



**HAL**  
open science

# Inversion d'opérateurs diffusifs pour l'analyse et la résolution de certains problèmes dynamiques non linéaires de dimension élevée

Céline Casenave

► **To cite this version:**

Céline Casenave. Inversion d'opérateurs diffusifs pour l'analyse et la résolution de certains problèmes dynamiques non linéaires de dimension élevée. Automatique. 2006. hal-03330056

**HAL Id: hal-03330056**

**<https://hal.inrae.fr/hal-03330056>**

Submitted on 31 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Inversion d'opérateurs diffusifs pour l'analyse  
et la résolution de certains problèmes  
dynamiques non linéaires de dimension élevée

CÉLINE CASENAVE

Mémoire M2R SAID

Sous la responsabilité scientifique de  
Andrei Doncescu  
LAAS-CNRS, Toulouse

Septembre 2006



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 La Représentation diffusive</b>	<b>3</b>
1.1 Principe général	3
1.2 Cas particulier $\mu(t, \cdot) \in L^1_{loc}$ : théorème fondamental	7
1.3 Questions de topologie et d'algèbre : le cas général	10
1.3.1 Le produit $\#_\gamma$	11
1.3.2 Espaces $\Delta_\gamma$ et $\Delta'_\gamma$	11
1.3.3 Espaces $\Delta_\gamma$ et $\Delta'_\gamma$	14
1.4 Conclusion et extensions	17
<b>2 Inversion <math>\gamma</math>-symbolique</b>	<b>19</b>
2.1 Problème théorique	19
2.2 Inversion numérique	20
2.2.1 Cas de $\gamma$ -symboles inversibles dans $\Sigma_\gamma$	20
2.2.2 Cas de $\gamma$ -symboles non inversibles dans $\Sigma_\gamma$	25
2.3 Exemples	27
2.4 Extension aux opérateurs matriciels	30
<b>3 Applications à certains problèmes dynamiques</b>	<b>33</b>
3.1 Agrégation de systèmes dynamiques	33
3.1.1 Principe d'agrégation	33
3.1.2 Application aux problèmes de contrôle	34
3.1.3 Cas du contrôle de systèmes dynamiques	36
3.2 Identification	38
3.2.1 Identification d'un opérateur via son $\gamma$ -symbole	39
3.2.2 Problématique générale	40
3.2.3 Identification d'un modèle linéaire $H(\partial_t)X = Bu$ de sortie mesurée $y = CX$	41
3.2.4 Identification de modèles $H(\partial_t)X = \mathbf{bf}(X)\mathbf{g}(u)$ de sortie mesurée $y = h(X)$	41
3.2.5 Identification de modèles agrégés de sortie mesurée $y = h(X, u)$	43
3.3 Réduction de modèles non linéaires	44
<b>4 Conclusion - Vers des problèmes de grande dimension</b>	<b>47</b>
<b>Annexes</b>	<b>48</b>
<b>A Notions sur les Opérateurs</b>	<b>48</b>
A.1 Sur les opérateurs linéaires intégraux	48
A.2 Notions générales	49
<b>B Expressions analytiques des coefficients intervenant dans la résolution du problème de l'inversion numérique</b>	<b>50</b>
B.1 Calculs des coefficients $K^{qkr l}$	50
B.2 Calculs des coefficients $A^{jk}$ et $C^k$	52
<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

## Introduction

De nombreux systèmes dynamiques de la physique ou d'autres domaines tels que la biologie peuvent être modélisés sous la forme générique :

$$H(\partial_t)X = f(X, u),$$

où  $H(\partial_t)$  est un opérateur dynamique (en général matriciel) linéaire défini par une matrice de transfert  $H$  non instable non nécessairement rationnelle et  $\partial_t$  est l'opérateur de dérivation temporelle. Sous hypothèses de régularité en pratique peu restrictives concernant  $H(\partial_t)$ , de tels modèles sont dits pseudo-différentiels, du fait de certaines analogies avec les modèles différentiels (i.e.  $H(\partial_t) = \partial_t$ ). Par leur richesse, les modèles pseudo-différentiels présentent de plus en plus d'intérêt dans les problèmes actuels en modélisation, analyse, contrôle etc. Cependant les outils habituels d'analyse, dédiés au cas particulier  $H(\partial_t) = \partial_t$ , sont mal adaptés aux modèles pseudo-différentiels, d'ailleurs d'autant plus difficiles à étudier qu'ils peuvent être de dimension élevée, ce qui est par exemple le cas pour nombre de problèmes de la biologie, du génie électrique, etc.

Dans ce domaine très ouvert, la représentation diffusive présente un grand intérêt du fait, entre autres, de l'étendue de la classe d'opérateurs auxquels elle s'applique. Sous représentation diffusive, un opérateur  $H(\partial_t)$  est représenté par son  $\gamma$ -symbole, de nature fonctionnelle (donc plus simple) et directement déduit de la fonction  $H$ , et peut être formulé au moyen d'une réalisation d'état de dimension raisonnable du point de vue numérique, ce quelle que soit la taille du système. Outre cet aspect pratique intéressant, la représentation diffusive offre un cadre mathématique unifié et adapté à l'analyse des systèmes dynamiques pseudo-différentiels. Dans ce contexte, les problèmes (de nature opératoire) de modélisation, de simulation, d'identification de systèmes, de réduction de modèles, etc. peuvent être reformulés de manière à ce que l'objet du problème soit le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur solution. Tel est le cas également des opérations algébriques sur les opérateurs auxquelles sont associées des opérations sur les  $\gamma$ -symboles. Ainsi, le produit  $\#_\gamma$  de deux  $\gamma$ -symboles sera associé, dans l'espace des  $\gamma$ -symboles, au produit de composition de deux opérateurs.

Dans ce mémoire, on s'intéresse plus particulièrement à la formulation dans l'espace des  $\gamma$ -symboles du problème de l'inversion d'opérateurs, traitée dans une seconde partie faisant suite à une introduction au principe de la représentation diffusive. L'algèbre des  $\gamma$ -symboles considérée jusqu'à présent n'étant pas unitaire, on l'immerge dans une algèbre plus grande dans laquelle l'inversion est bien définie. Dans ce cadre algébrique étendu, des méthodes d'inversion  $\gamma$ -symbolique numérique sont proposées et testées sur quelques exemples. L'extension aux opérateurs matriciels, essentiels en pratique, est ensuite abordée de manière formelle, les questions topologiques étant similaires à celles du cas scalaire.

Dans le contexte ainsi défini, des problèmes délicats tels l'identification ou la réduction de modèles dynamiques pseudo-différentiels non linéaires peuvent être abordés de façon originale et relativement simple. Sur la base de l'inversion  $\gamma$ -symbolique, on propose en particulier dans la troisième partie différentes techniques d'identification selon les propriétés du système considéré, ainsi qu'une méthode de réduction de modèles.

# 1 La Représentation diffusive

Les opérateurs linéaires intégraux c'est à dire les opérateurs  $\mathcal{H}$  de la forme :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t, s)u(s)ds \quad (1)$$

sont très fréquents dans les modèles de la physique. L'étude de tels opérateurs est donc primordiale et d'autant plus délicate que la classe d'opérateurs considérée est très vaste : elle englobe en particulier les opérateurs rationnels et, si le noyau  $\mathbf{h}$  est étendu aux distributions, les opérateurs différentiels. Tant pour l'analyse que pour la mise en œuvre numérique, il peut paraître judicieux d'en chercher une formulation plus intéressante que la formulation intégrale (1), par nature de manipulation délicate. En effet la formulation (1) est *héréditaire* : la détermination de la valeur de  $\mathcal{H}u$  à un temps  $t$  fait intervenir tout le passé de  $u$ , ce qui, du point de vue numérique par exemple, n'est pas économique.

L'approche dénommée *représentation diffusive*, présentée dans [6], s'inscrit dans cette problématique : elle permet la formulation de  $\mathcal{H}$  au moyen de réalisations d'état, c'est-à-dire, dans le cas où l'opérateur  $\mathcal{H}$  est *causal* et  $u$  à support dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$\dot{X} = Bu, \quad (2)$$

$$\mathcal{H}u = CX, \quad (3)$$

où  $B$  et  $C$  sont des opérateurs *locaux en temps*. Du fait de la localité des opérateurs et de l'équation, cette formulation n'est pas héréditaire, une intégration de "proche en proche" de (2) pouvant être réalisée, ne nécessitant aucunement la mémorisation du passé de  $u$ . La disparition de la nature héréditaire dans la formulation d'état (2,3) est en fait due à l'introduction de la variable intermédiaire  $X$  dans laquelle est "résumé" le passé de  $u$  d'une manière suffisante pour la synthèse de  $\mathcal{H}$  définie par l'opérateur  $C$ . Au delà des opérateurs  $\mathcal{H}$  causaux, on pourra trouver dans [6] des formulations d'état généralisées de la forme :

$$DX = Bu,$$

$$\mathcal{H}u = CX,$$

où  $D$  est un opérateur local plus général que  $\partial_t$ , éventuellement spatial.

Via la représentation diffusive on a accès à des réalisations d'état variées d'opérateurs intégraux, ce qui, sur le plan numérique notamment, permettra la simulation de systèmes complexes. Mais cette approche est bien plus qu'une méthode dédiée aux seules approximations numériques : c'est une méthodologie générale qui fournit un cadre mathématiques unifié pour l'analyse, la manipulation et la réalisation concrète d'une grande classe d'opérateurs intégraux. Ainsi, un opérateur rationnel simple et un opérateur non convolutif très complexe sont selon cette approche appréhendés et traités de manière identique et relativement simple, le passage aux réalisations numériques utilisables étant possible à tout moment.

L'essentiel de la représentation diffusive (dans le cas causal) est présenté dans les paragraphes qui suivent.

## 1.1 Principe général

On considère un opérateur linéaire intégral causal  $\mathcal{H}$  de noyaux  $\mathbf{h}$  (cf. (1)) et de "réponse impulsionnelle"  $h$  définie par  $h(t, s) := \mathbf{h}(t, t - s)$ , avec  $h(t, \cdot)$  supposée, dans un premier temps, localement intégrable pour tout  $t$ . Par simple réécriture de (1), on déduit :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t) &= (h(t, \cdot) * u)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)u(t - s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)\mathbf{u}(t, s)ds, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{u}(t, s) = u(t - s)$  est appelée *histoire* de  $u$  (à l'instant  $t$ ). Avec la notation  $\langle f, g \rangle := \int f(s)g(s) ds$ , on obtient alors la propriété fondamentale pour la suite :

$$\forall t, \quad (\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle,$$

c'est-à-dire : le résultat de l'opérateur  $\mathcal{H}$  sur une fonction  $u$  s'exprime par le *produit* (au sens du crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) de la *réponse impulsionnelle* de  $\mathcal{H}$  et de l'*histoire* de  $u$ .

On notera d'une part que le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est indépendant de  $t$  (au sens où le domaine parcouru par  $s$  l'est), d'autre part qu'à chaque  $t$  (fixé),  $h(t, \cdot)$  et  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  sont des fonctions d'une variable temps  $s \in \mathbb{R}$ . Ces deux propriétés, qui ne sont pas vérifiées sous la formulation initiale (1), vont permettre d'une part des transformations simples et riches en propriétés intéressantes, d'autre part de définir un cadre topologique clair basé sur les espaces fonctionnels en dualité par le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On considère une transformation linéaire inversible  $\mathcal{A}$  (indépendante de  $t$  et portant sur  $\mathbf{u}(t, \cdot)$ ) telle que, de manière pour l'instant *formelle*, on ait :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathcal{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}(t, \cdot) \rangle.$$

En transposant  $\mathcal{A}^{-1}$  sur  $h(t, \cdot)$  via son adjoint formel, on a :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle (\mathcal{A}^{-1})^*h(t, \cdot), \mathbf{A}\mathbf{u}(t, \cdot) \rangle,$$

soit encore :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle$$

avec  $\psi(t, \cdot) = (\mathbf{A}\mathbf{u}(t, \cdot))$  et  $\mu(t, \cdot) = (\mathcal{A}^*)^{-1}h(t, \cdot)$ . On a ainsi accès à de nouvelles formulations de l'opérateur  $u \mapsto \mathcal{H}u$  qui toutes ont l'avantage de "séparer ce qui se rapporte à  $\mathcal{H}$  de ce qui se rapporte à  $u$ ", et dont certaines pourraient être particulièrement intéressantes. Ainsi par exemple, le cas où  $\psi$  serait solution d'une équation différentielle de "résolution aisée", du type :

$$\partial_t \psi = f(\psi, u)$$

pourrait présenter de gros avantages sur le plan numérique.

Considérons maintenant l'opérateur linéaire  $(\partial_t - pI)$ . On peut montrer que cet opérateur admet un inverse dans  $\mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R}))$ , algèbre des opérateurs linéaires continus et causaux dans  $L^2(\mathbb{R})$ , si et seulement si  $\text{Re}(p) < 0$ . On introduit alors la définition abstraite (dont la justification apparaîtra plus loin) :

**Définition 1** On appelle *opérateur de représentation diffusive*, noté  $\mathfrak{Rd}$ , la fonction opératorielle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd} : \quad \mathbb{R}_- + i\mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R})) \\ p &\longmapsto \mathfrak{Rd}_p = (\partial_t - pI)^{-1} \end{aligned}$$

On note  $\Psi(t, \cdot)$  la *représentation diffusive* de  $u$ , c'est à dire  $\Psi(t, p) = \mathfrak{Rd}_p u(t)$ . Il découle de la définition précédente que  $\Psi$  est l'unique solution de la famille d'équations différentielles dans  $L^2(\mathbb{R}_t)$  :

$$\partial_t \Psi(t, p) = p\Psi(t, p) + u(t). \quad (4)$$

La fonction  $\Psi$  étant solution d'une équation différentielle, elle pourra, dans le cas où  $u$  est à support dans  $[t_0, +\infty[$ , être obtenue (éventuellement numériquement) par intégration de cette

équation à partir d'une condition initiale  $\Psi(t_0, p) = 0$ . On cherche donc à définir un opérateur  $\mathcal{A}$  adapté, c'est-à-dire par exemple tel que :

$$(\mathcal{A}u(t, \cdot))(\xi) = (\partial_t - \gamma(\xi)I)^{-1}u(t), \quad \gamma(\xi) \in \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R},$$

où  $\gamma$  est une fonction de  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Pour cela, on considère un contour  $\gamma \subset \mathbb{R}_- + i\mathbb{R}$  défini par un arc simple fermé (éventuellement à l'infini) qui sépare  $\mathbb{C}$  en deux sous-espaces connexes disjoints notés  $\Omega_\gamma^+$  et  $\Omega_\gamma^-$ . Pour des raisons techniques qui apparaîtront plus loin, on suppose en outre vérifiées les hypothèses suivantes :

$$\exists \alpha_\gamma \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tels que :}$$

$$\bullet e^{i[-\alpha_\gamma, \alpha_\gamma]}\mathbb{R}_+ + a \subset \Omega_\gamma^+, \quad (5)$$

$$\bullet \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \subset \Omega_\gamma^+, \quad (6)$$

$$\bullet \gamma \cap i\mathbb{R} \text{ de mesure nulle.} \quad (7)$$

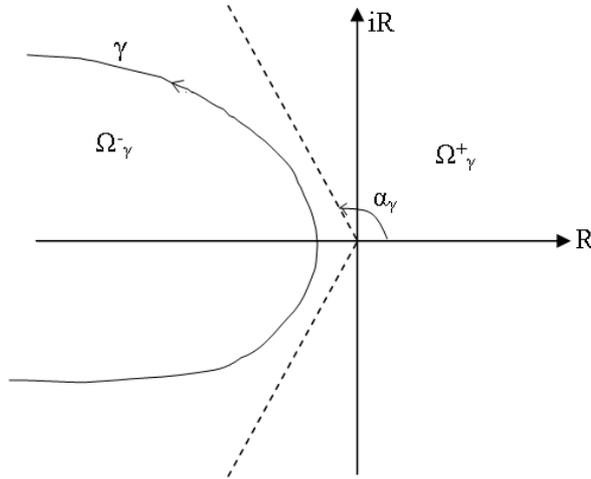


FIG. 1 – Exemple de contour  $\gamma$ .

On suppose enfin que l'arc  $\gamma$  est paramétré au moyen d'une fonction encore notée  $\gamma : \xi \in J_\gamma \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(\xi) \in \mathbb{R}_- + i\mathbb{R}$  lipschitzienne, et qu'il existe  $b, c > 0$  tels que

$$b \leq |\gamma'(\xi)| \leq c \quad \xi\text{-pp.} \quad (8)$$

De ce qui précède, on déduit aisément que  $\mathfrak{R}d_{\gamma(\xi)}u(t)$  est l'unique solution de l'équation différentielle dans  $L^2(\mathbb{R}_t)$  :

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi)\psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in J_\gamma. \quad (9)$$

**Remarque 2** *Du fait de la condition sectorielle (5) imposée au contour  $\gamma$ , cette équation est de nature diffusives [10]. Grâce à cette propriété, des approximations relativement peu coûteuses de l'équation d'état (9) pourront être construites. En effet, la discrétisation en  $\xi$  de  $\gamma$  sera d'autant moins fine que le contour s'éloignera de l'axe imaginaire pur : quelques dizaines de points de discrétisation en  $\xi$  seront en pratique suffisants.*

Lorsque  $u$  est à support dans  $[t_0, +\infty[$ , on a nécessairement  $\psi(t_0, \xi) = 0$ ; d'après la formule de Duhamel pour (9) et en notant  $\mathcal{L}$  la transformation de Laplace causale :

$$\mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) = \int_{t_0}^t e^{\gamma(\xi)(t-s)}u(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)(t-s)}u(s)1_{\mathbb{R}_+}(t-s)ds \quad \xi\text{-pp},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}u(t-s)1_{\mathbb{R}_+}(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}\mathbf{u}(t,s)ds = (\mathcal{L}_+\mathbf{u}(t, \cdot))(-\gamma(\xi)) \quad \xi\text{-pp}. \end{aligned}$$

On peut alors exprimer l'opérateur  $\mathcal{A}$  précédemment évoqué de la manière suivante :

**Définition 3** On note  $\mathcal{L}_\gamma$  l'opérateur défini par :

$$(\mathcal{L}_\gamma g)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}g(s)ds = (\mathcal{L}_+g)(-\gamma(\xi))$$

On a en effet :

$$\mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi) \quad \xi\text{-pp},$$

d'où, toujours formellement :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi,$$

avec  $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$  et  $\mu(t, \xi) = ((\mathcal{L}_\gamma^*)^{-1}h(t, \cdot))(\xi)$ .

**Proposition 4** L'adjoint  $\mathcal{L}_\gamma^*$  de l'opérateur  $\mathcal{L}_\gamma$  est défini par :

$$(\mathcal{L}_\gamma^* f)(s) = \begin{cases} \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} f(\xi) d\xi & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

**Preuve.** Par définition, on a :

$$\langle \mathcal{L}_\gamma^* f, g \rangle_s = \langle f, \mathcal{L}_\gamma g \rangle_\xi.$$

Donc, sous réserve d'applicabilité du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\gamma^* f, g \rangle_s &= \int_{J_\gamma} f(\xi) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} g(s) ds d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) 1_{\mathbb{R}_+}(s) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} f(\xi) d\xi ds \\ &= \langle 1_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)\cdot} f(\xi) d\xi, g \rangle_s. \end{aligned}$$

■

**Remarque 5** On a  $(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s) = h(t, s)$ . Or, par définition de  $\mathcal{L}_\gamma^*$ ,  $\text{supp}(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot)) \subset ]0, +\infty[$ . Donc les opérateurs considérés sont nécessairement causaux.

De manière formelle on a donc bien :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_{\xi}$$

avec  $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_{\gamma} \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$  et  $(\mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, \cdot))(s) = h(t, s)$ .

Au-delà du cadre formel, cette égalité n'est cependant légitime que sous certaines hypothèses. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, s) \mathbf{u}(t, s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, \cdot))(s) \mathbf{u}(t, s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s) \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} \mu(t, \xi) d\xi \mathbf{u}(t, s) ds, \end{aligned}$$

expression égale à :

$$\int_{J_{\gamma}} \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds \mu(t, \xi) d\xi = \int_{J_{\gamma}} (\mathcal{L}_{\gamma} \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi) \mu(t, \xi) d\xi = \int_{J_{\gamma}} \psi(t, \xi) \mu(t, \xi) d\xi.$$

si et seulement si le théorème de Fubini est applicable. Ce point, essentiel pour l'applicabilité de la méthode, fait l'objet des paragraphes suivants qui permettent de donner un sens rigoureux aux développements formels précédents. On notera que les hypothèses requises imposent certaines restrictions significatives qui devront être soigneusement prises en compte en pratique, faute de quoi des résultats absurdes seraient à craindre.

## 1.2 Cas particulier $\mu(t, \cdot) \in L^1_{loc}$ : théorème fondamental

On rappelle tout d'abord les hypothèses suivantes concernant  $\gamma$  :

$$\exists \alpha_{\gamma} \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tels que :}$$

$$\bullet e^{i[-\alpha_{\gamma}, \alpha_{\gamma}] \mathbb{R}_+} + a \subset \Omega_{\gamma}^+ \quad (10)$$

$$\bullet \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \subset \Omega_{\gamma}^+ \quad (11)$$

$$\bullet \gamma \cap i\mathbb{R} \text{ de mesure nulle} \quad (12)$$

$$\bullet \text{il existe } b \text{ et } c \text{ tels que } 0 < b \leq |\gamma'(\xi)| \leq c \quad \xi\text{-pp.} \quad (13)$$

Soit  $H(t, \cdot) := \mathcal{L}h(t, \cdot)$  le symbole Laplace d'un opérateur intégral causal  $\mathcal{H}$  de réponse impulsionnelle  $h$  telle que  $h(t, \cdot)$  soit localement intégrable pour tout  $t$ . Soit  $\gamma$  un contour vérifiant les hypothèses rappelées ci-dessus. Sous ces hypothèses, on a le résultat :

**Théorème 6** *Si :*

► (i)  $H(t, \cdot)$  est holomorphe dans  $\Omega_{\gamma}^+$  avec un nombre fini de points de branchement sur  $\gamma$  notés  $p_k$ , tels que :

$$\forall k, \forall t, \forall s > 0, \int_{c_r^k} e^{ps} H(t, p) dp \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

où  $c_r^k$  est le cercle de centre  $p_k$  et de rayon  $r$ ,

► (ii) la trace de  $H(t, \cdot)$  sur  $\gamma$  est localement Lebesgue intégrable sur  $\gamma$ ,

► (iii) et il existe une suite  $(\rho_n)_n$  telle que  $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $H(t, \rho_n e^{i\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  uniformément par rapport à  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,

alors  $\forall u$  à support minoré par  $t_0$ ,  $(\mathcal{H}u)(t)$  s'exprime par :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{J_\gamma} \mu(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi,$$

où

$$\mu(t, \cdot) \text{ solution de } \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot),$$

et

$$\psi(t, \xi) \text{ solution de } \begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), & \forall \xi \in \mathbb{R} \\ \psi(t_0, \cdot) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

**Preuve.** Par simplicité, on considère seulement le cas  $\gamma$  borné; le cas non borné se traite de manière identique aux adaptations techniques près. Sans perdre de généralités, on suppose que  $t_0 = 0$ .

