Equations différentielles linéaires

Céline Casenave

Table des matières

1 Introduction

Une équation différentielle est une équation portant sur les dérivées d'une fonction, c'est à dire une équation de la forme :

$$y^{(p)}(t) = F(t, y(t), y'(t), ..., y^{(p-1)}(t)),$$

où F est une fonction éventuellement non linéaire, $y^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y et $p \in \mathbb{N}^*$ est appelé **ordre de l'équation**.

Dans le cas général on ne peut résoudre analytiquement une telle équation et on fera appel à une résolution numérique (cf deuxième partie du cours sur les schémas numériques). Dans cette première partie, on ne s'intèresse qu'aux équations différentielles dites "linéaires", c'est à dire ne comportant que des termes de la forme $a_n(t)y^{(n)}(t)$ et $b(t)$. On verra qu'il est alors parfois possible de donner l'expression analytique des solutions.

2 Equations du premier ordre

On s'intéresse dans un premier temps aux équations différentielles du premier ordre, c'est à dire aux équations de la forme :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \forall t \in I, \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. On recherche les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) continûment dérivables.

Terminologie : On dit que l'équation (1) est **homogène** si $b(t) = 0$, $\forall t \in I$.
On dit que l'équation (1) est **à coefficients constants** si $a(t) = \text{cte}$, $\forall t \in I$.

Remarque : Un problème qui se pose souvent en pratique consiste à trouver la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) continûment dérivable et telle que $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I$.

2.1 Solutions de (1)

Avant de chercher à résoudre (1), il faut s'assurer de l'existence de solutions, ce que permet le théorème suivant.

Théorème 1

Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) continûment dérivable et telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration : Admise. ■

L'existence de solutions étant assurée, on s'intéresse à présent à la résolution de (1). Pour cela, on a le résultat suivant sur lequel est basée la méthode de résolution pratique des équations différentielles :

Proposition 2

Soit $\hat{y}$ une solution particulière de (1). Les solutions de (1) s'écrivent alors, pour tout $t \in I$:

$$y(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}(t),$$

*avec $\bar{y}$ solution de l'équation dite "**homogène associée**" :*

$$y'(t) = a(t)y(t), \ \forall t \in I. \tag{2}$$

Démonstration : Soient $\hat{y}_1$ et $\hat{y}_2$ deux solutions particulières de (1). Alors :

$$\hat{y}_1'(t) = a(t)\hat{y}_1(t) + b(t) \text{ et } \hat{y}_2'(t) = a(t)\hat{y}_2(t) + b(t),$$

d'où

$$\hat{y}_1'(t) - \hat{y}_2'(t) = a(t)(\hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t)).$$

On a donc : $\hat{y}_1(t) = \hat{y}_2(t) + \bar{y}(t)$ avec $\bar{y}(t) := \hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t)$ solution de (2). ■

Pour trouver les solutions de (1) il faut donc trouver les solutions de l'équation homogène associée (2) et exhiber une solution particulière de (1).

2.2 Résolution de l'équation homogène associée

Proposition 3

Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$y'(t) = a(t)y(t), \ \forall t \in I,$$

forment un sous espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}$. Elles s'écrivent, pour tout $t \in I$:

$$y(t) = Ce^{A(t)}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : Soit y solution de (2). Alors, y est solution de $e^{-A(t)}(y'(t) - a(t)y(t)) = 0 \iff (e^{-A(t)}y(t))' = 0 \iff e^{-A(t)}y(t) = C$, avec $C \in \mathbb{R}$. ■

Cas particulier : $y'(t) = cy(t)$ avec $c \in \mathbb{R}$ a pour solutions Ce^{at}, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple : $y'(t) = (1+t)y(t)$ admet pour solutions $y(t) = Ce^{t+\frac{t^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

2.3 Recherche d'une solution particulière de (1)

Trouver une solution particulière de (1) n'est pas toujours évident. On peut parfois en trouver une "par intuition" comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple : On considre l'équation $y'(t) = (1+t)y(t) - t^2 - t + 1$. On peut aisément vérifier que $\hat{y}(t) = t$ est une solution particulière de cette équation. Les solutions s'écrivent alors : $y(t) = t + Ce^{t+\frac{t^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Dans le cas général cependant, on préfèrera utiliser la **méthode dite "de la variation de la constante"** ou certains autres résultats (par exemple dans le cas particulier d'une équation à coefficients constants et second membre sous la forme d'un produit d'un polynome et d'une exponentielle) pour exhiber une solution particulière. Le principe de superposition peut également être très utile en pratique.

