



HAL
open science

Modélisation du fonctionnement d'un réseau. Analyse hydraulique et choix des mesures pour l'estimation de paramètres

Olivier Piller

► **To cite this version:**

Olivier Piller. Modélisation du fonctionnement d'un réseau. Analyse hydraulique et choix des mesures pour l'estimation de paramètres. Mathématiques [math]. Doctorat Mathématiques appliquées, Université de Bordeaux I, 1995. Français. NNT: . tel-02574667

HAL Id: tel-02574667

<https://hal.inrae.fr/tel-02574667>

Submitted on 14 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

95/0017

N° d'ordre : 1109

THESE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES

Par Monsieur Olivier PILLER

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Titre : **MODELISATION DU FONCTIONNEMENT D'UN RESEAU**

Analyse hydraulique et choix des mesures

pour l'estimation de paramètres

Soutenue le 03 Février 1995

Après avis de MM. R. ABABOU Rapporteurs
F. X. LE DIMET

Devant la Commission d'examen formée de :

MM.	F. X. LE DIMET	Président
	P. FABRIE	Rapporteur
	R. ABABOU	Examineur
	B. BREMOND	Examineur
	A. HAUGUEL	Examineur
	P. MOREL	Examineur

"La vie est l'art de tirer des conclusions suffisantes à partir de prémisses insuffisantes " Samuel Butler.

Cette étude a été réalisée au sein de la division Ouvrages et Réseaux Hydrauliques du Centre national du Machinisme Agricole du Génie Rural des Eaux et des Forêts (CEMAGREF), groupement de Bordeaux, en collaboration avec l'Université de Bordeaux I. La thèse cofinancée par Anjou Recherche (groupe Compagnie Générale des Eaux) et le CEMAGREF, s'inscrit dans le cadre de la convention signée le 2 octobre 1990 entre les deux organismes.

Je tiens à exprimer ici ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé, conseillé et soutenu tout au long de ce travail et tout particulièrement à :

Monsieur le professeur Paul MOREL qui a été le directeur de thèse idéal, tant sur le plan scientifique qu'humain.

Monsieur B. BREMOND, qui est à l'origine de cette étude, qui m'a encadré, et dont les précieux conseils ont été essentiels pour chacune des étapes de ce travail.

M. A. HAUGUEL, Directeur scientifique de l'entreprise SADE, m'a apporté sa connaissance du monde industriel, des difficultés opérationnelles du problème à résoudre.

Monsieur G. BONNET, qui m'a apporté un concours efficace sur le plan hydraulique et dans l'élaboration d'une campagne de mesure.

Messieurs F. NADAL et F. GUILLON pour les réalisations des campagnes de mesures.

Monsieur M. CAUPENNE qui a toujours été disponible pour son aide informatique.

Je ne voudrais pas oublier mes collègues et amis de la division Ouvrages et Réseaux Hydrauliques, dirigée par B. BREMOND, qui d'une façon ou d'une autre, m'ont apporté leur soutien tout au long de cette étude. Je pense en particulier à E. ALONSO, J. BONNET, J. M. CARDONA, S. FERRY, H. GIRARD, O. HARROUZ, D. LAUTRIN, J. LE RU, D. POULAIN et O. De GALBERT, prédécesseur de B. BREMOND.

Mes remerciements vont également aux deux rapporteurs qui ont accepté de mener à bien la lecture du mémoire dans des délais très courts : M. F.X. LE DIMET, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse et M. R. ABABOU, Professeur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, a bien voulu accepter de participer au jury.

M. P. FABRIE, Professeur à l'Université de BORDEAUX I, a bien voulu participer au jury, ce dont je le remercie.

MODELISATION DU FONCTIONNEMENT D'UN RESEAU ANALYSE HYDRAULIQUE ET CHOIX DES MESURES POUR L'ESTIMATION DE PARAMETRES

Résumé

Le but de cette thèse est de réaliser la modélisation du fonctionnement d'un réseau d'Alimentation en Eau Potable, en régime permanent, en adoptant une bonne stratégie de mesure. Elle comprend trois parties : la résolution des équations d'équilibrage hydraulique, celle du problème de l'Identification du réseau et celle du Choix des mesures.

Les lois reliant les débits et les charges étant connues, les consommations des usagers et les charges aux noeuds réservoir étant fixées, on calcule les débits dans les arcs et les charges aux noeuds où elles sont inconnues, en résolvant un problème d'optimisation convexe sous des contraintes convexes, appelé problème de l'Analyse. Une modification des équations constitutives ou lois de perte de charge, permet de définir une famille de problèmes approchés dont la solution tend vers celle du problème de l'Analyse et pour lesquels la fonction à minimiser est fortement convexe deux fois continûment différentiable.

Après réduction du nombre des inconnues, le problème de l'Identification du réseau consiste à chercher les meilleures estimations de classes de rugosités et de classes de demandes. On cherche à résoudre un problème des moindres carrés, non linéaire, sous contraintes.

Les mesures sont choisies en nature, en place et en nombre pour minimiser l'influence d'erreurs de mesure sur l'estimation du vecteur d'état. On résout ce problème par un algorithme glouton, pour lequel à chaque étape on détermine la meilleure mesure.

Mots clés

Réseau de distribution d'eau - Modélisation - Optimisation - Choix des mesures - Identification - Inférence - Moindres carrés - Flots et tensions.

MODELLING THE BEHAVIOUR OF A NETWORK HYDRAULIC ANALYSIS AND A SAMPLING PROCEDURE FOR ESTIMATING THE PARAMETERS

Summary

The aim of this thesis has been to realize a method for modelling the behaviour of a drinking-water supply network that is operating in a steady state. The method adopted pays particular attention to the location of sampling points for taking the parameter measurements. The thesis has been arranged in three parts : the solution of the equilibrium equations, the network identification for roughness and demand and lastly the selection of the sampling or measuring points.

One can arrive at an estimate of the flows in each arc and the head of pressure at each node in the network because (i) the laws governing flow and head of pressure are known, (ii) the consumer demand and the the head of presure at each reservoir are fixed. The method adopted relies on resolving a convex optimization problem under convex constraints and is hereafter referred to as the Analysis Problem (AP). A modification of its component equations, or the laws governing loss of hydraulic head, help define a family of approximated problems where the solution tends toward that of the AP and where the function to be minimised is strongly convex with a continuous double derivative.

After certain assumptions are made to reduce the number of theoretical unknowns the problem of identifying the network characteristics can be simplified to one of selecting a method for assigning a best estimate of the roughness factor to each arc and demand to each node. The problem to be solved is a non linear least squares under constraints.

The measuring, or sampling points, are selected according to the measurement to be undertaken, their location and the number required. A pattern has to be selected which will minimize the significance of any measurement errors on the calculation of the system vectors. A solution is found through the use of a 'greedy' algorithm that progressively develops the network of measurement points by ensuring, at each iteration, the maximum of information with the minimum number of measurement points.

key words : Drinking water supply network - Modelling - Optimization - Measurement points - Identification - Statistical inference - Least squares - Flow and tension.

II-3 Formulations sous forme d'un problème d'optimisation	60
II-3.1 Intérêts	60
II-3.2 Travaux antérieurs	60
a) Le Content Model	61
b) Le modèle sans contraintes de positivité sur tous les débits	62
II-3.3 Formulation primale	63
a) Formulation matricielle	63
b) Interprétation physique de la formulation	64
c) Propriétés de la fonction primale f	66
d) Conditions nécessaires d'extremum relatif lié	67
II-3.4 Formulation primale réduite	67
a) Interprétation physique de la formulation	69
b) Propriétés de la fonction économique J	70
c) Caractérisation d'un optimum	71
II-3.5 Formulation lagrangienne	71
II-3.6 Formulation duale	72
a) Construction de la fonction duale G	73
b) Propriétés de la fonction G	73
c) Le cas des pertes de charge linéaires	74
d) Equation d'Euler-Lagrange associée	75
II-3.7 Equivalence de toutes les formulations	75
II-4 Existence et unicité	76
II-5 Analyse des principaux algorithmes existants	77
II-5.1 Les méthodes primales	77
a) Relaxation sur le problème réduit (Path method)	78
b) Newton sur le problème réduit (Simultaneous Path ou S-Path)	79
c) La méthode Hybride	82
d) Newton sur le lagrangien	84
e) La méthode linéaire	85
f) Conclusions sur les méthodes primales	86
II-5.2 Les méthodes duales	86
a) Relaxation sur le problème dual (ou Node method)	86
b) Newton sur le problème dual (Simultaneous Node)	87
II-6 Méthode de résolution proposée	88
II-6.1 Le problème approché	88
a) Modification des fonctions perte de charge	88
b) Problèmes d'optimisations associés	91
c) Propriétés des fonctions objectives associées	92

d) Convergence de la solution du problème approché vers celle de (Pr)	95
e) Estimations des erreurs a priori	102
II-6.2 Choix de trois algorithmes de type Newton	106
a) Correction du pas dans la direction de descente	106
b) Newton sur le problème dual	107
c) Newton sur le problème réduit	108
d) Newton sur le lagrangien	109
e) Convergence globale des trois algorithmes	113
II-6.3 Propriétés de la matrice d'itération	115
a) La hessienne du problème dual	116
b) La hessienne du problème réduit	117
II-6.4 La méthode des moindres degrés	118
II-7 Validations numériques	120
II-7.1 Efficacité de la méthode des moindres degrés	120
a) Le réseau de Meru	121
b) Le graphe 480T	125
II-7.2 Comparaison pour l'inversion des matrices d'itération	130
II-7.3 Performances et mérites des implémentations	133

III Le problème de l'Identification du réseau

III-1 Position du problème et informations disponibles	143
III-1.1 Le Modèle de l'Analyse	143
III-1.2 Le problème Inverse	143
III-1.3 Prédiction des mesures	145
III-1.4 Synthèse bibliographique	146
a) Observabilité algébrique	146
b) Les différents estimateurs	147
c) Estimations par intervalle et niveau de confiance	149
d) Adéquation du modèle	149
e) Remarques	150
III-1.5 Echange des r_i par les Chw_i	151
III-1.6 Mesures et matrices de sélection associées	151
III-1.7 Classes de rugosité	152
III-1.8 Classes de demande	154
III-1.9 Exemple	155
III-2 Relations entre les variables	156
III-2.1 Présentation unifiée	157

III-2.2 Cas d'un seul régime de consommation	158
III-2.3 Cas de plusieurs régimes de consommations	158
III-3 Méthode de résolution	159
III-3.1 Résolution d'un problème d'optimisation	159
III-3.2 Différentiabilité de y	160
a) Les dépendances de q et h en fonction de Chw et d	160
b) Jacobienne de y pour un seul régime de consommation	164
c) Jacobienne de y pour plusieurs régimes de consommation	165
III-3.3 Propriétés du problème CLS	166
III-4 Choix de l'Algorithme	170
III-4.1 L'algorithme de Gauss-Newton	170
III-4.2 L'algorithme de Levenberg-Marquardt	171
III-4.3 Implémentation de l'algorithme MCO et prise en compte de la contrainte	173
III-5 Prise en compte d'erreurs de mesures	175
III-5.1 Implémentation de l'algorithme des moindres carrés avec poids MCP	176
III-5.2 Algorithme des moindres carrés avec calcul automatique des poids MCPA	177
III-5.3 Encadrement des estimations par approximation linéaire des équations	179
III-6 Essais numériques	183
III-6.1 Fabrication de schémas et simulations	183
a) Estimations sans erreurs de mesure	186
b) Introduction de bruits blancs	193
c) Introduction d'erreurs grossières	200
III-6.2 Calage du réseau de Marennes	206
a) Organisation de la campagne de mesure	207
b) Evolution des estimations au cours des itérations	207
c) Estimations par intervalle des inconnues	208
d) Etude des résidus	209
e) Résultats de simulations par la méthode de Monte-Carlo	212

IV Choix des mesures

IV-1 Généralités sur les mesures	217
IV-1.1 Mesures de demandes aux noeuds simples	218
IV-1.2 Mesures de demandes aux noeuds réservoirs	218
IV-1.3 Réalisation des mesures de débit et de charges	218
IV-2 Les équations associées aux mesures	218
IV-2.1 Reconstitution des débits et des charges pour τ régimes	219

IV-2.2	Prise en compte de m mesures et restriction du modèle	220
IV-2.3	Linéarisation des équations	221
IV-3	Obtention du nombre nécessaire de mesures	222
IV-4	Homogénéisation des données de mesure et des paramètres inconnus	222
IV-4.1	Equilibrage de la jacobienne	222
a)	Equilibrage de la jacobienne en fonction de la précision des mesures	223
b)	Equilibrage de la jacobienne à partir d'une estimation des paramètres	223
c)	Exemple	224
d)	Transformation du modèle linéaire	226
IV-4.2	Interprétation des coefficients de T	227
IV-4.3	Interprétation des coefficients de T+	228
IV-5	Le critère de sélection des mesures	230
IV.6	Algorithme de calcul du critère de sélection	233
IV-6.1	Choix de l'Algorithme	233
a)	Complexité de l'exploration exhaustive	233
b)	Choix d'un algorithme glouton	233
IV-6.2	Calcul récursif d'une pseudo-inverse	236
IV-7	Validations numériques	238
IV-7.1	Choix des mesures pour un petit réseau	238
a)	Résolution du critère de choix de mesure par une technique exhaustive	239
b)	Résolution par un algorithme glouton	241
c)	Conclusions	241
IV-7.2	Choix des mesures et calage du réseau de Muret	242
a)	Présentation du réseau de Muret	242
b)	caractéristiques de la pompe et lois de la demande	243
c)	Choix des mesures	245
d)	Mesures comme résultats de simulations numériques	253
e)	Identification des paramètres à partir de mesures réelles	262

Conclusion générale

Références bibliographiques et Bibliographie

Annexes

LISTE DES FIGURES

	page
figure 1 : exemple de graphe orienté	25
figure 2 : autre graphe possible	27
figure 3 : perte de charge linéaire	28
figure 4 : dérivée de la fonction perte linéaire, en fonction du débit	29
figure 5 : perte de charge singulière	29
figure 6 : dérivée de la fonction perte singulière, en fonction du débit	30
figure 7 : perte de charge liée à une pompe et son prolongement	31
figure 8 : dérivée de la fonction perte d'une pompe	31
figure 9 : perte de charge d'un limiteur de débit	32
figure 10 : perte de charge d'un limiteur de débit au voisinage du débit limité	32
figure 11 : numérotation initiale des éléments du graphe de l'exemple II-1	44
figure 12 : tableau des caractéristiques des arcs de G	45
figure 13 : initialisation de l'algorithme II-1.1	45
figure 14 : étape courante k=1	45
figure 15 : étape courante k=2	46
figure 16 : étape courante k=3	46
figure 17 : étape courante k=4	46
figure 18 : étape courante k=5	47
figure 19 : étape courante k=6	47
figure 20 : étape courante k=7 et fin de l'algorithme II-1.1	47
figure 21 : graphe de G'	48
figure 22 : numérotation et sens des arcs de G'	48
figure 23 : nouvelle numérotation des noeuds	48
figure 24 : obtention du graphe de G''	49
figure 25 : graphe de G''	49
figure 26 : numérotation et sens des arcs de G	50
figure 27 : graphe de G'''=(X,C)	50
figure 28 : nouvelle numérotation des éléments du graphe de l'exemple II-1	51
figure 29 : interprétation de deux lignes de la matrice M_0	53
figure 30 : perte de charge linéaire modifiée au voisinage de zéro	89
figure 31 : dérivée de la fonction perte de charge linéaire modifiée	89
figure 32 : graphe du réseau de Meru	121
figure 33 : quatre factorisations logique de $A \cdot A$ pour le réseau de Meru	122
figure 34 : quatre factorisations logique de $M_0 \cdot M_0$ pour le réseau de Meru	124
figure 35 : le graphe 480T	125
figure 36 : quatre factorisations logique de $A \cdot A$ pour le graphe 480T	127
figure 37 : quatre factorisations logique de $M_0 \cdot M_0$ pour le graphe 480T	128
figure 38 : factorisation logique de $A \cdot A$ en fonction de l'importance du maillage	130
figure 39 : factorisation logique de $M_0 \cdot M_0$ en fonction de l'importance du maillage	131

	page
figure 40 : comparaison pour l'inversion des matrices d'itération sans moindre degré	131
figure 41 : comparaison pour l'inversion des matrices d'itération avec moindre degré	132
figure 42 : tableau des initialisations et des tests d'arrêts	133
figure 43 : recherche du point-selle du lagrangien pour le réseau 480T	134
figure 44 : évolution du test d'arrêt de Newton dual	135
figure 45 : évolution du test d'arrêt de Newton sur le lagrangien	135
figure 46 : temps CPU global en fonction de l'importance du maillage	136
figure 47 : durée moyenne d'une itération en fonction de l'importance du maillage	136
figure 48 : durée du prétraitement en fonction de l'importance du maillage	136
figure 49 : détermination de la résistance	144
figure 50 : détermination de la demande	145
figure 51 : exemple de classes de rugosité	155
figure 52 : exemple de classes de demande	156
figure 53 : allures de g en fonction d'un coefficient d'Hazen-Williams	168
figure 54 : allure de g en fonction d'une demande variable	169
figure 55 : graphe de caltest	184
figure 56 : tableau des données statiques et des variables sur les arcs de caltest	185
figure 57 : tableau des variables sur les noeuds de caltest	185
figure 58 : emplacement et nature des mesures pour le réseau caltest	186
figure 59 : tableau des résultats avec des mesures non bruitées pour le réseau caltest	188
figure 60 : résidus avec des mesures non bruitées pour le réseau caltest	189
figure 61 : identification des rugosités en fonction des itérations pour le réseau caltest	189
figure 62 : identification des demandes en fonction des itérations pour le réseau caltest	190
figure 63 : graphe de g avec une seule demande inconnue pour le réseau caltest	190
figure 64 : graphe de g avec une seule rugosité inconnue pour le réseau caltest	191
figure 65 : cheminement sur le graphe de g pour l'estimation d'une demande	191
figure 66 : cheminement sur le graphe de g après une grande initialisation d'une rugosité	192
figure 67 : cheminement sur le graphe de g après une petite initialisation d'une rugosité	192
figure 68 : distribution d'échantillonnage d'une valeur mesurée	194
figure 69 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une rugosité avec MCO	195
figure 70 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une rugosité avec MCP	196
figure 71 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une demande avec MCP	196
figure 72 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une demande avec MCP	196
figure 73 : tableau des statistiques sur l'échantillon avec des bruits blancs	197

	page
figure 74 :	tableau des statistiques sur l'échantillon avec des disparités dans les aléas 198
figure 75 :	distribution de l'erreur sur C_3 avec MCO et des disparités dans les aléas 199
figure 76 :	distribution de l'erreur sur C_3 avec MCP et des disparités dans les aléas 199
figure 77 :	distribution de l'erreur sur D_2 avec MCO et des disparités dans les aléas 199
figure 78 :	distribution de l'erreur sur D_2 avec MCP et des disparités dans les aléas 200
figure 79 :	graphe de g avec une seule rugosité inconnue pour différentes valeurs en h_{11} 201
figure 80 :	résultats avec MCO pour différentes valeur en h_{11} 202
figure 81 :	effet d'une mesure aberrante en h_{11} 202
figure 82 :	moindre influence d'une donnée aberrante en h_{11} par MCPA 203
figure 83 :	comparaison des statistiques sur l'échantillon 204
figure 84 :	distribution de l'erreur sur C_3 avec MCPA et des bruits blancs 205
figure 85 :	distribution de l'erreur sur D_2 avec MCPA et des bruits blancs 205
figure 86 :	campagne de mesure pour la ville de Marennes le 26 mars 1993 206
figure 87 :	évolution de l'estimation des rugosités pour le réseau de la ville de Marennes 208
figure 88 :	évolution de l'estimation des demandes pour le réseau de la ville de Marennes 208
figure 89 :	estimation des rugosités pour le réseau de la ville de Marennes 209
figure 90 :	estimation de D_1 aux heures des ouvertures de poteaux d'incendie 209
figure 91 :	résidus obtenus avec MCO 210
figure 92 :	tableau des résidus obtenus avec MCO 210
figure 93 :	résidus après corrections des poids 211
figure 94 :	tableau des résidus après corrections des poids 211
figure 95 :	résidus pondérés après correction des poids 212
figure 96 :	estimation des rugosités pour le réseau de la ville de Marennes 212
figure 97 :	distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau F-St 213
figure 98 :	distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau FD-St 213
figure 99 :	distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau PVC10 214
figure 100 :	distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau F-St prob. 214
figure 101 :	exemple pour l'homogénéisation 224
figure 102 :	tableau des caractéristique conduite de l'exemple pour l'homogénéisation 225
figure 103 :	graphe d'un petit réseau 238
figure 104 :	valeurs de critère H pour 6 choix des mesures 240
figure 105 :	graphe du réseau de Muret 242
figure 106 :	courbe caractéristique de la pompe du réseau de Muret 243
figure 107 :	consommation journalière domestique type du réseau de Muret (été) 244
figure 108 :	consommation journalière industrielle type du réseau de Muret (été) 244
figure 109 :	synthèse des volumes journaliers pour le réseau de Muret (journée type d'été) 245

	page
figure 110: choix des mesures pompe arrêtée	246
figure 111: choix des mesures ouverture PI en 207 (Carretes)	251
figure 112: choix des mesures ouverture PI en 23 (Perez)	252
figure 113: concordance entre M/A pompe et niveaux piézométriques	263
figure 114: correction des côtes NGF des points de mesure	263
figure 115: chute anormale de la charge à la piscine de 16h 30 à 17h 52	264
figure 116: campagne de mesure pour la ville de Muret début mars 1994	265
figure 117: charge au réservoir de Bétance pendant l'ouverture du PI en Carrete	267
figure 118: charge au réservoir de Bétance pendant l'ouverture du PI en Carrete	268
figure 119: simulation du niveau du réservoir de Bétance de 14h à 15h	271

PRINCIPALES NOTATIONS

Symboles

$x \approx 2,3$:	x est peut différent de 2,3 ;
$A.\hat{x} \equiv b$:	\hat{x} est solution au sens des moindres carrés de $A.x = b$.

Ensembles et espaces particuliers :

$\text{card}(E)$:	le cardinal d'une partie finie E ;
\mathbb{R}	:	le corps des nombres réels ;
\mathbb{R}^n	:	l'espace vectoriel des vecteurs à composantes réelles, de dimension n ;
$\mathbb{L}(E,F)$:	l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F , ($\mathbb{L}(E)$ si $F=E$) ;
$E' = \mathbb{L}(E,\mathbb{R})$:	le dual de E ;
$\mathbb{L}_2(E,F)$:	l'espace des applications bilinéaires continues de E dans F .
$C^k(E,F)$:	l'espace des fonctions k fois continûment différentiables dans E à valeurs dans F ; ($C^k(E)$ si $F = \mathbb{R}$)
$\text{lin}(x_1, x_2, \dots, x_k)$:	le sous-espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires de x_1, x_2, \dots, x_k ;
E^\perp	:	le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à E ;
$\dim V$:	la dimension de l'espace vectoriel V ;
$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$:	somme directe de sous-espaces vectoriels.

Vecteurs :

$0_n \in \mathbb{R}^n$:	le vecteur nul ;
$1_n \in \mathbb{R}^n$:	le vecteur dont toutes les composantes sont des un ;
$V \leq 0_n$:	le vecteur dont toutes les composantes sont négatives ou nulles ;
$\langle u, v \rangle_n$:	$\langle u, v \rangle_n = {}^t u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i \times v_i$, le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^n ;
$\ v\ _2 = \langle v, v \rangle_n$:	la norme euclidienne ℓ_2 d'un vecteur v ;
$\ v\ _1 = \sum_{i=1}^n v_i $:	la norme vectorielle ℓ_1 d'un vecteur v ;
$\ v\ _\infty$:	la norme vectorielle ℓ_∞ : $\ v\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} v_i $.

Matrices :

$\mathbb{M}_{n,m}$:	l'espace vectoriel des matrices de type (n,m) à éléments dans le corps réel ;
\mathbb{M}_n	:	l'anneau des matrices d'ordre n à éléments dans le corps \mathbb{R} ;
$A = (A_{i,j})$:	la matrice d'éléments $A_{i,j}$
$A_{i,j}$:	l'élément de la i -ème ligne et la j -ème colonne ;
${}^t A$:	la matrice transposée de la matrice A ;
$\ker A$:	le noyau de A , si $A \in \mathbb{M}_{n,m}$ alors $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^m / A \cdot x = 0_n\}$;
$\text{Im } A$:	l'image de A , si $A \in \mathbb{M}_{n,m}$ alors $\text{Im } A = \{y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^m / A \cdot x = y\}$
$\text{rang}(A)$:	$\dim(\text{Im } A)$
$A^{-1} \in \mathbb{M}_n$:	la matrice inverse de la matrice $A \in \mathbb{M}_n$, si $\text{rang } A = n$;
$A^+ \in \mathbb{M}_{m,n}$:	la matrice pseudo-inverse de $A \in \mathbb{M}_{n,m}$; si $\text{rang } A = m$ ($n \geq m$) alors $A^+ = ({}^t A \cdot A)^{-1} \cdot {}^t A$; si $\text{rang } A = n$ ($n \leq m$) alors $A^+ = {}^t A \cdot (A \cdot {}^t A)^{-1}$;
$\text{diag}(\lambda_i)$:	la matrice diagonale d'éléments λ_i ;
$I_n \in \mathbb{M}_n$:	la matrice unité, $I_n = \text{diag}(1_n)$;
$O_{n,m} \in \mathbb{M}_{n,m}$:	la matrice nulle ;
$\lambda_i(A)$:	la i -ème valeur propre de la matrice A ;
$\text{sp}(A)$:	le spectre de la matrice A ;
$\rho(A)$:	le rayon spectral de la matrice A ;
$\ A\ _p$:	si A est une matrice $m \times n$, $\ A\ _p = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\ A \cdot x\ _p}{\ x\ _p} \right)$ est la norme matricielle induite par la norme vectorielle l_p ;
$\text{cond}(A)$:	$\text{cond}(A) = \ A^{-1}\ _2 \cdot \ A\ _2$ est le nombre conditionnement d'une matrice A .

Calcul différentiel :

$\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$:	le vecteur gradient de $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ en x ;
$\nabla_x f(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1}$:	le vecteur gradient partiel suivant x de $f \in C^1(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ en (x,y) ;

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &\in \mathbb{L}(E, F) \\ f''(x) &\in \mathbb{L}_2(E, F) \\ \text{Jac}(F)(x) &\in \mathbb{M}_{m,n} \end{aligned}$$

$$\partial_x F(x, y) \in \mathbb{M}_{m,n_1}$$

$$\text{Hess}(f) \in \mathbb{M}_n$$

i -ème dérivée partielle d'une fonction réelle $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ de plusieurs variables réelles ; de même $\partial_{i,j} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$

;
dérivée première de l'application $f \in C^1(E, F)$ au point x ;
dérivée seconde de l'application $f \in C^1(E, F)$ au point x ;
la matrice jacobienne de $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ au point x ,

$$\text{Jac}(F)(x) = \begin{pmatrix} {}^t \nabla F_1(x) \\ {}^t \nabla F_2(x) \\ \vdots \\ {}^t \nabla F_m(x) \end{pmatrix};$$

la matrice jacobienne des dérivées partielles par rapport à

$$x, \partial_x F(x, y) = \begin{pmatrix} {}^t \nabla_x F_1(x, y) \\ {}^t \nabla_x F_2(x, y) \\ \vdots \\ {}^t \nabla_x F_m(x, y) \end{pmatrix};$$

la matrice hessienne de $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$,
 $\text{Hess}(f)(x) = (\partial_{i,j} f(x))$

Notations scalaires :

a	:	le nombre d'arc ;
n	:	le nombre de noeuds simples ;
f	:	le nombre de noeuds à charge fixée ;
$n+f$:	le nombre total de noeuds ;
κ	:	le nombre de classes de rugosité ;
κ_i	:	le nombre d'arcs de classe de rugosité C_i ;
δ	:	le nombre de classes de demande ;
m_q	:	le nombre de mesures de débits ;
m_h	:	le nombre de mesures de charge aux noeuds simples ;
m_d	:	le nombre de mesures de demandes aux noeuds simples ;
m_f	:	le nombre de mesures de demandes aux noeuds à charge fixée ;
n_C	:	le nombre de classe de rugosité inconnues ;
n_D	:	le nombre de classe de demandes inconnues.

Notations vectorielles :

$h \in \mathbb{R}^n$:	le vecteur des charges aux noeuds simples, $h = {}^t (h_1, \dots, h_n)$;
$h^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^{m_h}$:	le vecteur des charges aux noeuds simples mesurées,

	$h^{mes} = {}^t (h_1^{mes}, \dots, h_{m_h}^{mes}) ;$
$h^{inc} \in \mathbb{R}^{n-m_h} :$	le vecteur des charges aux noeuds simples inconnues, $h^{inc} = {}^t (h_1^{inc}, \dots, h_{n-m_h}^{inc}) ;$
$h^f \in \mathbb{R}^f :$	le vecteur des charges fixées aux noeuds réservoirs, $h^f = {}^t (h_1^f, \dots, h_f^f) ;$
$d \in \mathbb{R}^n :$	le vecteur des demandes aux noeuds simples, $d = {}^t (d_1, \dots, d_n) ;$
$D \in \mathbb{R}^\delta :$	le vecteur des classes de demandes aux noeuds simples, $D = {}^t (D_1, \dots, D_\delta) ;$
$d^{mes} \in \mathbb{R}^{m_d} :$	le vecteur des demandes mesurées aux noeuds simples, $d^{mes} = {}^t (d_1^{mes}, \dots, d_{m_d}^{mes}) ;$
$d^{inc} \in \mathbb{R}^{n-m_d} :$	le vecteur des demandes inconnues aux noeuds simples, $d^{inc} = {}^t (d_1^{inc}, \dots, d_{n-m_d}^{inc}) ;$
$d^f \in \mathbb{R}^f :$	le vecteur des demandes aux noeuds à charge fixée, $d^f = {}^t (d_1^f, \dots, d_f^f) ;$
$df^{mes} \in \mathbb{R}^{m_f} :$	le vecteur des demandes mesurées aux noeuds à charge fixée, $df^{mes} = {}^t (df_1^{mes}, \dots, df_{m_f}^{mes}) ;$
$df^{inc} \in \mathbb{R}^{f-m_f} :$	le vecteur des demandes non mesurées aux noeuds à charge fixée, $df^{inc} = {}^t (df_1^{inc}, \dots, df_{f-m_f}^{inc}) ;$
$q \in \mathbb{R}^a :$	le vecteur des débits dans les arcs, $q = {}^t (q_1, \dots, q_a) ;$
$q^{mes} \in \mathbb{R}^{m_q} :$	le vecteur des débits dans les arcs mesurés, $q^{mes} = {}^t (q_1^{mes}, \dots, q_{m_q}^{mes}) ;$
$q^{inc} \in \mathbb{R}^{a-m_q} :$	le vecteur des débits dans les arcs non mesurés, $q^{inc} = {}^t (q_1^{inc}, \dots, q_{a-m_q}^{inc}) ;$
$r \in (\mathbb{R}^{*+})^a :$	le vecteur des résistances hydrauliques dans les arcs, $r = {}^t (r_1, \dots, r_a) ;$
$\xi(r, q) \in \mathbb{R}^a :$	le vecteur des pertes de charge sur les arcs , $\xi = {}^t (\xi_1, \dots, \xi_a) ;$
$Chw \in (\mathbb{R}^{*+})^a :$	le vecteur des rugosités dans les arcs (coefficients d'Hazen-Williams), $chw = {}^t (chw_1, \dots, chw_a) ;$
$C \in (\mathbb{R}^{*+})^k :$	vecteur des classes de rugosité dans les arcs. $C = {}^t (C_1, \dots, C_k) ;$
$C^{mes} \in (\mathbb{R}^{*+})^{k-n_c} :$	vecteur des classes de rugosité connues, $C^{mes} = {}^t (C_1^{mes}, \dots, C_{k-n_c}^{mes}) ;$
$D^{mes} \in \mathbb{R}^{\delta-n_0} :$	vecteur des classes de demandes connues,

$$D^{\text{mes}} = {}^t(D_1^{\text{mes}}, \dots, D_{\delta-n_D}^{\text{mes}}) ;$$

$C^{\text{inc}} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_C}$: vecteur des classes de rugosité inconnues,

$$C^{\text{inc}} = {}^t(C_1^{\text{inc}}, \dots, C_{n_C}^{\text{inc}}) ;$$

$D^{\text{inc}} \in \mathbb{R}^{n_D}$: vecteur des classes de demandes inconnues,

$$D^{\text{inc}} = {}^t(D_1^{\text{inc}}, \dots, D_{n_D}^{\text{inc}}).$$

Notations matricielles :

$A^f \in \mathbb{M}_{f,a}$: la sous-matrice d'incidence noeud-arc réduite aux noeuds à charges fixées ;

$A \in \mathbb{M}_{n,a}$: la sous-matrice d'incidence noeud-arc réduite aux noeuds simples ;

$M_0 \in \mathbb{M}_{a-n,a}$: la matrice d'incidence maille-arc augmentée ;

$S_q \in \mathbb{M}_{m_q,a}$: la matrice de sélection des débits mesurés ;

$N_q \in \mathbb{M}_{a-m_q,a}$: la matrice de sélection des débits non mesurés ;

$S_h \in \mathbb{M}_{m_h,n}$: la matrice de sélection des charges mesurées ;

$N_h \in \mathbb{M}_{n-m_h,n}$: la matrice de sélection des charges non mesurées ;

$S_d \in \mathbb{M}_{m_d,n}$: la matrice de sélection des demandes aux noeuds simples mesurées ;

$N_d \in \mathbb{M}_{n-m_d,n}$: la matrice de sélection des demandes aux noeuds simples non mesurées ;

$S_f \in \mathbb{M}_{m_f,f}$: la matrice de sélection des demandes mesurées aux noeuds à charge fixée ;

$N_f \in \mathbb{M}_{f-m_f,f}$: la matrice de sélection des demandes non mesurées aux noeuds à charge fixée ;

$S_i \in \mathbb{M}_{\kappa_i,a}$: la matrice de sélection des arcs de rugosité C_i ;

$K_C \in \mathbb{M}_{a,\kappa}$: la matrice de répartition des classes de rugosités :
 $chw = K_C \cdot C$;

$K_D \in \mathbb{M}_{n,\delta}$: la matrice de répartition des classes de demandes :
 $d = K_D \cdot D$;

$S_C \in \mathbb{M}_{\kappa-n_C,\kappa}$: la matrice de sélection des classes de rugosité connues ;

$N_C \in \mathbb{M}_{n_C,\kappa}$: la matrice de sélection des classes de rugosité inconnues ;

$S_D \in \mathbb{M}_{\delta-n_D,\delta}$: la matrice de sélection des classes de demandes connues ;

$N_D \in \mathbb{M}_{n_D,\delta}$: la matrice de sélection des classes de demandes inconnues.

INTRODUCTION GENERALE

On cherche à réaliser la modélisation du fonctionnement d'un **réseau maillé d'Alimentation en Eau Potable**, en régime permanent (les caractéristiques hydrauliques sont indépendantes du temps), en adoptant une bonne stratégie de mesures. Les méthodes que nous allons décrire, sont cependant beaucoup plus **générales** et peuvent s'appliquer aux réseaux physiques pour lesquels on peut définir deux types de variables, des **flots** et des **tensions** (cf. M. Sakarovitch p.75-78, 1984), comme les réseaux électriques, des systèmes mécaniques, des réseaux thermaux.

Pour y parvenir, on utilisera la Théorie des graphes, l'Optimisation, et certains résultats de la Statistique inférentielle.

Dans un premier chapitre, des préliminaires à toute cette étude sont développés ; on pose le problème dans toute sa généralité : un ensemble de canalisations (le réseau de distribution) relie des points d'alimentations (réservoirs, pompes) à des points de consommations (usagers) ; il est d'abord simplifié puis schématisé par un **graphe simple** orienté que l'on suppose connexe. Les niveaux de l'eau dans les réservoirs, les diamètres et les longueurs des conduites sont donnés ; le débit et la rugosité dans chaque arc du réseau, la charge totale et la demande en eau en chaque noeud sont solutions du système d'équation d'équilibrage hydraulique ; il est constitué d'**équations linéaires** dont certaines expriment l'équilibre des débits aux noeuds (**conservation de la masse**), et d'autres que la perte de charge est une tension (**conservation de l'énergie**) ; mais, il comprend aussi les **équations non linéaires** des lois de la perte de charge en fonction du débit.

Trois étapes sont essentielles pour la réalisation de la modélisation : la résolution du problème de l'**Analyse**, celle du problème de l'**Identification du réseau**, et celle du **Choix des mesures**.

Le problème de l'Analyse consiste à se donner des estimations des rugosités dans les conduites et des demandes aux noeuds simples (consommateurs) pour chercher les débits dans les arcs et les charges aux noeuds simples ; il fera l'objet du deuxième chapitre.

Chercher de meilleures estimations des paramètres rugosité et demandes à partir d'un ensemble de valeurs mesurées, constitue le problème de l'identification du réseau ; on s'emploiera à le résoudre dans le troisième chapitre.

La qualité de l'estimation de ces paramètres dépend de l'emplacement, du nombre et de la nature des mesures ; ce Choix devra assurer l'observabilité du réseau (Cohen et Carpentier, 1987) et également éviter que de petites erreurs de mesure ne conduisent à une mauvaise estimation des paramètres ; le quatrième et dernier chapitre traitera de ce problème.

De nombreux travaux ont contribué à la résolution du problème de l'Analyse depuis les premières méthodes présentées par Hardy Cross (1936) ; différents énoncés sont proposés ; une écriture sous forme matricielle des équations a permis de relier facilement entre-elles les différentes formulations et de montrer leur équivalence.

Les principaux algorithmes de la littérature sont ensuite décrits dans le cadre d'un problème d'optimisation convexe dans l'espace des débits. Les contraintes sont affines et les coefficients de Lagrange associée sont les charges.

Carpentier et al. (1985) et Todini et al. (1987) ont montré que les meilleurs algorithmes pour la résolution du problème de l'Analyse sont du type Newton, c'est-à-dire des algorithmes pour lesquels on se sert d'informations du deuxième ordre. Le problème d'optimisation dans l'espace des charges ou problème dual, n'est pas deux fois continûment différentiable sur l'espace tout entier. On propose alors de définir une famille de problèmes d'optimisation dont la solution tend vers celle du problème de l'Analyse et pour lesquels la fonction à minimiser est fortement convexe deux fois continûment différentiable. Ainsi, les matrices hessiennes des problèmes primaux et duaux sont symétriques définies positives et symétriques définies négatives ; on est assuré de la convergence globale des algorithmes de Newton sur le problème réduit, de Newton sur le lagrangien et de Newton sur le problème dual ; on donne une estimation de l'erreur a priori entre la solution approchée et la solution exacte.

Pour le problème de l'Identification du réseau, il faut réaliser des mesures de débit sur des arcs et de charge sur des noeuds ; pour des raisons pratiques et financières, il n'est pas possible de mesurer tous les débits et toutes les charges inconnues ; le nombre de mesure est donc inférieur au nombre de paramètres à estimer égal au nombre d'arcs augmentés du nombre de noeuds simples.

On propose de palier cette difficulté en réduisant le nombre d'inconnues, c'est-à-dire en cherchant les estimations des rugosités et des demandes sur des sous-espaces particuliers : on définit des classes sur lesquels tous les arcs sont supposés avoir la même rugosité, et des classes de demandes regroupant des consommateurs d'un même type, comme la classe des consommateurs domestiques ou la classe des consommateurs

industriels. Il est très fréquent de passer ainsi de cinq cents inconnues, à moins de dix inconnues.

Le choix des inconnues étant fait, le problème est modélisé mathématiquement : l'estimation des paramètres inconnus minimise la somme des écarts au carré entre valeurs observées et valeurs calculées en résolvant le problème de l'Analyse. Les résidus sont multipliés par un poids tenant compte de la précision des appareils de mesure et de manière générale de la confiance que l'on a dans le résultat de la mesure. On cherche à résoudre un problème des moindres carrés, non linéaire, sous des contraintes fermées et bornées, dans un cas différentiable.

La méthode de résolution est une légère modification de l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour tenir compte de l'ensemble des contraintes. Une correction automatique des poids à partir des résidus pondérés a été implémentée ; elle s'est révélée sur plusieurs exemples, plus robuste pour l'estimation.

Pour apprécier la qualité des estimations, deux encadrements à partir de la précision dans la mesure sont donnés : le premier, par approximation linéaire des équations, le second par une méthode de Monte-Carlo (les erreurs de mesure étant supposées être uniformément distribuées).

Une Identification de bonne qualité, du réseau de la ville de Marennes (Charente-Maritime) a été réalisée, après une campagne de mesure.

Il se pose alors le problème du Choix des mesures : Quelles sont celles qui restituent au mieux le comportement du réseau?

Pour chaque mesure potentielle de débit ou de charge on décide d'une précision a priori ou erreur de mesure ; on effectue deux changements de variable, le premier dans l'espace des débits et des charges pour ramener les précisions à l'unité, le second dans l'espace des rugosités et des demandes pour tenir compte des différences d'échelles. Le choix de la précision permet une présélection des débits ou des charges en affectant par exemple une petite erreur de mesure à une charge et une grande erreur de mesure à un débit ; on peut ainsi tenir compte du facteur coût de la mesure.

Autour d'un point normal de fonctionnement, les mesures sont alors choisies pour minimiser l'**influence** des erreurs de mesures dans l'estimation des paramètres rugosité et demande, et pour que les variables du réseau puissent être estimées à partir des valeurs mesurées.

On résout ce problème par un algorithme glouton, pour lequel à chaque étape on détermine la meilleure mesure. On calcule ainsi de façon séquentielle une pseudo-inverse.

La validation de la méthode s'est faite à deux niveaux :

Des simulations sur des réseaux schématisés permettent de comparer le choix de mesure obtenu avec d'autres possibles, les vraies valeurs des rugosités et des demandes étant connues. Sans erreurs de mesure, il faut reconstituer les bonnes rugosités et les bonnes demandes. Avec des erreurs de mesures uniformément distribuées, on étudie la répartition des estimations autour des vraies valeurs.

Une campagne de mesure a été réalisée sur le réseau de la ville de Muret, après avoir déterminé par la méthode proposée, la nature et l'emplacement des mesures nécessaires ce qui a permis l'identification du réseau.

CHAPITRE 1

Etablissement des équations d'équilibrage hydraulique

I ETABLISSEMENT DES EQUATIONS D'EQUILIBRAGE HYDRAULIQUE

Dans ce chapitre et dans ceux qui vont suivre nous utilisons la théorie des graphes pour résoudre un problème lié à un certain type de réseau physique : notre discussion porte sur des Réseaux d'Alimentation en Eau Potable. Les méthodes que nous allons décrire, sont cependant beaucoup plus **générales** et peuvent s'appliquer aux réseaux physiques pour lesquels on peut définir deux types de variables, des **flots** et des **tensions** (pour une définition et des propriétés, cf. M. Sakarovitch p.75-78, 1984). On peut citer par exemple les réseaux électriques (courant et différence de potentiel ou tension), des systèmes mécaniques (force et extension ou force et vitesse), des réseaux thermaux (flux de chaleur et différence de température). Pour une introduction à la modélisation de tels réseaux physiques, de nombreux exemples et un développement sur les réseaux électrique, on pourra consulter A. Dolan et J. Aldous, p. 200 à 279, 1993.

Nous avons choisi pour expliquer les relations entre les débits, les résistances, les demandes et les charges, le modèle, de nos jours, classique des équations de l'équilibrage hydraulique, qui a été décrit de façon matricielle par Todini et al. (1987). Ce système d'équations est commun aux trois problèmes complémentaires de l'Analyse, de l'Identification du réseau et du Choix des mesures.

I-1 Données et grandeurs physiques

Un réseau de distribution d'eau comprend des conduites, des réservoirs et différents éléments hydrauliques appelés singularités, comme des pompes, des vannes, des clapets, des limiteurs de débit, des stabilisateurs de pression amont ou aval. On connaît la topologie du réseau, les longueurs et les diamètres des tronçons qui le constituent, les singularités et leurs caractéristiques, les niveaux dans les réservoirs. Le réseau est schématisé par un graphe de a arcs ou tronçons et N noeuds ; un tronçon est constitué de conduites identiques et est parcouru par un débit constant ; les extrémités de ces tronçons sont les N noeuds du graphe.

Précisons quelles sont les grandeurs physiques utiles au problème de l'équilibrage hydraulique d'un réseau, en régime permanent.

L'énergie mécanique totale par unité de poids du liquide s'exprime en mètre de colonne d'eau et s'appelle la **charge** hydraulique. Comme c'est la pratique courante, on utilise la charge piézométrique représentant l'énergie potentielle (énergie de "position" plus énergie de "pression", cf. M. Carlier p. 92, 1980), la hauteur qui représente l'énergie cinétique étant négligeable dans nos applications.

L'eau circulant dans les arcs constitue le **débit** dans les arcs ; elle peut sortir du réseau ou y entrer au niveau d'un noeud ; ce débit algébrique constitue la demande aux noeuds appelée encore consommation.

Sur un noeud deux variables sont alors utiles : la demande et la charge hydraulique. L'ensemble des sommets sera partitionné en :

- **f noeuds à charge fixée** ou noeuds réservoirs (réservoirs, points de distribution, plans d'eau...), sur lesquels on connaît la charge. Il en existe toujours au moins un ($f \geq 1$).

- **n noeuds simples.**

On notera :

$h^f \in \mathbb{R}^f$: le vecteur connu des charges aux noeuds à charges fixées ;

$h \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des charges aux noeuds simples ;

$d^f \in \mathbb{R}^f$: le vecteur des consommations aux noeuds à charges fixées ;

$d \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des consommations aux noeuds simples ;

$q \in \mathbb{R}^a$: le vecteur des débits dans les arcs.

I-2 Le graphe associé au réseau

Le réseau est décrit comme le graphe orienté $G = (X, U)$ où X est l'ensemble des noeuds et U l'ensemble des arcs constitué des tronçons orientés arbitrairement ; par hypothèse, le graphe sera simple (deux noeuds ne sont connectés que par un seul arc), sans boucle et connexe.

$$\text{card}(U) = a$$

$$\text{card}(X) = N = f + n$$

Il est commode d'introduire la matrice d'incidence noeud-arc du graphe orienté G , que l'on note : $A^N \in \mathbb{M}_{N,a}$. Elle contient toutes les informations topologiques du réseau.

Ses éléments sont, en utilisant les conventions de A. Dolan et J. Aldous p. 44 (1993) :

$$A_{i,j}^N = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } j \text{ est orienté sortant de } i \\ -1 & \text{si l'arc } j \text{ est orienté rentrant en } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que cette matrice dépend de la façon dont les noeuds et les arcs sont numérotés : elle est définie de façon unique à une permutation de ces lignes et de ces colonnes près.

- Exemple I-2 ($a = 6$, $N = 5$, un seul réservoir noté $R0$) :

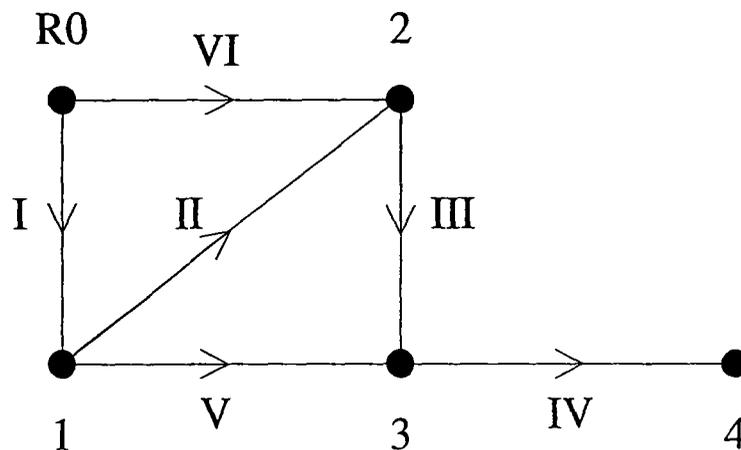


figure 1 : exemple de graphe orienté

La matrice d'incidence du réseau de la figure 1 est, si le noeud à charge fixée $R0$ est le cinquième dans la liste des noeuds :

$$A^N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^N se décompose en deux sous-matrices :

A^f , la matrice d'incidence noeud-arc réduite aux noeuds réservoirs ;

A , la matrice d'incidence noeud-arc réduite aux noeuds simples.

On aura donc $A^N = \begin{pmatrix} A \\ A^f \end{pmatrix}$ où $A \in \mathbb{M}_{n,a}$ et $A^f \in \mathbb{M}_{f,a}$

Sur l'exemple précédent :

$$A^f = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \text{ et } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque I-2.1 :

Carpentier et al. (1985) utilisent un autre graphe G^* , obtenu à partir de G , en augmentant la liste des arcs et la liste des noeuds simples si nécessaire pour que chaque réservoir n'ait plus qu'un seul noeud voisin : les réservoirs sont mis "en antenne". Les équations de conservation de la masse aux noeuds réservoirs prennent ainsi une forme particulière et, le sous-graphe de G^* induit par l'ensemble des noeuds simples est connexe.

Remarque I-2.2 :

La somme des débits entrant en un noeud est égale à la somme des débits qui en sort, si on comprend dans les débits les demandes aux noeuds. Si on veut introduire la notion de flot sur le graphe, il est usuel (pour le Problème du flot maximum et les Réseaux de transport, Claude Berge p. 72 à 82, 1973) d'ajouter au graphe, un noeud source, un noeud puits, des arcs reliant les noeuds sur lesquels il y a une consommation au noeud puits et des arcs reliant les noeuds sur lesquels il y a une alimentation au noeud source.

Le débit aux noeuds réservoir étant algébrique (soit une consommation, soit une alimentation) il faut confondre le noeud puits et le noeud source en un seul noeud : S de référence (voir par exemple, pour ce graphe augmenté Cohen et Carpentier 1987). Le vecteur :

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ d \\ d^f \end{pmatrix}$$

est alors un flot pour le graphe augmenté. Le graphe de la figure 1 devient alors en orientant arbitrairement tous les arcs :

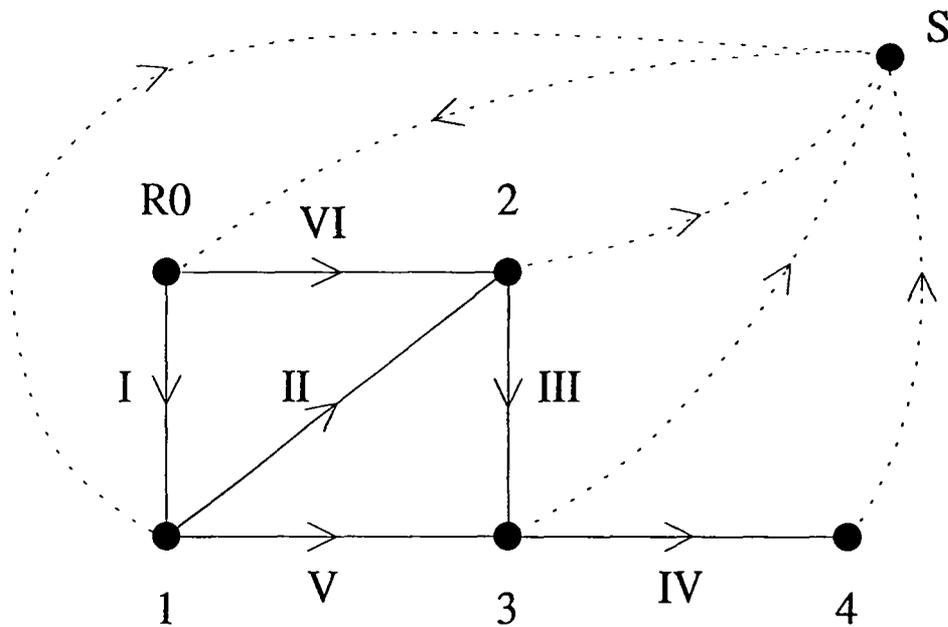


figure 2 : autre graphe possible

Un noeud et cinq arcs ont été ajoutés : la matrice d'incidence de ce graphe augmenté comprend une ligne et cinq colonnes en plus.

Remarque I-2.3 : En restreignant le graphe à sa schématisation, on réduit le nombre d'arcs.

I-3 Lois de perte de charge

La perte de charge ξ_i de l'arc i s'exprime en mètre de colonne d'eau ; ξ_i est une fonction du débit q_i et de la résistance r_i , à valeurs dans \mathbb{R} . Elle se décompose comme :

- la somme de l'énergie perdue sous forme de chaleur, le long de la conduite : ξ_i^{lin}
- de l'énergie perdue localement dans une singularité (coude, vanne, dispositif hydraulique particulier...) : ξ_i^{sin}
- éventuellement de l'énergie fournie par une machine hydraulique ξ_i^{pomp} .

$$\xi_i = \xi_i^{\text{lin}} + \xi_i^{\text{sin}} + \xi_i^{\text{pomp}}, \text{ pour } i = 1, \dots, a \quad (\text{I-3.1})$$

En notation vectorielle, pour l'ensemble des arcs :

$$\xi = \xi^{\text{lin}} + \xi^{\text{sin}} + \xi^{\text{pomp}}$$

Les composantes de ξ ne dépendent que de deux variables :

$$\xi(r, q) = \begin{pmatrix} \xi_1(r_1, q_1) \\ \xi_2(r_2, q_2) \\ \vdots \\ \xi_a(r_a, q_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^{\text{lin}}(r_1, q_1) + \xi_1^{\text{sin}}(q_1) + \xi_1^{\text{pomp}}(q_1) \\ \xi_2^{\text{lin}}(r_2, q_2) + \xi_2^{\text{sin}}(q_2) + \xi_2^{\text{pomp}}(q_2) \\ \vdots \\ \xi_a^{\text{lin}}(r_a, q_a) + \xi_a^{\text{sin}}(q_a) + \xi_a^{\text{pomp}}(q_a) \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.2})$$

Nous allons définir chacune de ces pertes de charge.

I-3.1 Perte de charge linéaire dans les conduites

Elle correspond à l'énergie dégradée en chaleur le long de la conduite et dépend de façon linéaire de la longueur de celle-ci ; si l'on adopte la formule d'Hazen-Williams (M. Carlier p. 237, 1980), elle s'exprime en fonction du débit q_i et de la résistance r_i strictement positive, par :

$$\xi_i^{\text{lin}}(r_i, q_i) = r_i \cdot |q_i|^{0,852} \cdot q_i \quad (\text{I-3.3})$$

où $r_i = \frac{10,67 \cdot L_i}{\Phi_i^{4,87} \cdot \text{Chw}_i^{1,852}}$, avec L_i la longueur de la conduite i en mètres, Φ_i son diamètre en mètres, Chw_i étant le coefficient de rugosité sans dimension.

$r_i \mapsto \xi_i^{\text{lin}}(r_i, q_i)$ est linéaire et $q_i \mapsto \xi_i^{\text{lin}}(r_i, q_i)$ de classe C^1 .

La figure 3 donne l'allure de cette fonction pour un r_i particulier (calculé avec $\Phi_i = 150$ mm, $L_i = 1000$ m, $\text{Chw}_i = 100$), et la figure 4 celle de sa dérivée :

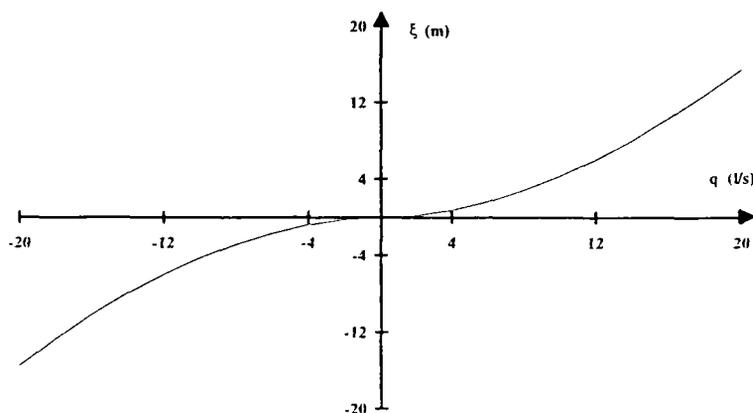


figure 3 : perte de charge linéaire

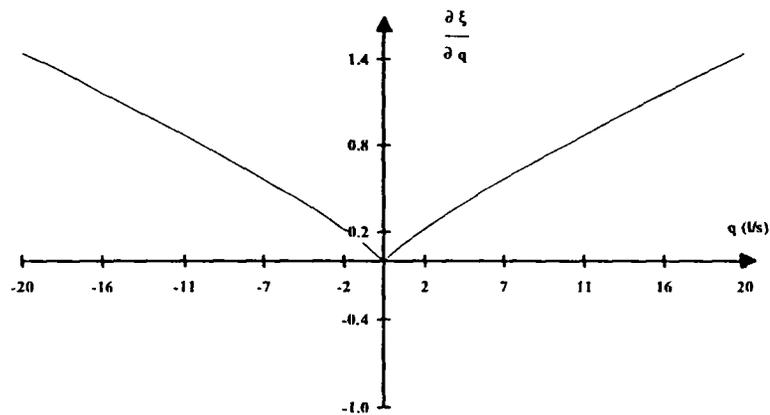


figure 4 : dérivée de la fonction perte linéaire, en fonction du débit

I-3.2 Perte de charge singulière

S'il n'y a pas de perte de charge singulière sur l'arc i : $\xi_i^{\text{sin}}(q_i) = 0, \forall q_i \in \mathbb{R}$.

Une perte de charge singulière correspond à l'énergie perdue localement sous forme de chaleur dans un organe hydraulique, placé sur l'arc i , par exemple une vanne partiellement fermée ; elle s'exprime proportionnellement au carré du débit qui traverse la singularité. Elle peut être dissymétrique, le facteur de proportionnalité α_i dépend du sens du débit :

$$\xi_i^{\text{sin}}(q_i) = \begin{cases} \alpha_i' \cdot q_i^2, & \text{si } q_i \geq 0 \\ -\alpha_i'' \cdot q_i^2, & \text{si } q_i \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I-3.4})$$

On supposera connaître les coefficients α_i' et α_i'' .

La figure 5 donne l'allure de cette fonction et la figure 6 celle de sa dérivée :

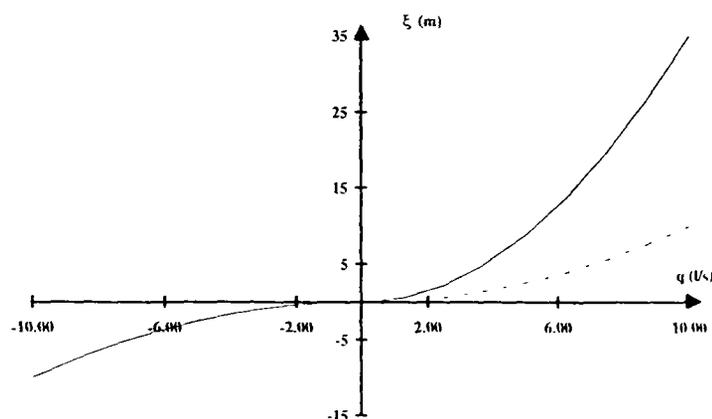


figure 5 : perte de charge singulière

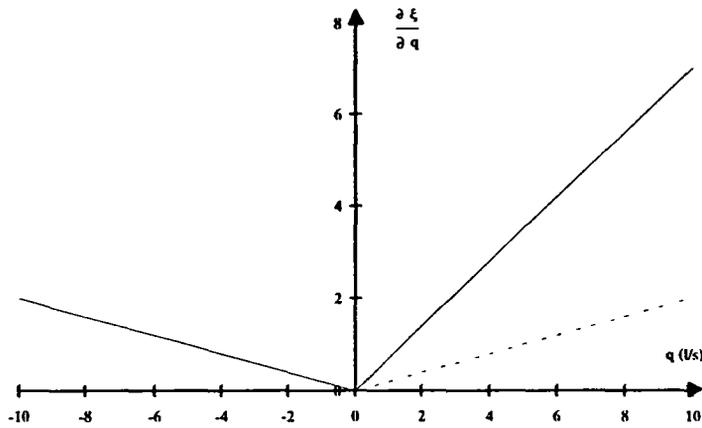


figure 6 : dérivée de la fonction perte singulière, en fonction du débit

I-3.3 Cas d'une pompe

Si sur l'arc i , il n'y a pas de pompe : $\xi_i^{\text{pomp}}(q_i) = 0, \forall q_i \in \mathbb{R}$.

Une pompe élève de l'eau à une hauteur H . Pour chaque catégorie de pompe, on dispose de la courbe caractéristique du gain de charge en fonction du débit ; elle n'a de réalité physique que sur un intervalle strictement positif, qui correspond à une plage de fonctionnement acceptable de la pompe : $q_i \in [q_{\min}, q_{\max}]$, avec $q_{\min} > 0$.

Nous avons choisi de décrire cette courbe par trois points suffisamment espacés, c'est-à-dire de la modéliser par un morceau de parabole. Un gain de charge est une perte de charge négative ; la courbe des pertes de charges liée à la pompe en fonction du débit se déduit donc de la courbe caractéristique par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Ainsi, pour $q_i \in [q_{\min}, q_{\max}]$ avec $q_{\min} > 0$:

$$\xi_i^{\text{pomp}}(q_i) = -a_i + b_i \cdot q_i + c_i \cdot q_i^2, \text{ avec } a_i > 0, c_i > 0$$

Cette fonction est croissante sur son domaine de définition et sa représentation est un morceau de parabole ; elle n'est définie que sur un intervalle fermé borné ; pour qu'elle soit définie sur \mathbb{R} tout entier et soit monotone croissante, on la prolonge ainsi :

Si $a_i > 0, b_i \geq 0, c_i > 0$,

$$\xi_i^{\text{pomp}}(q_i) = -a_i + b_i \cdot q_i + c_i \cdot q_i |q_i|, \forall q_i \in \mathbb{R} \quad (\text{I-3.5})$$

Si $a_i > 0$, $b_i < 0$, $c_i > 0$,

$$\begin{cases} \xi_i^{\text{pomp}}(q_i) = -a_i + b_i \cdot q_i + c_i \cdot q_i^2, & \text{si } q_i \geq -\frac{b_i}{2c_i} > 0 \\ \xi_i^{\text{pomp}}(q_i) = -a_i - \frac{b_i^2}{4c_i}, & \text{si } q_i \leq -\frac{b_i}{2c_i} \end{cases} \quad (\text{I-3.6})$$

La figure 7 donne pour les deux cas possibles, l'allure de cette fonction et la figure 8 celle de sa dérivée :

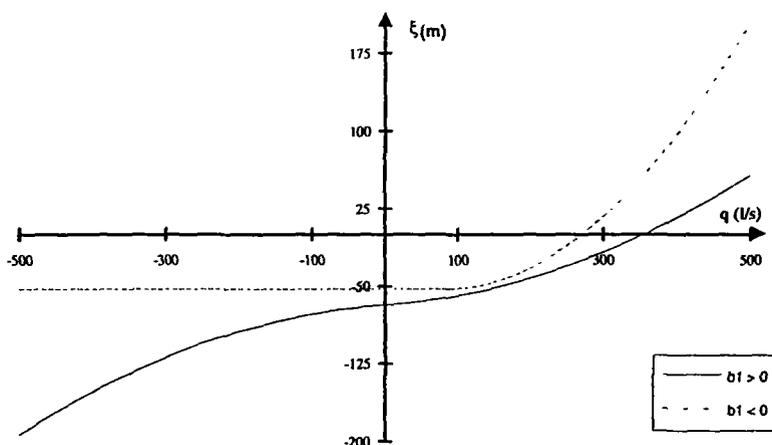


figure 7 : perte de charge liée à une pompe et son prolongement

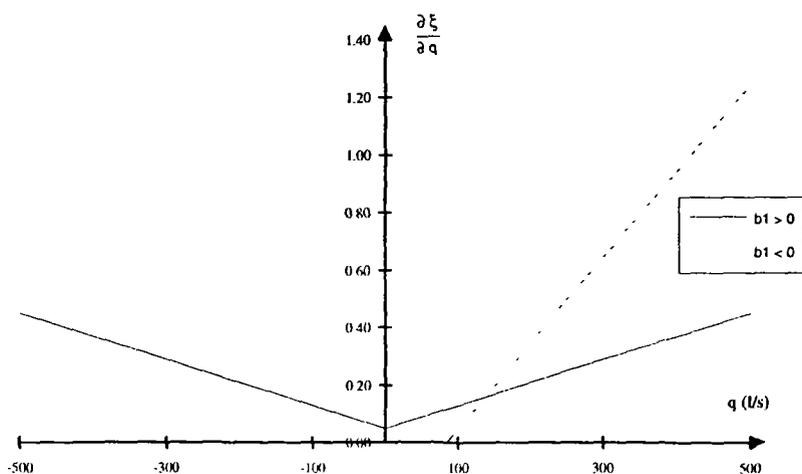


figure 8 : dérivée de la fonction perte d'une pompe

La formule I-3.6 peut être généralisée à b_i quelconque : la fonction perte de charge d'une pompe serait encore monotone croissante ; ce qui n'est pas vrai pour la formule I-3.5.

I-3.4 Organes hydrauliques particuliers

a) Le limiteur de débit

Un limiteur de débit est un dispositif qui cherche à réaliser une contrainte linéaire inégalité de débit du type : $q \leq q^{\max}$. Il est équivalent en pratique à une perte de charge singulière et est modélisé comme tel. La perte de charge du limiteur de débit est ainsi une fonction de classe C^1 dont l'allure est donnée par les figures 9 et 10 :

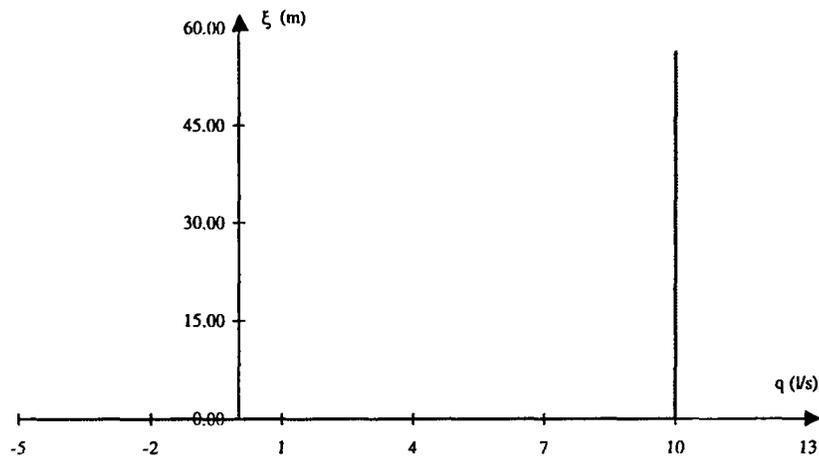


figure 9 : perte de charge d'un limiteur de débit

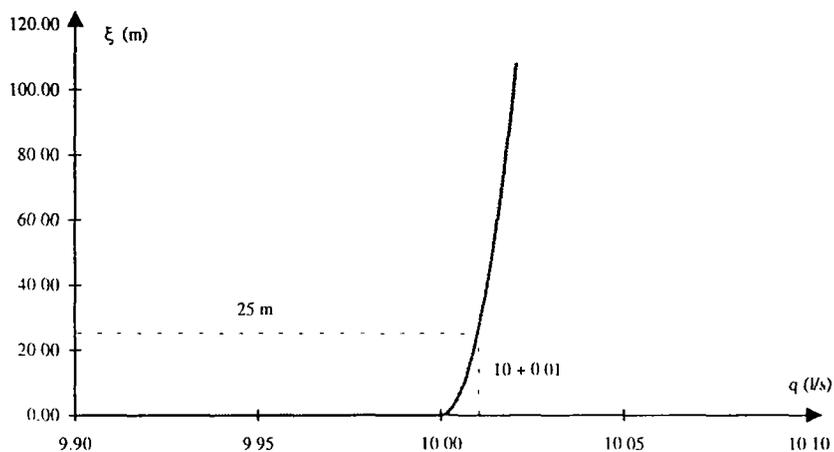


figure 10 : perte de charge d'un limiteur de débit au voisinage du débit limité

b) Le clapet

Le clapet ou sens obligatoire réalise physiquement une contrainte du type $q \geq 0$. Pour prendre en compte dans la modélisation, une contrainte de positivité sur un débit on pénalise la perte de charge sur l'arc portant le clapet, en la rendant très forte dès que l'on ne respecte pas la contrainte. Traiter un clapet comme un limiteur de débit où le débit est limité à 0 l/s dans le sens choisi donne numériquement d'excellents résultats.

c) Le stabilisateur de pression

Son rôle est de faire respecter une consigne sur la charge piézométrique en un point du réseau ($h_i \leq h_i^{\max}$ ou $h_i \geq h_i^{\min}$) dans une plage normale de fonctionnement (si la consigne n'est pas adaptée, il n'y arrive pas). Le dispositif crée au besoin une perte de charge dépendant de l'état du réseau pour saturer la contrainte.

La modélisation reproduit bien le comportement du stabilisateur sur un chemin entre réservoirs ; il n'en est pas de même sur une antenne avec une forte consommation sur le noeud aval et une consigne $h_i \geq h_i^{\min}$ sur le noeud amont : le modèle de répartition de la consommation que nous avons adopté ne prend pas en compte l'influence d'une baisse de pression sur la consommation (pour un modèle de consommation adéquate, on pourra consulter S. Berthin, 1994).

Ce dispositif a donc été inclus dans le code de calcul mais ne sera pas considéré dans ce qui va suivre.

Enonçons les propriétés essentielles de la fonction ξ que nous venons de définir.

I-3.5 Propriétés de ξ

Notons :

$r \in (\mathbb{R}^{*+})^a$: le vecteur des résistances dans les arcs ;

$\xi(r, q) \in \mathbb{R}^a$: le vecteur des pertes de charge globale sur les arcs ;

$\xi(q) \in \mathbb{R}^a$: le vecteur des pertes de charge globale sur les arcs quand on considère les résistances connues.

Soit $\ell \in C^2(\mathbb{R}^a)$ la fonction primitive de ξ qui s'annule en zéro :

$$\ell(q) = \sum_{i=1}^a \int_0^{q_i} \xi_i(u) du \text{ et } \ell(0_a) = 0$$

Propriétés I-3.5

ξ comme fonction de r et de q :

a) ξ est de classe $C^1\left(\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^a \times \mathbb{R}^a, \mathbb{R}^a\right)$.

ξ comme seule fonction q :

b) $\xi: \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^a$ est une fonction strictement monotone :

$$\langle \xi(q^1) - \xi(q^2), q^1 - q^2 \rangle_a > 0, \quad \forall (q^1, q^2) \in \mathbb{R}^{2a}, \quad q^1 \neq q^2 \quad (\text{I-3.7})$$

c) Toutes les primitives de ξ sont coercives (au sens de P. G. Ciarlet 1985, p. 175), i.e :

$$\lim_{\|q\| \rightarrow +\infty} \ell(q) = +\infty$$

et $\forall v \in \mathbb{R}^a, \lim_{\|q\| \rightarrow +\infty} [\ell(q) + \langle v, q \rangle_a] = +\infty$ (I-3.8)

d) $\xi^{-1}: \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^a$ existe et est strictement monotone de classe C^0 .

Preuve :

de a) Pour chaque ξ_i les dérivées partielles par rapport à q_i et r_i existent et sont continues ; les ξ_i sont donc de classe $C^1\left(\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^a \times \mathbb{R}^a; \mathbb{R}\right)$.

de b) Chacune des ξ_i considéré comme seule fonction de q_i à r_i constant est une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante.

$$\sum_{i=1}^a (\xi_i(q_i^1) - \xi_i(q_i^2)) \cdot (q_i^1 - q_i^2) = \langle \xi(q^1) - \xi(q^2), q^1 - q^2 \rangle_a$$

est donc une somme de a termes positifs dont un au moins est strictement positif si $q^1 \neq q^2$; l'inégalité (I-3.7) est donc démontrée

de c) Posons $f(q) = \ell(q) + \langle v, q \rangle_a$ avec v quelconque ; f peut s'exprimer comme une somme de fonctions réelles continues coercives, qui ne dépendent que de la variable q_i ; f est donc coercive.

En effet,

$$f = \sum_{i=1}^a f_i \circ p_i$$

où $p_i: \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}_i$ est l'application linéaire continue projection sur la $i^{\text{ème}}$ composante, et

$f_i(q_i) = \frac{r_i}{2.852} |q_i|^{2.852} + v_i \cdot q_i$ si la perte de charge est uniquement une perte de charge linéaire sur le tronçon i .

s'il y a présence d'une perte singulière on rajoute :

$$\frac{\alpha_i}{3} \cdot q_i^3, \text{ si } q_i \geq 0 \text{ et } -\frac{\alpha_i}{3} \cdot q_i^3, \text{ si } q_i \leq 0$$

et en présence d'une pompe, le terme additif est si $a_i > 0, b_i \geq 0, c_i > 0$:

$$-a_i \cdot q_i + \frac{b_i}{2} \cdot q_i^2 + \frac{c_i}{3} \cdot |q_i|^3$$

ou bien si $a_i > 0, b_i < 0, c_i > 0$:

$$\begin{cases} \frac{b_i^3}{24c_i^2} - a_i \cdot q_i + \frac{b_i}{2} \cdot q_i^2 + \frac{c_i}{3} \cdot q_i^3, & \text{si } q_i \geq \frac{-b_i}{2c_i} \\ -\left(a_i + \frac{b_i^2}{4c_i}\right) \cdot q_i, & \text{si } q_i \leq \frac{-b_i}{2c_i} \end{cases}$$

de d) Introduisons $u_i: \mathbb{R}_i \rightarrow \mathbb{R}^a$ l'injection définie par $x_i \rightarrow (0, \dots, x_i, \dots, 0)$ (0 partout sauf à la $i^{\text{ème}}$ place).

Chacune des ξ_i étant continue et strictement croissante de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, admet une fonction réciproque ξ_i^{-1} définie sur $\xi_i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; ξ_i^{-1} est par conséquent continue et strictement croissante de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

p_i et u_i sont des applications linéaires continues.

$\xi^{-1} = \sum_{i=1}^a u_i \circ \xi_i^{-1} \circ p_i$ est l'application inverse de ξ ; elle est donc continue et strictement

monotone ■

I-4 Les équations d'équilibrage hydraulique

Les équations de l'équilibrage hydraulique sont celles d'un modèle conservatif.

I-4.1 Conservation de la masse

On écrit en chaque noeud du réseau l'équation de continuité qui exprime que la somme algébrique des débits est égale à zéro.

$$A \cdot q = -d \quad \text{pour les } n \text{ noeuds simples} \quad (\text{I-4.1})$$

$$A^f \cdot q = -d^f \quad \text{pour les } f \text{ noeuds réservoirs} \quad (\text{I-4.2})$$

Ces équations sont souvent désignées comme première loi de Kirchhoff.

I-4.2 Conservation de l'énergie

Sur chaque arc i , on exprime que la différence de charge, entre les deux extrémités i_1 et i_2 , est égale à la perte de charge ξ_i et on écrit :

$$\xi_i = h_{i_1} - h_{i_2} \quad \text{si } i \text{ orienté de } i_1 \text{ vers } i_2$$

soit vectoriellement :

$$\xi = {}^t A \cdot h + {}^t A^f \cdot h^f \quad (\text{I-4.3})$$

Le vecteur des pertes de charge ξ est donc une tension au sens de la théorie des graphes (M. Sakarovitch p. 75, 1984).

