Notions d'analyse

Céline Casenave

Développement limités et équivalents

Exercice 1

1. $$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

2. $$2(\sin(x) + \sinh(x)) = 4x + o(x^4)$$

3. $$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$$

4. $$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

5. Attention dans ce cas ! On a :

   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ et $e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2!} + \frac{u(x)^3}{3!} + o(u(x)^3)$ pour u telle que $u(0) = 0$,

   or $\cos(0) \neq 0$ donc on ne peut pas prendre $u = \cos$. On note donc $u = \cos(x) - \cos(0) = \cos x - 1$. On a bien $u(0) = 0$ et donc :

   $$e^{\cos x - 1} = 1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3),$$

   d'où :

   $$e^{\cos x} = e \times e^{\cos x - 1} = e(1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3)).$$

   En utilisant le DL de $\cos x$ au voisinage de 0, on obtient alors :

   $$e^{\cos x} = e(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)).$$

6. $\operatorname{co}\tan x$ n'admet pas de DL en 0 car cette fonction n'admet pas de limite finie en 0 (ce qui est une condition nécessaire à l'existence d'un DL).

Exercice 2

1. Pour utiliser la formule de Taylor Young et obtenir le DL à l'ordre 4, on calcule $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et $f''''(0)$, et on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

2.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -g(x)$$

Toute primitive de f est de la forme :

$$\arctan x + k = h(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

3. Pour obtenir le DL de g et de h on dérive et on intègre le DL de f puisque g et h sont (à un signe près pour g) la dérivée et une primitive de f. On obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2x - 4x^3 + o(x^3) \\ h(x) &= \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \end{aligned}$$

Exercice 3 Développement limité au voisinage de $+\infty$

1. On a :

$$f(x) = f(\frac{1}{y}) = \ln(1+y).$$

Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, y est au voisinage de 0. On utilise donc le DL de $\ln(1+y)$ au voisinage de 0 :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

et en repassant à la variable $x = \frac{1}{y}$, on obtient le DL à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$:

$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^4}),$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} + o(\frac{1}{x^5}).$$

.

Exercice 4 Développement limité au voisinage de a

1. On a :
$$\sin(x) = \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y.$$
Lorsque x est au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, y est au voisinage de 0. On utilise donc le DL de $\cos y$ au voisinage de 0 :
$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$$
et en repassant à la variable $x = y + \frac{\pi}{2}$, on obtient le DL à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $\sin(x)$:
$$\sin(x) = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} + o((x - \frac{\pi}{2})^5)$$

2.
$$(\cos(2x))^2 = \frac{1}{4} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) + 2(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3 - \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{6})^4 + o((x - \frac{\pi}{6})^4)$$

Exercice 5

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \text{ donc } \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\sim} 1 \text{ d'où } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \\
(\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x + o(x) \text{ donc } (\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ d'où } \lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-x} - e^x)\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Intégrales

Exercice 6 Fractions rationnelles

1.
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}dx = [\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+3}dx &= \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+3}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3}dx \\
&= \frac{3}{2}[\ln\left|x^2+x+3\right|] + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\frac{4}{11}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2}dx \\
&= \frac{3}{2}[\ln\left|x^2+x+3\right|] + [\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\ln(\frac{5}{3}) + \frac{1}{\sqrt{11}}(\arctan(\frac{3}{\sqrt{11}}) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{11}}))
\end{aligned}$$

3. Attention, erreur sur le sujet : intégrer entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= [x-\frac{2}{x}+2\ln|x|-\ln|x-1|]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{4}+\ln 6\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= [\ln|x+2|]_0^1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \ln(\frac{3}{2}) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$

1.

$$\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}}dt = \int_0^1 (u^2-1)du = \frac{2}{3}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_{\operatorname{arg\,sinh} 0}^{\operatorname{arg\,sinh} 1} du = \operatorname{arg\,sinh} 1 - \operatorname{arg\,sinh} 0 = \ln(1+\sqrt{2})$$

3. Ce changement de variables était un peu plus délicat. Il fallait remarquer que :

$$\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

On a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{3+\sin(2x)}dx = \int_{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}})\right)$$

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$

1. Primitives de $\ln x$:

$$x\ln x - x + k,\ k\in\mathbb{R}$$

2. Primitives de $\arctan x$:

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + k,\ k\in\mathbb{R}$$

3. Primitives de $\arcsin x$:

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

4. Primitives de $(x^2+x+1)e^{2x}$:

$$\frac{e^{2x}}{2}(1+x^2) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

5. Primitives de $x \sin x$:

$$-x\cos x + \sin x + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Intégrales généralisées

Exercice 9

1. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$: problème en $+\infty$

   On pose $y = \frac{1}{t}$ et on a :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y}^2)^{1/2}} = \frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}}.$$

   Au voisinage de $y = 0$ on a :

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}} = y^2(1+\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) = y^2 + \frac{1}{2}y^4 + o(y^4),$$

   d'où, au voisiange de $t = +\infty$:

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^4} + o(\frac{1}{t^4}).$$

   On a donc :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

   Remarque : n peut trouver cet équivalent sans passer par les DL. On a :

$$1+t^2 \underset{\infty}{\sim} t^2,$$

   d'où :

$$(1+t^2)^{1/2} \underset{\infty}{\sim} (t^2)^{1/2} = t \text{ et donc } \frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

   Finalement, $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$ converge puisqu'elle est de même nature que $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ qui est convergente (intégrale de Riemann)

2. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$: problème en $+\infty$

On a, sur $[\pi, +\infty[$, $0 < \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| < \frac{1}{x^3}$. Or, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge (intégrale de Riemann) donc d'après le critère de majoration, $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| dx$ converge, ce qui implique que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ converge.

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$: problème en 0

La fonction $\frac{\sin x}{x}$ admet une limite finie en 0 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par conséquent, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.