Equations du premier ordre

Exercice 1

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du premier ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$ pour les valeurs de t_0 et de y_0 précisées entre parenthèses.

1. $y'(t) - 4y(t) = 12t + 1$ $(t_0 = 0,\ y_0 = 0)$
2. $y'(t) + 2y(t) = 2te^{-2t}$ $(t_0 = 0,\ y_0 = 2)$
3. $ty'(t) = 2y(t) + t^3$ $(t_0 = 1,\ y_0 = 3)$

Correction

1. Equation homogène associée : $y'(t) = 4y(t)$ de solutions Ce^{4t}, $C \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants avec $b(t) = Q(t)e^{rt}$, où $Q(t) = 12t + 1$ et $r = 0 \neq 4$.
   On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = P(t)$ avec $P(t) = k_1 t + k_0$ polynome de degré 1 (égal à celui de Q).
   On a :
   $$\hat{y}'(t) - 4\,\hat{y}(t) = 12t + 1 \Leftrightarrow k_1 - 4(k_1 t + k_2) = 12t + 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_1 - 4k_2 = 1 \\ -4k_1 = 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_2 = -1 \\ k_1 = -3 \end{array} \right.$$
   d'où $\hat{y}(t) = -3t - 1$.
   Solution générale : $y(t) = Ce^{4t} - 3t - 1$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).
   La solution particulière telle que $y(0) = 0$ est $y(t) = e^{4t} - 3t - 1$ $(C = 1)$.
2. Equation homogène associée : $y'(t) = -2y(t)$ de solutions Ce^{-2t}, $C \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants avec $b(t) = Q(t)e^{rt}$, où $Q(t) = 2t$ et $r = -2$.
   On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = P(t)e^{-2t}$ avec $P(t) = k_2 t^2 + k_1 t + k_0$ polynome de degré 2 (égal à celui de $Q + 1$).
   On a :
   $$\hat{y}'(t) + 2\hat{y}(t) = 2te^{-2t} \Leftrightarrow (2k_2 t + k_1) = 2t \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k_2 = 2 \\ k_1 = 0 \end{array} \right.$$
   d'où $\hat{y}(t) = (t^2 + \mathrm{cte})\,e^{-2t}$.
   Solution générale : $y(t) = (C + t^2)e^{-2t}$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).
   La solution particulière telle que $y(0) = 2$ est $y(t) = (2 + t^2)e^{-2t}$ $(C = 2)$.

3. $ty'(t) = 2y(t) + t^3 \iff y'(t) = \frac{2}{t}y(t) + t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.
Equation homogène associée : $y'(t) = \frac{2}{t}y(t)$ de solutions $Ce^{2\ln|t|} = Ct^2$, $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 1 à coefficients variables : on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière. On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = C(t)t^2$.
On a :
$$\hat{y}'(t) = \frac{2}{t}\hat{y}(t) + t^2 \Leftrightarrow C'(t)t^2 = t^2 \Leftrightarrow C(t) = t + c,\ c \in \mathbb{R},$$
d'où, pour $c = 0$ (cas le plus simple), $\hat{y}(t) = t^3$.
Solution générale : $y(t) = Ct^2 + t^3$ (solutions définies sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ ou de $\mathbb{R}_-^*$).
La solution particulière telle que $y(1) = 3$ est $y(t) = 2t^2 + t^3$ ($C = 2$).

EQUATIONS DU SECOND ORDRE ORDRE

Exercice 2

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du second ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$, $y'(t_1) = y_1$ pour les valeurs de t_0, t_1, y_0 et y_1 précisées entre parenthèses.

1. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}(t + 2)$ ($t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $y_0 = 3$, $y_1 = -2$)
2. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 6$ ($t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$)
3. $y''(t) + y(t) = \tan^2(t)$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Remarque : pour la question 3 on admettra que les primitives de $t \longmapsto \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$ et de $t \longmapsto -\frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)}$ sont données par :
$$t \longmapsto -\sin(t) + \ln(\tan(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{t}{2})) + \text{cte et } t \longmapsto -\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} + \text{cte}.$$

Correction

1. Equation homogène associée : $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$.
Equation caractéristique : $r^2 + 2r + 2 = 0$
$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Longrightarrow r_1 = -1 + i = \overline{r_2}$.
Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc :
$y(t) = (C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t))\, e^{-t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : cas d'une équation d'ordre 2 à coefficients constants avec $b(t) = Q(t)e^{rt}$, où $Q(t) = t + 2$ et $r = -1 \neq -1 \pm i$.
On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = P(t)e^{rt}$ avec $P(t) = k_1 t + k_0$ polynome de degré 1 (égal à celui de Q).
On a :
$$\hat{y}'(t) = (-k_1 t - k_0 + k_1)e^{-t} \text{ et } \hat{y}''(t) = (k_1 t + k_0 - 2k_1)e^{-t},$$

d'où

$$\hat{y}''(t) + 2\hat{y}'(t) + 2\hat{y}(t) = e^{-t}(t+2) \Leftrightarrow k_1 t + k_0 = t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_0 = 2 \end{cases}$$

d'où $\hat{y}(t) = (t+2)e^{-t}$.

Solution générale : $y(t) = (C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + t + 2)\, e^{-t}$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).

La solution particulière telle que $y(0) = 3$ et $y'(t) = -1$ est $y(t) = (\cos(t) + t + 2)\, e^{-t}$ ($C_1 = 0$ et $C_2 = 1$).

2. Equation homogène associée : $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$.
   Equation caractéristique : $r^2 + 2r - 3 = 0$
   $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 16 > 0 \Longrightarrow r_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$.
   Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc : $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : le second membre étant constant, on cherche une solution constante (pourquoi se compliquer la vie !). En effet, si $\hat{y}(t) = \text{cte}$, alors $\hat{y}''(t) = \hat{y}'(t) = 0$ et

$$\hat{y}''(t) + 2\hat{y}'(t) - 3\hat{y}(t) = 6 \Longleftrightarrow -3\hat{y}(t) = 6 \Longleftrightarrow \hat{y}(t) = -2.$$

   Solution générale : $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (solutions définies sur tout $\mathbb{R}$).
   La solution particulière telle que $y(0) = 3$ et $y'(t) = -1$ est $y(t) = \frac{9}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-3t} - 2$ ($C_1 = \frac{9}{4}$ et $C_2 = \frac{3}{4}$).
3. Equation homogène associée : $y''(t) + y(t) = 0$.
   Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$ de racines $r_1 = i = \overline{r_2}$.
   Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc : $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière : on utilise ici la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme : $\hat{y}(t) = C_1(t) \sin(t) + C_2(t) \cos(t)$ telle que :

$$\begin{cases} C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = 0 \\ C_1'(t)\cos(t) - C_2'(t)\sin(t) = \tan^2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = 0 \\ C_1'(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = \tan^2(t)\cos(t) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2'(t) = -\frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)} \\ C_1'(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2(t) = -\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} + \text{cte} \\ C_1(t) = -\sin(t) + \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})) + \text{cte} \end{cases}$$

   d'où, en prenant les constantes d'intégration égales à 0, $\hat{y}(t) = \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}))\sin(t) - 2$
   Solution générale : $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}))\sin(t) - 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (solutions définies sur tout $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Systèmes différentiels

Exercice 3

Trouver l'ensemble des solutions réelles du système différentielle d'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_1(t). \end{array}$$

Correction

Le système différentiel se met sous la forme matriciel :

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

C'est un système différentiel homogène dont les solutions s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^A C,$$

avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $C \in \mathbb{R}^2$.

Calcul de e^A : on cherche d'abord à diagonaliser A.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Il y a donc deux valeurs propres disctinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ et on montre que :

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$