I-4.3 Equation constitutive

Elle donne une relation entre les débits et les pertes de charge :

$$\xi = \xi(r, q) \quad (\text{I-4.4})$$

I-4.4 Solution d'équilibrage hydraulique

Définition 1-4.4 : On appelle solution d'équilibrage hydraulique :
un vecteur $(r, d, d^f, q, h) \in (\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$ solution du système :

$$\begin{cases} A \cdot q = -d \\ A^f \cdot q = -d^f \\ \xi(r, q) = {}^t A \cdot h + {}^t A^f \cdot h^f \end{cases} \quad (\text{I-4.5})$$

Remarques 1-4.4 :

- Le système d'équation (I-4.5) est constitué d'une partie linéaire : $A \cdot q = -d$ et $A^f \cdot q = -d^f$, et d'une partie non linéaire, la fonction $(r, q) \mapsto \xi(r, q)$ n'étant pas linéaire.
- Le modèle existant ne prend pas en compte les limites physiques du réseau (la vitesse et la pression ne doivent pas être excessives et la pression doit obligatoirement être positive). Le code de calcul possède des alarmes (du non-respect de telles contraintes) qui indiquent le besoin d'installer un limiteur de débit ou un stabilisateur de pression. L'utilisateur du logiciel issu de la modélisation est également averti si la pression en un point se retrouve négative, c'est-à-dire la charge piézométrique plus basse que la côte du sol.

CHAPITRE 2

Le problème de l'Analyse

II LE PROBLEME DE L'ANALYSE

Le problème de l'Analyse consiste à calculer, à partir du système I-4.5, le vecteur q des débits dans les arcs de G , et le vecteur h des charges aux noeuds simples en connaissant les résistances r_i de chacun des arcs, le vecteur d des consommations aux noeuds simples, et le vecteur h^f des niveaux d'eau dans les réservoirs, soit :

$$\text{Chercher } (q, h) \in \mathbb{R}^{a+n} \text{ tels que : } \begin{cases} A \cdot q = -d \\ \xi(q) - {}^t A \cdot h = {}^t A^f \cdot h^f \end{cases}$$

On obtient d^f par : $d^f = -A^f \cdot q$

On tient compte de d^f dans un calcul dynamique, pour la mise à jour des niveaux des réservoirs, si le réservoir se remplit ou se vide pendant une période donnée avec un débit d^f .

Dans tout ce chapitre, r étant connu, on a remplacé $\xi(r, q)$ par $\xi(q)$; on ne calculera pas d^f .

II-1 Décomposition du graphe G

On souhaite par des permutations sur les lignes et sur les colonnes obtenir une structure particulière de la matrice A ; ces transformations correspondent à une numérotation nouvelle des noeuds et des arcs. On extrait du graphe $G(X, U)$ un arbre recouvrant tous les noeuds : $G'(X, U')$ où $\text{card}(U') = N-1$; G' est ensuite réduit à un graphe partiel particulier de n arcs $G''(X, A)$, formé de f composantes connexes avec pour chacune un seul noeud réservoir ; éventuellement, certains réservoirs ne sont à l'issue de cette procédure reliés à aucun autre noeud, et sont autant de composantes connexes.

Nous allons décrire la construction de G' puis de G'' , tout en l'appliquant sur l'exemple II-1 (ci-après) ; nous regarderons ensuite l'effet de cette décomposition sur la matrice A .

II-1.1 Construction du graphe G'

On associe à chaque arc i de U un poids $w(i)$ égal à la résistance hydraulique de l'arc : $w(i) = r_i$; ce poids est (cf. formule I-3.3) fonction du diamètre, de la longueur et de la qualité du matériau. Chercher dans $G = (X, U)$, un arbre de poids minimum, revient à privilégier les conduites importantes, donc de faible résistance.

On suppose disposer de la liste des arcs décrits par une extrémité initiale et une extrémité finale ; on définit l'application $I : U \rightarrow X$ (resp. T) qui associe à chaque arc son extrémité initiale (resp. terminale) ; le graphe G est donc initialement orienté.

Il existe dans G , un graphe partiel : $G' = (X, U')$, une orientation des arcs de G' , et une numérotation des noeuds et des arcs de G' qui satisfont aux propriétés suivantes :

Propriétés II-1.1

- i) G' est un **arbre de poids minimum** dans G .
- ii) G' est une **arborescence** dont la racine est un noeud réservoir R_0 choisi : pour tout sommet x de G' il existe un chemin de R_0 à x .
- iii) L'arc $u \in U'$ a pour numéro, $T(u)$: l'arc de numéro i est incident aux noeud de numéro i .
- iv) Le cocycle élémentaire $\omega(\{x_i\})$ relatif au noeud simple x_i de numéro i dans G' , est constitué d'arcs dont les numéros j sont plus grand ou égal à i .

Preuve :

de i) G étant connexe (cf. § I-2), il existe un arbre recouvrant tous les noeuds ; l'algorithme de Prim donne un arbre de poids minimum : $G' = (X, U')$ (Sakarovitch M. p. 48, 1984) ; si les poids sur les arcs ne sont pas tous différents, G' n'est pas toujours le seul arbre de poids minimum.

ii) est obtenu en réorientant les arcs.

iii) consiste à une renumérotation des noeuds.

iv) est une conséquence de iii) ■

Pour obtenir G' vérifiant les propriétés i), ii), iii) et iv), on peut mettre en oeuvre l'algorithme suivant qui est une modification de l'algorithme de Prim décrit dans Minoux et Bartnik p. 188, 1986.

On sauve la numérotation des noeuds de G' dans le tableau $Nnum$ et celle des arcs de G' dans le tableau $Tnum$; k est le compteur de noeuds déjà recouverts, k_r est celui des noeuds réservoirs autres que R_0 , et k_s celui des noeuds simples ; on suppose que $N > 1$, et qu'un noeud au moins est réservoir ($f \geq 1$).

Algorithme II-1.1 :

i) Initialisations

$X' = \{R_0\}$ et $U = \emptyset$

$k = 1$

$k_s = 0$

$k_r = 0$

$Nnum(R_0) = N$

ii) Etape courante : obtention du $k^{ième}$ arc de G' et recouvrement du $k+1^{ième}$ noeud

Soit le cocycle $\omega(X') = \{(i, j) / (i, j) \in U, i \in X', j \in X - X'\}$

si $\omega(X') = \emptyset$ arrêt car G n'est pas connexe

On recherche dans $\omega(X')$ l'arc de poids minimum (s'il y en a plusieurs, la liste des éléments du cocycle étant lue de façon séquentielle, on prend le premier des éléments du cocycle qui convient)

soit u cet arc

On réoriente l'arc si besoin :

si $I(u) \in X - X'$ et $T(u) \in X'$ faire $num \leftarrow I(u)$ puis $I(u) \leftarrow T(u)$ puis $T(u) \leftarrow num$

Les sous-ensembles X' et U' sont alors augmentés en leur ajoutant respectivement le sommet $T(u)$ et l'arc u :

$$X' \leftarrow X' \cup \{T(u)\}$$

$$U' \leftarrow U' \cup \{u\}$$

On affecte un numéro pour l'arc u et un numéro pour le noeud $T(u)$:

si $T(u)$ est un réservoir : $kr \leftarrow kr + 1$; $Nnum(T(u)) = n + kr$; $numarc(u) = n + kr$

si $T(u)$ est un noeud simple : $ks \leftarrow ks + 1$; $Nnum(T(u)) = ks$; $numarc(u) = ks$

$$k \leftarrow k + 1$$

iii) arrêt si $k = N$ (donc $X' = X$) sinon retour en ii)

Application

Considérons l'exemple II-1 de la figure 11 où 9 arcs, 5 noeuds simples et 3 noeuds réservoirs constituent G :

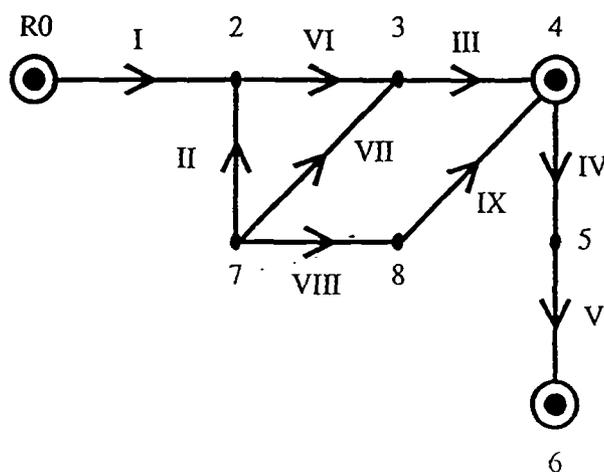


figure 11 : numérotation initiale des éléments du graphe de l'exemple II-1

On dispose de la liste des arcs, de la longueur, du diamètre, de la rugosité de chaque arcs, donc de la résistance ; ces informations sont données dans le tableau de la figure 12 :

arc : u	l(u)	T(u)	L_i (m)	Φ_i (mm)	Chw _i	poids : w(i)
I	R0	2	1000	250	100	1804
II	7	2	750	250	100	1353
III	3	4	1000	250	100	1804
IV	4	5	500	250	100	902
V	5	6	500	250	100	902
VI	2	3	750	250	100	1353
VII	7	3	1120	150	100	24312
VIII	7	8	750	150	100	16280
IX	8	4	1120	250	100	2020

figure 12 : tableau des caractéristiques des arcs de G

Suivons chaque étape de l'algorithme II-1.1 :

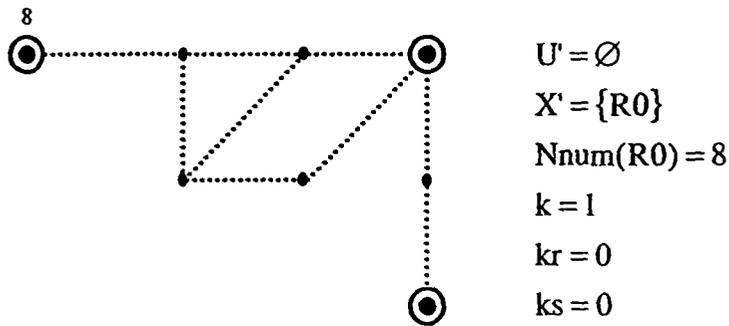


figure 13 : initialisation de l'algorithme II-1.1

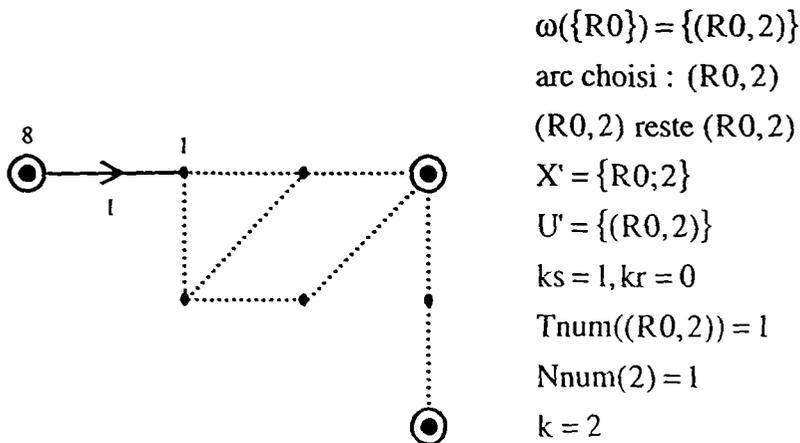


figure 14 : étape courante k=1

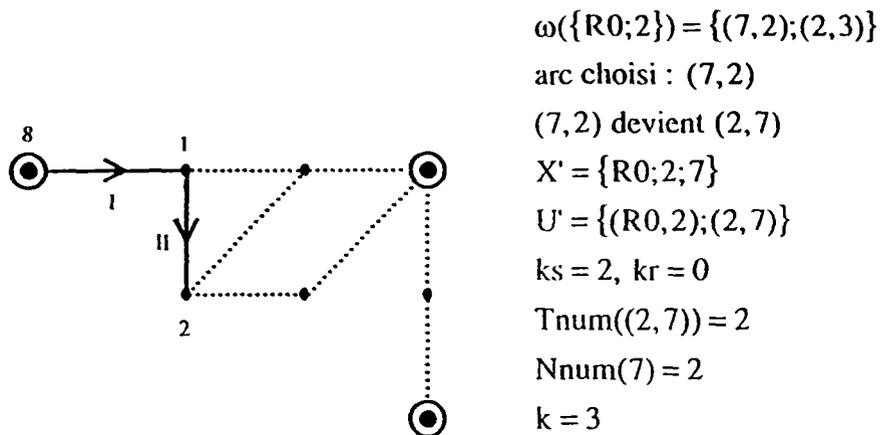


figure 15 : étape courante k=2

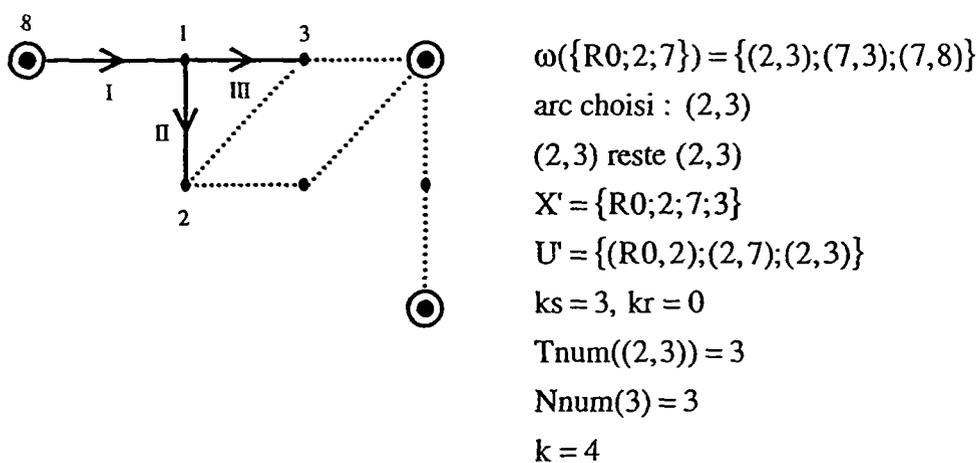


figure 16 : étape courante k=3

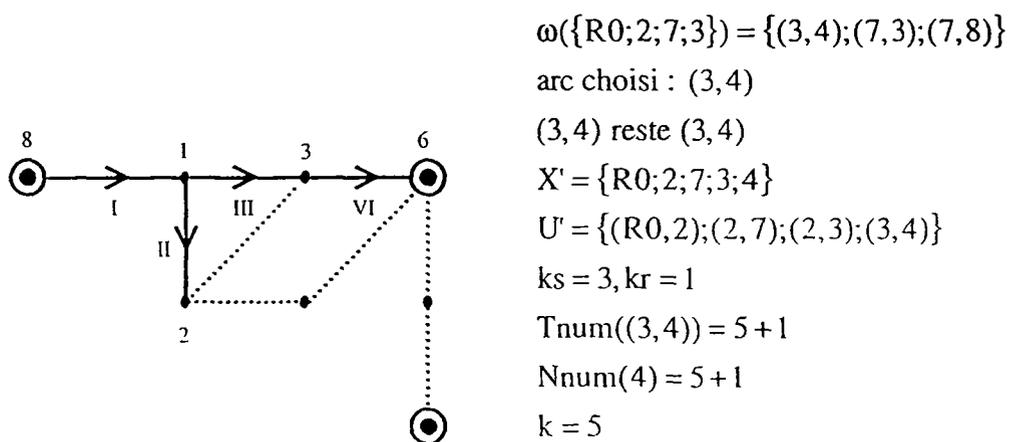
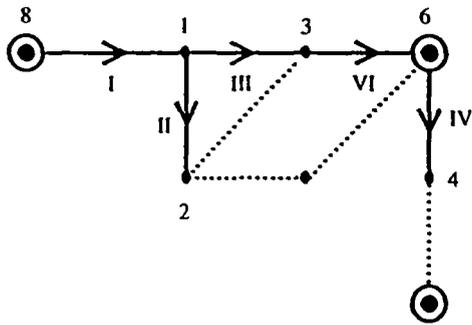
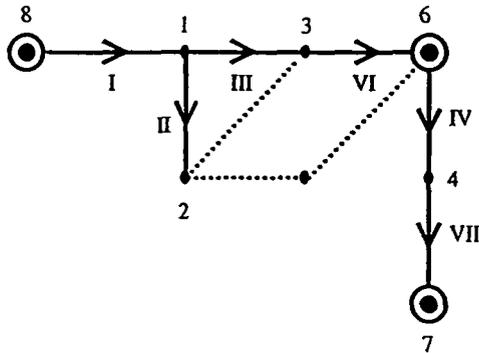


figure 17 : étape courante k=4



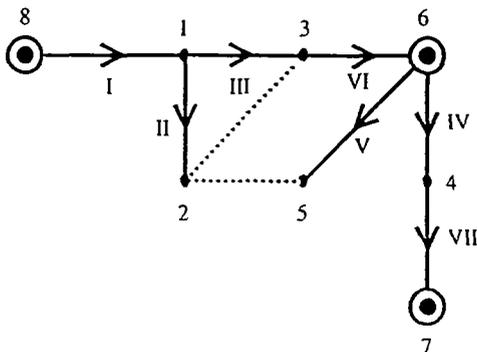
$\omega(\{R0;2;7;3;4\}) = \{(4,5);(7,3);(7,8);(8,4)\}$
 arc choisi : (4,5)
 (4,5) reste (4,5)
 $X' = \{R0;2;7;3;4;5\}$
 $U' = \{(R0,2);(2,7);(2,3);(3,4);(4,5)\}$
 $k_s = 4, k_r = 1$
 $Tnum((4,5)) = 4$
 $Nnum(5) = 4$
 $k = 6$

figure 18 : étape courante k=5



$\omega(\{R0;2;7;3;4;5\}) = \{(5,6);(7,3);(7,8);(8,4)\}$
 arc choisi : (5,6)
 (5,6) reste (5,6)
 $X' = \{R0;2;7;3;4;5;6\}$
 $U' = \{(R0,2);(2,7);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6)\}$
 $k_s = 4, k_r = 2$
 $Tnum((5,6)) = 5 + 2$
 $Nnum(6) = 5 + 2$
 $k = 7$

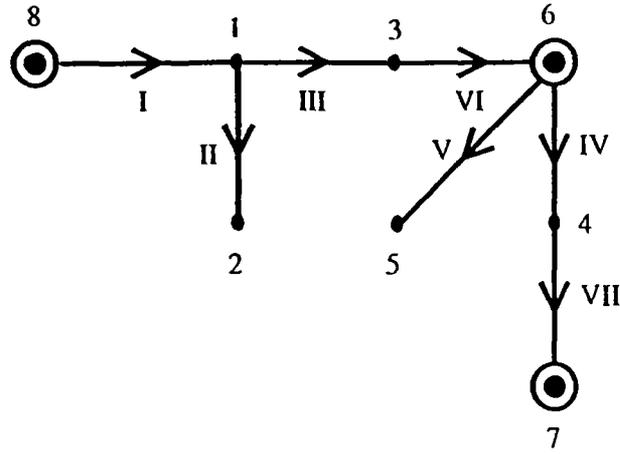
figure 19 : étape courante k=6



$\omega(\{R0;2;7;3;4;5;6\}) = \{(7,3);(7,8);(8,4)\}$
 arc choisi : (8,4)
 (8,4) devient (4,8)
 $X' = \{R0;2;7;3;4;5;6;8\} = X$
 $U' = \{(R0,2);(2,7);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6);(4,8)\}$
 $k_s = 5, k_r = 2$
 $Tnum((4,8)) = 5$
 $Nnum(8) = 5$
 $k = 8$

figure 20 : étape courante k=7 et fin de l'algorithme II-1.1

$G' = (X,U')$ est une arborescence de racine le noeud numéro 8 comme le montre la figure 21. connexe. sans cycle, de 8 noeuds et 7 arcs.

figure 21 : graphe de G'

On peut résumer les résultats de l'algorithme II-1.1 par les tableaux des figures 22 et 23 :

Résultats sur les arcs

arc : u	$l(u)$	$T(u)$	$w(l)$	Tnum	inversé
I	R0	2	1804	1	non
II	2	7	1353	2	oui
III	3	4	1804	6	non
IV	4	5	902	4	non
V	5	6	902	7	non
VI	2	3	1353	3	non
VII	7	3	24312	0	
VIII	7	8	16280	0	
IX	4	8	2020	5	oui

figure 22 : numérotation et sens des arcs de G'

Résultats sur les noeuds

Noeud	R0	2	7	3	4	5	6	8
Nnum	8	1	2	3	6	4	7	5

figure 24 : nouvelle numérotation des noeuds

II-1.2 Construction du graphe G''

Si le nombre de réservoirs f est plus grand que 1, on élimine de U' les arcs dont les numéros dans T_{num} sont de $n+1$ à $N-1$; les arcs ainsi ôtés sont $f-1$ arcs dont l'extrémité terminale est un réservoir ; on obtient ainsi un ensemble A de n arcs. G'' est alors le graphe (X, A) .

Si $f = 1$, $G'' = G'$ et $A = U'$.

Ainsi G'' est un graphe sans cycle, non nécessairement connexe, de $N = n+f$ noeuds et n arcs. Par construction, G'' est une forêt dont chaque composante connexe est soit réduite à un noeud réservoir, soit une arborescence de racine un noeud réservoir.

Notons C le complémentaire de A dans U et $G''' = (X, C)$

Application

Reprenons l'exemple II-1 ; on enlève les arcs dont l'extrémité terminale est un réservoir, c'est à dire les arcs VI et VII de la figure 24 ; on obtient ainsi le graphe de $G'' = (X, A)$ de la figure 25 :

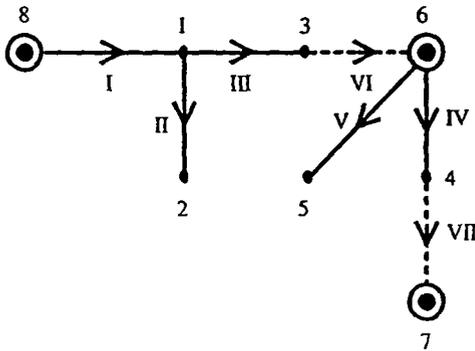


figure 24 : obtention du graphe de G''

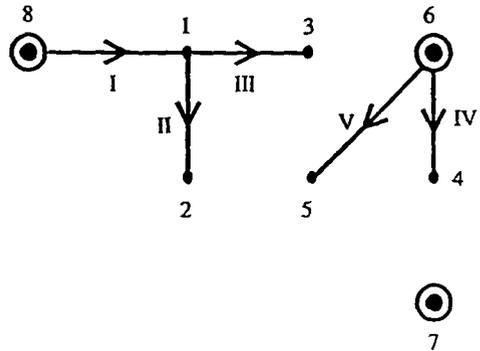


figure 25 : graphe de G''

II-1.3 Application à la matrice d'incidence noeud simple - arc

G' a tous ses arcs renumérotés. Les arcs de G , non cités dans G' , n'ont pour l'instant pas de renumérotation. Afin d'y remédier, on applique l'algorithme suivant :

Algorithme II-1.3 :

$\left\{ \begin{array}{l} k = n + f - 1 \\ \text{pour iarc de } 1 \text{ à } a \text{ alors} \end{array} \right.$

si $Tnum(iarc) = 0$ faire

$k = k + 1$

$Tnum(iarc) = k$

fin si

fin de boucle en iarc

Application

Le tableau de la figure 22 se complète grâce à l'algorithme II-1.3 :

arc : u	$l(u)$	$T(u)$	$w(l)$	Tnum	inversé
I	R0	2	1804	1	non
II	2	7	1353	2	oui
III	3	4	1804	6	non
IV	4	5	902	4	non
V	5	6	902	7	non
VI	2	3	1353	3	non
VII	7	3	24312	8	non
VIII	7	8	16280	9	non
IX	4	8	2020	5	oui

figure 26 : numérotation et sens des arcs de G

Le graphe de G''' est alors :

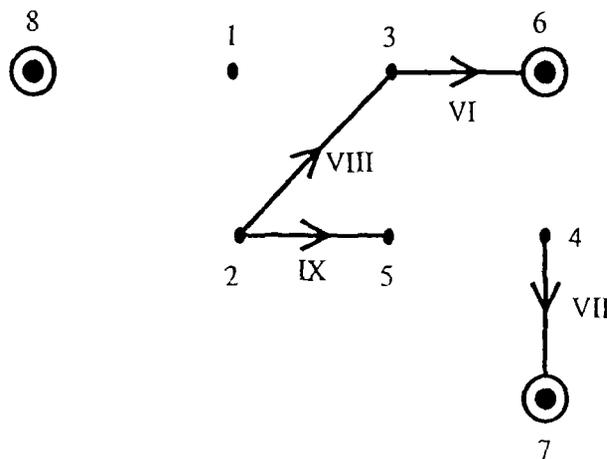


figure 27 : graphe de $G''' = (X, C)$

La numérotation des noeuds, celle des arcs et l'orientation des arcs sont :

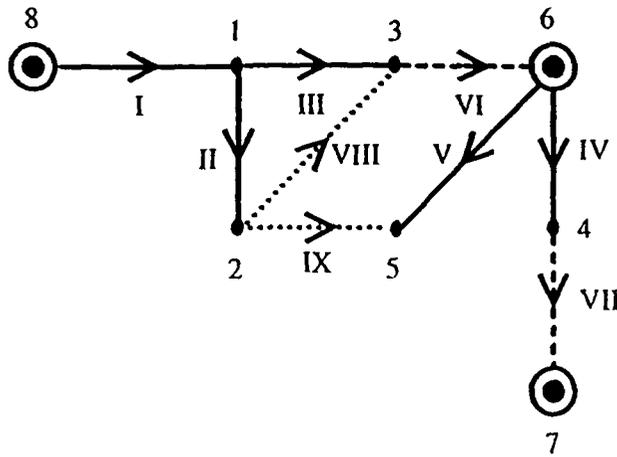


figure 28 : nouvelle numérotation des éléments du graphe de l'exemple II-1

Après permutation de ses lignes et de ses colonnes, et une multiplication éventuelle de certaines de ces colonnes par -1 , A se décompose suivant A_1 et A_2 , comme suit :

$$A = (A_1 \quad A_2) \quad \text{où } A_1 \in \mathbb{M}_{n,n} \text{ et } A_2 \in \mathbb{M}_{n,a-n} \quad (\text{II-1.1})$$

A_1 (resp. A_2) est la matrice d'incidence réduite aux noeuds simples du graphe G'' (resp. G''').

Application

Donnons les matrices A_1 et A_2 correspondantes à la situation de la figure 28 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soient $A^+ \in \mathbb{M}_{a,n}$ la pseudo-inverse ou inverse généralisée de Moore-Penrose de A ; on rappelle que A^+ est la seule matrice à vérifier les quatre conditions de Penrose (Lawson et Hanson p. 38, 1974) :

$$\begin{cases} A \cdot A^+ \cdot A = A \\ A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+ \\ {}^t(A \cdot A^+) = A \cdot A^+ \\ {}^t(A^+ \cdot A) = A^+ \cdot A \end{cases} \quad (\text{II-1.2})$$

On rassemble sur A des propriétés utiles :

Propriétés II-1.3 :

i) A est de rang n : $\text{rang}(A) = n$.

ii) Si $S \in \mathbb{M}_{a,a}$ est symétrique définie positive alors : $A.S.^t A$ est symétrique définie positive.

iii) $A^+ = {}^t A.(A.{}^t A)^{-1}$

Preuve :

de i) Les propriétés II-1.1 assertions iii et iv se traduisent directement sur les lignes de A_1 : A_1 est triangulaire supérieure avec uniquement des -1 sur la diagonale ; A_1 est donc inversible puisque la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une matrice d'incidence noeud-arc correspond au cocycle élémentaire représentatif du noeud x_i de numéro i (Sakarovitch M. p. 79, 1984).

de ii) $A.S.^t A$ est clairement symétrique.

S étant symétrique définie positive, ses valeurs propres sont réelles et strictement positives, et les vecteurs propres associés sont orthogonaux (cf. Lascaux et al. p° 62, 1986). Il existe donc une matrice orthogonale : \mathbb{O} de changement de base et a valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_a > 0$ telles que :

$$S = \mathbb{O}.D.{}^t \mathbb{O} \text{ où } D = \text{diag}(\lambda_i) \quad (\text{II-1.3})$$

Par conséquent :

$$\langle A.S.^t A.y, y \rangle_n \geq \lambda_a \cdot \|{}^t A_1.y\|_2^2 \quad (\text{II-1.4})$$

En effet,

$$\langle A.S.^t A.y, y \rangle_n = \langle (\mathbb{O}.D.{}^t \mathbb{O}).{}^t A.y, {}^t A.y \rangle_a = \langle D.{}^t \mathbb{O}.{}^t A.y, {}^t \mathbb{O}.{}^t A.y \rangle_a \geq \lambda_a \cdot \|{}^t \mathbb{O}.{}^t A.y\|_2^2$$

et donc :

$$\langle A.S.^t A.y, y \rangle_n \geq \lambda_a \cdot \|{}^t A.y\|_2^2 = \lambda_a \cdot \|{}^t A_1.y\|_2^2 + \lambda_a \cdot \|{}^t A_2.y\|_2^2 \geq \lambda_a \cdot \|{}^t A_1.y\|_2^2$$

On déduit de l'inégalité (II-1.4) et du fait que A_1 est inversible que $A.S. {}^t A$ est définie positive.

iii) ${}^t A.(A. {}^t A)^{-1}$ est bien définie d'après ii) et vérifie les quatre conditions de Penrose décrites en II-1.2 ■

II-1.4 Matrice d'incidence maille-arc augmentée

Nous allons définir une matrice M_0 qui se construit en fonction de A_1 et A_2 , dont les $a-n$ lignes correspondent soit à des chaînes entre noeuds réservoirs, soit à des cycles.

Définition II-1.4 : On appelle matrice d'incidence maille-arc augmentée, la matrice $M_0 \in \mathbb{M}_{a-n,a}$ telle que : $M_0 = \left(-{}^t(A_1^{-1} \cdot A_2) \mid I_{a-n} \right)$

Application

Appliquons à l'exemple II-1 ; A_1 et A_2 sont ceux du II-1.3 :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur ligne de M_0 correspond ici au chemin entre les réservoirs 8 et 6 : (I,III,VI) ; le troisième vecteur-ligne représente le cycle élémentaire (II,III,VIII) comme le montre la figure 29 :

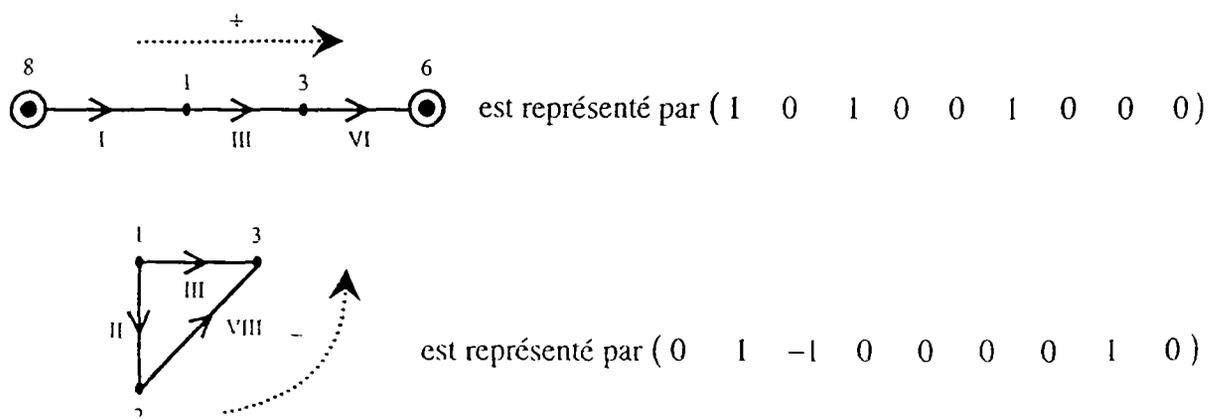


figure 29 : interprétation de deux lignes de la matrice M_0

On se propose de recueillir quelques propriétés utiles pour la suite de l'exposé :

Propriétés II-1.4 :

On suppose $S \in \mathbb{M}_{a,a}$ symétrique définie positive.

M_0 vérifie :

i) $\text{rang}(M_0) = a - n.$

ii) $M_0 \cdot S \cdot {}^t M_0$ est symétrique définie positive.

iii) $M_0^+ = {}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot {}^t M_0)^{-1}.$

iv) $\forall z \in \mathbb{R}^{a-n}, \|{}^t M_0 \cdot z\|_2 \geq \|z\|_2.$

v) M_0 ne contient que des 0 des 1 et des -1.

A et M_0 vérifient :

vi) $A \cdot {}^t M_0 = 0_{n,a-n}$

vii) Les colonnes de ${}^t A$ et de $S \cdot {}^t M_0$ forment un système de a vecteurs libres :

$$\forall x \in \mathbb{R}^a, \exists ! y \in \mathbb{R}^n, \exists ! z \in \mathbb{R}^{a-n} / x = {}^t A \cdot y + S \cdot {}^t M_0 \cdot z$$

viii) $I_a = {}^t A \cdot (A \cdot S^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot S^{-1} + S \cdot {}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot S \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0$

ix) Si $S = I_a$ et $x \in \mathbb{R}^a$ alors :
$$\begin{cases} A \cdot x = 0_n & \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R}^{a-n} / x = {}^t M_0 \cdot z \\ M_0 \cdot x = 0_{a-n} & \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n / x = {}^t A \cdot y \end{cases}$$

Preuve :

de i) Par définition de M_0 son rang est $a-n$.

de ii) et iii) Les démonstrations sont analogues à celles des même assertions sur A (propriétés II-1.3).

iv) vient de $\|{}^t M_0 \cdot z\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -A_1^{-1} \cdot A_2 \cdot z \\ z \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \|z\|_2$

v est une conséquence du lemme II-1.4 ci-après dont la démonstration est en annexe (cf. annexe 1).

Lemme II-1.4

Les $a-n$ lignes de M_0 sont des vecteurs représentatifs de $a-n$ cycles ou chaînes entre réservoirs de G .

de vi) On se sert des décompositions de A et de M_0 sur \mathbb{A} et C :

$$A \cdot {}^t M_0 = (A_1 \quad A_2) \cdot \begin{pmatrix} -A_1^{-1} \cdot A_2 \\ I_{a-n} \end{pmatrix} = -A_2 + A_2 = 0_{a-n}$$

de vii) : Cherchons pour le montrer y et z tels que $0_a = {}^t A \cdot y + S \cdot {}^t M_0 \cdot z$; en multipliant à gauche par $(A \cdot S^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot S^{-1}$ et en se servant de la propriété vi, on obtient $y = 0_n$, de même $z = 0_{a-n}$; d'où vii). Remarquons qu'alors $\mathbb{R}^a = \text{Im } {}^t A \oplus \text{Im}(S \cdot {}^t M_0)$, i.e. $\text{Im } {}^t A$ et $\text{Im}(S \cdot {}^t M_0)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^a ; de plus, de l'unicité de la décomposition de 0_a on déduit $\ker({}^t A) = \{0_n\}$ et $\ker(S \cdot {}^t M_0) = \{0_{a-n}\}$.

de viii) : vii) étant établi, en utilisant la propriété vi, on obtient $y = (A \cdot S^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot S^{-1} \cdot x$ et $z = (M_0 \cdot S \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot x$, d'où l'égalité viii).

ix est une conséquences immédiates de vii) ■

II-2 Les formulations classiques du problème d'analyse

La décomposition de la matrice d'incidence noeud-arc réduite aux noeuds simples, suivant A et C , et les propriétés de la matrice maille-arc augmentée permettent d'établir des relations entre les variables conduisant à différentes écritures du problème. Nous nous proposons d'énoncer ces formulations de façon matricielle et de démontrer leur équivalence, ce qui est sans doute connu mais épars dans les différents articles bibliographiques.

II-2.1 Formulation en h et q

Le problème dans sa formulation la plus ancienne et la plus naturelle consiste en la résolution du système des équations de conservation de la masse et de conservation de l'énergie. C'est la formulation initiale :

On cherche $q \in \mathbb{R}^a$ et $h \in \mathbb{R}^n$, ($d \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^a$ et $h^f \in \mathbb{R}^f$ étant connus) solutions du système :

$$(HQ) \quad \begin{cases} A \cdot q = -d & \text{(II-2.1a)} \\ \xi(q) - {}^t A \cdot h = {}^t A^f \cdot h^f & \text{(II-2.1b)} \end{cases}$$

Nous allons expliciter les formulations classiques qui se déduisent de (HQ).

II-2.2 Formulation en q

On souhaite une formulation sur les seuls débits q .

Si l'on multiplie à gauche l'équation (II-2.1b) par M_0 en utilisant la propriété $M_0 \cdot {}^t A = 0_{a \times n}$ (II-1.4vi), on obtient alors la deuxième loi de Kirchhoff :

$$M_0 \cdot \xi(q) = M_0 \cdot {}^t A^f \cdot h^f \quad \text{(II-2.2)}$$

Le problème en q consiste à chercher $q \in \mathbb{R}^a$ ($d \in \mathbb{R}^n$ et $h^f \in \mathbb{R}^f$ étant connus) tel que :

$$(Q) \quad \begin{cases} A \cdot q = -d \\ M_0 \cdot \xi(q) = M_0 \cdot {}^t A^f \cdot h^f \end{cases}$$

Ayant q , on calcule h par (II-2.1b), i.e. :

$$h = (A \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \left(\xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f \right) \quad \text{(II-2.3)}$$

II-2.3 Formulation réduite

On souhaite obtenir une formulation minimisant les composantes du vecteur inconnu des débits.

Posons $q = \begin{pmatrix} q^A \\ q^C \end{pmatrix}$ où q^A désigne les composantes de q sur A et q^C les composantes de q sur C .

Soit φ l'application définie par :

$$\varphi: \mathbb{R}^{a-n} \rightarrow \mathbb{R}^a \quad \text{où } q_d = \begin{pmatrix} -A_1^{-1} \cdot d \\ 0_{a-n} \end{pmatrix}$$

$$q^C \mapsto \varphi(q^C) = {}^t M_0 \cdot q^C + q_d$$

Théorème II-2.3 : L'ensemble des q vérifiant $A \cdot q + d = 0_n$ est identique à l'ensemble des q qui ne dépendent que des débits sur les arcs de C par la relation $q = {}^t M_0 \cdot q^C + q_d$

Preuve : Il suffit de montrer que $\varphi(\mathbb{R}^{a-n}) = \{q \in \mathbb{R}^a / A \cdot q + d = 0_n\}$

i) Si $q \in \mathbb{R}^a$ est tel que $A \cdot q + d = 0_n$, la décomposition de A et celle de q sur A et C permettent d'écrire :

$$(A_1 \quad A_2) \cdot \begin{pmatrix} q^A \\ q^C \end{pmatrix} = -d$$

donc :

$$q^A = -A_1^{-1} \cdot (d + A_2 \cdot q^C)$$

et vectoriellement : $q = {}^t M_0 \cdot q^C + q_d$ avec $q_d = \begin{pmatrix} -A_1^{-1} \cdot d \\ 0_{a-n} \end{pmatrix}$ (II-2.4)

d'où :

$$\varphi(\mathbb{R}^{a-n}) \supset \{q \in \mathbb{R}^a / A \cdot q + d = 0_n\}$$

ii) Soit $q^C \in \mathbb{R}^{a-n}$, alors le vecteur $q = {}^t M_0 \cdot q^C + q_d$ satisfait $A \cdot q + d = 0_n$:

Il suffit de prémultiplier par A le vecteur q : $A \cdot q = A \cdot ({}^t M_0 \cdot q^C + q_d) = A \cdot q_d = -d$,
d'après la propriété II-1.4vi et la décomposition de A sur A et C .

D'où $\varphi(\mathbb{R}^{a-n}) \subset \{q \in \mathbb{R}^a / A \cdot q + d = 0_n\}$ ■

Corollaire II-2.3 : $\varphi: \mathbb{R}^{a-n} \rightarrow \{q \in \mathbb{R}^a / A \cdot q + d = 0_n\}$ est une bijection.

Preuve : φ est affine ; la matrice de son application linéaire associée est tM_0 ; φ est donc injective de $\mathbb{R}^{a-n} \rightarrow \mathbb{R}^a$ puisque $\text{rang}({}^tM_0) = a - n$ (propriété II-1.4i) ; φ est clairement surjective (théorème II-2.3) ■

La détermination de $q^c \in \mathbb{R}^{a-n}$ permet le calcul de $q \in \mathbb{R}^a$ vérifiant (II-2.1a) ; le problème peut donc se formuler avec un nombre réduit de variables.

On appelle **problème réduit** de l'Analyse et on le notera (R) : chercher $q^c \in \mathbb{R}^{a-n}$ (q_d et h^f étant connus) tel que :

$$(R) \quad M_0 \cdot \xi({}^tM_0 \cdot q^c + q_d) = M_0 \cdot {}^tA^f \cdot h^f \quad (II-2.5)$$

(q,h) se déduit de q^c par :

$$\begin{cases} q = {}^tM_0 \cdot q^c + q_d \\ h = (A \cdot {}^tA)^{-1} \cdot A \left(\xi({}^tM_0 \cdot q^c + q_d) - {}^tA^f \cdot h^f \right) \end{cases}$$

II-2.4 Formulation en h

On souhaite obtenir une formulation sur les seules charges aux noeuds simples.

Remarquons que la fonction ξ étant inversible (propriété I-3.5d), l'équation (II-2.1b) donne une expression de q en fonction de h :

$$q = \xi^{-1}({}^tA \cdot h + {}^tA^f \cdot h^f) \quad (II-2.6)$$

En substituant q dans (II-2.1a), on obtient :

$$A \cdot \xi^{-1}({}^tA \cdot h + {}^tA^f \cdot h^f) = -d \quad (II-2.7)$$

Le problème en h consiste à chercher $h \in \mathbb{R}^n$, tel que :

$$(H) \quad A \cdot \xi^{-1}({}^tA \cdot h + {}^tA^f \cdot h^f) = -d$$

puis on détermine q par : $q = \xi^{-1}({}^tA \cdot h + {}^tA^f \cdot h^f)$.

II-2.5 Equivalence des formulations classiques

Théorème II-2.5 : Les formulations (HQ), (Q) (R) et (H) sont équivalentes

Preuve

de (HQ) \Leftrightarrow (H) : Si (q,h) est solution de (HQ) alors h est solution (H) et q se déduit de h par (II-2.6). Inversement si (q,h) vérifient les équations (II-2.6) et (II-2.7), soit :

$$\begin{cases} q = \xi^{-1}({}^t A \cdot h + {}^t A^f \cdot h^f) \\ A \cdot \xi^{-1}({}^t A \cdot h + {}^t A^f \cdot h^f) = -d \end{cases}$$

ξ étant inversible alors (q,h) est solution de (HQ).

de (HQ) \Leftrightarrow (Q) \Leftrightarrow (R) : Nous avons montré que si (q,h) est solution de (HQ) alors q est solution de (Q) et que si q est solution de (Q) la variable réduite q^c est solution de (R). Montrons que si q^c est solution de (R), alors en posant

$$\begin{cases} q = {}^t M_0 \cdot q^c + q_d \\ h = (A \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot (\xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f) \end{cases} \quad \text{(II-2.8)}$$

(q,h) est solution de (HQ).

i) q vérifie : $A \cdot q = -d$ d'après le théorème II-2.3.

ii) En prémultipliant h par $A \cdot {}^t A$

$$A \cdot {}^t A \cdot h = A \cdot {}^t A \cdot (A \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot (\xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f) = A \cdot (\xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f)$$

on déduit : $A \cdot (\xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h) = 0_n$

Il existe donc $z \in \mathbb{R}^{a-n} / \xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h = {}^t M_0 \cdot z$ (propriété II-1.4ix)

d'où en prémultipliant par M_0 et en remplaçant q par son expression en fonction de q^c :

$$M_0 \cdot (\xi({}^t M_0 \cdot q^c + q_d) - {}^t A \cdot h^f) = M_0 \cdot {}^t M_0 \cdot z$$

Comme q^c vérifie (II-2.5), le membre de droite est nulle et comme $M_0 \cdot {}^t M_0$ est inversible on déduit que z est nul : l'équation (II-2.1b) est donc vérifiée ■

II-3 Formulations sous forme d'un problème d'optimisation

II-3.1 Intérêts

Les premiers algorithmes s'attachaient à rechercher les débits ou les charges ou un nombre réduit de débits comme les solutions des équations du problème d'équilibrage. ξ n'est pas fortement convexe ou elliptique et sa jacobienne n'est pas partout inversible ; aussi, n'est-on pas assuré de la convergence des algorithmes de type relaxation ou de type Newton-Raphson pour la résolution du problème de l'Analyse. Des problèmes numériques comme nous le précisons dans un prochain chapitre sont rapportés, mais non expliqués. Par ailleurs, plusieurs auteurs, comme A. D'Auriac (1947), utilisaient une analogie entre les réseaux électriques et les réseaux d'eau, afin de justifier de l'unicité d'une solution du problème de l'Analyse.

Depuis les travaux de Collins et al. (1978), il est connu que l'on peut plonger le problème de l'Analyse dans un problème d'optimisation convexe dans l'espace des débits sous des contraintes affines. Carpentier et al. (1985) ont remarqué que les charges s'interprètent comme les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de conservation de la masse sur les débits ; ce qui leur a permis de définir le lagrangien et le problème dual associés pour lesquels les débits sont les variables primales et les charges aux noeuds simples les variables duales.

Un premier gain est la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution sous des hypothèses claires.

On peut ensuite envisager trois grandes classes de méthodes dans lesquelles s'interprètent la plupart des algorithmes : des méthodes primales, des méthodes duales, et des méthodes primales-duales. C'est l'implémentation de ces trois méthodes qui change et qui différencie les nombreuses algorithmes.

Enfin, en se plaçant dans le cadre d'un problème d'optimisation on bénéficie d'algorithmes ayant de bonnes propriétés de convergence.

II-3.2 Travaux antérieurs

Collins et al. en 1978 sont à notre connaissance les premiers à associer les conditions de Kuhn et Tucker d'un problème d'optimisation convexe dans l'espace des débits, le **Content Model**, au problème de l'Analyse. Ils présentent aussi un problème d'optimisation convexe en fonction des pertes de charge : le **Co-Content Model**. Nous

limiterons notre exposé au Content Model et son développement, en utilisant les notations de chaque auteur.

a) Le Content Model

Pour pallier des difficultés de notation ils supposent le sens du débit connu dans chaque arc ; puis, pour interpréter l'énergie potentielle comme de l'énergie perdue par effet de friction, ils ajoutent au graphe G un noeud-source connecté à chaque réservoir par deux arcs dans chacun desquels le sens du débit est connu ; ils obtiennent ainsi le graphe augmenté G^* . Ils adoptent les notations :

- E : désigne l'ensemble des arcs de G ;
 E_1 : l'ensemble des arcs ajoutés ;
 N : l'ensemble des noeuds de G ;
 $\{g\}$: le singleton dont le seul élément est le noeud-source ;
 Q_{ij} : le débit dans l'arc (i,j) ;
 H_n^* : la charge au noeud à charge fixée n ;
 $\Phi_{ij}(Q_{ij})$: la loi de perte de charge en fonction du débit sur (i,j) ;
 r_n : la demande au noeud n .

Ainsi $G=(N,E)$ et $G^*=(N\cup\{g\},E\cup E_1)$

Le Content Model s'énonce alors :

$$\text{minimiser : } \sum_{(i,j)\in E} \left\{ \int_0^{Q_{ij}} \Phi_{ij}(t) dt \right\} - \sum_{(g,n)\in E_1} \left\{ \int_0^{Q_{gn}} H_n^* dt \right\} + \sum_{(n,g)\in E_1} \left\{ \int_0^{Q_{ng}} H_n^* dt \right\}$$

$$\text{SOUS : } \sum_{(n,j)\in E\cup E_1} Q_{nj} - \sum_{(i,n)\in E\cup E_1} Q_{in} = r_n, \forall n \in N \cup \{g\}$$

$$Q_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in E \cup E_1$$

Le vecteur d'état est le vecteur des $a+2f$ débits sur tous les arcs. Il y a $n+f+1$ contraintes égalité exprimant la conservation de la masse et $a+2f$ contraintes de positivité sur les débits.

La solution optimale vérifie alors le principe de moindre action : les demandes aux noeuds simples et les charges aux noeuds réservoirs étant fixes, la puissance mise en oeuvre pour que le débit s'installe dans les $a+2f$ conduites en respectant l'équilibre au noeuds est minimale, sachant que l'énergie est dissipée par effet de friction.

Ils ont montré que le Content Model est équivalent au problème de l'Analyse sous certaines conditions : la solution optimale doit être strictement positive, i.e, il faut que les contraintes de positivité sur les débits ne soient pas saturées.

Remarquons qu'avec d'autres notations comme celles de Carpentier et al. (1985) on peut facilement réduire le nombre des inconnues, et se passer des contraintes de positivité sur les débits sans lesquelles ce problème d'optimisation est complètement équivalent au problème de l'Analyse.

b) Le modèle sans contraintes de positivité sur tous les débits

Carpentier et al. (1985), augmentent le graphe G , pour que chaque réservoir n'ait qu'un seul arc adjacent (remarque I-2.1). Chaque mise "en antenne" d'un réservoir nécessite l'ajout d'un arc de résistance presque nulle, et l'ajout d'un noeud simple.

Ils proposent après réduction de la contrainte de conservation de la masse sur les réservoirs le problème d'optimisation :

$$[\text{PP}^1] \quad \min_{q \in \mathbb{R}^{N_a}} f(q) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \int_0^{q_\alpha} \varphi_\alpha(\tau) d\tau - \sum_{s=1}^{N_r} \pi_s \cdot q_{\alpha_s} \cdot \sigma_s$$

$$\text{sous } b_i = \sum_{\alpha \in \Gamma_i} q_\alpha \cdot \sigma_{ij}, \quad 1 \leq i \leq M$$

où :

- Γ : l'ensemble des arcs ;
- Γ_i : l'ensemble des arcs dont le noeud i est une extrémité ;
- N_a : le nombre d'arcs ;
- N_r : le nombre de réservoirs ;
- M : le nombre de noeuds simples ;
- σ_{ij} : 1 si l'arc (i,j) est orienté de i vers j et -1 sinon ;

σ_s	:	1 si l'arc α_s d'extrémité le réservoir s , est orienté sortant de s ; -1 sinon.
$\varphi_\alpha(q_\alpha)$:	loi de perte de charge en fonction du débit sur l'arc orienté α ;
q	:	le vecteur des débits dans les arcs ;
π_s	:	la charge au réservoir s ;
b_i	:	la consommation au noeud i .

Ils montrent alors que le problème [PP¹] possède une unique solution qui vérifie les équations de l'équilibrage hydraulique du problème de l'Analyse. Puis, ils présentent le lagrangien associé à ce problème d'optimisation, son problème dual et le problème d'optimisation primal réduit (après réduction de la contrainte affine).

En introduisant nos notations, réécrivons cette dernière formulation, sans toutefois mettre les réservoirs en antenne, et ceci grâce à la matrice d'incidence noeud arc réduite aux noeuds simples et sans faire la distinction entre consommations au noeud réservoir et arrivée ou sortie d'eau en ce noeud. En utilisant le graphe G au lieu du graphe augmenté, on réduit ainsi le nombre des inconnues ; l'écriture matricielle permet sans doute une meilleure manipulation des équations.

II-3.3 Formulation primale

a) Formulation matricielle

En reprenant les notations matricielles que nous avons adoptées, on obtient ainsi :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } q \in \mathbb{R}^a / \\ f(q) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^a \\ \text{sous la contrainte :} \\ -A \cdot x - d = 0_n \end{array} \right.$$

$$\text{où } f \text{ est la fonction définie par : } f(x) = \sum_{i=1}^a \int_0^{x_i} \xi_i(u_i) du_i - \langle {}^t A^1 \cdot h^f, x \rangle_s \quad (II-3.1)$$

Une formulation matricielle semblable a été introduite par Todini et Pilati (1987).

On appelle (P) le problème d'optimisation **primal** ; x est appelée variable primale.

b) Interprétation physique de la formulation

Appelons 'état zéro', un état d'équilibre où les demandes aux noeuds simples sont nulles et les charges aux réservoirs sont toutes à une même hauteur servant de référence pour les charges ; ainsi, les débits dans les arcs et les charges aux noeuds simples sont nuls. Si nous imposons de nouvelles conditions aux limites : un vecteur de demandes et un vecteur de charges aux noeuds réservoirs non tous nuls, après une période transitoire, l'écoulement dans les conduites va devenir permanent, et un nouvel état d'équilibre s'instaurer. On se propose d'interpréter $f(q)$ du point de vue énergétique.

Dans ce qui suit, les **puissances** sont rapportées à l'unité de poids (on les a divisées par : $\rho \cdot g$).

Une demande $d \in \mathbb{R}^n$ est imposée aux n noeuds simples ; le niveau dans les f réservoirs $h^f \in \mathbb{R}^f$ est maintenu constant.

On fait un bilan énergétique des échanges aux réservoirs, aux noeuds simples, et dans les arcs en cherchant à tout exprimer en fonction du vecteur débit q et du vecteur charge h , les solutions du problème de l'Analyse.

Pour les noeuds réservoirs

La puissance nécessaire est apportée au fluide par le milieu extérieur pour maintenir les charges aux noeuds réservoir fixes par rapport au plan horizontal de référence s'exprime en fonction de h^f et q comme :

$$\langle {}^t A^f \cdot h^f, q \rangle_a$$

Pour les noeuds simples

La puissance fournie par le fluide au milieu extérieur pour satisfaire d est :

$$\sum_{i=1}^a h_i \cdot d_i = \langle h, d \rangle_n$$

Pour les arcs

L'énergie véhiculée et apportée au tronçon par le débit q_i est $\bar{\xi}_i(q_i) \cdot q_i$: dans le cas d'une perte linéaire (resp. singulière), elle correspond à une puissance dissipée par

effet de friction (resp. par une singularité) ; il peut aussi s'agir d'un gain de puissance amené par une pompe.

$$\sum_{i=1}^a \xi_i(q_i) \cdot q_i = \langle \xi(q), q \rangle_a :$$

représente donc la puissance à mettre en oeuvre en régime permanent pour vaincre l'effet de friction.

Bilan énergétique complet

Vérifions que la somme des énergies reçues et des énergies données est nulle si (q, h) est solution de (HQ) :

$$\langle \xi(q), q \rangle_a + \langle h, d \rangle_n - \langle {}^t A^f \cdot h^f, q \rangle_a = B$$

Comme $d = -A \cdot q$ alors $\langle h, d \rangle_n = -\langle {}^t A \cdot h, q \rangle_a$

donc $B = \langle \xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h, q \rangle_a = \langle 0_a, q \rangle_a = 0$

Construction du critère

Si on perturbe la demande aux noeuds simple de façon infinitésimale (d augmentant de δd), les charges h^f étant maintenues constantes, on provoque le passage d'un état d'équilibre q à un état d'équilibre voisin $q + \delta q$; la différence de puissance entre les deux situations est si on ne tient compte que de ce qui se passe sur les arcs et sur les réservoirs :

$$\sum_{i=1}^a \left(\xi_i(q_i) - ({}^t A^f h^f)_i \right) \cdot \delta q_i$$

Pour prendre en compte les noeuds simples on impose $\begin{cases} A \cdot q = -d \\ A \cdot \delta q = -\delta d \end{cases}$

En passant à la limite, entre q^1 et q^2 par une succession d'états d'équilibres infiniment voisins la somme de ces bilans partiels devient :

$$f(q^2) - f(q^1) = \sum_{i=1}^a \int_{q_i^1}^{q_i^2} \xi_i(u_i) du_i - \langle {}^t A^f \cdot h^f, q^2 - q^1 \rangle_a$$

avec $A \cdot q^i = -d^i$, pour $i = 1, 2$

Ce qui permet d'interpréter $f(q)$ comme la puissance mise en oeuvre dans les arcs et au niveau des réservoirs pour passer de l'état zéro au nouvel équilibre. Ce bilan semble incomplet puisque qu'il manque les noeuds simples. Il faut alors que q minimise f sous des contraintes de conservation de la masse aux noeuds simples.

c) Propriétés de la fonction primale f

Propriétés II-3.3 :

i) f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^a ; son gradient et sa matrice hessienne s'expriment respectivement par :

$$\nabla f(x) = \xi(x) - {}^t A^f \cdot h^f, \forall x \in \mathbb{R}^a \quad (\text{II-3.2})$$

$$\text{Hess}(f)(x) = D(x), \forall x \in \mathbb{R}^a \quad (\text{II-3.3})$$

où $D(x) = \text{diag}(\xi_i'(x_i))$ est la jacobienne de ξ en x , i.e. la matrice diagonale d'élément diagonal $\xi_i'(x_i)$.

ii) f est strictement convexe.

iii) f est coercive (au sens de P. G. Ciarlet 1985, p. 175) : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Preuve :

de i) Comme ξ est de classe C^1 (propriété I-3.5a), on déduit que f est de classe C^2 , et on calcule facilement $\nabla f(x)$ et $\text{Hess}(f)(x)$.

de ii) ∇f est strictement monotone (propriété I-3.5b), donc f est strictement convexe (Ortega et Rheinbolt 1970, p. 86).

iii) est une conséquence de la propriété I-3.5c. ■

d) Conditions nécessaires d'extremum relatif lié

Nous donnons ici, un premier lien, entre une solution de (P) et une solution de (HQ).

Théorème II-3.3 :

Si q est solution de (P), $\exists ! h \in \mathbb{R}^n$ tel que (q, h) vérifie (HQ) :

$$(HQ) \quad \begin{cases} \xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h = 0_a \\ -A \cdot q - d = 0_n \end{cases}$$

Preuve :

f est différentiable (II-3.3a) ; la jacobienne des contraintes : $-A$, est de rang maximal ; on peut donc appliquer le théorème de Lagrange (P. G. Ciarlet p. 148, 1985) : si q est solution de (P) alors nécessairement il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^n$ défini de façon **unique**, tel que :

$$\nabla f(q) - {}^t A \cdot \lambda = \xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot \lambda = 0_a$$

Cette équation, associée à la contrainte $-A \cdot q - d = 0_n$, constitue le système formant le problème (HQ). Si q est solution optimale de (P) alors (q, λ) est solution de (HQ) ; puisque λ est défini de façon unique, il est donc égale à h , le vecteur charge aux noeuds simples. ■

h s'interprète donc comme une **variable duale** associée aux n contraintes de conservation de la masse sur les noeuds simples ; dans ce qui suit λ sera remplacée par h .

Il est possible de réécrire (P) sous la forme d'un problème équivalent sans contrainte qui présente un bilan énergétique complet et ceci en fonction d'un nombre réduit de variable.

II-3.4 Formulation primale réduite

Pour le problème de l'Analyse, le mouvement du fluide dans les conduites est entièrement déterminé par la connaissance d'un nombre réduit de variables, les a - n débits sur C qui constituent q^c (cf. théorème II-2.5 - Sur l'équivalence des différentes formulations non énergétiques) : comme pour la méthode des "courants de mailles" en électrocinétique, la $i^{\text{ème}}$ composante de q^c s'interprète comme le "**débit de maille**", sur la

chaîne entre deux réservoirs ou le cycle, correspondant au $i^{\text{ème}}$ vecteur-ligne de M_0 ; un débit sur un arc s'obtient comme la somme (algébrique) des débits de mailles circulant dans les différentes chaînes entre réservoirs ou cycles auxquels il appartient : $q = {}^t M_0 \cdot q^c$, plus un débit q_d tenant compte de d .

On appelle **problème primal réduit**, le problème d'optimisation :

$$(\text{Pr}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } q^c \in \mathbb{R}^{a-n} \\ J(q^c) \leq J(z), \forall z \in \mathbb{R}^{a-n} \\ \text{où } J = f \circ \varphi \end{array} \right.$$

f est défini en II-3.1 et $\varphi(z) = {}^t M_0 \cdot z + q_d$.

Il suit de la définition de J que :

$$J(z) = \sum_{i=1}^a \int_0^{\varphi_i(z)} \xi_i(u_i) du_i - \langle {}^t A^f \cdot h^f, \varphi(z) \rangle_a$$

Explicitons J sous une forme qui nous sera utile pour l'interprétation physique de la formulation réduite.

Pour cela, effectuons le changement de variable $u(\alpha) = \varphi(\alpha z) = \alpha {}^t M_0 \cdot z + q_d$ et posons :

$$u_i(\alpha) = \varphi_i(\alpha z) \in \mathbb{R}, \text{ pour } z \neq 0_{a-n} \text{ fixé et } \alpha \in \mathbb{R}$$

u_i est affine et $u_i'(\alpha) = \varphi_i'(\alpha z)(z)$, donc :

$$\int_{\varphi_i(0)}^{\varphi_i(z)} \xi_i(u_i) du_i = \int_0^1 \xi_i(\varphi_i(\alpha z)) \langle \nabla \varphi_i(\alpha z), z \rangle_{a-n} d\alpha = \int_0^1 \xi_i(\varphi_i(\alpha z)) \langle M_0 \cdot e_i, z \rangle_{a-n} d\alpha$$

Remarquons ensuite que :

$$\sum_{i=1}^a \int_{\varphi_i(0)}^{\varphi_i(z)} \xi_i(u_i) du_i = \int_0^1 \sum_{i=1}^a \xi_i(\varphi_i(\alpha z)) \langle e_i, {}^t M_0 \cdot z \rangle_a d\alpha = \int_0^1 \langle \xi(\varphi(\alpha z)), {}^t M_0 \cdot z \rangle_a d\alpha$$

pour conclure :

$$J(z) = \int_0^1 \langle M_0 \cdot \xi(\varphi(\alpha z)), z \rangle_{a-n} d\alpha + \sum_{i=1}^a \int_0^{\varphi_i(0)} \xi_i(u_i) du_i - \langle M_0 \cdot {}^t A^f \cdot h^f, z \rangle_{a-n} - \langle {}^t A^f \cdot h^f, q_d \rangle_a$$

puisque :

$$\int_0^{\varphi_i(z)} \xi_i(u_i) du_i = \int_0^{\varphi_i(0)} \xi_i(u_i) du_i + \int_{\varphi_i(0)}^{\varphi_i(z)} \xi_i(u_i) du_i$$

Finalemment :

$$J(z) = \int_0^1 \left\langle M_0 \cdot \left(\xi(\varphi(\alpha z)) - {}^t A^f \cdot h^f \right), z \right\rangle_{a-n} d\alpha + J(0)$$

$$\text{avec } J(0) = \sum_{i=1}^a \int_0^{\varphi_i(0)} \xi_i(u_i) du_i - \left\langle {}^t A^f \cdot h^f, q_d \right\rangle_a$$

a) Interprétation physique de la formulation

Sur chacune des a-n chaînes définie par M_0 , on définit comme pour le problème primal une perte de charge et un débit ; la puissance dissipée par effet de friction dans cette chaîne est alors le produit des deux.

Une demande $d \in \mathbb{R}^n$ est imposée aux n noeuds simples ; le niveau dans les f réservoirs $h^f \in \mathbb{R}^f$ est maintenu constant ; q^c est solution du problème réduit (II-2.5) :

$$(R) \quad M_0 \cdot \left(\xi(\varphi(q^c)) - {}^t A^f \cdot h^f \right) = 0_{a-n}$$

Comme, $M_0 \cdot \xi(\varphi(q^c))$ est le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est la perte de charge de la $i^{\text{ème}}$ chaîne entre réservoir ou cycle définit par M_0 ,

$$\left\langle M_0 \cdot \xi({}^t M_0 \cdot q^c + q_d), q^c \right\rangle_{a-n}$$

représente la puissance à mettre en oeuvre par le fluide en régime permanent, dans les a-n chemins définis par M_0 pour vaincre l'effet de friction ; elle correspond à des pertes linéaires, éventuellement à des pertes singulières, ou un gain par une pompe ;

$$\left\langle M_0 \cdot {}^t A^f \cdot h^f, q^c \right\rangle_{a-n}$$

constitue la puissance apportée au fluide pour maintenir les extrémités des a-n chaînes entre réservoir ou cycles fixes par rapport au plan horizontal de référence.

Le **bilan énergétique total** est alors sur ces a-n chaînes indépendantes :

$$\left\langle M_0 \cdot (\xi(\varphi(q^c)) - {}^t A^f \cdot h^f), q^c \right\rangle_{a-n} = \left\langle 0_{a-n}, q^c \right\rangle_{a-n} = 0$$

Si on perturbe la demande aux noeuds simple de façon infinitésimale (d augmentant de δd), les charges h^f étant maintenues constantes, on provoque le passage d'un état d'équilibre q^c à un état d'équilibre voisin $q^c + \delta q^c$; la différence de puissance entre les deux situations est au premier ordre :

$$\left\langle M_0 \cdot (\xi(\varphi(q^c)) - M_0 \cdot {}^t A^f \cdot h^f), \delta q^c \right\rangle_{a-n}$$

En passant à la limite, entre z^1 et z^2 par une succession d'états d'équilibres infiniment voisins (les charges h^f étant maintenues constantes, d^1 passant à d^2 de manière réversible) la différence de puissance est alors :

$$J(z^1) - J(z^2)$$

Si q^c est solution de (Pr) il vérifie donc **le principe de moindre action** :

En partant d'une situation à l'équilibre, les "débits de maille" s'établissent dans les chaînes entre réservoirs et dans les cycles du graphe G , les charges h^f étant maintenues constantes, pour satisfaire les demandes d , de telle façon que la puissance mise en jeu soit minimale.

b) Propriétés de la fonction économique J

Propriétés II-3.4 :

- i) J est de classe C^2
- ii) J est strictement convexe
- iii) J est coercive

Preuve :

de i) Comme f est de classe C^2 et $J = f \circ \varphi$ avec φ affine, on en déduit que J est de classe C^2 et que :

$$\begin{aligned} \nabla J(z) &= M_0 \cdot (\xi({}^t M_0 \cdot z + q_d) - A^f \cdot h^f), \forall z \in \mathbb{R}^{a-n} \\ \text{Hess}(J)(z) &= M_0 \cdot D(\varphi(z)) \cdot {}^t M_0 \end{aligned} \quad (\text{II-3.4})$$

de ii) Il est alors facile de vérifier que ∇J est strictement monotone ; en effet :

$$\langle \nabla J(z^1) - \nabla J(z^2), z^1 - z^2 \rangle_{a-n} = \langle \xi \circ \varphi(z^1) - \xi \circ \varphi(z^2), M_0 \cdot (z^1 - z^2) \rangle_a, \forall (z^1, z^2) \in \mathbb{R}^{2(a-n)}$$

Par conséquent :

$$\langle \nabla J(z^1) - \nabla J(z^2), z^1 - z^2 \rangle_{a-n} = \langle \nabla f(\varphi(z^1)) - \nabla f(\varphi(z^2)), \varphi(z^1) - \varphi(z^2) \rangle_a, \forall (z^1, z^2) \in \mathbb{R}^{2(a-n)}$$

La monotonie de ∇f entraîne donc celle de ∇J .

de iii) De l'égalité $\varphi(z) = \begin{pmatrix} -A_1^{-1} \cdot (A_2 \cdot z + d) \\ z \end{pmatrix}, \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$, on déduit l'inégalité :

$$\langle \varphi(z), \varphi(z) \rangle_a \geq \langle z, z \rangle_{a-n}$$

d'où $\|\varphi(z)\| \geq \|z\|, \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$ (II-3.5)

et $\|\varphi(z)\| \xrightarrow{\|z\| \rightarrow +\infty} +\infty$; la coercivité de J se déduit de celle de f :

$$\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} J(z) = \lim_{\|\varphi(z)\| \rightarrow +\infty} f(\varphi(z)) = +\infty \quad \blacksquare$$

c) Caractérisation d'un optimum

J étant convexe et différentiable (Propriétés II-3.4), on peut donc énoncer :

Théorème II-3.4 :

$q^c \in \mathbb{R}^{a-n}$ est solution de (Pr) si et seulement si il est solution du problème d'équilibrage réduit (R) :

$$(R) \quad \nabla J(q^c) = M_0 \cdot \{ \xi(\varphi(q^c))^{-1} A^f \cdot h^f \} = 0_{a-n}$$

II-3.5 Formulation lagrangienne

Par définition, le lagrangien associé au problème (P) est la fonction $L : \mathbb{R}^{a+n} \rightarrow \mathbb{R}$, qui à (x, y) associe :

$$L(x, y) = f(x) - \langle y, \Lambda \cdot x + d \rangle_n \quad (II-3.6)$$

Le problème (Ps) de la recherche des points-selle de la fonction L , consiste à :

$$(Ps) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (q, h) \in \mathbb{R}^{a+n} / \\ L(q, y) \leq L(q, h) \leq L(x, h) \quad , \forall x \in \mathbb{R}^a, \forall y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

f étant convexe en x , de classe C^1 , et les contraintes affines donc convexes et de classe C^1 , l'ensemble des points-selle s'identifie aux solutions du problème d'équilibrage (HQ) ; (q, h) est point-selle si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x L(q, h) = \xi(q) - {}^t A^f \cdot h - {}^t A \cdot q = 0_a \\ \nabla_y L(q, h) = -A \cdot q - d = 0_n \end{array} \right.$$

Le premier argument d'un point-selle : q , étant solution du problème primal (P) (M. Minoux tome 1 p. 180, 1983), q et son multiplicateur de Lagrange vérifient aussi (HQ) (théorème II-3.3).

A étant de rang maximum, il y a unicité du multiplicateur associé à q , solution de (P). Le deuxième argument d'un point-selle s'identifie au vecteur multiplicateur de Lagrange h . On peut donc énoncer :

Théorème II-3.5 :

- a) Les solutions de (Ps) sont les solutions de (HQ).
- b) L'ensemble des couples $(q, h) \in \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$ de premier argument une solution de (P) et de second argument le multiplicateur associé est exactement l'ensemble des solutions du problème d'équilibrage (HQ).

II-3.6 Formulation duale

On appelle formulation duale (par opposition à la formulation primale) le problème d'optimisation sans contrainte :

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } h \in \mathbb{R}^n \\ G(h) \geq G(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

où G , la fonction duale, est définie par:

$$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto G(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^a} L(x, y)$$

a) Construction de la fonction duale G

f étant convexe de classe C^1 (propriétés II-3.3), toutes solutions de :

$$\nabla_x L(x(y), y) = \xi(x(y))^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot y = 0_a \quad (\text{II-3.7})$$

satisfait à $L(x(y), y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^a} L(x, y)$.

Comme ξ est bijective (propriété I-3.5d) l'équation (II-3.7) possède une unique solution :

$$x(y) = \xi^{-1}({}^t A \cdot y + {}^t A^f \cdot h^f) \quad (\text{II-3.8})$$

Cette solution $x(y)$ dépend continûment de y , puisque ξ^{-1} est continue (propriété I-3.5d).

On vient donc de montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists ! x(y) \in \mathbb{R}^a / G(y) = L(x(y), y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^a} L(x, y) \quad (\text{II-3.9})$$

avec $x(y)$ dépendant continûment de y .

b) Propriétés de la fonction G

G bénéficie des propriétés classiques d'une fonction duale et d'autres spécifiques à notre problème.

Propriétés II-3.6 :

i) G est concave.

ii) G est de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et de gradient :

$$\nabla_y G(y) = -A \cdot x(y) - d = -A \cdot \xi^{-1}({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot h) - d. \quad (\text{II-3.10})$$

iii) G est de classe C^2 sur $V = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / \left({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot y \right)_i \neq 0, \text{ pour } i = 1, \dots, a \right\}$

et de hessienne en $y \in V$:

$$\text{Hess}(G)(y) = -A \cdot D(x(y))^{-1} \cdot {}^t A \quad (\text{II-3.11})$$

où D est donné par (II-3.3).

Preuve :

de i) Comme on peut écrire $G(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, y)\}$ (propriété II.3-9), G est concave (M. Minoux tome 1 p. 240, 1983).

de ii) Les contraintes du problème primal étant continues et (II-3.9) vérifié, la dérivabilité de la fonction G a été établi par Ciarlet p° 223 et 224, (1985) ; le gradient de G .

$$\nabla G(y) = -A \cdot x(y) - d$$

étant une fonction continue, G est de classe C^1 . Il y a cependant une petite difficulté ; cf. la remarque II-3.6 qui suit le théorème.

de iii) G est la composée de fonctions qui sont de classe C^2 sur V ■

Remarque II-3.6 :

Pour établir la dérivabilité de $G(\cdot) = L(x(\cdot), \cdot)$, il n'y a pas besoin que $x(\cdot)$ soit dérivable, la continuité de $x(\cdot)$ suffit.

$x(\cdot)$ n'est pas dérivable en un y vérifiant pour un i particulier :

$$\left({}^t A^f \cdot h^f + A \cdot y \right)_i = 0.$$

En effet, si $u_i = 0$ alors $\xi_i^{-1}(0) = 0$ et donc $\xi_i'(\xi_i^{-1}(0)) = 0$, si la perte de charge est uniquement linéaire, ou singulière ; et, la jacobienne de ξ^{-1} :

$$\text{Jac}(\xi^{-1})(u) = D(\xi^{-1}(u))^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\xi_i'(\xi_i^{-1}(u_i))} \right)$$

n'est pas partout définie.

c) Le cas des pertes de charge linéaires

Il est possible d'expliciter G si toutes les pertes de charge sont linéaires :

En effet : $\xi_i(x_i) = r_i \cdot |x_i|^{m-1} \cdot x_i$ (avec $m = 1.852$, formule I-3.3)

et alors $\xi_i^{-1}(u_i) = r_i^{-\frac{1}{m}} \cdot |u_i|^{\frac{1}{m}} \cdot \text{signe}(u_i)$ si $u_i \neq 0$

$$\xi_i^{-1}(0) = 0$$

Par conséquent : $x_i(y) = r_i^{-\frac{1}{m}} \cdot |y_{i_1} - y_{i_2}|^{\frac{1}{m}} \cdot \text{signe}(y_{i_1} - y_{i_2})$ si le tronçon i a pour première extrémité i_1 et deuxième extrémité i_2 .

Adoptons la convention : $({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot y)_i = y_{i_1} - y_{i_2}$ et remarquons que :

$$\langle {}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot y, x(y) \rangle_n = \sum_{i=1}^a r_i^{-\frac{1}{m}} \cdot |y_{i_1} - y_{i_2}|^{\frac{1}{m}+1}$$

et

$$\sum_{i=1}^a \int_0^{x_i(y)} \xi_i(u) du = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^a r_i^{-\frac{1}{m}} \cdot |y_{i_1} - y_{i_2}|^{\frac{m+1}{m}}$$

L'expression de G en fonction de y est donc :

$$G(y) = L(x(y), y) = -\frac{m}{m+1} \sum_{i=1}^a r_i^{-\frac{1}{m}} \cdot |y_{i_1} - y_{i_2}|^{1+\frac{1}{m}} - \sum_{j=1}^n y_j \cdot d_j \quad (\text{avec } 1 + \frac{1}{m} \approx 1.54)$$

d) Equation d'Euler-Lagrange associée

Théorème II-3.6 :

h est solution du problème dual (D) si et seulement si h est solution de (H) :

$$(H) \quad \nabla G(h) = -A \cdot \xi^{-1}({}^t A \cdot h + {}^t A^f \cdot h^f) - d = 0_n$$

Preuve : G est concave et dérivable ■

II-3.7 Equivalence de toutes les formulations

Théorème II-3.7 : Il est équivalent de résoudre une des quatre formulations classique (HQ), (Q) (R) et (H) ou l'un des quatre problèmes d'optimisation (P), (Pr), (Ps) et (D).

Preuve : C'est une conséquence des théorèmes II-2.5, II-3.4, II-3.5 et II-3.6 ■

II-4 Existence et unicité

Théorème II.4.1 : Le problème (P) chercher :

$$\left\{ \begin{array}{l} q \in \mathbb{R}^a / f(q) = \min_{x \in U} f(x) \\ \text{où } U = \{x \in \mathbb{R}^a / A \cdot x + d = 0_n\} \end{array} \right.$$

possède une solution et une seule

Preuve :

U est une partie non vide fermée de \mathbb{R}^a et f est continue et coercive (propriétés II-3.3i et II-3.5iii), le problème (P) possède donc une solution (P. G. Ciarlet p. 175, 1985) ; U étant de plus convexe, et f strictement convexe (propriété II-3.3ii) cette solution est unique (P. G. Ciarlet p. 156, 1985) ■

Corollaire II-4.1 : Le problème de l'analyse d'un réseau maillé d'A.E.P., (HQ), a une unique solution.

Remarque II-4.1 Les contraintes sont linéaires donc qualifiées (Minoux p. 172, 1983).