On a :

$$\forall t > 0, \forall s > 0, h(t, s) = (\mathcal{L}^{-1} H(t, \cdot))(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ps} H(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp,$$

avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$  dans le domaine de convergence de l'intégrale.

Le contour  $\gamma$  étant fermé, il existe un  $R > 0$  à partir duquel on peut définir un contour  $\Gamma$  de la forme donnée en figure (2).

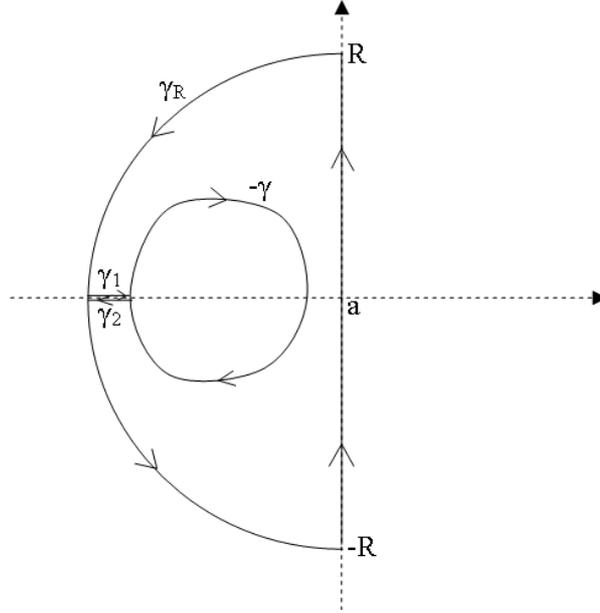


FIG. 2 – contour  $\Gamma$

On a :

$$\Gamma = (a + i[-R, R]) + \gamma_R + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma,$$

avec  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  et  $\gamma_1 = -\gamma_2$ . Or, d'après l'hypothèse (i), on a :

$$\int_{\Gamma} e^{ps} H(t, p) dp = 0,$$

d'où :

$$\int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp + \int_{\gamma_R} e^{ps} H(t, p) dp - \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp = 0.$$

D'après le lemme de Jordan, et du fait des hypothèses (i) et (iii), on peut alors montrer que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{ps} H(t, p) dp = 0,$$

d'où :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp = \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp \quad \forall s > 0.$$

On a donc,  $\forall t > 0, \forall s > 0$  :

$$h(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} H(t, \gamma(\xi)) \gamma'(\xi) d\xi,$$

où l'intégrale sur  $J_{\gamma}$  s'entend au sens de Lebesgue du fait de l'hypothèse (ii). En posant  $\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi))$  on a alors :

$$\forall t > 0, h(t, s) = \begin{cases} \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} \mu(t, \xi) d\xi & \forall s > 0 \\ 0 & \forall s \leq 0, \end{cases}$$

soit encore :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, \cdot))(s).$$

On a ainsi, pour toute  $u$  causale et régulière, et  $\forall t > 0, \forall \tau > 0$  :

$$(h(\tau, \cdot) * u)(t) = \int_0^t h(\tau, s) u(t-s) ds = \int_0^t \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} \mu(\tau, \xi) d\xi u(t-s) ds.$$

Or, par hypothèse,  $h(\tau, \cdot)$  est supposée Lebesgue-intégrable. Donc, pour toute  $u$  causale et régulière,  $(h(\tau, \cdot) * u)(t) < +\infty$  pour tout  $t > 0$  et on peut alors appliquer le théorème de Fubini sur l'espace  $L^1(0, t) \otimes L^1(\mathbb{R}_{\xi})$ , d'où :

$$\begin{aligned} (h(\tau, \cdot) * u)(t) &= \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \int_0^t e^{\gamma(\xi)s} u(t-s) ds d\xi \\ &= \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds d\xi \\ &= \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \psi(t, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

où  $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_{\gamma} \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t) \\ \psi(t_0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

■

**Remarque 7** ► Par définition, la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  n'est définie que sur le demi plan ouvert  $\{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(s) > \sigma_0(f)\}$  où  $\sigma_0(f) = \inf\{\sigma > 0 / \exists M_{\sigma} > 0 \text{ tq } |f(t)| \leq M_{\sigma} e^{\sigma t}, \forall t \in \mathbb{R}\}$ . Or, si  $f$  est à support dans  $\mathbb{R}_+$  on peut montrer que  $\mathcal{L}f$  se prolonge analytiquement dans un domaine  $\Sigma \supset \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$ . C'est donc en ce sens que  $H(t, \cdot)$  peut être holomorphe dans  $\Omega_{\gamma}^+$ .

► Les opérateurs de symbole-Laplace de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{1}{p^{\alpha}}$$

avec  $\alpha \in [0, 1[$  vérifient les hypothèses de ce théorème (NB : l'arc  $\gamma$  est dans ce cas nécessairement fermé à l'infini du fait que la fonction  $\frac{1}{p^\alpha}$  nécessite une coupure entre 0 et l'infini). En effet, on a en particulier :

$$\int_{C_r} \frac{1}{p^\alpha} dp = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^\alpha e^{i\alpha\theta}} r i e^{i\theta} d\theta = r^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} i e^{i(1-\alpha)\theta} d\theta < c^{te} r^{1-\alpha} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

car  $\alpha \in [0, 1[$ .

► Avec ce théorème, on obtient une réalisation d'état utilisable de l'opérateur considéré. Cette réalisation d'état est de dimension infinie puisque à chaque  $\xi$  fixé, on a une équation différentielle en  $\psi(\cdot, \xi)$ .

► On a montré (cf. preuve) que sous les hypothèses du théorème,

$$\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi)) \quad (15)$$

est solution de l'équation :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s).$$

Cependant cette équation admet plusieurs solutions : le  $\mu$  de la réalisation d'état de l'opérateur  $\mathcal{H}$  n'est donc pas unique. Dans la suite, on définira des classes d'équivalence de  $\mu$  correspondant tous à un même opérateur.

### Terminologie

– un opérateur  $\mathcal{H}$  tel que, pour tout  $u$  à support minoré, on ait

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle_s = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi,$$

sera dit  $\gamma$ -réalisable ou réalisable sur  $\gamma$ ,

- la fonction  $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} = \mathfrak{Rd}_\gamma u$   $\xi$ -pp sera appelée  $\gamma$ -représentation de  $u$ ,
- toute solution  $\mu$  de l'équation  $h = \mathcal{L}_\gamma^* \mu$  sera appelée  $\gamma$ -symbole de  $H(t, \partial_t)$ , la solution particulière donnée par (15) étant dénommée  $\gamma$ -symbole canonique,
- l'expression  $\langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi$  sera appelée  $\gamma$ -synthèse de  $\mathcal{H}u$ ,
- un opérateur  $\mathcal{H}$  sera dit *diffusif au sens strict* si il admet un  $\gamma$ -symbole avec  $\gamma$  vérifiant (10), (11) et (12),
- enfin, un opérateur  $\mathcal{H}$  sera dit *diffusif au sens large* si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial_t^{-n} \circ \mathcal{H}$  est diffusif au sens strict.

### 1.3 Questions de topologie et d'algèbre : le cas général

Le théorème fondamental précédent permet d'obtenir une réalisation diffusive de  $\mathcal{H}$  via son  $\gamma$ -symbole, ce pour de nombreux opérateurs intégraux. Cependant les hypothèses de ce théorème s'avèrent dans bien des cas inutilement trop restrictives. En effet la première hypothèse sur  $H(t, \cdot)$  interdit par exemple l'utilisation du théorème pour l'opérateur d'intégration  $\partial_t^{-1}$  pourtant essentiel en pratique. Ce théorème exclut également tous les opérateurs dont le symbole-Laplace  $H$  a des pôles sur le contour  $\gamma$ . Or, de tels opérateurs admettent une réalisation diffusive, à condition d'admettre des  $\gamma$ -symboles de nature *distributionnelle*, ce qu'interdit, précisément, le théorème précédent.

D'autres raisons d'ordre numérique suggèrent également de "passer aux distributions". En effet, la complétude de l'espace des  $\gamma$ -symboles, propriété mathématique indispensable notamment

pour une gestion correcte des approximations, ne peut avoir lieu que pour un espace de distributions. En outre, les approximations du  $\gamma$ -symbole conduisant à des réalisations d'état de dimension finie sont nécessairement de la forme  $\sum a_k \delta_{\xi_k}$  (où  $\delta_{\xi_k}$  est la distribution de Dirac en  $\xi_k$ ). Enfin, tout problème d'optimisation portant sur le  $\gamma$ -symbole nécessite la fermeture de l'espace des  $\mu$ , qui est donc nécessairement, là encore, un espace des distributions. Toutes ces raisons imposent donc d'étendre le résultat du paragraphe précédent à une classe plus large d'opérateurs à  $\gamma$ -symboles distributionnel.

Pour cela, on cherche un espace de  $\gamma$ -symboles  $\Delta'_\gamma$ , dual topologique d'un espace  $\Delta_\gamma$  tel que,  $\forall \mu(t, \cdot) \in \Delta'_\gamma, \forall \psi(t, \cdot) \in \Delta_\gamma$ , on ait :

$$\langle h, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{L}^*(\Delta'_\gamma), \mathcal{L}^{-1}(\Delta_\gamma)} = \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma},$$

avec  $h = L_\gamma^* \mu$  et  $\psi = L_\gamma u$ ; il faut entre autres pour cela garantir l'applicabilité du théorème de Fubini dans le cadre de la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$ . L'espace  $\Delta'_\gamma$  doit en outre être suffisamment grand pour englober les  $\gamma$ -symboles de certains opérateurs essentiels et doit donc sortir du cadre des fonctions. On le choisira en outre de telle manière que le produit  $\#_\gamma$  défini par :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \\ \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } K(t, \partial_t) \end{array} \right\} \implies \mu \#_\gamma \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \circ K(t, \partial_t)$$

soit interne et continu dans  $\Delta'_\gamma$  : ainsi la composition de deux opérateurs ( $\gamma$ -réalisables), opération très fréquemment utilisée, pourra être utilisée sans aucun problème en restant dans le cadre de la représentation diffuse. On s'assurera de plus que  $\forall u \in D(R_s), \psi = L_\gamma u \in \Delta_\gamma$  : par densité de  $D(R_s)$  on pourra alors étendre ce résultat à de nombreux espaces. La classe d'entrées  $u$  admissibles doit en effet être suffisamment grande pour satisfaire aux besoins pratiques.

### 1.3.1 Le produit $\#_\gamma$

La composition d'opérateurs étant une opération essentielle, on s'intéresse à l'opération qui lui est associée dans l'espace des  $\gamma$ -symboles.

**Définition 8** On appelle produit  $\#_\gamma$  l'opération sur les  $\gamma$ -symboles définie comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \\ \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } K(t, \partial_t) \end{array} \right\} \implies \mu \#_\gamma \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \circ K(t, \partial_t).$$

On a notamment la formulation suivante sous forme de réalisation d'état :

$$\langle \mu \#_\gamma \nu, \mathfrak{Rd}_\gamma(\cdot) \rangle = \langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma \langle \nu, \mathfrak{Rd}_\gamma(\cdot) \rangle \rangle,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi = \gamma(\xi) \psi + u \\ y = \langle \mu \#_\gamma \nu, \psi \rangle \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{E/S} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi_1 = \gamma(\xi) \psi_1 + u \\ \partial_t \psi_2 = \gamma(\eta) \psi_2 + \langle \nu, \psi_1 \rangle \\ y = \langle \mu, \psi_2 \rangle \end{array} \right.$$

### 1.3.2 Espaces $\Delta_\gamma$ et $\Delta'_\gamma$

Dans ce paragraphe, on suppose la fonction  $\gamma : J_\gamma \rightarrow C$  régulière, non bornée de  $R$  dans  $C$  (c'est à dire  $J_\gamma = R$ ), lipschitzienne et vérifiant la condition sectorielle (10). On suppose de plus, sans perdre de généralité, qu'il existe  $\xi_0$  et  $\lambda > 0$  tels que :

- $\text{Re } \gamma(\xi) \leq -\lambda |\xi| \quad \forall |\xi| \geq \xi_0,$
  - $\forall n > 0, \partial_\xi^n \gamma$  bornée,
- (16)

et qu'il existe  $a, b > 0$  tels que

$$a \leq |\gamma'(\xi)| \leq b \quad \xi\text{-pp.} \quad (17)$$

On considère alors l'espace  $D_{L_P^\infty}(R) = \{\varphi \in C^\infty(R), \forall n \in \mathbb{N}, \partial_\xi^n \varphi \in L_P^\infty(R)\}$  où  $L_P^\infty(R)$  est l'espace de Lebesgue défini par la norme :

$$\|\varphi\|_{L_P^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} P(x) |\varphi(x)|, \text{ où } P(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

L'espace  $D_{L_P^\infty}(R)$  est de Fréchet pour la famille de semi-normes :

$$\|\varphi\|_n = \|\partial_\xi^n \varphi\|_{L_P^\infty}.$$

**Remarque 9** *Du fait de la présence du poids  $P$ , les fonctions de  $D_{L_P^\infty}(R)$  sont décroissantes à l'infini.*

On cherche un espace que l'on notera  $\Delta_\gamma$  tel que  $\forall u \in D(R_s), \psi = L_\gamma u \in \Delta_\gamma$ . Cependant, comme  $D(R_s)$  n'est pas stable par convolution avec une fonction à support dans  $R_+$  et que l'on a besoin de cette propriété pour démontrer quelques résultats particuliers dans la suite, on se placera dans l'espace  $S_d(R_s)$ , sous espace (dense dans  $S(R_s)$ ) des fonctions de  $S(R_s)$  à support majoré.

On a alors le résultat suivant :

$$\forall \mathbf{u} \in S_d(\mathbb{R}_s), \psi \in \mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R}).$$

L'espace  $\Delta_\gamma$  recherché sera donc tel que  $\Delta_\gamma \subset D_{L_P^\infty}(R)$ . Comme la complétude de  $\Delta_\gamma$  est une propriété nécessaire, on définit  $\Delta_\gamma$  de la manière suivante :

**Définition 10**  $\Delta_\gamma$  est le complété de  $L_\gamma(S_d(R_s))$  dans  $D_{L_P^\infty}(R)$ .

Cet espace est muni de la topologie induite par celle de  $D_{L_P^\infty}(R)$ .

**Caractérisation des éléments de  $\Delta_\gamma$**  On a le résultat (preuve non développée ici) :

**Proposition 11**

$$\psi \in \Delta_\gamma \iff \begin{cases} \psi \in \mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R}) \\ \psi = \Psi|_\gamma \text{ avec } \Psi \text{ holomorphe sur } \Omega_\gamma^- \end{cases}$$

où  $\Psi|_\gamma$  est la trace de  $\Psi$  sur  $\gamma$ .

**Classe d'entrées  $u$  associée à  $\Delta_\gamma$**  On peut montrer que pour tout  $u \in D'(0, T)$  (cadre très général), on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot) \text{ analytique dans } \mathbb{C} \\ &\text{et } \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot) \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow +\infty \text{ dans } \mathbb{C}^- \end{aligned}$$

d'où :

$$\psi \in \Delta_\gamma \text{ et ce pour tout } \gamma.$$

La fonction  $L_\gamma$  est en fait très régularisante : l'espace  $\Delta_\gamma$  permet donc de considérer une très large classe d'entrées  $u$ , classe suffisamment large pour les besoins pratiques.

On considère ensuite l'espace  $\Delta'_\gamma$  de  $\gamma$ -symboles, défini comme suit :

**Définition 12**  $\Delta'_\gamma$  est le dual topologique de  $\Delta_\gamma$ .

On a :

$$\Delta'_\gamma = \mathcal{D}'_{L^p_\infty} / \ker \mathcal{L}_\gamma^*.$$

Pour un opérateur  $H$  donné, il n'y a donc pas unicité du  $\gamma$ -symbole. A un opérateur est associé une classe d'équivalence de  $\gamma$ -symboles liés par la relation d'équivalence :

$$\mu_1 \sim \mu_2 \iff \mathcal{L}_\gamma^*(\mu_1 - \mu_2) = 0.$$

Un représentant particulier de cette classe d'équivalence est appelé  $\gamma$ -symbole canonique ; il est défini par :

$$\mu(t, \cdot) = \frac{\gamma'(\cdot)}{2i\pi} H(t, \cdot)|_{\gamma^+},$$

où  $H(t, \cdot)|_{\gamma^+}$  est la trace à droite de  $H(t, \cdot)$  sur  $\gamma$  au sens des distributions. Dans la suite, on notera  $\Delta'_{\gamma c}$  le sous ensemble de  $\Delta'_\gamma$  des  $\gamma$ -symboles canoniques.

**Caractérisation des éléments de  $\Delta_\gamma$**  On a tout d'abord le résultat suivant concernant les  $\gamma$ -symboles canoniques :

**Proposition 13**

$$\mu \in \Delta'_{\gamma c} \iff \begin{cases} \mu \in \mathcal{D}'_{L^p_\infty}(\mathbb{R}) \\ \mu(t, \cdot) = \frac{\gamma'(\cdot)}{2i\pi} H(t, \cdot)|_{\gamma(\cdot)^+} \text{ avec } H \text{ holomorphe sur } \Omega_\gamma^+, \end{cases}$$

où  $H(t, \cdot)|_{\gamma^+}$  est la trace à droite de  $H$  sur  $\gamma$  (au sens des distributions).

En pratique on utilisera également les résultats suivants, suffisants dans un grand nombre de cas.

**Proposition 14** ► Si  $\mu$  est une mesure,

$$\mu \in \Delta'_\gamma \iff \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\xi|} |\mu(\xi)| d\xi < +\infty,$$

► Si  $\mu \in D'(R)$ ,

$$\mu \in \Delta'_\gamma \iff \exists a, b \in R, \text{ tels que } \frac{1}{\xi} \mu_{\mathbb{R} \setminus ]a, b[} \in L^1.$$

**Classe d'opérateurs  $H$  associée à  $\Delta'_\gamma$**  On souhaite à présent caractériser la classe d'opérateurs ayant un  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$ . On a pour cela le résultat :

**Proposition 15** Soit  $\mu \in \Delta'_\gamma$ . L'opérateur  $u \mapsto \langle \mu, Rd_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  est l'opérateur de réponse impulsionnelle :

$$h(t, s) = \langle \mu(t, \cdot), e^{\gamma(\cdot)s} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot),$$

et de symbole-Laplace :

$$H(t, p) = \langle \mu(t, \cdot), \frac{1}{p - \gamma(\cdot)} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot).$$

$H$  vérifie les propriétés suivantes :

- $H(t, \cdot)$  holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
- $H(t, i\omega) \rightarrow 0$  quand  $|\omega| \rightarrow +\infty$ .

On constate que les conditions d'analyticité dans  $\Omega_\gamma^+$ , et de décroissance à l'infini de  $H(t, \cdot)$  sont à présent nécessaires alors qu'elles étaient suffisantes dans le cadre particulier du paragraphe (1.2). Ces conditions sont particulièrement importantes car "quasiment" caractéristiques des opérateurs  $\gamma$ -réalisables. Il n'y a en fait pas isomorphisme entre  $\Delta'_{\gamma_c}$  et l'espace des opérateurs linéaires intégraux de symboles-Laplace analytiques dans  $\Omega_\gamma^+$  et décroissants à l'infini ; cependant les opérateurs de ce type non  $\gamma$ -réalisables sont souvent "pathologiques". En pratique, un opérateur linéaire intégral vérifiant les deux conditions précédemment énoncées sera donc en général  $\gamma$ -réalisable.

**Sur la continuité du produit  $\#_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$**  Si  $\gamma$  est régulière, on montre que le produit  $\#_\gamma$  est séparément continu dans  $\Delta'_\gamma$  pour la topologie faible  $\sigma(\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma)$ , c'est à dire que  $\forall \mu, \nu_n \in \Delta'_\gamma$  :

$$\left( \langle \nu_n, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \psi \in \Delta_\gamma \right) \implies \left( \langle \mu \#_\gamma \nu_n, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \psi \in \Delta_\gamma \right).$$

Cette continuité n'étant parfois pas suffisante, on cherche un espace  $\Delta'_\gamma \supset \Delta'_\gamma$  tel que l'on ait la continuité globale du produit sur  $\Delta'_\gamma$ .

### 1.3.3 Espaces $\Delta_\gamma$ et $\Delta'_\gamma$

Le défaut de continuité du produit  $\#_\gamma$  n'est pas la seule raison pour laquelle on est amené à construire un espace de  $\gamma$ -symboles  $\Delta'_\gamma$  plus gros. En effet, les espaces  $\Delta_\gamma$  ne sont définis que pour des contours  $\gamma$  réguliers, alors qu'en pratique les contours non réguliers sont souvent utiles sinon nécessaires. Par rapport à un contour régulier, un contour non régulier peut par exemple permettre de s'éloigner plus rapidement de l'axe imaginaire, zone dans laquelle une discrétisation en  $\xi$  devra être plus fine (composantes dynamiques peu amorties).

