



HAL
open science

A propos de "sur-rendement" dans le chémostat à l'aide de commande périodique

Alain Rapaport

► **To cite this version:**

Alain Rapaport. A propos de "sur-rendement" dans le chémostat à l'aide de commande périodique. Doctorat. Ecole de recherche CIMPA. Vert Numérique : biologie mathématique et écologie théorique, Hammamet, Tunisie. 2022. hal-03793923

HAL Id: hal-03793923

<https://hal.inrae.fr/hal-03793923>

Submitted on 2 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

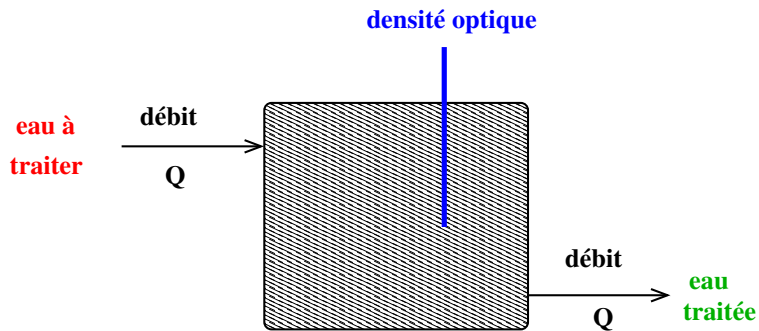
A propos de "sur-rendement" dans le chémostat à l'aide de commande périodique

ALAIN RAPAPORT
MISTEA, Montpellier

Ecole CIMPA, Hammamet

24 september - 3 octobre 2022

Motivations



bioréacteur à flux continu

Modèle du bioréacteur

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{\mu(s)x}{Y} + D(s_{in} - s) \\ \dot{x} = \mu(s)x - Dx \end{cases} \quad D \in [D_{min}, D_{max}]$$

(sans perte de généralité, on peut considérer $Y = 1$)

▶ $D = \bar{D}$ constant: équilibre t.q. $\mu(\bar{s}) = D$, $\bar{x} = s_{in} - \bar{s}$

▶ $D(\cdot)$ non constant t.q. $\int_0^{+\infty} D(t)dt = +\infty$:

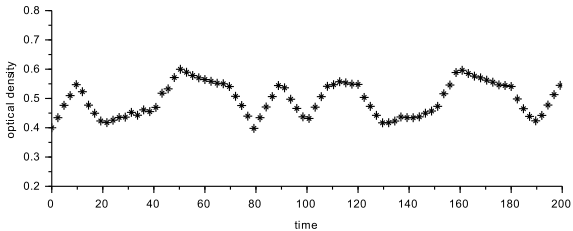
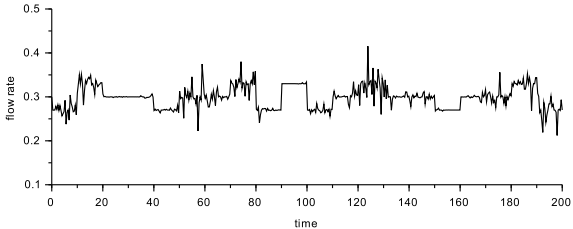
$$z = s + x \Rightarrow \dot{z} = D(t)(s_{in} - z) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = s_{in}$$

▶ $\dot{s} = (D(t) - \mu(s))(s_{in} - s)$

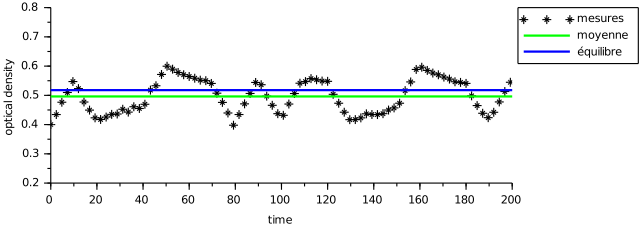
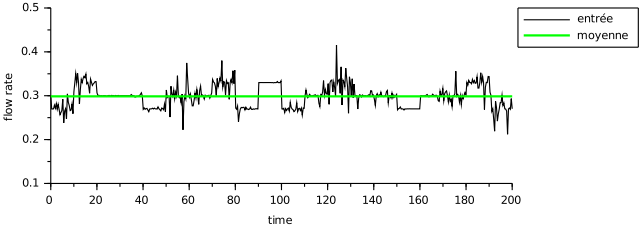
ou

▶ $\dot{x} = (\mu(s_{in} - x) - D(t))x$

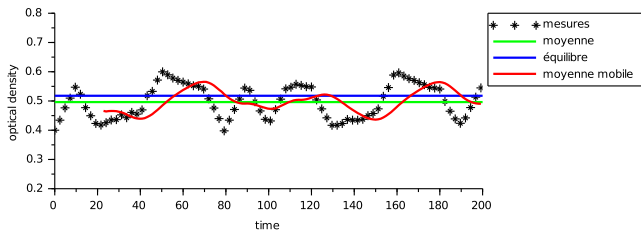
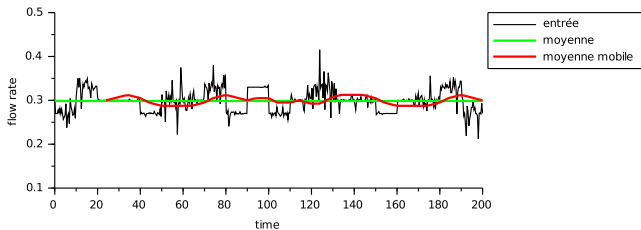
Simulations avec débit variable