II-5 Analyse des principaux algorithmes existants

C'est Collins et al. (1978) qui les premiers à notre connaissance ont plongé le problème de l'Analyse dans le cadre de l'optimisation ; avec le "principe du Problème Auxiliaire", G. Cohen (1980) donne des conditions pour la convergence globale d'algorithmes généraux du type point fixe, comme ceux du gradient, de quasi-Newton ou de Newton généralisé, vers une solution d'un problème d'optimisation convexe.

Plus récemment, Carpentier et al. (1985), ont interprété dans le cadre du principe du problème auxiliaire et comparé du point de vue numérique, les principaux algorithmes primaux et duaux et l'algorithme "Hybride" (Hamam et al., 1971) ; ils concluent à la supériorité de ce dernier qui s'exprime en fonction des deux variables débits et charges ; ils expliquent qu'il tire avantage du bon conditionnement du problème primal et de la structure particulièrement creuse, reflétant celle du réseau, de la matrice hessienne du problème dual ; Todini et al. (1987) concluent quand à eux, à la supériorité de la méthode de Newton appliquée au lagrangien sur les autres méthodes ; on résout cette contradiction apparente en montrant que ces deux méthodes conduisent avec une même initialisation à des algorithmes identiques aussi bien dans leur formulation que dans leur implémentation.

Dans le chapitre suivant, les algorithmes principaux de la littérature sont interprétés dans le cadre du problème d'optimisation et classés suivant deux grandes familles de méthodes qui se rattachent à sa résolution : les méthodes primales ne faisant intervenir que les débits et les méthodes duales utilisant les pressions ; les méthodes primales-duales du type Newton comme celle de Newton sur le lagrangien ou la méthode sont en fait rangées dans les méthodes primales puisque l'itéré h^{k+1} n'intervient que comme une variable intermédiaire, comme nous allons le montrer.

L'explicitation des formules d'itération par l'utilisation de l'écriture matricielle permet la comparaison des différents algorithmes.

II-5.1 Les méthodes primales

Nous avons interprété dans le chapitre II-3.4, le vecteur q^c , comme le vecteur des "débits de maille", sur les chaînes entre réservoirs et les cycles correspondants aux lignes de M_0 . Dans tout le chapitre II-5.1, on emploiera lorsque aucune confusion n'est à

craindre, comme les hydrauliciens, le terme "maille" pour désigner indifféremment une chaîne entre réservoirs ou un cycle.

a) Relaxation sur le problème réduit (Path method)

L'ensemble des équations aux mailles est :

$$(R) \quad F(q^c) = M_0 \cdot (\xi({}^t M_0 \cdot q^c + q_d) - {}^t A^f \cdot h^f) = 0_{a-n}$$

Ce sont les équations d'optimalité du premier ordre du problème d'optimisation réduit (théorème II-3.4).

Partant d'un $q^0 \in \mathbb{R}^a$, vérifiant $A \cdot q + d = 0_n$, on corrige maille après maille le vecteur débit, de façon à satisfaire la conservation de l'énergie sur la maille étudiée, tout en maintenant l'équilibre aux noeuds.

Une seule composante de q^c étant libre à chaque itération, cette méthode s'interprète comme une méthode de relaxation appliquée au problème réduit :

$$(Pr) \quad \text{chercher } q^c \in \mathbb{R}^{a-n} / J(q^c) \leq J(z), \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$$

z^k connu, on calcule z^{k+1} par a-n paliers successifs (z^0 est choisi quelconque) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{k,0} = {}^t(z_1^k, z_2^k, \dots, z_{a-n}^k) = z^k \\ z^{k,1} = {}^t(z_1^{k+1}, z_2^k, \dots, z_{a-n}^k) \\ \vdots \\ z^{k,i} = {}^t(z_1^{k+1}, \dots, z_i^{k+1}, z_{i+1}^k, \dots, z_{a-n}^k) \\ \vdots \\ z^{k,a-n} = {}^t(z_1^{k+1}, z_2^{k+1}, \dots, z_{a-n}^{k+1}) = z^{k+1,0} = z^{k+1} \end{array} \right.$$

Les $z^{k,i}$ pour i de 1 à a-n sont solutions des a-n problèmes d'optimisation monodimensionnels :

$$J(z^{k,i}) = \min_{\rho \in \mathbb{R}} J(z^{k,i-1} + \rho e_i), \text{ pour } i = 1, \dots, a-n$$

où (e_i) désigne la base canonique de \mathbb{R}^{a-n}

$z^{k,i}$ s'écrit si $\rho_{k,i}$ réalise l'optimum du problème précédent pour l'étape i :

$$z^{k,i} = z^{k,i-1} + \rho_{k,i} \cdot e_i$$

Remarquons qu'alors : $F_i(z^{k,i}) = \partial_i J(z^{k,i}) = \langle \nabla J(z^{k,i}), e_i \rangle_{a-n} = 0$

Posons : $q^{k,i-1} = \varphi(z^{k,i-1}) = {}^t M_0 \cdot z^{k,i-1} + q_d$

alors : $q^{k,i} = \varphi(z^{k,i}) = {}^t M_0 \cdot (z^{k,i-1} + \rho_{k,i} \cdot e_i) + q_d = q^{k,i-1} + \rho_{k,i} \cdot {}^t M_0 \cdot e_i$

d'où la correction du débit de la $i^{\text{ème}}$ maille induit une correction des composantes du vecteur débit sur cette maille :

$$q^{k,i} = q^{k,i-1} + \rho_{k,i} \cdot {}^t M_0 \cdot e_i$$

La démarche de Hardy Cross (1936), initiateur de cette méthode, est de résoudre $F_i(z^{k,i-1} + \rho_{k,i} \cdot e_i) = 0$ par la méthode de Newton : il remplace $g_{k,i}(\rho) = F_i(z^{k,i-1} + \rho \cdot e_i)$ au voisinage de $\rho = 0$ par la fonction affine $g_{k,i}(0) + g_{k,i}'(0) \cdot \rho$ (équation de la tangente en 0 au graphe de la fonction $g_{k,i}$) ; l'approximation tangentielle de $\rho_{k,i}$ est donc :

$$\bar{\rho}_{k,i} = -\frac{g_{k,i}(0)}{g_{k,i}'(0)} = -\frac{F_i(z^{k,i-1})}{\partial_i F_i(z^{k,i-1})} = -\frac{\partial_i J_i(z^{k,i-1})}{\partial_i^2 J_i(z^{k,i-1})}$$

A. Divenot, (1980), perfectionne la méthode précédente en effectuant un **maillage dynamique** minimisant à chaque itération les éléments non diagonaux du hessien du problème réduit ; il réalise ensuite un "lumping" sur la matrice à inverser, i.e. : approxime $M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0$ par sa diagonale.

b) Newton sur le problème réduit (Simultaneous Path ou S-Path)

L'ensemble des équations aux mailles est traité de façon globale, d'où le nom "Simultaneous Path" de cette méthode qui s'interprète comme l'approximation de Newton sur le problème d'optimisation réduit (Pr).

On résout (Pr) en recherchant un point stationnaire, c'est-à-dire un q^c vérifiant : $\nabla J(q^c) = F(q^c) = 0_{a-n}$, par la méthode de Newton (par exemple, Minoux M. p. 111-113, 1983) ; on remplace donc, au voisinage du point courant z^k , la fonction J par son approximation quadratique :

$$J_q(z) = J(z^k) + \langle \nabla J(z^k), z - z^k \rangle_{a-n} + \frac{1}{2} \langle \text{Hess}(J)(z^k) \cdot (z - z^k), z - z^k \rangle_{a-n}$$

Le point z^{k+1} est choisi pour minimiser $J_q(z)$:

$$z^{k+1} = z^k - \text{Hess}(J)(z^k)^{-1} \cdot \nabla J(z^k) \text{ si } \text{Hess}(J)(z^k) \text{ est inversible}$$

où d'après (II-3.4) :

$$\begin{aligned} \text{Hess}(J)(z^k) &= M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0 \text{ avec } D_k = D(\varphi(z^k)) \\ \nabla J(z^k) &= F(z^k) = M_0 \cdot (\xi(q^k))^{-1} A^f \cdot h^f \text{ avec } q^k = \varphi(z^k) \end{aligned}$$

On déduit alors :

$$z^{k+1} = z^k - (M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\xi(q^k))^{-1} A^f \cdot h^f \quad (\text{II-5.1})$$

Pour l'inversion de $M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0$:

- R. Epp et A. G. Fowler, (1970) proposent de minimiser l'encombrement mémoire en choisissant les mailles rendant la largeur de bande de $M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0$ minimale ; ils utilisent la méthode de Choleski sur cette matrice-bande.

- Z. Mahjoub , (1982) compare la méthode non linéaire de Newton-Jacobi à un pas (qui consiste à remplacer la jacobienne par sa diagonale pour une approximation initiale particulière) à celle de Newton Gauss-Seidel à un pas ; il montre alors la convergence locale de ces deux algorithmes.

- Si à l'équilibre un débit dans un arc est proche de zéro (resp. nulle), alors la hessienne du problème réduit est mal conditionnée (resp. singulière) ; d'autre part la convergence de l'algorithme de Newton n'est garantie que si l'on part suffisamment près de l'optimum ; Carpentier et al., (1985), proposent une modification de l'algorithme de Newton du type Levenberg-Marquardt (pour une description de ces méthodes, cf. Bazaraa and al., p. 312-315, 1993) :

Ils choisissent une suite de nombres réels λ_k strictement positif, et posent :

$$\bar{D}_k = D_k + \lambda_k I_a = \text{diag}(\lambda_k + \xi_i(q_i^k)) \quad (\text{II-5.2})$$

Ainsi : $M_0 \cdot \bar{D}_k \cdot {}^t M_0 = M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0 + \lambda_k M_0 \cdot {}^t M_0$ est symétrique définie positive,

et ils appliquent l'algorithme II-5.1 :

Algorithme II-5.1 :

i) Choisir $z^0 \in \mathbb{R}^{a-n}$ et faire $k = 0$;

ii) Résoudre le système linéaire :

$$\left(M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0 + \lambda_k M_0 \cdot {}^t M_0 \right) \cdot \Delta z^k = -M_0 \cdot \left(\xi(\varphi(z^k)) - {}^t A^f \cdot h^f \right)$$

puis faire
$$z^{k+1} = z^k + \Delta z^k \quad (\text{II-5.3})$$

iii) arrêt si $\|z^{k+1} - z^k\|$ plus petit qu'un certain seuil ; sinon faire $k \leftarrow k + 1$ et retour en ii)

Carpentier et al. (1985) donnent les outils et les indications pour montrer que l'algorithme II-5.1 converge globalement, pour un choix convenable des λ_k , $k \in \mathbb{N}$, vers la solution q^c de (Pr). On peut donc énoncer le théorème :

Théorème II-5.1 : convergence globale

La suite des points z^k , $k \in \mathbb{N}$ définie par l'algorithme II-5.1, converge pour z^0 arbitraire vers q^c solution unique du problème d'optimisation (Pr) si les λ_k sont suffisamment grands et bornés supérieurement.

Pour souligner les similitudes de (II-5.3) avec la modification de Levenberg-Marquardt, il nous a paru nécessaire de donner une preuve de ce théorème, différente de celle suggérée par Carpentier et al., (1985), utilisant le principe du problème auxiliaire (cf. G. Cohen, 1980, en annexe 2).

Preuve :

On se ramène premièrement par un changement de variable à l'algorithme de Levenberg Marquardt ; puis, on vérifie les conditions sous lesquelles Ortega et al. (1970) ont montré que cette modification de la direction de Newton conduit à une méthode de descente.

$M_0 \cdot {}^t M_0$ étant symétrique définie positive (propriété II-1.4ii), il existe :

$$\Sigma = \left(M_0 \cdot {}^t M_0 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ une matrice symétrique définie positive vérifiant } \Sigma^2 = M_0 \cdot {}^t M_0$$

(II-5.3) devient en introduisant Σ :

$$z^{k+1} = z^k - \left[\text{Hess}(J)(z^k) + \lambda_k \Sigma^2 \right]^{-1} \cdot \nabla J(z^k)$$

En multipliant la dernière égalité par Σ , on obtient :

$$(\Sigma.z^{k+1}) = (\Sigma.z^k) - \left[(\Sigma^{-1} \cdot \text{Hess}(J)(z^k) \cdot \Sigma^{-1}) + \lambda_k I_{a-n} \right]^{-1} \cdot (\Sigma^{-1} \cdot \nabla J(z^k))$$

Opérons le changement de variable : $w = \Sigma.z$ et posons $\bar{J}(w) = J(\Sigma^{-1}.w)$, alors les expressions entre parenthèse se simplifient :

$$w^{k+1} = w^k - \left[(\text{Hess}(\bar{J})(w^k)) + \lambda_k I_{a-n} \right]^{-1} \cdot \nabla \bar{J}(w^k) \quad (\text{II-5.4})$$

Il est clair que puisque J est de classe C^2 , strictement convexe et coercive (propriétés II-3.4) :

i) \bar{J} est de classe C^2 .

ii) Si L_0 désigne l'ensemble de niveau : $L_0 = \{w \in \mathbb{R}^{a-n} / \bar{J}(w) \leq \bar{J}(\Sigma.z^0)\}$, L_0 est un ensemble convexe, fermé et borné.

iii) $w^* = \Sigma.q^c \in S_0$, réalise l'unique minimum de \bar{J} et w^* est l'unique point stationnaire de L_0 .

iv) Il existe μ_0 et μ_1 , avec μ_0 non nécessairement strictement positif, tels que :

$$\mu_0 \|w\|^2 \leq \langle \text{Hess}(\bar{J})(v).w, w \rangle_{a-n} \leq \mu_1 \|w\|^2, \forall v \in L_0, \forall w \in \mathbb{R}^{a-n}$$

Alors si λ_k est choisi pour vérifier :

$$\frac{1}{2} \mu_1 - \mu_0 < \eta_0 \leq \lambda_k \leq \eta_1 < +\infty, k = 1, 2, \dots \quad (\text{II-5.5})$$

Ortega et Rheinbolt p. 505, (1970) ont montré que la suite des w^k converge vers w^* . ■

Dans tout ce chapitre, on supposera que les λ_k vérifient II-5.5 ; nous serons donc dans les conditions de validité du théorème II-5.1.

c) La méthode Hybride

Elle consiste, en partant d'un q^0 satisfaisant l'équilibre aux nœuds simples, à calculer dans l'espace des débits q^k ($k > 0$) de la manière suivante :

$$q^{k+1} = q^k - \bar{D}_k^{-1} \cdot \{ \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h^{k+1} \} \quad (\text{II-5.6})$$

où \bar{D}_k est celui du II-5.2 et h^{k+1} est précédemment obtenu par :

$$h^{k+1} = (A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot \{ \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f \} \quad (\text{II-5.7})$$

\bar{D}_k étant symétrique définie positive, (II-5.7) est bien définie puisque , $A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A$ est inversible (propriété II-1.3ii) et on peut utiliser les propriétés II-1.4.

Cette méthode utilisant sur chaque pas les variables primales et duales est désignée par Hamam et al., (1971) comme "méthode hybride".

Si on remplace h^{k+1} dans (II-5.6) par son expression en fonction de q^k (II-5.7), on obtient :

$$q^{k+1} = q^k - \left(\bar{D}_k^{-1} - \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \bar{D}_k^{-1} \right) \cdot \{ \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f \}$$

L'utilisation de l'assertion viii des propriétés II-1.4 :

$$\bar{D}_k \cdot {}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot \bar{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 = I_a - {}^t A \cdot (A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \bar{D}_k^{-1}$$

permet de simplifier la dernière expression de q^{k+1} en fonction de q^k :

$$q^{k+1} = q^k - {}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot \bar{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot \{ \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f \} \quad (\text{II-5.8})$$

Carpentier P. et al., (1985) ont remarqué que $q^{k+1} = \varphi(z^{k+1})$ où z^{k+1} est défini par (II-5.3).

Ainsi la méthode de Newton sur le problème réduit partant de z^0 , et la méthode Hybride partant de $q^0 = \varphi(z^0)$, produisent exactement les même suites $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$; en particulier, la convergence globale de la méthode Hybride est garantie par le théorème II-5.1, pour un bon choix de \bar{D}_k .

Pour initialiser la méthode Hybride et ainsi obtenir $q^0 = \varphi(z^0)$, on peut procéder de la manière suivante :

On choisit pour $i = 1, \dots, a-n$: $z_i^0 = 0,5 \text{ m.s}^{-1} \times S_i \text{ m}^2$, (où S_i est la section de la conduite i) puis on calcule q^0 par :

$$q^0 = \begin{pmatrix} -A_1^{-1} \cdot (d + A_2 \cdot z^0) \\ z^0 \end{pmatrix}$$

d) Newton sur le lagrangien

Cette méthode consiste à appliquer la méthode de Newton à l'équation en (q,h) :

$$F(q, h) = \begin{pmatrix} \xi(q)^{-t} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h \\ A \cdot q + d \end{pmatrix} = 0_{a+n}$$

q^k et h^k étant connus, on calcule q^{k+1} et h^{k+1} par :

$$\begin{pmatrix} q^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^k \\ h^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_k & -{}^t A \\ A & 0_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h^k \\ A \cdot q^k + d \end{pmatrix} \quad \text{(II-5.9)}$$

II-5.9 ayant un sens si que D_k est symétrique définie positive.

Todini E. et al., (1987) ont tiré parti de la possibilité d'expliciter l'inverse de

$$\begin{pmatrix} D_k & -{}^t A \\ A & 0_{nn} \end{pmatrix} \text{ par :}$$

$$\begin{pmatrix} D_k & -{}^t A \\ A & 0_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_k^{-1} - D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot D_k^{-1} & D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \\ - (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot D_k^{-1} & (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \end{pmatrix}$$

et ont ainsi exprimé les itérés $\begin{pmatrix} q^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} q^k \\ h^k \end{pmatrix}$ par :

$$q^{k+1} = q^k - \left(D_k^{-1} - D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot D_k^{-1} \right) \cdot \left(\xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h^k \right) - D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot (A \cdot q^k + d)$$

$$h^{k+1} = (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot \left(A \cdot D_k^{-1} \cdot \left\{ \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f \right\} - \left\{ A \cdot q^k + d \right\} \right)$$

Ils concluent que :

$$\begin{aligned} h^{k+1} &= (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot \left(A \cdot D_k^{-1} \cdot \left\{ \xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f \right\} - \left\{ A \cdot q^k + d \right\} \right) \\ q^{k+1} &= q^k - D_k^{-1} \cdot \left(\xi(q^k)^{-t} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h^{k+1} \right) \end{aligned} \quad \text{(II-5.10)}$$

Si q^{k+1} est donné par (II-5.10), il est facile de montrer qu'il vérifie : $A \cdot q^{k+1} = -d$.

q^0 peut être choisi quelconque. Dès le pas suivant q^1 satisfait la contrainte $A \cdot q^1 + d = 0_n$; on peut donc supprimer cette expression dans la formule permettant de calculer h^2 et les vecteurs h^k suivants : on retrouve les itérations de la méthode hybride ; par conséquent, les itérés de la méthode hybride et ceux de la méthode de Newton sur le lagrangien ne diffèrent que si les initialisations des algorithmes sont distinctes.

e) La méthode linéaire

On considère le problème dans sa formulation en q :

$$F(q) = \begin{pmatrix} A \cdot q + d \\ M_0 \cdot \{ \xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f \} \end{pmatrix} = 0_a$$

Wood et Charles, (1972) proposent de résoudre ce système en le linéarisant (en appliquant une méthode de Newton), d'où la terminologie utilisée par les auteurs.

L'algorithme suppose q^k connu, et on calcule alors q^{k+1} en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} A \\ M_0 \cdot D_k \end{pmatrix} \cdot (q^{k+1} - q^k) = - \begin{pmatrix} A \cdot q^k + d \\ M_0 \cdot \{ \xi(q^k) - {}^t A^f \cdot h^f \} \end{pmatrix} \quad \text{(II-5.11)}$$

Pour comparer cette méthode aux précédentes, on remarque que si D_k est symétrique définie positive, la matrice d'itération est inversible, d'inverse :

$$\begin{pmatrix} A \\ M_0 \cdot D_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} & {}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$q^{k+1} = q^k - D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot (A \cdot q^k + d) - {}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\xi(q^k) - {}^t A^f \cdot h^f)$$

En utilisant à nouveau la propriété II-1.4viii, et en prémultipliant par D_k^{-1} :

$${}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot D_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 = D_k^{-1} - D_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot D_k^{-1}$$

d'où :

$$q^{k+1} = q^k - D_k^{-1} \cdot (\xi(q^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h^{k+1})$$

où h^{k+1} est la variable intermédiaire :

$$h^{k+1} = (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot \{A \cdot D_k^{-1} \cdot (\xi(q^k) - {}^t A^f \cdot h^f) - (A \cdot q^k + d)\}$$

on retrouve (II-5.10).

f) Conclusions sur les méthodes primales

Nous voudrions insister sur les deux points important, le premier est un résultat théorique et le second est un aspect numérique :

Si l'on remplace D_k par \bar{D}_k dans (II-5.10) et (II-5.11) la méthode de Newton sur le problème réduit, la méthode Hybride, la méthode de Newton sur le lagrangien et la méthode linéaire partant du même point génèrent exactement les mêmes suites. Par conséquent, la **convergence globale** de ces quatre méthodes est assurée par le théorème II-5.1, dès que la suite λ_k vérifie II-5.5.

Par contre, la manière d'obtenir ces suites est différente puisque la méthode de Newton sur le problème réduit inverse le hessien du problème réduit (Pr), les méthodes Hybrides et de Newton sur le lagrangien inversent le hessien du problème dual (D), et la méthode linéaire inverse une matrice de taille plus grande, non symétrique.

II-5.2 Les méthodes duales

a) Relaxation sur le problème dual (ou Node method)

Le système d'équations aux noeuds est :

$$F(h) = A \cdot \xi^{-1}({}^t A \cdot h + {}^t A^f \cdot h^f) + d = 0_n$$

Il peut s'interpréter comme les conditions d'optimalité du premier ordre pour le problème dual (D).

Partant d'un h^0 quelconque, Hardy Cross propose de corriger le champ de pression à chaque noeud simple, afin d'améliorer la conservation des débits aux noeuds : c'est encore une méthode séquentielle, ici appliquée au problème dual.

b) Newton sur le problème dual (Simultaneous Node)

La méthode de Newton appliquée sur le système d'équations aux noeuds consiste, h^k et q^k connus à l'issue de l'itération k , à calculer h^{k+1} par :

$$h^{k+1} = h^k - (A \cdot D_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot \{A \cdot q^k + d\} \quad (\text{II-5.12})$$

où $D_k = D(\xi^{-1}({}^t A \cdot h^k + {}^t A^f \cdot h^f)) = D(q^k)$

puis q^{k+1} par : $q^{k+1} = x(h^{k+1}) = \xi^{-1}({}^t A \cdot h^{k+1} + {}^t A^f \cdot h^f) \quad (\text{II-5.13})$

En 1963, Martin et Peters semblent être les premiers à appliquer une méthode de Newton sur le problème en h , et proposent de diviser par deux le pas de calcul, pour corriger les effets d'oscillation autour de la solution.

Lam et Wolla, 1972, dans deux articles qui se font suite, n'utilisent pas la direction de descente de Newton mais une direction approchée (quasi-Newton) et proposent d'utiliser un choix optimal du pas pour minimiser $\|F(h)\|^2$.

Chandrashekar et Stewart, (1975) puis Lekane (1979) proposent d'utiliser le creux de la matrice jacobienne pour gagner du temps de calcul lors de son inversion et optimisent la numérotation des noeuds afin de limiter le phénomène de remplissage dans une factorisation L.U, par un algorithme de moindres degrés.

Carpentier et al. (1985), calculent h^{k+1} en fonction de h^k et q^k , \bar{D}_k étant le même qu'en II-5.2, par :

$$h^{k+1} = h^k - (A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot \{A \cdot q^k + d\} \quad (\text{II-5.14})$$

puis q^{k+1} est calculé par (II-5.13).

La hessienne $A \cdot D(x(y))^{-1} \cdot {}^t A$ de G est singulière sur un sous-espace de \mathbb{R}^n : $\text{Fr}(V)$ où V est définie assertion iii des propriétés II-3.6. Il suit que $-\nabla G(y)$ n'est pas lipschitzien sur tous les convexes bornés de \mathbb{R}^n . Comme l'ont alors remarqué Carpentier et al. (1985) l'application du principe des problèmes auxiliaires (cf. annexe 2) ne permet pas d'assurer la convergence globale de l'algorithme de Newton modifié défini par (II-5.14).

Nous allons proposer une modification de la fonction perte de charge qui permet d'obtenir, entre autres, que la fonction duale correspondante soit de classe C^2 .

II-6 Méthode de résolution proposée

Les travaux de Collins et al. (1978), ont permis en plongeant le problème de l'analyse dans le cadre d'un problème d'optimisation convexe différentiable, d'assurer l'existence et l'unicité de la solution, et d'envisager tout une gamme nouvelle d'algorithmes. Carpentier et al. (1985) en appliquant le principe du problème Auxiliaire ont proposé des modifications des principaux algorithmes afin d'assurer la convergence globale vers une solution optimale. Il faut cependant remarquer que la fonction duale n'étant pas de Classe C^2 , la convergence globale de l'algorithme de Newton sur le problème dual n'est pas garantie ; de plus, la fonction f n'étant pas elliptique (on dit aussi fortement convexe), l'application du principe du problème Auxiliaire ne permet pas une mesure de la qualité de l'approximation.

Pour rendre elliptique la fonction du problème primal, on transforme à l'origine les fonctions perte de charge, ce qui a le mérite d'assurer l'existence (resp. l'inversibilité) du hessien dans le cadre de la formulation duale (resp. primale).

On propose ainsi une famille de problème d'optimisation (P_ε) , correspondant à la modification sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ des fonctions ξ_i ; si q^ε désigne la solution du problème perturbé, on montrera que q^ε tend vers q la solution du problème de l'Analyse, quand ε tend vers zéro et l'on donnera une majoration de l'erreur commise en fonction de ε .

Une correction du pas dans la descente, permet de garantir la convergence globale des algorithmes de Newton sur le problème réduit et de Newton sur le problème dual. La convergence de l'algorithme de Newton sur le lagrangien se déduit de celle de Newton sur le problème réduit. On est alors capable d'estimer en fonction de ε et des solutions approchées, la qualité de l'approximation de (q, h) , solution du problème de l'Analyse.

II-6.1 Le problème approché

a) Modification des fonctions perte de charge

La fonction $\xi_i^{lin}(x_i) = r_i \cdot |x_i|^{0.852} \cdot x_i$ (à r_i constant) est tronquée au voisinage de zéro et il lui est substitué un prolongement de classe C^1 , ce qui tous calculs faits donne :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_i^{lin}(x_i) = r_i \cdot |x_i|^{0.852} \cdot x_i & , \text{ si } |x_i| \geq \varepsilon \\ \tilde{\xi}_i^{lin}(x_i) = 0.426r_i \cdot \varepsilon^{-1.148} \cdot x_i^3 + 0.574r_i \cdot \varepsilon^{0.852} \cdot x_i & , \text{ si } |x_i| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (\text{II-6.1})$$

avec ε assez petit (e.g. 10^{-3} si x_i en l/s). Cette fonction sera notée : $\tilde{\xi}_i(r_i, x_i)$ quand r_i ne sera plus considérée constant pour les chapitres de l'Identification du réseau et du Choix des mesures.

La figure 30 donne l'allure de cette fonction et la figure 31 celle de sa dérivée :

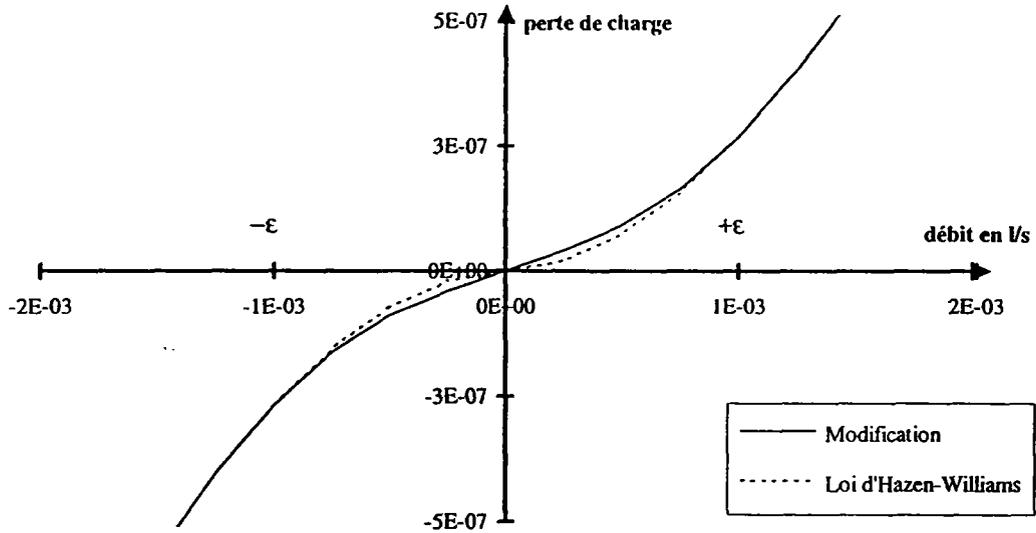


figure 30 : perte de charge linéaire modifiée au voisinage de zéro

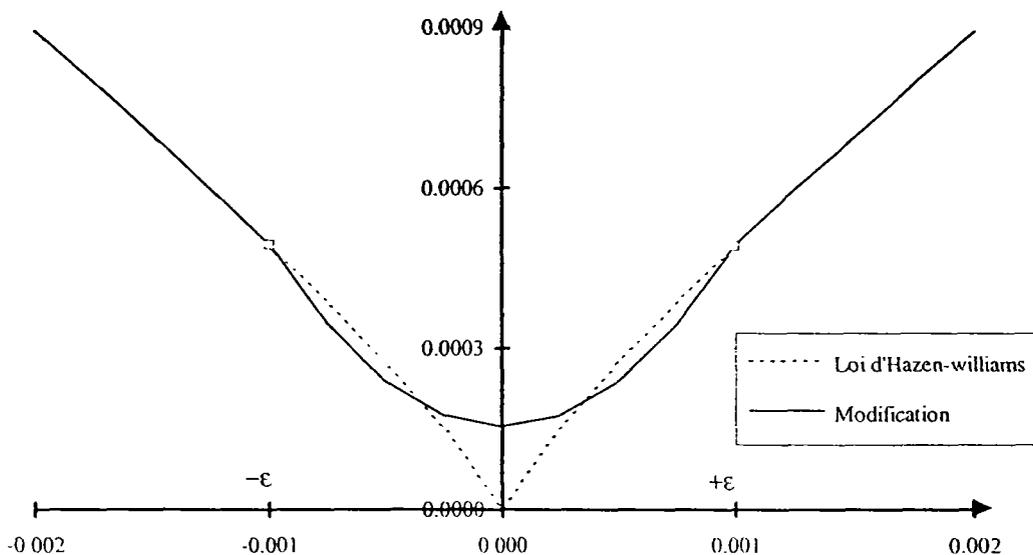


figure 31 : dérivée de la fonction perte de charge linéaire modifiée

Le vecteur perte de charge sur les arcs peut alors s'écrire :

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^{\text{lin}} + \xi^{\text{sin}} + \xi^{\text{pomp}}$$

avec chacune des dérivées partielles positives ainsi :

$$\left(\bar{\xi}_i^{\text{lin}}\right)'(x_i) \geq 0,574 r_i \cdot \epsilon^{0.852}, \quad \forall x_i \in \mathbb{R} \quad (\text{II-6.2})$$

$$\text{Jac}(\bar{\xi}(x)) = \bar{D}(x) \geq c_\epsilon I_a \text{ avec } c_\epsilon = 0,574 \min(r_i) \cdot \epsilon^{0.852} \quad (\text{II-6.3})$$

Proposition II-6.1 :

$\bar{\xi}$ comme fonction de r et de x :

i) $\bar{\xi}$ est de classe $C^1\left(\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^a \times \mathbb{R}^a, \mathbb{R}^a\right)$

$\bar{\xi}$ comme seule fonction x :

ii) $\bar{\xi}$ est fortement monotone :

$$\exists c_\epsilon > 0 / \left\langle \bar{\xi}(v) - \bar{\xi}(w), v - w \right\rangle_a \geq c_\epsilon \|v - w\|^2, \quad \forall (v, w) \in \mathbb{R}^{2a}$$

iii) $\bar{\xi}$ est un difféomorphisme de classe $C^1(\mathbb{R}^a, \mathbb{R}^a)$, i.e. $\bar{\xi}$ est une bijection et $\bar{\xi}$ et l'application inverse $\bar{\xi}^{-1}$ sont de classe C^1 .

Preuve :

de i) $\bar{\xi}$ est une somme de fonctions continûment dérivables de \mathbb{R}^a à valeurs dans \mathbb{R}^a .

de ii) de i) $\bar{\xi}$ est de classe C^1 et comme par (II-6.3) :

$$\exists c_\epsilon > 0 / \left\langle \bar{\xi}'(v)(w), w \right\rangle_a \geq c_\epsilon \|w\|^2, \quad \forall (v, w) \in \mathbb{R}^{2a}$$

on en déduit la forte monotonie de $\bar{\xi}$ (A. Avez p. 130, 1983).

de iii) une application fortement monotone de classe C^1 est un difféomorphisme de classe C^1 (A. Avez p.130, 1983) ■

b) Problèmes d'optimisations associés

On pose :

$$f_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^a \int_0^1 \tilde{\xi}_i(u) du - \langle {}^t A^f \cdot h^f, x \rangle_a$$

et on considère le problème d'optimisation convexe :

$$(P_\epsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } q^\epsilon \in \mathbb{R}^a \\ f_\epsilon(q^\epsilon) \leq f_\epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}^a \\ \text{sous la contrainte} \\ -A \cdot x - d = 0_n \end{array} \right.$$

On définit le problème réduit du problème (P_ϵ) par :

$$(Pr_\epsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } q_\epsilon^c \in \mathbb{R}^{a-n} \\ J_\epsilon(q_\epsilon^c) \leq J_\epsilon(z), \forall z \in \mathbb{R}^{a-n} \\ \text{où } J_\epsilon = f_\epsilon \circ \varphi \end{array} \right.$$

Le lagrangien du problème (P_ϵ) et la fonction duale G_ϵ sont :

$$L_\epsilon : (x, y) \in \mathbb{R}^{a+n} \mapsto L_\epsilon(x, y) = f_\epsilon(x) - \langle y, A \cdot x + d \rangle_n$$

$$G_\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto G_\epsilon(y) = L_\epsilon(x_\epsilon(y), y)$$

où
$$x_\epsilon(y) = \tilde{\xi}^{-1}({}^t A \cdot y + {}^t A^f \cdot h^f)$$

Le problème dual est alors :

$$(D_\epsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } h^\epsilon \in \mathbb{R}^n \\ G_\epsilon(h^\epsilon) \geq G_\epsilon(y), \forall y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

c) Propriétés des fonctions objectives associées

Propriétés II-6.1

Pour la fonction primale :

i) f_ϵ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^a , son gradient et sa matrice hessienne s'expriment par :

$$\begin{aligned} \nabla f_\epsilon(x) &= \tilde{\xi}(x) - {}^t A^f \cdot h^f, \quad \forall x \in \mathbb{R}^a \\ H_p(x) &= \text{Hess}(f_\epsilon)(x) = \tilde{D}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^a \end{aligned} \quad (\text{II-6.4})$$

où $\tilde{D}(x) = \text{diag}(\tilde{\xi}'_i(x_i))$ est la jacobienne de $\tilde{\xi}$ en x .

ii) f_ϵ est elliptique avec une constante c_ϵ , i.e :

$$\begin{aligned} \exists c_\epsilon > 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^{2a}, \forall t \in [0, 1] : \\ f_\epsilon(tu + (1-t)v) &\leq t f_\epsilon(u) + (1-t) f_\epsilon(v) - \frac{c_\epsilon}{2} t(1-t) \|u - v\|_2^2 \end{aligned}$$

f_ϵ est en particulier strictement convexe et coercive.

Pour la fonction primale réduite :

iii) J_ϵ est de classe C^2 , de gradient et de matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \nabla J_\epsilon(z) &= M_0 \cdot (\tilde{\xi}({}^t M_0 \cdot z + q_d) - {}^t A^f \cdot h^f), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{a-n} \\ H_R(z) &= \text{Hess}(J_\epsilon)(z) = (M_0 \cdot \tilde{D}(\varphi(z)) \cdot {}^t M_0), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{a-n} \end{aligned} \quad (\text{II-6.5})$$

iv) J_ϵ est elliptique avec une constante c_ϵ .

J_ϵ est donc strictement convexe et coercive ; son gradient ∇J_ϵ est fortement monotone avec une constante c_ϵ et sa matrice hessienne $H_R(z)$ est symétrique définie positive $\forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$, avec sa plus petite valeur propre minorée par c_ϵ .

v) ∇J_ϵ est un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^{a-n} dans \mathbb{R}^{a-n} .

Pour la fonction duale :

vi) G_ϵ est de classe C^2 , de gradient et de matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \nabla G_\epsilon(y) &= -A \cdot x_\epsilon(y) - d, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ H_D(y) &= \text{Hess}(G_\epsilon)(y) = -\left(A \cdot \tilde{D}(x_\epsilon(y))^{-1} \cdot A\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (\text{II-6.6})$$

vii) $-H_D(y)$ est symétrique définie positive $\forall y \in \mathbb{R}^n$; ce qui entraîne que G_ϵ est strictement concave et que $-\nabla G_\epsilon$ est strictement monotone.

viii) ∇G_ϵ est un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

ix) $-G_\epsilon$ est coercive : $\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} G_\epsilon(y) = -\infty$.

Preuve :

i) iii) et vi) sont des conséquences de la continu-différentiabilité de $\tilde{\xi}$ et de son application inverse $\tilde{\xi}^{-1}$ (proposition II-6.1 assertion iii) ; les calculs des gradients et des matrices hessienne sont ceux du paragraphe II-3.

de ii) f_ϵ est elliptique avec une constante c_ϵ sur \mathbb{R}^a , puisque son gradient est fortement monotone avec une constante c_ϵ (d'après la proposition II-6.1 assertion ii).

de iv) Il suffit de montrer (Ortega et Rheinbolt, p. 86, 1970) que ∇J_ϵ est fortement monotone avec une constante c_ϵ .

A partir de l'expression du gradient de J_ϵ (II-6.5), il est immédiat que :

$$\langle \nabla J_\epsilon(z^*) - \nabla J_\epsilon(z), z^* - z \rangle_{a-n} = \left\langle \tilde{\xi} \circ \varphi(z^*) - \tilde{\xi} \circ \varphi(z), {}^t M_0 \cdot (z^* - z) \right\rangle_a, \quad \forall (z^*, z) \in \mathbb{R}^{2(a-n)}$$

Par conséquent, puisque $\varphi(z) = {}^t M_0 \cdot z + q_d$:

$$\langle \nabla J_\epsilon(z^*) - \nabla J_\epsilon(z), z^* - z \rangle_{a-n} = \left\langle \tilde{\xi} \circ \varphi(z^*) - \tilde{\xi} \circ \varphi(z), \varphi(z^*) - \varphi(z) \right\rangle_a, \quad \forall (z^*, z) \in \mathbb{R}^{2(a-n)}$$

On déduit de la forte monotonie de $\tilde{\xi}$ (proposition II-6.1 assertion ii) que :

$$\langle \nabla J_\epsilon(z^*) - \nabla J_\epsilon(z), z^* - z \rangle_{a-n} \geq c_\epsilon \|\varphi(z^*) - \varphi(z)\|_2^2, \quad \forall (z^*, z) \in \mathbb{R}^{2(a-n)} \quad (\text{II.6.7})$$

En utilisant la minoration de la propriété II-1.4iv, on obtient :

$$\|\varphi(z) - \varphi(z^*)\|_2 = \left\| {}^t M_0 \cdot (z - z^*) \right\|_2 \geq \|z - z^*\|_2$$

d'où le résultat escompté :

$$\langle \nabla J_\varepsilon(z^*) - \nabla J_\varepsilon(z), z^* - z \rangle_{a-n} \geq c_\varepsilon \|z^* - z\|^2, \forall (z^*, z) \in \mathbb{R}^{2(a-n)}$$

de v) On utilise une nouvelle fois, qu'une application fortement monotone de classe C^1 est un difféomorphisme de classe C^1 (A. Avez p.130, 1983).

de vii) $H_D(y)$ étant symétrique définie négative $\forall y \in \mathbb{R}^n$ (cf. propriété II-1.3ii) puisque $\bar{D}(x)$ est symétrique définie positive pour tous x , G_ε est strictement concave ; $-G_\varepsilon$ est alors strictement convexe de classe C^1 , donc (P.G. Ciarlet p. 154, 1985) :

$$-G_\varepsilon(v) > -G_\varepsilon(w) + \langle -\nabla G_\varepsilon(w), v - w \rangle_n, \forall (v, w) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{II-6.8})$$

Il s'en suit que $-\nabla G_\varepsilon$ est strictement monotone (Ortega et Rheinbolt p.86, 1970) :

$$\langle \nabla G_\varepsilon(y_2) - \nabla G_\varepsilon(y_1), y_2 - y_1 \rangle > 0, \forall y_2 \neq y_1$$

de viii) ∇G_ε étant strictement monotone, elle est injective ; ∇G_ε est donc bijective de \mathbb{R}^n sur $\nabla G_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$.

$H_D(y)$ est inversible $\forall y \in \mathbb{R}^n$, d'après le théorème d'inversion locale (A. Avez p. 27, 1983), $\nabla G_\varepsilon^{-1}$ est de classe C^1 de l'ouvert $\nabla G_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ sur \mathbb{R}^n . Il nous reste à montrer que ∇G_ε est surjective.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ cherchons $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla G_\varepsilon(w) = u$. C'est-à-dire :

$$-A_\varepsilon x_\varepsilon(w) - (d + u) = 0_n$$

G_ε étant concave, w est l'unique solution du problème (D_ε) où $d+u$ a remplacé d ; $\bar{\xi}$ ayant toutes les propriétés de ξ , on peut utiliser le théorème II-4.1 : l'existence d'une solution du problème de l'Analyse permet alors d'affirmer la surjectivité de ∇G_ε .

de ix) Une application strictement convexe n'est pas toujours coercive, penser à $(x \mapsto e^x)$.

Pour qu'elle le soit, il faut par exemple que son gradient soit fortement monotone, ou en dimension un que sa dérivée croisse suffisamment.

Nous allons nous servir de la continuité de $\nabla G_\varepsilon^{-1}$ et de la stricte convexité de G_ε pour montrer ix).

Pour tout $v \in \mathbb{R}^n - \{0_n\}$, on pose $u = \frac{v}{\|v\|}$ et on choisit en invoquant la surjectivité de ∇G_ε :

$$w = \nabla G_\varepsilon^{-1}(-u)$$

Par conséquent : $-\nabla G_\varepsilon(w) = u$

$\nabla G_\varepsilon^{-1}$ est continue sur \mathbb{R}^n ; il suit que w est borné.

Utilisons la stricte convexité de $-G_\varepsilon$ pour écrire (II-6.8) en $v \in \mathbb{R}^n - \{0_n\}$, et $w = \nabla G_\varepsilon^{-1}(-u)$:

$$-G_\varepsilon(v) > -G_\varepsilon(w) + \langle u, \|v\|u - w \rangle_n, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

d'où : $G_\varepsilon(v) < G_\varepsilon(w) - \langle \nabla G_\varepsilon(w), w \rangle_n - \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^n$

$|G_\varepsilon(w) - \langle \nabla G_\varepsilon(w), w \rangle_n|$ est borné, puisque sa valeur correspond à la valeur prise par une fonction continue ; faisons tendre $\|v\|$ vers $+\infty$ alors :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} G_\varepsilon(v) = -\infty \quad \blacksquare$$

d) Convergence de la solution du problème approché vers celle de (Pr)

Théorème II-6.1 :

i) Le problème (Pr_ε) admet une unique solution : $q_\varepsilon^c = \nabla J_\varepsilon^{-1}(0_{a-n})$.

ii) $q_\varepsilon^c \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} q^c$ où q^c est la solution de (Pr).

Preuve :

de i) J_ε est elliptique. Par conséquent, le problème (P_ε) a une solution et une seule : q_ε^c (P.G. Ciarlet p. 183, 1985). J_ε étant convexe différentiable et ∇J_ε bijective, il suit que $q_\varepsilon^c = \nabla J_\varepsilon^{-1}(0_{a-n})$.

de ii) Soit, ${}^tL \in \mathbb{R}^{a-n}$ le $i^{\text{ième}}$ vecteur-ligne de tM_0 :

$$M_0 = (L^1 \mid L^1 \mid \dots \mid L^a)$$

alors,
$$\varphi_i(z) = \langle L^i, z \rangle_{a-n} + (q_d)_i$$

Si $d \neq 0_n$, il est toujours possible de choisir ε assez petit pour que :

$$\varepsilon \leq \left| (q_d)_{i_0} \right| \quad (\text{II-6.9})$$

où $(q_d)_{i_0}$ est la plus petite composante de q_d en valeur absolue non nulle.

Comme ε est destiné à converger vers 0, pour toute la suite de la démonstration, on supposera ε vérifier (II-6.9) si $d \neq 0_n$.

Ainsi,

$$\text{si } L^i = 0_{a-n}, \text{ ou si } z = 0_{a-n} : |\varphi_i(z)| \geq \varepsilon \text{ ou } \varphi_i(z) = 0 \quad (\text{II-6.10})$$

On rappelle que : $\nabla J(q^c) = 0_{a-n}$ où q^c est la solution de (Pr) (Théorème II-3.4).

De l'égalité $\nabla J_\varepsilon(q_\varepsilon^c) = \nabla J(q^c) = 0_{a-n}$, on déduit :

$$q_\varepsilon^c - q^c = \nabla J_\varepsilon^{-1} \circ \nabla J(q^c) - q^c \quad (\text{II-6.11})$$

Introduisons la fonction de \mathbb{R}^{a-n} à valeurs dans \mathbb{R}^{a-n} :

$$\phi_\varepsilon = \nabla J_\varepsilon^{-1} \circ \nabla J - \text{Id} \quad (\text{II-6.12})$$

Nous allons montrer que ϕ_ε converge uniformément sur \mathbb{R}^{a-n} vers l'application identiquement nulle ; nous en déduirons la convergence du vecteur q_ε^c vers le vecteur q^c .

Il faudra précédemment établir les 3 lemmes :

Le premier exprime que ϕ_ε est identiquement nul sur un sous-ensemble fermé non vide de \mathbb{R}^{a-n} .

Lemme II-6.1 :

soit \bar{U}_ε :
$$\bar{U}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^{a-n} / |\varphi_i(z)| \geq \varepsilon \text{ ou } \varphi_i(z) = 0\}$$

alors :

$$\begin{aligned} 0_{a-n} &\in \bar{U}_\varepsilon \\ \phi_\varepsilon(z) &= 0_{a-n} \text{ sur } \bar{U}_\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II-6.13})$$

Le deuxième lemme permet de contrôler la croissance de ϕ_ε .

Lemme II-6.2 :

La fonction ϕ_ε est lipschitzienne avec une constante β sur \mathbb{R}^{a-n} , i.e. :

$$\|\phi_\varepsilon(z) - \phi_\varepsilon(z^*)\|_2 \leq \beta \|z - z^*\|_2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}, \forall z^* \in \mathbb{R}^{a-n} \quad (\text{II-6.14})$$

$$\text{avec } \beta = \frac{3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \|M_0\|_2^2}{0,574 \cdot \min(r_i)}$$

Le troisième lemme énonce que la distance de tout point n'annulant pas ϕ_ε , à l'ensemble des points qui l'annule, est majorée par une constante qui dépend linéairement de ε .

Lemme II-6.3 :

La distance de tous points de V_ε à \bar{U}_ε , V_ε étant le complémentaire de \bar{U}_ε , est un $O(\varepsilon)$:

$$\exists k_1 > 0 / \forall z \in V_\varepsilon, \exists z^* \in \bar{U}_\varepsilon, \|z - z^*\|_2 \leq \frac{k_1}{\beta} \varepsilon \quad (\text{II-6.15})$$

Preuve du lemme II-6.1 :

$0_{a-n} \in \bar{U}_\varepsilon$, c'est (II-6.10).

Si $z \in \bar{U}_\varepsilon$, par définition : $|\varphi_i(z)| \geq \varepsilon$, ou $\varphi_i(z) = 0$ et donc :

$$\bar{\xi}_i(\varphi_i(z)) = \xi_i(\varphi_i(z)), \quad \forall z \in \bar{U}_\varepsilon, i = 1, \dots, a \quad (\text{II-6.16})$$

Une conséquence immédiate de (II-6.16) est que :

$$M_0 \cdot \left(\bar{\xi}(\varphi(z))^{-1} A^f \cdot h^f \right) = M_0 \cdot \left(\xi(\varphi(z))^{-1} A^f \cdot h^f \right), \quad \forall z \in \bar{U}_\varepsilon$$

et donc : $\nabla J_\varepsilon(z) = \nabla J(z)$ si $z \in \bar{U}_\varepsilon$

Par conséquent : $\phi_\varepsilon(z) = \nabla J_\varepsilon^{-1} \circ \nabla J_\varepsilon(z) - z = 0_{a-n}$ si $z \in \bar{U}_\varepsilon$ ■

Preuve du lemme II-6.2 :

$$\text{Posons } V_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{R}^{a-n} / z \notin \bar{U}_\varepsilon \right\}.$$

La jacobienne de $\phi_\varepsilon = \nabla J_\varepsilon^{-1} \circ \nabla J - \text{Id}$ est définie et s'écrit :

$$\text{Jac}(\phi_\varepsilon)(z) = (M_0 \cdot \bar{D}(\varphi(z)) \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (D(\varphi(z)) - \bar{D}(\varphi(z))) \cdot {}^t M_0, \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$$

Etablissons les deux inégalités suivantes :

$$\left\| (M_0 \cdot \bar{D}(x) \cdot {}^t M_0)^{-1} \right\|_2 \leq \frac{1}{c_\varepsilon}, \forall x \in \mathbb{R}^a \quad (\text{II-6.17})$$

$$\left\| M_0 \cdot (D(x) - \bar{D}(x)) \cdot {}^t M_0 \right\|_2 \leq \alpha_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^a \quad (\text{II-6.18})$$

où c_ε est défini en (II-6.3) et $\alpha_\varepsilon = 3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \left\| {}^t M_0 \right\|_2^2 \cdot \varepsilon^{0.852}$ ($\alpha_\varepsilon = 0$ si $z \in \bar{U}_\varepsilon$).

Si λ_x désigne la plus petite valeur propre de $M_0 \cdot \bar{D}(x) \cdot {}^t M_0$ et v_x un vecteur propre associé :

$$\text{alors :} \quad \left\langle M_0 \cdot \bar{D}(x) \cdot {}^t M_0 \cdot v_x, v_x \right\rangle_{a-n} = \lambda_x \left\| v_x \right\|_2^2$$

La hessienne de J_ε a sa plus petite valeur propre minorée par c_ε (propriété II-6.1iv) ; ainsi, en faisant apparaître deux fois ${}^t M_0 \cdot v_x$:

$$\left\langle \bar{D}(x) \cdot {}^t M_0 \cdot v_x, {}^t M_0 \cdot v_x \right\rangle_{a-n} \geq c_\varepsilon \left\| {}^t M_0 \cdot v_x \right\|_2^2$$

et comme $\left\| {}^t M_0 \cdot v_x \right\|_2 \geq \left\| v_x \right\|_2$ (propriété II-1.4iv) :

$$\text{alors,} \quad \lambda_x \left\| v_x \right\|_2^2 \geq c_\varepsilon \left\| v_x \right\|_2^2$$

donc : $\lambda_x \geq c_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^a$; pour obtenir l'inégalité (II-6.17), il suffit de remarquer que :

$$\left\| (M_0 \cdot \bar{D}(x) \cdot {}^t M_0)^{-1} \right\|_2 = \frac{1}{\lambda_x}$$

Pour montrer (II-6.18), on remarque alors :

$$\text{si } |x_i| \geq \varepsilon, \quad \check{\zeta}_i(x_i) - \bar{\zeta}_i(x_i) = 0$$

$$\text{si } |x_i| \leq \varepsilon, \quad \check{\zeta}_i(x_i) - \bar{\zeta}_i(x_i) = 1,852 \cdot r_i \cdot |x_i|^{0.852} - 1,278 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{-1.148} \cdot x_i^2 - 0,574 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{0.852}$$

Par conséquent : $\left| \xi_i(x_i) - \tilde{\xi}_i(x_i) \right| \leq 1,852 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{0,852} + 1,278 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{-1,148} \cdot \varepsilon^2 + 0,574 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{0,852}$

et donc : $\left| \xi_i(x_i) - \tilde{\xi}_i(x_i) \right| \leq 3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \varepsilon^{0,852}, \forall x_i \in \mathbb{R}$

Comme $D(x) - \tilde{D}(x) = \text{diag}(\xi_i(x_i) - \tilde{\xi}_i(x_i))$ on déduit de la dernière inégalité que :

$$\left| \left\langle (D(x) - \tilde{D}(x))^t M_0 \cdot y, {}^t M_0 \cdot y \right\rangle_a \right| \leq 3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \varepsilon^{0,852} \cdot \left\| {}^t M_0 \cdot y \right\|_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^a, \forall y \in \mathbb{R}^{a-n}$$

$$\text{D'où : } \left| \left\langle M_0 \cdot (D(x) - \tilde{D}(x))^t M_0 \cdot y, y \right\rangle_{a-n} \right| \leq \alpha_\varepsilon \cdot \|y\|_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^a, \forall y \in \mathbb{R}^{a-n}$$

L'inégalité (II-6.18) se déduit alors facilement de la précédente.

En se servant des majorations (II-6.17) et (II-6.18) on obtient :

$$\left\| \text{Jac}(\phi_\varepsilon)(z) \right\|_2 \leq \frac{\alpha_\varepsilon}{c_\varepsilon}, \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$$

$$\text{d'où : } \left\| \text{Jac}(\phi_\varepsilon)(z) \right\|_2 \leq \beta, \forall z \in \mathbb{R}^{a-n} \quad \text{(II-6.19)}$$

$$\text{où } \beta = \frac{3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \left\| {}^t M_0 \right\|_2^2}{0,574 \cdot \min(r_i)} \quad (\left\| \text{Jac}(\phi_\varepsilon)(z) \right\|_2 = 0, \text{ si } z \in \bar{U}_\varepsilon).$$

Appliquons le théorème des accroissements finis pour les convexes (A. Avez p. 19, 1983) à ϕ_ε , puisque (II-6.19) est vérifiée $\forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$:

$$\left\| \phi_\varepsilon(z) - \phi_\varepsilon(z^*) \right\|_2 \leq \beta \left\| z - z^* \right\|_2, \forall z \in \mathbb{R}^{a-n}, \forall z^* \in \mathbb{R}^{a-n} \quad \text{(II-6.20)}$$

ϕ_ε est donc β -lipschitzienne sur \mathbb{R}^{a-n} ■■

Preuve du lemme II-6.3 :

Montrons l'inégalité (II-6.15) :

$$\exists k_1 > 0 / \forall z \in V_\varepsilon, \exists z^* \in \bar{U}_\varepsilon, \left\| z - z^* \right\|_2 \leq \frac{k_1}{\beta} \varepsilon$$

Soit $v \in \mathbb{R}^{a-n}$, le vecteur de $i^{\text{ème}}$ composante : $v_i = 2^{i-1} \cdot \varepsilon$.

Alors, la matrice M_0 ne contenant que des 0 des 1 et des -1 (propriété II-1.4v), le vecteur v satisfait à :

$$\left| \langle L^i, v \rangle_{a-n} \right| \geq \varepsilon \text{ si } L^i \neq 0_{a-n} \quad (\text{II-6.21})$$

En effet, soit k le plus grand indice de 1 à $a-n$ pour lequel L^i_k est non nul ; il existe puisque $L^i \neq 0_{a-n}$.

Si $k = 1$ alors $\langle L^i, v \rangle_{a-n} = \pm \varepsilon$

Si k est plus grand que 1, puisque :

$$\left| \sum_{j=1}^{a-n} L^i_j \cdot v_j \right| \geq |L^i_k \cdot v_k| - \left| \sum_{j=1}^{k-1} L^i_j \cdot v_j \right| \geq |L^i_k \cdot v_k| - \sum_{j=1}^{k-1} |L^i_j \cdot v_j|$$

alors $\left| \langle L^i, v \rangle \right| \geq \varepsilon \cdot (2^{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-1}) = \varepsilon$, (II-6.21) est donc établi.

Montrons que $\forall z \in V_\varepsilon, \exists t \in [2; 2a] / z + tv \in \bar{U}_\varepsilon$ (II-6.22)

Soit $z \in V_\varepsilon$, posons :

$$I_k = \{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq a / 0 < |\varphi_i(z + (k-1)v)| < \varepsilon\}, k \in \mathbb{N}^*$$

Clairement, $I_1 \neq \emptyset$ et $I_k = \emptyset, k > 1$, signifie $z + (k-1)v \in \bar{U}_\varepsilon$.

(II-6.22) est donc vraie si $\exists k$, avec $3 \leq k \leq (2a+1) / I_k = \emptyset$.

Pour montrer (II-6.22), il suffit de montrer que :

$$I_k \cap I_{k+2p} = \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^* \quad (\text{II-6.23})$$

En effet, supposons (II-6.23) vraie.

Si (II-6.22) n'est pas vérifiée alors :

$$I_{2k-1} \neq \emptyset, \text{ pour } k = 1, \dots, a+1.$$

Ce qui entraîne que. $\text{card}(I_{2k-1}) \geq 1$, pour $k = 1, \dots, a+1$.

Les I_{2k-1} , pour $k = 1, \dots, a+1$ étant disjoints deux à deux (d'après II-6.23), on aurait donc :

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^a I_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^a \text{card}(I_{2k-1}) \geq a$$

On arrive à la contradiction $I_{2a+1} = \emptyset$ pour respecter (II-6.23), puisqu'il n'y a au plus que a éléments.

Pour établir (II-6.22), il reste à montrer que (II-6.23) est vraie.

Si $L^i = 0_{a-n}$, alors (II-6.10) assure que, $\forall t \in \mathbb{R}$, l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$\text{soit } |\varphi_i(z + tv)| \geq \varepsilon \text{ soit } \varphi_i(z + tv) = 0$$

$$\text{D'où : si } L^i = 0_{a-n}, \quad i \notin I_k, \quad k > 0 \quad (\text{II-6.24})$$

Si $I_k = \emptyset$, (II-6.23) est vérifié.

Si $I_k \neq \emptyset$, soit $i \in I_k$, alors :

$$0 < |\varphi_i(z + (k-1)v)| < \varepsilon$$

$$\text{Comme : } \varphi(z + (k-1+2p)v) = {}^t M_0 \cdot (z + (k-1+2p)v) + q_d = \varphi(z + (k-1)v) + 2p {}^t M_0 \cdot v$$

$$\text{alors } \varphi_i(z + (k-1+2p)v) = \varphi_i(z + (k-1)v) + 2p \langle L^i, v \rangle, \quad i = 1, \dots, a$$

$$\text{d'où } |\varphi_i(z + (k-1+2p)v)| \geq 2p |\langle L^i, v \rangle| - |\varphi_i(z + (k-1)v)|, \quad k \geq 1, p \geq 1$$

Comme par (II-6.24) $L^i \neq 0_{a-n}$, on peut donc utiliser l'inégalité (II-6.21), et obtenir :

$$|\varphi_i(z + (k-1+2p)v)| \geq (2p-1)\varepsilon, \quad k \geq 1, p \geq 1$$

Ce qui prouve que $i \notin I_{k+2p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et donc (II-6.23) et (II-6.22) sont vraies.

La preuve de l'inégalité (II-6.15) est alors immédiate :

pour $z \in V_\varepsilon$, $\exists z^* \in \bar{U}_\varepsilon$ tel que $\|z - z^*\|_2 = t\|v\|_2$, avec $t \leq 2a$.

et comme $\|v\|_2 = \varepsilon \sqrt{\frac{4^{a-n} - 1}{3}} < 2^{a-n} \varepsilon$ alors :

$$\forall z \in V_\varepsilon, \exists z^* \in \bar{U}_\varepsilon \quad / \quad \|z - z^*\|_2 \leq \frac{k_1}{\beta} \varepsilon \text{ où } k_1 = a \cdot \beta \cdot 2^{a-n+1} \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare$$

ϕ_ε étant β -lipschitzienne sur \mathbb{R}^{a-n} , si on utilise (II-6.14) avec z dans V_ε et z^* dans \bar{U}_ε on obtient :

$$\|\phi_\varepsilon(z) - 0\|_2 \leq \beta \|z - z^*\|_2, \quad \forall z \in V_\varepsilon, \forall z^* \in \bar{U}_\varepsilon$$

car $\phi_\varepsilon(z^*) = 0_{a-n}$ si $z^* \in \bar{U}_\varepsilon$ (II-6.13) ; comme de plus, pour tous z dans V_ε on peut trouver z^* dans \bar{U}_ε vérifiant (II-6.15) :

$$\|\phi_\varepsilon(z)\|_2 \leq k_1 \cdot \varepsilon, \quad \forall z \in V_\varepsilon \text{ où } k_1 = \frac{3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \|{}^t M_0\|_2^2 \cdot a \cdot 2^{a-n+1}}{0,574 \cdot \min(r_i)} \quad \text{(II-6.25)}$$

d'où $\|\phi_\varepsilon(z)\|_2 = O(\varepsilon)$, $\forall z \in \mathbb{R}^{a-n}$

Comme $\phi_\varepsilon(q^c) = q_\varepsilon^c - q^c$ (II-6.11), de (II-6.25) on déduit :

$$\|q_\varepsilon^c - q^c\|_2 \leq k_1 \cdot \varepsilon \quad \text{(II-6.26)}$$

■

e) Estimations des erreurs a priori

On a alors les estimations des erreurs a priori entre q^c et q , et h^f et h :

Corollaire II-6.1 :

i) $\|q^c - q\|_2 \leq k_2 \cdot \varepsilon \quad \text{(II-6.27)}$

$$\text{avec } k_2 = \frac{3,704 \cdot \max(r_i) \cdot \|{}^t M_0\|_2^3 \cdot a \cdot 2^{a-n+1}}{0,574 \cdot \min(r_i)}$$

$$\text{ii) } \quad \|h^\varepsilon - h\|_2 \leq k_3 \cdot \varepsilon \quad (\text{II-6.28})$$

$$\text{avec } k_3 = \|{}^t A^+\|_2 \cdot \max(r_i) \cdot \left[2\sqrt{a} \cdot \varepsilon^{0,852} + 1,852 \cdot k_2 \cdot \{\|q\|_\infty + k_2 \cdot \varepsilon\}^{0,852} \right]$$

Preuve :

de i) De $q = \varphi(q^c)$ et $q^\varepsilon = \varphi(q_\varepsilon^c)$ on déduit :

$$q^\varepsilon - q = {}^t M_0 \cdot (q_\varepsilon^c - q^c)$$

$$\text{donc : } \quad \|q^\varepsilon - q\|_2 \leq \|{}^t M_0\|_2 \cdot \|q_\varepsilon^c - q^c\|_2$$

La majoration (II-6.26) permet donc d'obtenir (II-6.27).

$$\text{de ii) Comme } h = (A \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot (\xi(q) - {}^t A^f \cdot h^f) \text{ et } h^\varepsilon = (A \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot (\tilde{\xi}(q^\varepsilon) - {}^t A^f \cdot h^f)$$

h et h^ε vérifient :

$$h^\varepsilon - h = {}^t A^+ \cdot (\tilde{\xi}(q^\varepsilon) - \xi(q))$$

$$\text{par conséquent : } \|h^\varepsilon - h\|_2 \leq \|{}^t A^+\|_2 \cdot (\|\tilde{\xi}(q^\varepsilon) - \xi(q^\varepsilon)\|_2 + \|\xi(q^\varepsilon) - \xi(q)\|_2) \quad (\text{II-6.29})$$

ξ étant de classe C^1 , le théorème fondamental du calcul intégral (A. Avez p. 24, 1983) permet d'écrire :

$$\xi(q^\varepsilon) - \xi(q) = \int_0^1 \xi'(q + t(q^\varepsilon - q))(q^\varepsilon - q) dt$$

donc :

$$\|\xi(q^\varepsilon) - \xi(q)\|_2 \leq \|q^\varepsilon - q\|_2 \cdot \int_0^1 \|D(q + t(q^\varepsilon - q))\|_2 dt \leq k_2 \cdot \varepsilon \cdot \max_{x \in \mathbb{R}_2^+(q, k_2, \varepsilon)} \|D(x)\|_2$$

car d'après (II-6.27), $q^\varepsilon - q \in \bar{B}_2(0; k_2 \cdot \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^a / \|x\|_2 \leq k_2 \cdot \varepsilon\}$, un convexe fermé borné.

Comme $\bar{B}_2(q; k_2 \cdot \varepsilon) \subset \bar{B}_\infty(q; k_2 \cdot \varepsilon)$, comme $x \mapsto \|D(x)\|_2$ est une fonction continue et comme $D(x)$ est diagonale :

$$\max_{x \in \bar{B}_2(q; k_2 \cdot \varepsilon)} \|D(x)\|_2 \leq \max_{x \in \bar{B}_\infty(q; k_2 \cdot \varepsilon)} \|D(x)\|_2 = \max_{1 \leq i \leq a} \left(\max_{q_i - k_2 \cdot \varepsilon \leq x_i \leq q_i + k_2 \cdot \varepsilon} |\xi_i'(x_i)| \right)$$

$$\max_{x \in \bar{B}_2(q; k_2 \cdot \varepsilon)} \|D(x)\|_2 \leq \max_{1 \leq i \leq a} \left(1,852 \cdot r_i \cdot |q_i + k_2 \cdot \varepsilon|^{0,852} \right) \leq 1,852 \cdot \max_{1 \leq i \leq a} (r_i) \cdot (\|q\|_\infty + k_2 \cdot \varepsilon)^{0,852}$$

$$\text{d'où} \quad \|\xi(q^\varepsilon) - \xi(q)\|_2 \leq 1,852 \cdot \max(r_i) \cdot k_2 \cdot \varepsilon \cdot (\|q\|_\infty + k_2 \cdot \varepsilon)^{0,852} \quad (\text{II-6.30})$$

Remarquons que :

$$\tilde{\xi}_i(x_i) - \xi_i(x_i) = 0, \quad \text{si } |x_i| \geq \varepsilon$$

et que :

$$\tilde{\xi}_i(x_i) - \xi_i(x_i) = 0,426 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{-1,148} \cdot x_i^3 + 0,574 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{0,852} \cdot x_i - r_i \cdot |x_i|^{0,852} \cdot x_i, \quad \text{si } |x_i| \leq \varepsilon$$

Pour en déduire :

$$\left| \tilde{\xi}_i(x_i) - \xi_i(x_i) \right| \leq 0,426 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{1,852} + 0,574 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{1,852} + r_i \cdot \varepsilon^{1,852}, \quad \text{si } |x_i| \leq \varepsilon$$

$$\text{On a donc :} \quad \left| \tilde{\xi}_i(x_i) - \xi_i(x_i) \right| \leq 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq a} r_i \cdot \varepsilon^{1,852}, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{par conséquent :} \quad \|\tilde{\xi}(q^\varepsilon) - \xi(q^\varepsilon)\|_2 \leq 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \max_{1 \leq i \leq a} r_i \cdot \varepsilon^{1,852}, \quad \forall q^\varepsilon \in \mathbb{R}^a \quad (\text{II-6.31})$$

(II-6.28) se déduit de (II-6.29) avec les majorations (II-6.30) et (II-6.31) ■

Remarque II-6.1 : Dans les expressions de k_1 , de k_2 et de k_3 , il est possible de remplacer $\|{}^t M_0\|_2$ par $\|M_0\|_2$ et $\|{}^t A^+\|_2$ par $\|A^+\|_2$, car une matrice et sa matrice transposée ont mêmes valeurs singulières.

Todini et al. (1987), et Carpentier et al. (1985) ont montré que des méthodes de quasi-Newton ou de gradient sont bien moins efficaces pour le problème de l'Analyse, que des méthodes de Newton pour lesquelles le nombre d'itérations est peu sensible avec la taille du réseau et la convergence est quadratique au voisinage de l'optimum. Nous avons choisi de tester l'efficacité de Newton sur trois formulations équivalentes du problème et ainsi de comparer les trois algorithmes : Newton sur le problème réduit, Newton sur le lagrangien, Newton sur le problème dual.

II-6.2 Choix de trois algorithmes de type Newton

Les fonctions J_ε et $-G_\varepsilon$ étant toutes deux de classe C^2 , de matrices hessiennes symétriques définies positives, et possédant des ensembles de niveaux compacts et convexes, si l'on applique l'algorithme de Newton, avec une correction du pas dans la descente si nécessaire pour les premières itérations, il est connu que l'on bénéficie d'une convergence globale (voir par exemple A. Goldstein p. 37, 1967).

Nous expliciterons l'algorithme de Newton sur le lagrangien qui est équivalent à l'algorithme de Newton sur le problème réduit mais inverse la matrice du problème dual (cf. §II-5.1f, conclusion sur les méthodes primale). Nous donnerons les propriétés de ces trois algorithmes.

Si $(q_\varepsilon^k), k \in \mathbb{N}$ désigne une suite de vecteur de \mathbb{R}^a convergente vers q_ε^* , on note $\bar{D}_k = \bar{D}(q_\varepsilon^k)$ la jacobienne du problème primal (P_ε) prise en un point de la suite.

a) Correction du pas dans la direction de descente

On propose une correction du pas dans la descente si nécessaire qui est celle de Goldstein. Pour le calcul de l'indice de convergence, défini ci-dessous, il faut évaluer un produit scalaire (une fois par itération), et la valeur du critère à minimiser pour le nouvel itéré (éventuellement plusieurs fois par itération).

Soit le problème d'optimisation, chercher : $\bar{x} \in \mathbb{R}^p / \theta(\bar{x}) = \min_{x \in U} \theta(x)$

où U est ouvert convexe, et θ est une fonction de classe C^2 sur U , borné inférieurement.

On suppose de plus que la matrice hessienne de θ en x , $H(x)$ vérifie :

$\forall x^0 \in U$, il existe deux réels strictement positifs : $\mu_1 \geq \mu_0 > 0$, tels que :

$$\mu_0 \cdot \|y\|_2^2 \leq \langle H(x) \cdot y, y \rangle_p \leq \mu_1 \cdot \|y\|_2^2, \quad \forall x \in L_0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p$$

où L_0 est l'ensemble de niveau sur θ associé à x^0 : $L_0 = \{x \in U / \theta(x) \leq \theta(x^0)\}$,

Introduisons l'indice de convergence :

$$\alpha(x, \rho) = \frac{\theta(x) - \theta(x - \rho \cdot H(x)^{-1} \cdot \nabla \theta(x))}{\rho \langle \nabla \theta(x), H(x)^{-1} \cdot \nabla \theta(x) \rangle_\rho} \quad (\text{II-6.32})$$

Pour réaliser une méthode descente, avec la direction de Newton, vers l'unique optimum de θ , Goldstein A. p. 37, (1967), propose le processus itératif :

$$x^{k+1} = x^k - \rho_k \cdot H_k^{-1} \cdot g^k \text{ où } H_k = H(x^k) \text{ et } g^k = \nabla \theta(x^k) \quad (\text{II-6.33})$$

Les ρ_k ont été choisis, pour que $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ fixé, alors :

$$0 < \delta < \alpha(x_k, \rho_k) \leq 1 - \delta \text{ avec } \rho_k = 1 \text{ si possible.}$$

Goldstein a montré que :

i) Pour x^0 arbitrairement choisi, la suite $\{x^k\}$ converge vers \bar{x} , l'unique minimum de θ .

ii) Il existe un entier N tel que si $k \geq N$ alors $\rho_k = 1$.

iii) La convergence des $\{x^k\}$ est supra-linéaire, c'est-à-dire plus rapide qu'aucune progression géométrique.

b) Newton sur le problème dual

Appliquons (II-6.33) sur $-G_\epsilon$, ainsi :

$$\alpha(h_\epsilon^k, \rho_k) = \frac{G_\epsilon(h_\epsilon^{k+1}) - G_\epsilon(h_\epsilon^k)}{\rho_k \left\langle A \cdot q_\epsilon^k + d, \left(A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A \right)^{-1} \cdot \left(A \cdot q_\epsilon^k + d \right) \right\rangle_n} \quad (\text{II-6.34})$$

Algorithme II-6.1 :

i) Choisir $h_\epsilon^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$;

calculer $q_\epsilon^0 = \bar{\xi}^{-1} ({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot h_\epsilon^0)$;

calculer le bilan aux noeuds simples : $b^0 = -\nabla G_\epsilon(h_\epsilon^0) = A \cdot q_\epsilon^0 + d$;

et $G_\epsilon(h_\epsilon^0) = f_\epsilon(q_\epsilon^0) - \langle h_\epsilon^0, b^0 \rangle_n$;

ii) k^{ieme} étape : $h_\epsilon^k, q_\epsilon^k$ et b^k sont connus ;

résoudre le système linéaire : $(A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A) \cdot \Delta^k = b^k$;

et calculer $\langle b^k, \Delta_k \rangle_n$;

$\rho_k = 1$;

iii) faire : $h_\epsilon^{k+1} = h_\epsilon^k - \rho_k \Delta_k$;

puis calculer : $q_\epsilon^{k+1} = \tilde{\xi}^{-1}({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1})$;

calculer le bilan aux noeuds simples : $b^{k+1} = A \cdot q_\epsilon^{k+1} + d$;

et $G_\epsilon(h_\epsilon^{k+1}) = f_\epsilon(q_\epsilon^{k+1}) - \langle h_\epsilon^{k+1}, b^{k+1} \rangle_n$;

$$\alpha(h_\epsilon^k, \rho_k) = \frac{G_\epsilon(h_\epsilon^{k+1}) - G_\epsilon(h_\epsilon^k)}{\rho_k \langle b^k, \Delta_k \rangle_n} ;$$

si $\delta < \alpha(h_\epsilon^k, \rho_k) \leq 1 - \delta$ alors :

aller en iv) ;

sinon

correction de ρ_k (par dichotomie ou interpolation) ;

aller en iii) ;

fin si

iv) arrêt si $\|b^{k+1}\|_\infty$ plus petit qu'un certain seuil ou si k est trop grand sinon faire $k \leftarrow k + 1$ et retour en ii).

c) Newton sur le problème réduit

L'application du même algorithme au problème primal réduit (Pr_ϵ) conduit à :

$$\alpha(z_\epsilon^k, \rho_k) = \frac{J_\epsilon(z_\epsilon^k) - J_\epsilon(z_\epsilon^{k+1})}{\rho_k \left\langle M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f \right), \left(M_0 \cdot \tilde{D}_k^{-1} M_0 \right)^{-1} \cdot M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f \right) \right\rangle_{a-n}} \quad (\text{II-6.35})$$

Algorithme II-6.2 :

i) Choisir $z_\varepsilon^0 \in \mathbb{R}^{a-n}$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$;

calculer $q_\varepsilon^0 = {}^t M_0 \cdot z_\varepsilon^0 + q_d$;

calculer le bilan énergétique sur les "mailles" : $B^0 = \nabla J_\varepsilon(z_\varepsilon^0)$;

puis $J_\varepsilon(z^0) = f_\varepsilon(q^0)$;

ii) $k^{\text{ième}}$ étape : z_ε^k , q_ε^k et B^k sont connus ;

résoudre le système linéaire : $(M_0 \cdot \bar{D}_k \cdot {}^t M_0) \cdot \Delta^k = B^k$;

et calculer $\langle B^k, \Delta^k \rangle_{a-n}$;

$\rho_k = 1$;

iii) faire : $z_\varepsilon^{k+1} = z_\varepsilon^k - \rho_k \Delta^k$;

puis calculer $q_\varepsilon^{k+1} = {}^t M_0 \cdot z_\varepsilon^{k+1} + q_d$;

et $J_\varepsilon(z_\varepsilon^{k+1}) = f_\varepsilon(q_\varepsilon^{k+1})$;

$$\alpha(z_\varepsilon^k, \rho_k) = \frac{J_\varepsilon(z_\varepsilon^k) - J_\varepsilon(z_\varepsilon^{k+1})}{\rho_k \langle B^k, \Delta_k \rangle_{a-n}} ;$$

si $\delta < \alpha(z_\varepsilon^k, \rho_k) \leq 1 - \delta$ alors :

calculer le bilan énergétique sur les "mailles" : $B^{k+1} = \nabla J_\varepsilon(z_\varepsilon^{k+1})$;

aller en iv) ;

sinon

correction de ρ_k (par dichotomie ou interpolation) ;

aller en iii) ;

fin si

iv) Arrêt si $\|B^{k-1}\|_\infty$ plus petit qu'un certain seuil ou si k est trop grand et calcul de $h_\varepsilon^{k+1} = {}^t A^+ \cdot (\bar{\xi}(q_\varepsilon^{k+1}) - {}^t A^f \cdot h^f)$ sinon faire $k \leftarrow k + 1$ et retour en ii).

d) Newton sur le lagrangien

On cherche à résoudre le problème réduit (Pr_ε), avec une implémentation différente de celle de l'algorithme II-6.2 de façon à faire apparaître la matrice du problème dual, et une expression de h_ε^{k+1} et de q_ε^{k+1} en fonction de q_ε^k qui correspond à un pas de Newton sur le lagrangien. Ceci à déjà été fait au paragraphe II-5.1, si ρ_k = 1 :

Rappelons que la propriété (II-1.4.viii), permet d'écrire, puisque \tilde{D}_k est symétrique définie positive :

$${}^t M_0 \cdot (M_0 \cdot \tilde{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 = \tilde{D}_k^{-1} - \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \tilde{D}_k^{-1}$$

et qu'avec cette égalité il est facile de montrer que la suite des (q_ε^k) où q_ε^k = φ(z_ε^k) et z_ε^k est calculé par :

$$z_\varepsilon^{k+1} = z_\varepsilon^k - \rho_k (M_0 \cdot \tilde{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f)$$

est, pour une même initialisation, la même que celle calculée par :

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^{k+1} &= (A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot (A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot \{\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f\} - \{A \cdot q_\varepsilon^k + d\}) \\ q_\varepsilon^{k+1} &= q_\varepsilon^k - \rho_k \tilde{D}_k^{-1} \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1}) \end{aligned}$$

Ecrivons l'indice de convergence en fonction du bilan énergétique sur chaque arc :

$$\alpha(z_\varepsilon^k, \rho_k) = \frac{J_\varepsilon(z_\varepsilon^k) - J_\varepsilon(z_\varepsilon^{k+1})}{\rho_k \left\langle M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f), (M_0 \cdot \tilde{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f) \right\rangle_{a-n}}$$

clairement : $J_\varepsilon(z_\varepsilon^k) - J_\varepsilon(z_\varepsilon^{k+1}) = f_\varepsilon(q_\varepsilon^k) - f_\varepsilon(q_\varepsilon^{k+1})$ puisqu'il y a conservation de la masse.