2.3.1 Méthode de la variation de la constante

Cette méthode systématique consiste à rechercher une solution particulière de (1) sous la forme :

$$\hat{y}(t) = C(t)e^{A(t)},$$

et à montrer que C vérifie alors une équation du premier ordre facile à résoudre car ne comportant qu'un terme en C' (et pas de terme en C).

Exemple : On considère l'équation

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) + 1 \tag{3}$$

et on cherche la solution de (3) sur $[1, +\infty[$ telle que $y(1) = 1$.
Les solutions de l'équation homogène associée $y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)$ sont données par :

$$y(t) = Ce^{-\ln|t|} = -\frac{C}{t},\ C \in \mathbb{R},\ t \in [1, +\infty[.$$

Essayons maintenant de trouver une solution particulière de (3) en utilisant la méthode de la variation de la constante. On cherche donc $\hat{y}$ sous la forme $\hat{y}(t) = -\dfrac{C(t)}{t}$. Comme $\hat{y}$ est solution de (3), on a :

$$\hat{y}'(t) = -\frac{1}{t}\hat{y}(t) + 1. \tag{4}$$

Or, $\hat{y}'(t) = -\frac{C'(t)}{t} + \frac{C(t)}{t^2}$, d'où, en remplaçant dans (4) :

$$-\frac{C'(t)}{t} + \frac{C(t)}{t^2} = -\frac{1}{t}(-\frac{C(t)}{t}) + 1 \Longleftrightarrow -\frac{C'(t)}{t} = 1 \Longleftrightarrow C'(t) = -t \Longleftrightarrow C(t) = -\frac{t^2}{2} + \text{cte}.$$

En fixant (de manière arbitraire) la constante à 0, on obtient alors comme solution particulière de (3) la fonction :

$$\hat{y}(t) = (-\frac{t^2}{2})(-\frac{1}{t}) = \frac{t}{2}.$$

L'ensemble des solutions de (3) sur $[1, +\infty[$ s'écrivent donc :

$$y(t) = -\frac{C}{t} + \frac{t}{2},\ C \in \mathbb{R},$$

et la solution de (3) telle que $y(1) = 1$ est définie par : $y(t) = \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}$ ($C = -\frac{1}{2}$).

2.3.2 Dans le cas d'une équation à coefficients constants

Dans le cas particulier où l'équation (1) est à coefficients constants :

$$y'(t) = ay(t) + b(t), \tag{5}$$

on a le résultat intéressant suivant :

Proposition 4

Si $b(t) = Q(t)e^{rt}$ où r est un réel et Q un polynôme à coefficients réels de degré q, alors (5) admet une solution de la forme

$$\hat{y}(t) = P(t)e^{rt},$$

où P est un polynôme de degré p avec :
▶ $p = q$ *si* $r \neq a$,
▶ $p = q + 1$ *si* $r = a$.

Démonstration : La fonction $t \longmapsto e^{rt}$ étant continûment dérivable et non nulle sur I, on peut rechercher une solution de (5) sous la forme : $\hat{y}(t) = u(t)e^{rt}$. On a :

$$\hat{y}'(t) = a\,\hat{y}(t) + b(t) \Longleftrightarrow u'(t)e^{rt} + u(t)re^{rt} = a\,u(t)e^{rt} + Q(t)e^{rt} \Longleftrightarrow u'(t) + u(t)(r-a) = Q(t).$$

- si $r = a$, alors u est une primitive de Q c'est à dire un polynome de degré $q+1$,
- si $r \neq a$, alors si u polynome de degré p, par identification des coefficients on a $p = q$. ■

Exemple : $y(t) = -(t^2 + 2t + 3)e^t$ est une solution particulière de $y'(t) = 2y(t) + (t^2 + 1)e^t$

2.3.3 Principe de superposition

Le principe de superposition s'énonce de la manière suivante :

Proposition 5

Soit y_1 (respectivement y_2) une solution sur I de

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t) \text{ (respectivement } y'(t) = a(t)y(t) + g(t)\text{)},$$

alors, pour tout C_1, $C_2 \in \mathbb{C}$, $C_1y_1 + C_2y_2$ est solution de

$$y'(t) = a(t)y(t) + C_1f(t) + C_2g(t).$$

Démonstration : évidente. ■

Pour la recherche d'une solution particulière, ce principe peut être très utile.