Moyennes



Moyennes mobiles



(fenêtre= 24 heures)

A propos de "sur-rendement"

Critère: $J_T(D(\cdot)) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ (*qualité de l'eau*)

Problem: Est-ce qu'il existe une solution périodique avec $J_T(D(\cdot))$ **inférieur** à \bar{s} et

$$\frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt = \bar{D} \quad (\text{quantité d'eau fixée}) ?$$

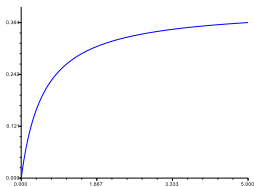
Un problème équivalent

Critère: $J_T(D(\cdot)) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ (*biomasse moyenne*)

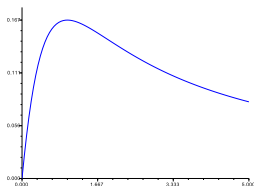
Question: Est-ce qu'il existe une solution périodique avec $J_T(D(\cdot))$ **supérieur** à \bar{x} et

$$\frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt = \bar{D} \quad (\text{quantité d'eau fixée}) ?$$

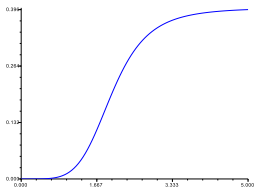
Prototypes de fonction de croissance



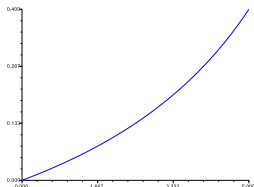
Monod:
$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s}{K + s}$$



Haldane:
$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s}{K + s + \frac{s^2}{K_i}}$$



Hill:
$$\mu(s) = \frac{\mu_{max} s^n}{K^n + s^n} \quad (n > 1)$$



Contois:
$$\mu(s, x) = \frac{\mu_{max} s}{K_x + s}$$

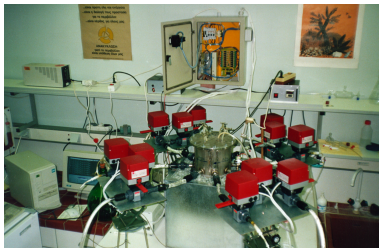
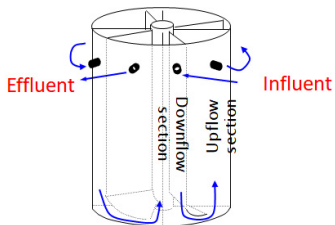
(avec $x = s_{in} - s$ and $K > 1$)

Littérature en bioprocédés

- ▶ J.W. Gilley and H.R. Bungay, *N Frequency Response Analysis of Dilution Rate Effects on Yeast Growth* Biotechnology and bioengineering, Vol. 10, pp. 99–103, 1968.
- ▶ E.M. Abulesz and G. Lyberatos, *Periodic Optimization of Microbial Growth Processes*, Biotechnology & Bioengineering, vol. 29, pp. 1059–1067, 1987.
- ▶ E.M. Abulesz and G. Lyberatos, *Periodic Operation of a Continuous Culture of Baker's Yeast*, Biotechnology & Bioengineering, vol. 34, pp. 741–749, 1989.
- ▶ V. Hatzimanikatis, G. Lyberatos, S. Pavlou and S.A. Svoronos, *A Method for Pulsed Periodic Optimization of Chemical Reaction Systems*, Chemical Engineering Science, vol. 48, n. 4, pp. 789–797, 1993.
- ▶ L. Ruan and D. Chen, *Comparison of Several Periodic Operations of a Continuous Fermentation Process* Biotechnol. Prog. Vol. 12, pp. 286–288, 1996.

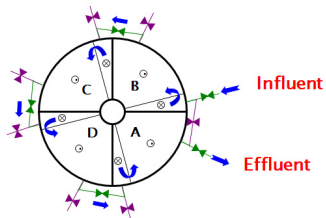
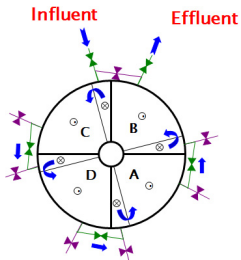
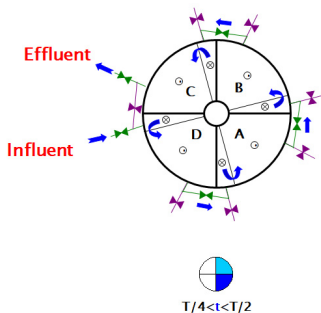
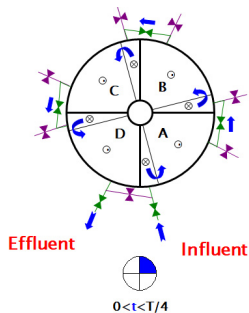
*Des améliorations des performances par rapport
à l'état d'équilibre sont observées*

Le quadri-réacteur tournant



Skiadas Lyberatos 1998

Le quadri-réacteur tournant



Littérature en commande optimale

▶ linear-quadratic approximation / frequency approach

S. Bittanti, G. Fronza and G. Guardabassi, *Periodic control: A frequency domain approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 18, pp. 33–38, 1973.