En fait, l'espace  $\Delta_\gamma$  est trop gros parcequ'il contient les fonctions  $\psi = \Psi|_\gamma$  de régularité  $C^\infty$  mais non nécessairement analytiques du fait que l'analyticité de  $\Psi$  n'est requise que sur  $\Omega_\gamma^-$ . L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma H(t, p) \Psi(t, p) dp = \mathcal{H}u(t)$$

n'a alors en général aucun sens si  $H(t, \cdot)$  et  $\Psi(t, \cdot)$  n'ont pas de domaine d'analyticité commun (l'analyticité de  $H(t, \cdot)$  n'est quant à elle requise que dans  $\Omega_\gamma^+$ ).

Pour un contour  $\gamma$  non nécessairement régulier fixé, on est donc amené à considérer un espace  $\Delta'_\gamma \supset \Delta_\gamma$  tel que :

- $\forall \mu \in \Delta'_\gamma$ ,  $H_\mu(t, \cdot)$  holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
- $\forall \psi \in \Delta_\gamma$ ,  $\Psi_u(t, \cdot)$  holomorphe dans  $\Omega_\gamma^-$ ,

avec  $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+$ .

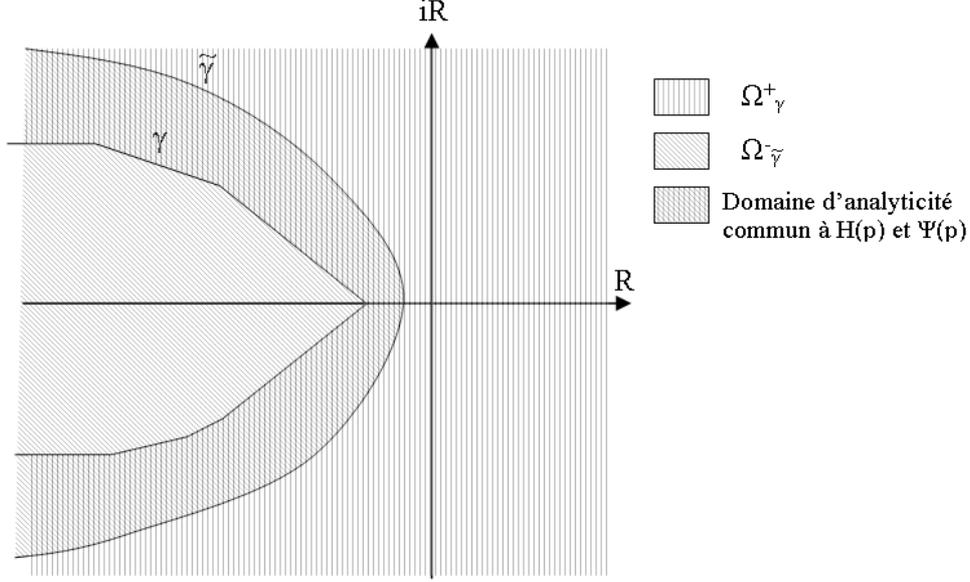


FIG. 3 – Domaines d’analyticité de  $H$  et de  $\Psi$ .

Ainsi, l’intégrale

$$\int_{\bar{\gamma}} H(t, p) \Psi(t, p) dp$$

sera définie sur tout contour  $\bar{\gamma}$  inclus dans le domaine d’analyticité commun à  $H_\mu(t, \cdot)$  et à  $\Psi_u(t, \cdot)$  et prendra la même valeur quel que soit le contour  $\bar{\gamma}$  considéré. Par ”adhérence”, on pourra ainsi donner un sens parfaitement clair à l’intégral sur  $\gamma$  qui n’était jusqu’alors pas définie,  $H$  étant en général non localement intégrable sur  $\gamma$ . On aura plus précisément, par le théorème de Cauchy :

$$\int_{\gamma} H(t, p) \Psi(t, p) dp = \int_{\bar{\gamma}} H(t, p) \Psi(t, p) dp$$

pour tout  $\bar{\gamma}$  dans le domaine d’analyticité commun à  $H_\mu(t, \cdot)$  et à  $\Psi_u(t, \cdot)$ .

Dans la suite, on considère deux contours  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent avec cependant pour  $\gamma$  un affaiblissement des hypothèses de régularité à  $\gamma \in W_{loc}^{1, \infty}(R)$  : le contour  $\gamma$  pourra ainsi être non régulier et présenter des points anguleux par exemple.

On définit alors les relations suivantes entre les contours :

- $\tilde{\gamma} \succ \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma} \subset \Omega_{\gamma}^+ \\ \exists A > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall |\eta| \geq \eta_0, \min_{\xi} |\tilde{\gamma}(\eta) - \gamma(\xi)| \geq A |\tilde{\gamma}(\eta)|, \end{cases}$
- $\tilde{\gamma} \succeq \gamma \iff \tilde{\gamma} \subset \overline{\Omega_{\gamma}^+}$ .

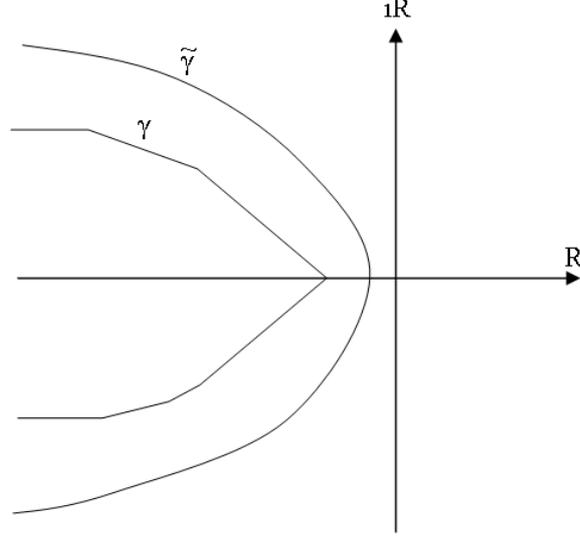


FIG. 4 – Exemple de contours  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  tels que  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ .

**Remarque 16** Si  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ , alors, par définition de la relation  $\succ$ ,  $\tilde{\gamma}$  s'écarte de  $\gamma$  à l'infini, car du fait de l'hypothèse (17) sur  $\tilde{\gamma}$  on a  $\tilde{\gamma}(\eta) \rightarrow +\infty$  quand  $|\eta| \rightarrow +\infty$ .

Pour toute  $u \in S_d(\mathbb{R}_s)$ , on notera dans la suite  $\Psi$  la fonction analytique dans  $C$  définie par :

$$\Psi(p) = \int_0^{+\infty} e^{ps} \mathbf{u}(s) ds.$$

On pose :

$$\psi = \Psi|_{\gamma} \text{ et } \tilde{\psi} = \Psi|_{\tilde{\gamma}},$$

et, pour  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ , on définit les applications suivantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}} &: \tilde{\psi} \in L_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}_s)) \mapsto \Psi \text{ (prolongement analytique de } \tilde{\psi} \text{ dans } \Omega_{\tilde{\gamma}}^-), \\ \text{et } \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma} &: \tilde{\psi} \in L_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}_s)) \mapsto \psi = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi})) \circ \gamma \text{ (trace sur } \gamma \text{ de } \Psi). \end{aligned}$$

On définit alors l'espace  $\Delta_{\gamma}$  de la manière suivante.

Soit  $\Gamma = (\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante (au sens de la relation  $\succ$ ) d'arcs réguliers telle que  $\tilde{\gamma}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \gamma$  dans  $W_{loc}^{1, \infty}(R)$ .

**Définition 17** L'espace  $\Delta_{\gamma}$  est défini par :

$$\Delta_{\gamma} = \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}});$$

il est muni de la topologie (dite de limite inductive) définie par la convergence :

$$\psi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \Delta_{\gamma} \Leftrightarrow \exists \tilde{\gamma} \in \Gamma, \quad \psi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \Delta_{\tilde{\gamma}}.$$

On définit ensuite :

**Définition 18**  $\Delta'_{\gamma}$  est le dual topologique de  $\Delta_{\gamma}$ .

**Remarque 19** ► On a bien  $\Delta_\gamma \subset \Delta_\gamma$  : en effet les éléments de  $\Delta_\gamma$  sont la trace sur  $\gamma$  de fonctions analytiques sur  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  avec  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ , alors que les fonctions dont les éléments de  $\Delta_\gamma$  sont la trace sur  $\gamma$  ne sont analytiques que sur  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^- \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ . Dans le domaine dual, on a en revanche :  $\Delta'_\gamma \supset \Delta'_\gamma$ .

► De la même manière, on peut montrer que si  $\tilde{\gamma} \succ \tilde{\tilde{\gamma}}$  avec  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\tilde{\gamma}}$  réguliers, alors  $I_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}}) \subset I_{\tilde{\tilde{\gamma}},\gamma}(\Delta_{\tilde{\tilde{\gamma}}})$ . Par conséquent,  $\Delta_\gamma$  est la réunion d'une suite d'espaces croissante au sens de l'inclusion.

De la définition des espaces  $\Delta'_\gamma$  et  $\Delta_\gamma$ , on déduit :

$\forall \mu \in \Delta'_\gamma, \forall \psi \in \Delta_\gamma, \exists \tilde{\gamma}_0 \succ \gamma$  tel que  $\forall \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_0 \succ \tilde{\gamma} \succ \gamma$ , on ait

$$\begin{aligned} \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} &= \langle \mu, \psi \rangle_{(\mathcal{I}_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}}))', \mathcal{I}_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}})} \\ &= \langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi} \rangle_{\Delta'_{\tilde{\gamma}}, \Delta_{\tilde{\gamma}}} \\ &= \int_{J_{\tilde{\gamma}}} \tilde{\mu}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} H(p) \Psi(p) dp, \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\gamma}$  dans le domaine d'analyticité commun à  $H(p)$  et à  $\Psi(p)$ . Par continuité on peut alors définir l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} H(p) \Psi(p) dp = \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \psi(\xi) d\xi,$$

c'est à dire la  $\gamma$ -synthèse de l'opérateur linéaire intégral de symbole-Laplace  $H(p)$ .

**Sur la continuité du produit  $\#_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$**  En ce qui concerne le produit  $\#_\gamma$  on peut montrer d'une part qu'il est interne dans  $\Delta'_\gamma$ , d'autre part qu'il est continu pour la topologie forte de  $\Delta'_\gamma$  (convergence uniforme sur tout borné de  $\Delta_\gamma$ ), c'est-à-dire :

$$\left( \nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu, \mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \text{ dans } \Delta'_\gamma \text{ fort} \right) \implies \left( \mu_n \#_\gamma \nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \#_\gamma \nu \text{ dans } \Delta'_\gamma \text{ fort} \right).$$

L'espace  $\Delta'_\gamma$  est bien adapté à l'analyse; il assurera le bon comportement notamment des approximations numériques dès lors qu'elles auront été construites et analysées dans le contexte topologique décrit dans ce paragraphe.

## 1.4 Conclusion et extensions

Dans cette présentation assez concise du principe de la représentation diffusive, on a vu qu'un opérateur  $H = H(t, \partial_t)$  diffusif au sens strict admettait la représentation suivante, appelée  $\gamma$ -réalisation :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\psi) \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(-\infty, \cdot) = 0 \\ H(t, \partial_t) u(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \end{cases}$$

où  $\gamma \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$  définit un contour fermé (éventuellement à l'infini) non nécessairement régulier vérifiant les hypothèses mentionnées au paragraphe précédent, et où  $\mu(t, \cdot) \in \Delta'_\gamma$  est solution de  $L_\gamma^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot)$  avec  $h$  réponse impulsionnelle de  $H$ .

Les conditions essentielles à satisfaire pour qu'un opérateur  $H$  admette une telle représentation sont :

- l'analyticité de  $H(t, \cdot)$  dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
- la décroissance à l'infini de  $H(t, \cdot)$ .

La condition sectorielle imposée à  $\gamma$  garantit en outre la nature diffusive des réalisations d'état. Par voie de conséquence, les opérateurs  $\gamma$ -réalisables sont de type pseudo-différentiel [9], ce qui implique en particulier une réponse impulsionnelle  $h(t, \cdot)$  régulière (en fait analytique) sur  $t > 0$ .

Notons par ailleurs que la réalisation d'état qu'est la  $\gamma$ -réalisation est de dimension infinie. Pour des opérateurs rationnels notamment, elle n'est donc pas minimale, ce qui a première vue peut apparaître comme un inconvénient majeur. En réalité, les avantages sont nombreux :

- une même équation d'état permet la réalisation d'une vaste classe d'opérateurs (rationnels ou non, convolutifs ou non),
- l'opérateur est caractérisé par son  $\gamma$ -symbole qui apparaît linéairement dans la  $\gamma$ -réalisation,
- la somme et le produit de deux opérateurs  $\gamma$ -réalisables sont des opérateurs de même nature, propriété essentielle pour les applications (cf. les paragraphes qui suivent) et intrinsèquement impossible dans le cadre standard rationnel (la somme ou le produit de deux opérateurs rationnels d'ordre  $n$  est en général un opérateur d'ordre  $2n$ ),
- les opérateurs et leurs approximations sont dans un même cadre mathématique,
- l'extension aux opérateurs non causaux voire multidimensionnels est naturelle,
- de nombreuses autres extensions sont possibles,
- il existe des réalisations diffuses aux propriétés particulières (principe du maximum) pouvant être utiles notamment en non linéaire,
- etc.

Un des avantages sur lequel il convient de revenir est la possibilité d'extension à divers problèmes. Dans les paragraphes précédents, plusieurs hypothèses ont été faites, en particulier sur le contour  $\gamma$  et sur les opérateurs considérés. La représentation diffusive se prête en fait à diverses extensions et peut s'adapter à de nombreuses situations où ne sont pas nécessairement vérifiées ces hypothèses. De nombreux compléments et extensions des concepts précédents ont été étudiés et sont présentés dans [6].

On mentionnera en particulier le fait que les opérateurs instables peuvent également avoir une représentation diffusive (ce qui sous-entend en fait que le contour  $\gamma$  puisse "sortir" du demi-plan complexe gauche).

L'extension aux opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens large (cf. § 1.2) est enfin une des extensions les plus naturelles et de ce fait la plus utilisée. On notera simplement qu'un opérateur  $H$   $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre  $m$  est tel que  $\partial_t^{-m-1} \circ H$  est  $\gamma$ -réalisable au sens strict ; il admet donc la  $\gamma$ -réalisation :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + \partial_t^{m+1} u \\ \mathcal{H}u = \langle \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu, \psi \rangle_{\Delta'_{\gamma}, \Delta_{\gamma}}, \end{cases}$$

où  $\mu \notin \Delta'_{\gamma}$  est un  $\gamma$ -symbole au sens large de  $H$ , défini, au sens canonique, par  $\mu(t, \cdot) = \frac{\gamma'}{2i\pi} H(t, \gamma)$ .

La question de l'approximation numérique des  $\gamma$ -réalisations n'est pas traitée dans ce rapport. Les méthodes utilisées ainsi que les particularités techniques propres à ce problème sont données dans [6].

## 2 Inversion $\gamma$ -symbolique

Au même titre que la composition d'opérateurs, l'inversion d'opérateurs est une opération couramment utilisée. L'analyse de l'inversion de  $\gamma$ -symboles de  $\Delta'_\gamma$  fait l'objet de ce paragraphe. Dans une première partie, on traite de l'inverse d'un  $\gamma$ -symbole ainsi que de sa  $\gamma$ -réalisation. Puis on s'intéresse plus particulièrement à la réalisation numérique d'une telle opération. Enfin, après avoir illustré l'inversion  $\gamma$ -symbolique scalaire par quelques exemples, on étend l'étude aux cas d'opérateurs matriciels.

### 2.1 Problème théorique

**L'algèbre de  $\gamma$ -symboles  $\Sigma_\gamma$**  On s'intéresse ici à l'inversion d'un  $\gamma$ -symbole scalaire  $\mu \in \Delta'_\gamma$ . Or, l'algèbre  $\Delta'_\gamma$  n'est pas unitaire : l'opérateur identité n'admet pas de  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$ . L'inverse d'un  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$  ne peut donc être défini. L'espace  $\Delta'_\gamma$  n'est en fait pas assez grand pour contenir les  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs (au sens strict) et ceux de leurs inverses. En d'autres termes, l'inverse d'un opérateur  $\gamma$ -diffusif au sens strict n'est pas diffusif au sens strict. Pour pouvoir définir l'inversion  $\gamma$ -symbolique, il va donc falloir travailler dans une algèbre plus grande et unitaire. On considère à ce propos la sur-algèbre de  $\Delta'_\gamma$  notée  $\Sigma_\gamma$  constituée de  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens large, c'est à dire tels qu'il existe un  $n \in \mathbb{N}$  assez grand pour que la composition de ces opérateurs avec  $\partial_t^{-n}$  soit  $\gamma$ -diffusif au sens strict. A chacun de ces opérateurs, qu'il soit diffusif au sens strict ou au sens large, on associe le représentant canonique dans  $\Sigma_\gamma$ , défini par  $\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H|_{\gamma^+}$  avec  $H$  symbole-Laplace de l'opérateur, holomorphe sur  $\Omega_\gamma^+$ . Si  $0 \in \Omega_\gamma^-$ ,  $\Sigma_\gamma$  est unitaire : l'opérateur identité auquel on associe le  $\gamma$ -symbole canonique  $\frac{\gamma'}{2i\pi}$  est en effet diffusif au sens large. L'inversion  $\gamma$ -symbolique dans  $\Sigma_\gamma$  peut donc être définie. Dans la suite, on appellera donc inverse du  $\gamma$ -symbole d'un opérateur  $\mathcal{H}$  l'inverse de celui-ci dans  $\Sigma_\gamma$ .

**Inversion  $\gamma$ -symbolique dans  $\Sigma_\gamma$**  On supposera dans la suite que  $\gamma(0) = 0$ . Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur linéaire intégral  $\gamma$ -diffusif au sens large, de symbole-Laplace  $H(p)$  et de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma$ . L'inverse d'un tel opérateur que l'on notera  $\mathcal{H}^{-1}$ , a pour symbole-Laplace  $\frac{1}{H(p)}$  et ne pourra donc être lui-même  $\gamma$ -diffusif que si  $\frac{1}{H(p)}$  est holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ , ce qui en particulier implique que  $H(p)$  ne peut pas avoir de singularités dans  $\Omega_\gamma^+$ . Supposons à présent l'inverse de  $\mathcal{H}$   $\gamma$ -diffusif au sens large. Alors, de même que le symbole canonique  $\mu$  de  $\mathcal{H}$  est défini comme limite à droite sur  $\gamma$  du symbole-Laplace de  $\mathcal{H}$ , le  $\gamma$ -symbole canonique de  $\mathcal{H}^{-1}$  est défini par :

$$\mu^{-1} = \lim_{\gamma_\varepsilon \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\mathcal{D}'}{2i\pi} \frac{1}{H(\gamma_\varepsilon)},$$

ou, lorsque  $\mu$  et  $\mu^{-1}$  sont régulières ailleurs qu'en 0 :

$$\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi} \text{pf} \frac{1}{H(\gamma)}.$$

**Exemple 20** Soit  $\alpha > 0$  et  $\gamma$  régulière. L'opérateur  $\partial_t^{-\alpha}$  de  $\gamma$ -symbole canonique  $\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} \text{pf} \frac{1}{\gamma^\alpha} \in \Delta'_\gamma$  est diffusif au sens strict. Son inverse  $\partial_t^\alpha$  de  $\gamma$ -symbole  $\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi} \gamma^\alpha \in \Sigma_\gamma$ , est quant à lui diffusif au sens large : en effet, pour tout  $n > \alpha$ , l'opérateur  $\partial_t^{-n} \circ \partial_t^\alpha$  de  $\gamma$ -symbole canonique  $\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} \text{pf} \frac{1}{\gamma^{n-\alpha}} \in \Delta'_\gamma$  est diffusif au sens strict.

**$\gamma$ -réalisation de l'inverse d'un opérateur** Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu$  et d'inverse  $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre  $m \in \mathbb{N}$ , c'est à dire tel que  $\partial_t^{-m-1} \circ \mathcal{H}^{-1}$   $\gamma$ -diffusif au sens strict. On a :

$$\mathcal{H}^{-1}(u) = (\partial_t^{-m-1} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \partial_t^{m+1})(u) = (\partial_t^{-m-1} \circ \mathcal{H}^{-1})(\partial_t^{m+1}u).$$

Comme  $\partial_t^{-m-1} \circ \mathcal{H}^{-1}$  est diffusif au sens strict, il admet la  $\gamma$ -réalisation :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + v \\ (\partial_t^{-m-1} \circ \mathcal{H}^{-1})(v) = \langle \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu^{-1}, \psi \rangle_{\Delta'_{\gamma}, \Delta_{\gamma}}, \end{cases}$$

où  $\delta^k$  est  $\gamma$ -symbole de l'intégrateur d'ordre  $k$ . On peut donc définir une  $\gamma$ -réalisation au sens étendu de  $\mathcal{H}^{-1}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + \partial_t^{m+1} u \\ \mathcal{H}^{-1}(u) = \langle \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu^{-1}, \psi \rangle_{\Delta'_{\gamma}, \Delta_{\gamma}}. \end{cases}$$

**Non continuité de l'opération d'inversion** Comme toujours en dimension infinie, la question de la continuité de l'opération d'inversion  $\gamma$ -symbolique est à étudier. On peut montrer les résultats suivants (preuves non développées ici) :

**Proposition 21**  $\forall m \in \mathbb{N}$ , le domaine de définition de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \Delta'_{\gamma} & \longrightarrow & \Delta'_{\gamma} \\ \mu & \longmapsto & \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu^{-1} \end{array}$$

n'est voisinage d'aucun de ses points pour la topologie forte.

**Corollaire 22**  $\forall m \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$\begin{array}{ccc} \Delta'_{\gamma} \text{ fort} & \longrightarrow & \Delta'_{\gamma} \text{ } \star\text{-faible} \\ \mu & \longmapsto & \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu^{-1} \end{array}$$

n'est nulle part continue.

D'un point de vue numérique, ce défaut de continuité peut entraîner l'instabilité numérique de l'opération d'inversion. Pour pallier ce problème il faudra mettre en place un processus de régularisation qui pourra par exemple être obtenu par troncature de la bande fréquentielle utile des opérateurs réalisés. Notons qu'une discrétisation finie de  $\xi$  entraînera automatiquement une telle troncature.