Exemple : Dans le cas d'une équation à coefficients constants où $b(t) = \cos(\omega t)Q(t)e^{zt}$ ou $b(t) = \sin(\omega t)Q(t)e^{zt}$, on pourra utiliser les formules d'Euler :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \text{ et } \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

et trouver une solution particulière pour chacune des équations suivantes :

$$y'(t) = ay(t) + Q(t)e^{zt}e^{i\omega t} \text{ et } y'(t) = ay(t) + Q(t)e^{zt}e^{-i\omega t}$$

en utilisant la proposition 4. Grâce au principe de superposition on pourra alors exhiber une solution particulière de $y'(t) = ay(t) + b(t)$.

3 Equations du second ordre

On ne traitera ici que le cas particulier des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, c'est à dire des équations de la forme :

$$y''(t) = a_1y'(t) + a_0y(t) + b(t), \tag{6}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a_1, a_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On recherche les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (6) deux fois continûment dérivables.

Comme dans le cas des équations du premier ordre, la résolution de (6) passera par la résolution de l'équation homogène associée et la recherche d'une solution particulière.

Remarque : Dans le cas d'équations différentielles du second ordre à coefficients non constants, la résolution de (6) n'est pas systématique. Pour exhiber la solution analytique de l'ensemble des solutions de (6), il faut au préalable connaitre une solution particulière de l'équation homogène associée, ce qui est en général impossible.

3.1 Solutions de (6)

L'existence de solutions de (6) fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 6

Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (6) deux fois continûment dérivable et telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Démonstration : Admise. ■

De même que dans le cas des équations du premier ordre, les solutions de (6) sont obtenues comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Proposition 7

Soit $\hat{y}$ une solution particulière de (6). Les solutions de (6) s'écrivent alors, pour tout $t \in I$:

$$y(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}(t),$$

*avec $\bar{y}$ solution de l'équation dite "**homogène associée**" :*

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t), \forall t \in I. \tag{7}$$

Démonstration : Similaire à celle de la proposition 2. ■

3.2 Résolution de l'équation homogène associée

Théorème 8

*Soient r_1 et r_2 les deux racines (disctinctes ou confondues, réelles ou complexes) de l'**équation caractéristique** de (6) :*

$$r^2 - a_1 r - a_0 = 0, \tag{8}$$

et $\Delta = a_1^2 + 4a_0$ son discriminant.
Les solutions de (7) forment un sous espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions deux fois continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}$.
Elles sont définies par :

- *si $\Delta > 0$ (r_1 et r_2 racines distinctes réelles) :*

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

– *si $\Delta = 0$ (racine réelle double $r_1 = r_2 = \alpha$) :*

$$y(t) = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

– *si $\Delta < 0$ (r_1 et r_2 racines complexes conjuguées : $\overline{r_2} = r_1 = \alpha + i\beta$) :*

$$y(t) = \left(C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)\right) e^{\alpha t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : La fonction $t \longmapsto e^{r_1 t}$ étant deux fois dérivable et non nulle sur I, on peut chercher les solutions sur I de (7) sous la forme $y(t) = u(t)e^{r_1 t}$. On a alors :

$$y'(t) = \left(u'(t) + r_1 u(t)\right) e^{r_1 t} \text{ et } y''(t) = \left(u''(t) + 2r_1 u'(t) + r_1^2 u(t)\right) e^{r_1 t},$$

d'où :

$$\begin{array}{cc} & y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ \iff & (u''(t) + 2r_1 u'(t) + r_1^2 u(t))e^{r_1 t} = \left[a_1(u'(t) + r_1 u(t)) + a_0 u(t)\right] e^{r_1 t} \\ \iff & \left[u''(t) + (2r_1 - a_1)u'(t) + \left(r_1^2 - a_1 r_1 - a_0\right) u(t)\right] e^{r_1 t} = 0, \end{array}$$

soit, puisque r_1 racine de (8) et $e^{r_1 t} > 0$:

$$u''(t) + (2r_1 - a_1)u'(t) = 0.$$

On pose $\Delta = a_1^2 + 4a_0$ et on distingue alors 3 cas différents :

– si $\Delta > 0$ alors les racines de (8) sont $\frac{a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc $r_1 \neq \frac{a_1}{2} \Longrightarrow 2r_1 - a_1 \neq 0$. En posant $z = u'$, on se ramène donc à l'équation du premier ordre suivante :

$$z'(t) + (2r_1 - a_1)z(t) = 0,$$

dont les solutions sont données par $z(t) = Ce^{-(2r_1 - a_1)t}$, $C \in \mathbb{R}$. Les solutions u sont donc données par les primitives de z c'est à dire par :

$$u(t) = -\frac{1}{(2r_1 - a_1)} Ce^{-(2r_1 - a_1)t} + C_1,\ C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

