0), et pour tout temps t, on regarde le point $(x(t), y(t))$ et son évolution au cours du temps. L'ensemble des tracés des trajectoires solution issues de différentes conditions initiales constitue ce que l'on appelle un **portrait de phase**. Le portrait de phase du modèle proie-prédateur est donné en figure 5.
Quelle que soit la représentation choisie (évolution temporelle ou dans le plan de phase), on constate que les trajectoires solutions oscillent toutes autour du point d'équilibre E_2 (égal sur la simulation numérique à $(1, 1)$).

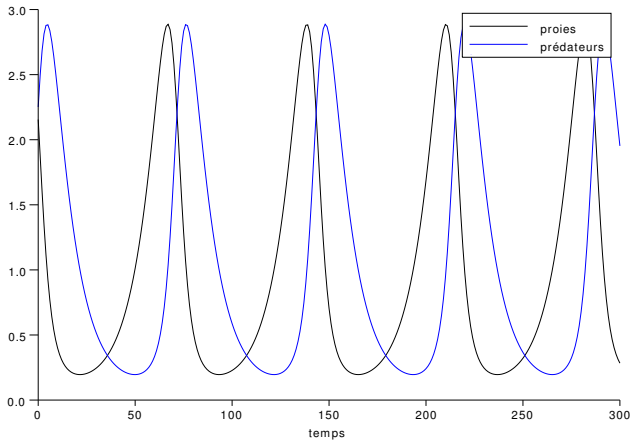


Figure 4: Simulation du modèle proie-prédateur (1) de Lotka-Volterra: représentation de l'évolution des populations de proies et de prédateurs au cours du temps.

References

[1] Volterra, V., *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris (1931).

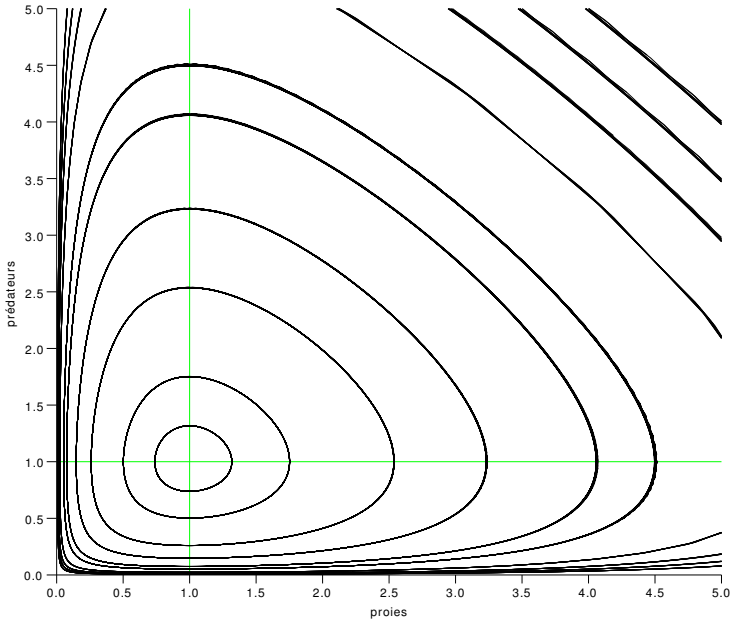


Figure 5: Simulation du modèle proie-prédateur (1) de Lotka-Volterra: visualisation dans le plan de phase.