## 2.2 Inversion numérique

### 2.2.1 Cas de $\gamma$ -symboles inversibles dans $\Sigma_{\gamma}$

Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur d'inverse  $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre  $m - 1 \in \mathbb{N}$ . Soit  $\mu$  un  $\gamma$ -symbole "numérique" voisin du  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}$ , de la forme :

$$\mu = \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k}.$$

On souhaite inverser numériquement ce  $\gamma$ -symbole, opération qui revient à trouver un jeu de coefficients  $\{\beta_k\}$  tel que :

$$\delta^m \#_{\gamma} \mu^{-1} \simeq \sum_{k=0}^K \beta_k \delta_{\xi_k}.$$

Pour cela on considère le problème de minimisation :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{K+1}} \left\| \left( \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k} \right) \# \left( \sum_{j=0}^K \beta_j \delta_{\xi_j} \right) - \delta^m \right\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad (18)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$  est une norme hilbertienne. Cette norme doit, pour être réellement utile, porter sur les opérateurs eux-mêmes et non sur leurs  $\gamma$ -symboles, puisque ces derniers sont destinés à réaliser les opérateurs. On considérera donc par exemple la norme hilbertienne suivante :

$$\|\mu\|_{\mathfrak{H}}^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |H(i\omega)|^2 d\omega = \int \int k(\xi, \eta) \mu(\xi) \overline{\mu(\eta)} d\xi d\eta, \quad (19)$$

où

$$k(\xi, \eta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega.$$

Cette norme est induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$  défini par :

$$\langle \mu, \nu \rangle_{\mathfrak{H}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} H(i\omega) \overline{K(i\omega)} d\omega = \int \int k(\xi, \eta) \mu(\xi) \overline{\nu(\eta)} d\xi d\eta.$$

et on a le résultat suivant :

**Proposition 23**

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad k(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{-(f(\xi) + \bar{f}(\eta))}{\gamma(\xi) + \bar{\gamma}(\eta)} & \text{si } \gamma(\xi) \neq -\bar{\gamma}(\eta) \\ -\frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi)} + \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi)} & \text{si } \gamma(\xi) = -\bar{\gamma}(\eta) \end{cases} \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))} d\omega \\ &= -\arctan\left(\frac{\omega_2 - \gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi)}\right) + \arctan\left(\frac{\omega_1 - \gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi)}\right) \\ &\quad - \frac{i}{2} (\ln(\omega_2^2 - 2\omega_2\gamma_2(\xi) + |\gamma(\xi)|^2) - \ln(\omega_1^2 - 2\omega_1\gamma_2(\xi) + |\gamma(\xi)|^2)), \end{aligned} \quad (21)$$

où  $\gamma_1(\cdot) = \text{Re}(\gamma(\cdot))$  et  $\gamma_2(\cdot) = \text{Im}(\gamma(\cdot))$ .

**Preuve.** Par définition, on a :

$$k(\xi, \eta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega,$$

Lorsque  $\gamma(\xi) \neq -\bar{\gamma}(\eta)$ , la décomposition en éléments simples donne l'expression suivante :

$$k(\xi, \eta) = \frac{-1}{\gamma(\xi) + \bar{\gamma}(\eta)} \left( \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))} d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega \right).$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))} d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{-i\omega - \overline{\gamma(\xi)}}{(\gamma_1(\xi))^2 + (\omega - \gamma_2(\xi))^2} d\omega \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{-\gamma_1(\xi)}{(\gamma_1(\xi))^2 + (\omega - \gamma_2(\xi))^2} d\omega + i \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{-\omega + \gamma_2(\xi)}{(\gamma_1(\xi))^2 + (\omega - \gamma_2(\xi))^2} d\omega \\
&= - \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\frac{1}{\gamma_1(\xi)}}{1 + \left(\frac{\omega - \gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi)}\right)^2} d\omega - \frac{i}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2\omega - 2\gamma_2(\xi)}{\omega^2 - 2\omega\gamma_2(\xi) + |\gamma(\xi)|^2} d\omega \\
&= - \left[ \arctan\left(\frac{\omega - \gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi)}\right) \right]_{\omega_1}^{\omega_2} - \frac{i}{2} \left[ \ln(\omega^2 - 2\omega\gamma_2(\xi) + |\gamma(\xi)|^2) \right]_{\omega_1}^{\omega_2},
\end{aligned}$$

et ,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega = \overline{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))} d\omega}.$$

Lorsque  $\gamma(\xi) = -\overline{\gamma(\eta)}$ , on a :

$$\begin{aligned}
k(\xi, \eta) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))^2} d\omega \\
&= - \left[ \frac{1}{\omega + i\gamma(\xi)} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}.
\end{aligned}$$

■

**Remarque 24** On aurait pu également considérer la norme :

$$\|\mu\|_{\mathfrak{H}}^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{|H(i\omega)|^2}{\omega} d\omega, \tag{22}$$

qui permet d'accorder le même poids à chaque décade. En effet :

$$\forall a \geq 0, \quad \int_{10^a}^{10^{a+1}} \frac{1}{\omega} d\omega = \ln(10).$$

En notant  $\mathbf{A}$  l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathbf{A} : \beta \in \mathbb{C}^{K+1} \longmapsto \sum_{k,j=0}^K \alpha_k \beta_j \delta_{\xi_k} \# \delta_{\xi_j},$$

le problème (18) s'écrit :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{K+1}} \|\mathbf{A}\beta - \delta^m\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Pour le résoudre numériquement, on peut procéder de plusieurs manières.

**Première méthode :** La première solution consiste à approcher le problème (18) par un autre problème de minimisation plus simple à résoudre numériquement. Pour cela, on approche les termes  $\delta_{\xi_k} \# \delta_{\xi_j}$  et  $\delta^m$  par des sommes de masses de Dirac de la manière suivante :

$$\delta_{\xi_i} \# \delta_{\xi_j} \sim \sum_{k=0}^K a_k^{ij} \delta_{\xi_k} \quad \text{et} \quad \delta^m \sim \sum_{k=0}^K b_k \delta_{\xi_k}.$$

Ainsi, le problème (18) est lui-même approché par le problème de minimisation :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{K+1}} \left\| \sum_{k,j=0}^K \alpha_k \beta_j \sum_{l=0}^K a_l^{kj} \delta_{\xi_l} - \sum_{l=0}^K b_l \delta_{\xi_l} \right\|_{\mathfrak{h}}^2, \quad (23)$$

qui s'écrit encore

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{K+1}} \left\| \sum_{l=0}^K \left( \sum_{k,j=0}^K \alpha_k \beta_j a_l^{kj} - b_l \right) \delta_{\xi_l} \right\|_{\mathfrak{h}}^2.$$

Or, par définition, on a :

$$\|\nu\|_{\mathfrak{h}}^2 = \int \int k(\xi, \eta) \nu(\xi) \overline{\nu(\eta)} d\xi d\eta,$$

d'où :

$$\left\| \sum_{k=0}^K c_k \delta_{\xi_k} \right\|_{\mathfrak{h}}^2 = \sum_{k,l=0}^K c_k \overline{c_l} k(\xi_k, \xi_l).$$

Le problème (23) s'écrit donc :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{K+1}} \sum_{k,l=0}^K c_k \overline{c_l} k(\xi_k, \xi_l),$$

avec  $c = A\beta - b$  où  $A = (\sum_{k=0}^K \alpha_k \beta_j a_i^{kj})_{i,j}$ ; son unique solution étant donnée par :

$$\beta = (A^* K^T A)^{-1} A^* K^T b,$$

avec  $K = (k(\xi_i, \xi_j))_{i,j}$ .

Cette méthode de mise en oeuvre simple ne nécessite que peu de calculs préliminaires mais a l'inconvénient de ne procurer qu'une solution approchée au problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique.

**Deuxième méthode :** On cherche un espace  $E \sim \mathbb{C}^N$  avec  $N > K + 1$  tel que :

$$\forall \beta \in \mathbb{C}^{K+1}, \quad \|\mathbf{A}\beta - \delta^m\|_{\mathfrak{h}}^2 = \|A\beta - b\|_E^2,$$

où  $A$  (resp.  $b$ ) est une matrice (resp. un vecteur) à déterminer. On considère par exemple l'espace engendré par  $\cup_{q=1..M} (\{\delta_{\xi_k}^q\}_{k=0..K})$  : cet espace est de dimension  $N = M(K + 1)$ . En supposant que  $\xi_n = 0$ , et du fait que :

$$\delta_a \# \delta_b = \begin{cases} \frac{\delta_a - \delta_b}{\gamma(a) - \gamma(b)} & \text{si } a \neq b \\ \delta_a^2 & \text{si } a = b, \end{cases}$$

on peut décomposer  $(\sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k}) \# (\sum_{j=0}^K \beta_j \delta_{\xi_j})$  et  $\delta^m$  dans la base de  $E$  de la manière suivante :

$$\left( \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k} \right) \# \left( \sum_{j=0}^K \beta_j \delta_{\xi_j} \right) = \sum_{q=1}^M \sum_{k=0}^K \tilde{\beta}_{qk} \delta_{\xi_k}^q \quad \text{et} \quad \delta^m = \sum_{q=1}^M \sum_{k=0}^K b_{qk} \delta_{\xi_k}^q,$$

avec

$$\tilde{\beta}_{qk} = \begin{cases} \alpha_k \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^K \frac{\beta_j}{\gamma(\xi_k) - \gamma(\xi_j)} + \beta_k \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^K \frac{\alpha_j}{\gamma(\xi_k) - \gamma(\xi_j)} & \text{si } q = 1 \\ \alpha_k \beta_k & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $b_{qk} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = m \text{ et } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans la suite, on notera  $\tilde{\beta}$  (resp.  $b$ ) le vecteur  $(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{11}, \dots, \tilde{\beta}_{1K}, \tilde{\beta}_{20}, \dots, \tilde{\beta}_{2K}, \dots, \tilde{\beta}_{M0}, \dots, \tilde{\beta}_{MK})^T$  (resp. le vecteur  $(b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1K}, b_{20}, \dots, b_{2K}, \dots, b_{M0}, \dots, b_{MK})^T$ ). On a :

$$\tilde{\beta} = A\beta,$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M(K+1) \times (K+1)}$$

où  $A_i \in \mathbb{C}^{(K+1) \times (K+1)}$  sont définies par :

$$\begin{cases} A_1 = \text{diag}\left(\sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^K \frac{\alpha_j}{\gamma(\xi_0) - \gamma(\xi_j)}, \dots, \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^K \frac{\alpha_j}{\gamma(\xi_K) - \gamma(\xi_j)}\right) + (A_{1k}^j)_{k,j=0..K} \\ \qquad \qquad \qquad \text{avec } A_{1k}^j = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\gamma(\xi_k) - \gamma(\xi_j)} & \text{si } k \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ A_2 = \text{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_K) \\ A_i = O^{(K+1) \times (K+1)} \text{ pour } i = 3..M. \end{cases}$$

**Remarque 25** En pratique, il faudra prendre  $M \geq 2$  et  $M \geq m$ . On pourra par exemple prendre  $M = \max(2, m)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\beta - \delta^m\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \left\| \left( \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k} \right) \# \left( \sum_{j=0}^K \beta_j \delta_{\xi_j} \right) - \delta^m \right\|_{\mathfrak{h}}^2 \\ &= \left\| \sum_{q=1}^M \sum_{k=0}^K ((A\beta)_{qk} - b_{qk}) \delta_{\xi_k}^q \right\|_{\mathfrak{h}}^2 \\ &= \sum_{q,r=1}^M \sum_{k,l=0}^K (A\beta - b)_{qk} \overline{(A\beta - b)_{rl}} \int \int k(\xi, \eta) \delta_{\xi_k}^q(\xi) \delta_{\xi_l}^r(\eta) d\xi d\eta \\ &= \|(A\beta - b)\|_E^2, \end{aligned}$$

où, pour  $c = (c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1K}, c_{20}, \dots, c_{2K}, \dots, c_{M0}, \dots, c_{MK})^T \in E$  :

$$\|c\|_E^2 = \sum_{q,r=1}^M \sum_{k,l=0}^K c_{qk} \overline{c_{rl}} K^{qkr l}$$

avec

$$K^{qkrl} = \int \int k(\xi, \eta) \delta_{\xi_k}^q(\xi) \delta_{\xi_l}^r(\eta) d\xi d\eta.$$

Le problème (18) s'écrit donc :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{K+1}} \|(A\beta - b)\|_E^2, \quad (24)$$

et sa solution est donnée par :

$$\beta = (A^* K^T A)^{-1} A^* K^T b,$$

avec

$$K = (K_i^j)_{i,j=1..M(K+1)}$$

où

$$K_i^j = K^{qkrl} \text{ pour } \begin{cases} i = (q-1)(K+1) + k + 1 \\ j = (r-1)(K+1) + l + 1, \end{cases} \quad q, r = 1..M \text{ et } k, l = 0..K.$$

De plus, du fait de la structure particulière de  $A$  et de  $b$ , on peut écrire la solution  $\beta$  du problème (24) sous la forme simplifiée :

$$\beta = (\tilde{A}^* \tilde{K}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^* \tilde{K},$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2(K+1) \times (K+1)}, \\ \tilde{K} &= (K_i^j)_{i,j=1..2(K+1)} \in \mathbb{C}^{2(K+1) \times 2(K+1)}, \\ \text{et } \tilde{\tilde{K}} &= (K^{mn10}, \dots, K^{mn1K}, K^{mn20}, \dots, K^{mn2K})^T \in \mathbb{C}^{2(K+1)}. \end{aligned}$$

Seuls les termes  $K^{qkrl}$  pour  $(q, r, k, l) \in (\{1, 2\}^2 \times \{0..K\}^2) \cup (\{m\} \times \{1, 2\} \times \{n\} \times \{0..K\})$  nécessitent donc d'être explicités. Leurs expressions sont données en annexe (cf. § B.1).

### 2.2.2 Cas de $\gamma$ -symboles non inversibles dans $\Sigma_\gamma$

On considère un opérateur  $\mathcal{H}$  de  $\gamma$ -symbole  $\mu$  non inversible dans  $\Sigma_\gamma$ . Un tel opérateur admet la décomposition suivante :

$$\mathcal{H}(\partial_t) = \mathcal{H}_1(\partial_t) \circ \mathcal{H}_2(\partial_t),$$

où  $\mathcal{H}_1$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma$  et d'inverse  $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre  $m-1 \in \mathbb{N}$ , et  $\mathcal{H}_2$  est non inversible dans  $\Sigma_\gamma$ . On notera  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les  $\gamma$ -symboles respectifs de  $\mathcal{H}_1$  et de  $\mathcal{H}_2$ .

**Exemple 26** Soit  $\gamma$  un chemin inclus dans  $\mathbb{C}^-$ . L'opérateur de symbole-Laplace  $H(p) = \frac{p-1}{p+1}$  n'admet pas de  $\gamma$ -symbole inversible dans  $\Delta'_\gamma : \frac{1}{H(p)}$  est en effet non holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ , et ce du fait de la présence dans  $\Omega_\gamma^+$  d'un zéro de  $H(p)$ . Dans cet exemple, l'opérateur n'admet en fait pas d'inverse causal et stable puisqu'il est à phase non minimale (i.e. a des zéros dans  $\mathbb{C}^+$ ).

L'inversion de  $\mathcal{H}$  via son  $\gamma$ -symbole ne peut donc se faire dans  $\Delta'_\gamma$  via la méthode précédente. Dans certains cas (par exemple lorsque le défaut d'analyticité dans  $\Omega_\gamma^+$  de  $\frac{1}{H(p)}$  provient de la présence d'un nombre fini de zéros de  $H(p)$  dans  $\Omega_\gamma^+$ ), on pourrait pallier ce problème en considérant un chemin  $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+$  tel que  $\frac{1}{H(p)}$  soit holomorphe dans  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^+$ , et appliquer la méthode précédente. Cependant une telle démarche peut s'avérer coûteuse en particulier lorsque  $\gamma \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$ , et peut également complexifier les calculs et les méthodes du fait du changement de chemin  $\gamma$  et de sa discrétisation. On préférera donc décomposer le problème en deux sous problèmes

et chercher d'une part l'inverse du  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}_1$ , et d'autre part une réalisation d'état de l'opérateur  $\mathcal{H}_2$ . Ainsi, on réalisera l'opérateur  $\mathcal{H}^{-1}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t X = FX + Gu \\ \partial_t \psi = \gamma \psi + \partial_t^m (QX) \\ \mathcal{H}^{-1}u = \langle \delta^m \#_\gamma \mu^{-1}, \psi \rangle, \end{cases}$$

où  $F$ ,  $G$  et  $Q$  sont les matrices de la réalisation d'état de l'opérateur  $\mathcal{H}_2^{-1}$ .

L'inversion de  $\mu_1$  s'effectue via la méthode précédente. En appliquant cette méthode à  $\mu$ , on obtient l'inverse du  $\gamma$ -symbole de la partie inversible de  $\mathcal{H}$ , c'est à dire l'inverse de  $\mu_1$ . Le  $\gamma$ -symbole  $\sum_{k=0}^K \beta_k \delta_{\xi_k}$  obtenu par résolution de (18) pour  $\sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k}$   $\gamma$ -symbole numérique de  $\mathcal{H}$  est donc une approximation de  $\delta^m \#_\gamma \mu_1^{-1}$  : on le notera  $\delta^m \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}$ .

On souhaite à présent obtenir une réalisation d'état de  $\mathcal{H}_2^{-1}$ . Pour cela, on cherche une approximation de  $H_2(p)$  de la forme suivante :

$$H_2(p) \simeq \sum_{k=0}^J a_j p^j.$$

Or, on sait que  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \circ \mathcal{H}_1^{-1}$ , soit encore :

$$\frac{H_2(p)}{p^m} = H(p) \frac{H_1^{-1}(p)}{p^m}.$$

Il faut donc chercher les coefficients  $a_j$ ,  $j = 0..J$  tels que

$$\sum_{k=0}^J a_j p^{j-m} \simeq \langle \mu \#_\gamma \delta^m \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}, \frac{1}{p-\gamma} \rangle,$$

ce qui revient à chercher la solution du problème de minimisation :

$$\min_{a \in \mathbb{C}^{J+1}} \left\| \sum_{j=0}^J a_j (i\omega)^{j-m} - \langle \delta^m \#_\gamma \mu \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}(\cdot), \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \rangle_\xi \right\|_{\mathfrak{h}}^2. \quad (25)$$

Or on a :

$$\left\| \sum_{j=0}^J a_j (i\omega)^{j-m} - \langle \delta^m \#_\gamma \mu \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}(\cdot), \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \rangle_\xi \right\|_{\mathfrak{h}}^2 = \sum_{j,k=0}^J a_j \overline{a_k} A^{jk} - \sum_{j=0}^J a_j B^j - \sum_{k=0}^J \overline{a_k} C^k + D,$$

avec

$$\begin{aligned} A^{jk} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} (-1)^{k-m} (i\omega)^{j+k-2m} d\omega, \\ B^j &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} (i\omega)^{j-m} \overline{\langle \delta^m \#_\gamma \mu \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}(\cdot), \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \rangle_\xi} d\omega, \\ C^k &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} (-i\omega)^{k-m} \langle \delta^m \#_\gamma \mu \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}(\cdot), \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \rangle_\xi d\omega, \\ \text{et } D &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \langle \delta^m \#_\gamma \mu \#_\gamma \widetilde{\mu}_1^{-1}(\cdot), \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \rangle_\xi \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

La solution de (25) est donc donnée par :

$$a = (A^T)^{-1}C,$$

où  $a = (a_0, \dots, a_J)^T$  : seuls la matrice  $A$  et le vecteur  $C$  nécessitent donc d'être explicités. Leurs expressions sont données en annexe (cf. § B.2).

Une fois le jeu de coefficients  $(a_k)_k$  déterminé, on peut obtenir une réalisation d'état de  $\mathcal{H}_2^{-1}$  en utilisant par exemple une forme compagne horizontale. Si  $a_J \neq 0$ , les matrices de la réalisation d'état sont alors les suivantes :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_J} & -\frac{a_1}{a_J} & \dots & -\frac{a_{J-2}}{a_J} & -\frac{a_{J-1}}{a_J} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{J \times J}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_J} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{J \times 1},$$

et  $Q = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{C}^{1 \times J}$ .

### 2.3 Exemples

Les exemples suivants traitent de l'inversion  $\gamma$ -symbolique, analytique et numérique, de quelques opérateurs. Après l'analyse du cas particulier de l'opérateur d'intégration, on s'intéressera à l'inversion  $\gamma$ -symbolique de l'opérateur  $(\sqrt{\partial_t} + 1)^{-1}$  pour ensuite considérer le cas d'un opérateur non inversible dans  $\Sigma_\gamma$ . Pour les simulations numériques on considérera le contour  $\gamma$  défini par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \gamma(\xi) = -|\xi|, \quad (26)$$

ainsi que la discrétisation  $\{\xi_k\}_{k=0..K}$  du paramètre  $\xi$  ( $K = 40$ ) définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0, \\ \xi_1 &= 0.1, \\ \xi_k &= \xi_1 \times (1,343)^k, \quad k = 2..K. \end{aligned}$$

Dans la suite, on note  $n \in \llbracket 0, K \rrbracket$ , l'indice tel que  $\xi_n = 0$ . Dans le cas de la discrétisation ci-dessus, on a  $n = 0$ .

#### Inversion $\gamma$ -symbolique de l'opérateur $\partial_t^{-1}$

On considère l'opérateur  $\partial_t^{-1}$  de  $\gamma$ -symbole  $\delta$ . Cet opérateur est inversible dans  $\Sigma_\gamma$  et admet comme inverse l'opérateur de dérivation  $\partial_t$  qui est  $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre 1. On notera  $\delta^{-1}$  le  $\gamma$ -symbole de ce dernier et  $H^{-1}(i\omega)$  sa réponse fréquentielle définie par  $H^{-1}(i\omega) = i\omega$ .

D'un point de vue numérique, on cherchera en fait à approcher le  $\gamma$ -symbole numérique de  $\partial_t^{-2} \circ \partial_t$ . Dans cet exemple, les  $\gamma$ -symboles numériques utilisés sont égaux au  $\gamma$ -symboles puisque l'on a :

$$\delta = \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta_{\xi_k} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$\delta^2 \#_\gamma \delta^{-1} = \delta = \sum_{k=0}^K \beta_k \delta_{\xi_k},$$

avec  $\beta_k = \alpha_k, \forall k = 0..K$ . Ceci fait donc de cet exemple un test numérique intéressant. L'inversion numérique  $\gamma$ -symbolique donne les résultats de la figure (5).