D.S. Bernstein and E.G. Gilbert, *Optimal periodic control: The π test revisited*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 25, pp. 673–684, 1980.

▶ local necessary conditions

S. Bittanti, A. Locatelli and S. Rinaldi, *Status of periodic optimization of dynamical systems*, J. Optimization Theory and Appl., vol. 14, pp. 1–20, 1974.

E.G. Gilbert, *Optimal periodic control: A general theory of necessary conditions*, SIAM J. Control Optim., vol. 15, pp. 717–746, 1987.

► second order conditions

S. Bittanti, A. Locatelli and C. Maffezzoni, *Second-variation methods in periodic optimization*, J. Optimization Theory and Appl., vol. 14, pp. 31–49, 1974.

J.L. Speyer and R.T. Evans, *A second variation theory for optimal periodic processes*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 29, pp. 138–148, 1984.

E.G. Gilbert, Q. Wang, Q. and J.L. Speyer, *Necessary and Sufficient Conditions for Local Optimality of a Periodic Process*, SIAM J. Control Optim., vol. 28, pp. 482–497, 1990.

Plan du cours

- ▶ Caractérisation des solutions périodiques
- ▶ Conditions pour l'existence d'un "sur-rendement"
- ▶ Etude des profils optimaux - cas convexe puis non convexe
 - ▶ conditions de corde/pente
 - ▶ technique de "swap"
- ▶ Etude des profils optimaux - cas non convexe
- ▶ Que sait-on si deux espèces sont en compétition?

Références

- ▶ T. BAYEN, A. RAPAPORT, F.-Z TANI, *Optimal periodic control for scalar dynamics under integral constraint on the input*, Mathematical Control and Related Fields, 2020.
- ▶ T. BAYEN, A. RAPAPORT, F.-Z. TANI, *Improvement of performances of the chemostat used for continuous biological water treatment with periodic controls*, Automatica, 2020.
- ▶ F.-Z. TANI, A. RAPAPORT, T. BAYEN, *Periodic controls for discriminating density dependent growth in the chemostat*, IEEE Conference on Decision and Control, Nice, 2019.
- ▶ T. GUILMEAU, A. RAPAPORT, *Singular arcs in optimal periodic control problems with scalar dynamics and integral input constraint*, Journal of Optimization, Theory and Applications, 2022.

Etude du modèle du chémostat à débit périodique

ALAIN RAPAPORT
MISTEA, Montpellier

Ecole CIMPA, Hammamet

24 september - 3 octobre 2022

Application de Poincaré

$$(\mathcal{S}) : f(t, x) := (\mu(s_{in} - x) - D(t))x, \quad x \in [0, s_{in}]$$

Hypothèse. μ est croissant avec $\mu(0) = 0$ et $\mu(s_{in}) > \langle D \rangle_T$

$$\begin{aligned} P : [0, s_{in}] &\mapsto [0, s_{in}] \\ x_0 &\rightarrow x(T, x_0) \end{aligned}$$

- ▶ $P(0) = 0$
- ▶ $P(s_{in}) < s_{in}$. Sinon $0 = \int_0^T \dot{x} dt = \int_0^T \mu(s_{in} - x) - D dt$.
 $x \equiv s_{in}$ n'est pas possible $\Rightarrow \exists \hat{t} \in (0, T)$ t.q. $x(\hat{t}) < s_{in}$.
Mais $f(t, x) \leq g(x) := \mu(s_{in} - x)x \Rightarrow x(T) \leq y(T)$ avec
 $\dot{y} = g(y)$, $y(\hat{t}) = x(\hat{t})$. Or $y(T) < s_{in}$. Contradiction.
- ▶ $P'(x_0) = v(T)$ avec $\dot{v} = \partial_x f(t, x) \cdot v$, $v(0) = 1$
 $\Rightarrow P'(x_0) = e^{\int_0^T \mu(s_{in} - x(t)) - D(t) - \mu'(s_{in} - x(t))x(t) dt} > 0$
 $\Rightarrow P'(0) = e^{\mu(s_{in}) - \langle D \rangle_T} > 1$

Application de Poincaré

$Q(x_0) = P(x_0) - x_0$ vérifie $Q(0) = 0$, $Q(s_{in}) < 0$ avec $Q'(0) > 0$
 $\Rightarrow \exists x^* \in (0, s_{in})$ t.q. $Q(x^*) = 0$ i.e. $P(x^*) = x$.

Or une solution périodique vérifie $\int_0^T \mu(s_{in} - x(t)) - D(t)dt = 0$
 $\Rightarrow Q'(x^*) < 0$: $x^* > 0$ est unique.

Soit $x_0 \notin \{0, x^*\}$.