Comme $M_0 \cdot {}^t A = 0_{a-n,n}$, on a :

$$\begin{aligned} &\left\langle M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f), (M_0 \cdot \tilde{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f) \right\rangle_{a-n} = \\ &\left\langle M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1}), (M_0 \cdot \tilde{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1}) \right\rangle \end{aligned}$$

Une nouvelle fois la propriété (II-1.4.viii), permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &\left\langle M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f), (M_0 \cdot \tilde{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f) \right\rangle_{a-n} = \\ &\left\langle \tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1}, (\tilde{D}_k^{-1} - \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \tilde{D}_k^{-1}) \cdot (\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1}) \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de h_ϵ^{k+1} , et $A \cdot q_\epsilon^k + d = 0_n$, on obtient :

$$\bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \bar{D}_k^{-1} \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1} \right) = 0_a$$

La dernière égalité permet la simplification :

$$\left\langle M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f \right), (M_0 \cdot \bar{D}_k \cdot {}^t M_0)^{-1} \cdot M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f \right) \right\rangle_{a-n} = \left\langle \tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1}, \bar{D}_k^{-1} \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1} \right) \right\rangle_a$$

Par conséquent :

$$\alpha(z_\epsilon^k, \rho_k) = \frac{f_\epsilon(q_\epsilon^k) - f_\epsilon(q_\epsilon^{k+1})}{\rho_k \left\langle \tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1}, \bar{D}_k^{-1} \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1} \right) \right\rangle_a} \quad (\text{II-6.36})$$

Nous proposons deux initialisations :

- La première correspond à la résolution du problème de l'Analyse pour un premier régime de demande ; le débit sur les arcs n'a jamais été calculé. A partir d'un débit sur C , z_ϵ^0 arbitraire, on calcule le débit complémentaire sur \mathbb{A} : $q^{\mathbb{A}} = -A_1^{-1} \cdot (A_2 \cdot z_\epsilon^0 + d)$.
- La deuxième utilise, la solution d'un calcul hydraulique précédent ; c'est le cas dynamique où plusieurs régimes se succèdent, par exemple sur 24 heures. La solution du débit précédant ne satisfait pas la conservation de la masse pour le nouveau régime. Une itération de l'algorithme de Newton sur le lagrangien permet alors d'obtenir un débit vérifiant : $A \cdot q_\epsilon^1 + d = 0_n$.

Algorithme II-6.3 :

Première initialisation possible :

i) Choisir $z_\epsilon^0 \in \mathbb{R}^{a-n}$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$;

calculer $q_\epsilon^0 = {}^t M_0 \cdot z_\epsilon^0 + q_d$;

puis $J_\epsilon(z_\epsilon^0) = f_\epsilon(q_\epsilon^0)$;

Deuxième initialisation possible :

i) Choisir $q_\varepsilon^0 \in \mathbb{R}^a$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$;

résoudre le système linéaire :

$$(A \cdot \tilde{D}_0^{-1} \cdot {}^t A) \cdot h_\varepsilon^1 = A \cdot \tilde{D}_0^{-1} \cdot \left\{ \tilde{\xi}(q_\varepsilon^0) \cdot {}^t A^f \cdot h^f \right\} - \{ A \cdot q_\varepsilon^0 + d \} ;$$

calculer le bilan énergétique sur les arcs : $E^0 = \tilde{\xi}(q_\varepsilon^0) \cdot {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^1$;

puis $\Delta^0 = \tilde{D}_0^{-1} \cdot E^0$;

faire : $q_\varepsilon^1 = q_\varepsilon^0 - \Delta^0$ ainsi $A \cdot q_\varepsilon^1 + d = 0_n$;

calculer $J_\varepsilon(z_\varepsilon^1) = f_\varepsilon(q_\varepsilon^1)$;

ii) $k^{\text{ième}}$ étape : q_ε^k est connu ;

résoudre le système linéaire :

$$(A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot {}^t A) \cdot h_\varepsilon^{k+1} = A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot \left\{ \tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) \cdot {}^t A^f \cdot h^f \right\} - \{ A \cdot q_\varepsilon^k + d \} ;$$

calculer le bilan énergétique sur les arcs : $E^k = \tilde{\xi}(q_\varepsilon^k) \cdot {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1}$;

puis $\Delta^k = \tilde{D}_k^{-1} \cdot E^k$ et $\langle E^k, \Delta^k \rangle_a$;

$\rho_k = 1$;

iii) faire : $q_\varepsilon^{k+1} = q_\varepsilon^k - \rho_k \Delta^k$;

calculer $f_\varepsilon(q_\varepsilon^{k+1})$;

$$\text{puis } \alpha(z_\varepsilon^k, \rho_k) = \frac{f_\varepsilon(q_\varepsilon^k) - f_\varepsilon(q_\varepsilon^{k+1})}{\rho_k \langle E^k, \Delta^k \rangle_a} ;$$

si $\delta < \alpha(z_\varepsilon^k, \rho_k) \leq 1 - \delta$ alors :

aller en iv) ;

sinon

correction de ρ_k (par dichotomie ou interpolation) ;

aller en iii) ;

fin si

iv) Arrêt si $\|E^k\|_\infty$ plus petit qu'un certain seuil ou si k est trop grand sinon faire $k \leftarrow k+1$ et retour en ii).

Etablissons la convergence globale (i.e. : quel que soit le point de départ), de chacun des trois algorithmes précédents.

e) Convergence globale des trois algorithmes

Définissons pour h_ϵ^0 , z_ϵ^0 et q_ϵ^1 les ensembles de niveaux suivants :

$$L_0^D = \{y \in \mathbb{R}^n / G_\epsilon(y) \geq G_\epsilon(h_\epsilon^0)\}$$

$$L_0^R = \{z \in \mathbb{R}^{a-n} / J_\epsilon(z) \leq J_\epsilon(z_\epsilon^0)\}$$

$$L_1^P = \{x \in \mathbb{R}^a / f_\epsilon(x) \leq f_\epsilon(q_\epsilon^1)\}$$

On a alors le théorème, conséquence immédiate de celui de A. Goldstein p. 37, (1967) et des estimations des erreurs a priori du corollaire II-6.1 :

Théorème II-6.2

1) L'algorithme II-6.1 converge globalement ; on peut prendre $\rho_k = 1$ à partir d'un certain rang ; la convergence est supra-linéaire.

Nous avons l'estimation de l'erreur a priori :

$$\|h_\epsilon^{k+1} - h\|_2 \leq \max_{y \in L_0^D} \|H_D(y)^{-1}\|_2 \cdot \|A \cdot q_\epsilon^{k+1} + d\|_2 + k_3 \cdot \epsilon \quad (\text{II-6.37})$$

2) L'algorithme II-6.2 converge globalement ; on peut prendre $\rho_k = 1$ à partir d'un certain rang ; la convergence est supra-linéaire.

Nous avons l'estimation de l'erreur a priori :

$$\|z_\epsilon^{k+1} - q^c\|_2 \leq \max_{z \in L_0^R} \|H_R(z)^{-1}\|_2 \cdot \|M_0 \cdot (\tilde{\xi}(q_\epsilon^{k+1})^{-1} A^f \cdot h^f)\|_2 + k_1 \cdot \epsilon \quad (\text{II-6.38})$$

3) L'algorithme II-6.3 converge globalement ; on peut prendre $\rho_k = 1$ à partir d'un certain rang ; la convergence est supra-linéaire.

Nous avons l'estimation de l'erreur a priori :

$$\|q_\epsilon^{k+1} - q\|_2 \leq \max_{x \in L_\epsilon^1} \left\| (M_0 \cdot \tilde{D}(x) \cdot {}^t M_0)^{-1} \right\|_2 \cdot \|M_0\|_2^2 \cdot \left\| \tilde{E}(q_\epsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1} \right\|_2 + k_2 \cdot \epsilon \quad (\text{II-6.39})$$

Preuve :

de 1) et de 2) En vertu des propriétés II-6.1, J_ϵ et $-G_\epsilon$ sont des fonctions continues, convexes et coercives ; les ensembles de niveaux sont donc compacts et convexes et ces deux fonctions sont bornées inférieurement. De plus J_ϵ et $-G_\epsilon$ sont de classe C^2 ; les matrices hessiennes sont symétriques définies positives, et sont des fonctions continues ; elles possèdent donc sur un ensemble de niveau compact un minorant strictement positif, et un majorant pour ses valeurs propres :

Il existe quatre réels strictement positifs μ_0^D , μ_1^D , μ_0^R et μ_1^R tels que,

$$\mu_0^D \cdot \|y_2\|_2^2 \leq \langle -H_D(y_1) \cdot y_2, y_2 \rangle_n \leq \mu_1^D \cdot \|y_2\|_2^2, \forall y_1 \in L_0^D, \forall y_2 \in \mathbb{R}^n \quad (\text{II-6.40})$$

$$\mu_0^R \cdot \|z_2\|_2^2 \leq \langle H_R(z_1) \cdot z_2, z_2 \rangle_{a-n} \leq \mu_1^R \cdot \|z_2\|_2^2, \forall z_1 \in L_0^R, \forall z_2 \in \mathbb{R}^{a-n} \quad (\text{II-6.41})$$

L'application du théorème de A. Golstein p. 37, (1967) permet d'obtenir une méthode de descente sur les ensembles de niveaux, et d'obtenir les résultats énoncés sur la convergence.

Etablissons les estimations des erreurs a priori :

$$\|h_\epsilon^{k+1} - h^\epsilon\|_2 \leq \frac{1}{\mu_0^D} \|\nabla G_\epsilon(h_\epsilon^{k+1})\|_2 \quad (\text{II-6.42})$$

et

$$\|z_\epsilon^{k+1} - q_\epsilon^c\|_2 \leq \frac{1}{\mu_0^R} \|\nabla J_\epsilon(z_\epsilon^{k+1})\|_2 \quad (\text{II-6.43})$$

La minoration strictement positive des valeurs propres du hessien de $-G_\epsilon$ sur L_0^D (II-6.40) permet d'affirmer que $-\nabla G_\epsilon$ est fortement monotone sur L_0^D (Ortega et Rheinbolt p. 86 et 87, 1970). Par conséquent :

$$\mu_0^D \cdot \|y_2 - y_1\|_2^2 \leq \langle \nabla G_\epsilon(y_2) - \nabla G_\epsilon(y_1), y_1 - y_2 \rangle_n, \forall (y_1, y_2) \in L_0^D$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient la majoration :

$$\langle \nabla G_\varepsilon(y_2) - \nabla G_\varepsilon(y_1), y_1 - y_2 \rangle_n \leq \|\nabla G_\varepsilon(y_2) - \nabla G_\varepsilon(y_1)\|_2 \cdot \|y_1 - y_2\|_2, \forall (y_1, y_2) \in L_0^D$$

Ainsi :

$$\mu_0^D \cdot \|y_2 - y_1\|_2 \leq \|\nabla G_\varepsilon(y_2) - \nabla G_\varepsilon(y_1)\|_2, \forall (y_1, y_2) \in L_0^D$$

Pour démontrer (II-6.42), il suffit de choisir $y_2 = h_\varepsilon^{k+1}$ et $y_1 = h^\varepsilon$ et de remarquer que h^ε est le point stationnaire du problème dual et donc vérifie : $\nabla G_\varepsilon(h^\varepsilon) = 0_n$.

La démonstration est analogue pour (II-6.43).

Les inégalités (II-6.42) et (II-6.43) additionnées aux inégalités (II-6.28) et (II-6.26) que l'on rappelle :

$$\|h^\varepsilon - h\|_2 \leq k_3 \cdot \varepsilon \text{ et } \|q_\varepsilon^c - q^c\|_2 \leq k_1 \cdot \varepsilon$$

donnent alors facilement les estimations (II-6.37) et (II-6.38).

de **iii)** Les propriétés de convergence de l'algorithme II-6.3 se déduisent de celle de l'algorithme II-6.2.

En remarquant que $q_\varepsilon^{k+1} - q^\varepsilon = {}^t M_0 \cdot (z_\varepsilon^{k+1} - q_\varepsilon^c)$ et que $\|M_0\|_2 = \|{}^t M_0\|_2$ et en utilisant (II-6.38), on obtient :

$$\|q_\varepsilon^{k+1} - q^\varepsilon\|_2 \leq \frac{\|M_0\|_2}{\mu_0^R} \left\| M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\varepsilon^{k+1})^{-1} A^f \cdot h^f \right) \right\|_2 < \frac{\|M_0\|_2}{\mu_0^R} \left\| M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f \right) \right\|_2$$

Comme :

$$M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f \right) = M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\varepsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1} \right)$$

$$\text{alors } \|q_\varepsilon^{k+1} - q^\varepsilon\|_2 \leq \frac{\|M_0\|_2^2}{\mu_0^R} \left\| \tilde{\xi}(q_\varepsilon^k)^{-1} A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\varepsilon^{k+1} \right\|_2 \quad (\text{II-6.44})$$

L'inégalité (II-6.39) se déduit de (II-6.27) : $\|q^\varepsilon - q\| \leq k_2 \cdot \varepsilon$, et de (II-6.43) ■

II-6.3 Propriétés de la matrice d'itération

a) La hessienne du problème dual

$B_k = -H_D(h^k) = A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est la matrice d'itération des algorithmes II-6.1 et II-6.3.

1) Elle est de taille $n \times n$ où n est le nombre de noeuds simples.

2) La structure de B_k est celle de $A \cdot A$; elle ne dépend ni de l'indice k , ni de la matrice diagonale \tilde{D}_k :

$$B_k(i, i) = \sum_{\tau \in \Omega(i)} \tilde{D}_k(\tau, \tau)^{-1} \text{ où } \Omega(i) \text{ est l'ensemble des arcs adjacents à } i \quad (\text{II-6.45})$$

$$B_k(i, j) = \begin{cases} -\tilde{D}_k(\tau, \tau)^{-1} & \text{si l'arc } \tau \text{ relie les noeuds simples } i \text{ et } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-6.46})$$

$A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est une **matrice creuse** avec au plus $2(a-f)$ éléments non nuls hors diagonaux, car elle possède autant d'éléments sous-diagonaux non nuls que G possède d'arcs d'extrémités initiale et terminale un noeud simple.

3) $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est **symétrique définie positive**.

4) $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est à **diagonale fortement dominante** ; elle est évidemment à diagonale dominante :

$$B_k(i, i) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |B_k(i, j)|, i = 1, \dots, n$$

L'inégalité devient stricte dès que le noeud simple i a pour voisin un noeud réservoir ; par exemple, avec les numérotations des noeuds et des arcs, décrites au paragraphe II-1, le noeud simple de numéro un est connecté au réservoir de numéro N par l'arc numéro un ; ainsi :

$$B_k(1, 1) = \sum_{\tau \in \Omega(1)} \tilde{D}_k(\tau, \tau)^{-1} = \tilde{D}_k(1, 1)^{-1} + \sum_{\substack{\tau \in \Omega(1) \\ \tau \neq 1}} \tilde{D}_k(\tau, \tau)^{-1} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n |B_k(1, j)|$$

6) On peut supposer $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ **irréductible** ; soient X_s l'ensemble des noeuds simples, U_s l'ensemble des arcs dont les deux extrémités sont dans X_s et G_s le sous-graphe de $G = (X, U)$ induit par X_s : $G_s = (X_s, U_s)$. Une conséquence immédiate de la relation (II-6.46) est

que $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est irréductible si et seulement si G_s est connexe. En effet, G_s , est aux éléments diagonaux près, le graphe attaché à la structure de $H_D(h^k)$. Deux composantes connexes de G_s ne sont reliées dans $G=(X,U)$ que par un seul noeud réservoir ; en restreignant notre étude à chaque composante connexe de G_s , on peut donc supposer que G_s possède une seule composante connexe.

7) $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est une matrice de Stieltjes : en effet, c'est une matrice symétrique définie positive, et ses éléments hors-diagonaux sont négatifs.

Comme $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est de Stieltjes, $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est une M-matrice (R. S. Varga p. 85, 1962) ; son inverse est donc non négative :

$$\left(A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A \right)^{-1} \geq 0 \quad (\text{II-6.47})$$

Si de plus elle est irréductible, alors son inverse est strictement non négative (R. S. Varga p. 85, 1962). D'où,

$$\text{Si } G_s \text{ est connexe : } \left(A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A \right)^{-1} > 0 \quad (\text{II-6.48})$$

b) La hessienne du problème réduit

$H_R(z^k) = M_0 \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot M_0$ est la matrice d'itération de l'algorithme II-6.2.

1) Elle est de taille $(a-n) \times (a-n)$ où $a-n$ est le nombre de chaînes entre deux réservoirs ou cycles indépendants.

2) La structure de $H_R(z^k)$ est celle de $M_0 \cdot M_0$, elle ne dépend ni de l'indice k , ni de la matrice diagonale \tilde{D}_k :

$$H_R(z^k)(i,i) = \sum_{\tau \in \Gamma_i} \tilde{D}_k(\tau, \tau) \quad (\text{II-6.49})$$

où Γ_i est la $i^{\text{ème}}$ chaîne entre réservoir où le cycle correspondant à la $i^{\text{ème}}$ ligne de M_0 .

$$H_R(z^k)(i,j) = \begin{cases} -\tilde{D}_k(\tau, \tau) & \text{si } \tau \in (\Gamma_i^+ \cap \Gamma_j^-) \cup (\Gamma_i^- \cap \Gamma_j^+) \\ \tilde{D}_k(\tau, \tau) & \text{si } \tau \in (\Gamma_i^+ \cap \Gamma_j^+) \cup (\Gamma_i^- \cap \Gamma_j^-) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-6.50})$$

$H_R(z^k)$ est une matrice creuse

3) $H_R(z^k) = M_0 \cdot \bar{D}_k \cdot {}^t M_0$ est **symétrique définie positive**.

4) $H_R(z^k)$ est à **diagonale strictement dominante** car pour chacune des $a-n$ mailles, il existe un arc de C qui lui appartient strictement.

On dispose d'algorithmes très performants d'inversion de matrices creuses symétriques définies positives ; un algorithme des moindres degrés, pour optimiser la numérotation des noeuds, permet de limiter le remplissage par des éléments non nuls lors d'une factorisation L.D.^tL ; la structure creuse, connue est alors pleinement exploitée afin de limiter la place mémoire nécessaire au stockage de la matrice et le temps de calcul par itération.

II-6.4 La méthode des moindres degrés

Pour chaque itération, on doit résoudre le système linéaire :

$$B_k \cdot \Delta x_k = s_k \quad (\text{II-6.51})$$

où B_k est une matrice symétrique définie positive, creuse, éventuellement de grande taille.

Pour résoudre II-6.51, on factorise $B_k : L.D.^tL$ (Lascaux et Theodor p. 248, 1986) ; c'est-à-dire que l'on a :

$$B_k = L_k \cdot \Delta_k \cdot {}^t L_k \quad (\text{II-6.52})$$

où L_k est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et Δ_k est une matrice diagonale.

L'inversion de B_k est ensuite aisée.

L_k est une matrice qui n'est pas toujours creuse si B_k est creuse. On parle alors de **remplissage**. La place mémoire utile au stockage de L_k et le nombre d'opérations nécessaires à l'inversion de L_k dépendent du nombre de ses éléments non nuls. A partir du graphe de B_k , on connaît les éléments de L_k qui sont **logiquement non nuls** (cf. Lascaux et Theodor p. 299, 1986). Dans une première partie que l'on appelle **factorisation logique**, on calcule la position des éléments logiquement non nuls de L_k et l'on remplit les tableaux d'entiers nécessaires à la représentation de la structure de L_k . Les valeurs numériques de B_k interviennent dans une deuxième phase que l'on appelle **factorisation numérique**.

La matrice d'itération B_k , a pour tout k le même graphe (paragraphe II-6.3) : pour les algorithmes II-6.1 et II-6.3, le graphe de B_k est celui de $A.^tA$, et pour l'algorithme II-6.2 le graphe de B_k est celui de $M_0.^tM_0$. La factorisation logique n'est donc à effectuer qu'une seule fois ; il y aura autant de factorisations numériques que d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme.

La matrice $P.B_k.^tP$ est aussi symétrique définie positive pour une matrice de permutation P , nous pouvons réordonner le système II-6.51, comme :

$$(P.B_k.^tP).P.\Delta x_k = P.s_k \quad (\text{II-6.53})$$

La matrice triangulaire inférieure \tilde{L}_k , correspondant à la factorisation $L.D.^tL$ de $P.B_k.^tP$, n'a généralement pas le même nombre d'éléments non nuls que L_k . Le problème de trouver la meilleure renumérotation de B_k est un problème NP-complet (George et Liu, 1989) ; il est donc numériquement difficilement traitable.

On choisit alors un compromis entre la solution optimale et B_k : l'utilisation de la méthode des **Moindres degrés** permet de diminuer le remplissage de L_k .

Pour une description de l'algorithme des Moindres degrés, et pour son implémentation on pourra consulter George et Liu, (1981).

II-7 Validations numériques

II-7.1 Efficacité de la méthode des moindres degrés

Sur tous les essais numériques que nous avons effectués, la méthode des moindres degrés est tout-à fait efficace et performante pour résoudre le problème de l'Analyse. Nous avons choisi de montrer les remplissages sur les factorisations L.D.^tL de A.^tA et de M₀.^tM₀ pour les deux graphes : MERU et 480T. Le premier est assez peu maillé et le second l'est beaucoup plus. 480T est obtenu en dédoublant un réseau réel d'un peu plus de 200 arcs.

Pour trois méthodes de renumérotation des lignes et des colonnes de A.^tA et de M₀.^tM₀, nous avons représenté les structures des matrices L correspondantes. Les trois méthodes sont la **méthode de Cuthill-Mckee inverse** (P. Lascaux et R. Theodor p. 314-319, 1986), une **renumérotation colperm** qui consiste à numéroter en dernier les colonnes qui ont le plus d'éléments non nuls et la **méthode des moindres degrés**.

Pour mesurer l'importance du maillage, on définit le coefficient :

$$\tau = \frac{a - n}{n} \quad (\text{II-7.1})$$

représentant le rapport entre le nombre de chaînes entre réservoirs ou de cycles indépendants sur le nombre de noeuds simples. D'autres mesures de l'importance du maillage sont possibles, mais τ est très intéressante, car c'est aussi le nombre d'arcs de \bar{C} sur le nombre d'arcs de \bar{A} ou encore le nombre de lignes ou de colonnes de M₀.^tM₀ sur le nombre de lignes ou de colonnes de A.^tA.

τ est nul si G est un arbre avec un seul noeud réservoir, puisque alors le nombre de noeud est $N = n + 1$ et le nombre d'arc est égal à $N - 1$. Le cas où le nombre d'arc est plus grand que deux fois le nombre de noeuds simples ne se rencontre pratiquement jamais. On a de toutes les façons toujours : $a \leq 2(n + 1)$.

τ a donc pour encadrement :

$$\text{Si } a \leq 2n \quad 0 \leq \tau < 1 \quad (\text{II-7.2})$$

a) Le réseau de Meru

Le graphe du réseau de Meru, représenté figure 32, se compose de 87 arcs, 72 noeuds simples et 4 réservoirs. Il comprend 12 cycles et 3 chaînes entre réservoirs élémentaires. C'est un réseau qui n'est pas fortement maillé : $\tau = \frac{15}{72} = 0,208$.

Les réservoirs ont un nom et les noeuds simples un numéro.

Les arcs en trait plein sont ceux de \mathbb{A} , et ceux dessinés en pointillé sont ceux de \mathbb{C} . Il y a deux pompes sur les arcs (MERU,62) et (ESCH,1).

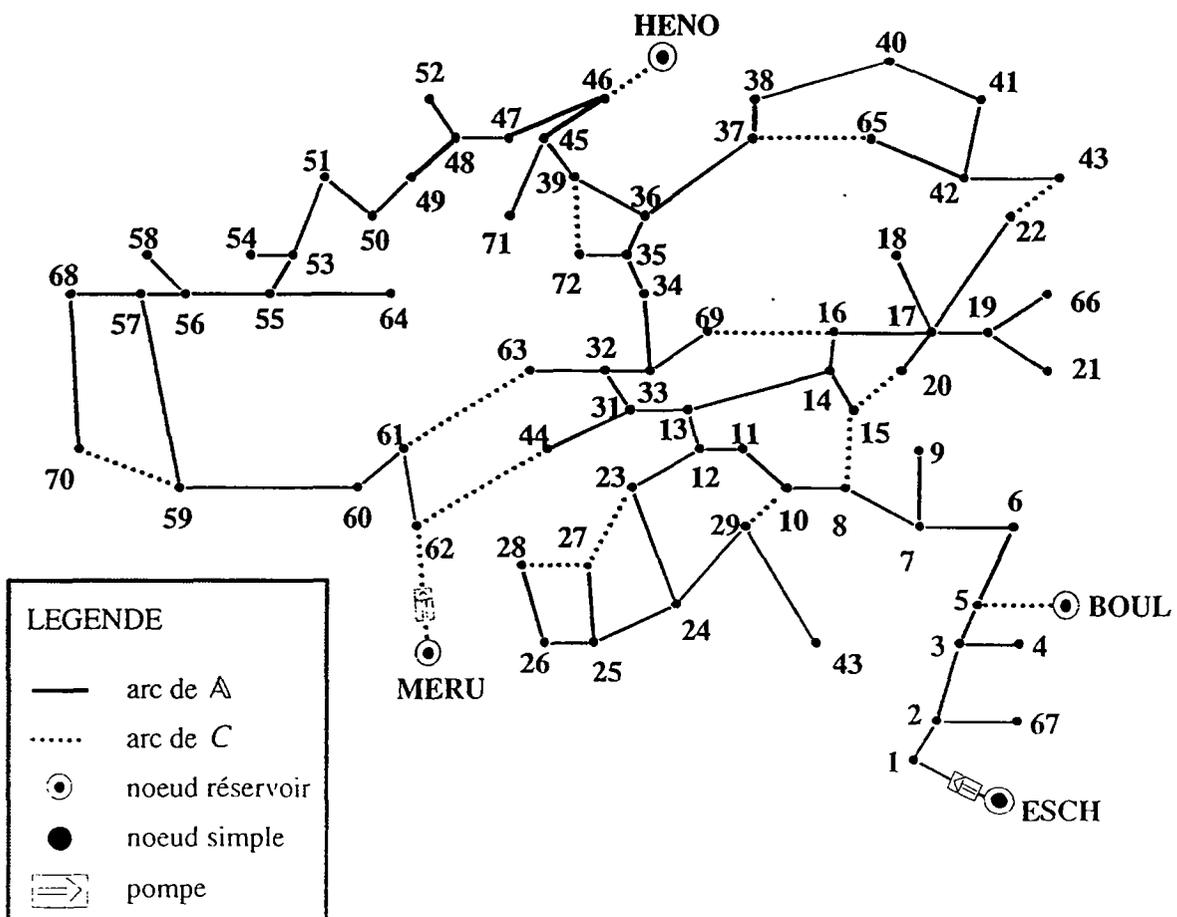


figure 32 : graphe du réseau de Meru

La figure 33 montre, pour quatre numérotations des noeuds simples, les résultats de la factorisation logique de la matrice creuse, 72×72 : $A \cdot A$. Les graphes sont obtenus par MATLAB 4.2b

L est notée :

- L, pour la numérotation des noeuds induite par l'algorithme H-1.1 .
- L CMcK, pour la renumérotation résultante de la méthode de Cuthill-McKee inverse :

- L colperm, pour la permutation colperm ;
- L MD, pour la méthode des moindres degrés.

Un élément non nul est symbolisé par un point, le nombre d'éléments non nuls de chacune des deux matrices est appelé nz.

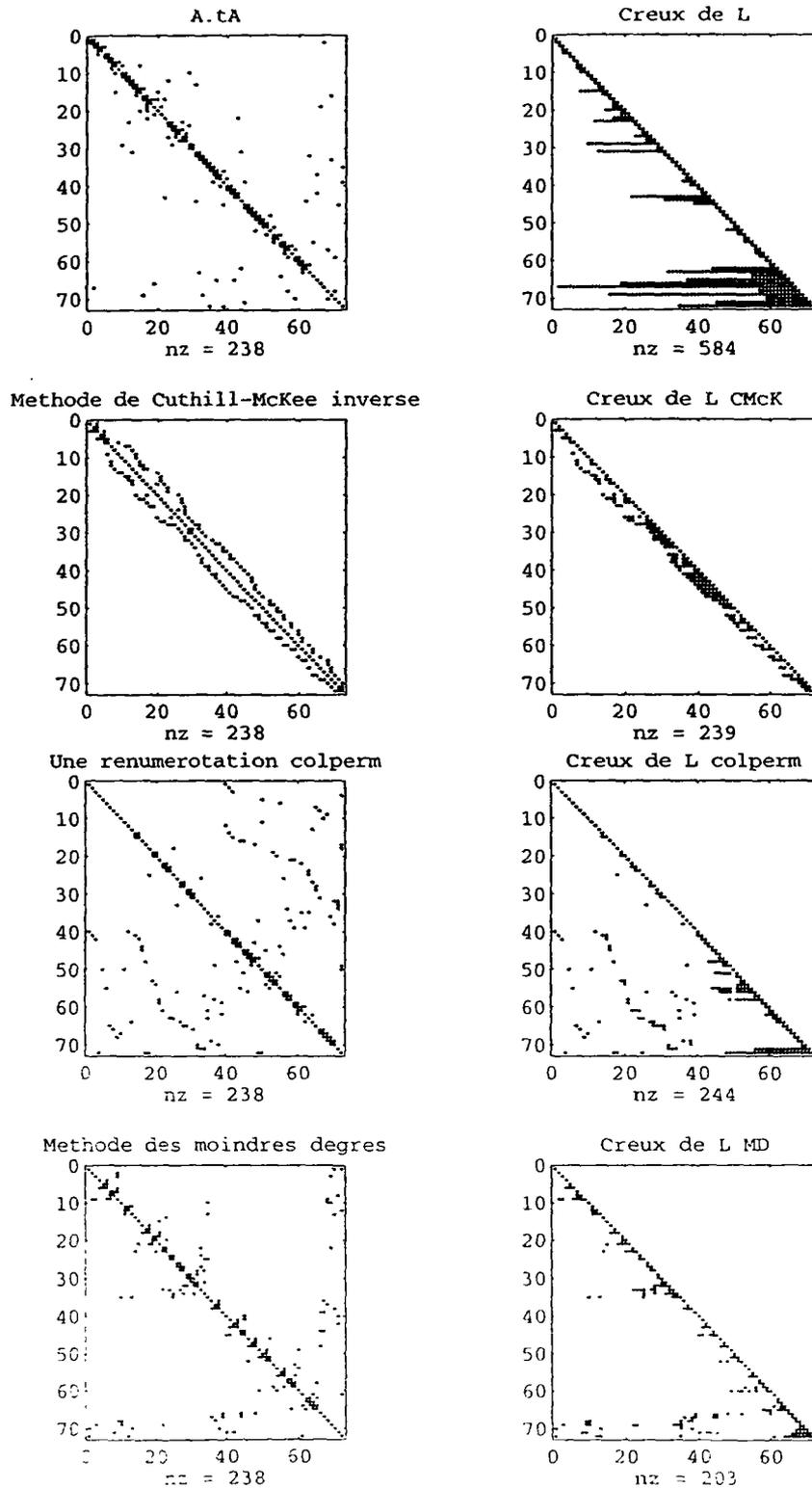


figure 33 : quatre factorisations logiques de $A \cdot A$ pour le réseau de Meru

Remarquons que $A.^tA$ est assez creuse, de densité : $\frac{238}{72 \times 72} \approx 0.0459$.

Les 238 éléments non nuls de $A.^tA$ se décomposent en 72 éléments diagonaux et 83 éléments sous-diagonaux, c'est-à-dire le nombre d'arc : 87 moins quatre arcs connectés à des noeuds réservoirs.

Les 584 éléments logiquement non nuls de la matrice L associée, se divisent en 72 uns sur la diagonale, 83 éléments sous-diagonaux du graphe de $A.^tA$, et 429 éléments logiquement non nuls correspondants au remplissage.

Le remplissage est conséquent puisque le nombre d'éléments non nuls sous-diagonaux de $A.^tA$ a été multiplié par 6 : $\frac{83 + 429}{83} = \frac{512}{83} \approx 6.17$.

Les trois permutations, diminuent efficacement le remplissage, la méthode qui donne les meilleurs résultats étant celle des **moindres degrés**.

En effet, après renumérotation des noeuds simples par cette méthode, le remplissage est de 48 éléments logiquement non nuls ; il y a donc $48 + 83 = 131$ éléments sous-diagonaux non nuls ; le remplissage est atténué puisqu'il ne représente plus que 58% des éléments sous-diagonaux non nuls.

Sur l'exemple du réseau de Meru, la renumérotation des noeuds simples par la méthode des moindres degrés a donc diminué de façon importante le remplissage de $A.^tA$. Vérifions qu'il en est de même pour $M_0.^tM_0$, matrice 15×15 , et regardons (figure 34) l'effet des trois permutations de $M_0.^tM_0$ sur la factorisation logique, avec les mêmes conventions que pour la figure 33.

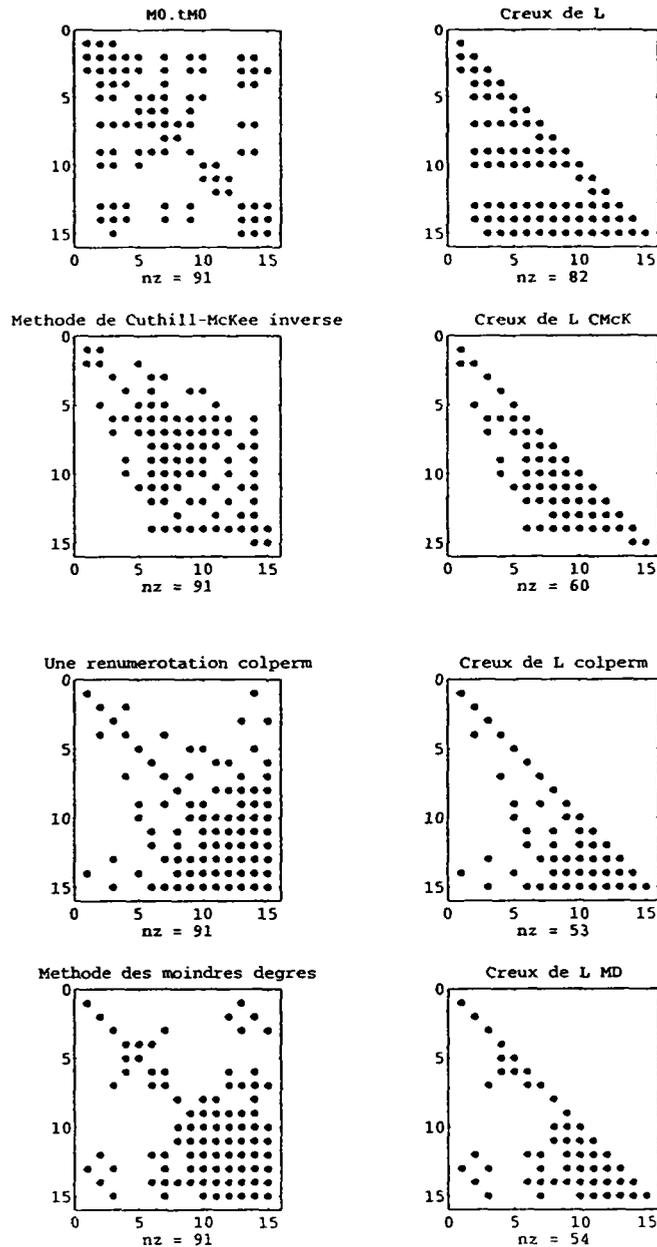


figure 34 : quatre factorisations logique de $M_0^{-1}M_0$ pour le réseau de Meru

La matrice $M_0^{-1}M_0$ possède 38 éléments sous-diagonaux ; le remplissage de la matrice L associée est donc de 29 éléments logiquement non nul.

La renumérotation Colperm est ici **optimale** puisque les 53 éléments non nuls de L colperm sont 15 éléments diagonaux et 38 éléments sous-diagonaux de $M_0^{-1}M_0$; son remplissage est donc nul.

La méthode des moindres degrés donne ici d'excellents résultats quoiqu'elle ne soit pas optimale puisque le remplissage n'est que de **un** élément.

b) Le graphe 480T

Le graphe 480T se compose de 480 arcs, 320 noeuds simples et 2 réservoirs. Il comprend 160 cycles ou chaînes entre réservoirs indépendantes. C'est un réseau qui assez fortement maillé : $\tau = \frac{160}{320} = 0,5$.

Il n'est pas fait ici de distinction entre les arcs de A et ceux C.

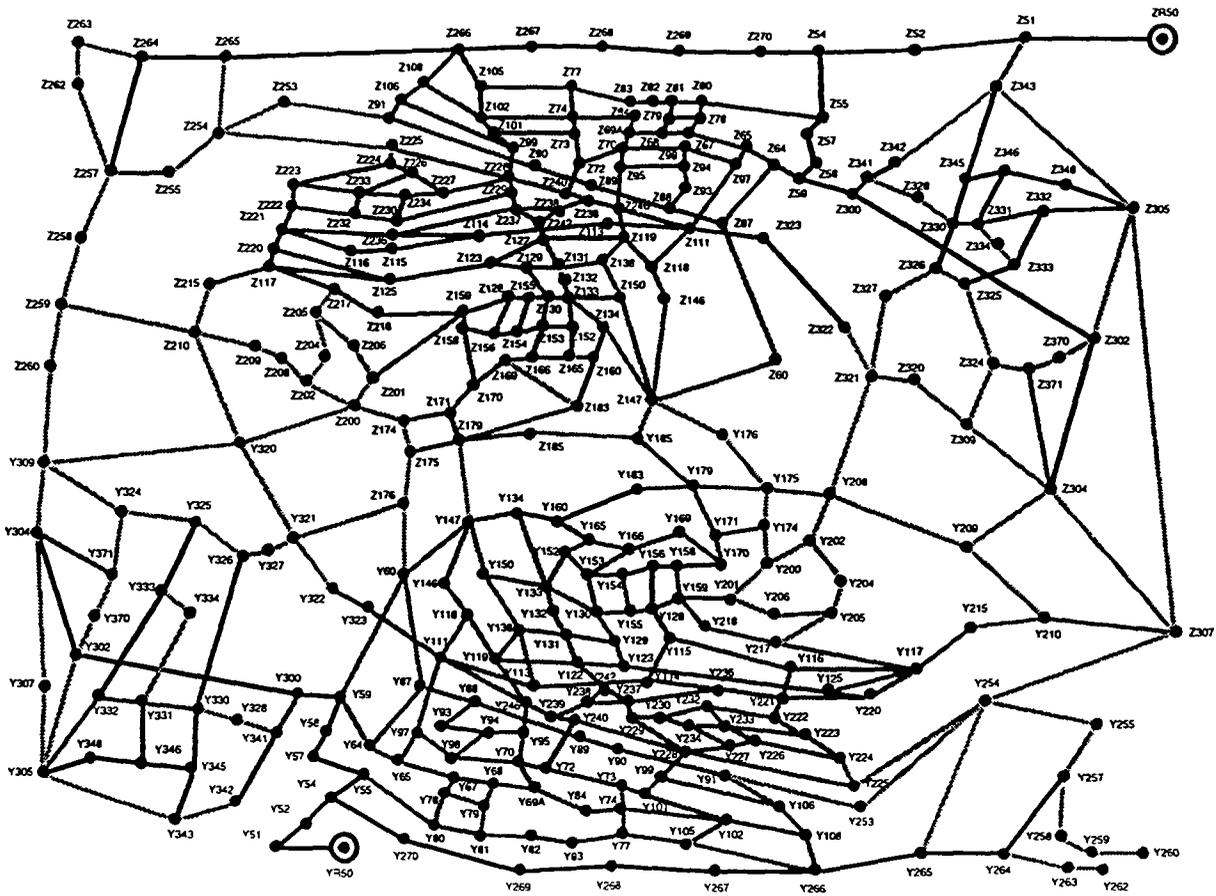


figure 35 : le graphe 480T

Observons (figure 36) les structures creuses des deux matrices 320x320 : $A \cdot A$ et L , pour les trois méthodes de renumérotation des lignes et des colonnes de $A \cdot A$ déjà présentées pour le réseau de Meru.

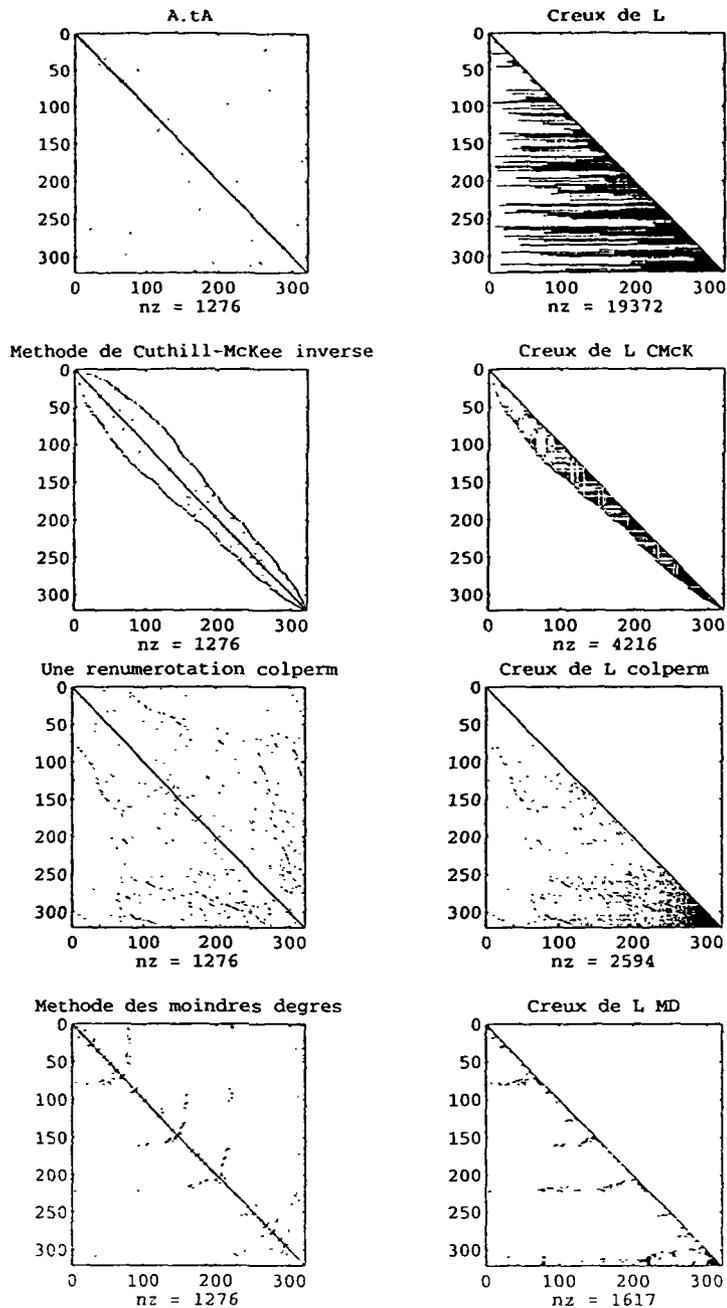


figure 36 : quatre factorisations logique de $A^t A$ pour le graphe 480T

Remarquons que $A^t A$ possède 1276 éléments non nuls dont 320 éléments diagonaux et 478 éléments sous-diagonaux.

Les 19372 éléments logiquement non nuls de la matrice L associée, se divisent en 320 uns sur la diagonale, 478 éléments logiquement non nuls sous-diagonaux du graphe de $A^t A$, et 18574 éléments logiquement non nuls correspondants au remplissage. Le nombre d'éléments sous-diagonaux a été multiplié par 40.

Les trois permutations diminuent efficacement le remplissage ; la méthode qui donne les meilleurs résultats est encore celle des **moindres degrés**.

Après renumérotation des noeuds simples par la méthode des moindres degrés, le remplissage est de **819** éléments logiquement non nuls ; il y a donc $819 + 478 = 1297$ éléments sous-diagonaux non nuls ; le remplissage est atténué puisqu'il ne représente plus que $\frac{819}{478} \times 100 \approx 171\%$.

Sur l'exemple du réseau 480T la renumérotation des noeuds simples par la méthode des moindres degrés a donc diminué de façon importante le remplissage de $A \cdot A$. Vérifions qu'il en est de même pour $M_0 \cdot M_0$.

Regardons (figure 37) l'effet des trois permutations sur la factorisation logique de $M_0 \cdot M_0$: 160×160 .

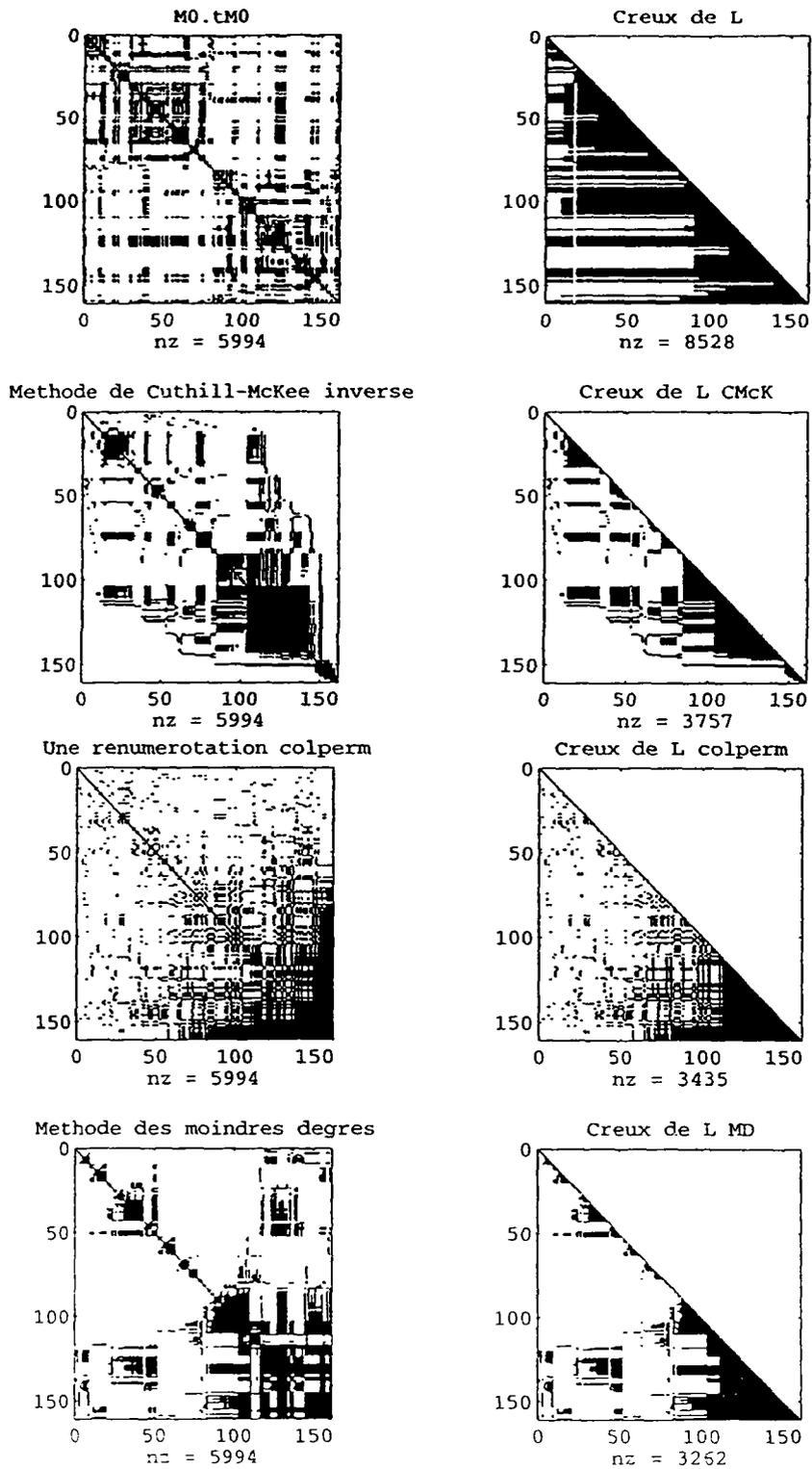


figure 37 : quatre factorisations logique de $M_0^{-1}M_0$ pour le graphe 480T

La matrice $M_0^{-1}M_0$ possède 2917 éléments sous-diagonaux ; le remplissage de la matrice L associée est donc de 5451 éléments logiquement non nul.

La méthode des moindres degrés donne ici d'excellents résultats puisque le remplissage n'est que de 185 éléments

Sur les deux exemples traités et pour tous les essais numériques, la méthode des moindres degrés permet de minimiser de façon efficace le remplissage des matrices L associées aux deux matrices $M_0 \cdot {}^tM_0$ et $A \cdot {}^tA$; le nombre d'opération nécessaire à l'inversion de l'une ou de l'autre de ces deux matrices dépend essentiellement de sa **densité** : nombre d'éléments non nuls divisés par nombre d'éléments au total.

Pour les réseaux fortement maillés, $M_0 \cdot {}^tM_0$ est une matrice assez pleine et de taille assez importante. Ainsi, pour le réseau 480T, l'inversion de la matrice $A \cdot {}^tA$ par la méthode des moindres degrés (chapitre II-6.4) est préférable à celle de $M_0 \cdot {}^tM_0$ puisqu'elle demande moins d'opération : la matrice L associée à $M_0 \cdot {}^tM_0$ possède **3102** éléments sous-diagonaux alors que la matrice L associée à $A \cdot {}^tA$ n'en possède que **1297**. Pour le réseau de Meru, c'est le contraire (39 pour $M_0 \cdot {}^tM_0$ contre 131 pour $A \cdot {}^tA$).

Dans le prochain chapitre, nous avons démaillé progressivement le réseau 480T, afin de déterminer l'influence du nombre de maille sur le remplissage des deux matrices $M_0 \cdot {}^tM_0$ et $A \cdot {}^tA$.

II-7.2 Comparaison pour l'inversion des matrices d'itération

La structure de $A \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot A$ est celle $A \cdot A$ et la structure de $M_0 \cdot \tilde{D}_k^{-1} \cdot M_0$ est celle de $M_0 \cdot M_0$ (cf. § II-6.3 propriétés de la matrice d'itération). Par conséquent, pour comparer l'inversion des matrices d'itérations des trois algorithmes II-6.1, II-6.2 et II-6.3 par la méthode des moindres degrés (§ II-6.4), il suffit de comparer l'inversion des deux matrices $A \cdot A$ et $M_0 \cdot M_0$.

On enlève dizaine après dizaine les arcs "maillants" du graphe 480T jusqu'à ce que le graphe ne devienne plus qu'un arbre possédant un seul chemin entre les deux réservoirs et aucun cycle. En fin d'opération, C possède un seul arc.

La matrice $A \cdot A$ est de taille constante 320×320 tandis que la matrice $M_0 \cdot M_0$ a sa taille qui varie de 160×160 à 1×1 quand τ le rapport entre le nombre d'arcs de C et le nombre d'arcs de A passe de 0,5 à 0,003125.

Sur les figures 38, pour $A \cdot A$ et 39 pour $M_0 \cdot M_0$, on représente la variation en fonction de τ du nombre d'éléments logiquement non nuls, avec ou sans moindre degré :

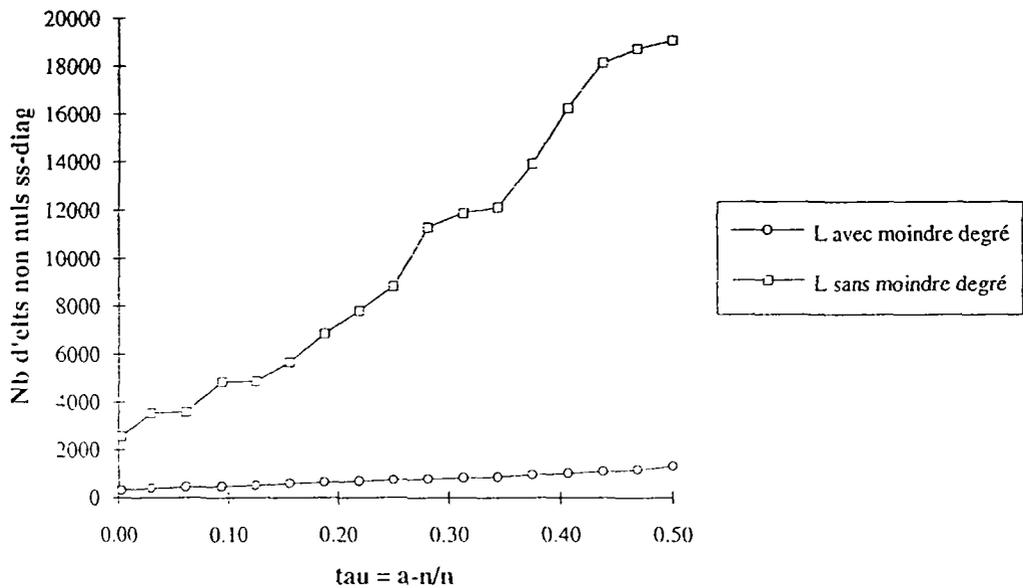


figure 38 : factorisation logique de $A \cdot A$ en fonction de l'importance du maillage

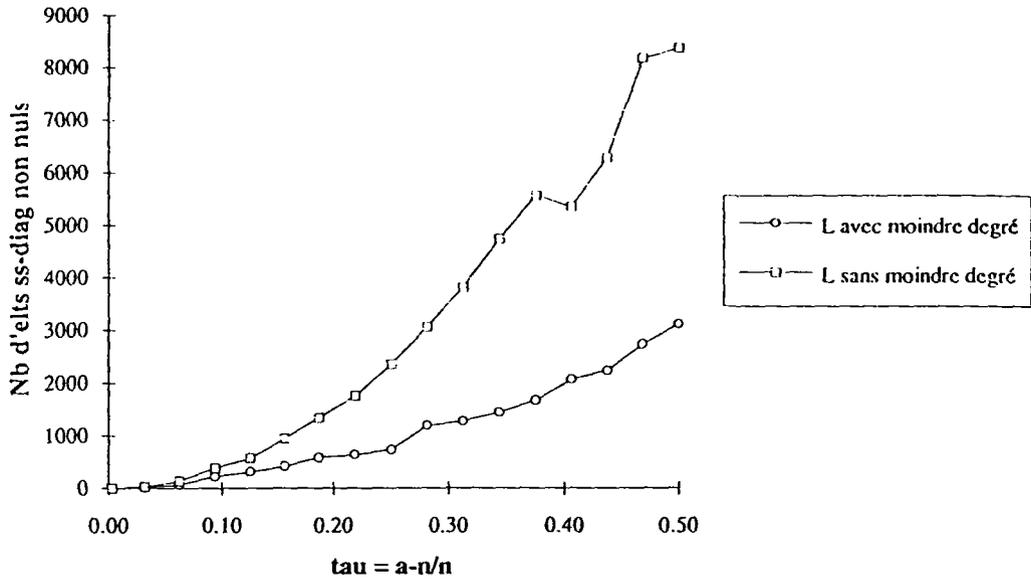


figure 39 : factorisation logique de $M_0^{-t} M_0$ en fonction de l'importance du maillage

Les figures 38 et 39 confirment que la méthode des moindres degrés permet de diminuer de façon très importante le remplissage.

Sur la figure 40 on observe, que sans permutation de la numérotation des noeuds simples par la méthode des moindres degrés, la matrice L issue de la factorisation logique de $M_0^{-t} M_0$ a toujours moins d'éléments logiquement non nuls que celle issue de la factorisation logique de $A^{-t} A$.

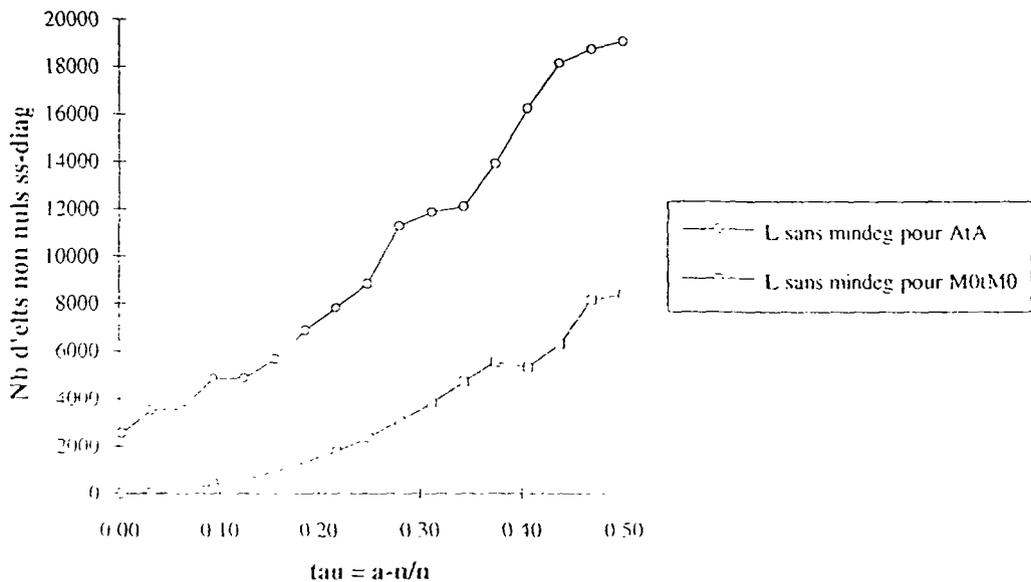


figure 40 : comparaison pour l'inversion des matrices d'itération sans moindre degré

La figure 41 montre qu'à partir d'un certain τ , avec la méthode des moindres degrés, le résultat précédent est inversé.

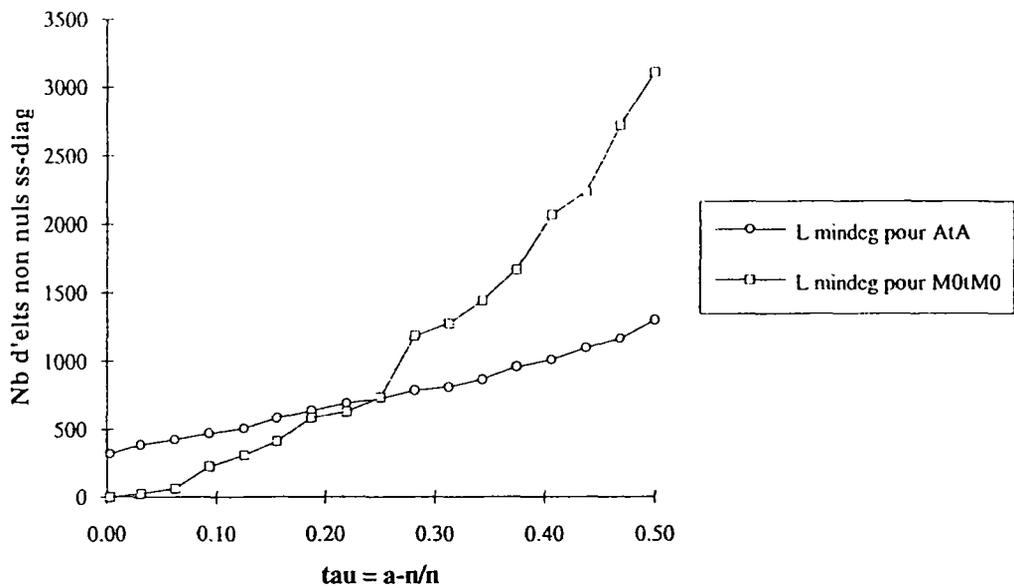


figure 41 : comparaison pour l'inversion des matrices d'itération avec moindre degré

En effet, pour $\tau \geq 0.25$ la matrice L , issue de la factorisation de $M_0 \cdot {}^t M_0$ après permutation de ses lignes et de ses colonnes par la méthode des moindres degrés, possède plus d'éléments non nuls que pour $A \cdot {}^t A$.

L'inversion de $A \cdot {}^t A$ est donc moins coûteuse à partir d'un certain τ . Pour cet exemple particulier : $\tau \geq 0.25$.

Nous allons comparer les implémentations des trois algorithmes choisis du point de vue taille-mémoire, vitesse d'exécution et précision.

II-7.3 Performances et mérites des implémentations

Le tableau de la figure 42, résume pour chacun des trois algorithmes de Newton, les initialisations, les critères d'arrêts.

<i>Algorithmes</i>	<i>Initialisations</i>	<i>Tests d'arrêt</i>
Newton réduit II-6.2	0.5 m/s fois la section droite pour chaque arc de C	$\left\ M_0 \cdot \left(\tilde{\xi}(q_\epsilon^{k+1}) - {}^t A^f \cdot h^f \right) \right\ _\infty \leq 10^{-2} \text{ m}$
Newton sur le lagrangien II-6.3	pour les arcs de C comme pour Newton réduit pour les arcs de A : $q^A = -A_1^{-1} \cdot (A_2 \cdot q^c + d)$	$\left\ \tilde{\xi}(q_\epsilon^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_\epsilon^{k+1} \right\ _\infty \leq 10^{-2} \text{ m}$
Newton dual II-6.1	toutes les charges sont prises égales à celle du premier réservoir de la numérotation	$\left\ A \cdot q_\epsilon^{k+1} + d \right\ _\infty \leq 10^{-2} \text{ l/s}$

figure 42 : tableau des initialisations et des tests d'arrêts

Analysons les comportements de chacun des trois algorithmes de Newton devant la convergence. Le réseau choisi pour cette validation numérique est 480T.

On représente figure 43, les valeurs prises par le lagrangien L_ϵ en fonction des itérations.

Le point-selle est atteint par les algorithmes primal et primal-dual en faisant décroître le lagrangien, par l'algorithme dual en le faisant croître.

Les algorithmes primaux II-6.2 et II.6.3 convergent tous deux en **huit** itérations : ils ont été initialisés de la même façon (comme le montre le tableau de la figure 42) ; les itérés sont donc les mêmes (§II-5.1 conclusions sur les méthodes primales). Les débits dans les arcs satisfont à la conservation de la masse pour chaque itération. La conservation de l'énergie est satisfaite pour la huitième itération au seuil de tolérance donné par le tableau précédent. On constate la stricte décroissance de la fonction primale réduite. Les itérés vérifient :

$$\begin{aligned}
 L_{\epsilon}(q_{\epsilon}^{k+1}, h_{\epsilon}^{k+1}) &= J_{\epsilon}(z_{\epsilon}^{k+1}) < J_{\epsilon}(z_{\epsilon}^k) = L(q_{\epsilon}^k, h_{\epsilon}^k) \\
 -A \cdot q_{\epsilon}^{k+1} - d &= 0_n \\
 -A \cdot q_{\epsilon}^k - d &= 0_n
 \end{aligned}$$

L'algorithme II-6.1 de Newton sur le problème dual converge en seize itérations. La conservation de l'énergie est satisfaite dès la première itération, et la conservation de la masse pour la convergence. La fonction duale croit strictement. Les itérés vérifient :

$$\begin{aligned}
 L_{\epsilon}(q_{\epsilon}^{k+1}, h_{\epsilon}^{k+1}) &= G_{\epsilon}(h_{\epsilon}^{k+1}) > G_{\epsilon}(h_{\epsilon}^k) = L(q_{\epsilon}^k, h_{\epsilon}^k) \\
 \tilde{\xi}(q_{\epsilon}^k) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_{\epsilon}^k &= 0_a \\
 \tilde{\xi}(q_{\epsilon}^{k+1}) - {}^t A^f \cdot h^f - {}^t A \cdot h_{\epsilon}^{k+1} &= 0_a
 \end{aligned}$$

Quand l'optimum est atteint, on observe que :

$$J_{\epsilon}(q_{\epsilon}^c) = L_{\epsilon}(q_{\epsilon}^c, h_{\epsilon}^c) = G_{\epsilon}(h_{\epsilon}^c)$$

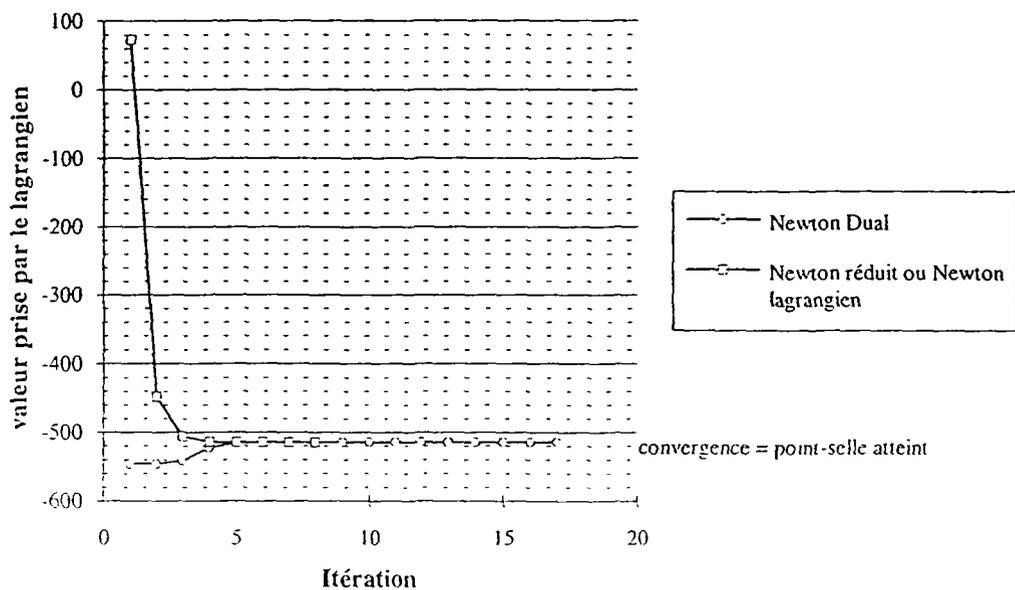


figure 43 : recherche du point-selle du lagrangien pour le réseau 480T

Sur les figures 44 et 45 sont représentés les évolutions des tests d'arrêt de Newton dual et de Newton sur le lagrangien. On observe une convergence plus lente pour la l'algorithme de Newton dual (figure 44) que pour l'algorithme de Newton sur le lagrangien (figure 45) qui inverse à chaque itération la hessienne du problème dual mais qui bénéficie du bon conditionnement du problème primal.

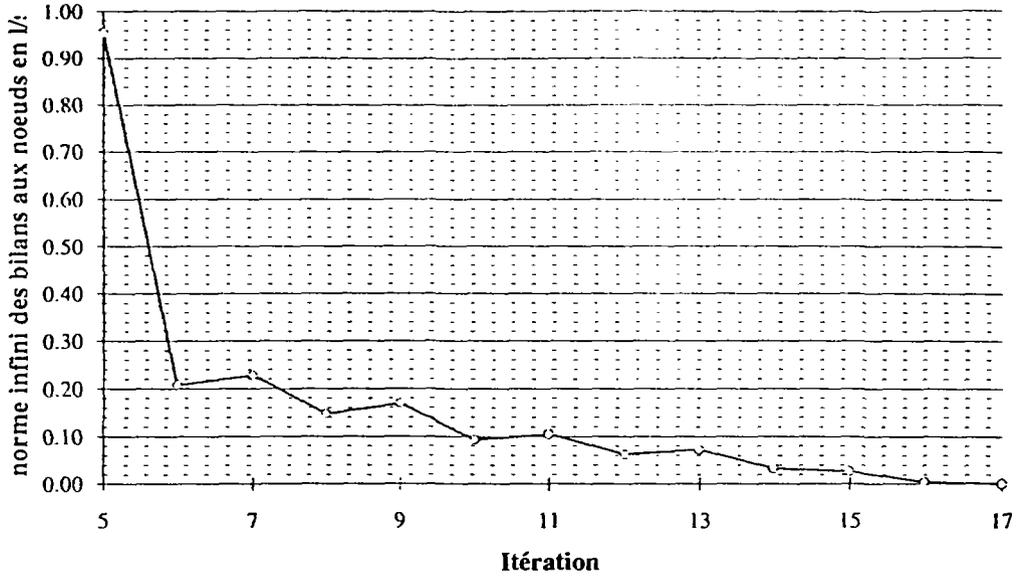


figure 44 : évolution du test d'arrêt de Newton dual

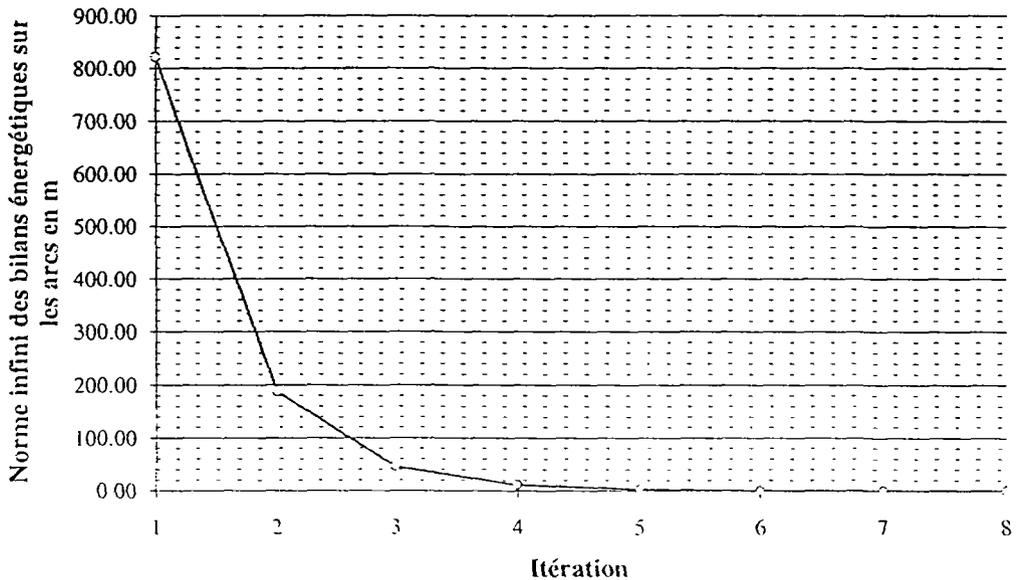


figure 45 : évolution du test d'arrêt de Newton sur le lagrangien

Les figures 46, 47 et 48 présentent les temps CPU globaux, les durées moyennes d'une itération, et les durées du prétraitement, pour différentes valeurs de tau, et pour chacun des trois algorithmes de Newton. Pour obtenir une bonne mesure de ces temps CPU sur un PC 486 (problèmes d'interruption), la mesure d'une durée étant précise à ± 0.5 seconde : on fixe le nombre d'itération à 500 et on mesure la durée des cinq cents itérations : on mesure le temps d'exécution de 25 fois le même problème de l'Analyse

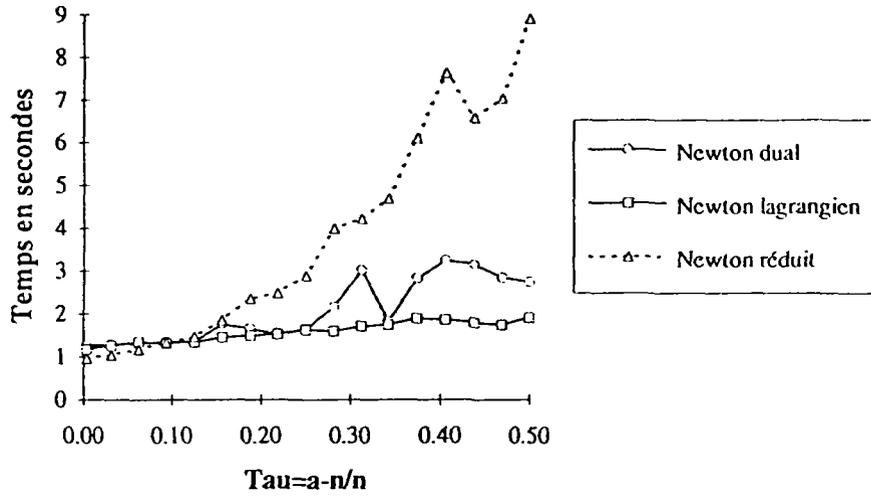


figure 46 : temps CPU global en fonction de l'importance du maillage

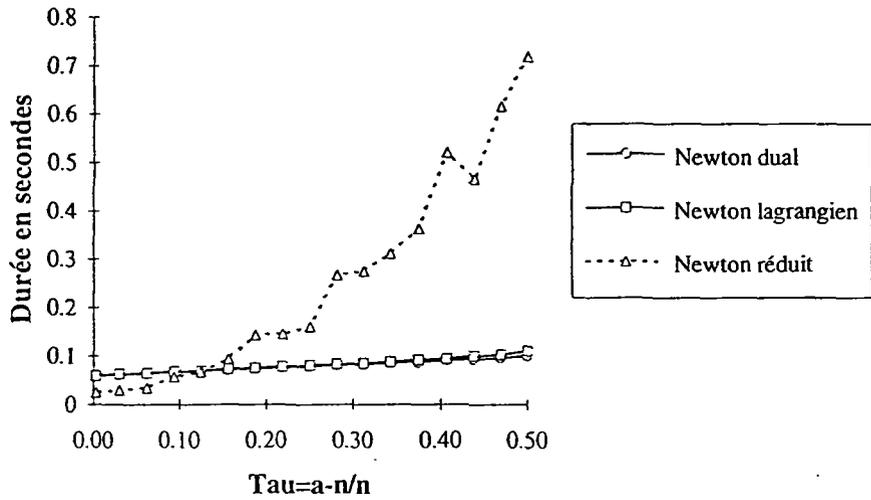


figure 47 : durée moyenne d'une itération en fonction de l'importance du maillage

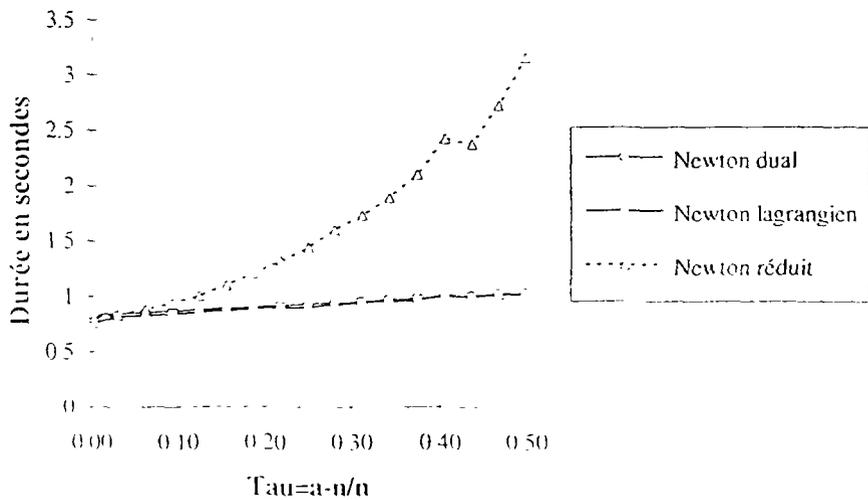


figure 48 : durée du prétraitement en fonction de l'importance du maillage

Les temps CPU du prétraitement et les durées moyennes d'une itération sont les mêmes pour les méthodes Newton dual et Newton sur le lagrangien qui ne sont pas fortement influencés par le coefficient de maillage ; ce bon comportement était prévisible car le remplissage de $A^t A$ par la méthode des moindres degrés augmente de façon quasi-linéaire avec τ (figure 41). Newton sur le lagrangien est préférable à Newton dual puisqu'il demande moins d'itération.