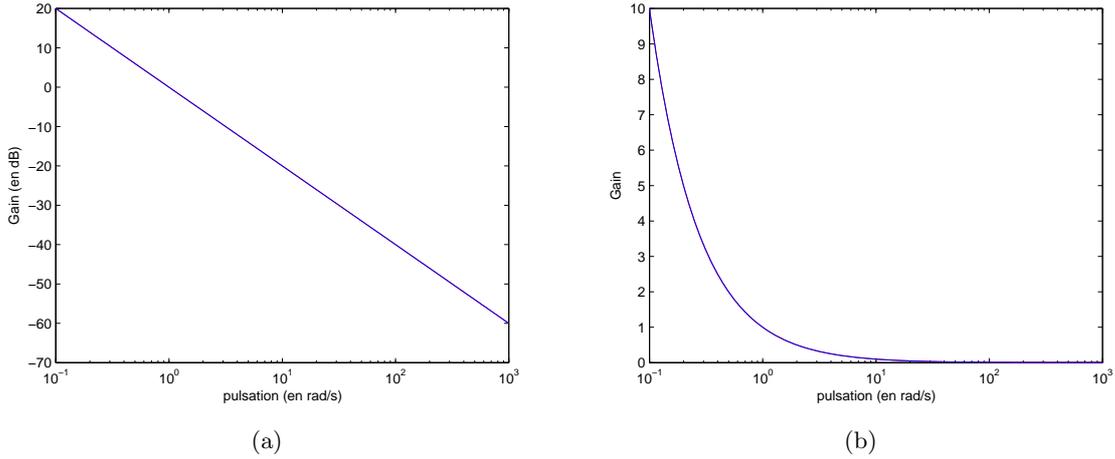


FIG. 5 – Gains de  $\partial_t^{-2} \circ \partial_t$  et de l'inverse numérique de  $\partial_t^{-1}$  (composé avec  $\partial_t^{-2}$ )

On constate que les tracés se superposent parfaitement, que ce soit sur la figure (a) ou sur la figure (b). L'opération d'inversion de l'opérateur d'intégration via celle de son  $\gamma$ -symbole donne donc d'excellents résultats à toute fréquence.

### Inversion $\gamma$ -symbolique de l'opérateur $(\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$

On s'intéresse à présent à l'opérateur  $\gamma$ -diffusif strict  $(\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$ , de  $\gamma$ -symbole inversible dans  $\Sigma_\gamma$ , et d'inverse  $\sqrt{\partial_t + 1}$ . Ce dernier étant  $\gamma$ -diffusif (au sens large) d'ordre  $\frac{1}{2}$ , l'inversion numérique procurera une approximation du  $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $\partial_t^{-1} \circ \sqrt{\partial_t + 1}$ . Notons que dans cet exemple, les  $\gamma$ -symboles considérés ne sont plus exactement décomposables en somme de masses de Dirac : les  $\gamma$ -symboles numériques sont donc des approximations des  $\gamma$ -symboles. Les résultats obtenus par inversion  $\gamma$ -symbolique sont donnés en figure (6).

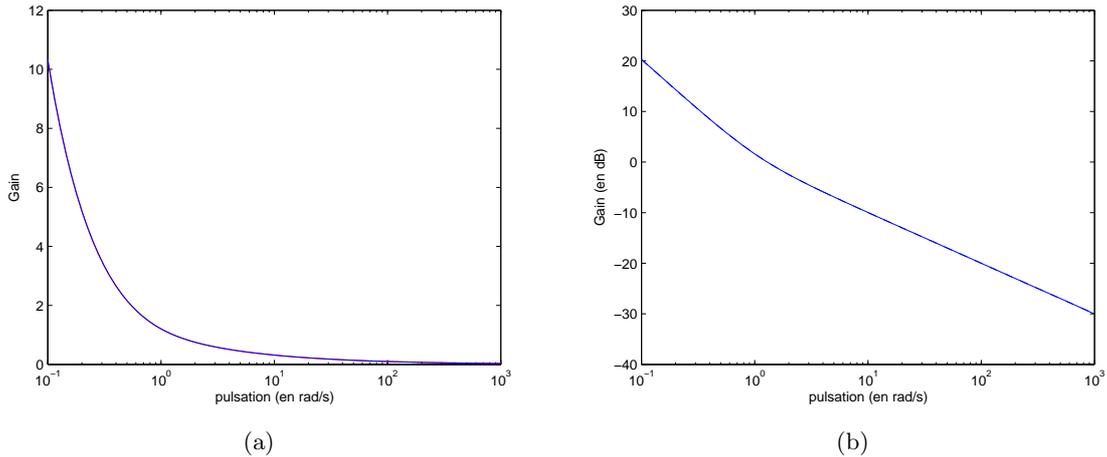


FIG. 6 – Gains de  $\partial_t^{-1} \circ \sqrt{\partial_t + 1}$  et de l'inverse numérique de  $\sqrt{\partial_t + 1}^{-1}$  (composé avec  $\partial_t^{-1}$ )

Là encore, on constate que les courbes se superposent et que l'inversion est d'excellente qualité dans la bande fréquentielle concernée par le réseau  $\{\xi_k\}$ .

### Inversion $\gamma$ -symbolique de l'opérateur $(\partial_t + 1)^{-1}$

Si l'on considère de la même manière l'opérateur  $(\partial_t + 1)^{-1}$ , on obtient les résultats de la figure (7) sur laquelle on peut constater que la qualité de l'inversion se dégrade légèrement aux hautes fréquences. Ce problème est en partie dû au choix de la norme qui accorde plus de poids aux basses fréquences au détriment des hautes fréquences. L'utilisation de la norme (22) pourrait permettre de pallier en partie ce problème si nécessaire. Notons cependant que l'erreur absolue reste toujours très petite.

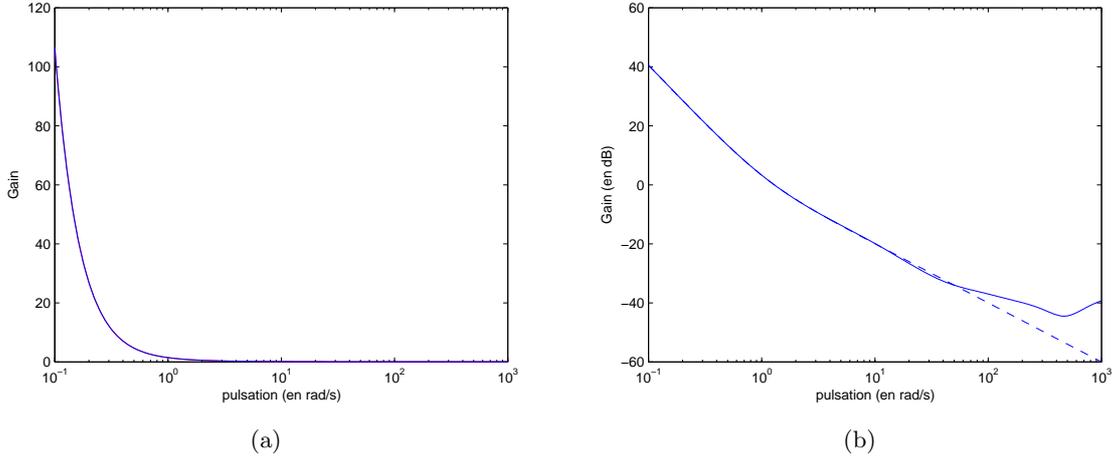


FIG. 7 – Gains de  $\partial_t^{-2} \circ (\partial_t + 1)$  (tirets) et de l'inverse numérique de  $(\partial_t + 1)^{-1}$  (composé avec  $\partial_t^{-2}$ )

### Cas d'un $\gamma$ -symbole non inversible dans $\Sigma_\gamma$

On s'intéresse maintenant à l'opérateur  $\frac{\partial_t - 1}{\partial_t + 1}$  que l'on notera  $\mathcal{H}$ . Son inverse, l'opérateur  $\frac{\partial_t + 1}{\partial_t - 1}$ , n'est pas  $\gamma$ -diffusif puisqu'il possède un pôle (en  $p = 1$ ) qui n'est pas dans  $\overline{\Omega_\gamma}$  (le contour  $\gamma$  étant défini par (26)). Cependant, l'opérateur  $\mathcal{H}$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{\partial_t + 1} \text{ inversible dans } \Sigma_\gamma \text{ et d'inverse } \gamma\text{-diffusif d'ordre 1,} \\ \text{et } \mathcal{H}_2 &= (\partial_t - 1) \text{ non inversible dans } \Sigma_\gamma. \end{aligned}$$

Appliquée à cet exemple et en prenant  $m = 2$ , la résolution de (18) doit donc fournir une approximation (au produit  $\#_\gamma$  avec  $\delta^2$  près) de l'inverse du  $\gamma$ -symbole numérique de la partie inversible de  $\mathcal{H}$  c'est à dire de  $\mathcal{H}_1$ . La réponse fréquentielle correspondant à ce  $\gamma$ -symbole doit alors être comparée avec celle de l'opérateur  $\frac{\partial_t + 1}{\partial_t^2}$ , c'est à dire, du point de vue des réponses fréquentielles, avec  $\frac{i\omega + 1}{(i\omega)^2}$ . Les résultats obtenus sont donnés en figure (8).

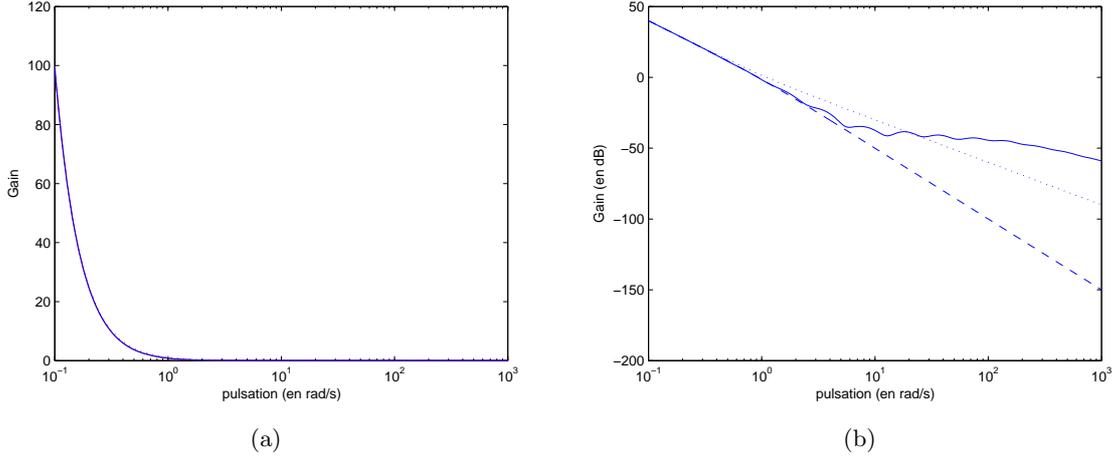


FIG. 8 – Gains de  $\partial_t^{-2} \circ (\partial_t + 1)$ , (tirets), de  $\partial_t^{-2} \circ \frac{\partial_t + 1}{\partial_t - 1}$  (pointillés) et de l'inverse numérique de  $\frac{\partial_t - 1}{\partial_t + 1}$  composé avec  $\partial_t^{-2}$ .

On constate que l'inversion numérique n'est pas de très bonne qualité et qu'aux hautes fréquences, ni  $\partial_t^{-2} \circ (\partial_t + 1)$ , ni  $\partial_t^{-2} \circ \frac{\partial_t + 1}{\partial_t - 1}$  n'est vraiment approché. La méthode semble en fait ne pas complètement ignorer la présence du pôle qui se situe en dehors de  $\Omega_\gamma^-$ , ce qui devrait être le cas en théorie. Ce problème devra donc faire l'objet d'études complémentaires.

## 2.4 Extension aux opérateurs matriciels

L'extension de l'inversion  $\gamma$ -symbolique aux opérateurs matriciels se fait de manière naturelle. De ce fait, le sujet sera traité de manière formelle puisque les questions topologiques sont similaires à celles du cas scalaire. On se place dans l'algèbre  $\Sigma_\gamma^{n \times m}$  des  $\gamma$ -symboles d'opérateurs matriciels de taille  $n \times m$ .

**Notations** Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur matriciel de taille  $n \times m$  de  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times m}$ . On notera  $\mathcal{H}_i^j$  (resp.  $\mu_i^j$ ) les opérateurs scalaires (resp. les  $\gamma$ -symboles scalaires), éléments de l'opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  (resp. du  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu$ ). En utilisant la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, on notera alors :

$$(\mathcal{H}u)_i = \mathcal{H}_i^j u_j,$$

et

$$(\mu \cdot \psi)_i = \langle \mu_i^j, \psi_j \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma},$$

où  $\psi_j = \mathfrak{Rd}_\gamma u_j$ ,  $j = 1..m$ .

**Produit d'opérateurs et de  $\gamma$ -symboles matriciels** Ces produits sont définis de la même manière que le produit matriciel habituel en prenant comme produit scalaire le produit de composition pour les opérateurs et le produit  $\#_\gamma$  pour les  $\gamma$ -symboles. On a alors :

– pour tous  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  opérateurs matriciels de taille respective  $n \times l$  et  $l \times m$ ,

$$\forall i = 1..n, \forall j = 1..m, \quad (\mathcal{H} \circ \mathcal{K})_i^j = \mathcal{H}_i^l \circ \mathcal{K}_l^j,$$

– et  $\forall \mu \in \Sigma_\gamma^{n \times l}, \forall \nu \in \Sigma_\gamma^{l \times m},$

$$\forall i = 1..n, \forall j = 1..m, \quad (\mu \#_\gamma \nu)_i^j = \mu_i^l \#_\gamma \nu_l^j.$$

Le produit d'un opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times m$  (resp. d'un  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times m}$ ) avec un opérateur scalaire  $\mathcal{K}$  (resp. un  $\gamma$ -symbole scalaire  $\nu$ ) sera de même défini par :  $\forall i = 1..n, \forall j = 1..m,$

$$(\mathcal{K} \circ \mathcal{H})_i^j = \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_i^j \quad (\text{resp. } (\nu \#_\gamma \mu)_i^j = \nu \#_\gamma \mu_i^j).$$

**$\gamma$ -réalisation d'un opérateur matriciel** Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur matriciel de taille  $n \times m$  et de  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times m}$ .

On suppose tout d'abord que  $\forall i = 1..n, \forall j = 1..m, \mu_i^j \in \Delta'_\gamma$ . Une  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}$  est alors donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_j(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi_j(t, \xi) + u_j(t) & j = 1..m \\ (\mathcal{H}u)_i = (\mu \cdot \psi)_i = \langle \mu_i^j, \psi_j \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} & i = 1..n, \end{cases} \quad (27)$$

que l'on notera plus simplement, lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + u \\ \mathcal{H}u = \mu \cdot \psi. \end{cases}$$

**Remarque 27** Dans la  $\gamma$ -réalisation (27), un unique contour  $\gamma$  commun à toutes les  $\gamma$ -réalisations des opérateurs  $\mathcal{H}_i^j$  a été considéré. Une autre solution consistant à considérer un contour  $\gamma_{ij}$  pour chaque  $\mathcal{H}_i^j$  peut naturellement aussi être envisagée. On a alors :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_{ij}(t, \xi) = \gamma_{ij}(\xi) \psi_{ij}(t, \xi) + u_j(t) & i = 1..n, j = 1..m, \\ (\mathcal{H}u)_i = \langle \mu_i^j, \psi_{ij} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} & i = 1..n. \end{cases} \quad (28)$$

Cependant le choix d'un unique contour  $\gamma$  n'est pas anodin et offre des avantages non négligeables. En effet, outre le fait que la  $\gamma$ -réalisation (27) associé à ce choix nécessite la résolution de seulement  $m$  équations différentielles contre  $n \times m$  pour la  $\gamma$ -réalisation (28), ce choix permet également d'obtenir une algèbre d'opérateurs matriciels associée à une algèbre de  $\gamma$ -symboles matriciels dans laquelle le produit  $\#_\gamma$  est bien défini (ce qui n'est pas le cas lorsque l'on considère plusieurs contours  $\gamma_{ij}$ ).

Supposons à présent que  $\mu_i^j \in \Sigma_\gamma$ , d'ordres respectifs  $m_{ij}$ . En posant  $m = \max(m_{ij})$ , on a la  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}$  suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + \partial_t^{m+1} u \\ \mathcal{H}u = (\delta^{m+1} \#_\gamma \mu) \cdot \psi. \end{cases}$$

**Inversion  $\gamma$ -symbolique d'un opérateur matriciel** On se place dans l'algèbre des  $\gamma$ -symboles matriciels "carrés"  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ , et on s'intéresse au problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique d'un opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times n$  et de  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$ . De même que l'inverse  $M^{-1}$  d'une matrice  $M \in R^{n \times n}$  s'exprime de la manière suivante :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times (M^c)^T,$$

où  $M^c$  matrice des cofacteurs de  $M$ , on a :

$$\mu^{-1} = (\det(\mu))^{-1} \#_\gamma (\mu^c)^T, \quad (29)$$

avec

–  $\det(\mu)$   $\gamma$ -symbole scalaire défini par la récurrence suivante :

- si  $n = 1$  :  $\det(\mu) = \mu$ ,
- si  $n > 1$  :  $\det(\mu) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \mu_j^i \#_{\gamma} \det(\tilde{\mu}_{ij})$ ,

où  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  choisi arbitrairement et  $\tilde{\mu}_{ij}$   $\gamma$ -symbole matriciel obtenu à partir de  $\mu$  en lui enlevant sa  $i^{\text{ème}}$  colonne et sa  $j^{\text{ème}}$  ligne,

– et  $\mu^c$   $\gamma$ -symbole matriciel appartenant à  $\Sigma_{\gamma}^{n \times n}$  défini par :

$$\forall i, j = 1..n, \quad (\mu^c)_i^j = (-1)^{i+j} \det(\tilde{\mu}_{ij}).$$

**Remarque 28** L'expression de l'inverse  $\mathcal{H}^{-1}$  d'un opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times n$  est similaire à celle de  $\mu^{-1}$  donnée en (29) à ceci près que le produit  $\#_{\gamma}$  est remplacé par le produit de composition  $\circ$ .

**Exemple 29** On considère l'opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  suivant ( $\partial_t^0$  désigne l'opérateur identité) :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \partial_t & \partial_t^2 & 0 \\ \partial_t^{-1} & \partial_t^0 & \partial_t^0 \\ 0 & \partial_t & \partial_t \end{bmatrix},$$

de  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu$  défini par :

$$\mu = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & \delta^{-2} & 0 \\ \delta & \delta^0 & \delta^0 \\ 0 & \delta^{-1} & \delta^{-1} \end{bmatrix},$$

où  $\delta^0$  est le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur identité. On a :

$$\det(\mathcal{H}) = \partial_t^0 \quad \text{et} \quad \det(\mu) = \delta^0,$$

d'où

$$\mathcal{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_t^3 & \partial_t^2 \\ -\partial_t^0 & \partial_t^2 & -\partial_t \\ \partial_t^0 & -\partial_t^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta^{-3} & \delta^{-2} \\ -\delta^0 & \delta^{-2} & -\delta^{-1} \\ \delta^0 & -\delta^{-2} & 0 \end{bmatrix}.$$

**Non continuité de l'opération d'inversion** De même que dans le cas scalaire, on a le résultat suivant :

**Corollaire 30**  $\forall m \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\gamma}^{m \times n} & \longrightarrow & \Delta_{\gamma}^{m \times n} \\ \mu & \longmapsto & \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu^{-1} \end{array}$$

n'est nulle part continue.

En pratique, les mêmes précautions que dans le cas scalaire devront donc être prises, en particulier au plan numérique.

### 3 Applications à certains problèmes dynamiques

Etant dédiée aux opérateurs intégraux, la représentation diffusive offre de nombreuses perspectives d'application dans des domaines variés. Dans ce paragraphe, on verra comment l'utiliser et l'appliquer à des problèmes de contrôle de systèmes (agrégation), d'identification ou de réduction de modèles. Notons que les méthodes proposées dans ce paragraphe devront être approfondies afin de pouvoir être mises en œuvre sur des problèmes concrets par voie numérique.

#### 3.1 Agrégation de systèmes dynamiques

L'agrégation est une technique récente permettant de simplifier, grâce à un préconditionnement particulier, la résolution d'un problème (de contrôle par exemple). Dans ce paragraphe, on expose dans un premier temps le principe de base de cette technique pour s'intéresser ensuite à son application à des problèmes de contrôle. Dans une troisième partie, on étudiera en particulier l'application de l'agrégation au contrôle de systèmes dynamiques.

##### 3.1.1 Principe d'agrégation

On considère une contrainte

$$\Phi(u, x) = 0, \quad (30)$$

liant deux quantités  $u$  et  $x$  à préciser selon les situations. Le problème consistant à trouver  $(u, x) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}$  solution de (30) sera dit bien posé lorsqu'il existe un opérateur  $\mathbf{F}$  tel que :

$$(30) \Leftrightarrow x = \mathbf{F}(u).$$

Si l'on souhaite résoudre directement (30), il faut donc parvenir à exhiber la fonction  $\mathbf{F}$  ce qui est en général assez complexe. De plus, lorsque la résolution numérique s'avère trop coûteuse ou mal conditionnée, le problème (30) ne peut être résolu directement.

On considère une quantité  $y$  donnée par :

$$y = \mathbf{A}(u, x),$$

où  $\mathbf{A} : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  et on suppose qu'il existe deux fonctions  $\mathbf{B} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  et  $\mathbf{C} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  continues et telles que, pour tout  $y \in \mathcal{Y}$  :

$$\left. \begin{array}{l} u = \mathbf{B}(y) \\ x = \mathbf{C}(y) \end{array} \right\} \implies x = \mathbf{F}(u).$$

Les variétés  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$  sont alors homéomorphes. Si la variété  $\mathcal{Y}$  ainsi que les fonctions  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont explicitables et d'expression simples, tout choix de  $y$  dans  $\mathcal{Y}$  donnera accès à une solution  $(u, x) = (\mathbf{B}(y), \mathbf{C}(y))$  de  $\Phi = 0$ , obtenue sans résolution directe de (30). Le problème est donc simplifié dans le sens où la fonction  $\mathbf{F}$  peut rester implicite, la contrainte (30) étant "résumée" par  $y \in \mathcal{Y}$ .