On a alors :

$$y(t) = \left(-\frac{1}{(2r_1 - a_1)} Ce^{-(2r_1 - a_1)t} + C_1\right) e^{r_1 t} = -\frac{1}{(2r_1 - a_1)} Ce^{(a_1 - r_1)t} + C_1 e^{r_1 t},$$

soit, en posant $C_2 = -\frac{1}{(2r_1 - a_1)} C$ et puisque $r_2 = a_1 - r_1$:

$$y(t) = C_2 e^{r_2 t} + C_1 e^{r_1 t}.$$

– si $\Delta = 0$ alors $r_1 = r_2 = \frac{a_1}{2}$, d'où $u''(t) = 0$ et donc $u(t) = C_1 t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

– si $\Delta < 0$ alors $\overline{r_1} = r_2$. La démarche est la même que dans le cas $\Delta > 0$, la seule différence étant que, comme r_1 et r_2 sont complexes, C_1 et C_2 le sont aussi. Comme l'on cherche des solutions à valeurs réelles, on prendra $\overline{C_1} = C_2$. Ainsi les solutions s'écriront :

$$y(t) = \overline{C_1} e^{\overline{r_1} t} + C_1 e^{r_1 t} = 2 \operatorname{Re}(C_1 e^{r_1 t}) \in \mathbb{R},$$

c'est à dire :

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & 2 \operatorname{Re}\left((\operatorname{Re}(C_1) + i \operatorname{Im}(C_1))\, e^{(\operatorname{Re}(r_1) + i \operatorname{Im}(r_1))t}\right) \\ & = & 2 \left[\operatorname{Re}(C_1) \cos(\operatorname{Im}(r_1)t) - \operatorname{Im}(C_1) \sin(\operatorname{Im}(r_1)t)\right] e^{\operatorname{Re}(r_1)t} \\ & = & \left[\mu_2 \cos(\operatorname{Im}(r_1)t) + \mu_1 \sin(\operatorname{Im}(r_1)t)\right] e^{\operatorname{Re}(r_1)t} \end{array}$$

avec $\mu_1 = -2 \operatorname{Im}(C_1)$ et $\mu_2 = 2 \operatorname{Re}(C_1)$. ■

3.3 Recherche d'une solution particulière

De même que précédemment, la recherche d'une solution particulière de (6) pourra se faire de différentes manières.

3.3.1 Méthode de la variation de la constante

Soit (v_1, v_2) une base de l'espace des solutions de l'équation homogène (7) : les solutions de (7) s'écrivent donc $y(t) = C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. La méthode de la variation de la constante dans le cas d'une équation d'ordre 2 consiste à chercher une solution particulière de la forme :

$$\hat{y}(t) = C_1(t)v_1(t) + C_2(t)v_2(t),$$

telle que :

$$\begin{cases} C_1'(t)v_1(t) + C_2'(t)v_2(t) = 0 \\ C_1'(t)v_1'(t) + C_2'(t)v_2'(t) = b(t). \end{cases}$$

Remarque : Ce résultat est à retenir car il n'est pas évident à retrouver !

3.3.2 Dans le cas d'une équation à coefficients constants

Pour trouver une solution particulière de (6), on pourra également utiliser le résultat suivant lorsque b_0 est le produit d'un polynome et d'une exponentielle :

Proposition 9

Si $b_0(t) = Q(t)e^{rt}$ où z est un réel et Q un polynôme à coefficients réels de degré q, alors (6) admet une solution de la forme :

$$\hat{y}(t) = P(t)e^{rt},$$

où P est un polynôme de degré p avec :
- ▶ *$p = q$ si r **n'est pas racine** de l'équation caractéristique (8),*
- ▶ *$p = q + 1$ si r est **racine simple** de l'équation caractéristique (8),*
- ▶ *$p = q + 2$ si r est **racine double** de l'équation caractéristique (8).*

Démonstration : Similaire à celle de la proposition 4. ■

3.3.3 Principe de superposition

Le principe de superposition reste également valable. On a :