Les temps CPU par itération de l'algorithme de Newton réduit varient rapidement avec τ . Dès que $\tau \geq 0.1$ l'application de cette méthode de résolution est moins intéressante que les deux autres.

Pour la résolution du problème de l'Analyse nous utiliserons l'**algorithme de Newton sur le lagrangien** tel qu'il est implémenté en II-6.3 avec la méthode des moindres degrés pour l'inversion de la matrice d'itération, car :

- Il inverse la hessienne du problème dual ; les durées du prétraitement et les temps CPU par itération sont faibles et sont peu influencés par la proportion du maillage.
- Il converge en assez peu d'itération (7 ou 8 en général).
- Il n'est pas obligatoire de partir d'un q^0 réalisable (figure 40), i.e qui satisfait $A \cdot q + d = 0_n$. Le débit dans chaque arc de \mathbb{A} et de C peut-être pris à 0.5 m/s fois la section droite. Dans un calcul dynamique, sur une journée par exemple, la solution de débit initiale est celle du pas de temps précédent.

Tous les programmes ont été écrit en fortran 77 et les temps CPU obtenus avec un PC 486 dx2 66Mhz. L'algorithme de Newton sur le lagrangien a été inclus dans un code qui permet de traiter des réseaux de plus de mille arcs, et autant de noeuds.

CHAPITRE 3

Le problème de l'Identification du réseau

III LE PROBLEME DE L'IDENTIFICATION DU RESEAU

La résolution du problème de l'Analyse pour un instant t , suppose la donnée sur les arcs, d'un vecteur qui identifie les données statiques du réseau (pour les périodes auxquelles nous nous intéressons), et les données aux noeuds, soit du débit, soit de la charge, qui dépendent du temps. Il s'agit :

- du vecteur r , des résistances dans les arcs de $G = (X, U)$;
- du vecteur $d(t)$, des débits aux noeuds simples à l'instant t ;
- du vecteur $h^f(t)$, des charges aux noeuds réservoirs.

La société fermière, qui s'occupe de la distribution de l'eau potable d'un réseau, peut être confrontée à de grandes incertitudes sur les rugosités dans les conduites, et sur la consommation instantanée des abonnés. Dans une telle situation, pour connaître l'état du réseau, il n'est pas possible de résoudre le problème de l'Analyse.

Le problème inverse du problème de l'Analyse serait de mesurer tous les débits sur les arcs et toutes les charges sur les noeuds pour déterminer toutes les résistances et toutes les demandes. Même si comme nous le montrerons, ce calcul est aisé et explicite, un tel effort d'implantation des mesures est économiquement irréalisable.

Il est plus intéressant d'identifier, à l'aide de quelques mesures, moins de paramètres inconnus, qui peuvent aider à une bonne gestion de la distribution, à une surveillance du réseau et à des détections de fuite. On parle alors du calage d'un réseau d'A.E.P., qui comme le précise A. Hauguel, (1991), consiste à :

- lever des incertitudes sur des points à problème ;
- reproduire les grands transits, la respiration des réservoirs, les fortes pertes de charges sur les grandes longueurs de canalisation ou en présence de grandes vitesses, les fortes variations de pression en certains noeuds.

Comme Powell et al., (1987), nous définirons le vecteur d'état comme l'ensemble minimum de valeurs nécessaire à complètement décrire toutes les variables. Si l'ensemble des mesures proposées est suffisant pour l'estimation d'état, nous dirons qu'il y a observabilité du réseau. La détermination de la taille, de l'emplacement et de la nature des mesures sont les objectifs du problème du Choix de mesure dont la résolution fera l'objet du chapitre IV.

Notre première préoccupation va être de définir un vecteur d'état : x , qui sera représentatif d'une certaine photographie du réseau.

Pour une estimation de x , nous pourrions alors comparer un ensemble de valeurs mesurées : y^{mes} , avec l'ensemble de valeurs prédites : y^{calc} . Ainsi :

$$\text{si } y^{calc} = y(x) \text{ on doit rapprocher } y^{calc} \text{ et } y^{mes}$$

Chaque fois que \hat{x} désigne une solution au sens des moindres carrés de " $\varphi(x) = b$ ", on utilisera le symbolisme : $\varphi(\hat{x}) \equiv b$.

Le problème de l'Identification du réseau consiste à chercher \hat{x} pour minimiser, dans le cas le plus simple, la norme euclidienne de $y^{mes} - y^{calc}$; il se formule donc ainsi :

$$\text{On cherche } \hat{x} / y(\hat{x}) \equiv y^{mes}$$

On utilise le critère d'erreur des moindres carrés ordinaires (MCO), somme des écarts entre valeurs mesurées et valeurs prédites par le modèle :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |y_i^{mes} - y_i(x)|^2 \quad (\text{III-1.1})$$

Les mesures sont en petit nombre et installées pendant une campagne de mesure. La distribution des erreurs de mesures nous est inconnue et seule la précision des appareils de mesure : Δy_i , est connue. Pour prendre en compte les aléas dans les résultats des mesures, on écrit le modèle de régression non linéaire :

$$y^{mes} = y(x) + \delta y \quad (\text{III-1.2})$$

On cherche alors à minimiser le critère d'erreur des moindres carrés pondérés (MCP), qui tient compte du maximum d'information en notre possession :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{y_i^{\text{mcs}} - y_i(x)}{\Delta y_i} \right)^2 \quad (\text{III-1.3})$$

Dans le cas d'erreurs grossières pour l'estimation, on mettra en oeuvre un algorithme qui corrige automatiquement les poids initiaux : $w_i = \Delta y_i^{-1}$ en fonction des résidus pondérés obtenus (MCPA).

Comme le soulignent William H. Press et al., (1990), pour être vraiment utile, une procédure d'identification doit fournir :

- i) des paramètres ajustés (une estimation ponctuelle) ;
- ii) des estimations de l'erreur commise sur les paramètres (une estimation par intervalle) ;
- iii) une mesure statistique de la qualité de l'approximation (propriétés de l'estimateur, étude des résidus et adéquation du modèle).

III-1 Position du problème et informations disponibles

III-1.1 Le Modèle de l'Analyse

L'existence et l'unicité de la solution du problème de l'Analyse (§II-4), permet de garantir l'existence de la fonction \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n &\xrightarrow{\mathcal{A}} \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n \\ (r, d) &\mapsto \mathcal{A}(r, d) = (q, h) \end{aligned}$$

définie implicitement par les équations de l'équilibrage hydraulique :

$$F((r, d), \mathcal{A}(r, d)) = \begin{pmatrix} A \cdot q + d \\ \tilde{\xi}(r, q) - {}^t A \cdot h - {}^t A^f \cdot h^f \end{pmatrix} = 0_{a+n} \quad (\text{III-1.4})$$

où la fonction perte de charge : $\tilde{\xi}$ est la même qu'en (II-6.1).

III-1.2 Le problème Inverse

Le problème inverse du problème de l'Analyse est celui où l'on cherche à déterminer toutes les résistances dans les arcs, et toutes les demandes aux noeuds

simples, à partir de la donnée de tous les débits dans les arcs et de toutes les charges aux noeuds.

Notons \mathcal{A}^{-1} , l'application :

$$\mathcal{A}^{-1}: (\mathbb{R}^*)^a \times \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n \quad \text{pour laquelle, } F(\mathcal{A}^{-1}(q, h), q, h) = \mathbf{0}_{a+n}$$

$$(q, h) \mapsto \mathcal{A}^{-1}(q, h) = (r(q, h), d(q, h))$$

Contrairement au problème direct de l'Analyse où on ne connaît pas l'expression des fonctions $(r, d) \mapsto q(r, d)$ et $(r, d) \mapsto h(r, d)$, ici la fonction d est donnée explicitement par :

$$d(q, h) = -A \cdot q \quad (\text{III-1.5})$$

et les a composantes de $r(q, h)$ dans le cas régularisé (II-6.1) valent :

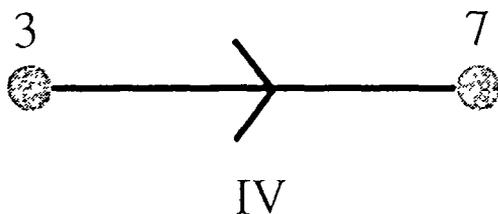
$$r_i(q, h) = \begin{cases} \frac{\left({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot h \right)_i - \xi_i^{\sin}(q_i) - \xi_i^{\text{pomp}}(q_i)}{q_i |q_i|^{0,852}}, & \text{si } |q_i| \geq \varepsilon \\ \frac{\left({}^t A^f \cdot h^f + {}^t A \cdot h \right)_i - \xi_i^{\sin}(q_i) - \xi_i^{\text{pomp}}(q_i)}{0,426\varepsilon^{-1,148} q_i^3 + 0,574\varepsilon^{0,852} q_i}, & \text{si } |q_i| \leq \varepsilon, q_i \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III-1.6})$$

Des expressions de d et de r , on déduit :

$$\mathcal{A}^{-1} \in C^1\left((\mathbb{R}^*)^a \times \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n\right)$$

Application III-1.2

Sur les deux exemples ci-dessous la résistance de l'arc IV et le débit au noeud simple 3, sont avec les formules (III-1.5) et (III-1.6) en supposant qu'il n'y a que des pertes de charges linéaires et un débit q_4 non nul :



$$r_4 = \frac{h_3 - h_7}{q_4 \cdot |q_4|^{0,852}}$$

figure 49 : détermination de la résistance

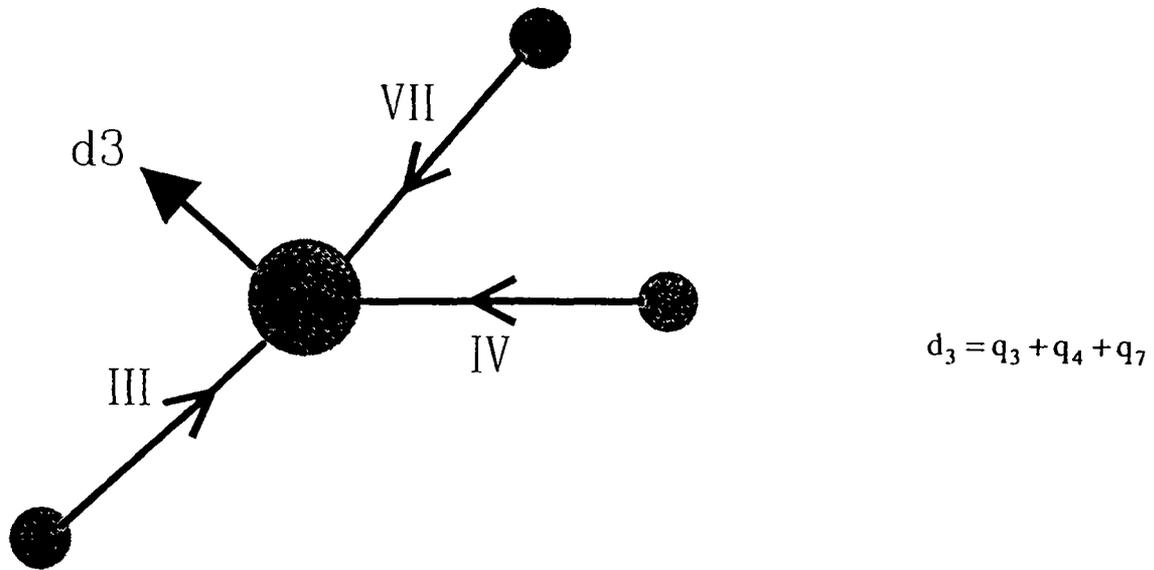


figure 50 : détermination de la demande

ainsi : $r_4 = r_4(q_4, h_3, h_7)$ et $d_3 = d_3(q_3, q_7, q_4)$.

Comme nous l'avons déjà observé, pour des raisons techniques et financières, le vecteur (q, h) n'est que partiellement mesuré et le nombre de mesures, égal à m , est généralement beaucoup plus petit que $a+n$. Or, le nombre d'inconnues du problème Inverse est égal à $a+n$. Les relations entre les variables étant données par (III-1.5) et (III-1.6), il n'y a pas toujours unicité de la solution avec m mesures.

III-1.3 Prédiction des mesures

$x \in \mathbb{R}^p$, est le vecteur d'état que l'on cherche à estimer, et $y^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des valeurs mesurées.

Expliquons, la construction de $y(x)$ valeur prédite de y^{mes} à partir du vecteur d'état x .

Il existe par définition de x , deux fonctions, $x \mapsto r(x)$ et $x \mapsto d(x)$. Nous préciserons ces fonctions plus tard ; elles dépendent du choix de x .

(r, d, q, h) doit vérifier les équations de l'Analyse (III-1.4), ainsi :

$$F(r(x), d(x), q(x), h(x)) = 0_{a+n}$$

Par conséquent, (r, d) et (q, h) sont reliés par \mathcal{A} . On peut donc représenter la situation par :

$$x \rightarrow (r(x), d(x)) \xrightarrow{\mathcal{A}} (q(x), h(x))$$

Les m mesures peuvent être de débit sur un arc, de charge aux noeuds simple ou de demande aux noeuds. Ainsi, les valeurs prédites par $x : y_i(x)$ pour $i = 1, \dots, m$, sont m composantes du vecteur :

$$(q(x), h(x), -A \cdot q(x), -A^t \cdot q(x))$$

On obtient $y(x)$ par la composé des applications :

$$x \in \mathbb{R}^p \rightarrow (r(x), d(x)) \xrightarrow{\mathcal{A}} (q(x), h(x)) \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^m$$

Pour une valeur de x , on calcule donc $y(x)$ en résolvant le problème de l'Analyse.

Nous allons faire une présentation des travaux à notre connaissance les plus récents, qui ont conduit à la résolution d'un problème d'optimisation.

III-1.4 Synthèse bibliographique

Il y a observabilité du réseau, si la donnée de m valeurs mesurées, permet de déterminer un unique vecteur d'état x . Des réponses à l'observabilité sont connues dans le cas où les relations débit/charge ou plus généralement les relations flot/tension, i.e. les équations constitutives, sont linéaires.

a) Observabilité algébrique

Etant donné un vecteur d'état : x , Cohen et Carpentier, (1987), ont donné des conditions algébriques sur le rang de certaines matrices, pour que le réseau soit observable ; ils montrent que les conditions d'observabilité de Takao Ozawa (1987) qui s'appuie sur les propriétés de sous-graphes partiels particuliers de $G=(X,U)$, sont alors vérifiées ; les lois de pertes de charges sont cependant supposées linéaires.

Ces conditions dans le cas de pertes de charge non linéaires sont nécessaires à l'observabilité, mais pas suffisantes, car plusieurs minima locaux sont possibles.

b) Les différents estimateurs

Nous avons adopté nos propres notations et pas celles de chaque auteur.

Estimateurs des moindres carrés avec poids :

Cohen et Carpentier, (1987), pour rendre le réseau observable algébriquement, recherchent l'estimation du vecteur d'état x , la plus proche d'un sous-espace vectoriel particulier défini par $B.x = 0_s$, avec $s < p$, sous la contrainte que les mesures soit exactement vérifiées. Ils minimisent ainsi :

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2} \langle M.B.x, B.x \rangle_s \text{ sous } y(x) = J.x + y(0) = y^{\text{mes}} \quad \text{ici } p > m$$

où M est symétrique définie positive et indique la confiance en $B.x = 0_s$.

Cette approche est intéressante quand on a moins d'incertitude sur les mesures que sur les informations ou pseudo-mesures contenues dans $B.x = 0_s$. Observons, cependant que la résolution de ce problème devient plus difficile dans le cas où $y(\cdot)$ n'est plus linéaire. De plus, une équation du type $B.x = X$ peut représenter des relations sur les rugosités et les demandes en qui on a fortement confiance et qui ajoutées aux équations d'équilibrage hydraulique constituent un modèle que l'on cherche à caler. Le problème d'optimisation précédant ne convient pas dans ces cas là.

Plusieurs auteurs ont proposé de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser : } \sum_{i=1}^m w_i (y_i^{\text{mes}} - y_i)^2 \text{ sous } F(x, y) = 0_{a+n} \text{ et } x^{\min} \leq x \leq x^{\max}$$

qui après réduction des équations d'équilibrage hydraulique s'écrit :

$$\text{minimiser : } \sum_{i=1}^m w_i (y_i^{\text{mes}} - y_i(x))^2 \text{ sous } x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \quad \text{ici } m \geq p$$

$x^{\min} \leq x \leq x^{\max}$ étant des contraintes physiques.

L. Ormsbee en 1989 propose, pour que le nombre de mesure m soit plus grand que p , d'augmenter le nombre de régime de demande pour lesquels on répète des mesures. De plus, p peut être réduit en regroupant certaines conduites en des conduites équivalentes ou des noeuds en des noeuds équivalents. Pour résoudre le problème

d'optimisation précédent, il utilise une méthode de recherche directe (modified Box complex direct search method) qui n'utilise aucun calcul de dérivée, puisque selon lui la jacobienne de $y(\cdot)$ ne peut être calculée que numériquement. Il rapporte que de part la nature complexe du problème du calage et le grand nombre de variables de décision, plusieurs solutions sont possibles (plusieurs minima locaux).

Pour Lansey et Busnet en 1991, les poids w_i indiquent la confiance que l'on a en une mesure, ou peuvent servir à une mise à l'échelle des valeurs mesurées. Ils soulignent, en réponse à Ormsbee, que même si certaines fonctions ne sont pas connues de manière explicite, les gradients peuvent être calculés de façon explicite et résolvent alors par un gradient réduit.

Obtention d'un algorithme plus robuste :

Powell et al., 1987 appliquent trois méthodes générales d'estimation d'états à la surveillance d'un réseau d'alimentation en eau potable. Ils disposent de télémesures. Ils supposent avoir une bonne estimation des écarts-type : σ_i sur les bruits et connaître les relations débit/charge donc les résistances. Le vecteur d'état est de dimension : $N=n+f$ et le nombre de mesure $m>N$.

La première de ces méthodes, consiste à mettre en oeuvre un algorithme de Gauss-Newton sur le critère d'erreur des moindres carrés pondérés (MCP) :

$$\sum_{i=1}^m w_i \cdot (y_i^{\text{mes}} - y_i(x))^2$$

populaire de part son immunité envers les bruits gaussiens dans les mesures.

Plus robuste est la minimisation du critère d'erreur des moindres valeurs absolues (MVA) :

$$\sum_{i=1}^m w_i \cdot |y_i^{\text{mes}} - y_i(x)|$$

Pour minimiser MVA, Ils linéarisent $y(\cdot)$ et en additionnant des variables d'écarts se ramènent à la résolution à chaque itération d'un programme linéaire.

Le troisième et dernier algorithme allie la rapidité de convergence de la première méthode et la robustesse de l'estimateur MVA. C'est un algorithme des moindres carrés avec les poids recalculé itérativement par : $w_i \leftarrow \frac{w_i}{|y_i^{\text{mes}} - y_i(x^k)|}$.

c) Estimations par intervalle et niveau de confiance

Lansley et Busnet, (1991) posent la question : "Quand a t'on assez d'information pour atteindre un niveau de confiance désiré?" Ils soulignent que même avec un estimateur très stable, une attention particulière doit-être apportée à la modélisation et à l'état des organes hydrauliques.

Bargiela et Hainsworth, 1989, par des exemples, montrent qu'augmenter le nombre de mesure n'est pas toujours bénéfique. Ils précisent : "la relation entre la qualité de la mesure et la qualité de la simulation dépend de plusieurs facteurs. Cela inclut le type d'appareils de mesure et leur précision, l'emplacement des mesures, et la topologie du réseau".

Ils proposent deux méthodes intéressantes pour obtenir une estimation par intervalle. Une méthode de Monte-Carlo, plus coûteuse en temps calcul, et une estimation par approximation linéaire des équations, obtenu à partir de la matrice de sensibilité de x par rapport au déplacement : δy .

On augmentera la qualité de l'estimation, en choisissant la nature et l'emplacement des mesures pour minimiser l'erreur sur l'estimation, dans le chapitre IV.

d) Adéquation du modèle

Il y a de nombreuses façons de se rendre compte si un modèle est adéquate ; les plus usitées et les plus naturelles sont :

- ne pas utiliser toutes les mesures pour identifier le réseau et garder certaines mesures pour vérification, ce qui demande d'avoir des mesures redondantes. Hauguel A., (1991) précise "qu'un certain nombre de mesures sont en fait des données pour la simulation du calage", ici m , "les autres assurant la validation du calage".

- analyser les résidus, écarts entre les valeurs observées et les valeurs prédites par le modèle ; les mesures ayant été choisies en des endroits clé, on peut se satisfaire de bien reconstituer ces mesures. A cet effet, Delattre S. E., (1991) considère avoir identifié le

réseau, si après avoir réalisé m mesures de natures différentes, elles restituent par le problème de l'Analyse, les charges à ± 3 mètres, les débits à $\pm 10\%$.

e) Remarques

Plusieurs observations sont à faire :

- Une réduction de la taille de x , sans réduction du nombre d'arcs et de noeuds, se justifie en pratique et peut être faite en fonction de la photographie du réseau que l'on souhaite.

Si Ormsbee (1989) rapporte qu'il y a plusieurs minima locaux c'est que la condition d'observabilité n'est pas remplie. L'explication est sans doute que pour un arc il y a une inconnue résistance et pour un noeud une inconnue demande.

Remarquer que des ensembles d'arcs ont une rugosité voisine, ou regrouper les consommateurs par type de consommateur, a permis d'obtenir plus facilement l'observabilité ; le vecteur d'état n'étant plus constitué de résistances et de demandes, mais de classes de rugosité, et de demandes par type de consommateurs.

- Les contraintes que nous choisissons sur le vecteur d'état : $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, ne sont pas les contraintes physiques, $x^{\min} \leq x \leq x^{\max}$. On choisi : $\underline{x} < x^{\min} \leq x \leq x^{\max} < \bar{x}$.

La contrainte est tout d'abord nécessaire, car les ensembles de niveaux ne sont pas toujours bornés. Avec la continuité du critère des moindres carrés, on obtient ainsi l'existence d'une solution (réalisable) au problème des moindres carrés.

Nous croyons qu'il ne faut pas restreindre les solutions réalisables aux solutions physiquement acceptables, pour les raisons suivantes :

Un estimateur plus robuste que celui des moindres carrés avec poids, permet généralement de diminuer l'influence des données aberrantes. Par conséquent, si l'estimation de x n'est pas physiquement acceptable, c'est qu'il a le plus souvent une erreur dans le modèle.

On peut ainsi, en fonction de l'anomalie observée faire des vérifications et corriger le modèle.

- L'algorithme de Levenberg-Marquardt (voir par exemple, J. C. Nash, 1990) qui est étudié pour la résolution des problèmes des moindres carrés non linéaires n'a pas

encore été utilisé pour l'identification d'un réseau d'Alimentation en Eau Potable. Une modification de cet algorithme permettra de tenir compte des contraintes.

III-1.5 Echange des r_i par les Chw_i

A partir du vecteur des rugosités dans les conduites, on sait calculer le vecteur des résistances dans les conduites associé aux pertes de charges linéaires. Par exemple, si on utilise la formule d'Hazen-Williams (formule I-3.3), la résistance de la conduite i : r_i , et le coefficient d'Hazen-Williams : Chw_i , sont liés par la relation :

$$r_i = r_i(Chw_i) = \frac{\lambda_i}{Chw_i^{1,852}} \quad (\text{III-1.7})$$

où λ_i est un coefficient connu qui dépend des unités avec laquelle le débit est exprimé dans la formule (I-3.3), mais aussi de la longueur et du diamètre de la conduite.

III-1.6 Mesures et matrices de sélection associées

On présente tout d'abord le cas d'un seul régime de demande, puis celui de plusieurs régimes de demandes.

Nous disposons de m mesures de quatre types : de débit sur m_q arcs, de charge piézométrique sur m_h noeuds, de demandes aux noeuds simples sur m_d noeuds et de demandes mesurées sur m_r noeuds à charge fixée. Ainsi,

$$m = m_q + m_h + m_d + m_r \quad (\text{III-1.8})$$

On note alors :

- $q^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^{m_q}$: le vecteur des débits dans les arcs mesurés ;
- $h^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^{m_h}$: le vecteur des charges aux noeuds simples mesurées ;
- $d^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^{m_d}$: le vecteur des demandes mesurées aux noeuds simples ;
- $df^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^{m_r}$: le vecteur des demandes mesurées aux noeuds à charge fixée.

On introduit $S_q \in \mathbb{M}_{m_q, a}$ la matrice de sélection des débits mesurés, dont l'élément

$$S_q(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si le débit de l'arc } j \text{ est le } i^{\text{ème}} \text{ mesuré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III-1.9})$$

On définit de la même façon $N_q \in \mathbb{M}_{a-m_q, a}$ la matrice de sélection des débits non mesurés.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S_q \cdot q &= q^{mes} \\ S_q \cdot {}^t S_q &= I_{m_q} \\ S_q \cdot {}^t N_q &= 0_{m_q, a-m_q} \\ {}^t N_q \cdot N_q + {}^t S_q \cdot S_q &= I_a \end{aligned} \quad (\text{III-1.10})$$

De la même façon S_h , S_d et S_f sont les matrices de sélection respectivement des charges, des demandes aux noeuds simples et des demandes aux noeuds réservoirs, et N_h , N_d et N_f les matrices de sélection complémentaires avec des propriétés identiques à celles des matrices des débits.

Supposons que l'on ait τ régimes de demandes, aux instants $t = t_1, t = t_2, \dots, t = t_\tau$.

Alors :

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_\tau \text{ avec } m_i = m_q(t_i) + m_h(t_i) + m_d(t_i) + m_f(t_i)$$

Si l'on répète des mesures dans le temps, les matrices de sélection de mesure ainsi que le nombre de mesure de chaque type : débit, charge..., sont invariants. Par contre, si on effectue des mesures différentes à différents instants t_i , on conviendra d'ajouter (t_i) pour marquer la dépendance par rapport au temps : ainsi, $S_q \in \mathbb{M}_{m_q, a}$ devient : $S_q(t_i) \in \mathbb{M}_{m_q(t_i), a}$.

III-1.7 Classes de rugosité

Dans la pratique, il n'y a pas autant d'inconnues rugosités que d'arcs, ce qui permet de diminuer le nombre d'inconnues.

On peut supposer que les conduites du même matériau, posées à des époques identiques et soumises à des conditions de vieillissement similaires ont sensiblement la même rugosité. Le résultat d'une expertise peut permettre d'isoler certains groupes de conduites où des disparités entre les rugosités semblent exister. Les rugosités prennent κ valeurs distinctes ($\kappa \leq a$) ; on écrit alors vectoriellement, avec la matrice K_C d'appartenance aux classes :

$$Chw = K_C \cdot C \quad (\text{III-1.11})$$

On note,

κ : le nombre de classes de rugosité ;

$Chw \in (\mathbb{R}^{++})^a$: le vecteur rugosité dans les conduites ;

$C \in (\mathbb{R}^{++})^\kappa$: le vecteur des classes de rugosité.

$K_C \in \mathbb{M}_{a,\kappa}$ la matrice d'éléments :

$$K_C(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } i \text{ est de la } j^{\text{ème}} \text{ classe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III-1.12})$$

Pour identifier l'emplacement des arcs de rugosité C_i , on introduit la matrice $S_i \in \mathbb{M}_{\kappa_i,a}$ définie à une permutation de ses lignes près.

On écrit alors :

$$S_i \cdot Chw = C_i \mathbf{1}_{\kappa_i} \quad (\text{III-1.13})$$

où $\mathbf{1}_{\kappa_i}$ est le vecteur dont toutes les composantes sont des 1.

Il est alors facile d'exprimer K_C en fonction des S_i (démonstration en annexe 3)

$$K_C = \left({}^t S_1 \cdot \mathbf{1}_{\kappa_1} \quad {}^t S_2 \cdot \mathbf{1}_{\kappa_2} \quad \cdots \quad {}^t S_\kappa \cdot \mathbf{1}_{\kappa_\kappa} \right) \quad (\text{III-1.14})$$

Chacune des classes de rugosités possédant au moins un élément, K_C est de plein rang : rang $K_C = \kappa$; sa pseudo-inverse K_C^+ est alors égale à :

$$K_C^+ = \left({}^t K_C \cdot K_C \right)^{-1} \cdot {}^t K_C$$

On peut expliciter K_C^+ à l'aide des S_i (cf. Annexe 3) :

$$K_C^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_1} {}^t \mathbf{1}_{\kappa_1} \cdot S_1 \\ \frac{1}{\kappa_2} {}^t \mathbf{1}_{\kappa_2} \cdot S_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\kappa_\kappa} {}^t \mathbf{1}_{\kappa_\kappa} \cdot S_\kappa \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.15})$$

On passe de Chw de taille : a , à C de taille κ , avec dans les applications $\kappa \leq 10$.

III-1.8 Classes de demande

Le nombre des abonnés aux noeuds du réseau est connu. Si l'on regarde la demande en eau d'un abonné, on retrouve habituellement un comportement moyen sur une période donnée. On distingue par exemple des débits domestiques pavillonnaires, des débits domestiques non pavillonnaires ou des débits industriels ; on peut bien sûr compliquer la description, mais quatre à cinq types d'abonnés suffisent en général à décrire la consommation du réseau. Les demandes sont classées par type de consommateur, dans un modèle de répartition de consommation (par exemple ZOMAYET, Cemagref 1988) ; on écrit :

$$d(t) = K_D \cdot D(t) \quad (\text{III-1.16})$$

où $K_D \in \mathbb{M}_{n,\delta}$ est la matrice d'éléments :

$$K_D(i, j) = N_{ij} \quad (\text{III-1.17})$$

avec, N_{ij} est le nombre d'abonné au noeud i de type j si j est une consommation domestique, ou N_{ij} est un coefficient multiplicateur d'un débit industriel standard si la classe j est industrielle ; dans tous les cas $N_{ij} \geq 0$.

On note :

- δ : le nombre de classes de demande ;
- t : le temps ;
- $d(t) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des demandes aux noeuds simples, au temps t ;
- $D(t) \in \mathbb{R}^\delta$: le vecteur des classes de demandes aux noeuds simples, au temps t .

Si sur une période donnée le vecteur $d(t)$ peut être considéré comme constant, le temps n'intervient pas et (III-1.16) se réécrit :

$$d = K_D \cdot D \quad (\text{III-1.18})$$

On supposera par la suite que K_D est de rang maximum, ce qui est vérifié si chaque classe de demande possède au moins un abonné. Sa pseudo-inverse K_D^+ est alors :

$$K_D^+ = \left({}^t K_D \cdot K_D \right)^{-1} \cdot {}^t K_D$$

III-1.9 Exemple

Intéressons-nous à un réseau de cinq arcs et quatre noeuds pour lequel les tronçons 1,2 et 3 sont de rugosité C_1 , et les tronçons 4 et 5 sont de rugosité C_2 . La situation est alors :

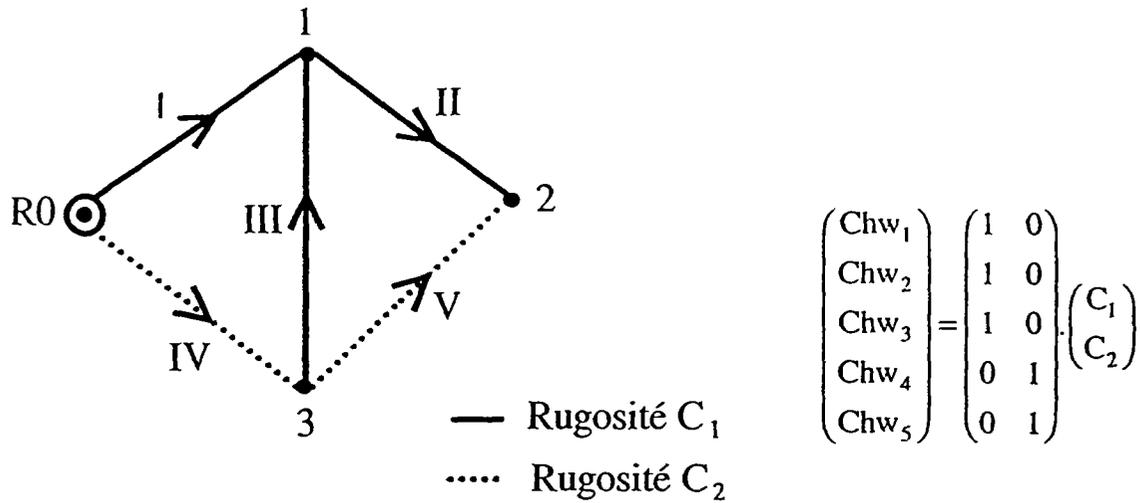


figure 51 : exemple de classes de rugosité

En identifiant avec III-1.11 on conclut que :

$$K_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deux matrices de sélection des arcs par rugosités sont :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de vérifier la formule (III-1.14) :

$$K_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la formule (III-1.15)
$$K_C^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sur le même petit réseau, on suppose qu'il y a deux types d'abonnés répartis comme suit :

- noeud N°1 : 30 abonnés du type I ;
- noeud N°2 : 10 abonnés du type I et 20 du type II ;
- noeud N°3 : aucun abonné.

Alors, la relation III-1.18 prend la forme particulière :

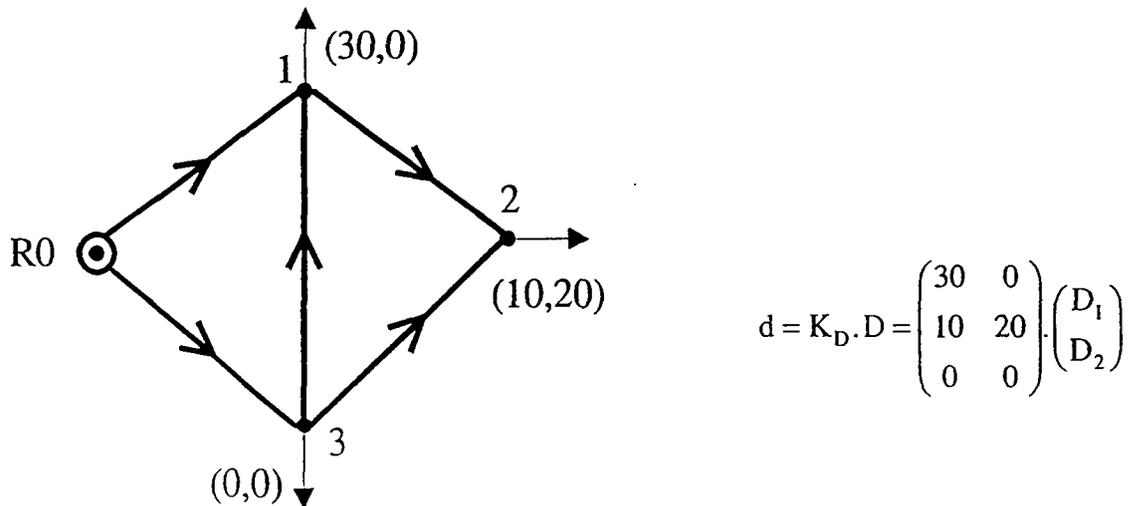


figure 52 : exemple de classes de demande

III-2 Relations entre les variables

On distingue traditionnellement, L'Identification des rugosités ou **calage**, les demandes étant connues, de L'Identification des demandes ou **calage en temps réel**, les rugosités étant connues. Nous proposons une présentation unifiée pour laquelle chacun

des deux problèmes d'identification précédemment évoqués n'est qu'un sous-problème particulier.

III-2.1 Présentation unifiée

Certaines rugosités ou certaines demandes peuvent être supposées connues.

On introduit les notations :

- $C^{mes} \in (\mathbb{R}^{*+})^{K-n_c}$: vecteur des classes de rugosité connues ;
 $D^{mes} \in \mathbb{R}^{\delta-n_D}$: vecteur des classes de demandes connues ;
 $C^{inc} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_c}$: vecteur des classes de rugosité inconnues ;
 $D^{inc} \in \mathbb{R}^{n_D}$: vecteur des classes de demandes inconnues ;
 $S_C \in \mathbb{M}_{\kappa-n_c, \kappa}$: la matrice de sélection des classes de rugosité connues ;
 $N_C \in \mathbb{M}_{n_c, \kappa}$: la matrice de sélection des classes de rugosité inconnues ;
 $S_D \in \mathbb{M}_{\delta-n_D, \delta}$: la matrice de sélection des classes de demandes connues ;
 $N_D \in \mathbb{M}_{n_D, \delta}$: la matrice de sélection des classes de demandes inconnues.

S'il y a plusieurs régimes de demande, on suppose que les matrices S_D et N_D sont invariantes. Si ce n'est pas le cas, on conviendra de rajouter (t_i) , pour marquer la dépendance par rapport au temps ; ainsi : $D^{inc} \in \mathbb{R}^{n_D}$ devient $D^{inc}(t_i) \in \mathbb{R}^{n_D}$ et $D^{mes} \in \mathbb{R}^{\delta-n_D}$ devient $D^{mes}(t_i) \in \mathbb{R}^{\delta-n_D}$.

Les matrices S_C , S_D , N_C et N_D ont les mêmes propriétés que S et N dans (III-1.10).

$$\text{Par définition :} \quad \begin{array}{l} C^{mes} = S_C \cdot C \\ C^{inc} = N_C \cdot C \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} D^{mes} = S_D \cdot D \\ D^{inc} = N_D \cdot D \end{array} \quad (\text{III-2.1})$$

C et D se décomposent suivant C^{mes} , C^{inc} , D^{mes} , D^{inc} comme :

$$\begin{array}{l} C = {}^t S_C \cdot C^{mes} + {}^t N_C \cdot C^{inc} \\ D = {}^t S_D \cdot D^{mes} + {}^t N_D \cdot D^{inc} \end{array} \quad (\text{III-2.2})$$

Ainsi le calage correspond au cas où $S_C = I_\kappa$ et $N_D = I_\delta$ et le calage en temps réel au cas où $N_C = I_\kappa$ et $S_D = I_\delta$.

III-2.2 Cas d'un seul régime de consommation

On suppose que le vecteur d des demandes aux noeuds simples reste constant sur une période donnée ; le vecteur d'état est le vecteur :

$x = (C^{inc}, D^{inc}) \in (\mathbb{R}^{++})^{n_C} \times \mathbb{R}^{n_D}$ où le nombre d'inconnues est $p = n_C + n_D$; il vérifie les m relations :

$$\begin{cases} q^{calc} = S_q \cdot q(r(\text{Chw}(C^{inc})), d(D^{inc})) \\ h^{calc} = S_h \cdot h(r(\text{Chw}(C^{inc})), d(D^{inc})) \\ d^{calc} = S_d \cdot d(D^{inc}) \\ df^{calc} = S_f \cdot d^f(C^{inc}, D^{inc}) \end{cases} \Leftrightarrow y^{calc} = y(x) \in \mathbb{R}^m \quad (\text{III-2.3})$$

où les fonctions $(r, d) \mapsto q(r, d)$ et $(r, d) \mapsto h(r, d)$ sont définies implicitement par (III-1.4), la fonction $\text{Chw} \mapsto r(\text{Chw})$ est donnée par (III-1.7) et les fonctions $C^{inc} \mapsto \text{Chw}(C^{inc})$, $D^{inc} \mapsto d(D^{inc})$ et $(C^{inc}, D^{inc}) \mapsto d^f(C^{inc}, D^{inc})$ sont définies explicitement par :

$$\begin{cases} \text{Chw}(C^{inc}) = K_C \cdot ({}^t S_C \cdot C^{mes} + {}^t N_C \cdot C^{inc}) \\ d(D^{inc}) = K_D \cdot ({}^t S_D \cdot D^{mes} + {}^t N_D \cdot D^{inc}) \\ d^f(C^{inc}, D^{inc}) = -A^f \cdot q(r(\text{Chw}(C^{inc})), d(D^{inc})) \end{cases} \quad (\text{III-2.4})$$

Pour calculer $y(x)$ il faut résoudre le problème de l'Analyse :

$$x \rightarrow (C, D) \rightarrow (\text{Chw}, d) \rightarrow (r, d) \xrightarrow{\mathcal{A}} (q, h) \rightarrow y(x) \quad (\text{III-2.5})$$

III-2.3 Cas de plusieurs régimes de consommations

On suppose qu'il y a τ régimes de demandes ; le vecteur d'état est le vecteur : $x = (C^{inc}, D^{inc}(t_1), \dots, D^{inc}(t_\tau)) \in (\mathbb{R}^{++})^{n_C} \times \mathbb{R}^{\tau n_D}$ où le nombre d'inconnues est $p = n_C + \tau \cdot n_D$.

Soit m_i le nombre de mesure pour le $i^{\text{ème}}$ régime ; les m_i équations vérifiées par $(C^{inc}, D^{inc}(t_i))$ sont :

$$\begin{cases} q^{\text{calc}}(t_i) = S_q(t_i) \cdot q(r(\text{Chw}(C^{\text{inc}})), d(D^{\text{inc}}(t_i))) \\ h^{\text{calc}}(t_i) = S_h(t_i) \cdot h(r(\text{Chw}(C^{\text{inc}})), d(D^{\text{inc}}(t_i))) \\ d^{\text{calc}}(t_i) = S_d(t_i) \cdot d(D^{\text{inc}}(t_i)) \\ df^{\text{calc}}(t_i) = S_f(t_i) \cdot d^f(C^{\text{inc}}, D^{\text{inc}}(t_i)) \end{cases} \Leftrightarrow y_i(C^{\text{inc}}, D^{\text{inc}}(t_i)) = y^{\text{calc}}(t_i) \in \mathbb{R}^m,$$

les $m = m_1 + \dots + m_\tau$ équations vérifiées par x sont alors :

$$\begin{cases} y_1(C^{\text{inc}}, D^{\text{inc}}(t_1)) = y^{\text{calc}}(t_1) \\ \vdots \\ y_i(C^{\text{inc}}, D^{\text{inc}}(t_i)) = y^{\text{calc}}(t_i) \Leftrightarrow y^{\text{calc}} = y(x) \in \mathbb{R}^m \\ \vdots \\ y_\tau(C^{\text{inc}}, D^{\text{inc}}(t_\tau)) = y^{\text{calc}}(t_\tau) \end{cases} \quad (\text{III-2.6})$$

On suppose dans toute la suite que le nombre d'inconnues : p , est plus petit que le nombre total de mesures :

$$p \leq m \quad (\text{III-2.7})$$

III-3 Méthode de résolution

Le vecteur d'état x défini au paragraphe précédent, est de taille $p = n_c + \tau \cdot n_D$ où τ est le nombre de régimes de demande, n_c le nombre positif ou nul de classes de rugosité inconnue, n_D le nombre positif ou nul de classes de demandes inconnues.

Le problème est alors de chercher $\hat{x} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_c} \times \mathbb{R}^{\tau \cdot n_D}$ pour lequel $\|y^{\text{mes}} - y^{\text{calc}}\|_2$ est minimum, y^{calc} étant défini en III-2.6. Ainsi :

$$\text{On cherche } \hat{x} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_c} \times \mathbb{R}^{\tau \cdot n_D} / y(\hat{x}) \equiv y^{\text{mes}} \quad (\text{III-3.1})$$

III-3.1 Résolution d'un problème d'optimisation

Soit (CLS) le problème d'optimisation à résoudre (III-3.1), avec des contraintes supplémentaires sur x :

$$\begin{aligned} (\text{CLS}) \quad & \text{Chercher } \hat{x} \in \mathbb{R}^p / \forall x \in \mathbb{R}^p, g(\hat{x}) \leq g(x) \text{ sous } \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (\text{III-3.2}) \\ & \text{où } g(x) = \frac{1}{2} \|y(x) - y^{\text{mes}}\|_2^2 \end{aligned}$$

Remarquons que si x_i correspond à une classe de rugosité, alors il faut choisir $(\underline{x})_i > 0$.

$y(\cdot)$ n'est pas connue de façon explicite. Nous allons montrer que y est de classe C^1 et que sa jacobienne dépend explicitement des débits dans les arcs et des rugosités. Pour calculer $y(x)$ et $\text{Jac}(y)(x)$ il faut donc résoudre le problème de l'Analyse, comme l'indique le schéma (III-2.5).

III-3.2 Différentiabilité de y

a) Les dépendances de q et h en fonction de Chw et d

Soit $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \circ (r(\cdot), \text{Id}_n)$ où \mathcal{A} et $r(\cdot)$ sont définies en (III-1.4) et (III-1.7). Alors, l'application :

$$\mathcal{A}^* : (\text{Chw}, d) \mapsto (q(r(\text{Chw}), d), h(r(\text{Chw}), d))$$

est définie de $(\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$. On a de plus, le théorème suivant :

Théorème III-3.2 :

\mathcal{A}^* est de classe C^1 de $(\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$ et a pour matrice jacobienne :

$$\text{Jac}(\mathcal{A}^*)(\text{Chw}, d) = \begin{pmatrix} -\tilde{D}^{-1} \cdot \Lambda \cdot P + \tilde{D}^{-1} \cdot A \cdot (A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot \Lambda \cdot P & -\tilde{D}^{-1} \cdot A \cdot (A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot A)^{-1} \\ (A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot \Lambda \cdot P & -(A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot A)^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{D} = \tilde{D}(r(\text{Chw}), q(r(\text{Chw}), d))$, $\Lambda = \Lambda(q(r(\text{Chw}), d))$ et $P = P(\text{Chw})$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{D}(r, q) &= \partial_q \tilde{\xi}(r, q) \\ \Lambda(q) &= \partial_r \tilde{\xi}(r, q) \\ P(\text{Chw}) &= \text{Jac}(r)(\text{Chw}) \end{aligned}$$

Preuve :

La fonction \mathcal{A}^* du théorème est la fonction définie implicitement par $F((r(\text{Chw}), d), \mathcal{A}^*(\text{Chw}, d)) = 0_{a+n}$ où F est définie en (III-1.4).

Posons :

$$F^*((\text{Chw}, d), (q, h)) = F((r(\text{Chw}), d), (q, h))$$

alors \mathcal{A}^* est définie implicitement par : $F^*((Chw, d), \mathcal{A}^*(Chw, d)) = 0_{a+n}$

Pour obtenir la dérivabilité de F^* il faut au préalable montrer la dérivabilité des fonctions qui la compose.

A partir de l'expression d'une résistance r_i en fonction de la rugosité Chw_i (III-1.7) on définit la bijection :

$$Chw \in (\mathbb{R}^{++})^a \mapsto r = r(Chw) \in (\mathbb{R}^{++})^a$$

$(Chw \rightarrow r(Chw)) \in C^1((\mathbb{R}^{++})^a, (\mathbb{R}^{++})^a)$ de matrice jacobienne notée $P(Chw)$:

$$Jac(r)(Chw) = P(Chw) = \text{diag} \left(\frac{-1,852r_i(Chw_i)}{Chw_i} \right) \quad \text{(III-3.3)}$$

La proposition II-6.1 assertion i permet d'écrire :

$$\tilde{\xi} \in C^1((\mathbb{R}^{++})^a \times \mathbb{R}^a, \mathbb{R}^a)$$

Par définition :

$$F((r, d), (q, h)) = \begin{pmatrix} A \cdot q + d \\ \tilde{\xi}(r, q) - {}^t A \cdot h - {}^t A^f \cdot h^f \end{pmatrix}$$

Il est donc clair que $F^* \in C^1(((\mathbb{R}^{++})^a \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n)$ (III-3.4)

Explicitons les dérivées particulières de F^* :

Posons $u = (Chw, d) \in (\mathbb{R}^{++})^a \times \mathbb{R}^n$ et $v = (q, h) \in \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de F^* en (u, v) est $Jac(F^*)(u, v)$ et vérifie :

$$Jac(F^*)(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u F^*(u, v) & \partial_v F^*(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{(III-3.5)}$$

où

$$\partial_u F^*(u, v) = \begin{pmatrix} 0_{n,a} & I_n \\ \partial_r \tilde{\xi}(r(Chw), q) \cdot P(Chw) & 0_{a,n} \end{pmatrix} \quad \text{(III-3.6)}$$

est la matrice des dérivées partielles suivant u ;

$$\text{et} \quad \partial_v F^*(u, v) = \begin{pmatrix} A & 0_{n,n} \\ \partial_q \tilde{\xi}(r(\text{Chw}), q) & -{}^t A \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.7})$$

est la matrice des dérivées partielles suivant v .

$\partial_r \tilde{\xi}(r, q)$ est la matrice des dérivées partielles de $\tilde{\xi}$ suivant r ; cette matrice est diagonale d'éléments diagonaux :

$$\partial_r \tilde{\xi}_i^{\text{lin}}(r_i, q_i) = \begin{cases} q_i \cdot |q_i|^{0,852} & , \text{si } |q_i| \geq \varepsilon \\ 0,426\varepsilon^{-1,148} q_i^3 + 0,574\varepsilon^{0,852} q_i & , \text{sinon} \end{cases}$$

Nous la noterons $\Lambda(q)$ car elle ne dépend pas de r .

$\partial_q \tilde{\xi}(r, q)$ est la matrice des dérivées partielles de $\tilde{\xi}$ suivant q ; cette matrice est diagonale, d'éléments diagonaux :

$$\partial_q \tilde{\xi}_i(r_i, q_i) = 1,852 r_i \cdot |q_i|^{0,852} + (\xi_i^{\text{sin}})'(q_i) + (\xi_i^{\text{pomp}})'(q_i), \text{si } |q_i| \geq \varepsilon$$

$$\partial_q \tilde{\xi}_i(r_i, q_i) = 1,278 r_i \cdot \varepsilon^{-1,148} q_i^2 + 0,574 r_i \cdot \varepsilon^{0,852} + (\xi_i^{\text{sin}})'(q_i) + (\xi_i^{\text{pomp}})'(q_i), \text{si } |q_i| \leq \varepsilon$$

Nous la noterons $\tilde{D}(r, q)$

Le choix $\tilde{\xi}$ plutôt que ξ a permis d'avoir $\tilde{D}(r, q)$ **inversible** sur $(\mathbb{R}^{++})^a \times \mathbb{R}^a$, puisque d'éléments diagonaux strictement positifs (cf. II-6.3). Ainsi, $A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot A$ existe et est inversible (cf. propriétés II-1.3 assertion ii).

(III-3.5) se réécrit alors :

$$\text{Jac}(F^*)(u, v) = \begin{pmatrix} 0_{n,a} & I_n & \vdots & A & 0_{n,n} \\ \Lambda(q) \cdot P(\text{Chw}) & 0_{a,n} & \vdots & \tilde{D}(r(\text{Chw}), q) & -{}^t A \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.8})$$

Soient $u_0 = (\text{Chw}, d)$ quelconque dans l'ouvert $(\mathbb{R}^{++})^a \times \mathbb{R}^n$ et soient $v_0 = (q, h)$ dans $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$ tels que $F^*(u_0, v_0) = 0_{a+n}$.

On applique le théorème des fonctions implicites (A. Avez p. 30, 1983).

Comme F^* est une application de classe C^1 de $\left((\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n\right) \times \left(\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$ et $\partial_v F^*(u_0, v_0)$ est inversible, d'inverse :

$$\partial_v F^*(u_0, v_0)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{D}^{-1} \cdot A \cdot (A \cdot \bar{D}^{-1} \cdot A)^{-1} & \bar{D}^{-1} - \bar{D}^{-1} \cdot A \cdot (A \cdot \bar{D}^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot D^{-1} \\ (A \cdot \bar{D}^{-1} \cdot A)^{-1} & -(A \cdot \bar{D}^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot D^{-1} \end{pmatrix}$$

et comme $F^*(u_0, v_0) = 0_{a+n}$

alors :

Ils existent un voisinage $V(u_0)$ de u_0 , un voisinage $V(v_0)$ de v_0 et une application unique $\mathcal{A}^* : V(u_0) \rightarrow V(v_0)$ de classe C^1 , tels que :

$$F^*(u, \mathcal{A}^*(u)) = 0_{a+n} \text{ pour tous } u \text{ dans } V(u_0) \quad (\text{III-3.9})$$

de plus :

$$\text{Jac}(\mathcal{A}^*)(u) = -\left(\partial_v F^*(u, \mathcal{A}^*(u))\right)^{-1} \cdot \partial_u F^*(u, \mathcal{A}^*(u)) \quad (\text{III-3.10})$$

Il est clair que $V(u_0) = (\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n$, puisque cet ouvert en chacun de ses point contient un voisinage ouvert sur lequel (III-3.9) et (III-3.10) sont vraies ■

On rappelle que G_s est le sous-graphe de $G=(X,U)$, construit sur les noeuds simples (cf. §II-6.3 propriété A6).

Corollaire III-3.2

Les fonctions $(d_j \mapsto h_i(d_j))$ pour i et j de 1 à n , sont décroissantes.

Si de plus, on suppose :

(H1) G_s est connexe.

Alors les fonctions $(d_j \mapsto h_i(d_j))$ pour i et j de 1 à n , sont strictement décroissantes.

Preuve :

D'après le théorème III-3.2, la matrice des dérivées partielles $\partial_d h(\text{Chw}, d)$ de la fonction h par rapport au vecteur d est :

$$\partial_d h(\text{Chw}, d) = -(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1}$$

On a montré (II-6.47) que $(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1} \geq 0$ et que (II-6.48) sous les hypothèses (H1) $(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1} > 0$, d'où le résultat ■

Remarque III-3.2 :

Pour se rendre compte que \mathcal{A}^* n'est pas partout de classe C^2 de $(\mathbb{R}^{++})^a \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^n$, regardons le cas simple où G est un arbre avec un seul noeud réservoir ; ainsi, $N = n+1$ et $a = n$; $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ est inversible et l'expression de la jacobienne de \mathcal{A}^* se simplifie :

$$\text{Jac}(\mathcal{A}^*)(\text{Chw}, d) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ \Lambda.P & \tilde{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{comme } \Lambda.P = \text{diag} \left(-\frac{1,852 \cdot \tilde{\xi}_i^{\text{lin}}(r_i(\text{Chw}_i), q_i)}{\text{Chw}_i} \right) \text{ et } \tilde{\mathbf{D}} = \text{diag} \left(\partial_{q_i} \tilde{\xi}_i(r_i(\text{Chw}_i), q_i) \right)$$

on s'aperçoit que le problème vient de $\tilde{\mathbf{D}}$, puisque $\tilde{\xi}$ n'est pas de classe C^2 . En effet pour chacune des composantes de $\tilde{\xi}_i^{\text{lin}}$ la dérivée seconde en q_i n'est pas définie en $\pm \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \partial_{q_i}^2 \tilde{\xi}_i^{\text{lin}}(r_i, q_i) &= 1,577904 \cdot r_i \cdot |q_i|^{0,852} \cdot q_i^{-1} \text{ si } |q_i| > \varepsilon \\ \partial_{q_i}^2 \tilde{\xi}_i^{\text{lin}}(r_i, q_i) &= 2,556 \cdot r_i \cdot \varepsilon^{-1,148} \cdot q_i \text{ si } |q_i| < \varepsilon \end{aligned}$$

Si nous avons utilisé ξ_i au lieu de $\tilde{\xi}_i$ (on ne change pas la fonction sur $[-\varepsilon, +\varepsilon]$), nous aurions la dérivée seconde de chacune des ξ_i non définies en $q_i = 0$. De plus, pour un graphe plus général, la jacobienne de \mathcal{A}^* ne serait pas partout défini, puisque $D(r, q)$ ne serait pas partout inversible.

Utiliser une autre expression de la loi de perte charge partout deux fois différentiable, est possible, mais pas essentiel pour la suite de notre exposé. Retenons que \mathcal{A}^* est de classe C^2 pour des paramètres : (Chw, d) ne conduisant pas à un débit inférieur à 10^{-3} l/s dans une des conduites, puisque c'est la valeur de ε que nous avons choisie.

b) Jacobienne de y pour un seul régime de consommation

L'application $y(\cdot)$ défini en (III-2.3) s'exprime comme la composée d'applications linéaires et de la fonction $\mathcal{A}^* : (\text{Chw}, d) \mapsto (q(\text{Chw}, d), h(\text{Chw}, d))$; la différentiabilité de \mathcal{A}^* sert à énoncer le théorème :

Théorème III-3.3 :

y est de classe C^1 de $(\mathbb{R}^{*+})^{nc} \times \mathbb{R}^{no}$ vers \mathbb{R}^m et a pour matrice jacobienne :

$$\text{Jac}(y)(x) = \begin{pmatrix} S_q \cdot \partial_{\text{Chw}} q(\text{Chw}, d) \cdot K_C \cdot {}^t N_C & S_q \cdot \partial_d q(\text{Chw}, d) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ S_h \cdot \partial_{\text{Chw}} h(\text{Chw}, d) \cdot K_C \cdot {}^t N_C & S_h \cdot \partial_d h(\text{Chw}, d) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ 0_{m_d, n_c} & S_d \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ -S_f \cdot A^f \cdot \partial_{\text{Chw}} q(\text{Chw}, d) \cdot K_C \cdot {}^t N_C & -S_f \cdot A^f \cdot \partial_d q(\text{Chw}, d) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \end{pmatrix}$$

où $x = (C^{inc}, D^{inc})$,

$$\partial_{\text{Chw}} q(\text{Chw}, d) = -\tilde{D}^{-1} \cdot \Lambda \cdot P + \tilde{D}^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot \Lambda \cdot P$$

$$\partial_{\text{Chw}} h(\text{Chw}, d) = (A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot {}^t A)^{-1} \cdot A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot \Lambda \cdot P$$

$$\partial_d q(\text{Chw}, d) = -\tilde{D}^{-1} \cdot {}^t A \cdot (A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot {}^t A)^{-1}$$

$$\partial_d h(\text{Chw}, d) = -(A \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot {}^t A)^{-1}$$

$\tilde{D} = \tilde{D}(r(\text{Chw}), q(r(\text{Chw}), d))$, $\Lambda = \Lambda(q(r(\text{Chw}), d))$ et $P = P(\text{Chw})$

$$\text{et } \begin{cases} \text{Chw} = K_C \cdot ({}^t S_C \cdot C^{mes} + {}^t N_C \cdot C^{inc}) \\ d = K_D \cdot ({}^t S_D \cdot D^{mes} + {}^t N_D \cdot D^{inc}) \end{cases}$$

Preuve :

$y(\cdot)$ est continûment différentiable sur $(\mathbb{R}^{*+})^{nc} \times \mathbb{R}^{no}$ puisque \mathcal{A}^* est continûment différentiable sur $(\mathbb{R}^{*+})^a \times \mathbb{R}^n$; pour calculer la jacobienne de $y(\cdot)$, on se sert des dérivées de \mathcal{A}^* par rapport à Chw et d et on applique les règles de différentiabilité de la composée d'applications différentiables ■

c) Jacobienne de y pour plusieurs régimes de consommation

Le nombre de régimes est τ ; le nombre de mesures par périodes est m_1 ; le nombre total de mesure est $m = m_1 + m_2 + \dots + m_\tau$. Pour chacun des τ régimes, l'application y , définie en (III-2.6) satisfait le théorème précédent. On peut donc énoncer :

Théorème III-3.4 :

$y(\cdot)$ est de classe C^1 de $(\mathbb{R}^{*+})^{n_c} \times \mathbb{R}^{\tau \cdot n_D}$ vers \mathbb{R}^m et a pour matrice jacobienne :

$$\text{Jac}(y)(x) = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Delta_1 & & & \\ \Sigma_2 & & \Delta_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \Sigma_\tau & & & & \Delta_\tau \end{pmatrix}$$

où : $x = (C^{\text{inc}}, D^{\text{inc}}(t_1), \dots, D^{\text{inc}}(t_\tau))$

$\Sigma_i \in \mathbb{M}_{m_i, n_c}$ est la matrice des dérivées partielles de y_i par rapport à C^{inc} :

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} S_q(t_i) \cdot \partial_{\text{Chw}q}(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_C \cdot {}^t N_C \\ S_h(t_i) \cdot \partial_{\text{Chw}h}(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_C \cdot {}^t N_C \\ 0_{m_d, n_c} \\ -S_f(t_i) \cdot A^f \cdot \partial_{\text{Chw}q}(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_C \cdot {}^t N_C \end{pmatrix}$$

$\Delta_i \in \mathbb{M}_{m_i, n_D}$ est la matrice des dérivées partielles de y_i par rapport à $D^{\text{inc}}(t_i)$:

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} S_q(t_i) \cdot \partial_d q(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ S_h(t_i) \cdot \partial_d h(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ S_d(t_i) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ -S_f(t_i) \cdot A^f \cdot \partial_d q(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \end{pmatrix}$$

$\partial_{\text{Chw}q}$, $\partial_{\text{Chw}h}$, $\partial_d q$, $\partial_d h$ sont les fonctions du théorème III-3.3 ;

$$\text{et } \begin{cases} \text{Chw} = K_C \cdot ({}^t S_C \cdot C^{\text{mes}} + {}^t N_C \cdot C^{\text{inc}}) \\ d(t_i) = K_D \cdot ({}^t S_D \cdot D^{\text{mes}}(t_i) + {}^t N_D \cdot D^{\text{inc}}(t_i)) \end{cases}$$

Preuve :

Chaque F_i , ensemble des équations pour le $i^{\text{ième}}$ régime, pour i de 1 à τ , vérifie le théorème III-3.3 ■

III-3.3 Propriétés du problème CLS

On rappelle que (CLS) consiste à :

(CLS) Chercher $\hat{x} \in \mathbb{R}^p / \forall x \in \mathbb{R}^p, g(\hat{x}) \leq g(x)$ sous $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$

$$\text{où } g(x) = \frac{1}{2} \|y(x) - y^{\text{mes}}\|_2^2$$

Théorème III-3.5 : Existence d'une solution de (CLS)

(CLS) possède au moins une solution

Preuve : g est continue et $K = \{x \in \mathbb{R}^p / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ est un compact de \mathbb{R}^p ; on applique le théorème de Weierstrass (M. Minoux p. 7 du tome 1, 1983) ■

On note $J(x)$, la jacobienne de y en x : $J(x) = \text{Jac}(y)(x)$.

Comme y est de classe C^1 , alors g est de classe C^1 et le **gradient** de g est donné par :

$$\nabla g(x) = {}^t J(x) \cdot (y(x) - y^{mcs}) \quad (\text{III-3.11})$$

Si \hat{x} est solution de (CLS), et que les contraintes ne sont pas saturées : $\hat{x} \in]\underline{x}, \bar{x}[$, il vérifie nécessairement les **équations normales** :

$$-\nabla g(\hat{x}) = {}^t J(\hat{x}) \cdot E(\hat{x}) = 0_p \quad (\text{III-3.12})$$

où $x \mapsto E(x) = y^{mcs} - y(x)$ est la fonction résidu ; le système des équations normales est constitué de p équations avec p inconnues.

Quand y est de classe C^2 en x (remarque III-3.2), alors g est de classe C^2 en x et la **hessienne** de g en x est donné par :

$$\text{Hess}(g)(x) = {}^t J(x) \cdot J(x) - \sum_{j=1}^m E_j(x) \text{Hess}(y_j)(x) \quad (\text{III-3.13})$$

Nous donnons dans le théorème III-3.6 trois conditions suffisantes pour garantir l'unicité locale d'une solution de (CLS).

Théorème III-3.6 : Unicité locale d'une solution de (CLS)

On suppose que \hat{x} est solution de (CLS) et qu'elle satisfait à :

- i) $y(\cdot)$ est de classe C^2 en \hat{x} ;
- ii) Le résidu $E(\hat{x})$ est petit ;
- iii) $J(\hat{x})$ est de rang p , le nombre de ses colonnes ;

alors il existe un voisinage convexe de \hat{x} : $V(\hat{x})$, dans lequel \hat{x} est solution unique de (CLS).

Preuve:

Les hypothèses (ii) et (iii) entraînent que $\text{Hess}(g)(\hat{x})$ est symétrique définie positive. g est donc localement strictement convexe sur un voisinage $V(\hat{x})$ convexe de \hat{x} (intersection d'une boule centrée en \hat{x} avec K). L'unicité de (CLS) est donc assurée (P. G. Ciarlet p. 156, 1985) ■

Corollaire III-3.6 : Conditions d'optimalité d'une solution stationnaire

On suppose que \hat{x} est solution des équations normales : $\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot E(\hat{x}) = 0_p$

Si en plus,

$\hat{x} \in]\underline{x}, \bar{x}[$ et satisfait aux trois conditions du théorème III-3.6, alors :

il existe un voisinage ouvert de \hat{x} : $V(\hat{x})$, dans lequel \hat{x} est solution unique de (CLS).

Preuve: On invoque la convexité locale de g sur $V(\hat{x}) \subset]\underline{x}, \bar{x}[$, pour affirmer que \hat{x} , solution des équations normales, est aussi solution de (CLS). L'unicité se déduit du théorème III-3.6 ■

Remarques III-3.3 :

- Remarquons que g est bornée inférieurement par 0 et que $g(x) = 0$ ssi $y(x) = y^{\text{mes}}$.

- g est non convexe et ∇g est non monotone. Les essais numériques ont montré, que pour un vecteur d'état réduit à une seule rugosité, g peut ne pas posséder d'ensembles de niveaux bornés :

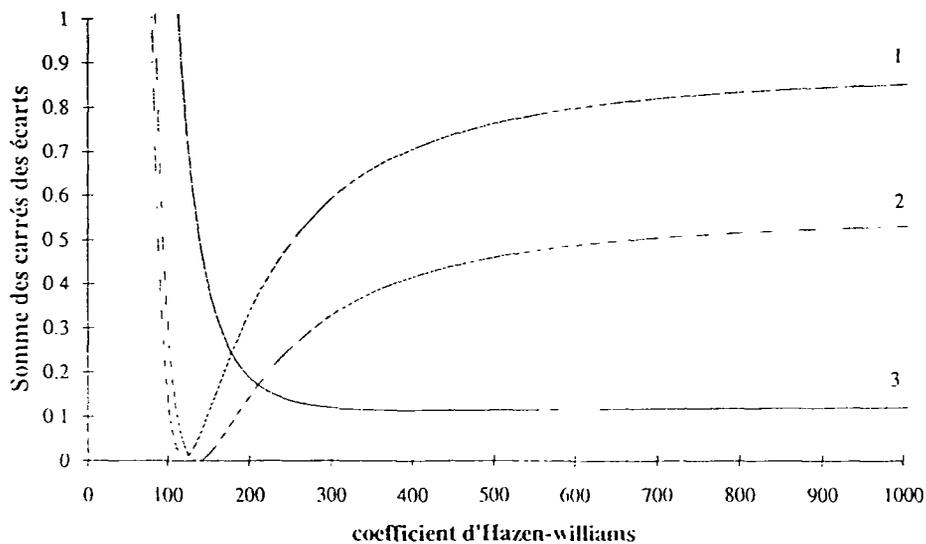


figure 53 : allures de g en fonction d'un coefficient d'Hazen-Williams

La courbe (3) qui n'apparaît qu'avec des données aberrantes où une erreur dans la modélisation est strictement décroissante sur $[\underline{x}, \bar{x}]$.

Pour un vecteur d'état réduit à une seule demande, g a pour allure :

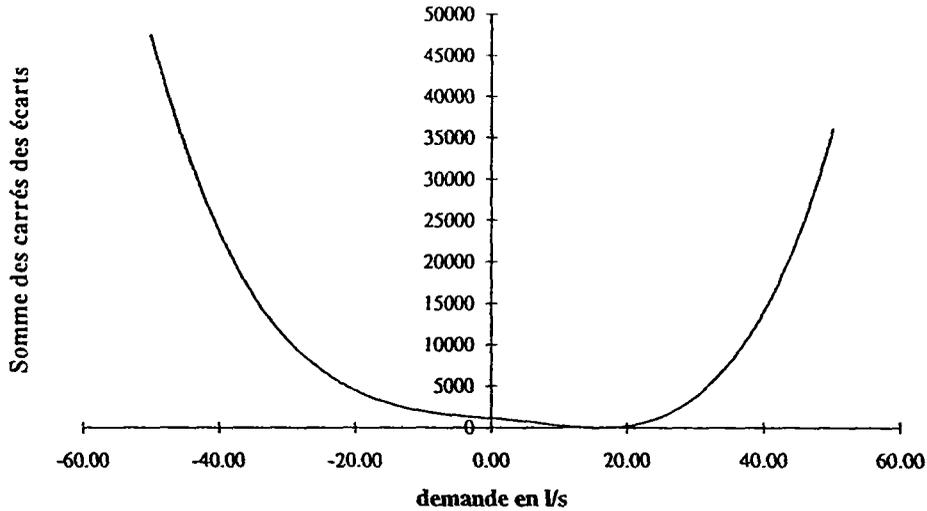


figure 54 : allure de g en fonction d'une demande variable

- Rappelons qu'il y a observabilité du réseau, si la donnée de m valeurs mesurées permet de déterminer un unique vecteur d'état x .

L'hypothèse iii) du théorème III-3.6 : $\text{rang}(\mathbb{J}(\hat{x})) = p$, est essentielle pour assurer l'unicité locale d'une solution de (CLS). Elle n'est pas suffisante. Par contre, si $x \mapsto y(x)$ est linéaire, c'est le cas avec des lois de pertes de charges linéaires, cette condition assure l'existence et l'unicité d'une solution. En effet, g possède alors une matrice hessienne qui ne dépend pas de x : $\text{Hess}(g)(x) = {}^t\mathbb{J}.\mathbb{J}$; il existe donc :

$$\lambda > 0 / \left\langle {}^t\mathbb{J}.\mathbb{J}.x, x \right\rangle_p \geq \lambda \|x\|_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^p$$

On peut prendre pour λ , la plus petite valeur propre de ${}^t\mathbb{J}.\mathbb{J}$; g est donc elliptique avec une constante λ (cf. Ortega et Rheinbolt p. 87, 1970). Dans ces conditions, l'existence et l'unicité d'une solution de (CLS) sont donc garanties (P.G. Ciarlet p.183, 1985).

La condition d'observabilité algébrique : $\text{rang}(\mathbb{J}(\hat{x})) = p$, prendra une grande importance lorsque nous linéariserons les équations, pour l'algorithme de résolution, pour les estimations par intervalle et pour le chapitre IV du Choix des mesures.

III-4 Choix de l'Algorithme

La méthode de résolution proposée est une modification de la méthode de Levenberg-Marquardt pour tenir compte des contraintes $K = \{x \in \mathbb{R}^a / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$.

On cherche à minimiser :

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (y_j(x) - y_j^{mes})^2 = \frac{1}{2} \|y(x) - y^{mes}\|^2 \text{ sous } x \in K$$

III-4.1 L'algorithme de Gauss-Newton

L'algorithme le plus classique pour minimiser sans contrainte une somme de carrés non linéaire est l'algorithme de Gauss-Newton. Deux modifications de cette algorithme pour le rendre globalement convergent (i.e. : quel que soit la solution initiale) ont été proposées : celle de H. O. Hartley en 1961, et celle de K. Levenberg 1944 et de D. W. Marquardt en 1963.

L'algorithme de Gauss-Newton itère une suite $\{x^k\}$ qui converge sous certaines conditions vers une solution des équation normales.

On pose : $J_k = \text{Jac}(y)(x^k)$.

L'algorithme de **Gauss-newton** consiste à calculer x^{k+1} en fonction de x^k de la façon suivante :

On résout le système linéaire :

$$J_k^T J_k \Delta^k = -J_k^T (y(x^k) - y^{mes}) \quad (\text{III-4.1})$$

puis on calcule : $x^{k+1} = x^k + \Delta^k$

On rappelle que la matrice hessienne de g en x^k est :

$$\text{Hess}(g)(x^k) = J_k^T J_k + \sum_{j=1}^m E_j(x^k) \text{Hess}(y_j)(x^k)$$

où $E_j(x^k) = y_j^{mes} - y_j(x^k)$ est le $j^{\text{ième}}$ résidu en x^k .

La convergence locale de cette algorithmme est assurée si les m résidus en \hat{x} sont négligeables et la jacobienne de y en \hat{x} : $\mathbb{J}(\hat{x})$ est de plein rang p , car alors on retrouve la direction de Newton avec une hessienne symétrique définie positive. Si le 2^{ème} terme de la dérivée seconde est non négligeable l'algorithme précédant ne converge pas le plus souvent. Pour pallier ces inconvénients, une première méthode consiste à corriger le pas de déplacement.

H. O. Hartley, (1961), propose la modification de l'algorithme de Gauss-Newton suivante :

On calcule x^{k+1} , x^k étant connu, par :

$$x^{k+1} = x^k - \rho_k (\mathbb{J}_k \mathbb{J}_k)^{-1} \cdot \mathbb{J}_k (y(x^k) - y^{mes}) \quad (\text{III-4.2})$$

Convergence de l'algorithme de Hartley :

Soit l'ouvert : $\mathring{K} =]\underline{x}, \bar{x}[$. Pour $x_0 \in \mathring{K}$ on note : $L_0 = L_0(g(x_0))$, la composante connexe contenant x_0 , contenue dans l'ensemble de niveau $\left\{ x \in \mathring{K} / g(x) \leq x_0 \right\}$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathring{K}$, tel que L_0 soit un compact. Supposons de plus, que $\text{rang}(\mathbb{J}(x)) = p$, $\forall x \in L_0$ et que l'équation normale admette une unique solution x^* dans L_0 . Comme $x \rightarrow y(x)$ (avec $m \geq p$) est continue différentiable, alors il existe ρ_k , $k = 0, 1, \dots$ tel que la suite définie par (III-4.2) reste dans L_0 et $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x^k) = x^*$.

La preuve de ce résultat peut-être trouvée dans Ortega et Rheinbolt p. 504, 1970 ■

Il arrive cependant en pratique d'observer une convergence lente, si $\mathbb{J}_k \mathbb{J}_k$ est mal conditionnée ou proche d'être singulière : l'angle que fait la direction de descente de Gauss-Newton avec celle de la plus forte pente est alors proche de 90° .