Dans la suite, on parlera d'opérateur d'agrégation pour  $\mathbf{A}$  et d'opérateur de séparation pour  $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ , les définitions précises étant données en suivant.

**Définition 31** Une fonction  $\mathbf{A} : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est appelée opérateur d'agrégation pour  $\Phi$  si et seulement si  $\mathbf{A}_{\mathbf{F}}(\cdot, \mathbf{F}(\cdot))$  réalise un homéomorphisme entre  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$ .

Le couple  $(\Phi, \mathbf{A})$  avec  $\mathbf{A}$  d'agrégation pour  $\Phi$  sera alors appelé système agrégé.

**Définition 32** La fonction  $(\mathbf{B}, \mathbf{C}) : y \in \mathcal{Y} \rightarrow (u, x) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}$  définie par :

$$(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{A}_{|\text{graphe}(\mathbf{F})})^{-1},$$

où  $\mathbf{A}$  opérateur d'agrégation pour  $\Phi$ , est appelée opérateur de séparation associé à  $(\Phi, \mathbf{A})$ .

**Remarque 33** On a :

$$\mathbf{C}(y) = x = \mathbf{F}(u) = \mathbf{F}(\mathbf{B}(y)),$$

d'où

$$\mathbf{C} = \mathbf{F} \circ \mathbf{B}.$$

L'intérêt du principe d'agrégation est bien évidemment d'obtenir une simplification par rapport au problème initial. Les opérateurs d'agrégation/séparation doivent donc être simples, ou du moins plus simples que ceux du problème initial, et de mise en œuvre peu coûteuse.

**Exemple 34** On considère le modèle de flamme sphérique introduit dans [5] :

$$x \partial_t^{\frac{1}{2}} x = x \ln(x) + u, \quad x(t) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad x|_{\mathbb{R}_t^-} = 0. \quad (31)$$

La nature bien posée du problème et le comportement qualitatif en fonction de l'entrée  $u$  de ce système dynamique pseudo-différentiel non linéaire ont été étudiés et établis dans [1]. L'intégration directe de (31) est assez délicate du fait entre autres de la singularité de  $\ln$  en 0 : on va donc chercher à simplifier la résolution du problème en considérant un opérateur d'agrégation adéquat. On pose alors formellement :

$$y = \mathbf{A}(u, x) := \partial_t^{\frac{1}{2}} x,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u = \mathbf{B}(y) &= \left( \partial_t^{-\frac{1}{2}} y \right) y - \left( \partial_t^{-\frac{1}{2}} y \right) \ln(\partial_t^{-\frac{1}{2}} y), \\ x = \mathbf{C}(y) &= \partial_t^{-\frac{1}{2}} y. \end{aligned}$$

En considérant la variété  $\mathcal{Y} = \{\varphi \in C^0([0, T]), \partial_t^{-\frac{1}{2}} \varphi > 0 \text{ t-pp}\}$ , il suffit alors de choisir un  $y$  dans  $\mathcal{Y}$  pour ensuite avoir accès à une solution  $(u, x)$  de (31). Cette dernière aura été obtenue sans résolution directe de (31), mais par simple application de l'opérateur  $\partial_t^{-\frac{1}{2}}$ , de la fonction  $\ln$  et de leurs combinaisons.

### 3.1.2 Application aux problèmes de contrôle

On considère un système dont on dispose d'un modèle entrée-sortie supposé bien posé :

$$\begin{cases} x = \mathbf{F}(u) \\ y = \mathbf{A}(u, x), \end{cases} \quad (32)$$

où  $x$  est l'état du système,  $u$  la commande et  $y$  la mesure (au sens des trajectoires).

Un problème de contrôle sur (32) consiste à trouver la commande  $u$  permettant de réaliser un objectif, que l'on exprimera par la relation :

$$z = \mathbf{J}(u, x, y). \quad (33)$$

Dans le cas du contrôle optimal,  $\mathbf{J}(u) = \mathbf{J}(u, x(u), y(u))$  est une fonctionnelle de coût que l'on peut chercher à minimiser. On considère alors le problème :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathbf{J}(u). \quad (34)$$

**Remarque 35** Plusieurs types de contraintes (objectifs) peuvent en fait être considérées. On peut par exemple remplacer l'objectif (33) par  $z \in \mathbf{J}(u, x, y)$  où  $z$  est un ensemble, ou encore remplacer dans (34)  $\mathcal{U}$  par  $\mathcal{C}$  sous-ensemble fermé de  $\mathcal{U}$ .

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} x = \mathbf{F}(u) \\ y = \mathbf{A}(u, x) \\ z = \mathbf{J}(u, x, y), \end{cases} \quad (35)$$

d'inconnue  $u(z)$  (les quantités  $x$  et  $y$  étant en somme des intermédiaires de calculs). Le schéma-bloc correspondant à (35) est donné en figure (9).

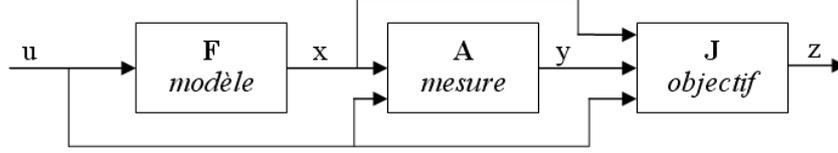


FIG. 9 – Schéma-bloc du système (35)

En pratique, le calcul d'une solution (optimale ou non)  $u^*$  de (35) s'effectue souvent "hors ligne" (planification de trajectoires), la commande étant ensuite mise en oeuvre sur le système réel de modèle (32) (avec en général une boucle de contre-réaction permettant de compenser des perturbations diverses).

**Remarque 36** ► Lorsque la commande  $u^*$  dépend d'une mesure  $v$  (non nécessairement égale à  $y$ ) on parle de contrôle en boucle fermée; dans l'autre cas, on parlera de contrôle en boucle ouverte.

► La mesure  $y$  utilisée dans (35) peut être qualifiée de fictive dans le sens où elle n'est qu'un intermédiaire de calculs et où il n'est pas nécessaire qu'elle soit disponible sur le système physique.

Le calcul de  $u^*$  par résolution de (35) n'est pas toujours évident : on va donc chercher à exprimer  $u^*$  au moyen d'un préconditionnement par agrégation.

Supposons que  $\mathbf{A}$  soit d'agrégation pour  $\Phi$  définie par :

$$x = \mathbf{F}(u) \Leftrightarrow \Phi(u, x) = 0.$$

Il existe donc  $(\mathbf{B}, \mathbf{C}) : y \in \mathcal{Y} \longrightarrow (u, x) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}$ , opérateur de séparation associé à  $(\Phi, \mathbf{A})$ . Le système (35) se réécrit alors :

$$z = \mathbf{J}(\mathbf{B}(y), \mathbf{C}(y), y),$$

soit, en posant  $\tilde{\mathbf{J}}(y) := \mathbf{J}(\mathbf{B}(y), \mathbf{C}(y), y)$ ,

$$z = \tilde{\mathbf{J}}(y), \quad (36)$$

la nouvelle inconnue étant alors  $y \in \mathcal{Y}$ . Dans le cas du contrôle optimal, on obtient un nouveau problème de minimisation portant maintenant sur  $y$  :

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} \tilde{\mathbf{J}}(y).$$

Si la variété  $\mathcal{Y}$  est déterminable et si les fonctions  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont explicitables et d'expressions simples, alors la résolution du problème (36) pourra s'avérer plus simple que celle du problème (35). Lorsqu'une solution  $y^*$  de (36) aura été calculée, il suffira ensuite d'appliquer l'opérateur  $\mathbf{B}$  pour obtenir la solution  $u^*$  de (35) correspondante :

$$u^* = \mathbf{B}(y^*).$$

Un exemple de mise en oeuvre dans le cas d'un problème de contrôle prédictif avec retour correctif est donné ci-après.

**Exemple 37** On considère un processus de commande  $u$  et de sortie mesurée  $v$ , et un opérateur  $\mathbf{A}$  que l'on suppose d'agrégation pour le système. La solution  $y^*$  du problème simplifié par agrégation est supposée dépendre de  $v$  : il s'agit donc d'un contrôle en boucle fermée, la commande prédite étant donnée par :

$$u^*(v) = \mathbf{B}(y^*(v, c)),$$

où  $c$  représente des données ou consignes extérieures. Pour obtenir la commande réelle à appliquer sur le système physique, on ajoute un terme correctif :

$$u = u^*(v) + \mathbf{K}e,$$

où  $\mathbf{K}$  est un opérateur de feedback et  $e = v^* - v$ . Ainsi, on a réalisé au moyen des opérateurs  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  un contrôle prédictif avec correction représenté sur le schéma-bloc de la figure (10).

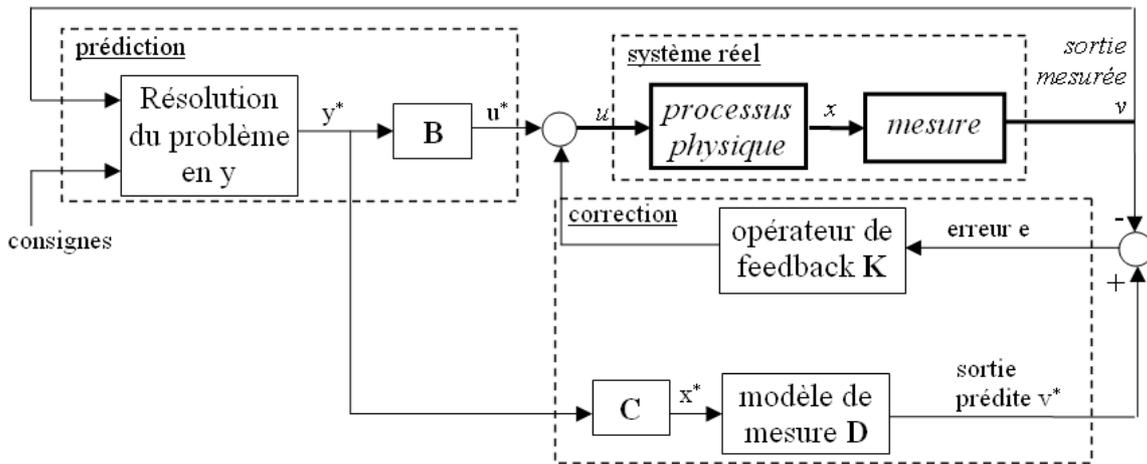


FIG. 10 – Mise en oeuvre idéale d'un contrôle prédictif avec correction

### 3.1.3 Cas du contrôle de systèmes dynamiques

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas particulier des problèmes de contrôle de systèmes dynamiques. On cherche à exposer les particularités de l'agrégation lorsque celle-ci est appliquée à de tels problèmes.

Lorsqu'on parle de systèmes dynamiques, on fait ici référence à un système d'équations, ou d'inclusions fonctionnelles de la forme abstraite :

$$\begin{cases} H(t, \partial_t)x - f(t, u, x) \ni 0 & t \in I \subset \mathbb{R}_t \\ K(x) - k = 0, \end{cases} \quad (37)$$

où :

- $x$  est l'inconnue du problème,
- $H(t, \partial_t)$  est un opérateur intégral linéaire (en général de type pseudo-différentiel) causal admettant un inverse causal qui, en pratique, sera supposé explicitement déterminé (au moins numériquement),
- $f$  est un opérateur (éventuellement multivoque)  $t$ -local d'ordre 0 par rapport à  $t$ ,
- et  $K$  est un opérateur causal dit "de condition initiale" (définie par  $k$ ).

Le système dynamique (37) sera dit bien posé lorsque pour tous  $u, k$ , il existe une solution  $x$  unique dépendant continûment de  $u$  et  $k$ .

**Remarque 38** *Certaines notions sur les opérateurs telles la causalité, la localité, etc. sont définies en annexe (A).*

Afin de simplifier l'exposé, on considérera des systèmes dynamiques  $t$ -invariants sur  $I = [t_0, +\infty[$  qui seront donc définis par :

$$\Phi(u, x) = \begin{bmatrix} H(\partial_t)x - f(u, x) \\ K(x) - k \end{bmatrix} = 0, \quad (38)$$

avec

–  $f : \mathbf{U} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ ,

– et  $\Phi : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \subset C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{U}) \times C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{X}) \rightarrow C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{X}) \times \mathfrak{X}$ ,

où  $\mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathfrak{X}$  sont des espaces de Banach, respectivement de commande, d'état et de condition initiale.

Le système dynamique (38) sera dit bien posé lorsqu'il existe un opérateur  $\mathbf{F} : C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{U}) \times \mathfrak{X} \rightarrow C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{X})$  tel que, pour tous  $(u, k) \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \times \mathfrak{X}$  :

$$\Phi(u, x) = 0 \iff x = \mathbf{F}(u, k).$$

On considère de la sorte un système dynamique et un opérateur  $\mathbf{A}$  d'agrégation pour ce système. On note  $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$  l'opérateur de séparation associé. Du fait de la "séparation" entre la partie dynamique linéaire (en général non local d'ordre 0, i.e. non statique) et la partie statique (en général) non linéaire de l'équation  $H(\partial_t)x = f(u, x)$ , les opérateurs d'agrégation/séparation considérés sont dits pseudo-linéaires : leurs composantes non statiques et non linéaires sont découplées. Cette particularité des opérateurs d'agrégation/séparation pour les problèmes de contrôle de systèmes dynamiques est intéressante car un opérateur pseudo-linéaire  $\mathcal{H}$  admet la plupart du temps une réalisation  $t$ -locale, c'est à dire une réalisation du type :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = K(\psi, v) \\ \mathcal{H}u = Q(\psi, v), \end{cases}$$

où les opérateurs  $K, Q$  sont  $t$ -locaux, l'opérateur partiel  $K(\cdot, v)$  étant d'ordre nul. C'est par exemple le cas des opérateurs pseudo-linéaires de type diffusif :

**Définition 39** *Un opérateur pseudo-linéaire  $\mathbf{K} = \mathcal{C} \circ H(t, \partial_t) \circ \mathcal{B}$  est dit diffusif si et seulement si  $H(t, \partial_t)$  est diffusif d'ordre  $< 0$ . Il admet alors la réalisation locale diffusif :*

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + B(u), & t > t_0, \psi(t_0) = 0 \\ \mathcal{H}u = \mathcal{C}(\langle \mu, \psi \rangle), \end{cases}$$

avec  $v$  à support dans  $[t_0, +\infty[$  et  $\mu$   $\gamma$ -symbole de  $H(t, \partial_t)$ .

Une telle réalisation locale est très avantageuse (cf. § 1) ; on cherchera donc des opérateurs d'agrégation/séparation de type pseudo-linéaire diffusif. La construction de ces opérateurs n'est cependant pas toujours facile et les techniques restent à établir : le problème est largement ouvert.

On peut néanmoins apporter quelques précisions, décrites ci-après.

**Sur la dimension des espaces de commande et de mesure** Si  $\mathbf{A} : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \subset C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{U}) \times C^\infty([t_0, +\infty[; \mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{Y}$  est d'agrégation pour le système, alors (par définition) les variétés  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$  sont homéomorphes. De ceci découle le théorème suivant :

**Théorème 40** *Si les opérateurs d'agrégation/séparation  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont locaux et les variétés  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$  d'intérieur non vide, alors les espaces de Banach  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Y}$  sont isomorphes.*

Si de plus  $\dim \mathbf{U} < +\infty$  (i.e.  $u(t) \in \mathbf{U} \sim \mathbb{R}^n$ ), alors nécessairement

$$\dim \mathbf{Y} = \dim \mathbf{U}.$$

Ce résultat est important puisqu'il traduit le fait que, pour pouvoir être agrégé, un système dynamique doit avoir autant de mesures que de commandes.

**Comparaison des notions d'observation et d'agrégation** De par sa définition, la notion d'agrégation paraît proche, ou tout du moins liée à celle de l'observation. Avant de comparer ces deux notions, donnons tout d'abord des définitions générales naturelles (bien que quelque peu abstraites) de l'observabilité et de la commandabilité.

**Définition 41** *Le système dynamique (38) est  $T$ -commandable si et seulement si pour toute condition initiale  $k_0$  admissible, l'opérateur :*

$$\mathbf{F}_{k_0, T} : \begin{array}{l} \mathcal{U} \subset C^\infty([t_0, t_0 + T]; \mathbf{U}) \rightarrow X \\ u \mapsto x(t_0 + T) = (\mathbf{F}(u, k_0))(T) \end{array}$$

est à image partout dense dans  $X$ .

Un système est dit commandable s'il existe  $T < +\infty$  tel qu'il soit  $T$ -commandable.

Un système est dit asymptotiquement commandable s'il est commandable pour  $T = +\infty$ .

**Définition 42** *Le système dynamique (38) est  $T$ -observable par  $\mathbf{A}$  si et seulement si pour toute  $u \in \mathcal{U} \subset C^\infty([t_0, T]; U)$ , l'opérateur (de domaine  $\text{dom}(\mathbf{A}_{u, T}) \subset \mathfrak{X}$ ) :*

$$\mathbf{A}_{u, T} : \begin{array}{l} \mathfrak{X} \rightarrow C^\infty([t_0, t_0 + T]; \mathbf{Y}) \\ k_0 \mapsto y = \mathbf{A}(u, \mathbf{F}(u, k_0))|_{[t_0, t_0 + T]} \end{array}$$

est injectif.

Un système est dit observable par  $\mathbf{A}$  s'il existe  $T < +\infty$  tel qu'il soit  $T$ -observable.

À partir de là, il paraît clair que si un opérateur  $\mathbf{A}$  est d'agrégation pour un système, il observe également ce système. Par contre, la réciproque est fautive. L'agrégation est en effet plus exigeante : à partir d'une sortie agrégée  $y$ , on doit en effet pouvoir reconstruire l'état  $x$ , mais également la commande  $u$ . On a alors les résultats suivants :

**Proposition 43** *Pour qu'un opérateur d'observation  $\mathbf{A}$  pour  $\Phi$  puisse être un opérateur d'agrégation, il faut que l'ensemble  $\text{Im}(\mathbf{A}_{u, T})$  soit indépendant de  $u$ .*

**Théorème 44** *Pour qu'un opérateur d'observation  $\mathbf{A}$  pour  $\Phi$  puisse être un opérateur d'agrégation, il faut que le système  $\Phi = 0$  soit commandable.*

### 3.2 Identification

Les problèmes d'identification de modèles sont fréquents et d'autant plus délicats que les opérateurs à identifier sont complexes. Sous représentation diffusive, on peut considérer, via les  $\gamma$ -symboles, des opérateurs variés d'une manière unifiée. En reportant le problème d'identification de l'opérateur sur son  $\gamma$ -symbole, on va donc avoir accès à de nouvelles méthodes d'identification faisant largement appel à l'inversion  $\gamma$ -symbolique traitée précédemment.

### 3.2.1 Identification d'un opérateur via son $\gamma$ -symbole

On considère un opérateur (en général matriciel)  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$ , de  $\gamma$ -symbole  $\mu$   $\gamma$ -diffusif au sens strict dans un premier temps. On s'intéresse alors au problème de l'identification de l'opérateur  $\mathcal{H}$  via celui de son  $\gamma$ -symbole.

Dans un premier temps, on considère une mesure  $y^*$  de  $y$ , éventuellement bruitée, et on suppose l'entrée  $u$  connue. Le modèle utilisé pour l'identification du système  $u \mapsto y$  est alors :

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{H}u \\ &= \mu \cdot \psi_u, \end{aligned}$$

où  $\psi_u = \mathfrak{Rd}_\gamma u$ , ce qui, en notant  $\mathbf{A}_u$  l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathbf{A}_u : \mu \longmapsto \mu \cdot \psi_u,$$

s'écrit

$$y = \mathbf{A}_u \mu.$$

Cette formulation permet de définir une première méthode d'identification de l'opérateur  $\mathcal{H}$  via son  $\gamma$ -symbole. En effet, l'identifié optimal  $\mu^*$  de  $\mu$  (au sens d'une norme hilbertienne non spécifiée ici) est donné par :

$$\mu^* = \mathbf{A}_u^\dagger y^*, \quad (39)$$

où  $\mathbf{A}_u^\dagger$  est le pseudo-inverse de  $\mathbf{A}_u$ . Ce type d'identification a déjà été utilisé avec succès par exemple dans [2].

On suppose à présent  $y$  connue et on se donne une mesure  $u^*$  de  $u$  bruitée, c'est à dire telle que :

$$u^* = \mathcal{H}^{-1}y + w.$$

- Une première possibilité d'identification de  $\mu$  consiste à appliquer la méthode précédente à l'opérateur  $\mathcal{H}^{-1}$  afin d'obtenir une approximation de  $\mu^{-1}$  qu'il suffit ensuite d'inverser numériquement (cf. § 2). En effet, on a :

$$u = \mathcal{H}^{-1}y = \mathbf{A}_y \mu^{-1},$$

d'où l'approximation de l'inverse de  $\mu$  suivante :

$$(\mu^{-1})^* = \mathbf{A}_y^\dagger u^*.$$

- Il est également possible d'identifier directement le  $\gamma$ -symbole  $\mu$  de  $\mathcal{H}$ , puisque la démarche précédente fournit l'approximation suivante de  $\mu$  :

$$\mu^* = \mathbf{A}_{u^*}^\dagger y. \quad (40)$$

Par souci d'homogénéité avec le cas précédent, on pourra préférer à (40) une formulation similaire à (39). Or, par linéarité on a :

$$\mathbf{A}_{u^*} = \mathbf{A}_u + \mathbf{A}_w,$$

d'où

$$y = \mathbf{A}_u \mu + \mathbf{A}_w \mu$$

ce qui, en posant  $z^* = y - \mathbf{A}_w \mu$  donne une nouvelle expression de l'approximation  $\mu^*$  de  $\mu$  :

$$\mu^* = \mathbf{A}_u^\dagger z^*,$$

de la forme de (39).

**Remarque 45** Dans le cas où  $u$  est mesuré, on notera que la formulation (40) présente l'inconvénient de nécessiter le calcul d'un nouveau  $\mathbf{A}_{u^*}^\dagger$  à chaque nouvelle mesure  $u^*$  de  $u$ .

