# Analyse des Correspondances Multiples

Denis Laloë

# Analyse des Correspondances Multiples

## Février 2023

Denis Laloë
GABI - GiBBS

Février 2023

# Introduction

Individus décrits par plusieurs variables qualitatives (facteurs)

## Tableau

- Lignes : individus / observations.
- Colonnes : facteurs (sexe, CSP, pays,... )

## Objectif

- Objectif: trouver des scores qui maximisent l'"explication" de la variation des facteurs
  - $R^2$ d'un modèle score = facteur
  - $\eta^2$ : rapport de corrélation

## Extension de l'AFC à $>$ 2 facteurs

- $n$ individus
- $K$ facteurs
- $p = \sum_{k=1} Kp_k$

# Un exemple: les prix Nobel

Alhuzali T, Beh EJ, Stojanovski E (2022) Multiple correspondence analysis as a tool for examining Nobel Prize data from 1901 to 2018. PLoS ONE 17(4): e0265929.

## Prix Nobel décrits par quatre facteurs

- 785 individus $n = 785$
- 4 facteurs $K = 4$
  - Période : 1901-1940, 1941-1980, 1981-2018 : $p_1 = 3$
  - Genre : Masculin/Féminin $p_2 = 2$
  - Pays : BI, CA, DE, FR, IT, JP, RU, US : $p_3 = 8$
  - Discipline : Ch, Ec, Li, Me, Pc, Ph : $p_4 = 6$
  - $p = 19$

# Table de données

| Période | Genre | Pays | Discipline |
|---|---|---|---|
| 1901-1940 | M | CA | Me |
| 1901-1940 | M | CA | Me |
| 1901-1940 | M | FR | Ch |
| 1901-1940 | M | FR | Ch |
| 1901-1940 | M | FR | Ch |
| 1901-1940 | M | FR | Ch |

# Table des données : tableau disjonctif $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z_1}|\mathbf{Z_2}|...|\mathbf{Z_K}|]$$

| P1901- | P1941- | P1981- | F | M | BI | CA | DE | FR | IT | JP | RU | US | Ch | Ec | Li | Me |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Table des données : du tableau disjonctif au tableau de Burt