Une deuxième modification de la méthode de Gauss-Newton consiste à faire un "damping" sur $\mathbb{J}_k \mathbb{J}_k$, c'est-à-dire améliorer son conditionnement.

III-4.2 L'algorithme de Levenberg-Marquardt

La formule d'itération est la suivante :

$$x^{k+1} = x^k - \left(\mathbb{J}_k \mathbb{J}_k + c_k S_k^2 \right)^{-1} \cdot \mathbb{J}_k (y(x^k) - y^{mes}) \quad (\text{III-4.3})$$

où $S_{ii}^2 = (\mathbb{J} \cdot \mathbb{J})_{ii} + \phi$ et ϕ un nombre positif choisi pour assurer que S_{ii}^2 n'est pas nul ; par exemple $\phi = 1$; et e_k une suite de réels positifs.

On pose : $d_k = -(\mathbb{J}_k \cdot \mathbb{J}_k + e_k S_k^2)^{-1} \cdot \mathbb{J}_k \cdot (y(x^k) - y^{mes})$.

Ce choix est celui de J. C. Nash p. 211, 1990. Il constitue une légère modification (rajout de ϕ) de celui de Levenberg et Marquardt.

Convergence de l'algorithme de Levenberg-Marquardt :

Si on suppose :

i) Il existe $x_0 \in \tilde{K}$, tel que $L_0 = L_0(g(x_0))$ soit un compact.

ii) $x \rightarrow y(x)$ est deux fois continûment différentiable sur un ouvert contenant L_0 .

iii) Les équations normales (III-3.12) ont seulement un nombre fini de solution dans L_0 .

Alors, il existe, $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 > 0$ et $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \mu_0 \|v\|_2^2 &\leq \left\langle (\mathbb{J}(x) \cdot \mathbb{J}(x)) \cdot v, v \right\rangle_p \leq \mu_1 \|v\|_2^2, \quad \forall x \in L_0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p \\ \left\langle \text{Hess}(g)(x) \cdot v, v \right\rangle_p &\leq \gamma_1 \|v\|_2^2, \quad \forall x \in L_0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Considérons le calcul itératif (III-4.3) avec pour solution initiale x_0 , et e_k choisi pour vérifier :

$$\frac{1}{2} \max(0, \gamma_1) - \mu_0 < \eta_0 \leq \lambda_k \leq \eta_1 < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{III-4.4})$$

Alors Ortega et Rheinbolt p. 505, 1970 ont montré :

$\{x^k\} \subset L_0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = x^*$, où $\nabla g(x^*) = 0_p$, et si $\text{Hess}(g)(x^*)$ est non singulière alors la

convergence est au moins R-linéaire : $0 < \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|x^k - x^*\|_k^{\frac{1}{k}} < 1$ ■

Remarquons que si e_k est beaucoup plus grand que la norme de $\mathbb{J}_k \cdot \mathbb{J}_k$ le vecteur d_k est proche d'être $-\frac{1}{e_k} \cdot \mathbb{J}_k \cdot (F(x^k) - y^{mes})$: pour de grand e_k , on retrouve l'algorithme du

gradient. Pour de petits e_k , la direction de descente est celle de Gauss-Newton qui pour de petits résidus est celle de Newton. Le grand avantage de cette algorithme est qu'il combine la convergence globale de la méthode de la plus forte pente pour s'approcher de

l'optimum, avec la convergence supra-linéaire de la méthode de Newton au voisinage de l'optimum.

De plus, on peut montrer (voir par exemple J. C. Nash p. 211, 1990) que le choix de S_k , correspond à la mise à l'échelle des différents paramètres x :

$$x' = S_k \cdot x$$

ce qui fait disparaître les problèmes numériques dus à une trop grande disparité dans les coefficients de la matrice d'itération.

III-4.3 Implémentation de l'algorithme MCO et prise en compte de la contrainte

De façon pratique, e_k est choisi dans (III-4.3) pour que la matrice d'itération soit symétrique définie positive et suffisamment bien conditionnée, pour que numériquement la décomposition de Cholesky marche, et pour que l'on descende effectivement.

L'implémentation usuel de l'algorithme de Levenberg-Marquardt est la suivante :

On choisi deux paramètres Inc et Dec , tels que : $Inc > 1$ et $0 < Dec < 1$, par exemple, $Inc = 10$ et $Dec = 0,4$.

L'étape courante est :

Etant donné x^k et e_k ,

a) assembler $J_k \cdot J_k$ et $\nabla g(x^k)$;

b) faire une décomposition de Cholesky de $J_k \cdot J_k + e_k S_k^2$

Si (not.cholbon) faire $e_k \leftarrow Inc \cdot e_k$ et recommencer la décomposition (ce processus est nécessairement fini) ;

c) puis Calculer x^{k+1} et $g(x^{k+1})$;

si $\left(|x^{k+1} - x^k| \leq \epsilon \cdot |x^k| \right)$ stop ;

si $\left(g(x^{k+1}) \geq g(x^k) \right)$ faire $e_k \leftarrow Inc \cdot e_k$ et retour en b) ;

si $\left(g(x^{k+1}) < g(x^k) \right)$ faire $e_k \leftarrow Dec \cdot e_k$.

La prise en compte des contraintes se fait en modifiant les deux premières lignes de c) :

c') Calculer x^{k+1} ;

si ($\underline{x} \leq x^{k+1} \leq \bar{x}$) calcul de $g(x^{k+1})$;

si ($|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon \cdot |x^k|$) stop ;

si ($g(x^{k+1}) \geq g(x^k)$) et ($x^{k+1} \notin K$) faire $e_k \leftarrow \text{Inc.} e_k$ et retour en b).

De façon plus détaillé l'implémentation est :

Algorithme III-4.3 (MCO) :

i°) Choisir $\underline{x} < x^0 < \bar{x}$; $k = 0$; $e_0 = 0,0001$.

ii°) Etape courante k : x^k et $g(x^k)$ sont connus

assemblage de $\mathbb{J}_k \cdot \mathbb{J}_k$ dans B_k : $B_k \leftarrow \mathbb{J}_k \cdot \mathbb{J}_k$;

assemblage du gradient dans v^k : $v^k \leftarrow \mathbb{J}_k \cdot (y(x^k) - y^{\text{mes}})$.

iii°) Damping sur B_k et calcul de x^{k+1}

Calcul de $\bar{B}_k \leftarrow B_k + e_k S_k^2$;

On décompose \bar{B}_k par Cholesky ; si incident dans cette procédure : cholbon = faux ; en effet si \bar{B}_k est singulière ou très mal conditionnée, un pivot est nul ou proche de zéro.

Si (Cholbon) alors

On résout le système $\bar{B}_k \cdot \Delta_k = -v^k$;

On calcule : $x^{k+1} = x^k + \Delta_k$

Si ($\underline{x} \leq x^{k+1} \leq \bar{x}$) on calcule $g(x^{k+1})$.

fin si cholbon

$k \leftarrow k + 1$.

iv°) Arrêt ou choix de e_k

si ($\Delta_k = 0_p$) ou ($k = \text{maxiter}$) arrêt

sinon si (Cholbon) et ($g(x^{k+1}) < g(x^k)$) et ($\underline{x} < x < \bar{x}$) alors :

```

    ek ← ek * 0,4 ;
    aller en ii°).
sinon
    si ek < précision machine alors ek ← précision machine ;
    ek ← ek * 10 ;
    aller en iii°) pour repartir du même point et corriger la direction.
fin si

```

III-5 Prise en compte d'erreurs de mesures

On considère ici que y^{mes} est une variable aléatoire de moyenne :

$$y^{\text{vrai}} = y(x^{\text{vrai}}) \quad (\text{III-5.1})$$

L'écart de y^{mes} par rapport à sa moyenne est $\delta y = y^{\text{mes}} - y^{\text{vrai}}$; δy est une variable aléatoire de moyenne nulle.

On suppose que δy_i suit une loi uniforme sur $[-\Delta y_i, \Delta y_i]$.

En particulier :

$$-\Delta y \leq \delta y \leq \Delta y \quad (\text{III-5.2})$$

Une autre loi était possible, par exemple la loi de Gauss. Il ne faut plus alors raisonner avec les Δy_i mais avec des multiples des σ_i , les écarts-type de δy_i . (III-5.2) ne serait alors vrai qu'avec une probabilité suffisamment proche de un.

On cherche à identifier x , et on écrit le modèle de régression non linéaire :

$$y^{\text{mes}} = y(x) + \delta y \quad (\text{III-5.3})$$

On cherche alors à minimiser le critère d'erreur des moindres carrés pondérés (MCP), qui tient compte du maximum d'information en notre possession :

$$g^{\text{MCP}}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{y_i^{\text{mes}} - y_i(x)}{\Delta y_i} \right)^2 \quad (\text{III-5.4})$$

Posons :

$$W = \text{diag}(\Delta y_i^{-1})$$

Alors (MCP) se réécrit :

$$g^{\text{MCP}}(x) = \frac{1}{2} \left\langle W^2 \cdot (y(x) - y^{\text{mes}}), y(x) - y^{\text{mes}} \right\rangle_m$$

III-5.1 Implémentation de l'algorithme des moindres carrés avec poids MCP

C'est celle de l'algorithme III-4.3 avec les modifications qui consiste à faire les calculs appropriés du gradient, des résidus, de la direction de Gauss-Newton :

Algorithme III-5.1 (MCP) :

i°) Choisir $\underline{x} < x^0 < \bar{x}$; $k = 0$; $e_0 = 0,0001$.

ii°) Etape courante k : x^k et $g^{\text{MCP}}(x^k)$ sont connus

assemblage de $\mathbb{J}_k \cdot W^2 \cdot \mathbb{J}_k$ dans B_k : $B_k \leftarrow \mathbb{J}_k \cdot W^2 \cdot \mathbb{J}_k$;

assemblage du gradient dans v^k : $v^k \leftarrow \mathbb{J}_k \cdot W^2 \cdot (y(x^k) - y^{\text{mes}})$.

iii°) Damping sur B_k et calcul de x^{k+1}

Calcul de $\bar{B}_k \leftarrow B_k + e_k S_k^2$;

On décompose \bar{B}_k par Cholesky ; si incident dans cette procédure : cholbon = faux ; en effet si \bar{B}_k est singulière ou très mal conditionnée, un pivot est nul ou proche de zéro.

Si (Cholbon) alors

On résout le système $\bar{B}_k \cdot \Delta_k = -v^k$;

On calcule : $x^{k+1} = x^k + \Delta_k$

Si ($\underline{x} \leq x^{k+1} \leq \bar{x}$) on calcule $g^{\text{MCP}}(x^{k+1})$.

fin si cholbon

$k \leftarrow k + 1.$

iv°) Arrêt ou choix de e_k

si ($\Delta_k = 0_p$) ou ($k = \text{maxiter}$) arrêt

sinon si (Cholbon) et ($g^{\text{CMP}}(x^{k+1}) < g^{\text{CMP}}(x^k)$) et ($\underline{x} < x < \bar{x}$) alors :

$e_k \leftarrow e_k * 0,4 ;$

aller en ii°).

sinon

si $e_k < \text{précision machine}$ alors $e_k \leftarrow \text{précision machine} ;$

$e_k \leftarrow e_k * 10 ;$

aller en iii°) pour repartir du même point et corriger la direction.

fin si

Dans le cas d'erreurs grossières pour l'estimation, on mettra en oeuvre un algorithme qui corrige automatiquement les poids initiaux : $w_i = \Delta y_i^{-1}$ en fonction des résidus pondérés obtenus.

III-5.2 Algorithme des moindres carrés avec calcul automatique des poids MCPA

Powell et al., 1987, pour identifier un réseau de distribution d'eau potable, proposent de modifier les poids itérativement à l'intérieur de chaque étape de Gauss-Newton. Ils introduisent deux variables de contrôle, RESTOL et WRANGE, et mettent en oeuvre l'algorithme suivant :

Algorithme de Gauss-Newton avec recalcul du poids :

1) initialisation : choix de x^0 ; $k = 0$; prendre $W_0^2 = \Sigma^{-1}$ où Σ est la matrice de variance-covariance.

2) Etape k , x^k est connu :

On résout le système linéaire :

$$\mathbb{J}_k \cdot W_k^{-2} \cdot \mathbb{J}_k \cdot \Delta^k = -\mathbb{J}_k \cdot W_k^{-2} \cdot (y(x^k) - y^{mes})$$

puis on calcule : $x^{k+1} = x^k + \Delta^k$;

Si $\max |y_i^{mes} - y_i(x^{k+1})| > \text{RESTOL}$

test pour chaque individu :

pour i de 1 à m

$$\text{pour } |y_i^{mes} - y_i(x^{k+1})| > \text{WRANGE faire } w_i^{k+1} \leftarrow \frac{w_i^k}{\sqrt{|y_i^{mes} - y_i(x^{k+1})|}} \quad (\text{III-5.5})$$

fin pour i

3) test pour la convergence. Si non, $k \leftarrow k + 1$ et retour en 2).

Ils recherchent ainsi, la robustesse du critère des moindres valeurs absolues avec poids.

En effet :

$$\sum_{i=1}^m (w_i^{k+1})^2 \cdot (y_i^{mes} - y_i(x^{k+1}))^2 = \sum_{i=1}^m (w_i^k)^2 \cdot |y_i^{mes} - y_i(x^{k+1})|$$

x^{k+2} est ensuite calculé pour diminuer la précédente quantité.

L'algorithme précédent a été implémenté avec les modifications suivantes :

- $W_0 = \text{diag}(\Delta y_i^{-1})$.

- Il faut tenir compte des contraintes.

- On utilise la modification de la direction de Gauss-Newton de Levenberg-Marquardt.

Aussi, les corrections de poids ne sont pas envisagées avant K itérations (en pratique $K=3$). Ce qui permet de s'approcher d'une solution de (CLS), en augmentant éventuellement e_k .

On impose un nombre maximum de corrections des poids. Car, il faut pour obtenir une convergence vers une solution réalisable, pouvoir modifier e_k en testant la descente sur une même fonction. Il faut donc arrêter la correction des poids pour revenir à l'algorithme III-5.1.

- Si à la $K^{\text{ième}}$ itération, $\max |y_i^{\text{mes}} - y_i(x^{k+1})| \leq \text{RESTOL}$, il n'y aura aucune correction de poids par la suite. Et les résultats sont ceux de l'algorithme II-5.1. S'il y a des corrections de poids, on reprend l'algorithme III-5.1 dès que les poids se sont stabilisés ou que le nombre de correction est trop grand.

- La correction des poids est obtenue en remplaçant les résidus dans (III-5.5), par les résidus pondérés :

$$\text{pour } (w_i^k \cdot |y_i^{\text{mes}} - y_i(x^{k+1})| > \text{WRANGE}) \text{ faire } w_i^{k+1} \leftarrow \sqrt{\frac{w_i^k}{|y_i^{\text{mes}} - y_i(x^{k+1})|}} \quad (\text{III-5.6})$$

Cette correction s'interprète elle aussi comme une recherche de la robustesse du critère des moindres valeurs absolues.

En effet :

$$\sum_{i=1}^m (w_i^{k+1})^2 \cdot (y_i^{\text{mes}} - y_i(x^{k+1}))^2 = \sum_{i=1}^m w_i^k \cdot |y_i^{\text{mes}} - y_i(x^{k+1})|$$

Une valeur de WRANGE, a pu ainsi plus facilement être choisie en raisonnant sur les résidus pondérés (WRANGE = 0.001). Ce choix du calcul itératif du poids s'est montré beaucoup plus robuste dans les simulations menées, mais demande un peu plus d'itérations que celui de Powell.

III-5.3 Encadrement des estimations par approximation linéaire des équations

Nous voulons utiliser les estimations par intervalle par approximation linéaire des équations, introduites dans la cadre des réseaux de distribution d'eau potable par Bargiela et Hainsworth, en 1989. Il faut cependant s'assurer que \hat{x} est une solution isolée de (CLS), que \hat{x} est à l'intérieur des contraintes, et que sa jacobienne est de plein rang. Pour que la matrice $J(\hat{x})^+$ soit la **matrice de sensibilité** de la solution au sens des moindres carrés : \hat{x} , par rapport au déplacement : δy , nous montrons alors le théorème suivant :

Théorème III-5.3 : Encadrement de \hat{x} solution isolée de (CLS)

On suppose :

i) (CLS) possède une seule solution : \hat{x} sur $\hat{V} = V(\hat{x}) \cap K$

où $V(\hat{x})$ est un voisinage fermé de \hat{x} et K le compact : $K = \{x \in \mathbb{R}^p / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$.

Soit $x(\delta y) \in \hat{V}$ une solution de $\min_{x \in \hat{V}} \frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x)\|^2$,

alors :

$$x(\delta y) \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0_m} \hat{x} \quad (\text{III-5.7})$$

Si, de plus on suppose :

ii) $\hat{x} \in]\underline{x}, \bar{x}[$

iii) $\text{rang}(J(\hat{x})) = p$

alors, en approximation du premier ordre :

$$x(\delta y) - \hat{x} = J(\hat{x})^+ \cdot \delta y \quad (\text{III-5.8})$$

En particulier, si $-\Delta y \leq \delta y \leq \Delta y$,

on déduit :

$$|x_i(\delta y) - \hat{x}_i| \leq \sum_{k=1}^m |J(\hat{x})^+(i, k)| \cdot \Delta y_k = \Delta \hat{x}_i^{\text{lin}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{III-5.9})$$

$$\|x(\delta y) - \hat{x}\| \leq \|J(\hat{x})^+\| \cdot \|\Delta y\| \quad (\text{III-5.10})$$

Preuve :

de III-5.7) Clairement : $\frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x)\|^2 \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0} g(x)$ (III-5.11)

De plus : $\frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x(\delta y))\|^2 = \frac{1}{2} \|\delta y\|^2 + g(x(\delta y)) + \langle \delta y, y^{\text{mes}} - y(x(\delta y)) \rangle_m$

Par définition $x(\delta y) \in \hat{V}$; \hat{V} étant borné et $y(\cdot)$ continue, $y(x(\delta y))$ est donc bornée.

Par conséquent : $\langle \delta y, y^{\text{mes}} - y(x(\delta y)) \rangle_m \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0} 0$

On en déduit : $\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x(\delta y))\|^2 = \lim_{\delta y \rightarrow 0} g(x(\delta y))$ (III-5.12)

$x(\delta y)$ réalisant le minimum du critère $\frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x)\|^2$ sur \hat{V} alors :

$$\frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x(\delta y))\|^2 \leq \frac{1}{2} \|y^{\text{mes}} + \delta y - y(x)\|^2, \quad x \in \hat{V}$$

En faisant tendre δy vers 0 dans l'inégalité précédente et en se servant des deux inégalités (III-5.11) et (III-5.12), on obtient que nécessairement :

$$\limsup_{\delta y \rightarrow 0} g(x(\delta y)) \leq g(x), \quad \forall x \in \hat{V}$$

Comme de plus \hat{x} réalise le minimum de $g(x)$ sur \hat{V} :

$$\lim_{\delta y \rightarrow 0} g(x(\delta y)) = g(\hat{x}) \quad \text{(III-5.13)}$$

III-5.13 entraîne que $x(\delta y)$ a pour adhérence toute solution de (CLS) dans \hat{V} . La seule solution de (CLS) dans \hat{V} est \hat{x} . Par conséquent :

$$x(\delta y) \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0_m} \hat{x}$$

de III-5.8) L'hypothèse ii) signifie que \hat{x} n'est pas sur la frontière de \hat{V} ; quitte à réduire $V(\hat{x})$, l'ensemble \hat{V} est un convexe fermé borné (une boule centrée en \hat{x} par exemple).

Posons : $\mathbb{J}_{\delta y} = \mathbb{J}(x(\delta y)) \in \mathbb{M}_{m,p}$.

$y(\cdot)$ est de classe C^1 et $\text{rang}(\mathbb{J}) = p$ le nombre de ses colonnes, ce qui permet d'affirmer que si δy est suffisamment proche de 0_m :

$$\text{rang}(\mathbb{J}_{\delta y}) = p \quad \text{(III-5.14)}$$

De $\mathbb{J}(\hat{x})^+ = (\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot \mathbb{J}(\hat{x}))^{-1} \cdot \mathbb{J}(\hat{x})$, on déduit :

$$\mathbb{J}(\hat{x})^+ \cdot \mathbb{J}(\hat{x}) = I_p \quad \text{(III-5.15)}$$

Appliquons la formule de Taylor à la fonction y en \hat{x} et en $x(\delta y) \in \hat{V}$:

$$y(x(\delta y)) - y(\hat{x}) = (\mathbb{J}(\hat{x}) + L(x(\delta y) - \hat{x})) \cdot (x(\delta y) - \hat{x}) \quad \text{(III-5.16)}$$

où $\|L(u)\| \xrightarrow{u \rightarrow 0_p} 0$

En approximation du premier ordre, on suppose y affine et donc : $L(x(\delta y) - \hat{x}) = 0_{m,p}$.

Dans ces conditions l'équation (III-5.16) se simplifie :

$$y(x(\delta y)) - y(\hat{x}) = \mathbb{J}(\hat{x}) \cdot (x(\delta y) - \hat{x}) \quad (\text{III-5.17})$$

En prémultipliant (III-5.17) par $\mathbb{J}(\hat{x})^+$ et en utilisant (III-5.15) :

$$x(\delta y) - \hat{x} = \mathbb{J}(\hat{x})^+ \cdot (y(x(\delta y)) - y(\hat{x}))$$

De $\nabla g(\hat{x}) = {}^t\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot (y(\hat{x}) - y^{\text{mes}}) = 0_p$ on déduit en particulier que :

$${}^t\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot y(\hat{x}) = {}^t\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot y^{\text{mes}} \quad (\text{III-5.18})$$

Comme $x(\delta y) \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0_m} \hat{x}$, pour δy suffisamment petit, $x(\delta y)$ est aussi à l'intérieur de K ; il vérifie donc son équation normale associée :

$${}^t\mathbb{J}_{\delta y} \cdot y(x(\delta y)) = {}^t\mathbb{J}_{\delta y} \cdot (y^{\text{mes}} + \delta y)$$

Remarquons qu'en considérant $y(\cdot)$ affine : $\mathbb{J}_{\delta y} = \mathbb{J}(\hat{x})$. De l'égalité précédente on déduit :

$${}^t\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot y(x(\delta y)) = {}^t\mathbb{J}(\hat{x}) \cdot (y^{\text{mes}} + \delta y) \quad (\text{III-5.19})$$

(III-5.17) se réécrit donc en se servant des égalités (III-5.18) et (III-5.19) :

$$x(\delta y) - \hat{x} = \mathbb{J}(\hat{x})^+ \cdot \delta y$$

On déduit alors les majorations :

$$|x_i(\delta y) - \hat{x}_i| \leq \sum_{k=1}^m |\mathbb{J}(\hat{x})^+(i, k)| \cdot \Delta y_k$$

$$\|x(\delta y) - \hat{x}\| \leq \|\mathbb{J}(\hat{x})^+\| \cdot \|\Delta y\| \quad \blacksquare$$

III-6 Essais numériques

On simule sur ordinateur le fonctionnement d'un réseau test, à partir de la modélisation du problème de l'Analyse. On dispose ainsi de toutes les mesures possibles.

On étudie les performances de l'algorithme III-4.3 du point de vue nombre d'itérations, temps CPU et complexité (le nombre d'évaluations de la fonction g et de son gradient avant la convergence étant une mesure de la complexité).

Les estimateurs issus des algorithmes III-4.3, III-5.1 et III-5.2 sont comparés du point de vue de leurs efficacités, et aussi de leurs robustesses.

Dans un premier temps, les erreurs de mesures sont éliminées ; on vérifie que l'on reconstitue le vecteur d'état. On introduit ensuite des bruits blancs, des disparités dans les aléas puis des erreurs grossières, et on regarde leurs impacts sur les estimations.

Cette première étape de validation du code de Calage ne peut être définitive. En effet, dans ce qui suit :

- les erreurs liées à la modélisation sont éliminées ; dans la réalité, on peut ne pas prendre en compte par une procédure trop simplificatrice, un tronçon important, une classe de rugosité ou une classe de demande. On peut aussi se tromper dans l'état d'un organe hydraulique, une vanne par exemple, ou dans la ventilation des abonnés.
- les lois de perte de charge sont exactement vérifiées.

Pour toutes ces raisons, il sera nécessaire de caler en situation réelle. Nous présenterons les résultats obtenus à partir d'une campagne de mesure sur la ville de Marennes.

III-6.1 Fabrication de schémas et simulations

Le réseau, caltest a été fabriqué à partir d'un réseau réel. Il se compose (figure 55) de 16 arcs, 15 noeuds simples et 2 réservoirs. Il comprend 2 cycles et 1 chaîne entre réservoirs élémentaires.

Les arcs ont trois rugosités dont la répartition est celle donnée par le graphe de caltest (cf. figure 55). Les valeurs des rugosités, des longueurs, des diamètres et des débits de tous les arcs sont celles du tableau de la figure 56.

En particulier :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 116 \\ 136 \end{pmatrix} \quad (\text{III-6.1})$$

Sur chaque noeud la demande et la charge sont connues et reportés dans le tableau de la figure 57.

Il y a deux types d'abonnés. Le premier, domestique, se répartit à peu près dans tout le réseau. Le second de type industriel, est localisé au noeud 10.

Le vecteur classe de demande est :

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \text{ (Dom.)} \\ D_2 \text{ (Ind.)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.083 \\ 16.000 \end{pmatrix} \text{ l/s} \quad (\text{III-6.2})$$

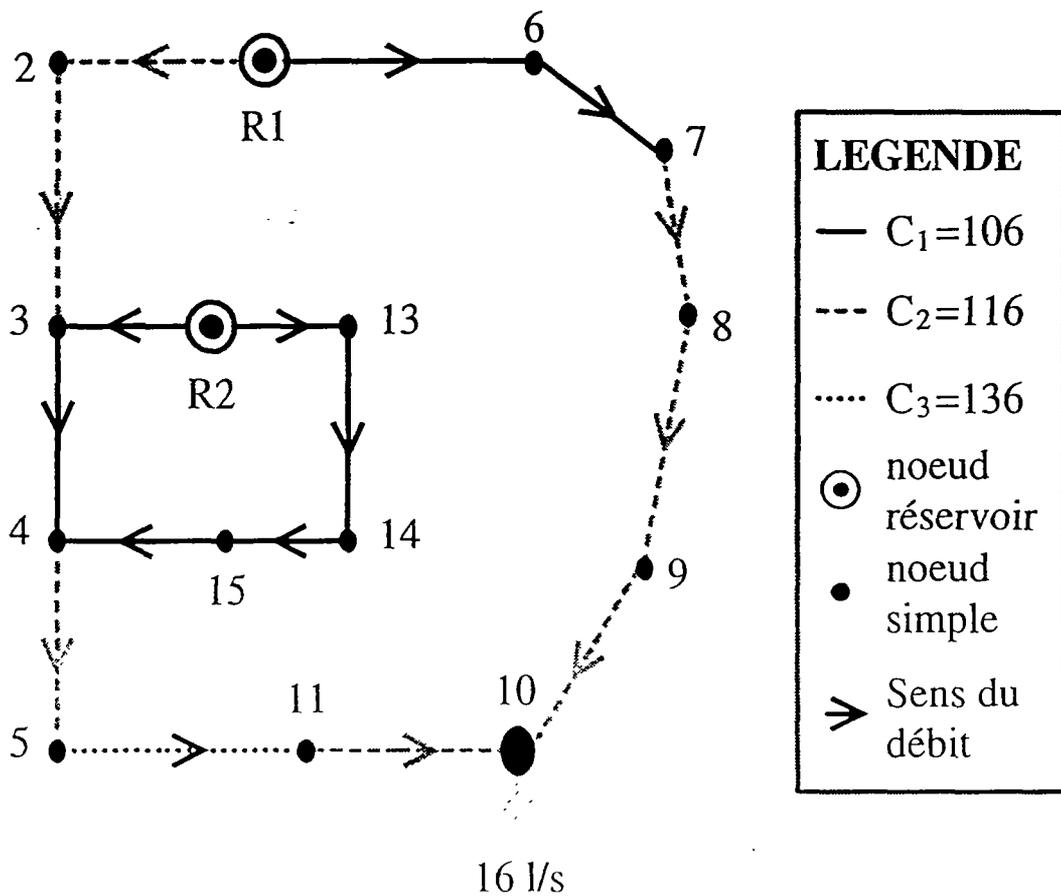


figure 55 : graphe de caltest

Arcs		Diamètres	Longueurs	Rugosités	Débits	Vitesses	Pertes de charge
I(u)	T(u)	(mm)	(m)	(HAZEN)	(l/s)	(m/s)	(m)
R1	2	200,0	220,0	116	7,7049	0,25	0,11
2	3	175,0	610,0	116	6,8716	0,29	0,47
3	4	125,0	850,0	106	7,2482	0,59	4,39
4	5	160,0	1215,0	116	12,6529	0,63	4,48
R1	6	125,0	775,0	106	11,2638	0,92	9,06
6	7	125,0	1255,0	106	8,7638	0,71	9,22
7	8	125,0	630,0	116	8,3471	0,68	3,58
8	9	125,0	1560,0	116	8,3471	0,68	8,86
9	10	125,0	900,0	116	7,5138	0,61	4,21
11	10	100,0	1425,0	116	8,4862	1,08	24,74
R2	3	144,0	1235,0	106	2,8767	0,18	0,58
R2	13	144,0	105,0	106	7,0713	0,43	0,26
13	14	150,0	410,0	106	7,0713	0,40	0,83
14	15	97,0	270,0	106	5,4046	0,73	2,79
15	4	144,0	725,0	106	5,4046	0,33	1,09
5	11	200,0	1660,0	136	8,4862	0,27	0,73

figure 56 : tableau des données statiques et des variables sur les arcs de caltest

Nom du Noeud	Type	Nombre d'abonnés Dom.	Nombre d'abonnés Ind.	Demande (l/s)	Côte piézo. (m)
R1	réservoir				69,9000
2	simple	10	0	0,8333	69,7908
3	simple	30	0	2,5000	69,3214
4	simple	0	0	0,0000	64,9287
5	simple	50	0	4,1667	60,4478
6	simple	30	0	2,5000	60,8389
7	simple	5	0	0,4167	51,6202
8	simple	0	0	0,0000	48,0418
9	simple	10	0	0,8333	39,1813
10	simple	0	1	16,0000	34,9741
11	simple	0	0	0,0000	59,7137
R2	réservoir				69,9000
13	simple	0	0	0,0000	69,6398
14	simple	20	0	1,6667	68,8069
15	simple	0	0	0,0000	66,0209

figure 57 : tableau des variables sur les noeuds de caltest

Pour les tests que nous allons mener, on suppose que les longueurs et les diamètres dans les arcs, les charges aux noeuds réservoirs sont connus. Mais, les

véritables valeurs des trois classes rugosité, des deux classes de demande, des débits dans les arcs et des charges aux noeuds simples ne nous serviront que pour vérifier qu'avec des valeurs mesurées que nous nous serons données, nous sommes capables de reconstituer C et D.

Le nombre de paramètres à identifier (caler) est pour ce réseau égal à cinq : $p = 5$.

L'emplacement et la nature des mesures sont donnés par la figure 58. On distingue trois points de mesure du débit et quatre points de mesures de la pression. Ces points de mesures ne sont pas issus du chapitre IV.

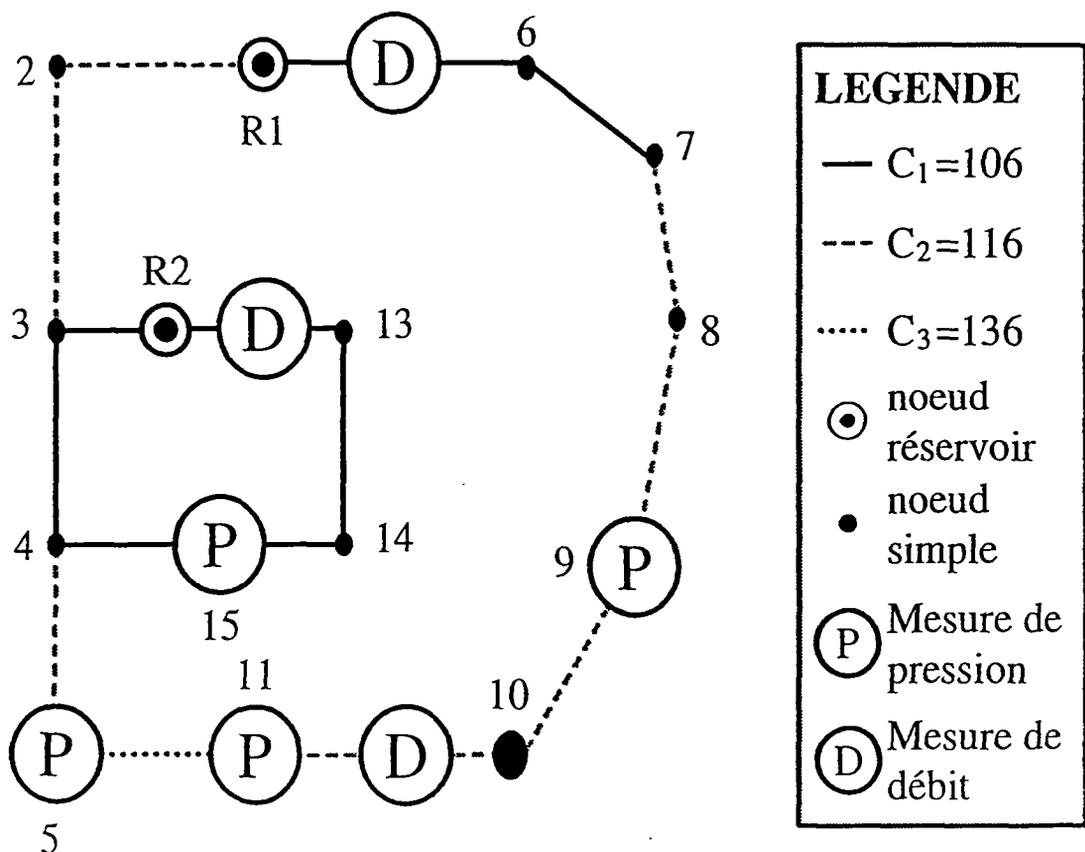


figure 58 : emplacement et nature des mesures pour le réseau caltest

a) Estimations sans erreurs de mesure

Si l'on donne pour valeurs mesurées, celle des tableaux des figures 56 et 57, en arrondissant à la troisième décimale près, le vecteur de mesure est alors :

$$y^{mes} = \begin{pmatrix} q_{R1/6} \\ q_{R2/13} \\ q_{I1/10} \\ h_{15} \\ h_9 \\ h_{11} \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.264 \\ 7.071 \\ 8.486 \\ 66.021 \\ 39.181 \\ 59.714 \\ 60.448 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix}$$

Analysons la convergence vers la solution approchée du critère des moindres carrés sans poids, MCO.

Pour toutes les initialisations que nous avons essayées, l'algorithme MCO, converge en moins d'une seconde, sur un PC 486 dx2 66 Mhz, vers la solution de (CLS). Nous présentons, les résultats qui correspondent au cas le plus défavorable du point de vue du nombre des itérations.

Le vecteur x^0 est choisi assez loin de la véritable solution :

$$x^0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

Dans le tableau de la figure 59, sont reportés :

- en première colonne, le numéro k de l'itération ;
- en deuxième colonne, le nombre d'évaluations de g déjà effectuées : Nbfcct ;
- en troisième colonne, le nombre d'évaluations du gradient de g déjà effectuées : Nbgrad ;
- en quatrième colonne, la valeur de e_k , le coefficient du damping (amortissement) de la matrice hessienne de g de la formule (III-4.3) :

$$x^{k+1} = x^k - \left(\mathbb{J}_k \mathbb{J}_k^T + e_k S_k^2 \right)^{-1} \mathbb{J}_k \left(F(x^k) - y^{mes} \right) ;$$

- en cinquième colonne la somme des carrés des résidus calculée en x^k : $g(x^k)$;

- en dernière colonne la plus grande composante en valeur absolue du gradient de g pris en x^k : $\|\nabla g(x^k)\|_{\infty}$.

k	Nbfct	Nbgrad	e_k	$g(x^k)$	$\ \nabla g(x^k)\ _{\infty}$
0	1	0	$10^{-4} \rightarrow 10$	1400,6	879,936
1	7	1	4,0000	1024,6	4448,18
2	8	2	1,6000	361,28	4066,96
3	9	3	0,6400	134,42	1468,74
4	10	4	0,2560	96,168	246,379
5	11	5	0,1024	82,927	160,885
6	12	6	$4,10 \cdot 10^{-2}$	71,099	58,0570
7	13	7	$1,64 \cdot 10^{-2}$	55,700	37,7654
8	14	8	$6,55 \cdot 10^{-3}$	32,125	34,7543
9	15	9	$2,62 \cdot 10^{-3}$	10,274	6,78754
10	16	10	$1,05 \cdot 10^{-3}$	1,7814	12,4396
11	17	11	$4,19 \cdot 10^{-4}$	$3,64 \cdot 10^{-1}$	12,1761
12	18	12	$1,68 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-1}$	7,02114
13	19	13	$6,71 \cdot 10^{-5}$	$2,64 \cdot 10^{-2}$	3,53774
14	20	14	$2,68 \cdot 10^{-5}$	$4,62 \cdot 10^{-3}$	1,50176
15	21	15	$1,07 \cdot 10^{-5}$	$4,04 \cdot 10^{-4}$	0,42747
16	22	16	$4,29 \cdot 10^{-6}$	$1,11 \cdot 10^{-5}$	0,05455
17	23	17	$1,72 \cdot 10^{-6}$	$1,55 \cdot 10^{-7}$	0,00223
18	24	18	$6,87 \cdot 10^{-7}$	$9,49 \cdot 10^{-8}$	0,00014

figure 59 : tableau des résultats avec des mesures non bruitées pour le réseau caltest

Pour e_0 initialement pris à 10^{-4} : $g(x^1) > g(x^0)$; e_0 est alors multiplié par 10, jusqu'à l'obtention de la condition $g(x^1) < g(x^0)$. C'est pourquoi, pour la première itération et jusqu'à ce que l'on descende, il a fallu 6 évaluations de g , et une seule évaluation du gradient. La condition $g(x^{k+1}) < g(x^k)$ est ensuite toujours vérifiée pour e_k de plus en plus petit ; e_k , pour chaque itération, est multiplié par 0.4, pour retrouver la direction de Gauss-Newton près de l'optimum.

On observe la stricte décroissance de la suite des $g(x^k)$ et sa convergence vers zéro. En effet, l'algorithme s'arrête à la 18^{ième} itération, et la valeur de la fonction en ce point est presque nulle.

$\|\nabla g(x^{18})\|_{\infty}$ est proche de zéro, ce qui indique que l'on a approché un point stationnaire. Comme de plus, $g(x^{18})$ réalise la borne inférieure de g , c'est un minimum global de g .

Les résidus pour chacun des sept points de mesures sont ceux de la figure 60.

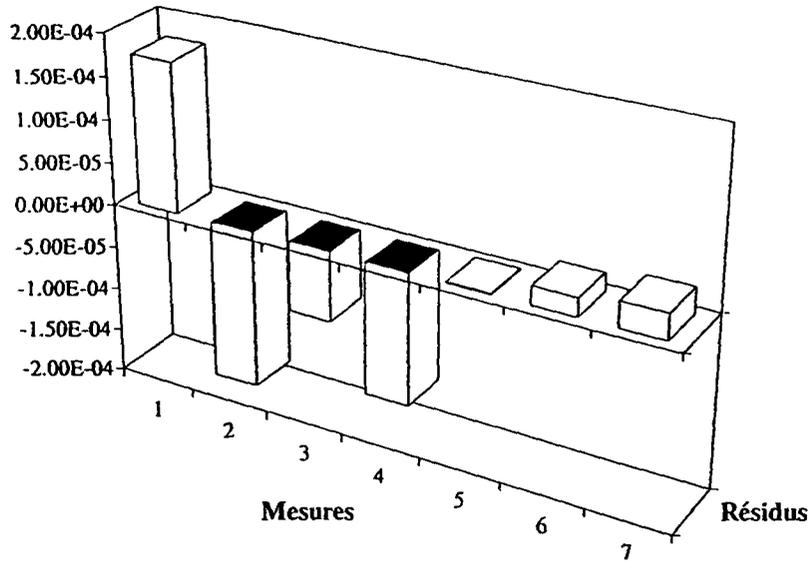


figure 60 : résidus avec des mesures non bruitées pour le réseau caltest

Nous avons représenté (cf. figures 61 et 62) les estimations, pour $k = 0, \dots, 20$, pour les trois classes de rugosités et pour les deux classes de demandes.

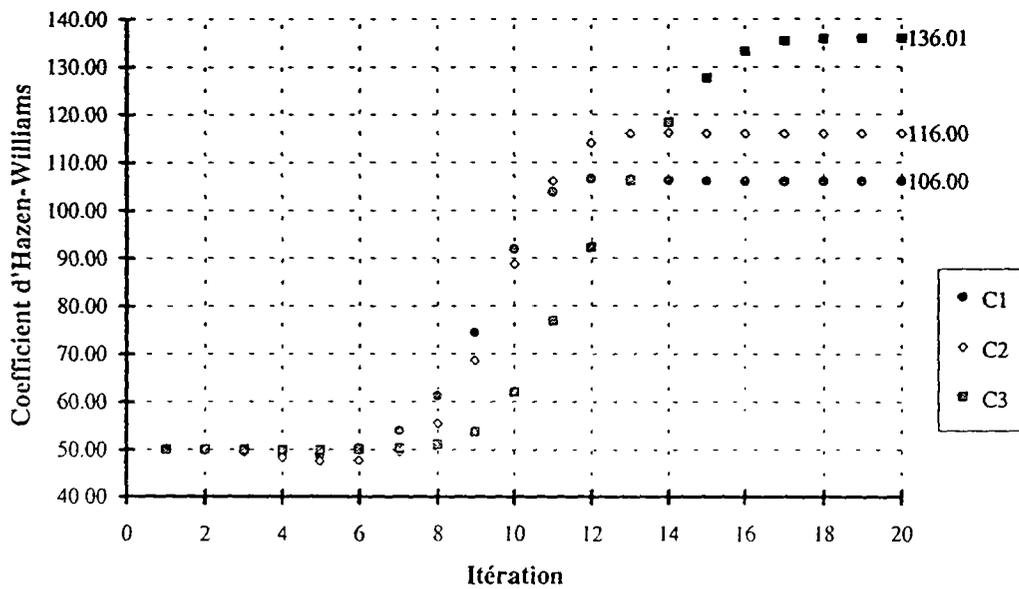


figure 61 : identification des rugosités en fonction des itérations pour le réseau caltest

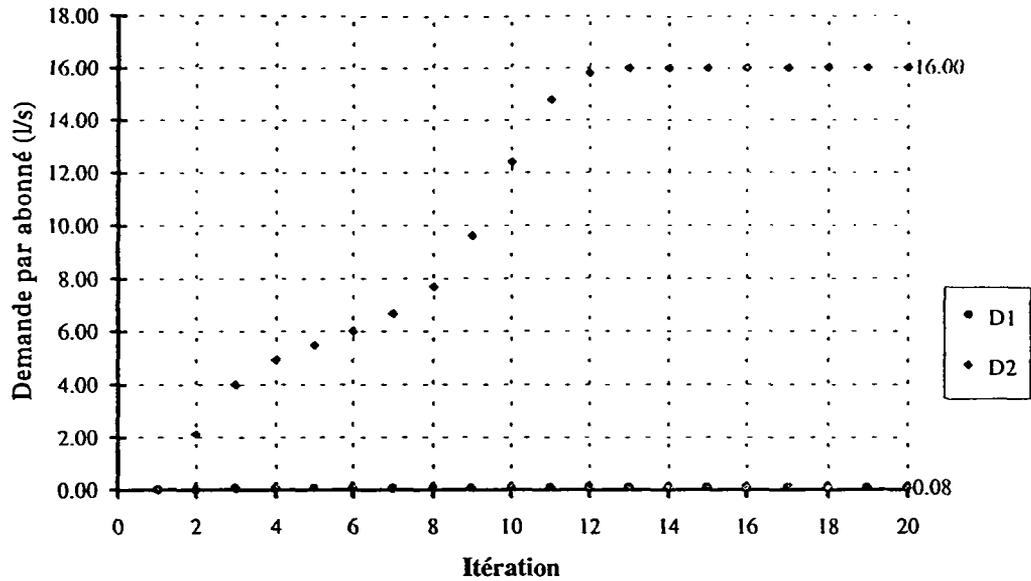


figure 62 : identification des demandes en fonction des itérations pour le réseau caltest

Il faut plus d'itérations pour que D_2 et C_3 atteignent leur véritables valeurs. La figure 63 (resp. la figure 64) représente le graphe de la fonction g , en fonction de D_2 (resp. C_3), les autres paramètres étant pris à leur véritable valeur.

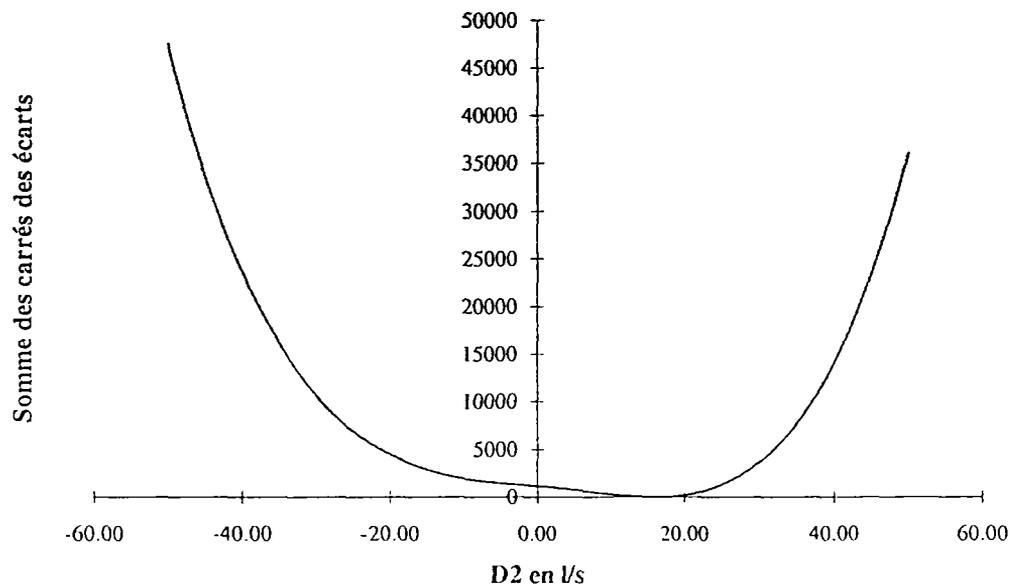


figure 63 : graphe de g avec une seule demande inconnue pour le réseau caltest

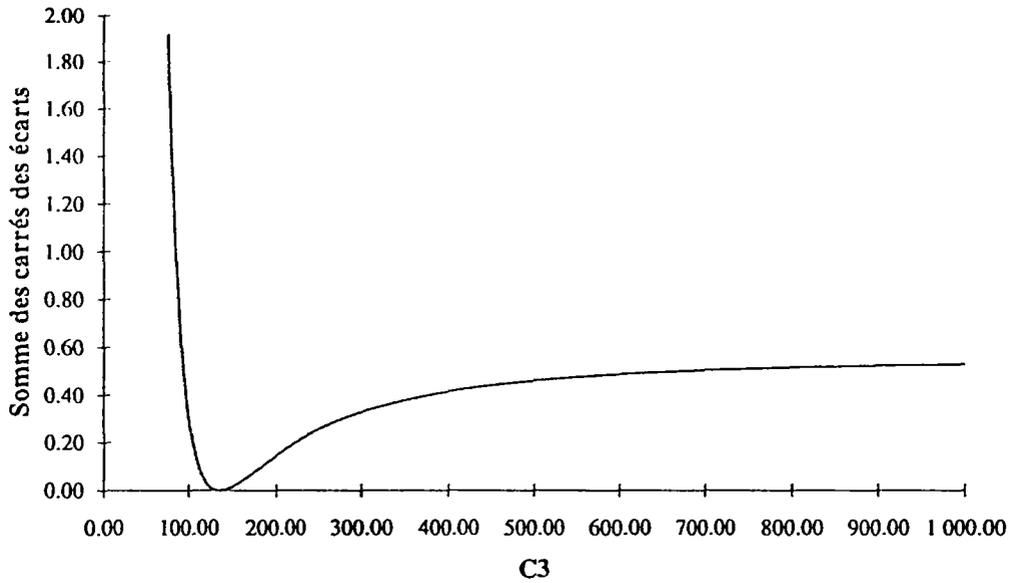


figure 64 : graphe de g avec une seule rugosité inconnue pour le réseau caltest

La figure 65 montre le chemin sur le graphe de $D_2 \mapsto g(D_2)$ que suit l'algorithme III-4.3, en partant de $x^0 = 0$, jusqu'à la convergence. On obtient $1'$ avec $e_0 = 10^{-4}$, $1''$ avec $e_0 = 10^{-2}$ et $1'''$, pour lequel $g(x^1) < g(x^0)$, avec $e_0 = 10^{-1}$.

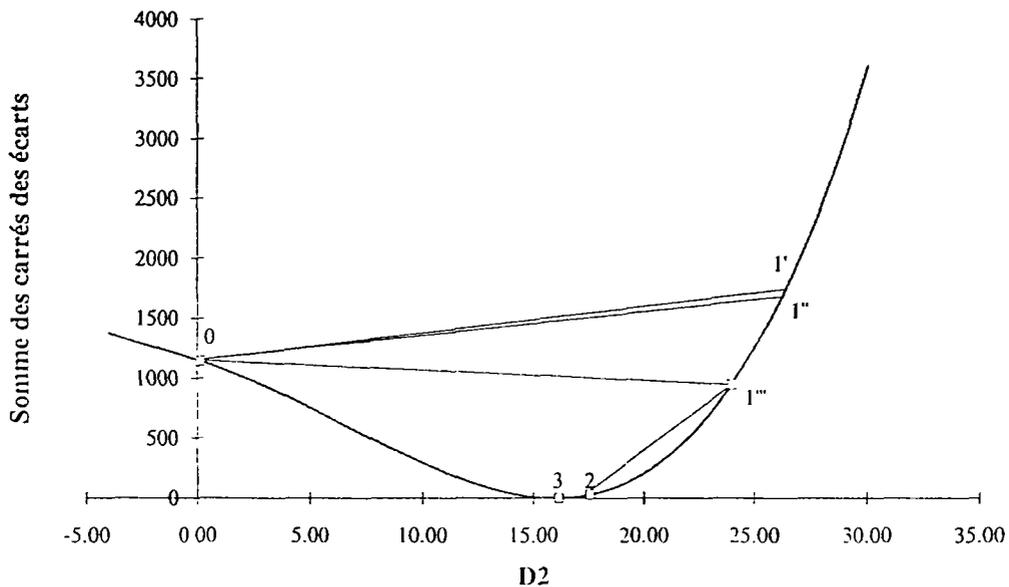


figure 65 : cheminement sur le graphe de g pour l'estimation d'une demande

De la même façon, en suivant les différentes estimations de C_3 aux cours des itérations, on obtient le graphe de la figure 66 pour une grande initialisation de C_3 et le

graphe de la figure 67 pour une petite initialisation de C_3 . Pour une meilleure lisibilité de ces deux figures, nous n'avons pas dessiné de segments de droite joignant les itérés.

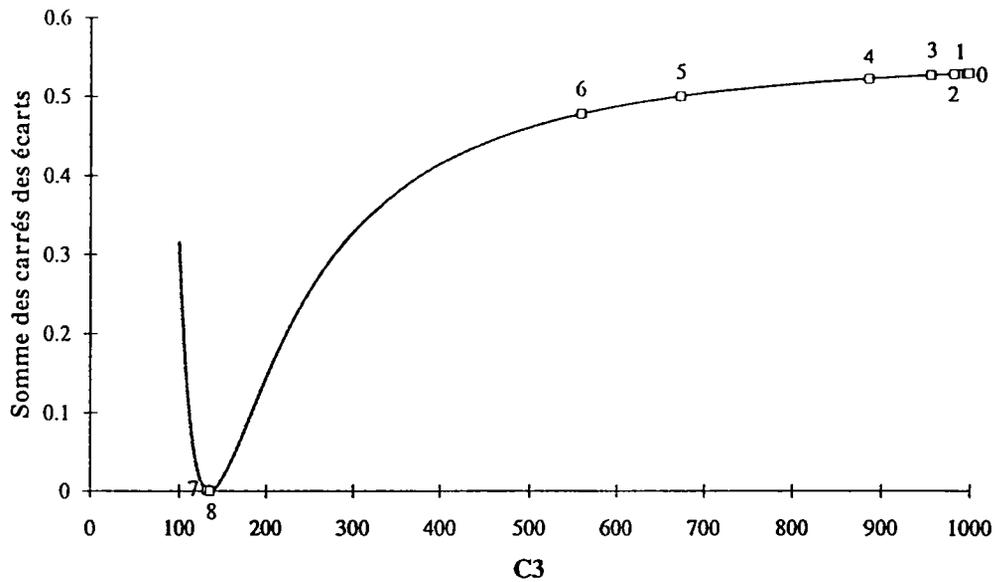


figure 66 : cheminement sur le graphe de g après une grande initialisation d'une rugosité

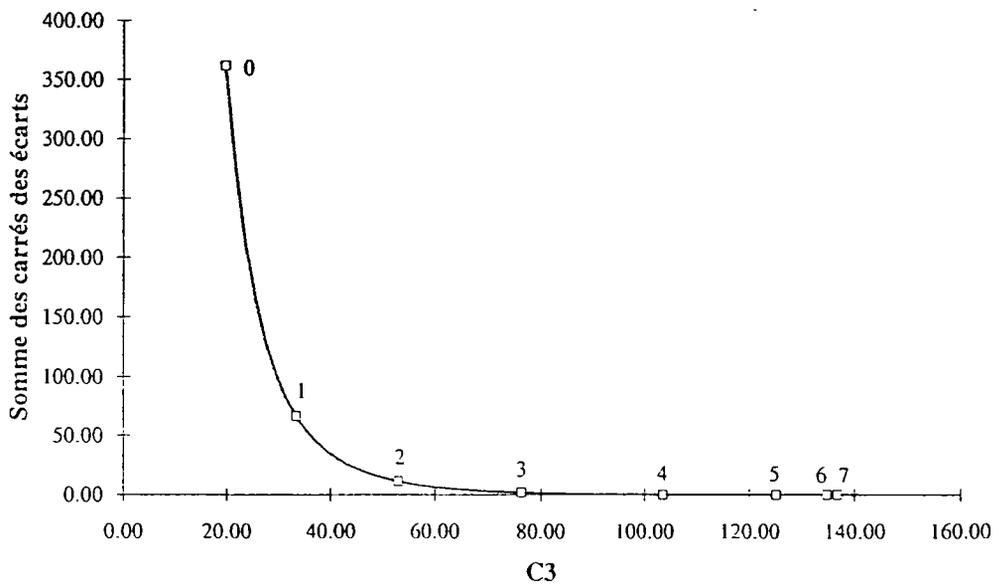


figure 67 : cheminement sur le graphe de g après une petite initialisation d'une rugosité

b) Introduction de bruits blancs

Le résultat de la mesure est maintenant incertain et y^{mes} est une Variable Aléatoire. Cependant, on va supposer que la distribution des erreurs de mesure est connue et est à support compact. Les aléas ou résidus seront petits et indépendants. Un résidu correspondant à un débit est majoré en valeur absolue par 0.01 m/s fois la surface de la section droite, et pour une charge il est majoré par 0.1 m. Ainsi :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} q_{R1/6} \\ q_{R2/13} \\ q_{11/10} \\ h_{15} \\ h_9 \\ h_{11} \\ h_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 11.264 \\ 7.071 \\ 8.486 \\ 66.021 \\ 39.181 \\ 59.714 \\ 60.448 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \\ \delta y_4 \\ \delta y_5 \\ \delta y_6 \\ \delta y_7 \end{pmatrix} \text{ avec, } -\Delta y = \begin{pmatrix} -0.123 \\ -0.163 \\ -0.079 \\ -0.100 \\ -0.100 \\ -0.100 \\ -0.100 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \\ \delta y_4 \\ \delta y_5 \\ \delta y_6 \\ \delta y_7 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0.123 \\ 0.163 \\ 0.079 \\ 0.100 \\ 0.100 \\ 0.100 \\ 0.100 \end{pmatrix} = \Delta y$$

De plus, les résidus pondérés : $\delta Y_i = \delta y_i / \Delta y_i$, pour $i = 1, \dots, m$, sont ici des bruits blancs, i.e. sont indépendants et de mêmes variances. Ils n'apportent ni messages ni informations. Remarquons que les Δy_i étant du même ordre de grandeur, les δy_i peuvent aussi être considérés comme des bruits blancs.

Deux estimateurs sont mis en concurrence : le premier est le critère MCO des moindres carrés ordinaire, pour lequel on ne sert pas de l'information contenue dans Δy , et le second le critère MCP des moindres carrés avec poids, les poids w_i étant les inverses des bornes supérieures des aléas, $w_i = \frac{1}{\Delta y_i}$.

Soient, $\hat{x}_0^{\text{SP}} = \text{MCO}(0_7)$ et $\hat{x}_0^{\text{AP}} = \text{MCP}(0_7)$, les estimations des paramètres rugosités et demandes, pour MCO et MCP, calculées avec $\delta y = 0_7$. Alors, \hat{x}_0^{SP} est la même que dans la première partie, et $\hat{x}_0^{\text{AP}} = \hat{x}_0^{\text{SP}}$:

$$\hat{x}_0^{\text{SP}} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^{\text{SP}} \\ \hat{C}_2^{\text{SP}} \\ \hat{C}_3^{\text{SP}} \\ \hat{D}_1^{\text{SP}} \text{ (Dom.)} \\ \hat{D}_2^{\text{SP}} \text{ (Ind.)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106.00 \\ 116.00 \\ 136.01 \\ 0.0833 \\ 16.000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

Le support de \hat{x}^{SP} , qui est celui de \hat{x}^{AP} , est en approximation du premier ordre donné par la formule (III-5.9), qui nécessite le calcul des p réels :

$$\Delta \hat{x}_i^{\text{lin}} = \sum_{k=1}^m \left| \mathcal{J}(\hat{x})^+(i, k) \right| \cdot \Delta y_k \text{ pour : } \hat{x} = \hat{x}_0^{\text{SP}} = \hat{x}_0^{\text{AP}}$$

Alors, $\Delta \hat{x}^{\text{lin}}$ permet d'obtenir l'intervalle de confiance symétrique :

$$\hat{x}^{\text{AP}} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^{\text{AP}} \\ \hat{C}_2^{\text{AP}} \\ \hat{C}_3^{\text{AP}} \\ \hat{D}_1^{\text{AP}} \text{ (Dom.)} \\ \hat{D}_2^{\text{AP}} \text{ (Ind.)} \end{pmatrix} = \hat{x}_0^{\text{AP}} \pm \Delta \hat{X}^{\text{lin}} = \begin{pmatrix} 106.003 \\ 115.996 \\ 136.005 \\ 0.08333 \\ 16.0000 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2.866 \\ 2.420 \\ 25.411 \\ 0.00427 \\ 0.25671 \end{pmatrix} \text{ 1/s}$$

Retenons que $\hat{x}_0^{\text{SP}} = \hat{x}_0^{\text{AP}} = x^{\text{vrai}}$. Par contre, l'estimation de C_3 , avec MCO ou MCP, paraît très sensible à une erreur de mesure. Nous allons confirmer cette information, par des simulations qui se révèlent beaucoup plus coûteuses en temps de calcul.

Générons cinq mille vecteurs de mesures pour lesquelles les erreurs de mesures sont à peu près uniformément distribuées. Ainsi, pour le débit sur le tronçon R2/13, nous obtenons la distribution d'échantillonnage de la figure 68 :

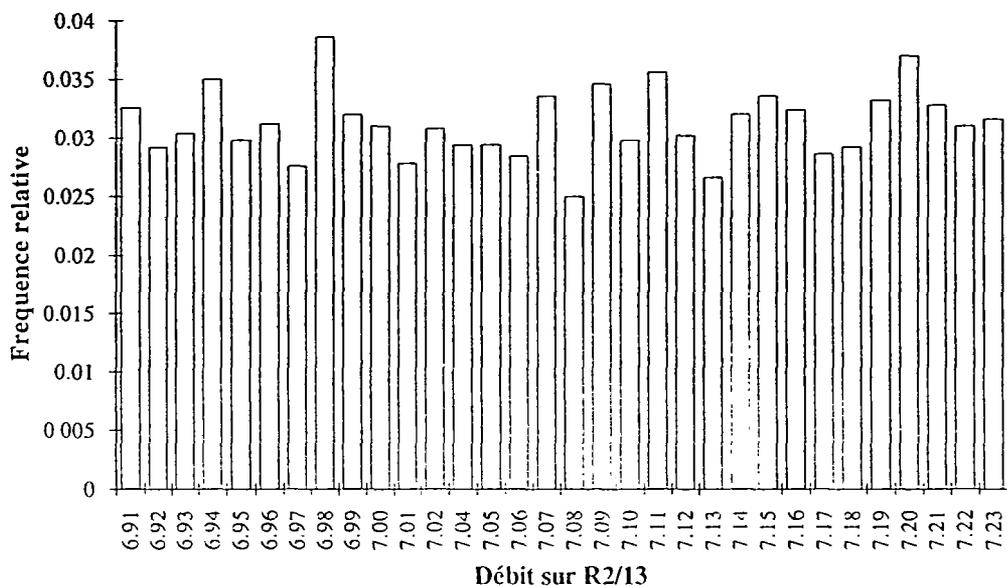


figure 68 : distribution d'échantillonnage d'une valeur mesurée

Pour chacun des cinq mille vecteurs de mesure ont résout le problème de l'identification du réseau. On acquière ainsi, une bonne approximation du pavé où se retrouvent les estimations, en 256 secondes pour MCO et 195 secondes pour MCP, sur un Vax 4000-100 :

$$\begin{array}{ll}
 103.743 \leq \hat{C}_1^{SP} \leq 108.372 & 103.701 \leq \hat{C}_1^{AP} \leq 108.275 \\
 114.012 \leq \hat{C}_2^{SP} \leq 117.959 & 114.108 \leq \hat{C}_2^{AP} \leq 118.275 \\
 118.101 \leq \hat{C}_3^{SP} \leq 163.470 & 118.832 \leq \hat{C}_3^{AP} \leq 161.636 \\
 0.0801 \leq \hat{D}_1^{SP} \leq 0.0867 & 0.0803 \leq \hat{D}_1^{AP} \leq 0.0867 \\
 15.796 \leq \hat{D}_2^{SP} \leq 16.211 & 15.822 \leq \hat{D}_2^{AP} \leq 16.187
 \end{array}$$

Ces résultats confirment l'intervalle de confiance linéaire, celui-ci se révélant très précis dans le cas de petites erreurs de mesures (l'approximation linéaire étant bonne), et demandant cinq mille fois moins de calculs et de temps d'exécution.

La méthode de Monte-Carlo possède cependant l'avantage de donner des informations sur les lois des Variables Aléatoires \hat{x}^{SP} et \hat{x}^{AP} . En effet, les distributions d'échantillonnage des cinq mille réalisations de \hat{x}^{SP} et \hat{x}^{AP} , sont assez représentatives des distributions des Variables Aléatoires \hat{x}^{SP} et \hat{x}^{AP} : avec mille vecteurs de mesures on obtient déjà la même répartition. Comme on connaît de bonnes estimations des moyennes et des variances on peut tester l'efficacité de MCP comparé à celle de MCO.

Nous avons représenté les distributions d'échantillonnage de $\hat{C}_3^{SP} - C_3^{vrai}$ et de $\hat{C}_3^{AP} - C_3^{vrai}$, figures 69 et 70, et celles de $\hat{D}_2^{SP} - D_2^{vrai}$ et de $\hat{D}_2^{AP} - D_2^{vrai}$, figures 71 et 72.

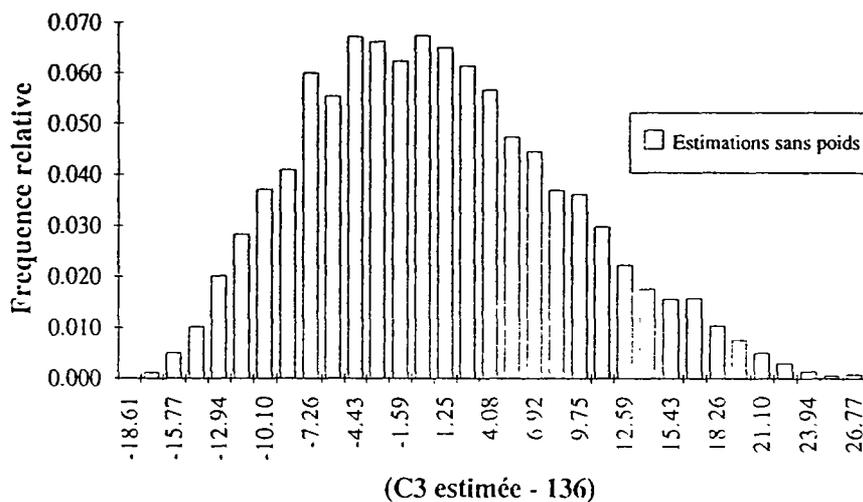


figure 69 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une rugosité avec MCO

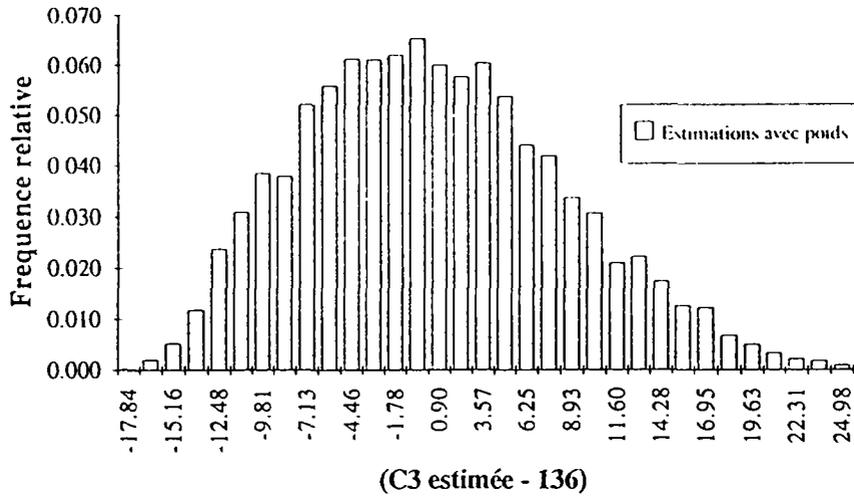


figure 70 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une rugosité avec MCP

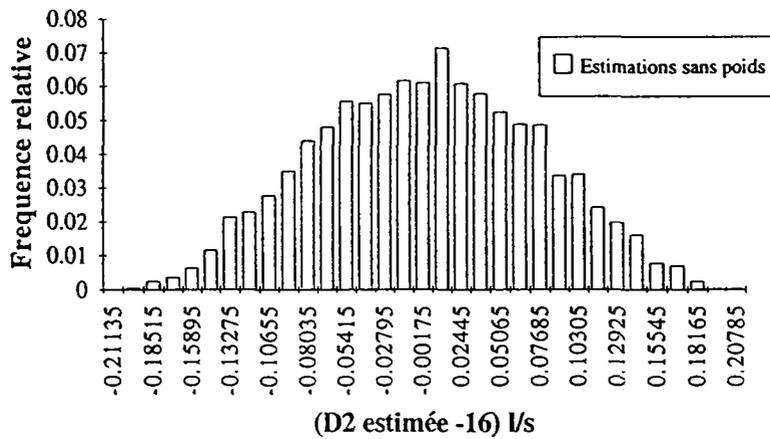


figure 71 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une demande avec MCO

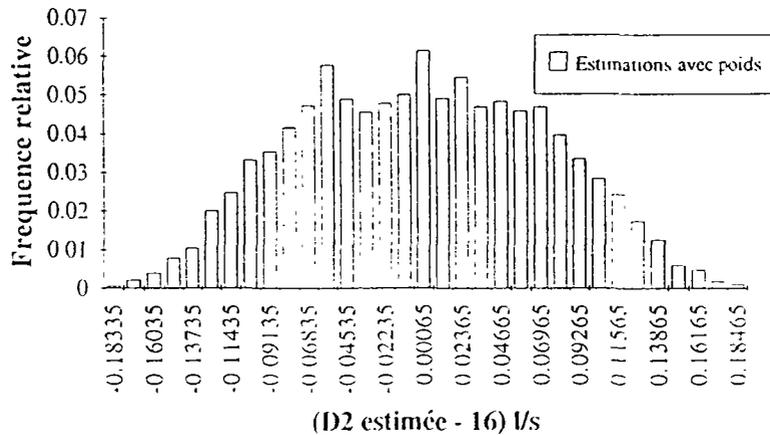


figure 72 : distribution d'échantillonnage de l'erreur sur une demande avec MCP

Nous avons assimilé pour comparer les efficacités des deux estimateurs, les statistiques sur les échantillons avec les statistiques sur les populations. Nous allons rappeler les définitions et les propriétés sur les estimateurs (cf. T. H. Wonnacott, p. 261-283, 1991) que nous allons utiliser.

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur de θ . Il est sans biais si sa moyenne $E(\hat{\theta}) = \theta$; dans le cas contraire, on définit le biais par : $E(\hat{\theta}) - \theta$. L'erreur quadratique moyenne est la statistique sur $\hat{\theta}$: $ERQM = \text{Var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2$. Pour deux estimateurs quelconques, avec ou sans biais, l'efficacité de $\hat{\theta}_1$ comparée à celle de $\hat{\theta}_2$ est le rapport :

$$\frac{ERQM \text{ de } \hat{\theta}_2}{ERQM \text{ de } \hat{\theta}_1}$$

On dit qu'un estimateur est précis s'il possède une faible variance et exact si son ERQM est faible.

On constate que les estimateurs de C_1 , de C_2 , de D_1 et de D_2 sont exacts avec ce choix de mesure dans le cas de petits bruits blancs pour MCO, comme pour MCP. Les estimateurs \hat{C}_3^{SP} et \hat{C}_3^{AP} ne sont pas précis ; une explication en sera par la suite, donnée.

Dans le tableau de la figure 73, nous avons calculé les statistiques précédemment introduites :

Estimateur	Moyenne	Biais	Variance	ERQM
\hat{C}_3^{SP}	136,71	0,71	66,08	66,58
\hat{C}_3^{AP}	136,55	0,55	61,87	62,17
\hat{D}_2^{SP}	16,0006	$6,29 \cdot 10^{-4}$	$5,61 \cdot 10^{-3}$	$5,61 \cdot 10^{-3}$
\hat{D}_2^{AP}	15,9992	$8,36 \cdot 10^{-4}$	$5,31 \cdot 10^{-3}$	$5,32 \cdot 10^{-3}$

figure 73 : tableau des statistiques sur l'échantillon avec des bruits blancs

L'efficacité de \hat{C}_3^{AP} comparée à celle de \hat{C}_3^{SP} est par définition $\frac{66,58}{62,17} \approx 1,07$

L'efficacité de \hat{D}_2^{AP} comparée à celle de \hat{D}_2^{SP} est par définition $\frac{5,61}{5,32} \approx 1,05$

Les efficacités des estimateurs MCO et MCP sont ici comparables pour des bruits blancs, les différences pouvant s'expliquer par les fluctuations de l'échantillonnage.

Pour de grands bruits blancs la conclusion sera identique. Pour la changer, il faut introduire des disparités entre les aléas des mesures de débits et des mesures de charge. Ces derniers ne sont plus des bruits blancs, et seuls les résidus pondérés le sont.

Pour le vérifier, effectuons la même simulation, à partir de :

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 0.100 \\ 0.100 \\ 0.100 \\ 0.100 \end{pmatrix}$$

Alors, les même statistiques ont donné :

Estimateur	Moyenne	Biais	Variance	ERQM
\hat{C}_3^{SP}	138,79	2,79	288,47	296,25
\hat{C}_3^{AP}	136,80	0,80	87,94	88,592
\hat{D}_2^{SP}	16,0419	0,04189	0,623	0,625
\hat{D}_2^{AP}	16,0065	$6,543 \cdot 10^{-3}$	0,365	0,365

figure 74 : tableau des statistiques sur l'échantillon avec des disparités dans les aléas

L'efficacité de \hat{C}_3^{AP} comparée à celle de \hat{C}_3^{SP} est $\frac{296,25}{88,59} \approx 3,34$

L'efficacité de \hat{D}_2^{AP} comparée à celle de \hat{D}_2^{SP} est $\frac{0,625}{0,365} \approx 1,71$

Les estimateurs MCP sont donc plus efficaces que les estimateurs MCO dans le cas de disparités dans les aléas, quand on utilise les bons poids. Il n'en serait bien sûr pas de même si les poids ne tenait pas compte de la réalité, et le résultat pourrait être inversé.

Comme pour le cas des bruits blancs, nous avons représenté les distributions d'échantillonnage de $\hat{C}_3^{SP} - C_3^{vrai}$ et de $\hat{C}_3^{AP} - C_3^{vrai}$, figures 75 et 76, et celles de $\hat{D}_2^{SP} - D_2^{vrai}$ et de $\hat{D}_2^{AP} - D_2^{vrai}$, figures 77 et 78.