L'extension au cas où  $\mathcal{H}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre  $m$  se fait de manière assez naturelle. Du fait de la commutation pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de  $\partial_t^n$  avec  $(\partial_t - pI)^{-1}$ , et de la nature convolutive de l'opérateur considéré, on a :

$$y = (\delta^{m+1} \#_\gamma \mu) \cdot \psi_{\partial_t^{m+1} u},$$

d'où :

$$y = \mathbf{A}_{\partial_t^{m+1} u} (\delta^{m+1} \#_\gamma \mu).$$

L'identification de  $\delta^{m+1} \#_\gamma \mu$  se fait alors de manière similaire au cas où  $\mathcal{H}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens strict.

### 3.2.2 Problématique générale

On s'intéresse à présent au problème d'identification de systèmes dynamiques généraux. Les modèles utilisés pour l'identification sont de la forme :

$$\mathcal{H}X = f(X, u), \quad (41)$$

où  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$  est un opérateur diffusif matriciel "carré" de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma^{n \times n}$  inversible et d'inverse  $\mu^{-1} \in \Delta_\gamma^{n \times n}$ , et  $f : \mathbb{R}_X^n \times \mathbb{R}_u^q \longrightarrow \mathbb{R}_X^n$  une fonction suffisamment régulière, continue et dérivable en  $(0, 0)$ , telle que (41) soit asymptotiquement stable pour  $u = 0$  et :

$$f(0, 0) = 0, \quad (42)$$

$$\text{et } \partial_1 f(0, 0) = 0. \quad (43)$$

**Remarque 46** ► La condition de stabilité asymptotique, quelque peu restrictive, pourra éventuellement être affaiblie moyennant adaptations techniques dépassant le cadre de cette étude.

► La condition (43) est à considérer sans pertes de généralités. En effet, dans le cas où  $\partial_1 f(0, 0) \neq 0$ , on considère  $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} - \partial_1 f(0, 0)$  au lieu de  $\mathcal{H}$ ,  $\tilde{f}(X, u) := f(0, 0) + \tilde{f}_2(X, u)$  où  $\tilde{f}_2(X, u) := f(X, u) - f(0, 0) - \partial_1 f(0, 0)X$  au lieu de  $f(X, u)$  et on choisit  $\gamma$  tel que  $\tilde{\mathcal{H}}$  admette un  $\gamma$ -symbole dans  $\Sigma_\gamma$  : ainsi on se ramène à un système satisfaisant l'hypothèse (43).

► Du fait de la stabilité du point  $(0, 0)$  et de la condition (43), le système (41) est équivalent, lorsque  $u$  est petit, au système dynamique :

$$\mathcal{H}X = \partial_2 f(0, 0)u,$$

dont on pourra exploiter la linéarité.

Le problème d'identification du système (41) consiste alors, à partir d'une mesure :

$$y = h(X, u) \quad (44)$$

où  $h : \mathbb{R}_X^n \times \mathbb{R}_u^q \longrightarrow \mathbb{R}_y^p$  est une fonction suffisamment régulière, à identifier l'opérateur linéaire dynamique  $\mathcal{H}$  (via son  $\gamma$ -symbole) et, selon les cas, les fonctions statiques en général non linéaires  $f$  et  $h$  définissant le modèle (41, 44). Pour résoudre ce problème, on préférera à la formulation (41, 44) le modèle augmenté obtenu via représentation diffusive :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + f(\nu \cdot \psi, u) \\ y = h(\nu \cdot \psi, u), \end{cases}$$

où  $\psi = \Re d_\gamma u$ ,  $\nu = \mu^{-1}$  et  $X = \nu \cdot \psi$ .

### 3.2.3 Identification d'un modèle linéaire $H(\partial_t)X = Bu$ de sortie mesurée $y = CX$

On considère le modèle diffusif :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + Bu \\ y = C \nu \cdot \psi, \end{cases}$$

et on cherche à identifier, à partir d'une mesure  $y^*$  de  $y$ , le  $\gamma$ -symbole  $\nu$ , et lorsqu'elles sont inconnues, les matrices  $B$  et  $C$  du modèle.

En posant  $\tilde{\mathcal{H}} = C\mathcal{H}^{-1}B$ , on est ramené au cas particulier du paragraphe (3.2.1), ce qui permet d'identifier par pseudo-inversion le  $\gamma$ -symbole  $C\nu B$  de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Cette méthode, intéressante dans le cas où seul le comportement linéaire entrée-sortie de ce système est recherché, n'est évidemment pas suffisante lorsque l'on souhaite identifier séparément  $\nu$  comme ce sera le cas par exemple dans le paragraphe (3.2.4).

Dans le cas le plus simple où  $B$  et  $C$  sont connues, l'identification de  $\nu$  se fait par pseudo-inversion linéaire :

$$\nu^* = \mathbf{A}^\dagger y^*,$$

où  $\mathbf{A} : \nu \mapsto C \nu \cdot B\psi_u$ . Si de plus l'opérateur  $\mathcal{H}$  est partiellement connu, ce qui est le cas de nombreux modèles ayant des termes en  $\partial_t^n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ , il est alors plus judicieux de n'identifier que la partie inconnue du  $\gamma$ -symbole à identifier. Pour cela, en supposant  $\nu$  décomposable en :

$$\nu = \nu_c + \nu_i,$$

où  $\nu_c$  (resp.  $\nu_i$ ) est la partie connue (resp. inconnue) de  $\nu$ , on considère à la place de  $y$  la sortie modifiée

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= y - C\nu_c \cdot B\psi_u \\ &= C\nu_i \cdot B\psi_u \\ &= \mathbf{A}\nu_i. \end{aligned}$$

Ainsi, on identifie  $\nu_i$  par pseudo-inversion :

$$\nu_i^* = \mathbf{A}^\dagger \tilde{y}^*.$$

Dans le cas où seul  $B$  (resp.  $C$ ) est connu, on peut de la même manière identifier le produit  $C\nu$  (resp.  $\nu B$ ). Dans ces cas, il y a non unicité de l'identifié  $\nu^*$  de  $\nu$  qui pourra éventuellement être levée au moyen de termes non linéaires dans une seconde étape.

Les idées précédentes ouvrent des voies de recherche qu'il reste à exploiter : le problème est largement ouvert.

### 3.2.4 Identification de modèles $H(\partial_t)X = b\mathbf{f}(X)\mathbf{g}(u)$ de sortie mesurée $y = h(X)$

On considère une fonction  $f : \mathbb{R}_X^n \times \mathbb{R}_u^q \longrightarrow \mathbb{R}_X^n$ , dite à variables séparées, c'est à dire telle que :

$$f = b_{kl} \mathbf{f}^k \otimes \mathbf{g}^l \Leftrightarrow f_i = b_{ikl} \mathbf{f}_i^k \otimes \mathbf{g}_i^l \quad \forall i = 1..n,$$

où  $\mathbf{f}^k : \mathbb{R}_X^n \longrightarrow \mathbb{R}_X^n$  et  $\mathbf{g}^l : \mathbb{R}_X^q \longrightarrow \mathbb{R}_X^n$  sont des suites de fonctions (convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, la sommation portant sur les indices  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  avec  $k = 1..K$  et  $l = 1..L$ ). Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre on utilisera plutôt l'écriture simplifiée :

$$f = b \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \Leftrightarrow f(X, u) = b \mathbf{f}(X) \mathbf{g}(u).$$

On considère également une sortie :

$$y = h(X),$$

dont on se donne une mesure  $y^*$ . Le modèle à identifier est donc :

$$\begin{cases} H(\partial_t)X = \mathbf{b}\mathbf{f}(X)\mathbf{g}(u) \\ y = h(X), \end{cases}$$

qui, sous représentation diffusive, s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t\psi = \gamma\psi + \mathbf{b}\mathbf{f}(\nu \cdot \psi)\mathbf{g}(u) \\ y = h(\nu \cdot \psi). \end{cases} \quad (45)$$

Le problème est alors d'identifier le  $\gamma$ -symbole  $\nu$  et les coefficients  $b \in \mathbb{C}^{n \times K \times L}$  à partir de la mesure  $y^*$  de  $y$  et de la donnée des suites de fonctions  $\mathbf{f}_i^k$  et  $\mathbf{g}_i^l$ . Ces dernière devront être choisies de manière à ce que le nombre de termes de  $f$  et donc de coefficients  $b_{ikl}$  nécessaires à l'obtention d'un modèle représentatif de la réalité soit le plus petit possible.

On s'intéresse dans un premier temps à l'identification de  $\nu$ . Sous les hypothèses du paragraphe 3.2.2 et pour  $u$  suffisamment petite, le modèle (45) se comporte comme son linéarisé autour de l'équilibre. Si de plus on fait les hypothèses suivantes :

- $\mathbf{g}^0(u) = u$  et  $\mathbf{g}^i(u) = o(u) \quad \forall i > 0$ ,
- $\mathbf{f}^0(u) = 1$  et  $\mathbf{f}^i(u) = o(1) \quad \forall i > 0$ ,

on a, pour  $u$  suffisamment petit :

$$\begin{cases} \partial_t\psi_i = \gamma\psi_i + B_i u \\ y = C_i \nu \cdot \psi, \end{cases}$$

avec  $B_i = b_{i00}$  et  $C_i = h'_i(0)$ . On est donc ramené au cas de l'identification d'un modèle linéaire étudié au paragraphe 3.2.3 : sous hypothèses, on pourra donc supposer dans la suite que le  $\gamma$ -symbole  $\nu$  de l'opérateur  $\mathcal{H}^{-1}$  a été identifié par  $\nu^*$ .

Une fois l'opérateur  $\mathcal{H}$  identifié, on s'intéresse à l'identification du second membre du modèle, c'est à dire à celle des coefficients  $b_{ikl}$ . On suppose la fonction  $h$  connue et on fait tout d'abord l'hypothèse qu'il existe un opérateur  $\mathcal{Q}$  (local ou non, pouvant dépendre de  $u$ ) connu et réalisable, tel que (cf. §(3.2.5)) :

$$(y = h(X)) \Rightarrow ((\mathcal{Q}(y))(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X(t)).$$

Sous cette hypothèse, on a accès via la mesure  $y^*$  de  $y$ , à une estimation de  $X$  donnée par :

$$X^* = \mathcal{Q}(y^*).$$

En notant  $\mathbf{A}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$  l'opérateur linéaire défini par  $\mathbf{A}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} : b \longmapsto b_{kl} \mathbf{f}^k(X^*)\mathbf{g}^l(u)$ , on peut alors identifier  $b$  à partir de la relation suivante :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}b^* = \mathcal{H}^*X^* = (\delta^m \#_{\gamma} \nu^{*-1}) \cdot (\psi_{\partial_t^m \mathcal{Q}(y^*)}),$$

qui, par pseudo inversion, nous amène à l'identifié de  $b$  :

$$b^* = \mathbf{A}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^\dagger \mathcal{H}^*X^*.$$

Cette formule n'est cependant pas valable telle quelle en pratique, puisque numériquement il faut considérer des espaces de Hilbert. On choisit donc un espace de Hilbert adéquat noté  $\mathfrak{h}(0, T; \mathbb{C}^n)$

de fonctions ou distributions définies sur  $[0, T]$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ . Ainsi pour tout  $T > 0$ , on obtient un estimé de  $b$  donné par :

$$b^*(T) = (\mathbf{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}(T))^\dagger \mathcal{H}^* X^*,$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}(T) : \mathbb{C}^{n \times K \times L} &\longrightarrow \mathfrak{h}(0, T; \mathbb{C}^n) \\ b &\longmapsto b_{kl} \mathbf{f}^k(X^*) \mathbf{g}^l(u). \end{aligned}$$

Sous hypothèses convenables, on peut alors s'attendre à ce que :

$$b^*(T) \longrightarrow b^\infty \simeq b.$$

Selon les problèmes, la méthode présentée peut être modifiée et adaptée. C'est ce qui a été fait dans l'exemple qui suit.

**Exemple 47** *On considère le système :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 \\ 0 & \mathcal{H}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2^3 \\ u + f_2(X_1) \end{bmatrix}$$

de sortie mesurée :

$$y = X_2.$$

On suppose les opérateurs  $\mathcal{H}_i$  connus : il reste donc à identifier la fonction  $f_2$ . Or on a :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1^{-1} y^3 - \mathcal{H}_1^{-1} \mathcal{H}_2 y \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{Q}(y).$$

Donc  $f_2$  est aisément identifiable à partir de la relation explicite (tous les termes sont connus dès que  $y$  est connue) :

$$(\mathcal{H}_3 y)(t) = u(t) + f_2((\mathcal{H}_1^{-1} y^3)(t) - (\mathcal{H}_1^{-1} \mathcal{H}_2 y)(t)), \quad \forall t > 0.$$

Dans le cas où  $\mathcal{Q}$  n'est pas explicitable, on ne peut plus utiliser cette méthode pour identifier  $b$ . D'autres méthodes, notamment itératives, sont alors envisageables. Le problème est largement ouvert.

### 3.2.5 Identification de modèles agrégés de sortie mesurée $y = h(X, u)$

On considère un système

$$\mathcal{H}X = f(X, u), \tag{46}$$

et un opérateur  $h$  supposé d'agrégation pour (46) (cf. § 3.1). Il existe alors deux opérateurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  réalisables tels que :

$$u = \mathbf{B}(y) \quad \text{et} \quad X = \mathbf{C}(y).$$

On se donne également une mesure  $y^*$  de la sortie :

$$y = h(X, u).$$

A partir de cette mesure, on obtient des estimations de  $u$  et de  $X$  données par :

$$u^* = \mathbf{B}(y^*) \quad \text{et} \quad X^* = \mathbf{C}(y^*).$$

En supposant l'opérateur  $\mathcal{H}$  identifié préalablement, le problème d'identification du modèle (46) se ramène donc à celui de la fonction  $f$  que l'on va pouvoir estimer à partir de l'expression :

$$f(X^*, u^*) = \mathcal{H}^* X^* = (\delta^m \#_\gamma \nu^{*-1}) \cdot (\psi_{\partial_t^m X^*}).$$

On peut pour cela résoudre par exemple le problème de minimisation :

$$\min \left\| f(X^*, u^*) - (\delta^m \#_\gamma \nu^{*-1}) \cdot (\psi_{\partial_t^m X^*}) \right\|,$$

qui lorsque  $f$  est choisie à variables séparées devient un problème quadratique que l'on peut résoudre par pseudo-inversion.

Notons tout de même que la réalisabilité de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sous-entend ici que ces opérateurs ne soient pas dépendants de la fonction  $f$  à identifier. C'est donc une hypothèse forte qui ne sera satisfaite que dans certains cas. Notons également que la variété  $\mathcal{Y}$  n'a pas besoin d'être explicitable dans le cas de l'identification, contrairement au cas du contrôle.

**Exemple 48** *On considère le système :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 X_1 \\ \mathcal{H}_2 X_2 \\ \mathcal{H}_3 X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + X_2^2 \\ \sin X_1 + X_3^3 \\ f_3(X_1, X_2, X_3, u) \end{bmatrix},$$

de sortie mesurée :

$$y = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

La sortie  $y$  est agrégée pour le système et on a :

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathcal{H}_2^{-1} (\sin y_1 + y_2^3) \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u = \mathcal{H}_1 y_1 - (\mathcal{H}_2^{-1} (\sin y_1 + y_2^3))^2.$$

A partir d'une mesure  $y^*$  de  $y$  et de l'expression :

$$f_3(X_1, X_2, X_3, u) = \mathcal{H}_3 X_3,$$

on peut alors identifier la fonction  $f_3$  à partir des "données"  $X_1, X_2, X_3, \mathcal{H}_3$ .

### 3.3 Réduction de modèles non linéaires

Les problèmes de réduction de modèle sont fréquents et d'autant plus importants que les systèmes considérés sont grands. De même que pour les problèmes d'identification, on peut utiliser la représentation diffusive pour reformuler le problème et reporter ce qui concerne les opérateurs sur leurs  $\gamma$ -symboles. On verra en fait que le problème de réduction peut même se ramener à un problème d'identification simplifié.

On considère un modèle entrée-sortie

$$\begin{cases} \mathcal{H}X = f(X, u) \\ y = h(X), \end{cases} \quad (47)$$

d'état  $X(t) \in \mathbb{C}^n$  et de sortie  $y(t) \in \mathbb{C}^p$ . Réduire ce modèle consiste à trouver  $\tilde{\mathcal{H}}$ ,  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  tels que la sortie  $\tilde{y}(t) \in \mathbb{C}^{\tilde{p}}$  du modèle réduit

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}X = \tilde{f}(\tilde{X}, u) \\ \tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{X}) \end{cases} \quad (48)$$

d'état  $\tilde{X}(t) \in \mathbb{C}^{\tilde{n}}$  avec  $\tilde{n} < n$ , soit aussi proche que possible de  $y(t)$  (en un sens à préciser selon les cas).

**Remarque 49** ► Si l'état  $X$  du modèle à réduire (47) peut avoir un sens physique, il est probable qu'après réduction le nouvel état  $\tilde{X}$  du modèle réduit (48) en ait un : il s'agit alors d'un modèle comportemental entrée-sortie.

► Les modèles (47) et (48) sont supposées satisfaire les hypothèses imposées au paragraphe (3.2.2), c'est à dire :

- $\mathcal{H}$  et  $\tilde{\mathcal{H}}$  diffusifs et d'inverses diffusifs
- $f(0,0) = 0$  et  $\tilde{f}(0,0) = 0$  avec équilibre stable (49)
- $\partial_1 f(0,0) = 0$  et  $\partial_1 \tilde{f}(0,0) = 0$

Connaissant le modèle à réduire (47), on évalue, à partir d'une entrée  $u$  "suffisamment riche", la sortie  $y(u)$  correspondante que l'on notera dans la suite  $\tilde{y}^*(u)$ . Comme l'on cherche un modèle réduit tel que  $\tilde{y}(u) \simeq y(u)$ , on considère  $\tilde{y}^*(u)$  comme une mesure de  $\tilde{y}(u)$ . Le problème consiste à présent à identifier, à partir de la mesure  $\tilde{y}^*(u)$  de  $\tilde{y}(u)$  et de la donnée  $u$ , l'opérateur  $\tilde{\mathcal{H}}$  et les fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  du modèle réduit (48) : on a donc bien un problème d'identification.

Cependant, dans le cas de la réduction, ce problème est simplifié du fait de la connaissance du modèle à réduire (47) qui va permettre d'identifier facilement l'opérateur  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Lorsque  $u$  est petite, les deux systèmes (47) et (48) se comportent en effet comme leurs linéarisés autour de l'équilibre. Le fait que leurs comportements entrée-sortie sont similaires se traduit alors par :

$$\tilde{C} \tilde{\nu} \tilde{B} = C \nu B.$$

Ainsi, en fixant  $\tilde{C}$  et  $\tilde{B}$  de manière judicieuse par rapport au modèle, on peut identifier  $\tilde{\nu}$  par pseudo-inversion. On a alors :

$$\tilde{\nu} = \mathbf{A}_{C,B}^\dagger C \nu B,$$

où  $\mathbf{A}_{C,B}$  est l'opérateur linéaire défini par  $\mathbf{A}_{C,B} : \tilde{\nu} \mapsto \tilde{C} \tilde{\nu} \tilde{B}$ .

**Exemple 50** On considère le modèle :

$$\text{diag}(H_i(\partial_t))X = \begin{bmatrix} aX_1 + \varepsilon_1 g_1(X, u) + u \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + \varepsilon_2 g_2(X, u) \\ cX_2 + g_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X, u) \\ f_2(X, u) \\ f_3(X, u) \end{bmatrix}, \quad (50)$$

d'état  $X \in \mathbb{R}^3$  et de sortie mesurée  $y(t) \in \mathbb{R}$  définie par :

$$y = X_3 = CX,$$

où  $C = (0 \ 0 \ 1)$ . On suppose que  $\partial_i f_3(0,0,0) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ , et que, pour  $u$  suffisamment petit,  $X$  reste suffisamment petit pour que  $\varepsilon_i f_i(X, u)$  soient négligeables,  $f_i(0,0)$  étant supposé nul  $\forall i$ . Dans ce cas, lorsque  $u$  est petit, le modèle (50) est voisin du modèle simplifié :

$$\text{diag}(H_i(\partial_t))X = \begin{bmatrix} aX_1 + u \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 \\ cX_2 + f_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Pour se ramener à un modèle satisfaisant les hypothèses (49), on pose alors :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_1(\partial_t) - a & 0 & 0 \\ -b_1 & H_2(\partial_t) - b_2 & 0 \\ 0 & -c & H_3(\partial_t) \end{bmatrix}$$

et on considère le modèle équivalent à (51) suivant :

$$\mathcal{H}X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix}.$$

dont le linéarisé à l'équilibre est, du fait des hypothèses sur  $f_3$  :

$$\begin{cases} \mathcal{H}X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = Bu \\ y = [0 \ 0 \ 1] X = CX. \end{cases}$$

En considérant une variable d'état  $\tilde{X} \in \mathbb{R}^2$ , et en posant :

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\tilde{X}) &: = \tilde{X}_2, \\ \tilde{f}(X, u) &: = \begin{bmatrix} u \\ f_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix}, \\ \text{et } \tilde{\mathcal{H}} &: = \begin{bmatrix} H_1(\partial_t) - a & 0 \\ -b_1 c (H_2(\partial_t) - b_2)^{-1} & H_3(\partial_t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

on a alors :

$$\tilde{C} \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \tilde{B} = C \mathcal{H}^{-1} B,$$

où

$$\tilde{C} := \partial_{\tilde{X}} \tilde{h}(0, 0) = [0 \ 1] \quad \text{et} \quad \tilde{B} := \partial_2 \tilde{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 4 Conclusion - Vers des problèmes de grande dimension

La représentation diffusive est une approche dédiée à l'analyse et à la synthèse d'opérateurs intégraux de type pseudo-différentiel fréquemment rencontrés dans de nombreux problèmes. De portée générale et dotée d'un cadre mathématique bien défini, cette méthodologie offre des perspectives d'application très intéressantes, notamment en identification, modélisation, estimation, contrôle. Les questions étudiées dans ce rapport en sont des exemples élémentaires et pourront, lors de travaux ultérieurs, faire l'objet de développements approfondis, en particulier du point de vue des approximations numériques en vue de la mise en œuvre sur des problèmes concrets.