Proposition 10

Soit y_1 (respectivement y_2) une solution sur I de

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + f(t) \text{ (respectivement } y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + g(t)),$$

alors, pour tout C_1, $C_2 \in \mathbb{C}$, $Cy_1 + C_2 y_2$ est solution de

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + C_1 f(t) + C_2 g(t).$$

Démonstration : Evidente. ■

4 Systèmes d'équations du premier ordre à coefficients constants

On considère ici un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, c'est à dire un système de la forme :

$$\forall t \in I, \begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + ... + a_{1n}y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + ... + a_{nn}y_n(t) + b_1(t) \end{cases}$$

qui, sous forme matriciel, s'écrit :

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \forall t \in I, \tag{9}$$

avec

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ et } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque : Toute équation différentielle linéaire d'ordre p :

$$y^{(p)}(t) = a_{p-1}y^{(p-1)}(t) + ... + a_0(t)y(t) + b(t), \ t \in I, \tag{10}$$

peut s'écrire sous la forme d'un système de p équations différentielles linéaires du premier ordre.

Exemple : avec $p = 3$: $y'''(t) = a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) + b(t)$ s'écrit sous la forme (9) avec $n = 3$ et :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}, \ B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

On cherche les solutions $Y : I \to \mathbb{R}^n$ de (9) continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Les résultats établis dans le cas des équations d'ordre 1 et 2 se généralisent au cas d'un système différentiel.

4.1 Solutions de (9)

Théorème 11

On considère le système d'équations linéaires (9) avec I intervalle de $\mathbb{R}$, et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues.
Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution Y de (9) définie sur I tout entier telle que $Y(t_0) = Y_0$.

Démonstration : Admise. ■

Proposition 12

Soit $\hat{Y}$ une solution particulière de (9). Les solutions de (9) s'écrivent alors, pour tout $t \in I$:

$$Y(t) = \hat{Y}(t) + \bar{Y}(t),$$

avec $\bar{Y}$ solution de l'équation homogène associée :

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \ \forall t \in I. \tag{11}$$

Démonstration : Soient $\hat{Y}$ et $\bar{Y}$ deux solutions particulières de (9). Alors :

$$\hat{Y}'(t) = A(t)\hat{Y}(t) + B(t) \text{ et } \bar{Y}'(t) = A(t)\bar{Y}(t) + B(t),$$

d'où

$$\bar{Y}'(t) - \hat{Y}'(t) = A(t)(\bar{Y}(t) - \hat{Y}(t)).$$

On a donc : $\bar{Y} = \hat{Y} + Y$ avec $Y := \bar{Y} - \hat{Y}$ solution de (11). ■

4.2 Résolution de l'équation homogène associée

Proposition 13

Soit $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène :

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \ \forall t \in I, \tag{12}$$

est un sous espace vectoriel de dimension n de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ des fonctions continûment dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : Soient Y^1 et Y^2 deux solutions de (12) et C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}(C_1Y^1 + C_2Y^2)'(t) &= C_1Y^{1\prime}(t) + C_2Y^{2\prime}(t) \\ &= C_1A(t)Y^1(t) + C_2A(t)Y^2(t) \\ &= A(t)\left(C_1Y^1 + C_2Y^2\right)(t).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_0$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout $t_0 \in I$ fixé, l'application $\Phi_{t_0} : Y \in \mathcal{S}_0 \longrightarrow Y(t_0) \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme : la linéarité se démontre de manière triviale ; le fait que Φ_{t_0} soit bijective découle du théorème 11. On a donc $\mathcal{S}_0$ de dimension finie et $\dim(\mathcal{S}_0) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. ■

Cela signifie que si l'on a n solutions linéairement indépendantes $Y^1, ..., Y^n$ de (12), on connait toutes les solutions de (12) qui sont obtenues par combinaison linéaire des Y^i :

$$C_1Y^1 + ... + C_nY^n, \ C_i \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas particulier d'un système différentiel homogène à coefficients constants, on a le résultat suivant qui généralise celui de la proposition 3 :

Proposition 14

Les solutions de l'équation homogène :

$$Y'(t) = AY(t), \ \forall t \in I,$$

s'écrivent, pour tout $t \in I$:

$$Y(t) = e^{At}C, \ C \in \mathbb{R}^n,$$

où e^{At} est l'exponentielle de la matrice $B := At$ définie par $e^B := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}B^k$.

Démonstration : Admise. ■

En pratique, le calcul de l'exponentielle d'une matrice A n'est pas évident. Dans le cas où A est diagonale ou diagonalisable, on a cependant les résultats pratiques suivants (cf DM d'Algèbre linéaire) :

- si $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}$ alors $e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$
- si $A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}$ (i.e. A diagonalisable) alors $e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} P^{-1}$.