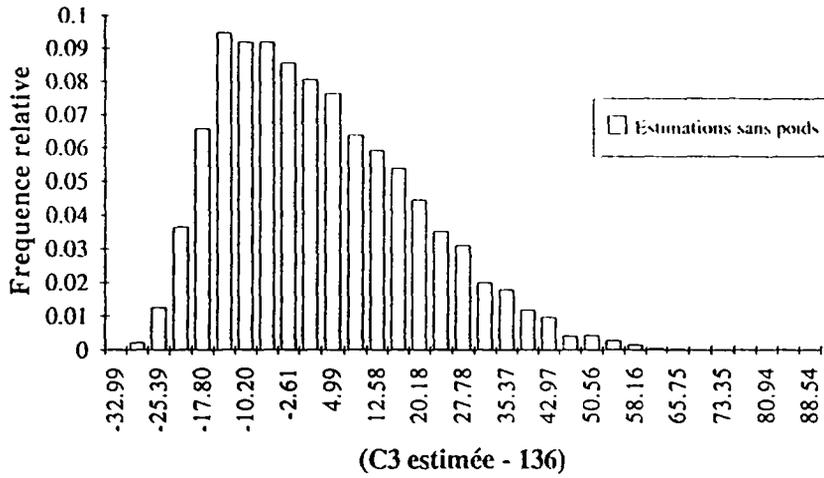


figure 75 : distribution de l'erreur sur C_3 avec MCO et des disparités dans les aléas

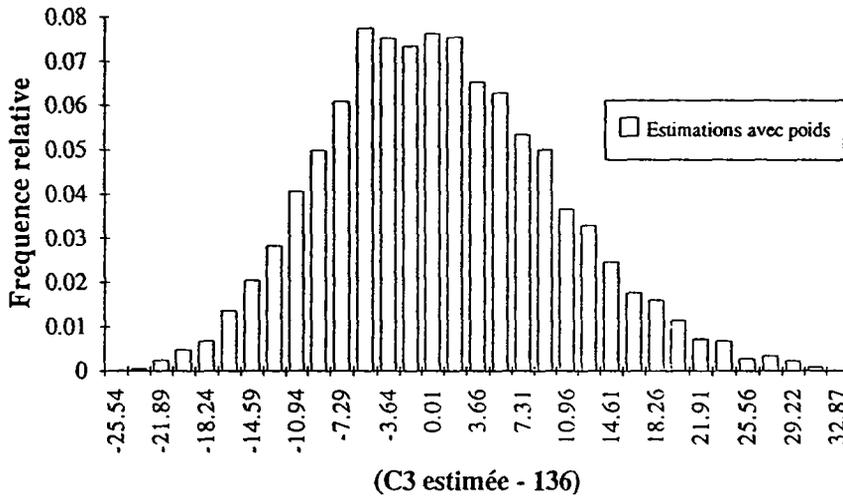


figure 76 : distribution de l'erreur sur C_3 avec MCP et des disparités dans les aléas

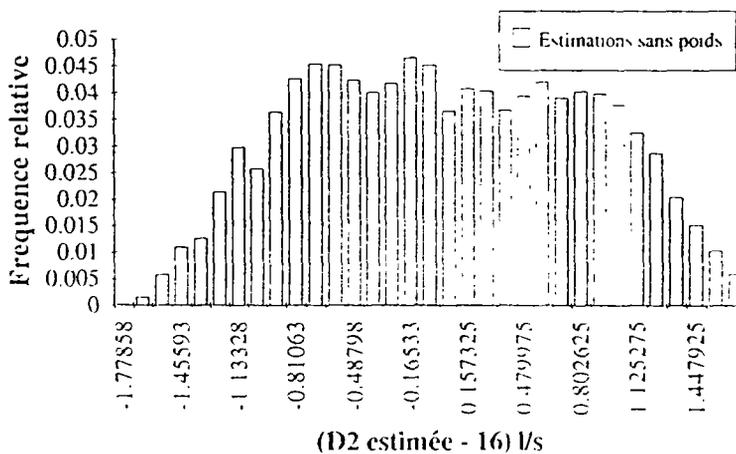


figure 77: distribution de l'erreur sur D_2 avec MCO et des disparités dans les aléas

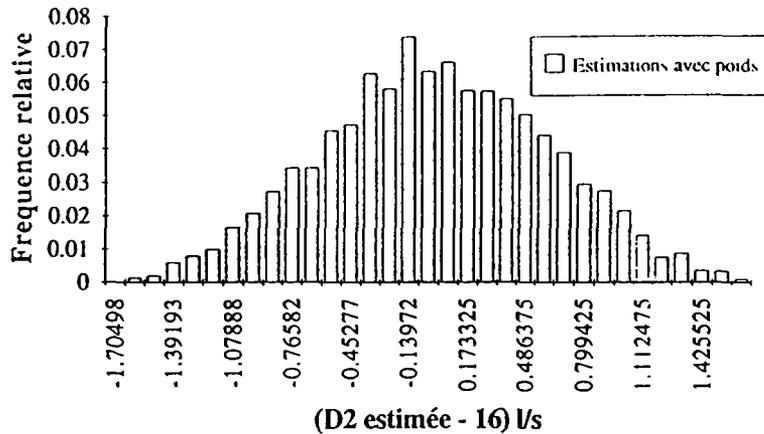


figure 78 : distribution de l'erreur sur D_2 avec MCP et des disparités dans les aléas

Nous allons mettre en évidence le manque de robustesse de l'algorithme MCO confronté à des erreurs grossières. Nous montrerons alors que l'algorithme MCPA, qui corrige les poids en fonction des résidus pondérés si un grand résidu est observé, peut y remédier.

c) Introduction d'erreurs grossières

On entend par erreurs grossières, toutes données qui perturbent et qui nuisent à l'estimation. On dira aussi, mauvaises données ou données aberrantes.

Il est possible d'expliquer pourquoi les estimateurs de C_3 sont moins précis que les autres à partir du choix des mesures et de la topologie du réseau. En effet, l'arc 5/11 est le seul de rugosité C_3 . Pour cet arc, de longueur : 1660 m et de diamètre : 200 mm, la perte de charge donnée par le tableau de la figure 57, est de : $h_5 - h_{11} = 0,73$ m. Ainsi, une erreur de 0.2 mètres représente 27 % de la vraie valeur. De même, une erreur sur la charge au noeud 11, qui semble petite vis-à-vis des précisions des appareils de mesure dont nous disposons, est tout de suite grossière pour l'estimation de C_3 . Pour un autre choix de mesure, les deux estimateurs sont peut-être plus robustes pour l'estimation de C_3 , ce sera l'objet du chapitre IV sur le choix des mesures.

Pour différentes erreurs sur h_{11} , nous avons représenté, figure 79, C_3 étant variable, les autres paramètres étant pris à leur véritable valeur. le graphe de la somme des carrés des résidus ainsi obtenu :

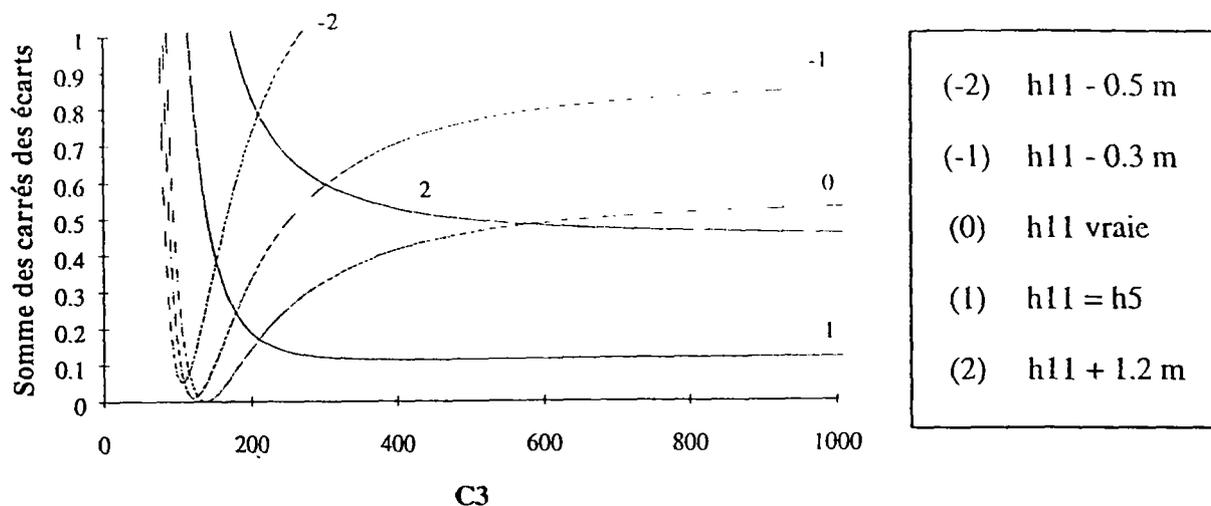


figure 79 : graphe de g avec une seule rugosité inconnue pour différentes valeurs en h_{11}

Pour les cinq courbes représentées la fonction somme des carrés des résidus possède une asymptote horizontale et une limite finie quand $C_3 \rightarrow +\infty$. Quand h_{11} augmente, il existe un seuil à partir duquel, le critère des moindres carrés ne possède pas de minimum sur $]0;1000[$.

Pour chacune de ces cinq valeurs de h_{11} , les résultats de l'algorithme MCO avec pour initialisation $C_3^0 = 136$, sont présentés dans le tableau de la figure 80. nous avons reporté :

- en première colonne, la mesure en h_{11} ;
- en deuxième colonne, l'estimation de C_3 ;
- en troisième colonne, la somme des carrés des résidus correspondante ;
- en quatrième colonne, le nombre d'itérations jusqu'à la convergence : Nbiter ;
- en cinquième colonne, le résidu sur h_{11} ;
- en sixième colonne, le résidu sur h_5 ;
- en dernière colonne, le gradient au point estimé.

h_{11}^{mes} (m)	\hat{C}_3^{SP}	$g(\hat{C}_3^{SP})$	Nbiter	$h_{11}^{mes} - \hat{h}_{11}$	$h_5^{mes} - \hat{h}_5$	$\nabla g(\hat{C}_3^{SP})$
59,214	105,33	$5,27 \cdot 10^{-2}$	4	$-1,05 \cdot 10^{-1}$	$-4,29 \cdot 10^{-2}$	$0,45 \cdot 10^{-7}$
59,414	115,09	$1,88 \cdot 10^{-2}$	3	$-6,32 \cdot 10^{-2}$	$-2,50 \cdot 10^{-2}$	$0,23 \cdot 10^{-8}$
59,714	136,01	$3,65 \cdot 10^{-7}$	2	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$2,41 \cdot 10^{-4}$	$-0,99 \cdot 10^{-9}$
60,448	419,01	$1,14 \cdot 10^{-1}$	13	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$	$-1,19 \cdot 10^{-11}$
60,914	110394,65	$4,06 \cdot 10^{-1}$	69	$5,374 \cdot 10^{-1}$	$7,14 \cdot 10^{-2}$	$-0,16 \cdot 10^{-10}$

figure 80 : résultats avec MCO pour différentes valeur en h_{11}

On constate que pour $h_{11} = h_5$ et $h_{11} = 60.914$, l'algorithme converge vers des points stationnaires (qui annulent le gradient). S'agit-il de minima? Sont-ils globaux ou locaux? L'algorithme s'est-il laissé "piéger" par un paysage très plat avec lequel il ne pouvait pas progresser auquel cas la solution finale dépendrait de la solution initiale? Pour trouver des réponses à ces questions, effectuons un changement d'échelle sur l'axe des ordonnées pour la courbe (1). On obtient ainsi la figure 81 :

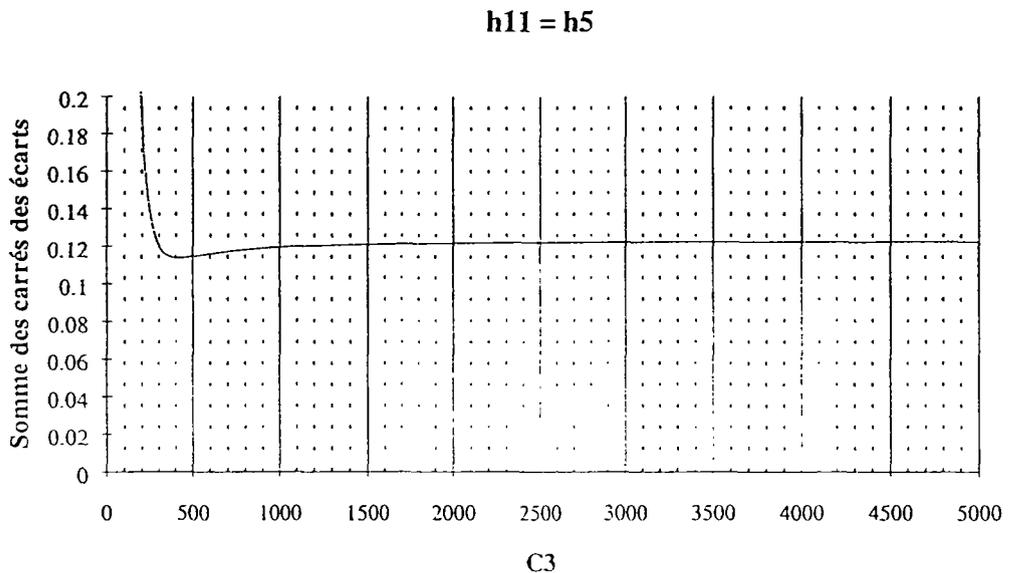


figure 81 : effet d'une mesure aberrante en h_{11}

On constate que $\hat{C}_3^{SP} = 419.01$, correspond bien à un minimum global. Pour de grandes initialisations, i.e. supérieures à 4000, l'algorithme III-4.3 s'arrête et détermine que la solution initiale est un minimum local, le gradient en ce point étant nul avec la précision de la machine. Ces points sont des points d'attraction pour l'algorithme. Pour tous les essais numériques effectués, en partant d'une petite initialisation (inférieure à

4000), l'algorithme converge vers le minimum global strict, et l'estimation de C_3 est 419,01.

Pour $h_{11} = 60.914$, le point stationnaire atteint est un minimum global non strict pour la précision de l'ordinateur.

Les résultats du tableau de la figure 80, montrent que le critère des moindres carrés MCO n'est pas robuste vis à vis de mauvaises données qui faussent l'estimation.

Si l'on ne tient pas compte de la mesure en h_{11} , les six autres mesures étant précises au millième, on obtient : $\hat{C}_3^{SP} = 136$.

Nous allons tester l'algorithme MCPA dont nous rappelons le principe : si les résidus pondérés de $K^{i\text{ème}}$ itération ne sont pas trop grands, c'est qu'il n'y a pas de donnée aberrante. On garde alors le même poids pour toutes les itérations ; l'estimation obtenue est alors une estimation MCP. Sinon, pour limiter l'influence de mauvaises données, on corrige pour les itérations suivantes, les poids à partir de résidus précédemment calculés. En fin du processus de corrections, certains résidus pondérés sont en valeur absolue proches de un, et d'autres beaucoup plus petits (ce sont ceux qui servent à l'estimation).

Pour des poids initiaux pris à un, l'algorithme MCPA ne décèle pas une mesure aberrante en h_{11} et les estimations sont celles du tableau de la figure 80. Si les poids initiaux sont pris à 10, on obtient les résultats présentés dans le tableau de la figure 82. L'estimation obtenue est notée : \hat{C}_3^{CP} . Nbfct et Nbgrad sont ceux du tableau de la figure 59. Les sept dernières colonnes du tableau sont les inverses des poids (qui peuvent s'interpréter comme des précisions) obtenus pour la dernière itération.

h_{11}^{mes} (m)	\hat{C}_3^{CP}	Nbfct	Nbgrad	w_1^{-1} ($q_{R1/6}$)	w_2^{-1} ($q_{R2/13}$)	w_3^{-1} ($q_{11/10}$)	w_4^{-1} (h_{15})	w_5^{-1} (h_9)	w_6^{-1} (h_{11})	w_7^{-1} (h_5)
59,214	135,92	20	19	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,494	0,001
59,414	135,92	20	19	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,296	0,001
59,714	136,01	3	2	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
60,448	135,92	18	17	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,725	0,001
60,914	135,90	31	30	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	1,210	0,001

figure 82 : moindre influence d'une donnée aberrante en h_{11} par MCPA

Pour que l'algorithme MCPA donne une estimation différente de l'algorithme MCP, il faut que pour un indice i après trois itérations :

$$|y_i^{\text{mes}} - y_i(x^3)| > 3 * \Delta y_i^2 \quad (\text{III-6.3})$$

Afin que les corrections sur les poids ne soient pas influencées par la solution initiale et pour une meilleure détection de données aberrantes, on effectue trois itérations ($K=3$).

Il est important que $\Delta y_i = w_i^{-1}$ soit une bonne mesure de la dispersion de la $i^{\text{ième}}$ mesure autour de la vraie valeur. Ainsi, si (III-6.3) se réalise à la troisième itération, il y a une forte probabilité pour que la $i^{\text{ième}}$ mesure soit une mauvaise donnée.

Prendre le poids initial égal à l'inverse de la précision de la mesure donne de bons résultats, pour les deux raisons suivantes :

- s'il y a présence de mauvaises données, le test III-6.3, les détecte généralement. On corrige ensuite les poids.
- s'il n'a pas d'erreur grossière, le correcteur ne s'est pas mis en marche lors de nos simulations (ce que nous allons vérifier), ce qui ne serait pas vrai avec $k = 0$ dans III-6.3 ; ce choix conduit alors à l'estimateur du critère des moindres carrés avec poids (MCP) pour lesquels on a les bons résultats du chapitre précédent quand les résidus pondérés sont des bruits blancs.

Comparons, dans le cas de disparités dans aléas, mais sans erreurs grossières, l'efficacité des estimateurs issus de l'algorithme MCPA par rapport aux estimateurs des critères MCO et MCP. On reprend le dernier test du précédent sous-chapitre, lequel génère cinq mille vecteurs de mesures, avec $\Delta y_i = 1$ l/s pour les débits et $\Delta y_i = 0,1$ m pour les charges.

Le tableau des résultats, sur les deux simulations nécessaires au test de Monte-Carlo qui s'effectuent chacune en moins de 200 s sur un Vax 4000-100. est le suivant :

Estimateur	Moyenne	Biais	Variance	ERQM
\hat{C}_3^{CP}	136,78	0,78	90,95	91,56
\hat{C}_3^{AP}	136,80	0,80	87,94	88,59
\hat{D}_2^{CP}	16,0060	$6,016 \cdot 10^{-3}$	0,366	0,366
\hat{D}_2^{CP}	16,0065	$6,543 \cdot 10^{-3}$	0,365	0,365

figure 83 : comparaison des statistiques sur l'échantillon

Les estimateurs issus de MCPA sont aussi efficaces que les estimateurs MCP. Les différences sur les ERQM s'expliquent par les fluctuations des échantillons. Le test III-6.3, a détecté dans tous les cas qu'il n'y avait pas de mesures grossières : on ne fait pas de corrections.

Les distributions d'échantillonnage de $\hat{C}_3^{CP} - C_3^{vrai}$ et de $\hat{D}_2^{CP} - D_2^{vrai}$ sont représentées figures 84 et 85 :

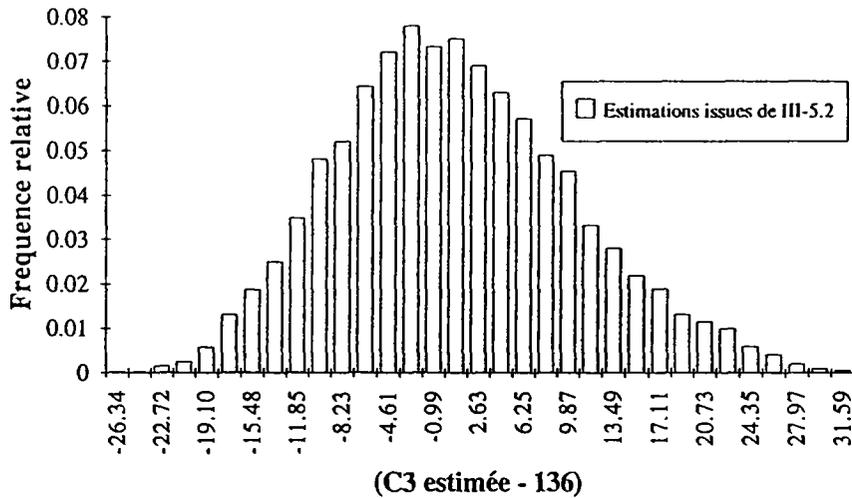


figure 84 : distribution de l'erreur sur C_3 avec MCPA et des bruits blancs

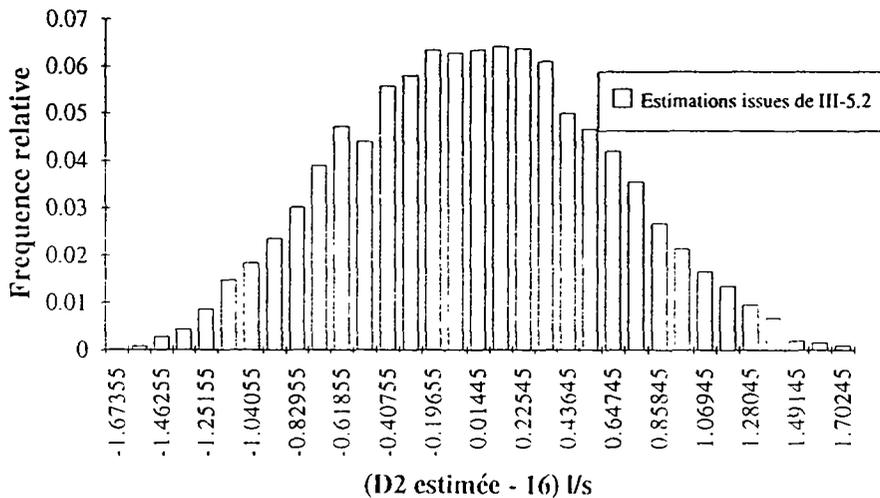


figure 85 : distribution de l'erreur sur D_2 avec MCPA et des bruits blancs

III-6.2 Calage du réseau de Marennes

La Compagnie des Eaux de Royan, société fermière de la ville de Marennes (Charente-Maritime), a permis la réalisation d'une campagne de mesure.

Le graphe de la ville de Marennes (figure 86) se compose de 231 arcs et 183 noeuds dont un réservoir, au noeud 1. Il comprend 49 cycles indépendants.

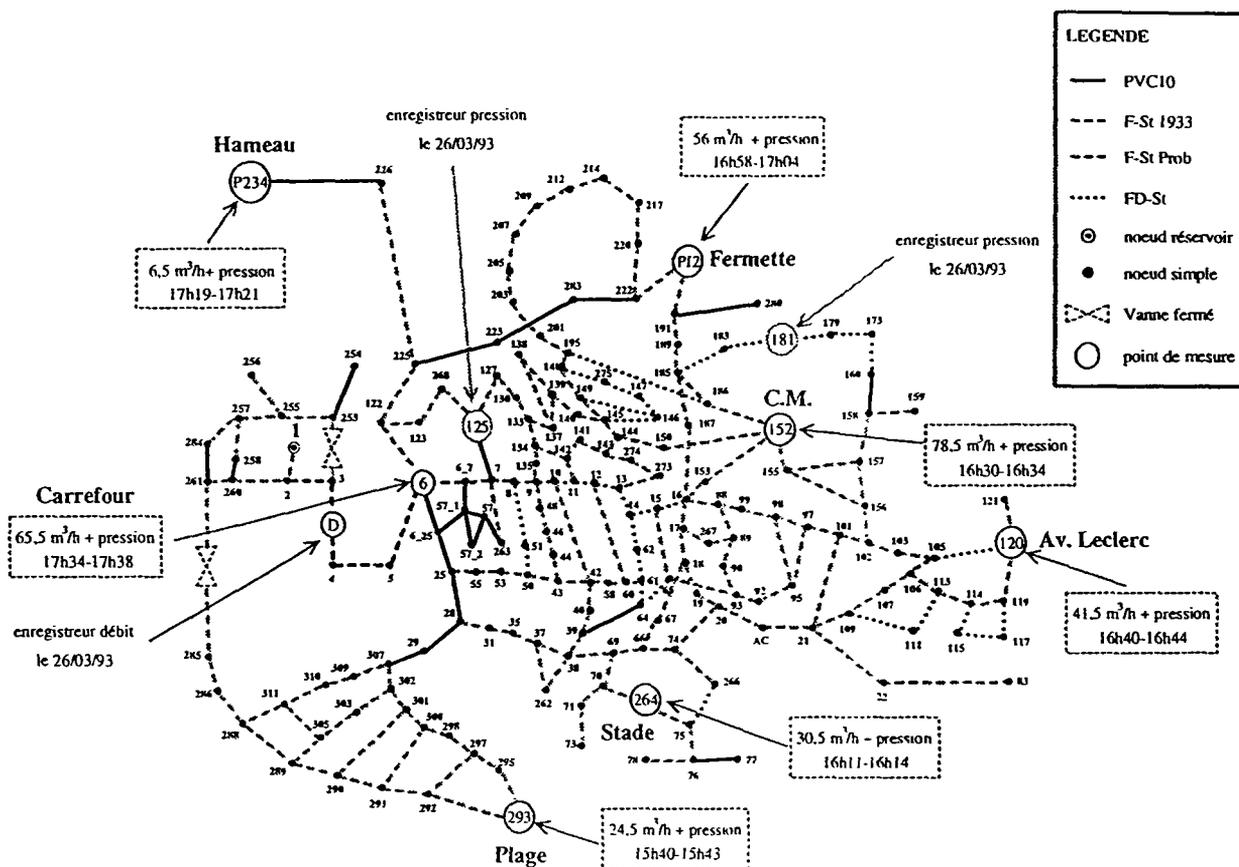


figure 86 : campagne de mesure pour la ville de Marennes le 26 mars 1993

La longueur des conduites du réseau prises en compte est de 38 km. Les conduites sont constituées de trois matériaux : Polychlorure de vinyle 10 bars (PVC10), Fonte-Joint Standard (F-St) et Fonte Ductile Standard (FD-St). On décide de quatre classes de rugosités correspondantes aux trois matériaux et à une classe de quatre arcs de matériau F-St en tête du réseau pour laquelle des problèmes sont signalés.

Deux types d'abonnés (pour la morte saison) suffisent à décrire le comportement global de la consommation. Sont recensés 2562 abonnés de type domestiques ; les

consommations industrielles sont connues et constantes pour toute la durée de la campagne de mesure.

a) Organisation de la campagne de mesure

La campagne de mesure consiste à ouvrir sept poteaux d'incendie, comme indiqué sur le graphe de la figure 86, pour favoriser l'apparition de pertes de charge dans le réseau. On dispose ainsi de sept régimes de demandes, pour lesquels la seule classe de demandes inconnues est D_1 , la demande domestique par abonné. En ouvrant un poteau d'incendie, on introduit une nouvelle classe de demande. La mesure du débit au poteau d'incendie a servi à déterminer la demande particulière qu'elle constitue. Cette mesure est supposée parfaite pour les estimations qui vont suivre.

Les inconnues à déterminer sont les quatre rugosités et la demande D_1 pour les sept régimes. Ce qui fait $7 + 4 = 11$ inconnues.

Les mesures pour chacun des sept régimes sont : la mesure du débit en tête sur l'arc 3/4, et trois mesures de pressions, la première dans un voisinage immédiat du poteau d'incendie, les deux autres aux noeuds 181 et 125. Ce qui représente en tout 28 mesures. D'où :

$$m = 28 \text{ et } p = 11$$

b) Evolution des estimations au cours des itérations

Les précisions sur les mesures sont $\Delta y_i = 1 \text{ m}$ si la $i^{\text{ème}}$ mesure est une charge, et $\Delta y_i = 1 \text{ l/s}$ pour les mesures du débit en tête.

L'algorithme III-5.2 a convergé en 21 itérations et en 27 secondes sur un Vax 4000-100. La somme des carrés des écarts des résidus pondérés est égal à $g(\hat{x}^{21}) = 17.02$.

Les figures 87 et 88 présentent, pour la première, l'évolution des rugosités au cours des itérations et, pour la seconde, celle des demandes.

La solution initiale correspond au résultat attendu. Le résultat de la 4^{ème} itération est celui de l'estimation du critère des moindres carrés : MCP, et celui de la 21^{ème} itération correspond aux modifications automatiques des poids effectuées par l'algorithme III-5.2. Entre la 4^{ème} itération et la 21^{ème}, ce sont surtout les estimations des demandes qui ont changé.

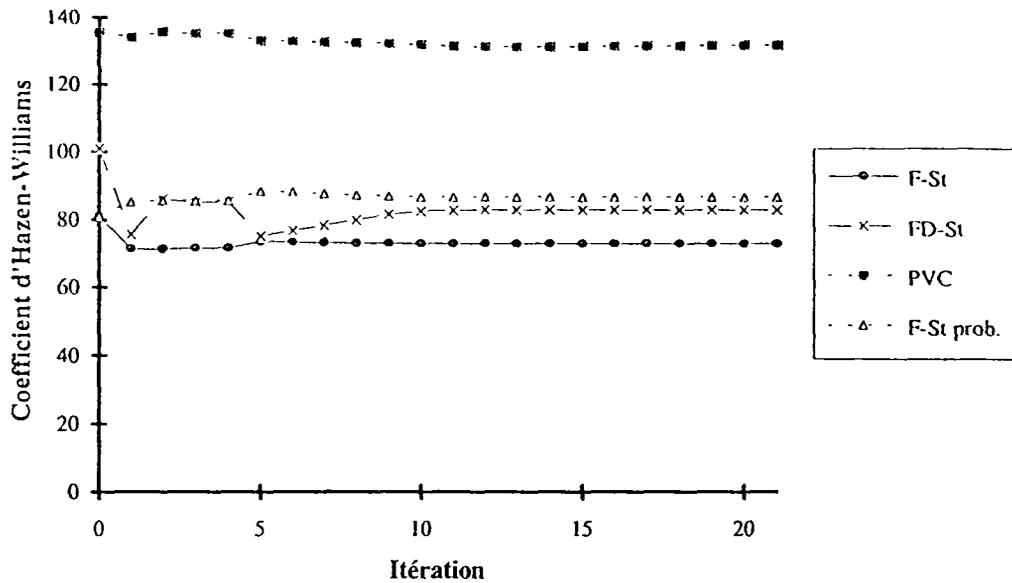


figure 87 : évolution de l'estimation des rugosités pour le réseau de la ville de Marennes

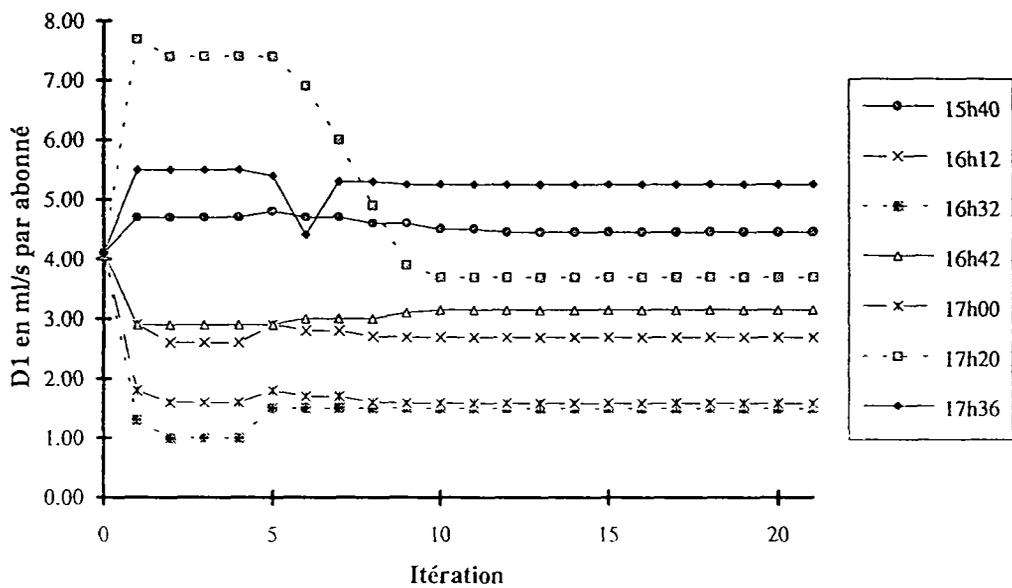


figure 88 : évolution de l'estimation des demandes pour le réseau de la ville de Marennes

c) Estimations par intervalle des inconnues

Les résultats sur les estimations par intervalle obtenues par approximations linéaires des équations sont ceux des figures 89 et 90 :

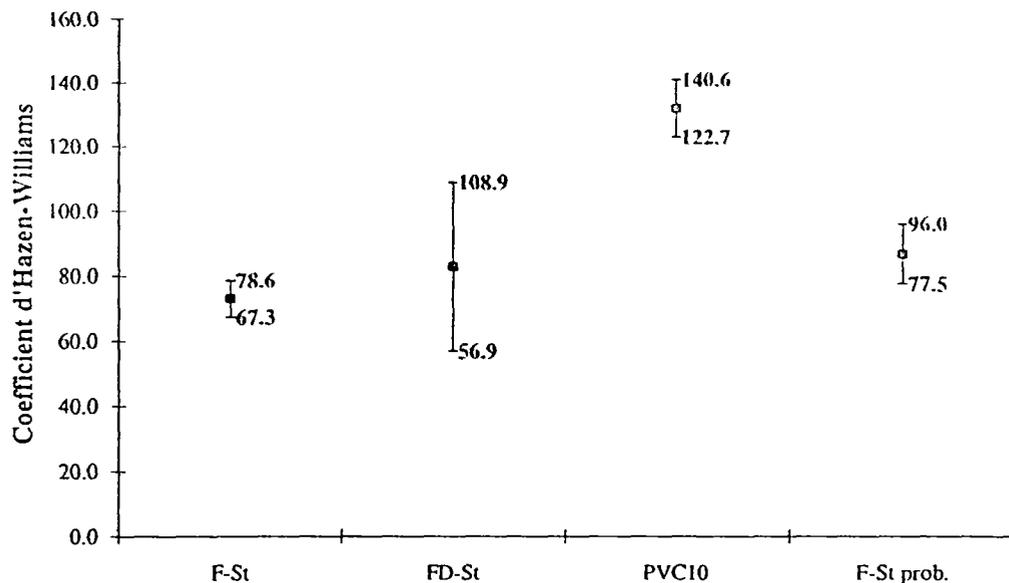


figure 89 : estimation des rugosités pour le réseau de la ville de Marennes

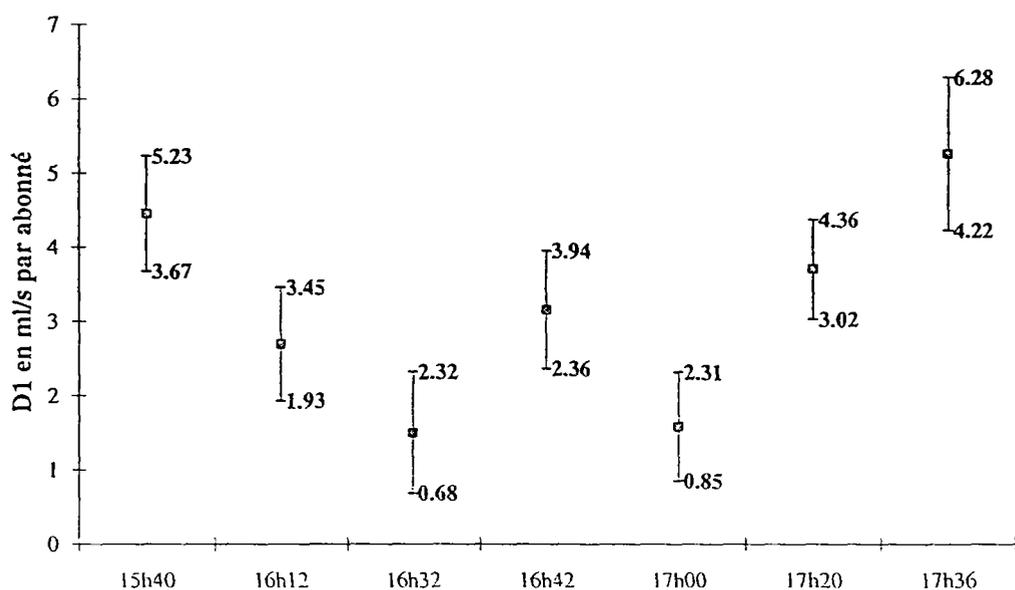


figure 90 : estimation de D_1 aux heures des ouvertures de poteaux d'incendie

d) Etude des résidus

Pour juger la qualité d'une estimation, on représente usuellement les résidus. Nous utiliserons les ordres de grandeurs données par S. E. Delattre, 1991, qui considère avoir calé le réseau si les charges prédites sont à moins de 3 mètres des charges mesurées et si les débits prédits sont à 10% des débits mesurés.

La figure 95, montre que 17 résidus pondérés sont en valeurs absolues égaux à un et que les 11 autres sont presque nuls. Ce qui signifie que les onze mesures correspondantes servent à caler les onze paramètres inconnus.

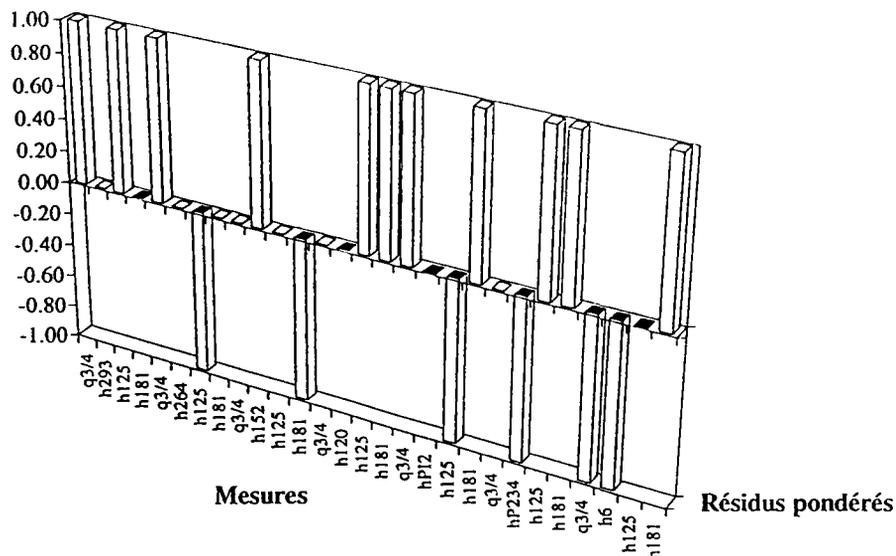


figure 95 : résidus pondérés après correction des poids

e) Résultats de simulations par la méthode de Monte-Carlo

On génère mille vecteurs de mesures avec une erreur de mesure uniformément distribuée. On résout ensuite pour chacun d'eux, le problème de l'Identification du réseau par l'algorithme III-5.2. Ce qui a permis d'obtenir les estimations par intervalle de la figure 96 :

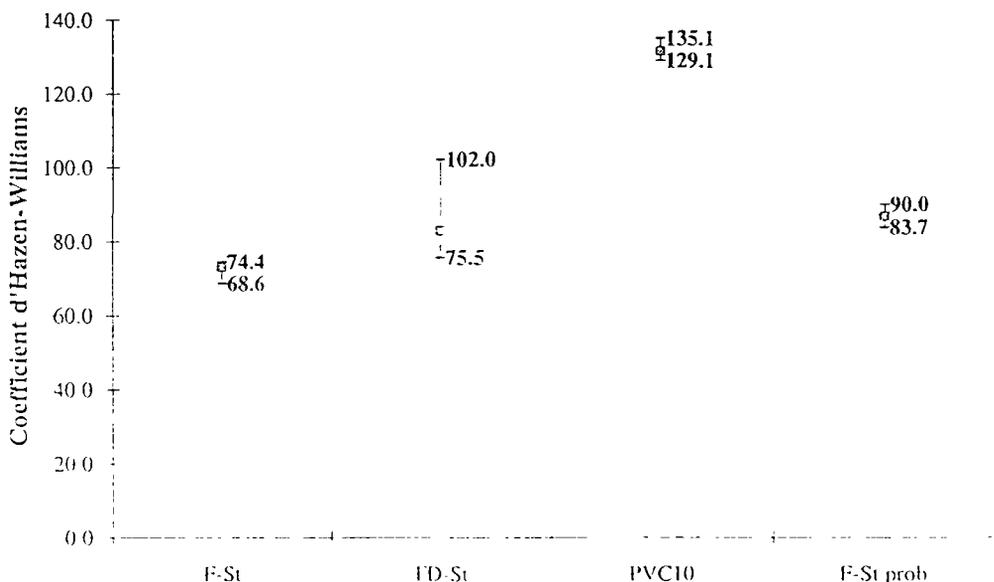


figure 96 : estimation des rugosités pour le réseau de la ville de Marennes

Un carré symbolise la valeur obtenue avec les données brutes qui est voisine de la moyenne obtenue sur l'échantillon. Les estimations issus de la méthode de Monte-Carlo sont plus précises que les estimations symétriques par intervalle données par la figure 89. Elles demandent, cependant, un temps CPU de 4 h 20 mn et 52 s sur un Vax 4000-100, la durée moyenne pour une résolution du problème de l'Identification du réseau ayant été de 15 s 65". Les estimations par intervalle sont les supports des distributions d'échantillonnage (cf. figures 97 à 100) des mille réalisations de \hat{C}_1 , de \hat{C}_2 , de \hat{C}_3 et de \hat{C}_4 .

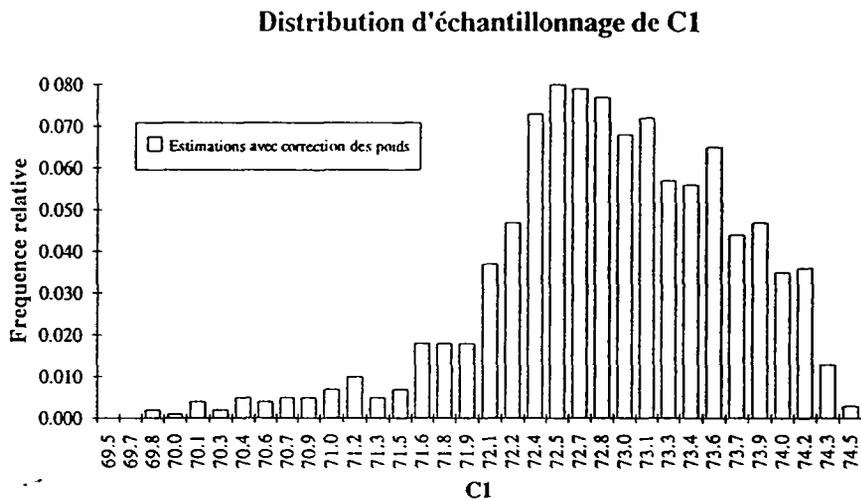


figure 97 : distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau F-St

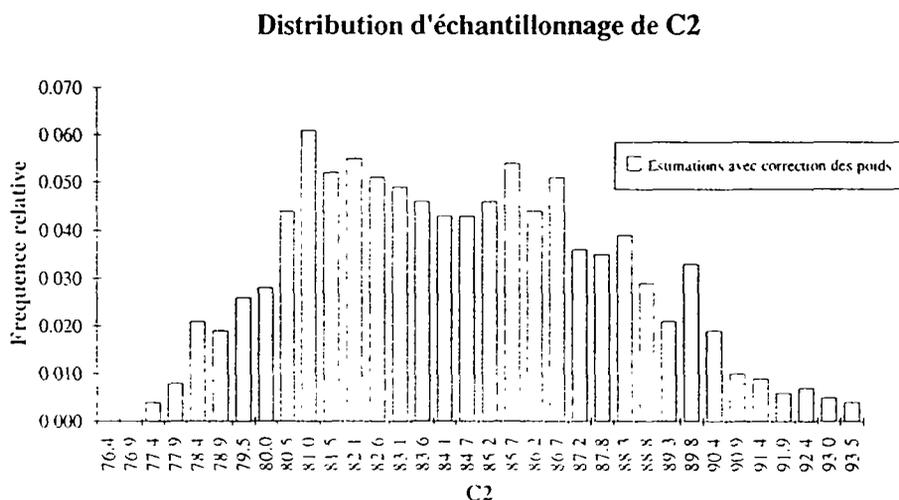


figure 98 : distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau FD-St

Distribution d'échantillonnage de C3

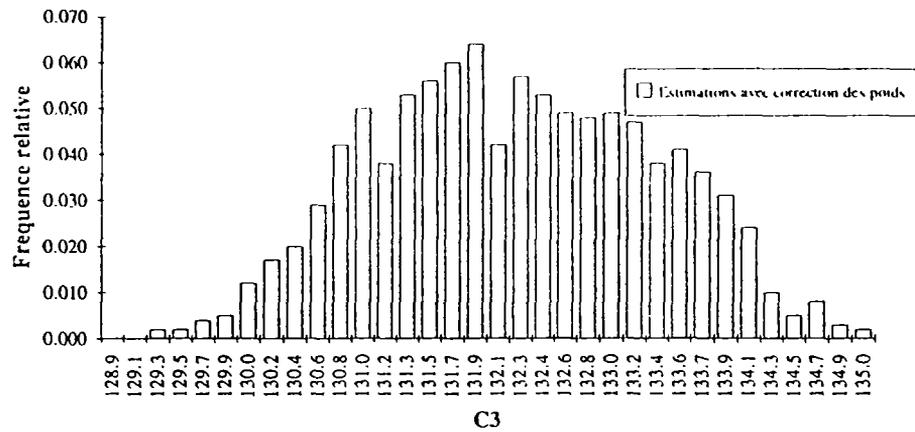


figure 99 : distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau PVC10

Distribution d'échantillonnage de C4

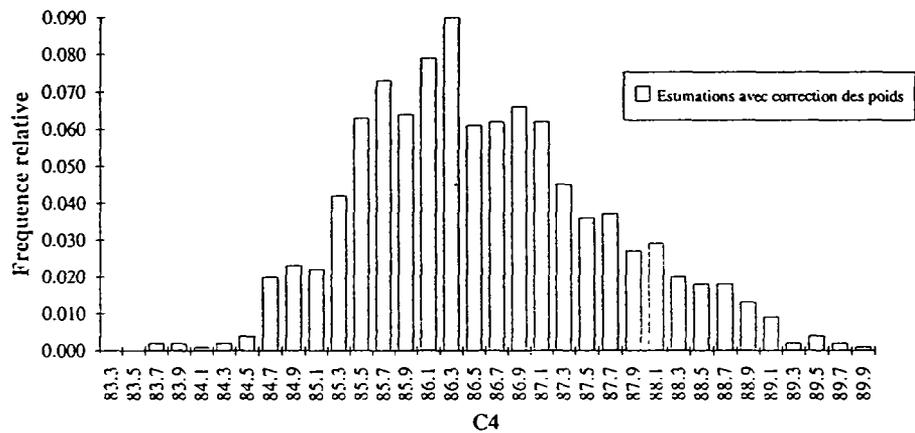


figure 100 : distribution d'échantillonnage de la rugosité du matériau F-St prob.

Nous n'avons pas détecté de problème sur les quatre arcs de rugosité C_4 . C'est au contraire, sur les autres arcs en F-St (C_1) qu'il semble y avoir une faible rugosité donc un problème.

CHAPITRE 4

Choix des mesures

IV CHOIX DES MESURES

Nous venons de voir comment, à partir de m mesures, déterminer la meilleure estimation au sens des moindres carrés des p classes de rugosités et de demandes inconnues : on résout le problème (CLS) du §III-3.1.

L'emplacement et la nature des mesures déterminent si un réseau est observable, c'est-à-dire si l'on peut reconstituer le vecteur d'état, et influent aussi fortement sur le comportement numérique pour la recherche de l'optimum, et la stabilité de l'estimation devant les erreurs de mesure

On se propose de décrire un Algorithme de Choix de mesures qui répond à ces deux préoccupations.

Après avoir présélectionné des mesures, par un facteur économique et par la facilité de mise en oeuvre, on rappelle les équations qui entrent en jeu, lesquelles sont ensuite simplifiées en les linéarisant.

On effectue alors deux changements de variables : le premier dans l'espace des mesures pour homogénéiser la précision des mesures, le deuxième dans l'espace des inconnues pour effectuer une mise à l'échelle.

On formule le problème du Choix des mesures sous la forme de la minimisation de l'influence des erreurs de mesures sur l'estimation, sous la contrainte de l'indépendance maximale des mesures. Le problème étant un problème combinatoire difficile, on propose un algorithme glouton pour le résoudre. On décrit en le justifiant le calcul itératif de ce critère.

IV-1 Généralités sur les mesures

On sait utiliser, dans la procédure d'Identification du réseau, des mesures de demandes aux noeuds simples et aux noeuds réservoirs, c'est-à-dire les mesures de

certaines composantes des vecteurs d et d^f (Paragraphe III-1.6). Précisons pourquoi ces mesures sont en fait des pseudo-mesures et pourquoi dans tout le quatrième chapitre on ne va pas "Choisir une mesure" dont la nature est celle d'une demande en un noeud.

IV-1.1 Mesures de demandes aux noeuds simples

La mise en oeuvre d'une mesure de demandes aux noeuds simples est difficile sinon irréalisable. En effet, il faut mettre un débitmètre chez chaque abonné ou bien mesurer les débits sur tous les arcs incidents à un noeud simple auquel cas, les mesures sont de débits sur les arcs et non de demandes aux noeuds.

Une mesure de débit sur un noeud simple ne correspond donc pas à une mesure réelle ; c'est en fait une déduction statistique ou une connaissance a priori du réseau donc une "pseudo-mesure".

IV-1.2 Mesures de demandes aux noeuds réservoirs

On dispose toujours d'une mesure de débit à un noeud réservoir, qu'il y est un ou plusieurs arcs incidents, si entre deux régimes de demandes consécutifs on a constaté une différence de niveau, significative par rapport à la précision de la mesure, sur ce réservoir.

On saura alors déterminer la composante de d^f associée à ce réservoir pour la première période : c'est au signe près, le quotient de la différence de volume par le temps.

Si le noeud réservoir est un lac ou un noeud de ressource infini, ou si la charge du réservoir reste constante, on ne sait pas mesurer la demande en ce noeud à moins de mesurer le débit sur tous les arcs incidents.

IV-1.3 Réalisation des mesures de débit et de charges

Dans tout ce chapitre on cherche à mesurer des débits sur des arcs et des charges sur des noeuds simples et dans la mesure du possible on favorisera les mesures de charge aux noeuds simples : les précisions et fiabilité des mesures de charge sont meilleures ; elles sont plus faciles à mettre en oeuvre et d'un moindre coût.

IV-2 Les équations associées aux mesures

IV-2.1 Reconstitution des débits et des charges pour τ régimes

Soit x , le vecteur d'état correspondant à τ régimes :

$$x = (C^{inc}, D^{inc}(t_1), \dots, D^{inc}(t_\tau)) \in (\mathbb{R}^{+})^{n_c} \times \mathbb{R}^{\tau \cdot n_p}$$

On rappelle (cf. III-2.3) que pour le $i^{ième}$ régime, les résistances dans les arcs et les demandes aux noeuds, sont obtenues à partir des classes de rugosité et de demandes inconnues au temps t_i , par les relations :

$$\begin{aligned} r(C^{inc}) &= r(K_C \cdot ({}^t S_C \cdot C^{mes} + {}^t N_C \cdot C^{inc})) \\ d(D^{inc}(t_i)) &= K_D \cdot ({}^t S_D \cdot D^{mes} + {}^t N_D \cdot D^{inc}(t_i)) \end{aligned} \quad (IV-2.1)$$

Notons $y(x)$, le vecteur des débits et des charges prédites par le modèle de l'Analyse :

$$y(x) = (y_1, y_2, \dots, y_\tau) \in \mathbb{R}^{\tau(a+n)} \text{ avec } y_i = (q(t_i), h(t_i))$$

y_i vérifie alors :

$$(r(C^{inc}), d(D^{inc}(t_i))) \xrightarrow{\mathcal{A}} y_i = (q(t_i), h(t_i)) \quad (IV-2.2)$$

où \mathcal{A} est défini au §III-1.1.

Pour faire référence à la reconstitution des débits et des charges par le vecteur d'état x , on écrit :

$$y = y(x) \quad (IV-2.3)$$

Remarquons que (IV-2.3) correspond au cas particulier de (III-2.6) pour lequel il n'y a pas de mesures de demandes aux noeuds et pour lequel tous les débits dans les arcs et toutes les charges aux noeuds simples sont mesurées ; la dérivabilité de $y(\cdot)$ s'en déduit :

Théorème IV-2.1 :

y est de classe C^1 de $(\mathbb{R}^{+})^{n_c} \times \mathbb{R}^{\tau \cdot n_p}$ vers $\mathbb{R}^{\tau(a+n)}$ et sa matrice jacobienne est :

$$\text{Jac}(y)(x) = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Delta_1 & & & \\ & \Sigma_2 & \Delta_2 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & \Sigma_\tau & & & \Delta_\tau \end{pmatrix}$$

où

$\Sigma_i \in \mathbb{M}_{a+n, n_c}$ est la matrice des dérivées partielles de y_i par rapport à C^{inc} :

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \partial_{\text{Chw}q}(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_C \cdot {}^t N_C \\ \partial_{\text{Chw}h}(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_C \cdot {}^t N_C \end{pmatrix}$$

$\Delta_i \in \mathbb{M}_{a+n, n_d}$ est la matrice des dérivées partielles de y_i par rapport à $D^{\text{inc}}(t_i)$:

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \partial_d q(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \\ \partial_d h(\text{Chw}, d(t_i)) \cdot K_D \cdot {}^t N_D \end{pmatrix}$$

$\partial_{\text{Chw}q}$, $\partial_{\text{Chw}h}$, $\partial_d q$, $\partial_d h$ sont les fonctions du théorème III-3.3 ;

$$\text{et } \begin{cases} \text{Chw} = K_C \cdot ({}^t S_C \cdot C^{\text{mes}} + {}^t N_C \cdot C^{\text{inc}}) \\ d(t_i) = K_D \cdot ({}^t S_D \cdot D^{\text{mes}}(t_i) + {}^t N_D \cdot D^{\text{inc}}(t_i)) \end{cases}$$

Preuve : on fait $S_q(t_i) = I_a$ et $S_h(t_i) = I_n$ et on utilise le théorème (III-3.4) ■

IV-2.2 Prise en compte de m mesures et restriction du modèle

m désigne dans tout ce chapitre un nombre de mesures de débits dans les arcs ou de charges aux noeuds simples :

$$m = (m_q(t_1) + m_h(t_1)) + \dots + (m_q(t_\tau) + m_h(t_\tau)) \quad (\text{IV-2.4})$$

Le problème se pose du choix de certaines composantes des vecteurs q et h qu'il faut mesurer. De manière équivalente, on cherche à déterminer 2τ matrices de sélection (cf. chapitre III-1.6) :

$$S_q(t_1), S_h(t_1), \dots, S_q(t_\tau), S_h(t_\tau) \quad (\text{IV-2.5})$$

Posons :

$$S = \begin{pmatrix} S_q(t_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & S_h(t_1) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & S_q(t_r) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & S_h(t_r) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-2.6})$$

On cherche donc une matrice de sélection $S \in \mathbb{M}_{m,r(a+n)}$.

Soit S une telle matrice, rappelons alors quelles équations sont utiles à l'estimation de x .

Posons $y^{\text{calc}} \in \mathbb{R}^m$, le vecteur des débits et des charges calculés à partir d'une estimation x . Alors y^{calc} et x sont reliés par :

$$y^{\text{calc}} = S \cdot y(x) \quad (\text{IV-2.7})$$

où $y(x)$ est défini en (III-2.3).

Soit $y^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des mesures. Le problème de l'identification du réseau consiste à chercher \hat{x} pour minimiser la norme euclidienne de $y^{\text{mes}} - S \cdot y(x)$:

$$S \cdot y(\hat{x}) \equiv y^{\text{mes}} \quad (\text{IV-2.8})$$

IV-2.3 Linéarisation des équations

Soit x^0 une estimation a priori du vecteur d'état. En approximation du premier ordre autour de x^0 :

$$y(x) - y(x^0) = \mathbb{J}_0 \cdot (x - x^0) \quad (\text{IV-2.9})$$

où $\mathbb{J}_0 = \text{Jac}(y)(x^0)$

Posons $y^0 = y(x^0)$ alors :

$$y - y^0 = \mathbb{J}_0 \cdot (x - x^0) \quad (\text{IV-2.10})$$

Si x et x' sont voisins de x^0 , en écrivant (IV-2.9) en x puis en x' et en soustrayant les deux équations obtenues :

$$y(x) - y(x') = \mathbb{J}_0 \cdot (x - x')$$

Si $y = y(x)$, $y' = y(x')$ posons $\delta x = x - x'$ et $\delta y = y - y'$ alors :

$$\delta y = \mathbb{J}_0 \cdot \delta x \quad (\text{IV-2.11})$$

Ainsi si x est voisin de x^0 et si δx est petit $y(x + \delta x) = y + \delta y$ où δy est donné au premier ordre par (IV-2.11).

IV-3 Obtention du nombre nécessaire de mesures

Le vecteur des inconnues : x , a exactement $p = n_C + \tau \cdot n_D$ composantes. Pour obtenir un nombre d'équations plus grand ou égal à p , il faut :

$$m \geq n_C + \tau \cdot n_D = p \quad (\text{IV-3.1})$$

Répéter k mesures avec k plus grand que le nombre de classe de demandes inconnus, permet de réaliser (IV-3.1). En effet, pour $k > n_D$ et τ tel que :

$$\tau \geq \frac{n_C}{k - n_D} \quad (\text{IV-3.2})$$

il est clair que,

$$m = \tau \cdot k \geq p$$

IV-4 Homogénéisation des données de mesure et des paramètres inconnus

IV-4.1 Equilibrage de la jacobienne

Un équilibrage de \mathbb{J}_0 consiste à prémultiplier et postmultiplier \mathbb{J}_0 par deux matrices diagonales E_1 et E_2 (voir par exemple Golub et Van Loan p.124, 1989) afin d'atténuer les disproportions éventuelles entre les coefficients de \mathbb{J}_0 . Le conditionnement est en général amélioré :

$$1 \leq \text{cond}(E_1 \cdot \mathbb{J}_0 \cdot E_2) \leq \text{cond}(\mathbb{J}_0) \quad (\text{IV-4.1})$$

Nous notons :

$$\mathbb{V}_0 = E_1 \cdot \mathbb{J}_0 \cdot E_2 \quad (\text{IV-4.2})$$

et nous proposons pour le choix de E_1 et E_2 :

a) Equilibrage de la jacobienne en fonction de la précision des mesures

On cherche à homogénéiser les précisions dans la mesure des débits et des charges. Pour cela, on pose :

$$E_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{\Delta y_i} \right) \quad (\text{IV-4.3})$$

où Δy_i est la précision supposée de la mesure de la $i^{\text{ième}}$ composante de y :

$$y_i^{\text{mes}} - \Delta y_i \leq y_i \leq y_i^{\text{mes}} + \Delta y_i \quad (\text{IV-4.4})$$

Cette pré-multiplication correspond au changement de variable :

$$y_i \mapsto Y_i = \frac{y_i}{\Delta y_i}, \text{ pour } i = 1, \dots, \tau \cdot (a+n)$$

Posons :
$$Y = E_1 \cdot y \quad (\text{IV-4.5})$$

Ainsi, en mesurant Y_i on se trompe d'au plus ± 1 .

δY , l'erreur de mesure, appartient à la boule $\overline{B}_\infty(0,1)$ ce qui est primordial pour le critère du choix des mesures que nous définirons dans un prochain chapitre, lequel cherche à privilégier les mesures les plus précises.

b) Equilibrage de la jacobienne à partir d'une estimation des paramètres

Le but est de réaliser une mise à l'échelle du vecteur des estimations : x , pour lequel il y a une grande disproportion entre un coefficient de rugosité d'Hazen-Williams (de l'ordre de 100) et une consommation par abonné (de l'ordre de 10^{-3} l/s).

Le choix de E_2 est le suivant :

$$E_2 = \text{diag} \left(\frac{x_j^0}{10} \right) \quad (\text{IV-4.6})$$

On supposera que $x_j^0 \neq 0$, pour $j = 1, \dots, p$ (IV-4.7)

La post-multiplication correspond alors au changement de variable :

$$x_j \mapsto X_j = \frac{10 \cdot x_j}{x_j^0}, \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

soit vectoriellement : $X = E_2^{-1} \cdot x$ (IV-4.8)

ainsi : $x^0 \mapsto X^0 = 10 \mathbf{1}_p$ où $\mathbf{1}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

c) Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe III-1.7. Ce réseau est constitué de cinq arcs d'un réservoir R0 et de trois noeuds simples :

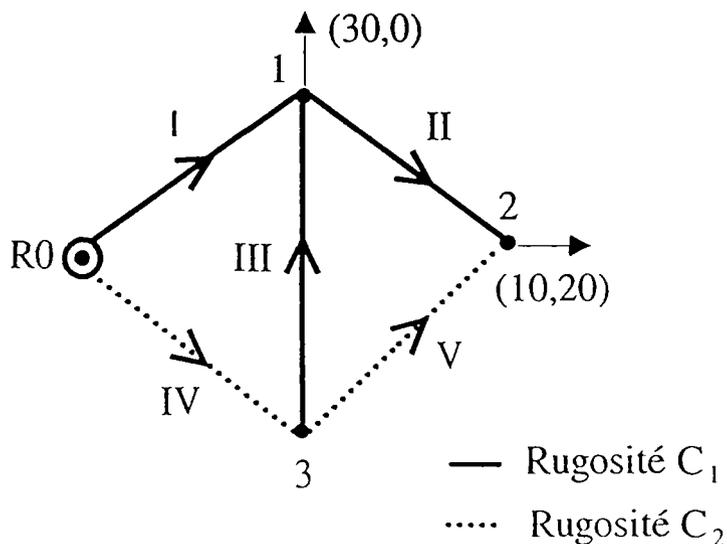


figure 101 : exemple pour l'homogénéisation

Nous avons établi les relations entre demandes et classes de demandes, et rugosités et classes de rugosités :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 10 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Chw_1 \\ Chw_2 \\ Chw_3 \\ Chw_4 \\ Chw_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Choisissons une estimation : x^0 , des quatre paramètres inconnus ; les classes de demandes sont exprimées en litres par seconde et par abonné, et les classes de rugosité étant sans dimension :

$$x^0 = \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \\ D_1^0 \\ D_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ 116 \\ 0,1389 \\ 0,5600 \end{pmatrix} \text{ alors } E_2 = \begin{pmatrix} 13,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01389 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,056 \end{pmatrix}$$

Si la charge au noeud réservoir R_0 est de 20 mètres et si les caractéristiques conduites sont :

arc : u	l(u)	T(u)	L_i (m)	Φ_i (mm)	Chw _i
I	R0	1	1000	150	136
II	1	2	1000	150	136
III	3	1	1500	150	136
IV	R0	3	1000	150	116
V	3	2	1000	150	116

figure 102 : tableau des caractéristiques conduites de l'exemple pour l'homogénéisation

Alors en résolvant le problème de l'Analyse on obtient les débits dans les arcs (en l/s) et les charges aux noeuds simples (en m) :

$$y^0 = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9,18 \\ 6,62 \\ 1,61 \\ 7,58 \\ 5,97 \\ 17,92 \\ 16,79 \\ 18,05 \end{pmatrix}$$

La jacobienne définie en IV-2.9 est alors :

$$\mathbb{J}_0 = \begin{pmatrix} 0,0290 & -0,0340 & 22,9688 & 10,6983 \\ 0,0250 & -0,0293 & 3,4120 & 10,9737 \\ -0,0040 & 0,0047 & 10,4469 & 0,2763 \\ -0,0290 & 0,0340 & 17,0350 & 9,3026 \\ -0,0250 & 0,0293 & 6,5880 & 9,0263 \\ \hline 0,0161 & 0,0143 & -9,6193 & -4,4809 \\ 0,0236 & 0,0236 & -10,7011 & -7,9596 \\ 0,0139 & 0,0149 & -8,1334 & -4,4416 \end{pmatrix}$$

avec $\text{cond}(\mathbb{J}_0) \approx 1037,7$ et l'amplitude des termes est : $17,0350 - (-10,7011) \approx 28$.

Supposons avoir une précision de $\pm 2 \text{ l.s}^{-1}$ pour les mesures de débit à réaliser et une précision de $\pm 0,5 \text{ m}$ pour les mesures de charges à effectuer. Ainsi :

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La Jacobienne équilibrée $\mathbb{T}_0 = E_1 \cdot \mathbb{J}_0 \cdot E_2$ est alors :

$$\mathbb{T}_0 = \begin{pmatrix} 0,1974 & -0,1974 & 0,1595 & 0,2996 \\ 0,1701 & -0,1701 & 0,0237 & 0,3073 \\ -0,0273 & 0,0273 & 0,0726 & 0,0077 \\ -0,1974 & 0,1974 & 0,1183 & 0,2605 \\ -0,1701 & 0,1701 & 0,0458 & 0,2527 \\ \hline 0,4383 & 0,3308 & -0,2672 & -0,5019 \\ 0,6422 & 0,5465 & -0,2973 & -0,8915 \\ 0,3770 & 0,3463 & -0,2259 & -0,4975 \end{pmatrix}$$

avec $\text{cond}(\mathbb{T}_0) \approx 11,6$ et l'amplitude des termes est : $0,6422 - (-0,8915) \approx 1,5$.

d) Transformation du modèle linéaire

En prémultipliant l'équation IV-2.10 par E_1 et en faisant apparaître E_2 qui est inversible :

$$E_1 \cdot y - E_1 \cdot y^0 = E_1 \cdot \mathbb{J}_0 \cdot E_2 \cdot E_2^{-1} \cdot (x - x^0)$$

Par conséquent le modèle linéaire s'écrit :

$$Y - Y^0 = \mathbb{T}_0 \cdot (X - X^0) \quad (\text{IV-4.9})$$

Soit :

$$\delta Y = \mathbb{T}_0 \cdot \delta X \quad (\text{IV-4.10})$$

où δX est un petit écart sur X voisin de X^0 et $\delta Y = E_1 \cdot y(E_2 \cdot (X + \delta X)) - Y$.

Cherchons une interprétation physique aux coefficients de \mathbb{T}_0 et de sa pseudo-inverse \mathbb{T}_0^+ .

IV-4.2 Interprétation des coefficients de \mathbb{T}

La $j^{\text{ième}}$ colonne de \mathbb{T}_0 : \mathbb{T}_{*j} s'interprète comme la réponse au déplacement unitaire e_j par rapport à X voisin de X^0 , où e_j désigne le $j^{\text{ième}}$ vecteur canonique de \mathbb{R}^p .

En effet, si l'on remplace $\delta X = e_j$ dans IV-4.10 :

$$\text{On obtient :} \quad \delta Y = \mathbb{T}_{*j} \quad (\text{IV-4.11})$$

Reprenons l'exemple précédent et choisissons $\delta X = e_2$:

Ainsi :

$$X^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad X = X^0 + \delta X = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{et } x = E_2 \cdot X = \begin{pmatrix} 136 \\ 116 + 11,6 = 127,6 \\ 0,1389 \\ 0,5600 \end{pmatrix}$$

$$\delta Y = \mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} -0,1974 \\ -0,1701 \\ 0,0273 \\ 0,1974 \\ 0,1701 \\ 0,3308 \\ 0,5465 \\ 0,3463 \end{pmatrix} \text{ est la réponse au déplacement unitaire } e_2$$

Il lui correspond :

$$\delta y = E_1^{-1} \cdot \delta Y \approx \begin{pmatrix} -0,3948 \\ -0,3402 \\ 0,0546 \\ 0,3949 \\ 0,3402 \\ 0,1654 \\ 0,2732 \\ 0,1732 \end{pmatrix}$$

Le débit dans les arcs et les charges aux noeuds sont donc si on a seulement perturbé C_2^0 , en approximation du premier ordre :

$$y = y^0 + \delta y \approx \begin{pmatrix} 8,79 \\ 6,28 \\ 1,66 \\ 7,97 \\ 6,31 \\ 18,09 \\ 17,06 \\ 18,22 \end{pmatrix}$$

IV-4.3 Interprétation des coefficients de T^+

Supposons que la vraie valeur de X soit voisine de X^0 . Le modèle linéaire (IV-4.9) permet alors de calculer un vecteur débit et charge Y pour lequel :

$$Y = Y^0 + \mathbb{T}_0 \cdot (X - X^0)$$

Soit alors $Y^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^{\tau(a+n)}$ une mesure de tous les débits dans les arcs et de toutes les charges aux noeuds pour les τ périodes. On cherche \hat{X} une estimation de X qui vérifie (IV-4.9) au sens des moindres carrés :

$$Y^{\text{mes}} \cong Y^0 + \mathbb{T}_0 \cdot (\hat{X} - X^0) \quad (\text{IV-4.12})$$

C'est-à-dire pour laquelle $\|Y^{\text{mes}} - Y^0 - \mathbb{T}_0 \cdot (\hat{X} - X^0)\|_2^2$ est minimal.

Supposons \mathbb{T}_0 de rang maximum : p , alors (Lawson et Hanson p. 37, 1974) l'unique solution de (IV-4.12) est donnée par :

$$\hat{X} = X^0 + \mathbb{T}_0^+ \cdot (Y^{\text{mes}} - Y^0) \quad (\text{IV-4.13})$$

où : $\mathbb{T}_0^+ = (\mathbb{T}_0 \cdot \mathbb{T}_0)^{-1} \cdot \mathbb{T}_0$

S'il n'y a pas d'erreur de mesure ($Y^{\text{mes}} = Y^{\text{vrai}}$), la meilleure estimation que l'on puisse obtenir avec des informations du premier ordre (les dérivées premières) se déduit de (IV-4.13). On la note \hat{X}^{opt} . On a donc :

$$\hat{X}^{\text{opt}} = X^0 + \mathbb{T}_0^+ \cdot (Y^{\text{vrai}} - Y^0) \quad (\text{IV-4.14})$$

Si δY désigne une erreur de mesure, on a : $Y^{\text{mes}} = Y^{\text{vrai}} + \delta Y$. On obtient la formule semblable à celle établi en (III-5.8) :

$$\hat{X} = \hat{X}^{\text{opt}} + \delta X \text{ avec } \delta X = \mathbb{T}_0^+ \cdot \delta Y \quad (\text{IV-4.15})$$

où \mathbb{T}_0^+ s'interprète comme la matrice de sensibilité de la solution au sens des moindres carrés : \hat{X}^{opt} , par rapport au déplacement : δY .

La $j^{\text{ème}}$ composante de \hat{X} s'écrit :

$$\hat{X}_j = \hat{X}_j^{\text{opt}} + \sum_{k=1}^{\tau(a+n)} \mathbb{T}_0^+(j, k) \cdot \delta Y_k$$

Si $\mathbb{T}_{\cdot, k}^+$ désigne la $k^{\text{ème}}$ colonne de \mathbb{T}_0^+ alors :

$$\hat{X} = \hat{X}^{\text{opt}} + \sum_{k=1}^{\tau(a+n)} \delta Y_k \mathbb{T}_{\cdot, k}^+ \quad (\text{IV-4.16})$$

Rappelons par définition de Y , cf. IV.4.5, que :

$$|\delta Y_k| \leq 1, \text{ pour } k = 1, \dots, \tau(a+n) \quad (\text{IV-4.17})$$

$\mathbb{T}_{*,k}^+$ représente une approximation de l'erreur commise sur l'estimation de \hat{X}^{opt} , si on commet une erreur de mesure maximale sur la $k^{\text{ième}}$ mesure uniquement, i.e si $\delta Y_k = 1$ et $\delta Y_i = 0, i \neq k$.

Sur notre exemple, en utilisant les données de IV-4.1c :

Choisissons $y^{\text{vrai}} = y^0$ et $\delta Y = e_1$; on mesure donc sur l'arc I : $9,18 + 2 = 11,18 \text{ l.s}^{-1}$ au lieu de $9,18 \text{ l.s}^{-1}$.

Comme la pseudo-inverse est :

$$\mathbb{T}_0^+ = \begin{pmatrix} 1,4995 & 0,9302 & 0,1836 & 0,0647 & -0,1189 & 0,2449 & 0,5699 & 0,1856 \\ 0,0895 & -0,1276 & 0,3127 & 1,5790 & 1,2663 & 0,1790 & 0,5201 & 0,3374 \\ 3,1509 & -2,5490 & 2,8570 & 1,5068 & -1,3502 & -2,4994 & 2,2492 & -1,0388 \\ -0,0629 & -1,6467 & -0,8034 & 0,4561 & 1,2595 & 0,8747 & -0,7922 & 0,3718 \end{pmatrix}$$

En appliquant IV-4.15 :

$$\delta X = \mathbb{T}_0^+ \cdot \delta Y = \begin{pmatrix} 1,4995 \\ 0,0895 \\ 3,1509 \\ -0,0629 \end{pmatrix} \text{ est l'erreur sur l'estimation de } \hat{X}^{\text{opt}} = X^0$$

En prémultipliant par E_2 , on obtient le δx correspondant en mesurant tous les débits et toutes les charges :

$$\delta x = E_2 \cdot \delta X = \begin{pmatrix} 20,3935 \\ 1,0383 \\ 0,0438 \\ -0,0035 \end{pmatrix} \text{ et } x = x^0 + \delta x = \begin{pmatrix} 156,3935 \\ 117,0383 \\ 0,1827 \\ 0,5565 \end{pmatrix}$$

δx exprime la sensibilité des résultats à l'erreur de mesure proposée 2 l/s.

Ces calculs ont été faits avec une précision supérieure à l'affichage sous MATLAB 4.2b.

IV-5 Le critère de sélection des mesures

Le système (IV-2.3) s'écrit après changement de variable :

$$Y = E_1 \cdot y(E_2 \cdot X) \quad (\text{IV-5.1})$$

Choisissons m mesures de débit et de charge avec $m \geq p$ réalisant (IV-3.1) ; les m relations qui permettent de déterminer X sont obtenues en prémultipliant par S :

$$Y^{\text{calc}} = S \cdot E_1 \cdot y(E_2 \cdot X) \quad (\text{IV-5.2})$$

En linéarisant (IV-5.2) et en supposant que la vraie valeur de X soit voisine de X^0 :

$$Y^{\text{calc}} = S \cdot Y^0 + S \cdot \mathbb{T}_0 \cdot (X - X^0) \quad (\text{IV-5.3})$$

Soit y^{mes} le vecteur des mesures : $y^{\text{mes}} \in \mathbb{R}^m$ et $Y^{\text{mes}} = D_1 \cdot y^{\text{mes}}$. On cherche \hat{X} une estimation de X qui vérifie (IV-5.3) au sens des moindres carrés :

$$Y^{\text{mes}} \cong S \cdot Y^0 + S \cdot \mathbb{T}_0 \cdot (\hat{X} - X^0) \quad (\text{IV-5.4})$$

S'il n'y a pas d'erreur de mesure: $Y^{\text{mes}} = Y^{\text{vrai}}$, l'estimation au sens des moindres carrés \hat{X} de X est alors :

$$\hat{X}^{\text{opt}} = X^0 + (S \cdot \mathbb{T}_0)^+ \cdot (Y^{\text{vrai}} - S \cdot Y^0) \quad (\text{IV-5.5})$$

Si δY désigne une erreur de mesure, on a : $Y^{\text{mes}} = Y^{\text{vrai}} + \delta Y$; par conséquent :

$$\hat{X} = \hat{X}^{\text{opt}} + \delta X \text{ avec } \delta X = (S \cdot \mathbb{T}_0)^+ \cdot \delta Y \quad (\text{IV-5.6})$$

δX est appelé l'influence de l'erreur de mesure δY .

Comme $|\delta Y_k| \leq 1$, pour $k = 1, \dots, m$

(P. G. Ciarlet p. 16, 1985) l'influence δX est majoré par :

$$\sup_{\delta Y \in \bar{B}_\infty(0,1)} \left\| (S \cdot \mathbb{T}_0)^+ \cdot \delta Y \right\| = \left\| (S \cdot \mathbb{T}_0)^+ \right\|_\infty \quad (\text{IV-5.7})$$

Rappelons que lorsque nous linéarisons les équations, la condition $\text{rang}(S \cdot \mathbb{T}_0) = p$, est nécessaire et suffisante à l'observabilité algébrique du problème de l'Identification du réseau (Remarques III-3.3).

Le problème du Choix des Mesures s'énonce alors ainsi :

On cherche m mesures de débit sur les arcs ou de charge aux noeuds, pour que l'influence des erreurs de mesures soit **minimal** et que $S \cdot \mathbb{T}_0$ soit de rang p , où S est une matrice de sélection de mesures correspondante à ce choix.

Pour caractériser ce problème, définissons l'ensemble E correspondant à tous les choix de mesures possibles, le nombre m de mesures étant fixé. Si M désigne l'ensemble des mesures possibles, alors $\text{card}(M) = \tau \cdot (a + n)$ et

$$E = \{P \subset M / \text{card}(P) = m\}$$

Nous avons déjà fait correspondre à un choix de m mesures parmi $\tau \cdot (a + n)$ une matrice de sélection de mesures : S ; cette matrice est définie en (IV-2.6) de manière unique pour une numérotation des mesures de 1 à m . Comme il y a $m!$ numérotations possibles de m mesures, une matrice de sélection de mesure est donc définie de manière unique pour un choix de mesures particulier à une permutation de ses lignes près.

E s'identifie de manière naturelle à l'espace quotient des matrices de sélection de mesures de taille : $m \times \tau \cdot (a + n)$ par la relation d'équivalence R où R est définie par : $S_1 R S_2$ si et seulement si S_1 et S_2 correspondent au même élément de E . Dans toute la suite, on ne fera pas de distinction entre un élément de E , donc un choix de mesure ou une classe de matrice de sélection, et un représentant S .

Si M_S est l'ensemble des matrices de sélection de taille $m \times \tau \cdot (a + n)$ alors :

$$E = \frac{M_S}{R} \quad (\text{IV-5.9})$$

On définit l'application H :

$$\begin{aligned} H: E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ S &\longmapsto \left\| (S \cdot \mathbb{T}_0)^+ \right\|_\infty \end{aligned} \quad (\text{IV-5.10})$$

Le problème noté **(CM)**, du choix de m mesures s'énonce alors ainsi :

(CM) Chercher $\bar{S} \in E / \forall S \in E, H(\bar{S}) \leq H(S)$, sous la contrainte : $\text{rang}(S \cdot \mathbb{T}_0) = p$

Remarque IV-5.1 : Rappelons que l'équilibrage de la jacobienne est primordial pour la définition de ce critère qui majore ainsi l'influence des erreurs de mesures.