- ▶ $P(x_0) < x_0$ alors $P^n(x_0) < \dots < P(x_0) \Rightarrow P_n(x_0) \rightarrow \underline{x} \geq 0$ et $Q(\underline{x}) = 0$. Mais $Q'(0) > 0 \Rightarrow Q(0) > 0$ près de 0: $\underline{x} = x^*$.
- ▶ $P(x_0) > x_0 \Rightarrow P_n(x_0) \rightarrow \bar{x} \leq s_{in}$. Mais $Q(s_{in}) < 0$: $\bar{x} = x^*$.

Conclusion: pour tout $x_0 > 0$, la solution de (\mathcal{S}) converge vers la solution périodique $x(\cdot, x^*)$.

Condition de sur-rendement

Soit une solution périodique non constante.

Elle vérifie nécessairement $\langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T = \bar{D} = \mu(s_{in} - \bar{x})$.

- ▶ Si μ est strictement convexe

$$\mu(s_{in} - \bar{x}) = \langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T > \mu(s_{in} - \langle x \rangle_T) \quad (\text{Jensen})$$

et μ croissante $\Rightarrow \bar{x} < \langle x \rangle_T$

- ▶ Si μ est concave, de façon analogue $\bar{x} \geq \langle x \rangle_T$

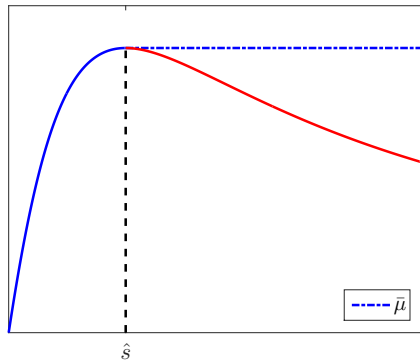
Condition de sur-rendement

- ▶ S'il existe $\bar{\mu}$ continue concave croissante sur $[0, s_{in}]$ t.q. $\bar{\mu} \geq \mu$ avec $\bar{\mu}(s_{in} - \bar{x}) = \mu(s_{in} - \bar{x})$, alors

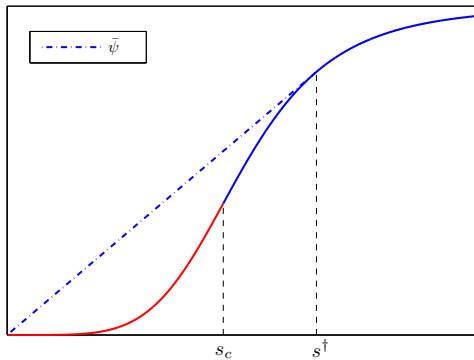
$$\bar{\mu}(s_{in} - \langle x \rangle_T) \geq \langle \bar{\mu}(s_{in} - x) \rangle_T \geq \langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T = \mu(s_{in} - \bar{x}) = \bar{\mu}(s_{in} - \bar{x})$$

$$\bar{\mu} \text{ croissante} \Rightarrow \bar{x} \geq \langle x \rangle_T$$

Cas Haldane



Cas Hill



Problème de commande optimale

Supposons μ strictement convexe sur $[0, s_{in}]$

Soit $\bar{D} > 0$ et $\bar{x} \in (0, s_{in})$ tel que $\mu(s_{in} - \bar{x}) = \bar{D}$.

Soit $0 \leq D_- < \bar{D} < D_+$

Problème. Pour quel $D(\cdot) \in [D_-, D_+]$ t.q. $\langle D \rangle_T = \bar{D}$ la solution périodique maximise $\langle x \rangle_T$?

Remarque. on peut exiger $x(0) = \bar{x}$ car

$$\langle \mu(s_{in} - x) \rangle_T = \mu(s_{in} - \bar{x}) \Rightarrow \int_0^T \mu(s_{in} - x(t)) - \mu(s_{in} - \bar{x}) dt = 0$$

$$\longrightarrow J_T := \inf_{u(\cdot)} \int_0^T -x(t) dt \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu(s_{in} - x) - u)x, & x(0) = \bar{x} \\ \dot{y} = u, & y(0) = 0 \end{cases} \quad u \in [D_-, D_+] \text{ et } \begin{cases} x(T) = \bar{x} \\ y(T) = T\bar{D} \end{cases}$$

Existence de solutions non constantes

Soit $v(\cdot)$ périodique de période T t.q. $\int_0^T v(t)dt = 0$ et

$u_\epsilon(t) = \bar{D} + \epsilon v(t)$ admissible pour $|\epsilon| > 0$ assez petit

$\Theta(x_0, \epsilon) := x(x_0, T, u_\epsilon) - x_0$ est continue

▶ si $x_0 > \bar{x}$, $x(x_0, \cdot, \bar{D})$ est décroissant $\Rightarrow \Theta(x_0, 0) < 0$

▶ si $x_0 < \bar{x}$, $x(x_0, \cdot, \bar{D})$ est croissant $\Rightarrow \Theta(x_0, 0) > 0$

Il existe $\epsilon \neq 0$, $x_0^- < \bar{x} < x_0^+$ t.q. $\Theta(x_0^+, \epsilon) < 0$ et $\Theta(x_0^-, \epsilon) > 0$.
D'où l'existence de \bar{x}_0 t.q. $\Theta(\bar{x}_0, \epsilon) = 0$ i.e. une solution $x(\cdot)$
périodique admissible non constante. Or il existe nécessairement
 $\hat{t} \in [0, T]$ t.q. $x(\hat{t}) = \bar{x}$.