Tout problème dont la solution se ramène à un opérateur étant susceptible de formulation diffusive, bien d'autres applications peuvent être envisagées. En particulier, les problèmes relatifs à des modèles de grande dimension sont naturellement adaptés au cadre diffusif. En effet, l'unification apportée par la représentation diffusive permet d'une part d'inclure dans un même cadre algébrique-topologique les opérateurs rationnels et une vaste classe d'opérateurs non rationnels (dont toute réalisation d'état est nécessairement de dimension infinie). Sous approximation, on dispose alors d'une algèbre d'opérateurs concrètement réalisables bien adaptée au cas non rationnel comme au cas rationnel. D'autre part, comme il a été montré au paragraphe 3.3, il est possible de réduire la dimension de l'espace d'état d'un modèle par identification (via le  $\gamma$ -symbole) d'un opérateur  $H(\partial t)$  synthétisant l'ensemble des composantes dynamiques linéaires d'un système dynamique (éventuellement différentiel) non linéaire, lesquelles peuvent être en nombre très important, notamment lorsque le système présente des comportements directement liés à des phénomènes répartis sous-jacents de nature dissipative.

Les perspectives d'application les plus intéressantes se trouvent donc tout naturellement dans les problèmes relatifs aux systèmes intrinsèquement non linéaires et de grande dimension présentant des propriétés de dissipation, en général thermique. On peut mentionner à titre d'exemples significatifs :

- Les phénomènes d'hystérésis et/ou de saturation avec mémoire évanescence dans les enroulements de machines électriques alimentés par découpage [2]. En effet, les discontinuités de la tension d'alimentation provoquent dans ce cas d'importants courants de Foucault (de nature répartie) à l'intérieur des carcasses métalliques, lesquels induisent dans le bobinage des phénomènes dynamiques complexes.

- Certains systèmes dynamiques de la biologie dont la modélisation nécessite la prise en compte d'un grand nombre d'équations de bilans biochimiques avec des paramètres la plupart du temps mal connus ou variables [3, 4, 11]. La possibilité, offerte par la formulation pseudo-différentielle, de séparer les parties linéaires dynamiques et non linéaires statiques, devrait alors conduire à une méthodologie praticable en vue de l'identification et du contrôle.

## Annexe A

### A Notions sur les Opérateurs

#### A.1 Sur les opérateurs linéaires intégraux

**Définition 51** *Un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante :*

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t, s)u(s)ds,$$

la fonction  $\mathbf{h}$  étant appelée noyau de l'opérateur  $\mathcal{H}$ .

La réponse impulsionnelle d'un tel opérateur est la fonction  $h$  définie par :

$$h(t, s) = \mathbf{h}(t, t - s)$$

On a donc la formulation équivalente suivante :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, t - s)u(s)ds = (h(t, \cdot) * u(\cdot))(t).$$

Par définition, la réponse impulsionnelle  $h$  d'un opérateur  $\mathcal{H}$  est la fonction obtenue par application de l'opérateur à une masse de Dirac :

$$h(t) = (\mathcal{H}\delta)(t).$$

L'appellation "réponse impulsionnelle" pour le fonction  $h(t, s) = \mathbf{h}(t, t - s)$  est donc abusive puisque l'on a :

$$(\mathcal{H}\delta)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, t - s)\delta(s)ds = h(t, t).$$

En fait, à  $t$  fixé, la fonction  $h(t, \cdot) : s \mapsto h(t, s)$  est la réponse impulsionnelle de l'opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}_t$  défini par :

$$(\mathcal{H}_t u)(s) = \int_{\mathbb{R}} h(t, s - \tau)u(\tau)d\tau = (h(t, \cdot) * u(\cdot))(s).$$

**Définition 52** *Un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  est dit convolutif si son noyau  $\mathbf{h}$  est de la forme :*

$$\mathbf{h}(t, s) = \mathbf{h}(t - s).$$

On a alors :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t - s)u(s)ds = (h * u)(t),$$

d'où le terme convolutif.

**Définition 53** *Le symbole (ou symbole Laplace)  $H$  d'un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  est la transformée de Laplace par rapport à la variable  $s$  de la réponse impulsionnelle  $h(t, s)$  :*

$$H(t, p) = (\mathcal{L}h(t, \cdot))(p)$$

Le symbole d'un opérateur est une notation fréquemment utilisée car très pratique. On a en effet :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t) &= (h(t, \cdot) * u(\cdot))(t) \\ &\quad \downarrow \mathcal{L} \\ (\mathcal{L}(\mathcal{H}u))(p) &= H(t, p) \mathcal{L}u(p) \end{aligned}$$

et l'on note ainsi fréquemment :

$$(\mathcal{H}u)(t) = H(t, \partial_t) u(t).$$

## A.2 Notions générales

### Opérateurs $t$ -locaux

**Définition 54** Un opérateur  $\mathcal{K}$  sur un espace  $\mathfrak{E}$  de fonctions continues définies sur une variété continue  $E$  est dit  $t$ -local (ou simplement local lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre) lorsque pour tout  $t \in E$  et toutes  $f, g \in \mathfrak{E}$ , si  $f$  coïncide avec  $g$  sur un voisinage de  $t$ , alors  $(\mathcal{K}(f))(t) = (\mathcal{K}(g))(t)$ .

- Les opérateurs locaux englobent les opérateurs différentiels.
- Un opérateur local  $\mathcal{K}$  qui vérifie en plus  $(\mathcal{K}(f))(t) = K(t, f(t)) \forall t \in E$ , est dit statique ou d'ordre 0 (par rapport à  $t$ ).

**Proposition 55** La composition de deux opérateurs locaux est un opérateur local.

### Opérateurs pseudo-linéaires

**Définition 56** Un opérateur  $\mathbf{K}$  de la forme  $\mathbf{K} = \mathcal{K} \circ H(t, \partial_t) \circ \mathcal{B}$  où  $\mathcal{K}, \mathcal{B}$  sont des opérateurs  $t$ -locaux (en général non linéaires) et où  $H(t, \partial_t)$  est un opérateur intégral (en général non local, matriciel) linéaire est appelé opérateur (intégral) ( $t$ -) pseudo-linéaire.

En particulier, les opérateurs locaux sont pseudo-linéaires.

### Opérateurs causaux et anticausaux

**Définition 57** Un opérateur  $\mathbf{K}$  agissant sur un espace vectoriel de fonctions (ou de distributions) de la variable réelle et à valeurs dans un espace vectoriel est dit causal (resp. anticausal) lorsque :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \text{dom}(\mathbf{K}), \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{supp}(u - v) \subset [t, +\infty[ \Rightarrow \text{supp}[\mathbf{K}(u) - \mathbf{K}(v)] \subset [t, +\infty[ \\ (\text{resp. } \text{supp}(u - v) \subset ] - \infty, t] \Rightarrow \text{supp}[\mathbf{K}(u) - \mathbf{K}(v)] \subset ] - \infty, t]), \end{aligned}$$

où  $\text{supp } f$  désigne le support de  $f$ , i.e le plus grand ouvert sur lequel la fonction (ou distribution)  $f$  est identiquement nulle.

- Les opérateurs  $t$ -locaux sont à la fois causaux et anticausaux.
- Un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{K}$  de réponse impulsionnelle  $k(t, s)$  est causal (resp. anticausal) si et seulement si

$$\text{supp } k \subset \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; s \geq 0\} \quad (\text{resp. } \text{supp } k \subset \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; s \leq 0\}).$$

On constate donc que les opérateurs linéaires intégraux peuvent être décomposés en la somme de deux opérateurs respectivement causal et anticausal de la manière suivante :

$$\mathbf{K}u = \int_{\mathbb{R}} k(t, t-s) u(s) ds = \int_{\mathbb{R}} k(t, t-s) 1_{\mathbb{R}_+}(t-s) u(s) ds + \int_{\mathbb{R}} k(t, t-s) 1_{\mathbb{R}_-}(t-s) u(s) ds.$$

- La causalité (resp. anticausalité) d'un opérateur  $\mathcal{K} : u \mapsto x = \mathcal{K}u$  défini par une équation différentielle explicite (supposée bien posée) de la forme :

$$\partial_t x = f(t, u, x), \tag{52}$$

est obtenue par la restriction de (52) à  $]t_0, +\infty[$  (resp.  $] - \infty, t_0[$ ) et la donnée d'une condition dite "initiale" (resp. "finale") :  $x(t_0) = x_0$ . On obtient alors un problème de Cauchy direct (resp. rétrograde).

## Annexe B

### B Expressions analytiques des coefficients intervenant dans la résolution du problème de l'inversion numérique

Dans le paragraphe (2.2) plusieurs méthodes de résolution du problème d'inversion numérique scalaire ont été présentées. Les résultats des calculs préliminaires qu'elles nécessitent sont donnés dans cette annexe. Dans la suite, la fonction notée  $k$  (resp.  $f$ ) sera celle définie par (20) (resp. par (21)).

#### B.1 Calculs des coefficients $K^{qkrl}$

Pour la 2<sup>ème</sup> méthode du paragraphe (2.2.1), seuls les termes

$$K^{qkrl} = \int \int k(\xi, \eta) \delta_{\xi_k}^q(\xi) \delta_{\xi_l}^r(\eta) d\xi d\eta,$$

pour  $(q, r, k, l) \in (\{1, 2\}^2 \times \{0..K\}^2) \cup (\{m\} \times \{1, 2\} \times \{n\} \times \{0..K\})$  ont besoin d'être explicités pour mettre la méthode en œuvre numériquement. On rappelle que l'indice  $n \in \llbracket 0, K \rrbracket$  est tel que  $\xi_n = 0$ .

Après calculs, on montre les résultats suivants :

- soit  $(k, l) \in \{0..K\}^2$  :
- si  $q = r = 1$  on a :

$$K^{qkrl} = k(\xi_k, \xi_l) = \begin{cases} \frac{-(f(\xi_k) + \bar{f}(\xi_l))}{\gamma(\xi_k) + \bar{\gamma}(\xi_l)} & \text{si } \gamma(\xi_k) \neq -\bar{\gamma}(\xi_l) \\ \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_k)} + \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_k)} & \text{si } \gamma(\xi_k) = -\bar{\gamma}(\xi_l) \end{cases},$$

- si  $q = r = 2$  on a :

$$K^{qkrl} = \frac{\partial_1 \partial_2 k(\xi_k, \xi_l)}{\gamma'(\xi_k) \bar{\gamma}'(\xi_l)},$$

d'où :

- si  $\gamma(\xi_k) \neq -\bar{\gamma}(\xi_l)$ ,

$$K^{qkrl} = s_1(f(\xi_k) + \bar{f}(\xi_l)) + s_2 \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_k)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_k)} + \frac{1}{\omega_2 - i\bar{\gamma}(\xi_l)} - \frac{1}{\omega_1 - i\bar{\gamma}(\xi_l)} \right)$$

où :

$$s_1 = \frac{-2}{(\bar{\gamma}(\xi_l) + \gamma(\xi_k))^3},$$

$$s_2 = \frac{1}{(\bar{\gamma}(\xi_l) + \gamma(\xi_k))^2},$$

- et si  $\gamma(\xi_k) = -\bar{\gamma}(\xi_l)$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(\omega_1 + i\gamma(\xi_k))^3} - \frac{1}{(\omega_2 + i\gamma(\xi_k))^3} \right),$$

- si  $q = 1$  et  $r = 2$  on a :

- si  $\gamma(\xi_k) \neq -\bar{\gamma}(\xi_l)$  :

$$K^{qkrl} = \frac{1}{(\bar{\gamma}(\xi_l) + \gamma(\xi_k))^2} (f(\xi_k) + \bar{f}(\xi_l)) - \frac{1}{\bar{\gamma}(\xi_l) + \gamma(\xi_k)} \left( \frac{1}{\omega_2 - i\bar{\gamma}(\xi_l)} - \frac{1}{\omega_1 - i\bar{\gamma}(\xi_l)} \right),$$

- et si  $\gamma(\xi_k) = -\bar{\gamma}(\xi_l)$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{(i\omega_2 - \gamma(\xi_k))^2} - \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(\xi_k))^2} \right),$$

• si  $q = 2$  et  $r = 1$  on a :

- si  $\gamma(\xi_k) \neq -\bar{\gamma}(\xi_l)$  :

$$K^{qkrl} = \frac{1}{(\bar{\gamma}(\xi_l) + \gamma(\xi_k))^2} (f(\xi_k) + \bar{f}(\xi_l)) - \frac{1}{\bar{\gamma}(\xi_l) + \gamma(\xi_k)} \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_k)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_k)} \right),$$

- et si  $\gamma(\xi_k) = -\bar{\gamma}(\xi_l)$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{i}{2} \left( \frac{-1}{(i\omega_2 - \gamma(\xi_k))^2} + \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(\xi_k))^2} \right),$$

► soit  $l \in \{0..K\}$ ,  $q = m$  et  $k = n$  :

• si  $r = 1$  on a :

- si  $\gamma(0) \neq -\bar{\gamma}(\xi_l)$  :

$$K^{qkrl} = u_{m-1} (f(0) + \bar{f}(\xi_l)) + \sum_{q=0}^{m-2} u_q \left( \frac{(i\omega_2 - \gamma(0))^{q-m+1} - (i\omega_1 - \gamma(0))^{q-m+1}}{i(q-m+1)} \right)$$

avec

$$u_q = \frac{(-1)^{1+q}}{(\gamma(0) + \bar{\gamma}(\xi_l))^{1+q}} \quad \forall q = 0..m-1,$$

- et si  $\gamma(0) = -\bar{\gamma}(\xi_l)$  :

$$K^{qkrl} = \frac{i}{m} \left( \frac{-1}{(i\omega_2 - \gamma(0))^m} + \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(0))^m} \right)$$

• si  $r = 2$ , on a :

- si  $\gamma(0) \neq -\bar{\gamma}(\xi_l)$  :

$$K^{qkrl} = v_{m-1} (f(0) + \bar{f}(\xi_l)) + \sum_{q=0}^{m-2} v_q \left( \frac{(i\omega_2 - \gamma(0))^{q-m+1} - (i\omega_1 - \gamma(0))^{q-m+1}}{i(q-m+1)} \right) + v_{-1} \left( \frac{1}{\omega_2 - i\bar{\gamma}(\xi_l)} - \frac{1}{\omega_1 - i\bar{\gamma}(\xi_l)} \right),$$

avec

$$v_{-1} = \frac{1}{(-\bar{\gamma}(\xi_l) - \gamma(0))^m},$$

$$\text{et } v_q = \frac{(q+1)(-1)^q}{(\gamma(0) + \bar{\gamma}(\xi_l))^{2+q}} \quad \forall q = 0..m-1,$$

- et si  $\gamma(0) = -\bar{\gamma}(\xi_l)$  :

$$K^{qkrl} = \frac{i}{m+1} \left( \frac{1}{(i\omega_2 - \gamma(0))^{m+1}} - \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(0))^{m+1}} \right).$$

## B.2 Calculs des coefficients $A^{jk}$ et $C^k$

Pour la méthode du paragraphe (2.2.2), seuls la matrice  $A$  et le vecteur  $C$  définis par :

$$\forall k, j = 0..J, \quad A^{jk} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (-1)^{k-m} (i\omega)^{j+k-2m} d\omega,$$

$$\forall k = 0..J, \quad C^k = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (-i\omega)^{k-m} \left\langle \sum_{l=0}^K \beta_l \delta_{\xi_l}(\cdot) \#_{\gamma} \sum_{i=0}^K \alpha_i \delta_{\xi_i}(\cdot), \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \right\rangle_{\xi} d\omega,$$

avec  $\sum_{l=0}^K \beta_l \delta_{\xi_l}$  approximation du  $\gamma$ -symbole numérique de  $\delta^m \#_{\gamma} \mu_1^{-1}$  et  $\sum_{i=0}^K \alpha_i \delta_{\xi_i}$   $\gamma$ -symbole numérique de l'opérateur  $\mathcal{H}$  considéré, ont besoin d'être explicités.

Après calculs on trouve :

►  $\forall j, k = 0..J,$

$$A^{jk} = \begin{cases} i(-1)^{k-m-1} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) & \text{si } k + j - 2m = -1 \\ \frac{i(-1)^{k-m-1}}{j + k - 2m + 1} \left( (i\omega_2)^{j+k-2m+1} - (i\omega_1)^{j+k-2m+1} \right) & \text{sinon} \end{cases},$$

► et  $\forall k = 0..J,$

$$C^k = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^J \frac{\beta_j \alpha_i}{\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_i)} (U^j - U^i) + \sum_{j=0}^J \beta_j \alpha_j V^j,$$

avec

$$U^j = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(-i\omega)^{k-m}}{i\omega - \gamma(\xi_j)} \omega \quad \text{et} \quad V^j = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(-i\omega)^{k-m}}{(i\omega - \gamma(\xi_j))^2} d\omega.$$

Les calculs de  $U^j$  et de  $V^j$  donnent alors les résultats suivants :

- Si  $\gamma(\xi_j) = 0$  on a :
- si  $k - m - 1 \neq -1,$

$$U^j = i (-1)^{k-m-1} \left( \frac{(i\omega_2)^{k-m} - (i\omega_1)^{k-m}}{k - m} \right),$$

- si  $k - m - 1 = -1,$

$$U^j = i (-1)^{k-m-1} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

- Si  $\gamma(\xi_j) \neq 0$  on a :
- si  $k - m < -1,$

$$U^j = \frac{f(\xi_j)}{(-\gamma(\xi_j))^{m-k}} + u_{m-k-1} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \sum_{r=0}^{m-k-2} u_r \frac{(\omega_2^{r+k-m+1} - \omega_1^{r+k-m+1})}{r + k - m + 1},$$

où

$$u_r = \frac{-i^{m-k+r}}{\gamma(\xi_j)^{r+1}},$$

et

$$V^j = \left( v_{m-k-1} \left( \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - i f(\xi_j) \right) + \frac{1}{(-\gamma(\xi_j))^{m-k}} \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_j)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_j)} \right) + \sum_{r=0}^{m-k-2} \frac{v_r}{r + k - m + 1} (\omega_2^{r+k-m+1} - \omega_1^{r+k-m+1}) \right),$$

où

$$v_0 = \frac{-i^{m-k}}{(\gamma(\xi_j))^2},$$

$$v_r = -i^{m-k+r} \frac{2r}{(\gamma(\xi_j))^{2+r}} \quad \forall r = 1..m-k-1,$$

– si  $k-m = -1$ ,

$$U^j = -\frac{1}{\gamma(\xi_j)} (f(\xi_j) + i \ln(\frac{\omega_2}{\omega_1})),$$

et

$$V^j = \frac{1}{(\gamma(\xi_j))^2} (f(\xi_j) + i \ln(\frac{\omega_2}{\omega_1})) - \frac{1}{\gamma(\xi_j)} \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_j)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_j)} \right),$$

– si  $k-m = 0$ ,

$$U^j = f(\xi_j),$$

et

$$V^j = \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_j)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_j)},$$

– si  $k-m = 1$ ,

$$U^j = \omega_1 - \omega_2 - \gamma(\xi_j) f(\xi_j),$$

et

$$V^j = -f(\xi_j) - \gamma(\xi_j) \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_j)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_j)} \right),$$

– si  $k-m > 1$ ,

$$U^j = (-1)^{k-m} \left[ \gamma(\xi_j)^{k-m} f(\xi_j) + (k-m)(\omega_2 - \omega_1) \gamma(\xi_j)^{k-m-1} + \sum_{r=2}^{k-m} \frac{(k-m)! \gamma(\xi_j)^{k-m-r}}{r!(k-m-r)! r i} ((i\omega_2 - \gamma(\xi_j))^r - (i\omega_1 - \gamma(\xi_j))^r) \right],$$

et

$$V^j = (-1)^{k-m} \left[ \gamma(\xi_j)^{k-m} \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_j)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_j)} \right) + (k-m) \gamma(\xi_j)^{k-m-1} f(\xi_j) + \gamma(\xi_j)^{k-m-2} \frac{(k-m)!}{2!(k-m-2)!} (\omega_2 - \omega_1) + \sum_{r=2}^{k-m} \frac{(k-m)! \gamma(\xi_j)^{k-m-r}}{r!(k-m-r)!(r-1)i} ((i\omega_2 - \gamma(\xi_j))^{r-1} - (i\omega_1 - \gamma(\xi_j))^{r-1}) \right].$$

## Références

- [1] J. AUDOUNET, V. GIOVANGIGLI, J.-M. ROQUEJOFFRE, *A threshold phenomenon in the propagation of a point source initiated flame*, Physica D, 1998.
- [2] P. BIDAN, T. LEBEY, G. MONTSÉNY, C. NEACSU, J. SAINT-MICHEL, *Transient voltage distribution in motor windings fed by inverter : experimental study and modeling*, IEEE Trans. on Power Electronics, Vol16, No 1, Janvier 2001.
- [3] K.C. CHEN, A. CSIKASZ-NAGY, B. GYORFFY, J. VAL, B. NOVAK, J. TYSON, *Kinetic analysis of a molecular model of the budding yeast cell cycle*, Molecular biology of the cell, Vol 11, p. 369-391, january 2000.
- [4] B. DUAN, Y.H. PAO, A. DONCESCU, C. CHASSAGNOLE, *Analysis and simulation of in vivo dynamics of glycolysis and pentose phosphate pathway in Escherichia coli*, Soumis à publication.
- [5] G. JOULIN, *Point-source initiation of lean spherical flames of light reactants : an asymptotic theory*, Comb. Sci. and Tech., pp. 99-113, 1985.
- [6] G. MONTSÉNY, *Représentation diffusive*, Hermès-science, 2005
- [7] G. MONTSÉNY, *Un principe de préconditionnement par "agrégation" pour la résolution de contrôles prédictifs non linéaires-Formulation générale, exemples, problèmes ouverts*, Rapport LAAS, 2005.
- [8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1957.
- [9] M. E. TAYLOR, *Pseudodifferential operators*, Princeton University Press, 1981.
- [10] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer, 1965.
- [11] W. WIECHTER, M. WURZEL, *Metabolic isotopomer labeling systems - Part I : global dynamic behavior*, Mathematical Biosciences, N. 169, pp 173-205, 2001.