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}^{\mathsf{T}}\mathbf{Z}$$

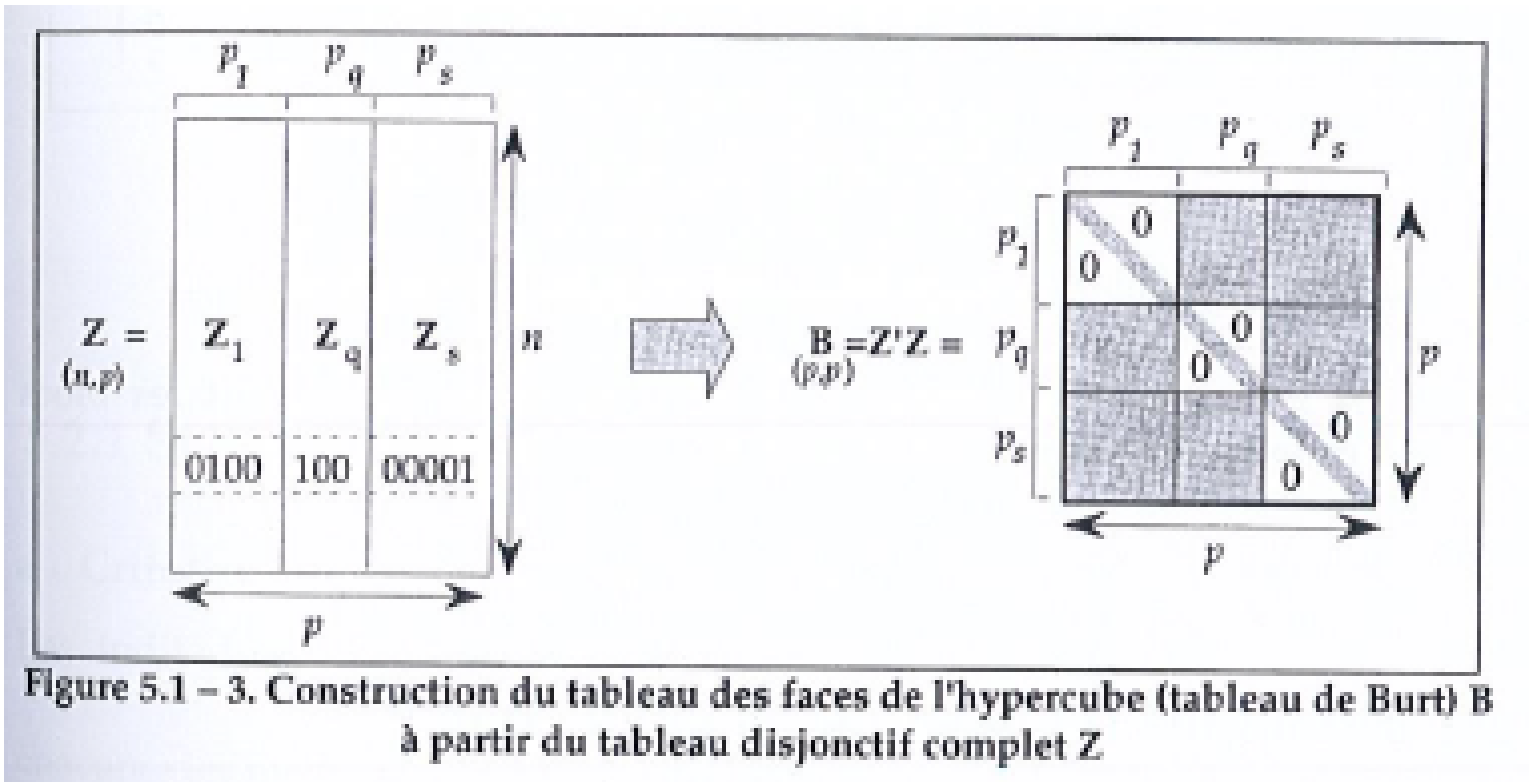



Figure 5.1 – 3. Construction du tableau des faces de l'hypercube (tableau de Burt) B à partir du tableau disjonctif complet Z

Lebart et al, Statistique Exploratoire Multidimensionnelle, Dunod

# Construction des tables avec R

## ade4

- acm.disjonctif
- acm.burt

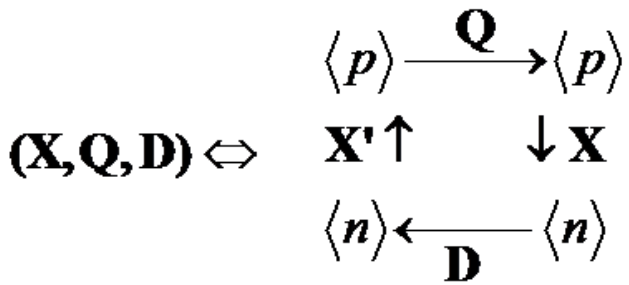
## FactoMineR

- tab.disjonctif

# Distances entre points

- entre deux individus : $d^2(i,i') = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{p}\frac{n}{z_{.j}}\left(z_{ij}-z_{i'j}\right)^2$
  - 2 individus avec mêmes modalités: d=0
  - Plus de poids pour les modalités rares ($z_{.j}$ petit)
- entre deux modalités : $d^2(j,j') = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z_{ij}}{z_{.j}}-\frac{z_{ij'}}{z_{.j'}}\right)^2$

# Schéma de dualité




- $\mathbf{X}_{(}\mathbf{n},\mathbf{p})$ : matrice de données (transformées)
- $\mathbf{Q}_{(}\mathbf{p},\mathbf{p})$: matrice d'un produit scalaire, carrée symétrique
- $\mathbf{D}_{(}\mathbf{n},\mathbf{n})$: matrice d'un produit scalaire, carrée symétrique