La commande $u(t) = u_\epsilon(t - \hat{t})$ convient.

Application du Principe du Maximum

$$H = \lambda_x(\mu(s_{in}-x)-u)x + \lambda_y u - \lambda_0 x = \lambda_x \mu(s_{in}-x)x - \lambda_0 x + \underbrace{u(\lambda_y - \lambda_x)}_{\phi}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_x = -\partial_x H = (\mu'(s_{in}-x)x - \mu(s_{in}-x) - u)\lambda_x + \lambda_0 \\ \dot{\lambda}_y = -\partial_y H = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -(\mu'(s_{in}-x)x - \mu(s_{in}-x) + u)\lambda_x x - (\mu(s_{in}-x) - u)\lambda_x x - \lambda_0 x \\ &= -\mu'(s_{in}-x)\lambda_x x^2 - \lambda_0 x \end{aligned}$$

Si $\lambda_0 = 0$, λ_x est jamais nul. Sinon $\lambda_x \equiv 0$, $\lambda_y \neq 0$ et $u \equiv D_-$ ou $u \equiv D_+$: pas possible.

Donc ϕ est strictement monotone $\Rightarrow x$ reste au dessus ou en dessous de \bar{x} : pas possible.

Finalement, $\lambda_0 = -1$.

Ensemble atteignable

$$x(t) \in \mathcal{A}(t) = [x^-(t), x^+(t)] \text{ où } x^\pm(t) = x(\bar{x}, t, D_\mp), \quad t \in [0, T]$$

De plus, $f(x, D_-) > 0$, $f(x, D_+) < 0$, $\forall x \in \mathcal{A}(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

$$\text{Soit } x_m = \min_{t \in [0, T]} x(t) = x(t_m), \quad x_M = \max_{t \in [0, T]} x(t) = x(t_M).$$

On a $\phi(t_m) = \phi(t_M) = 0$, sinon $\dot{x}(t_m), \dot{x}(t_M) \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_x(t_m)x_m = \lambda_x(t_M)x_M = \lambda_y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \lambda_x(t_m)\mu(s_{in} - x_m)x_m + x_m = \lambda_y\mu(s_{in} - x_m) + x_m \\ &= \lambda_x(t_M)\mu(s_{in} - x_M)x_M + x_M = \lambda_y\mu(s_{in} - x_M) + x_M \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_y} = \frac{\mu(s_{in} - x_M) - \mu(s_{in} - x_m)}{x_M - x_m} := p(x_m, x_M)$$

Condition de corde/pente

- ▶ s'il existe t_s t.q. $\phi(t_s) = 0$ avec $x_m < x(t_s) < x_M$

$\Rightarrow p(x(t_s), x_m) = p(x(t_s), x_M)$: impossible pour μ strict. convexe

Donc les commutations ne peuvent se produire qu'en x_m ou x_M

- ▶ si $\phi = \lambda_y - \lambda_x x = 0$ sur $[t_1, t_2]$ alors

$$\dot{\phi} = -\mu'(s_{in} - x)\lambda_x x^2 + x = -x(\mu'(s_{in} - x)\lambda_x x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_y} = \mu'(s_{in} - x): x = x_s \text{ constant sur } [t_1, t_2], \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{\lambda_y} = \mu'(s_{in} - x_s) = p(x_m, x_M) \text{ avec } x_s \in \{x_m, x_M\}$$

impossible pour une fonction strictement convexe.

Donc il n'y a pas d'arc singulier

Commande bang-bang

$$u_T^{BB+}(t) = \begin{cases} D_-, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T) \\ D_+, & t \in [t_1, t_2) \end{cases}$$

$$u = D_- \Rightarrow \dot{x} > 0 : \quad t_1 = \int_{\bar{x}}^{x_M} \frac{dx}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)},$$

$$T - t_2 = \int_{x_m}^{\bar{x}} \frac{dx}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)}$$

$$u = D_+ \Rightarrow \dot{x} < 0 : \quad t_2 - t_1 = \int_{x_M}^{x_m} \frac{dx}{(\mu(s_{in} - x - D_+)x)}$$

$$\Rightarrow T = \int_{x_m}^{x_M} \underbrace{\left[\frac{1}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)} - \frac{1}{(\mu(s_{in} - x - D_+)x)} \right]}_{\eta(x) > 0 \text{ sur } \mathcal{A}(T)} dx \quad (\text{Eq.1})$$

De même

$$\bar{D}T = \int_{x_m}^{x_M} \underbrace{\left[\frac{D_-}{(\mu(s_{in} - x - D_-)x)} - \frac{D_+}{(\mu(s_{in} - x - D_+)x)} \right]}_{\eta(x)\mu(s_{in}-x)} dx \quad (\text{Eq.2})$$

