



HAL
open science

Notions d'analyse

Céline Casenave

► **To cite this version:**

| Céline Casenave. Notions d'analyse. École d'ingénieur. France. 2008, 34p. hal-03329994

HAL Id: hal-03329994

<https://hal.inrae.fr/hal-03329994>

Submitted on 31 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉVELOPPEMENT LIMITÉS ET ÉQUIVALENTS

Exercice 1

1.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

2.

$$2(\sin(x) + \sinh(x)) = 4x + o(x^4)$$

3.

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$$

4.

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

5. Attention dans ce cas ! On a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \text{ et } e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2!} + \frac{u(x)^3}{3!} + o(u(x)^3) \text{ pour } u \text{ telle que } u(0) = 0,$$

or $\cos(0) \neq 0$ donc on ne peut pas prendre $u = \cos$. On note donc $u = \cos(x) - \cos(0) = \cos x - 1$. On a bien $u(0) = 0$ et donc :

$$e^{\cos x - 1} = 1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3),$$

d'où :

$$e^{\cos x} = e \times e^{\cos x - 1} = e \left(1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2!} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + o((\cos x - 1)^3) \right).$$

En utilisant le DL de $\cos x$ au voisinage de 0, on obtient alors :

$$e^{\cos x} = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right).$$

6. $\cotan x$ n'admet pas de DL en 0 car cette fonction n'admet pas de limite finie en 0 (ce qui est une condition nécessaire à l'existence d'un DL).

Exercice 2

1. Pour utiliser la formule de Taylor Young et obtenir le DL à l'ordre 4, on calcule $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et $f''''(0)$, et on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

2.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -g(x)$$

Toute primitive de f est de la forme :

$$\arctan x + k = h(x) + k, k \in \mathbb{R}$$

3. Pour obtenir le DL de g et de h on dérive et on intègre le DL de f puisque g et h sont (à un signe près pour g) la dérivée et une primitive de f . On obtient :

$$g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2x - 4x^3 + o(x^3)$$

$$h(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Exercice 3 Développement limité au voisinage de $+\infty$

1. On a :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(1+y).$$

Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, y est au voisinage de 0. On utilise donc le DL de $\ln(1+y)$ au voisinage de 0 :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

et en repassant à la variable $x = \frac{1}{y}$, on obtient le DL à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Exercice 4 Développement limité au voisinage de a

1. On a :

$$\sin(x) = \sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y.$$

Lorsque x est au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, y est au voisinage de 0. On utilise donc le *DL* de $\cos y$ au voisinage de 0 :

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$$

et en repassant à la variable $x = y + \frac{\pi}{2}$, on obtient le *DL* à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $\sin(x)$:

$$\sin(x) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!} + o((x - \frac{\pi}{2})^5)$$

2.

$$(\cos(2x))^2 = \frac{1}{4} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) + 2(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3 - \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{6})^4 + o((x - \frac{\pi}{6})^4)$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \text{ donc } \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\sim} 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \\ (\frac{1}{1-x} - e^x) \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x + o(x) \text{ donc } (\frac{1}{1-x} - e^x) \frac{1}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{1-x} - e^x) \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

INTÉGRALES

Exercice 6 Fractions rationnelles

1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2} dx = [\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+3} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+3} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3} dx \\ &= \frac{3}{2} [\ln|x^2+x+3|] + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\frac{4}{11}}{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2} dx \\ &= \frac{3}{2} [\ln|x^2+x+3|] + [\frac{1}{\sqrt{11}} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \ln(\frac{5}{3}) + \frac{1}{\sqrt{11}} (\arctan(\frac{3}{\sqrt{11}}) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{11}})) \end{aligned}$$

3. Attention, erreur sur le sujet : intégrer entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \left[x - \frac{2}{x} + 2 \ln |x| - \ln |x-1| \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{4} + \ln 6 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+2)(x^2 + x + 1)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= [\ln |x+2|]_0^1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Exercice 7

1.

$$\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}} dt = \int_0^1 (u^2 - 1) du = \frac{2}{3}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_{\arg \sinh 0}^{\arg \sinh 1} du = \arg \sinh 1 - \arg \sinh 0 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

3. Ce changement de variables était un peu plus délicat. Il fallait remarquer que :

$$\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

On a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin(2x)} dx = \int_{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

Exercice 8

1. Primitives de $\ln x$:

$$x \ln x - x + k, k \in \mathbb{R}$$

2. Primitives de $\arctan x$:

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + k, k \in \mathbb{R}$$

3. Primitives de $\arcsin x$:

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k, k \in \mathbb{R}$$

4. Primitives de $(x^2 + x + 1)e^{2x}$:

$$\frac{e^{2x}}{2}(1+x^2) + k, k \in \mathbb{R}$$

5. Primitives de $x \sin x$:

$$-x \cos x + \sin x + k, k \in \mathbb{R}$$

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 9

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$: problème en $+\infty$

On pose $y = \frac{1}{t}$ et on a :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y^2})^{1/2}} = \frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}}.$$

Au voisinage de $y = 0$ on a :

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^{1/2}} = y^2(1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) = y^2 + \frac{1}{2}y^4 + o(y^4),$$

d'où, au voisinage de $t = +\infty$:

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^4} + o\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

On a donc :

$$\frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Remarque : n peut trouver cet équivalent sans passer par les DL. On a :

$$1 + t^2 \underset{\infty}{\sim} t^2,$$

d'où :

$$(1+t^2)^{1/2} \underset{\infty}{\sim} (t^2)^{1/2} = t \text{ et donc } \frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$ converge puisqu'elle est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui est convergente (intégrale de Riemann)

2. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$: problème en $+\infty$

On a, sur $[\pi, +\infty[$, $0 < \left| \frac{\cos x}{x^3} \right| < \frac{1}{x^3}$. Or, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge (intégrale de Riemann) donc d'après le critère de majoration, $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^3} \right| dx$ converge, ce qui implique que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ converge.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$: problème en 0

La fonction $\frac{\sin x}{x}$ admet une limite finie en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par conséquent, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.