# Transformation du tableau disjonctif

## Notations

- Individu $i$, facteur $k$, modalité $j$ intra-facteur $k$
- $\delta_{ikj} = 1$ si l'individu $i$ a la modalité $j$ pour le facteur $k$, 0 sinon
- $n_{kj}$ : nombre d'individus à modalité $j$ pour le facteur $k$
- $f_{kj}$ : fréquence de la modalité $j$ pour le facteur $k$

## Structure du tableau

- Somme de la colonne $kj$, facteur $k$, modalité $j$ intra-facteur $k$: $n_{kj}$
- Somme des lignes intra-facteur : 1

# Transformation du tableau disjonctif. Schéma de dualité

## Triplet

- Table : $\frac{\delta_{ikj} - f_{kj}}{f_{kj}}$ ; Somme pondérée intra-bloc=0
  - : centrage : Somme pondérée intra-bloc=0
  - : centrage : Somme par colonne =0
  - : Réduction : Division par $f_{kj}$
- Poids des lignes : $\frac{1}{n}$ ; Total $= 1$
- Poids des colonnes : $\frac{n_{kj}}{Kn} = \frac{f_{kj}}{K}$ ; Total $= 1$

# Un exemple de table

## Table $\frac{\delta_{ikj} - f_{kj}}{f_{kj}}$

| | Période.1901.1940 | Période.1941.1980 | Période.1981.2018 | Genre.F | Genre.M |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.567376 | -1.000000 | -1.000000 | -1.00000 | 0.0579515 |
| 200 | -1.000000 | 1.875458 | -1.000000 | -1.00000 | 0.0579515 |
| 400 | -1.000000 | -1.000000 | 1.115903 | -1.00000 | 0.0579515 |
| 743 | 4.567376 | -1.000000 | -1.000000 | 17.25581 | -1.0000000 |

## Table des fréquences des genres

| Var1 | Freq |
|---|---|
| F | 0.0547771 |
| M | 0.9452229 |

On vérifie que la somme pondérée par les fréquences $= 0$ :
$(17.25581 * 0.0547771 - 0.9452229)$

# Quelques propriétés

## Relations barycentriques lignes/colonnes

- Positionnement des modalités au barycentre des individus correspondants (à un facteur près) :
  Coordonnée moyenne d'individus avec la modalité j du facteur k, sur l'axe $i$ : $\sqrt{\lambda_i} C_{kj}(i)$

## Rang et inerties

- Rang $\leq min(n-1, p-K)$
- Inertie d'une modalité : $I_j = \frac{1}{K}(1 - \frac{n_{.j}}{n})$ : les modalités rares contribuent plus à l'inertie
- Inertie d'un facteur : $I_k = \frac{1}{K}(p_q - 1)$ : les facteurs à grand nombre de modalités contribuent plus à l'inertie. Eviter les facteurs à trop grand nombre de modalités, et les modalités rares.
- Inertie totale : $I = \frac{p}{K} - 1$

# Lien entre ACM sur tableau disjonctif et AC sur tableau de Burt

| | ACM sur tableau disjonctif | AC sur tableau de Burt |
|---|---|---|
| Valeurs propres | $\lambda_i$ | $\mu i = \lambda_i^2$ |
| Coordonnées des modalités | $C(k, i)$ | $\sqrt{\lambda_i} C(k, i)$ |

# Lien entre facteurs et axes

## Rapport de corrélation $\eta^2$

- y : score quantitatif
- f : variable qualitative
- $\eta^2$ : $R^2$ du modèle linéaire y=f+e

## Lien entre score des lignes et modalités

- l'ACM maximise la moyenne des rapports de corrélation entre scores des axes et facteurs. L'inertie d'un axe est la moyenne de ces rapports de corrélation.
- $\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\eta^2(q^{(j)}, y)$

## Aide à l'interprétation

L'étude des rapports de corrélation ("graphe des représentations" dans FactoMineR) est une aide à l'interprétation, surtout quand le nombre de modalités est grand et rend l'interprétation difficile.

# Variables supplémentaires

- N'interviennent pas dans le calcul
- Enrichissement de l'interprétation
- Possibilité de tests
- Variable quantitative $\Rightarrow$ Corrélation avec les axes,
- Variable qualitative $\Rightarrow$ utilisation des relations barycentriques.