Unicité de la commande bang-bang

► Soit $\alpha \in [x^-(T), \bar{x}]$ et $I_\alpha(\beta) = \int_\alpha^\beta \eta(x) dx$, $\beta \in [\alpha, x^+(T)]$

On a $I_\alpha(\alpha) = 0$, $I_\alpha(x^+(T)) > T$ et I_α croissante

$\Rightarrow \exists! \beta_T(\alpha) > \alpha$ t.q. $I_\alpha(\beta_T(\alpha)) = T$ (cf Eq. 1) et $\beta'_T > 0$, $\beta_T(\alpha) > \alpha$

► Soit $F(\alpha) = \int_\alpha^{\beta_T(\alpha)} \eta(x)(\mu(s_{in} - x) - \bar{D}) dx$, $\alpha \in (\beta_T^{-1}(\bar{x}), \bar{x})$

On a $F(\bar{x}) > 0$, $F(\beta_T^{-1}(\bar{x})) < 0$ et

$$F'(\alpha) = \underbrace{\eta(\beta_T(\alpha))(\mu(s_{in} - \beta_T(\alpha)) - \bar{D})}_{>0} \beta'_T(\alpha) - \eta(\alpha) \underbrace{(\mu(s_{in} - \alpha) - \bar{D})}_{<0} > 0$$

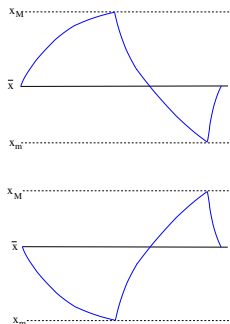
$\Rightarrow \exists! \alpha^* \in (\beta_T^{-1}(\bar{x}), \bar{x})$ t.q. $F(\alpha^*) = 0$ (cf Eq. 2)

Donc $x_m = \alpha^*$, $x_M = \beta_T(\alpha^*)$ t.q. $F(x_m) = 0$ sont uniques.

Optimalité des solutions bang-bang

$$u_T^{BB+}(t) = \begin{cases} D_-, & t \in [0, t_M) \cup [t_m, T) \\ D_+, & t \in [t_M, t_m) \end{cases}$$

$$u_T^{BB-}(t) = \begin{cases} D_+, & t \in [0, t_m) \cup [t_M, T) \\ D_-, & t \in [t_m, t_M) \end{cases}$$



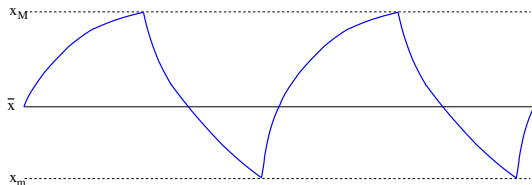
ont la même orbite périodique.

Commutations seulement aux points extrémaux

\Rightarrow une solution optimale est T/n périodique avec $u_{T/n}^{BB+}$ ou $u_{T/n}^{BB-}$
($n \geq 1$)

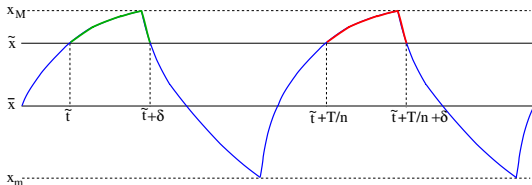
Technique de "swap"

Si $n > 2$



Soit $\bar{x} < \tilde{x} < x_M$ et

$$\{t \in (0, T), x(t) = \tilde{x}\} = \{\tilde{t}, \tilde{t} + \delta, \tilde{t} + T/N, \tilde{t} + T/N + \delta, \dots\}$$

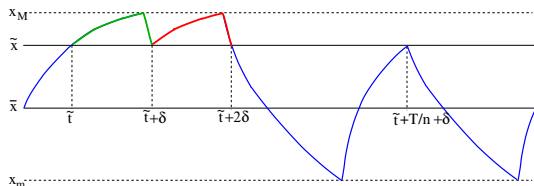


Technique de "swap"

La commande

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0, \tilde{t} + \delta) \\ u(t + T/N - \delta) & t \in [\tilde{t} + \delta, \tilde{t} + 2\delta) \\ u(t + \delta) & t \in [\tilde{t} + 2\delta, \tilde{t} + T/n + \delta) \\ u(t) & t \in [\tilde{t} + T/n + \delta, 2T/n) \end{cases}$$

est admissible et possède le même coût, donc doit être optimale



mais présente une commutation en dehors de x_m, x_M :
contradiction

Cas non convexe

Hypothèse. μ est croissant et il existe $s_c \in (0, s_{in})$ tel que

- μ est strictement convexe sur $(0, s_c)$,
- μ est strictement concave sur (s_c, s_{in})

(résultats analogues sur μ concave puis convexe)

On pose $x_c = s_{in} - s_c$.

Soit une solution optimale,

- si $x_M \leq x_c$, alors $u \equiv \bar{D}$ est nécessairement optimal,
- si $x_m \geq x_c$, alors $u_T^{BB\pm}$ est nécessairement optimal

→ on étudie le cas $x_m < x_c < x_M$,

Condition de corde/pente

- ▶ condition de corde: au plus un point de commutation autre que x_m, x_M (sinon 3 points de commutation dans la partie convexe ou concave...)
- ▶ condition de pente: arc singulier de la forme $x = x_s$ constant sur $[t_s, t_s + \tau]$
 - si $x_s > x_c$, alors une solution BB_τ^{pm} est localement meilleure
 - si $x_s > x_m$, on a

$$\mu'(s_{in} - x_s) = \frac{\mu(s_{in} - x_M) - \mu(s_{in} - x_s)}{x_M - x_c} :$$

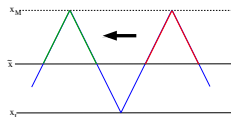
contradiction avec μ strictement concave sur (s_c, s_{in})

Donc, les seuls arcs singuliers possibles sont $x = x_m$

Technique de "swap"

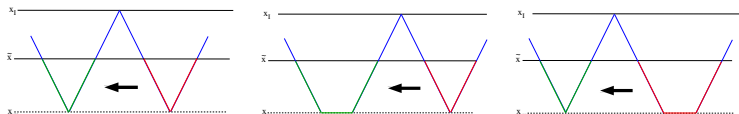
Supposons une commutation $x_I \notin \{x_m, x_M\}$

- ▶ si commutation $D_+ \rightarrow D_-$, soit $\tilde{x} \in (x_I, x_M)$



→ on crée une autre solution optimale avec une commutation en \tilde{x} ...

- ▶ si commutation $D_- \rightarrow D_+$, soit $\tilde{x} \in (x_m, x_I)$



→ on crée une autre solution optimale avec une commutation en \tilde{x} ...

Donc, les seules commutations sont en x_m et x_M

Commande bang-singulier-bang

$$u_T^{BSB^+}(t, \delta) = \begin{cases} D_-, & t \in [0, t_1) \cup [t_2 + \delta, T) \\ D_+, & t \in [t_1, t_2) \\ \mu(s_{in} - x(t_2)), & t \in [t_2, t_2 + \delta] \end{cases} \quad \delta \in [0, T]$$

$$u_T^{BSB^-}(t, \delta) = \begin{cases} D_+, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T) \\ D_-, & t \in [t_1 + \delta, t_2) \\ \mu(s_{in} - x(t_1)), & t \in [t_1, t_1 + \delta] \end{cases} \quad \delta \in [0, T]$$

Lemme. $\exists!(t_1, t_2)$ tel que $x(T) = \bar{x}$ et $\langle u \rangle_T = \bar{D}$, la paire (x_m, x_M) étant l'unique solution de

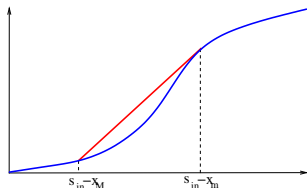
$$\int_{x_m}^{x_M} \eta(x) dx = T - \delta \quad \text{at} \quad \int_{x_m}^{x_M} \eta(x) \mu(s_{in} - x) dx = T \bar{D} - \delta \mu(s_{in} - x_m)$$

Commande optimale

Proposition.

- i. $\exists \delta^* \in [0, T]$ tel que $u_T^{BSB+}(\cdot, \delta^*)$ ou $u_T^{BSB-}(\cdot, \delta^*)$ est optimal.
- ii. si $\delta^* \in (0, T)$, la condition de pente est vérifiée

$$\mu'(s_{in} - x_m) = \frac{\mu(s_{in} - x_M) - \mu(s_{in} - x_S)}{x_M - x_m}$$



Remarque.

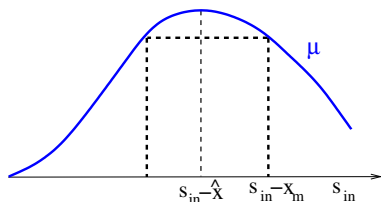
μ strictement convexe $\Rightarrow \delta^* = 0$ (solution BB)

μ concave $\Rightarrow \delta^* = T$ (solution constante)

► en pratique: $\max_{\delta} J_T(u_T^{BSB+}(\cdot, \delta))$

Le cas non monotone

$$x_m < \hat{x} < \bar{x} < x_M \text{ où } \hat{x} = \arg \max_{x \in (0, s_{in})} \mu(s_{in} - x)$$



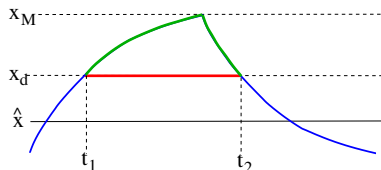
Soit $\tilde{x}_M = \min(x_M, \max\{x ; \mu(s_{in} - x) = \mu(s_{in} - x_m)\}) > \hat{x}$ et

$$g(\tilde{x}) := \mu(s_{in} - \tilde{x}) \int_{x_m}^{\tilde{x}} \eta(x) dx, \quad h(\tilde{x}) := \int_{x_m}^{\tilde{x}} \eta(x) \mu(s_{in} - x) dx$$

On a $h(\hat{x}) < g(\hat{x})$ et $h(\tilde{x}_M) > g(\tilde{x}_M) \Rightarrow \exists x_d \in (\hat{x}, \tilde{x}_M)$ t.q. $g(x_d) = h(x_d)$

Le cas non monotone

Soit $t_1 < t_2$ t.q. $x(t_1) = x(t_2) = x_d$, $x(t) > x_d$, $t \in [t_1, t_2]$



$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \mu(s_{in} - x_d), & t \in [t_1, t_2] \\ u(t), & t \in [0, T] \setminus [t_1, t_2] \end{cases} \quad \text{est admissible}$$

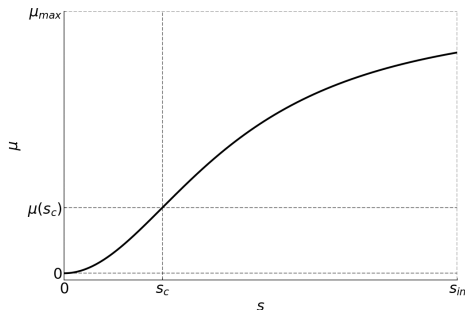
$$J_T(\tilde{u}) = \frac{1}{T} \int_{[0, T] \setminus [t_1, t_2]} x(t) dt + x_d(t_2 - t_1) < \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Une solution optimale reste dans le domaine où μ est croissant.

Illustration

$$\mu(s) = \frac{2s^2}{3 + s^2}, \quad s_{in} = 4, \quad D_- = 0, \quad D_+ = 2, \quad T = 24$$

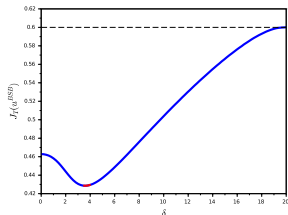
$$\rightarrow \inf_{u(\cdot)} \langle s \rangle_T = s_{in} - \langle x \rangle_T$$



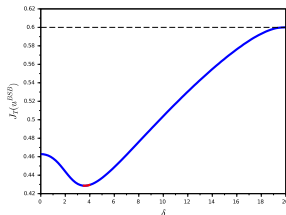
$$s_c = 1, \quad \mu(s_c) = 0.5$$

Détermination des meilleures BSB

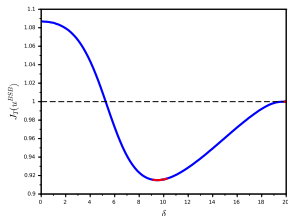
$$\bar{D} = 0.214$$



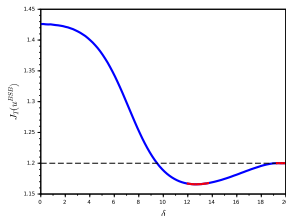
$$\bar{D} = 0.352$$



$$\bar{D} = 0.500$$

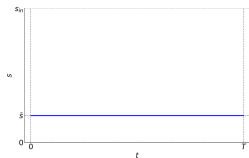


$$\bar{D} = 0.649$$

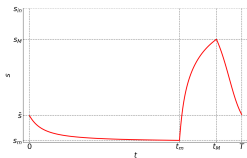


en pointillés: coût du contrôle constant
en rouge: condition de pente vérifiée

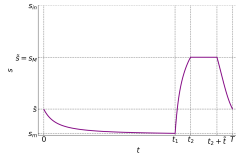
Comparaison des stratégies



constant



BB



BSB optimisé

\bar{D}	coût de $u = \bar{D}$	coût de BB	coût de BSB optimal
0.214	0.6	0.462	0.428
0.352	0.8	0.756	0.663
0.500	1.0	1.086	0.915
0.649	1.2	1.425	1.166

Complément

$$\begin{cases} \dot{z} = D(t)(s_{in} - z) \\ \dot{x} = (\mu(z - x) - D(t))x \end{cases} \text{ avec } D(\cdot) \text{ continu par morceaux}$$

Supposons $z(0) > s_{in}$. Soit

$$\begin{cases} \underline{x}(\cdot) \text{ la solution de } \dot{\underline{x}} = (\mu(s_{in} - \underline{x}) - D(t))\underline{x}, \underline{x}(0) = x(0) \\ x_n(\cdot) \text{ la solution de } \dot{x}_n = (\mu(s_{in} + 1/n - x) - D(t))x, x(0) = z(0) \end{cases}$$

- ▶ $\underline{x}(\cdot)$ converge vers une solution périodique $x^*(\cdot)$
- ▶ $\forall n, \underline{x}_n(\cdot)$ converge vers une solution périodique $x_n^*(\cdot)$
- ▶ $x_n^*(\cdot) \rightarrow x^*(\cdot)$ pour $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall n, \quad & \exists N_1, z(t) \leq s_{in} + 1/n, t \geq N_1 T \\ & \exists N_2, x_n(kT) \leq x_n^*(kT) + 1/n, k \geq N_2 \\ & \exists N_3, x^*(kT) - 1/n \leq \underline{x}(kT), k \geq N_3 \\ & \exists N_4, x_n^*(kT) \leq x^*(kT) + 1/n, k \geq N_4 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $N = \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$, on a

$$x^*(kT) - 1/n \leq \underline{x}(kT) \leq x(kT) \leq x_n(kT) \leq x_n^*(kT) + 2/n, k \geq N$$