IV.6 Algorithme de calcul du critère de sélection

IV-6.1 Choix de l'Algorithme

a) Complexité de l'exploration exhaustive

Remarquons qu'il existe $C_{\tau(a+n)}^m$ choix de mesures distincts. En effet, $C_{\tau(a+n)}^m$ est le nombre de sous-ensembles à m éléments que l'on peut former avec $\tau(a+n)$ éléments. Pour résoudre exactement (CM) il faut pour chacun des choix possibles assembler $S_i \cdot \mathbb{T}_0$, calculer $H(S)$ si $S_i \cdot \mathbb{T}_0$ est de plein rang : p , puis regarder si ce choix a amélioré le critère de sélection. Cet algorithme de résolution exacte de (CM) est donc **non polynomial** et (CM) est sans doute un problème d'optimisation combinatoire **difficile** (M. Sakarovitch p. 5-7, 1984). De plus, (CM) est un problème contraint non linéaire en variables bivalentes.

Il n'est donc possible de résoudre par exploration explicite (CM) que pour des réseaux de petites tailles.

b) Choix d'un algorithme glouton

Ce principe itératif consiste, ayant déjà choisi k mesures, à choisir la $k+1^{\text{ème}}$ parmi les indices i de 1 à $\tau(a+n)$ non déjà choisis pour minimiser $\left\| (S_i \cdot \mathbb{T}_0)^+ \right\|_{\infty}$, S_i étant une matrice de sélection de $k+1$ lignes, sous la contrainte $S_i \cdot \mathbb{T}_0$ de plein rang. Ainsi, les mesures sont choisies dans un certain ordre sans jamais remettre en question un choix une fois qu'il est effectué.

On construit alors un algorithme intéressant à plusieurs titres, puisqu'il est d'une mise en oeuvre simple, qu'il est polynomial et qu'il procure une solution approchée qui est toujours utilisable pour l'Identification du réseau : $S_i \cdot \mathbb{T}_0$ étant de plein rang, on est donc assuré que la jacobienne du problème (CLS) reste de plein rang dans un voisinage de X^0 . De plus, comme on le vérifiera sur les réseaux que nous avons testés, le choix de mesure ainsi obtenu est de qualité.

Algorithme IV-6.1

| i° Initialisations

ranmax = 0

k = 0

ii°) **Étape courante** : Choix de la $k+1$ ^{ième} mesure, S_k étant connu

Tant que (pas fini) alors

$k \leftarrow k + 1$

ichoisi = 0

Hmin = big (une grande valeur)

Pour i de 1 à $\tau \cdot (a + n)$ faire

Si (non Choisi(i)) alors

assemblage de $L_i = {}^t e_i \cdot \mathbb{T}_0$

posons $S_i = \begin{pmatrix} S_k \\ {}^t e_i \end{pmatrix}$ et $S_i \cdot \mathbb{T}_0 = \begin{pmatrix} S_k \cdot \mathbb{T}_0 \\ L_i \end{pmatrix}$

calcul de $(S_i \cdot \mathbb{T}_0)^+$, du rang de $S_i \cdot \mathbb{T}_0$ et de $H(S_i) = \|(S_i \cdot \mathbb{T}_0)^+\|_{\infty}$

Si ($\text{rang}(S_i \cdot \mathbb{T}_0) = \text{ranmax} + 1$) alors

$\text{ranmax} = \text{rang}(S_i \cdot \mathbb{T}_0)$

$C_{\min} = H(S_i)$

ichoisi = i

Sinon si ($H(S_i) < C_{\min}$ et $H(S_i) \neq H(S_k)$) alors

la condition $H(S_i) \neq H(S_k)$ permet de ne pas d'ajouter une ligne de zéros

$H_{\min} = H(S_i)$

ichoisi = i

Fin si rang

Fin si pas déjà choisi

Fin pour i

Si (ichoisi \neq 0) alors

choix(k) = ichoisi

choisi(ichoisi) = vrai

$$S_k \leftarrow \begin{pmatrix} S_k \\ {}^t e_{ichoisi} \end{pmatrix}$$

rang($S_k \cdot \mathbb{T}_0$) = ranmax

H(S_k) = Cmin

Si (k = m et rang($S_k \cdot \mathbb{T}_0$) = p) alors

fini = vrai

Sinon si (k = m et rang($S_k \cdot \mathbb{T}_0$) < p) alors

pas assez de mesures : m \leftarrow m + 1

fini = faux

Sinon

fini = faux

Fin si k = m

Sinon si (rang($S_k \cdot \mathbb{T}_0$) < p) alors

réseau inobservable

Fin si ichoisi

Fin tant que

Fin

k mesures ayant été choisies, pour le calcul de $(S_{k+1} \cdot \mathbb{T}_0)^+$ on envisage un processus itératif où l'on exprime $(S_{k+1} \cdot \mathbb{T}_0)^+$ en fonction de $(S_k \cdot \mathbb{T}_0)^+$ et de la ligne de \mathbb{T}_0 correspondant à la nouvelle mesure i envisagée. Nous aurons en effet, à répéter un grand nombre de fois le calcul de la pseudo-inverse d'une matrice où k lignes sont fixes et la

$k+1^{\text{ième}}$ étant envisagée pour chacun des arcs et des noeuds du réseau non encore choisis. Le paragraphe suivant décrit le principe général d'un tel algorithme.

IV-6.2 Calcul récursif d'une pseudo-inverse

Soient \mathbb{T}_k une matrice $k \times p$, \mathbb{T}_k^+ sa pseudo-inverse et v un vecteur de \mathbb{R}^p .

On envisage l'ajout d'une ligne à la matrice \mathbb{T}_k :

$$\mathbb{T}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_k \\ \iota_v \end{pmatrix}$$

On pose : $M = I_p - \mathbb{T}_k^+ \cdot \mathbb{T}_k \in \mathbb{M}_{p,p}$ Si $k > 0$

On cherche alors le rang de \mathbb{T}_{k+1} et une formule permettant de calculer $(\mathbb{T}_{k+1})^+$ à partir de \mathbb{T}_k^+ .

On dispose pour y répondre de l'algorithme suivant, dont nous avons trouvé référence que récemment sous le nom de l'algorithme de Greville dans P. Davis, 1979 :

Algorithme de Greville

1) Pour des vecteurs lignes

Si (\mathbb{T}_1 de taille $1 \times p$) alors :

Si ($\iota \mathbb{T}_1 = 0_p$) faire

$$(\mathbb{T}_1)^+ = 0_p ;$$

Sinon faire

$$(\mathbb{T}_1)^+ = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_2^2} \mathbf{v} ;$$

Fin si nul

Fin si vecteur-ligne

2) (Étape récursive)

Si $\mathbb{T}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_k \\ \iota_v \end{pmatrix}$ et $(\mathbb{T}_k)^+$ est connu alors :

calcul de $b = M \cdot v \in \mathbb{R}^p$ et de $c = {}^t T_k^+ \cdot v \in \mathbb{R}^k$

Si ($b = 0_p$) faire

$$w = \frac{1}{1 + {}^t c \cdot c} T_k^+ \cdot c ;$$

Sinon faire

$$w = ({}^t b)^+ \text{ par } 1 ;$$

Fin si

$$(T_{k+1})^+ = \left(T_k^+ - w \cdot {}^t c \quad ; \quad w \right)$$

Fin si matrice de plus d'une ligne

Remarques IV-6.2 :

Les résultats ont été comparés avec ceux de Matlab 4.2b. Cet algorithme s'est révélé très adapté pour calculer la pseudo-inverse. Il faut cependant apporter un soin particulier au seuil à partir duquel on suppose : $M \cdot v = 0_p$. En pratique, l'équilibrage de la jacobienne a permis de ne pas rencontrer de problèmes numériques.

Ainsi, on est en mesure de tester l'Algorithme de choix de mesure IV-6.1 pour des réseaux de différentes tailles.

IV-7 Validations numériques

IV-7.1 Choix des mesures pour un petit réseau

Reprenons l'exemple de la figure 101. Ce réseau est constitué de cinq arcs d'un réservoir R0 et de trois noeuds simples :

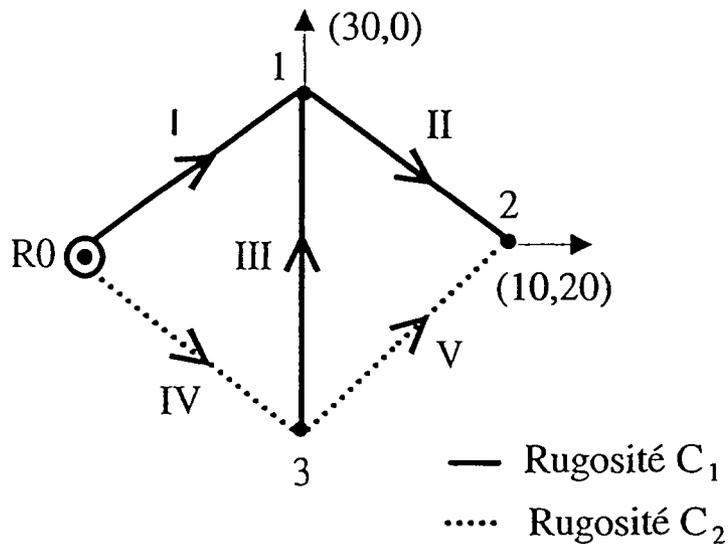


figure 103 : graphe d'un petit réseau

La Jacobienne équilibrée $\mathbb{T}_0 = E_1 \cdot \mathbb{J}_0 \cdot E_2$ a déjà été calculée (cf. §IV-4.1c) et est égale à :

$$\mathbb{T}_0 = \begin{pmatrix} 0,1974 & -0,1974 & \vdots & 0,1595 & 0,2996 \\ 0,1701 & -0,1701 & \vdots & 0,0237 & 0,3073 \\ -0,0273 & 0,0273 & \vdots & 0,0726 & 0,0077 \\ -0,1974 & 0,1974 & \vdots & 0,1183 & 0,2605 \\ -0,1701 & 0,1701 & \vdots & 0,0458 & 0,2527 \\ \hline 0,4383 & 0,3308 & \vdots & -0,2672 & -0,5019 \\ 0,6422 & 0,5465 & \vdots & -0,2973 & -0,8915 \\ 0,3770 & 0,3463 & \vdots & -0,2259 & -0,4975 \end{pmatrix}$$

Un choix de mesure obtenu avec l'algorithme IV-6.1, n'est a priori pas un optimum global de (CM). En effet, les k premières mesures sont fixées pour le choix de la k+1^{ème} mesures, et ne sont pas remises en cause. Cependant, sur les petits réseaux où il nous a été possible de vérifier, cet algorithme glouton conduit à un minimum global.

Pour le petit réseau de la figure 103, nous allons comparer le choix des mesures obtenu par l'algorithme IV-6.1, avec le ou les choix optimaux du critère (CM). Il y a exactement $70 = C_8^4$ façons de choisir 4 éléments parmi 8, l'ordre ne comptant pas. Pour chacun des quadruplés possibles, nous calculons la valeur du critère de (CM).

a) Résolution du critère de choix de mesure par une technique exhaustive

On résout (CM) exactement par l'algorithme suivant :

Algorithme d'exploration explicite

Initialisation :

Cmin = big (une grande valeur) ;

m = 4 ;

Exploration :

pour m1=1 à 5 faire

 pour m2=m1+1 à 6 faire

 pour m3=m2+1 à 7 faire

 pour m4=m3+1 à 8 faire

 calcul du rang($S_k \cdot T_0$) et du critère $\|(S \cdot T_0)^+\|_\infty$

 Si rang($S_k \cdot T_0$) = p et $\|(S \cdot T_0)^+\|_\infty \leq Cmin$ faire

 Cmin = $\|(S \cdot T_0)^+\|_\infty$

 choixmes = (m1, m2, m3, m4)

 Fin si

fin de boucles

fin

La solution unique de (CM) est :

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il lui correspond le choix de mesures : $\begin{pmatrix} q_{R0/1} \\ q_{I/2} \\ q_{R0/3} \\ h_2 \end{pmatrix}$

Pour six choix de mesures particulièrement intéressants, nous avons reporté dans le tableau de la figure 104 la valeur du critère H et le rang de la matrice jacobienne réduite, correspondants.

Choix de mesures	$\ (S. \mathbb{T}_0)^+\ _\infty$	rang(S. \mathbb{T}_0)
$(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad q_{R0/3} \quad h_2)$	14,7489121	4
$(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad q_{3/1} \quad q_{R0/3})$	14,4128634	3
$(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad q_{3/1} \quad h_1)$	40,8999393	4
$(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad q_{R0/3} \quad h_1)$	14,7489124	4
$(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad q_{R0/3} \quad h_3)$	14,7489123	4
$(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad h_1 \quad h_2)$	$1,8843.10^5$	4

figure 104 : valeurs de critère H pour 6 choix des mesures

En analysant le dernier tableau, on peut classer les choix de mesures en quatre catégories :

- le choix de mesure optimal ; il y en a ici un seul ; $(q_{R0/1} \quad q_{I/2} \quad q_{R0/3} \quad h_2)$;
- les choix de mesures presque optimaux ; les choix h_1 ou h_3 , plutôt que h_2 conduisent à des valeurs du critère très voisines de l'optimum ;

- les choix pour lesquels il y a observabilité algébrique, mais pas observabilité numérique ; la jacobienne réduite est une matrice 4×4 , inversible, mais très mal conditionnée. Ainsi, pour $(q_{R0/1} \quad q_{1/2} \quad h_1 \quad h_2)$, $\text{cond}(S. \mathbb{T}_0) = 1,57.10^5$.

- les mauvais choix de mesures, pour lesquels il y a observabilité numérique ;

- les choix de mesures pour lesquels il n'y a pas observabilité ; pour le deuxième choix de la figure 104, constitué de quatre mesures de débits, on rencontre un problème de rang ; pour ce choix, il n'est pas possible de déterminer D_2 .

b) Résolution par un algorithme glouton

La première mesure déterminée par l'algorithme IV-6.1 est de charge sur le noeud 2.

La deuxième mesure, la première étant fixée, est de débit sur l'arc R0/1.

La troisième mesure, les deux premières étant fixées, est de débit sur l'arc R0/3.

La quatrième mesure est de débit sur l'arc 1/2.

L'algorithme IV-6.1 détermine donc pour ce petit réseau, l'optimum global strict.

c) Conclusions

Sur cet exemple, l'algorithme IV-6.1 résout exactement (CM) et donne donc le meilleur résultat possible. Pour des réseaux de taille importante, i.e : de plus de 200 arcs, il n'est pas possible de résoudre par une technique exhaustive (CM), car le temps d'exécution serait alors de plusieurs années sur un Vax 4000-100. Il n'est donc pas possible, pour ces gros réseaux, de contrôler si le choix déterminé par IV-6.1 est un optimum local ou global. Par des simulations numériques pour lesquelles nous aurons introduit des erreurs de mesures, un tel choix sera comparé avec d'autres aux travers des estimations du vecteur d'état.

IV-7.2 Choix des mesures et calage du réseau de Muret

a) Présentation du réseau de Muret

Depuis 1958, la Compagnie Générale Des Eaux, le partenaire de l'étude, est chargée, pour le compte de la ville de Muret (Haute-Garonne), du pompage, du traitement et de la distribution de l'eau potable. Le réseau a déjà fait l'objet d'un diagnostic et la documentation était prête pour la modélisation.

Le volume distribué annuellement est de 1 500 000 m³ pour 7000 abonnés (18500 habitants). La capacité de production de l'usine de traitement est de 500 m³/h. La longueur du réseau est de 180 km.

Après avoir été schématisé (figure 105), le réseau de Muret se compose de 214 arcs, 163 noeuds simples et 2 réservoirs. Il comprend 50 cycles et 1 chaîne entre réservoirs élémentaires.

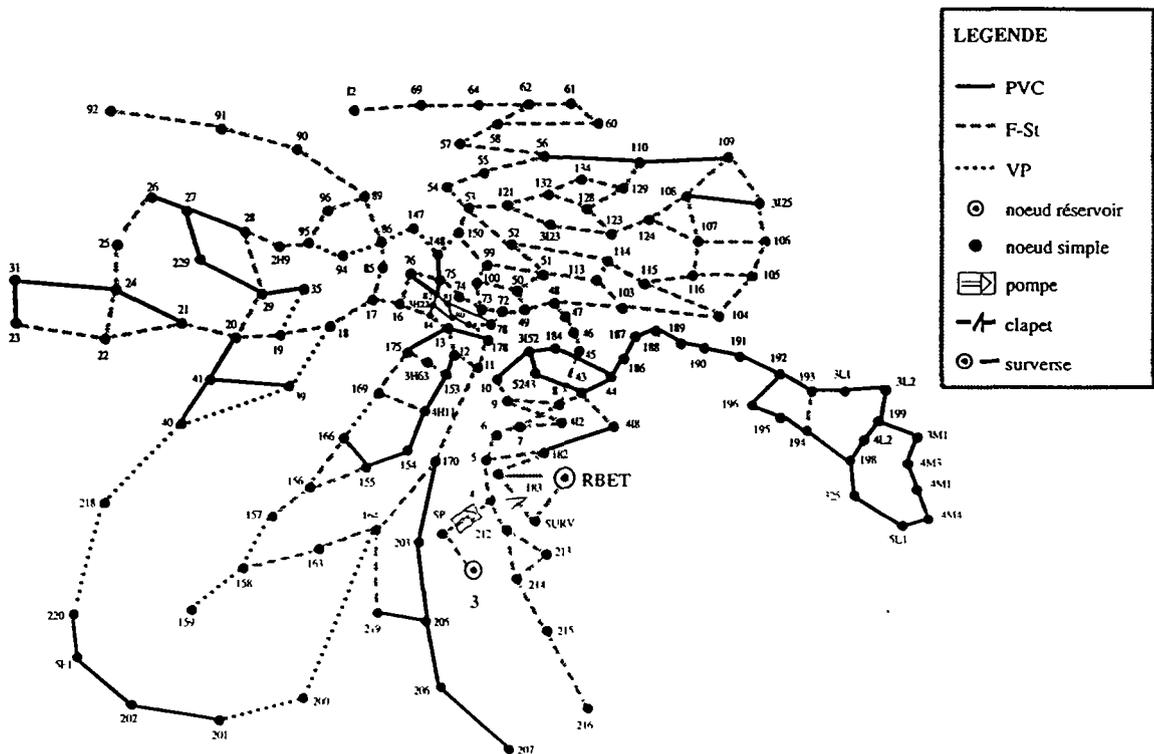


figure 105 : graphe du réseau de Muret

Une station de pompage dont la courbe caractéristique est connue assure en refoulement la distribution et le remplissage du réservoir de Bétance (RBET) à partir de l'usine de traitement située au réservoir 3. Cette station de pompage se trouve sur l'arc SP/4.

Les conduites sont constituées des trois matériaux : PVC¹, Fonte Standard, Ville de Paris. Par soucis de simplification, et parce que le plus souvent les conduites de même nature ont été posées en même temps, ont décidé de trois classes de rugosités correspondants aux trois matériaux.

De même, il apparaît que deux types d'abonnés suffisent à décrire le comportement global de la consommation.

Le nombre de paramètres à identifier (caler) est donc pour ce réseau égal à cinq : $p = 5$.

b) caractéristiques de la pompe et lois de la demande

Nous allons déterminer la caractéristique de la pompe et les courbes de consommations sur la journée, pour choisir les mesures.

La hauteur d'élévation de la pompe en fonction du débit est décrite par trois points dont les extrêmes définissent la zone de fonctionnement normale. La courbe caractéristique du constructeur est donnée figure 106. D'après l'exploitant, le débit traversant la pompe doit être proche de 520 m³/h (144 l/s) quel que soit le régime d'appel des abonnés (le réservoir de Bétance étant proche de la station de pompage). Pour retrouver ce débit lors des simulations, il a été nécessaire d'abaisser la courbe caractéristique constructeur (cf fig. 106).

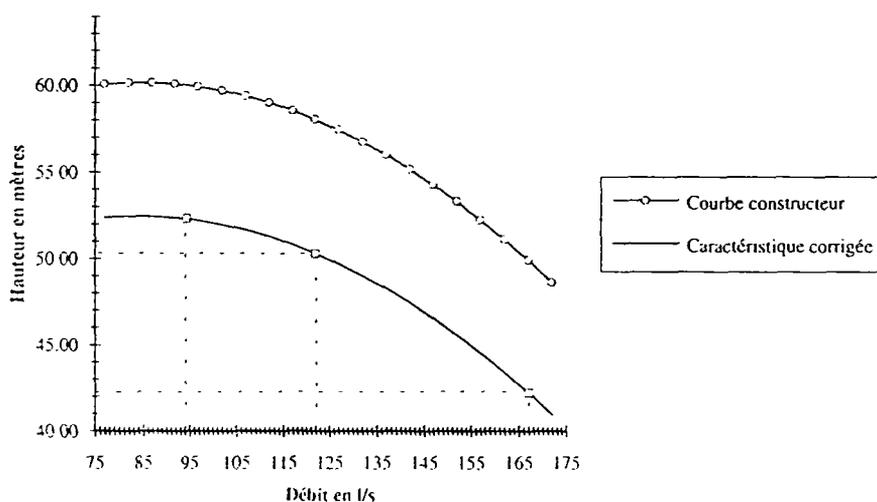


figure 106 : courbe caractéristique de la pompe du réseau de Muret

Les paramètres D_1 (demande domestique par abonné) et D_2 (demande industrielle par abonné) sont supposés être constants pendant une période d'une heure ; les courbes de consommations sur la journée pourraient être celles des figures 107 et 108. Elles ont été construites sur les résultats d'une campagne de mesure de la SADE² (période août-septembre 1988). Les débits de pointes de ces courbes serviront de base pour les calculs du choix des mesures.

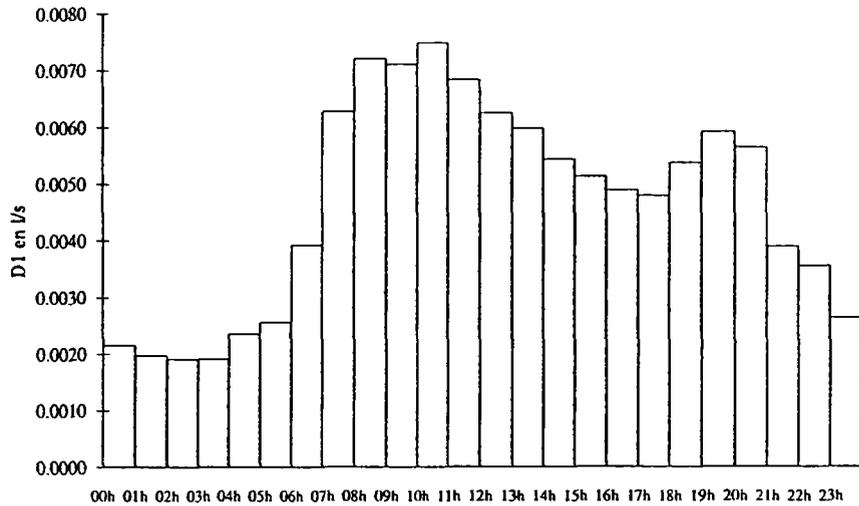


figure 107 : consommation journalière domestique type du réseau de Muret (été)

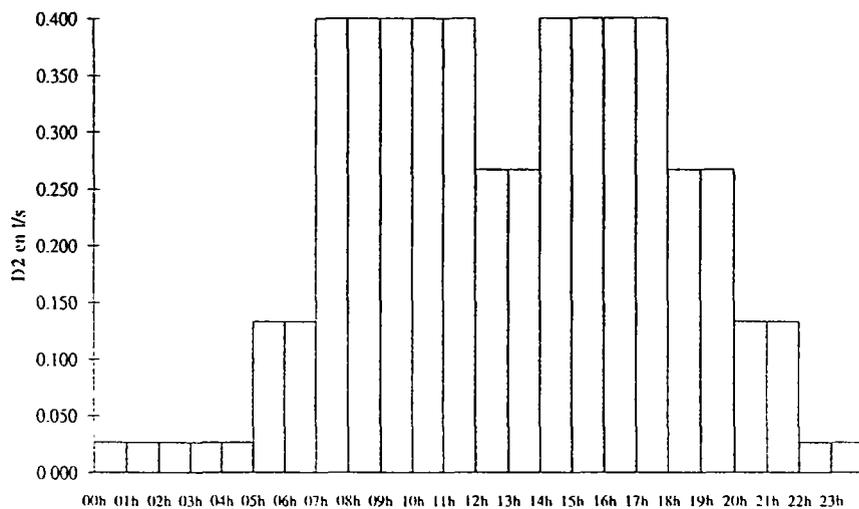


figure 108 : consommation journalière industrielle type du réseau de Muret (été)

On constate que le créneau de 10 heures à 11 heures correspond à un débit de pointe pour ces deux courbes : $D_1 = 7.5 \text{ ml/s}$ et $D_2 = 0.4 \text{ l/s}$.

La synthèse des volumes journaliers est donnée par la figure 109 :

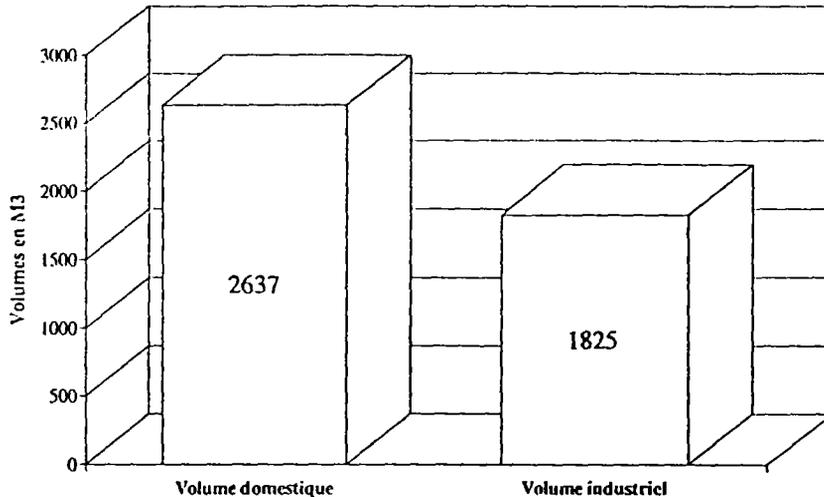


figure 109 : synthèse des volumes journaliers pour le réseau de Muret (journée type d'été)

c) Choix des mesures

Détermination de modes de fonctionnement

Les charges piézométriques du réseau de Muret étant toutes au même niveau, des ouvertures de poteaux d'incendies sont envisagées pour créer de fortes pertes de charges. Il sera alors plus facile de déterminer les classes de rugosités.

On génère ainsi plusieurs modes de fonctionnement pour chacun desquels on détermine le meilleur choix de mesure. Pour le réseau de Muret, on distingue :

- l'arrêt et la marche de la pompe ;
- un régime de demande sans ouverture de poteaux d'incendie et un régime de demande avec une ouverture de poteaux d'incendie (création d'une classe de demande supplémentaire).

Nous allons donner et expliquer les résultats de l'algorithme de Choix des mesures pour quatre modes de fonctionnement, dont deux sont des modes normaux : pompe arrêtée ou en marche et les deux autres sont deux ouvertures de poteaux d'incendies. Trois gammes de poids seront en comparaison. La première favorise les mesures de pressions, la seconde les mesures de débits et pour la troisième les poids sont égaux.

Choix des mesures avec pompe arrêtée

$$\text{Le point de fonctionnement est } x^0 = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_2 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0075 \text{ l/s} \\ 0.4 \text{ l/s} \end{pmatrix}$$

Mesures charges privilégiés :

On affecte un poids $w_i = \Delta y_i^{-1} = 0.1$ pour les débits, et un poids $w_i = 2$ pour les charges : on cherche à privilégier les mesures charges qui sont plus faciles à mettre en place, plus précises et d'un moindre coût.

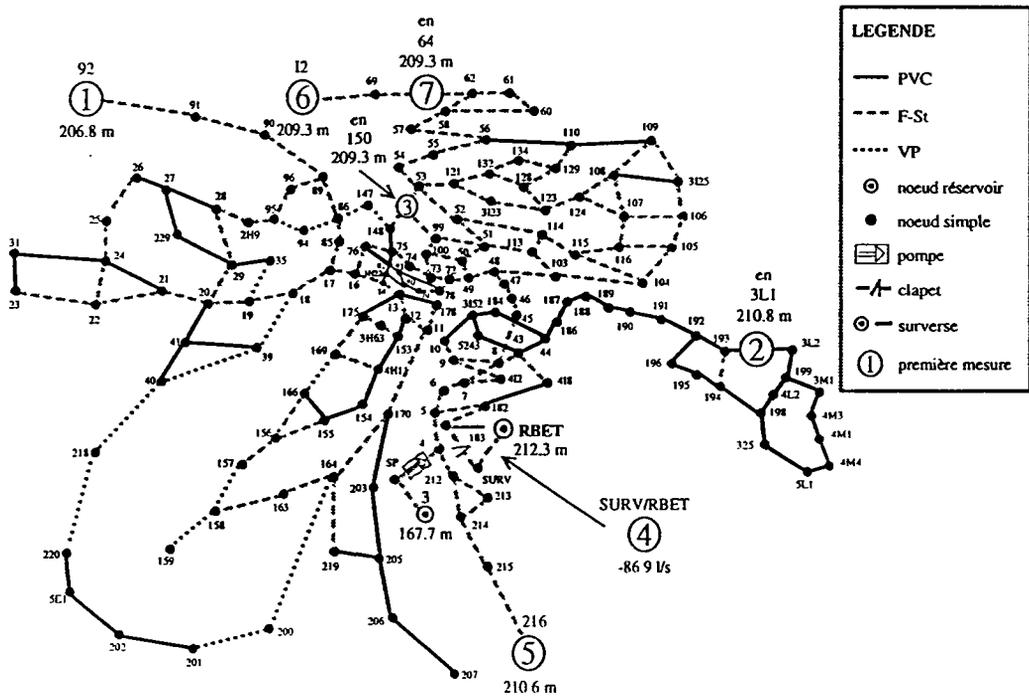


figure 110 : choix des mesures pompe arrêtée

La première mesure déterminée par l'algorithme IV-6.1 est la charge au noeud 92 (la prison). Ce noeud est l'une des antennes la plus éloignée du réservoir pour laquelle il y a une forte consommation de type industrielle ($d_{92} = 10.5D_1 + 23.8D_2 = 9.6 \text{ l/s}$). La charge en ce point (206.8 mètres) est la plus basse du plan piézométrique du réseau (excepté la station de pompage). Sa détermination n'est donc pas étonnante du point de vue hydraulique. Les forts coefficients (donnée ci-dessous en première ligne de $S_1 \cdot \mathbb{T}_0$) de la ligne correspondante de \mathbb{T}_0 (la jacobienne équilibrée) permettent de supposer que cette mesure est importante pour la détermination de tous les paramètres.

La deuxième mesure déterminée par l'algorithme IV-6.1, la première ayant été fixée, est la charge au noeud 3L1 (lieu-dit Labarthe). Ce noeud semble être important pour estimer la rugosité correspondant au PVC. Pour comprendre pourquoi le noeud 207 (une antenne éloignée du réservoir) n'a pas été choisie, en lieu et place du noeud 3L1, il faut remarquer que le paysage piézométrique est très plat dans un large voisinage du noeud 207 ($h_{207} = 207.3$ m), du noeud 13 ($h_{13} = 207.6$ m) et du noeud 40 ($h_{40} = 207.7$ m).

La troisième mesure, les deux premières ayant été choisies, est celle de la charge au noeud 150 (la piscine). Ce noeud est la croisée des arcs de rugosité F-St et VP. Il semble donc important pour déterminer ces deux rugosités.

La quatrième mesure est de débit sur l'arc en tête du réseau : SURV/RBET. On connaît ainsi la consommation globale du réseau.

La cinquième mesure est de charge sur le noeud 216 (Estantens). Ce noeud est en antenne sur la fonte standard et ($d_{216} = 102D_1 = 1.04$ l/s).

Les cinq lignes sélectionnées de la jacobienne du problème sont alors :

$$S_1 \cdot \mathbb{T}_0 = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & D_1 & D_2 \\ -224.9910 & -13.4849 & -27.5200 & 0.9420 & 1.0867 \\ -24.1222 & -50.2234 & 0.0000 & 0.4690 & 0.0727 \\ -148.2793 & -7.1148 & 13.0673 & 0.5854 & 0.5096 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.4929 & 0.3764 \\ -83.3294 & -0.0254 & 0.0000 & 0.6059 & 0.0353 \end{pmatrix}$$

La pseudo-inverse calculée de façon séquentielle est :

$$(S_1 \cdot \mathbb{T}_0)^+ = \begin{pmatrix} -0.0015 & 0.0009 & -0.0032 & 0.0088 & -0.0024 \\ -0.0010 & -0.0194 & -0.0020 & 0.0082 & 0.0118 \\ -0.0193 & 0.0001 & 0.0358 & 0.0085 & -0.0115 \\ -0.2282 & 0.1286 & -0.4806 & 1.1503 & 1.4342 \\ 0.2989 & -0.1685 & 0.6295 & 1.1503 & -1.8783 \end{pmatrix} \begin{matrix} :C_1 \\ :C_2 \\ :C_3 \\ :D_1 \\ :D_2 \end{matrix}$$

Le critère : $\|(S_1 \cdot \mathbb{T}_0)^+\|_\infty = 4.12541$

L'observabilité du réseau est garantie dans un voisinage du point de fonctionnement x^0 car $S_1 \cdot \mathbb{T}_0$ matrice 5x5 est inversible.

On ajoute une mesure supplémentaire si et seulement si elle fait baisser le critère de façon conséquente.

On obtient le noeud I2 (zone industrielle), positionné sur une antenne importante pour les consommations industrielles et C_1 (F-St). La ligne à ajouter à $S_1 \cdot \mathbb{T}_0$ est :

$$\mathbb{T}_0(I2) = (-144.1111 \quad -2.9888 \quad 1.3146 \quad 0.4604 \quad 0.6596)$$

La valeur du critère avec ces six mesures est de 3,86013.

La septième mesure sélectionnée par l'algorithme IV-6.1 : au noeud 64 (zone industrielle) n'est pas pertinente. En effet la valeur du critère ne bouge plus, et son ajout correspond à l'ajout d'une colonne de zéro pour la pseudo-inverse. Il y a forte colinéarité entre une ligne correspondant à I2 et une ligne correspondant à 64.

On jugera de la pertinence de ces mesures à travers la résolution du problème de l'Identification du réseau.

Observons le comportement de l'algorithme IV-6.1 lorsqu'on ne cherche pas à privilégier les mesures de pression. Les résultats qui vont suivre avec ces nouveaux poids pour les débits et les charges ne serviront pas à la campagne de mesure (pour laquelle les résultats précédents seront utilisés) mais à des simulations numériques.

Mesures débits privilégiés :

On affecte un poids de 2 pour les débits et un poids de 0.1 pour les charges.

Le Choix des mesures résultat de l'algorithme IV-6.1 est :

- Première mesure : sur l'arc 183/SURV (débit en tête) -86.9 l/s ;
- Deuxième mesure : au noeud 92 (prison) ;
- Troisième mesure : au noeud 3L1 (Labarthe) ;
- Quatrième mesure : sur l'arc 89/90 (débit vers la prison) 9.8 l/s ;
- Cinquième mesure : sur l'arc 86/147 (arc entre la piscine et la prison) -12.4 l/s

$$\text{Le critère : } \left\| (S_2 \cdot \mathbb{T}_0)^+ \right\|_{\infty} = 0.92146.$$

Il s'y ajoute une mesure de débit qui ne fait pas baisser le critère (il ne faut pas en tenir compte) :

- Sixième mesure : sur l'arc 121/132 (au voisinage de la zone industrielle) 3.8 l/s.

Même poids pour les charges et les débits :

Tous les poids sont égaux à l'unité.

Le Choix des mesures résultat de l'algorithme IV-6.1 est :

- Première mesure : au noeud 92 (prison) ;
- Deuxième mesure : au noeud 3L1 (Labarthe) ;
- Troisième mesure : au noeud 150 (piscine) ;
- Quatrième mesure : sur l'arc SURV/RBET (débit en tête) ;
- Cinquième mesure : sur l'arc 89/90 (débit vers la prison) 9.8 l/s.

Le critère : $\left\| (S_3, T_0)^+ \right\|_{\infty} = 1.05020$.

Il s'y ajoute une mesure de charge qui ne fait pas baisser le critère (il ne faut pas en tenir compte) :

Sixième mesure : au noeud 191 (voisin de 3L1) 211.0 m.

Remarquons qu' en affectant de petits poids à un ensemble de débits et de charges et des gros poids à son complémentaire, le choix de mesure résultant de l'algorithme IV-6.1 privilégie les éléments de cet ensemble.

Il n'est pas possible de décider si l'un de ces trois choix est meilleur que l'autre aux vues des valeurs du critère puisque les équilibrages ont été différents.

Choix des mesures avec pompe en marche

$$\text{Le point de fonctionnement est } x^0 = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_2 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0068 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

Les choix de mesures données par l'algorithme IV-6.1 sont les mêmes que pour la pompe arrêtée, si ce n'est qu'à la place de la mesure de débit sur le tronçon SURV/RBET ou 183/SURV il faut mesurer le débit alimentant le réservoir : RBET/183.

Il a été décidé de façon heuristique pour privilégier une mesure dans la partie ouest du réseau (absence d'une telle mesure avec les précédents choix car paysage piézométrique trop plat), d'ouvrir deux bornes incendies : la première sur une antenne au noeud 207 (Carretes) doit permettre d'estimer la rugosité de type PVC, la seconde au noeud 23 (à proximité de la station de pompage de Perez). Les résultats présentés sont ceux privilégiant les charges, on a affecté un poids de 0.1 pour les débits et un poids de 2 pour les charges.

Choix des mesures avec ouverture d'un poteau d'incendie en Carretes

$$\text{Le point de fonctionnement est } x^0 = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_2 \text{ (Ind)} \\ D_3 \text{ (PI207)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0075 \\ 0.4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

La pompe SP/4 est à l'arrêt.

Le Choix des mesures résultat de l'algorithme IV-6.1 est :

Première mesure : au noeud 205 (en amont de Carretes) 204.1 m ;

Deuxième mesure : au noeud 207 (Carretes) 180.4 m ; la côte est à 177 m, un débit incendie supérieur à 8 l/s semble impossible en ce point.

Troisième mesure : au noeud 150 (piscine) 208.6 ;

Quatrième mesure : sur l'arc SURV/RBET (débit en tête) -94.9 l/s ;

Cinquième mesure : au noeud 216 (Estantens) 210.6 m.

Le critère : $\left\| (S_4 \cdot T_0)^+ \right\|_{\infty} = 4.51949$.

Il s'y ajoute une mesure de charge qui fait baisser le critère (3.98470) :

Sixième mesure : au noeud I2 (Z.I.) 208.9 m.

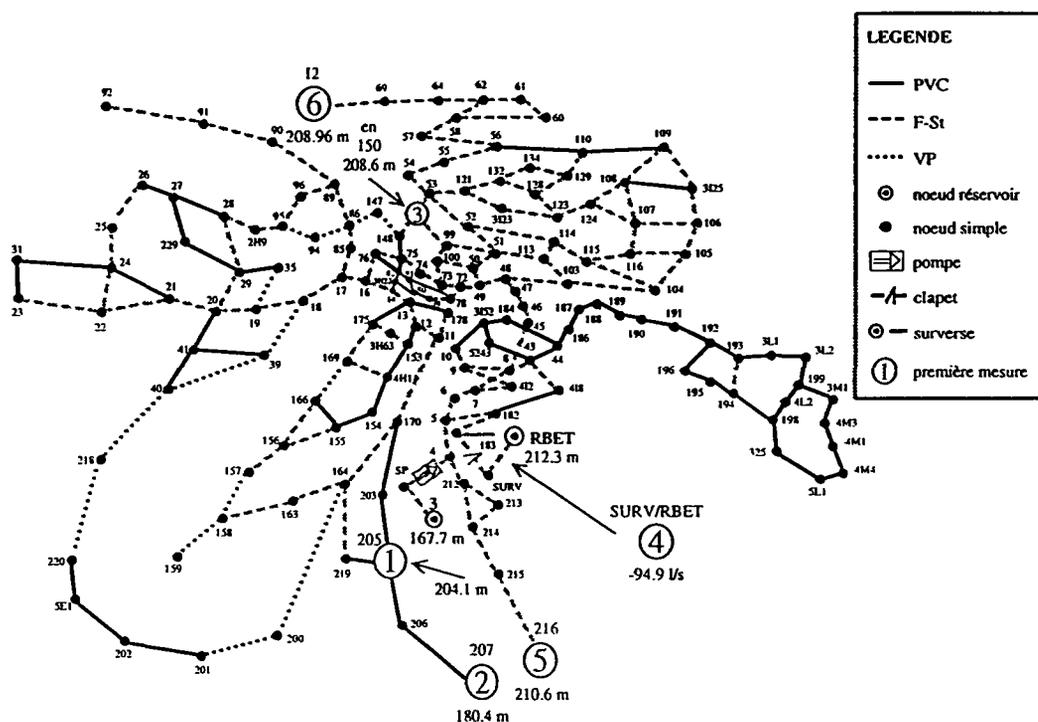


figure 111 : choix des mesures ouverture PI en 207 (Carretes)

Choix des mesures avec ouverture d'un poteau d'incendie en Perez

$$\text{Le point de fonctionnement est } x^0 = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_2 \text{ (Ind)} \\ D_3 \text{ (PI23)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0068 \\ 0.4 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

La pompe SP/4 est en marche.

Le Choix des mesures résultat de l'algorithme IV-6.1 est :

- Première mesure : au noeud 92 (prison) 206.7 m ;
- Deuxième mesure : au noeud 3L1 (Labarthe) 213.4 m ;
- Troisième mesure : au noeud 150 (piscine) 210.7 ;
- Quatrième mesure : sur l'arc RBET/183 (alimentation réservoir) -45.4 l/s ;
- Cinquième mesure : au noeud 216 (Estantens) 213.5 m.

Le critère : $\left\| (S_5, T_0)^+ \right\|_{\infty} = 4.70954.$

Il s'y ajoute une mesure qui fait baisser le critère :

- Sixième mesure : au noeud 58 (début de la Z.I.) 211.5 m.

Il faut remarquer qu'une mesure sur le noeud 23 n'a pas été choisie, ce qui peut s'expliquer par le fait que ce noeud appartient à une maille.

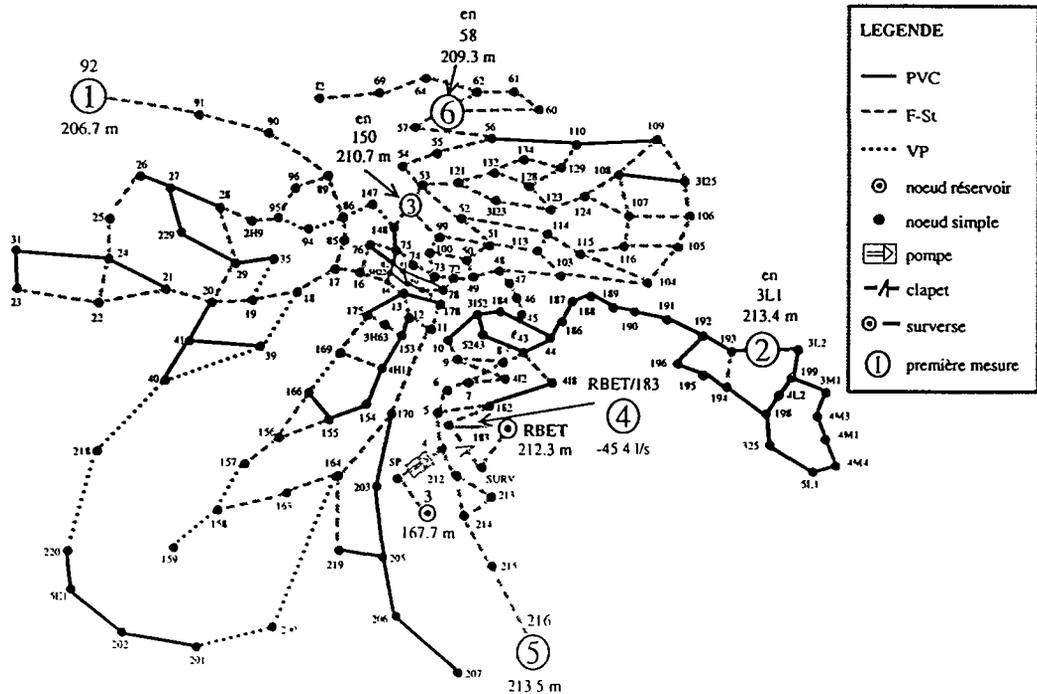


figure 112 : choix des mesures ouverture PI en 23 (Perez)

d) Mesures comme résultats de simulations numériques

On valide les choix de mesures précédents en les comparant avec d'autres choix vis-à-vis de leurs comportements dans la bonne résolution du problème de l'Identification du réseau. Deux résultats sont observés :

- la meilleure estimation des rugosités et des demandes, les mesures étant précises au millième.
- l'influence d'erreurs de mesures sur l'estimation des rugosités et des demandes.

On procède par trois étapes :

- 1) A partir d'un vecteur (C,D) on détermine le vecteur (q,h) correspondant, en résolvant le problème de l'Analyse.
- 2) La restriction de (q,h) à certaines de ses composantes donne le vecteur de mesure : y^{mes} pour un des choix de mesures précédents. Par construction, il lui correspond x^{opt} , pour laquelle : $y^{\text{mes}} = y(x^{\text{opt}})$.
- 3) On identifie les paramètres rugosité et demande à partir du vecteur de mesure en recherchant l'optimum de la fonction somme des carrés des résidus pondérés par l'inverse des précisions.

$$(C, D) \xrightarrow{1} (q, h) \xrightarrow{2} y^{\text{mes}} \xrightarrow{3} (\hat{C}, \hat{D})$$

Pour chaque erreur de mesure on connaît une majoration en valeur absolue. On détermine l'incertitude correspondante sur les estimations de (C,D) de deux façons :

- avec la matrice de sensibilité de \hat{x} par rapport au déplacement maximal Δy (à l'aide de l'inégalité III-5.9) ;
- par une méthode de Monte-Carlo qui consiste à déterminer mille vecteurs de mesures y^{mes} différents de telle façon que chacune de ses composantes soit uniformément distribuée dans l'ensemble des valeurs mesurées possible. On résout ensuite mille fois le problème de l'Identification du réseau et l'on retient les valeurs min et max de chacune des estimations.

Les poids sont ici les inverses des précisions sur les mesures débits. Les chiffres avancés supposent que l'on dispose d'appareils de mesures très précis pour les charges et pour les débits. :

- pour une mesure de débit, de l'imprécision sur la vitesse dans la canalisation on en déduit l'imprécision sur la mesure de débit, en multipliant par la surface de la section droite. Les calculs ont été faits avec 0.01 m/s.

- pour une mesure de charge, la précision est de 0.1 m.

L'algorithme de résolution est l'algorithme MCP, car il n'y a pas de données aberrantes.

Mode de fonctionnement : pompe arrêtée

Le vecteur des classes de demande et des rugosités qui a servi à construire le vecteur de mesure est :

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} C_1^{opt} \text{ (F-St)} \\ C_2^{opt} \text{ (PVC)} \\ C_3^{opt} \text{ (VP)} \\ D_1^{opt} \text{ (Dom)} \\ D_2^{opt} \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0075 \text{ l/s} \\ 0.4 \text{ l/s} \end{pmatrix}$$

Choix n°1

Le vecteur de mesure, privilégiant les mesures de pression, est :

$$y^{mes} = \begin{pmatrix} h_{92} \\ h_{3L1} \\ h_{150} \\ q_{SURV/RBET} \\ h_{216} \\ h_{12} \end{pmatrix}$$

Les valeurs prises par le vecteur de mesure et les erreurs de mesures sont :

$$y^{\text{mcs}} = \begin{pmatrix} 206.81 \\ 210.83 \\ 209.33 \\ -86.92 \\ 210.56 \\ 209.33 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 2.0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix}$$

Dans ces conditions, l'algorithme MCP converge en 8 itérations en partant de x^{opt} .

Explicitons l'estimation des paramètres rugosités et demandes : \hat{x}^1 , ainsi que l'intervalle de confiance **symétrique** correspondant, calculé à partir de \hat{x}^1 et de Δy par une approximation linéaire des équations :

$$\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^1 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^1 \text{ (PVC)} \\ \hat{C}_3^1 \text{ (VP)} \\ \hat{D}_1^1 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_2^1 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130.00 \pm 5.77 \\ 140.96 \pm 16.71 \\ 135.99 \pm 29.89 \\ 0.0075 \pm 0.0005 \\ 0.4000 \pm 0.031 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

Pour mille vecteurs de mesures à peu près uniformément distribués, la méthode de Monte-Carlo donne une bonne approximation du pavé où se retrouvent les estimations :

$$\begin{aligned} 125.425 &\leq \hat{C}_1^1 \leq 134.946 \\ 127.171 &\leq \hat{C}_2^1 \leq 155.765 \\ 114.808 &\leq \hat{C}_3^1 \leq 163.385 \\ 0.00707 &\leq \hat{D}_1^1 \leq 0.00791 \\ 0.37545 &\leq \hat{D}_2^1 \leq 0.42728 \end{aligned}$$

Il faut remarquer que sans erreur de mesure on reconstruit x^{opt} et qu'il y a bonne correspondance entre les deux encadrements des influences des erreurs de mesure, l'encadrement "linéaire" contenant strictement le deuxième encadrement. Ce bon comportement se répétera pour chacun des quatre autres choix qui vont suivre.

Néanmoins, les estimations des rugosités sont très sensibles aux erreurs de mesure. L'influence des erreurs de mesures sur l'estimation de la troisième rugosité (VP) est très importante.

Si les mesures de débits sont privilégiées les résultats sont sensiblement meilleurs pour la troisième rugosité (VP) ; il faut cependant mesurer trois débits.

Choix n°2

Le vecteur de mesure est :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} q_{183/\text{SURV}} \\ h_{92} \\ h_{3L1} \\ q_{89/90} \\ q_{86/147} \end{pmatrix}$$

Les valeurs prises par le vecteur de mesure et les erreurs de mesures sont :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} -86.92 \\ 206.81 \\ 210.83 \\ 9.76 \\ -12.45 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.30 \\ 0.20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

L'algorithme MCP converge en 3 itérations en partant de x^{opt} .

Pour ce deuxième choix de mesures, les estimations et les intervalles de confiance sont

- pour l'approximation linéaire :

$$\hat{x}^2 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^2 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^2 \text{ (PVC)} \\ \hat{C}_3^2 \text{ (VP)} \\ \hat{D}_1^2 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_2^2 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130.00 \pm 6.14 \\ 140.97 \pm 19.23 \\ 135.99 \pm 9.45 \\ 0.0075 \pm 0.0005 \\ 0.4000 \pm 0.013 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

- pour le calcul de l'incertitude sur l'estimation par une méthode de Monte-Carlo :

$$125.42 \leq \hat{C}_1^2 \leq 135.10$$

$$126.80 \leq \hat{C}_2^2 \leq 158.65$$

$$127.99 \leq \hat{C}_3^2 \leq 144.77$$

$$0.007 \leq \hat{D}_1^2 \leq 0.008$$

$$0.387 \leq \hat{D}_2^2 \leq 0.413$$

Comparons les derniers résultats avec un choix de mesures obtenu de façon systématique qui s'avère souvent payant dans la pratique. La pression est mesurée sur chaque antenne (un noeud avec un seul arc adjacent) et le débit est mesuré en sortie du réservoir (en tête du réseau).

Choix n°3

Le vecteur de mesure est :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} q_{\text{SURV/RBET}} \\ h_{92} \\ h_{207} \\ h_{159} \\ h_{216} \\ h_{12} \end{pmatrix}$$

Les valeurs prises par le vecteur de mesure et les erreurs de mesures sont :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} -86.92 \\ 206.81 \\ 207.36 \\ 207.35 \\ 210.56 \\ 209.27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix}$$

L'algorithme MCP converge en 5 itérations en partant de x^{opt} .

Pour ce troisième choix de mesures, les estimations et les intervalles de confiance sont

- pour l'approximation linéaire :

$$\hat{x}^3 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^3 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^3 \text{ (PVC)} \\ \hat{C}_3^3 \text{ (VP)} \\ \hat{D}_1^3 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_2^3 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130.00 \pm 7.07 \\ 141.09 \pm 124.39 \\ 135.98 \pm 66.37 \\ 0.0075 \pm 0.0005 \\ 0.4000 \pm 0.033 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

- pour le calcul de l'incertitude sur l'estimation par une méthode de Monte-Carlo :

$$124.47 \leq \hat{C}_1^3 \leq 136.27$$

$$73.86 \leq \hat{C}_2^3 \leq 285.17$$

$$88.16 \leq \hat{C}_3^3 \leq 197.89$$

$$0.0071 \leq \hat{D}_1^3 \leq 0.0079$$

$$0.373 \leq \hat{D}_2^3 \leq 0.426$$

Le problème de l'identification est pour ce choix particulier très sensible aux erreurs de mesures. Il est fortement non linéaire, puisque le bon encadrement pour la seconde rugosité n'est pas symétrique autour de la vraie valeur ($C_2^{opt} = 141$), mais parfaitement dissymétrique comme celui donné par la méthode de Monte-Carlo. Les erreurs de mesures conduisent pour deux des trois rugosités, à des mauvais résultats : pour les matériaux PVC et VP.

Les deux choix de mesure déterminés par l'algorithme IV-6.1 sont donc meilleurs, car pour des erreurs de mesures du même ordre, l'influence des erreurs de mesure est bien moins importante.

Le mode fonctionnement pompe en marche donne des résultats comparables aux précédents.

Vérifions que l'on a bien diminué l'influence des erreurs de mesures en ouvrant des bornes d'incendie.

Mode de fonctionnement : ouverture d'un poteau d'incendie en Carretes

$$\text{Le point de fonctionnement est } x^{opt} = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_2 \text{ (Ind)} \\ D_3 \text{ (PI207)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0075 \\ 0.4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

La pompe SP/4 est à l'arrêt.

Choix n°4

Le vecteur de mesure est :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} q_{\text{SURV/RBET}} \\ h_{205} \\ h_{207} \\ h_{150} \\ h_{216} \\ h_{12} \end{pmatrix}$$

Les valeurs prises par le vecteur de mesure et les erreurs de mesures sont :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} -94.92 \\ 204.08 \\ 180.45 \\ 208.65 \\ 210.52 \\ 208.87 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix}$$

L'algorithme MCP converge en 7 itérations en partant de x^{opt} .

Pour ce quatrième choix de mesures, les estimations et les intervalles de confiances sont

- pour l'estimation par intervalle linéaire :

$$\hat{x}^4 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^4 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^4 \text{ (PVC)} \\ \hat{C}_3^4 \text{ (VP)} \\ \hat{D}_1^4 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_2^4 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130.00 \pm 4.80 \\ 141.00 \pm 0.82 \\ 135.99 \pm 21.46 \\ 0.0075 \pm 0.0005 \\ 0.40000 \pm 0.032 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

- pour le calcul de l'incertitude sur l'estimation par une méthode de Monte-Carlo :

$$\begin{aligned} 125.80 &\leq \hat{C}_1^4 \leq 134.11 \\ 140.32 &\leq \hat{C}_2^4 \leq 141.70 \\ 122.10 &\leq \hat{C}_3^4 \leq 152.69 \\ 0.0071 &\leq \hat{D}_1^4 \leq 0.0079 \\ 0.373 &\leq \hat{D}_2^4 \leq 0.429 \end{aligned}$$

Le choix de mesure pour cette ouverture permet donc de déterminer la deuxième rugosité (PVC) avec une assez bonne précision.

Mode de fonctionnement : ouverture d'un poteau d'incendie en Perez.

$$\text{Le point de fonctionnement est } x^{\text{opt}} = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_2 \text{ (Ind)} \\ D_3 \text{ (PI23)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 136 \\ 0.0068 \\ 0.4 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

La pompe SP/4 est en marche.

Choix n°5

Le vecteur de mesure est :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} Q_{\text{RBET}/183} \\ h_{92} \\ h_{3L1} \\ h_{150} \\ h_{216} \\ h_{58} \end{pmatrix}$$

Les valeurs prises par le vecteur de mesure et les erreurs de mesures sont :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} -45.43 \\ 206.68 \\ 213.40 \\ 210.72 \\ 213.53 \\ 211.47 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{matrix}$$

L'algorithme MCP converge en 5 itérations en partant de x^{opt} .

Pour ce cinquième choix de mesures, les estimations et les intervalles de confiance sont

- pour l'approximation linéaire :

$$\hat{x}^5 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^5 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^5 \text{ (PVC)} \\ \hat{C}_3^5 \text{ (VP)} \\ \hat{D}_1^5 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_2^5 \text{ (Ind)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130.01 \pm 5.82 \\ 140.95 \pm 18.30 \\ 136.02 \pm 17.48 \\ 0.0068 \pm 0.0004 \\ 0.4000 \pm 0.041 \end{pmatrix} \text{ l/s}$$

- pour le calcul de l'incertitude sur l'estimation par une méthode de Monte-Carlo :

$$125.44 \leq \hat{C}_1^5 \leq 134.45$$

$$126.38 \leq \hat{C}_2^5 \leq 158.36$$

$$122.34 \leq \hat{C}_3^5 \leq 151.75$$

$$0.0065 \leq \hat{D}_1^5 \leq 0.0072$$

$$0.370 \leq \hat{D}_2^5 \leq 0.433$$

Le choix n°5 ne donne pas de meilleurs résultats que le choix n°1. En effet, l'ouverture du poteau d'incendie en Perez, avec un débit incendie de 58 m³/h, n'améliore pas la précision de l'estimation.

Cette ouverture a été réalisée lors de la campagne de mesure. Ce qui permet de tester nos conclusions par rapport à ce choix, et notre méthode d'analyse.

Conclusion

L'identification pour le réseau de Muret est difficile : il est nécessaire lors de la campagne de mesures pour estimer avec une bonne précision les paramètres, d'avoir des précisions dans la mesure excellentes.

Les choix de mesure déterminés par l'algorithme IV-6.1 sont de bons choix de mesure dans le sens où tout autres choix de mesures ne conduit pas à de meilleurs estimations.

De la même façon, on pourrait représenter les distributions d'échantillonnage et calculer les ERQM correspondants (cf. III-6.1b), de chacun des estimateurs des rugosités et des demandes. Les estimateurs les plus efficaces parmi ceux que nous venons de présenter sont issus de l'algorithme IV-6.1.

Pour l'incertitude sur les paramètres rugosités et demandes inconnues, on s'aperçoit que la première méthode, par approximation linéaire des équations, donne une information aussi bonne que la seconde méthode de Monte-Carlo (sauf pour de grandes erreurs de mesures) ; elle peut donc se substituer à la seconde méthode qui demande beaucoup plus de calculs. Il faut moins d'une seconde sur un PC 486 DX2 66 pour obtenir l'intervalle

de confiance symétrique, alors que la seconde méthode nécessite plus d'une heure de calcul sur un VAX 4000 (modèle 100).

Avec des simulations, les erreurs liées à la schématisation sont éliminées ; les lois de perte de charge sont exactement vérifiées ; on contrôle l'erreur de mesure ; les côtes au sol sont connues, et on réalise les mesures prévues. Les réalités d'une campagne de mesure sont tout autres. Nous allons présenter les résultats de la campagne de mesure de la ville de Muret et l'influence de la forte imprécision des mesures sur l'estimation.

e) Identification des paramètres à partir de mesures réelles

Difficultés et Problèmes rencontrés

L'emplacement des mesures n'est pas celui déterminé par le choix de mesure :

- il n'a pas été possible de réaliser une mesure de débit en sortie du réservoir RBET ;
- à la suite d'un glissement de terrain, il y a eu une casse sur la conduite alimentant Estantens, rendant inadéquate une mesure de pression à cet endroit.

Pour pallier ces difficultés :

- on ajoute des points de mesure supplémentaires, si possible dans un proche voisinage du point de mesure prévu.
- connaissant le niveau du réservoir RBET minute après minute, il est possible de déterminer le débit moyen entrant ou sortant si la différence de hauteur sur la période observée est conséquente par rapport à la précision de la mesure, ici 1 cm.

Des problèmes sur les valeurs des mesures ont été observés.

- **problèmes d'horloge** : il a été possible de les résoudre en faisant coïncider les périodes de marche de la pompe SP/4 avec les hauts niveaux piézométriques et les périodes d'arrêt de la pompe avec les bas niveaux piézométriques, comme l'illustre bien la figure 113 ci-dessous.

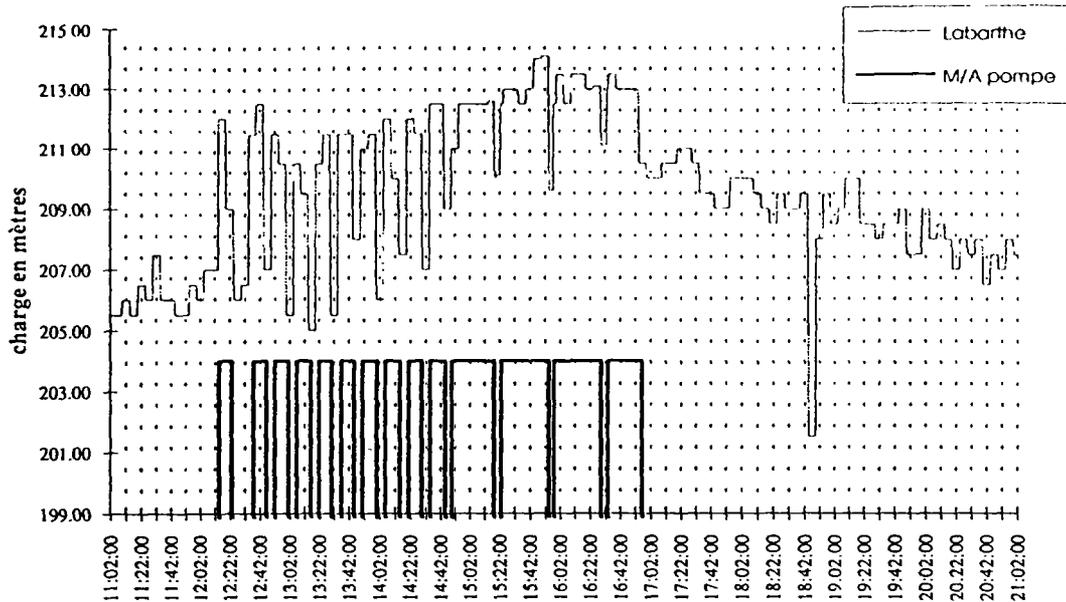


figure 113 : concordance entre M/A pompe et niveaux piézométriques

- **problèmes de conversion d'unité** : quatre des six enregistreurs de pression installés pour la campagne de mesure ont donné une hauteur en mètre, représentative de la pression multipliée par deux.

- **les côtes NGF³ des points de mesures imprécises** : la côte NGF en mètre se rajoute à la hauteur représentative de la pression pour former la hauteur piézométrique (M. Carlier, p. 30, 1980) que nous appelons charge piézométrique. Les mesures de nuit en période creuse, en supposant un niveau piézométrique plat, ont permis de déterminer avec la précision de la mesure les côtes NGF. On effectue une simulation, avec une faible loi de la demande, pour qu'il y ait correspondance entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées. Il faut alors corriger les côtes NGF. Les corrections apportés aux points de mesure ont été les suivantes, toutes les hauteurs étant en mètre, (figure 114) :

	Radier	Mesure	Charge	Simulation	
RBET	208.5	4.186	212.686	212.686	
	NGF				NGF corrigée
Labarthe	174.30	39.50	213.80	212.52	173.0
ZI	163.00	50.67	213.67	212.45	161.8
piscine	167.00	44.50	211.50	212.41	167.9
prison	166.00	48.00	214.00	212.24	164.2
Ox	187.40	24.00	211.40	212.23	188.2
Perez	179.60	32.30	211.90	212.26	180.0

figure 114 : correction des côtes NGF des points de mesure

- **présence d'un outlier** : un "outlier" est une valeur mesurée qui se détache des autres. Elle se distingue d'une donnée aberrante par le fait qu'elle met en évidence un phénomène non expliqué par le modèle ou non prévu. La charge a anormalement chuté le 2 mars 1994 de 16h 30 à 17h 52 au noeud 150 (proche de la piscine) comme le montre la figure 115. Ce phénomène correspond sans doute au remplissage de la piscine : en effet, une demande de 28 l/s ajoutée au noeud 150, pour la période de l'anomalie, donne de bons résultats lors des simulations.

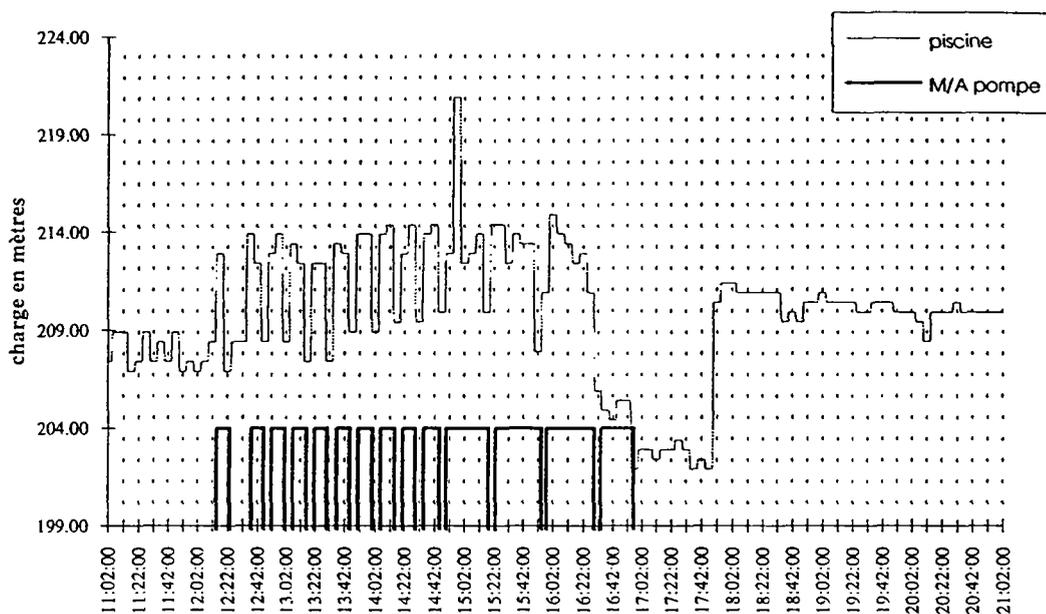


figure 115 : chute anormale de la charge à la piscine de 16h 30 à 17h 52

Organisation de la campagne de mesure

La campagne de mesure s'est déroulée du mardi 1 mars 1994 au vendredi 4 mars.

La valeur d'une mesure de pression est suivant l'appareil de mesure utilisé, celle de la hauteur représentative de la pression ou bien celle de la pression. Un capteur est dans la suite de ce chapitre un appareil de mesure dont le résultat de la mesure est en mètres, et un manomètre un appareil de mesure dont le résultat de la mesure est en bars.

Quatre points de mesures de pression sont équipés de capteurs enregistreurs de type METROLOG de précision 1 mètre :

- au noeud 92 (la prison).
- au noeud 150 (la piscine).

- au noeud 193 (lieu dit Labarthe) ; ce noeud est voisin du noeud 3L1 décidé par le choix de mesure.

- au noeud 220 (Ox) sur la partie ouest du réseau en remplacement de la mesure au noeud 216 (Estantens), puisqu'il y avait une casse consécutive à un éboulement de terrain entre 215 et 216.

Ces appareils donnent une valeur moyenne toutes les cinq minutes.

Deux capteurs de type AQUALOG (IRIS) dont la précision est de 30 centimètres sont installés :

- au noeud 23 (à proximité de la station de pompage de Perez).

- au noeud 69 (Z.I.) ; ce noeud est voisin des noeuds I2 et 64 choisis précédemment.

Ces appareils sont paramétrés pour donner une valeur moyenne toutes les trente secondes.

Deux ouvertures de poteaux d'incendies ont eu lieu le mercredi 2 mars :

- la première au noeud 23 (Perez). Le débit du poteau d'incendie a été mesuré minute après minute.

- la deuxième au noeud 207 (Carretes). Elle s'accompagne d'une mesure de débit (en m^3/h) au poteau d'incendie et d'une mesure de pression (en bars). De plus, la pression a été mesurée en amont de ce noeud, au noeud ANIS (voisin de 205) qu'il a fallu ajouter à la schématisation. Les deux manomètres sont précis à 0.05 bars près et les mesures sont instantanées toutes les minutes.

Le niveau du réservoir de Bétance (RBET) a été recueilli avec une précision inférieure au centimètre toutes les minutes du 02/3 16h50 au 03/03 7h38.

Les heures où les capteurs ont un fonctionnement normal et les heures d'ouverture de poteau d'incendie sont reportées sur la figure 116.

Les états de la pompe pour toute la campagne, marche ou arrêt, sont connus.

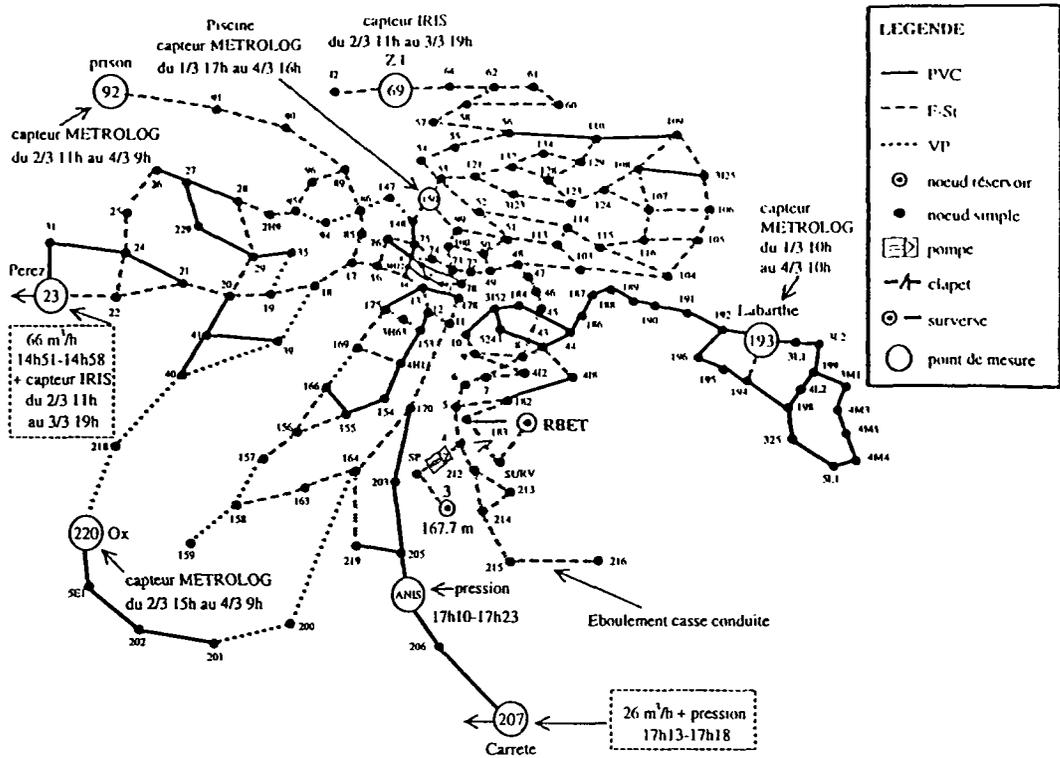


figure 116 : campagne de mesure pour la ville de Muret début mars 1994

L'estimation des paramètres rugosités et demandes s'est révélée délicate. Déterminer tous les paramètres de façon globale, n'a pas été possible ; il faut procéder par étapes et par recoupements.

L'ouverture du poteau d'incendie au noeud 207 (Carretes) et les deux mesures de pression sur une longueur de canalisation de près de 1.5 km sur des tronçons de même rugosité permettent de déterminer la rugosité du matériau PVC.

Estimation de la rugosité PVC

Il est immédiat de déterminer une estimation assez précise de la rugosité des arcs du matériau PVC, en observant que :

- La perte de charge entre les noeuds ANIS et 207 est de 13 mètres.
- Le débit incendie est de 7.22 l/s.
- Il y a 15 abonnés de type consommateur domestique desservies sur ce chemin pour lesquels la consommation correspondante est très inférieure à 14 ml/s. En effet, comme le montre la figure 117, la charge au noeud réservoir de Bétance a baissé au plus de 8 cm pour la période de l'ouverture du poteau d'incendie (la différence de niveau maximale observée est de 6 cm, la précision est de 2 cm). Le réservoir est cylindrique de

surface 333 m^2 ; le volume distribué est donc de 27 m^3 ; il lui correspond un débit horaire de $320 \text{ m}^3/\text{h} \approx 89 \text{ l/s}$. En divisant 89 par 6405, le nombre d'abonnés domestique, on en déduit une majoration de D_1 . Le débit moyen a été calculé, pour la période de 25mn, et le débit minimal correspond à une différence de niveau de 3 cm sur 5 mn.

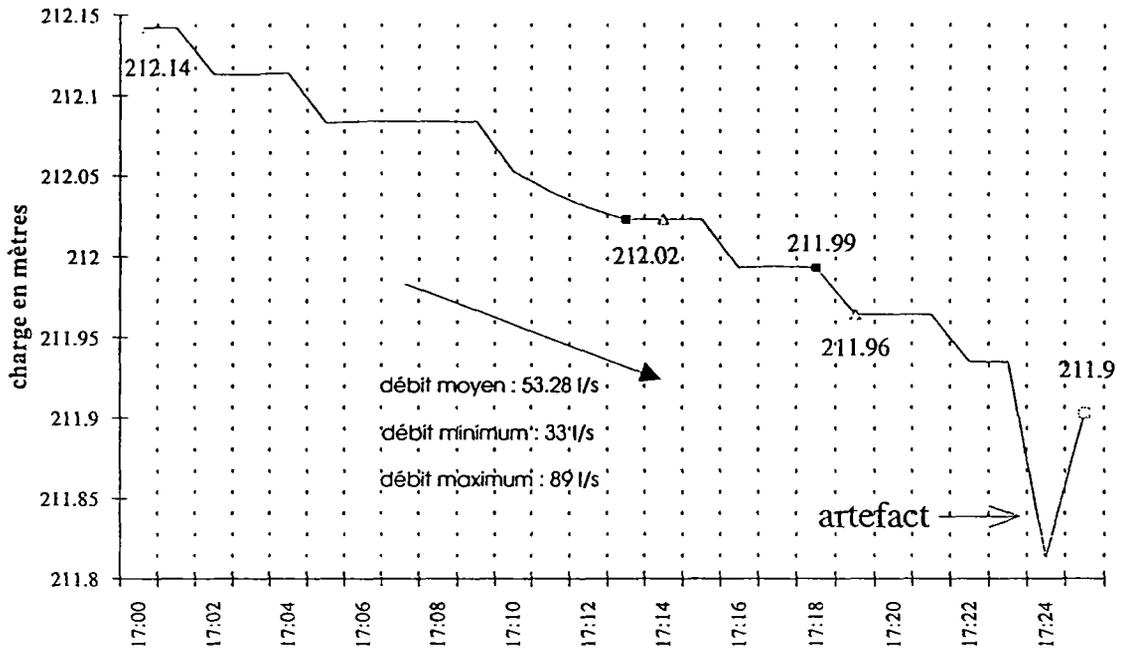


figure 117 : charge au réservoir de Bétance pendant l'ouverture du PI en Carretes

Le calcul permet alors l'encadrement (cf. figure 118) :

$$131.23 \leq \hat{C}_2 \leq 134.04$$

Il faut cependant remarquer que les côtes NGF des deux points ANIS et 207 n'ont pas pu être corrigées, puisqu'on ne dispose pas de mesures en ces points pendant les heures creuses, et que la précision dans la mesure de la pression en ces points, est de 0.05 bar. L'imprécision sur les charges au noeuds ANIS et 207 est supérieure au mètre.

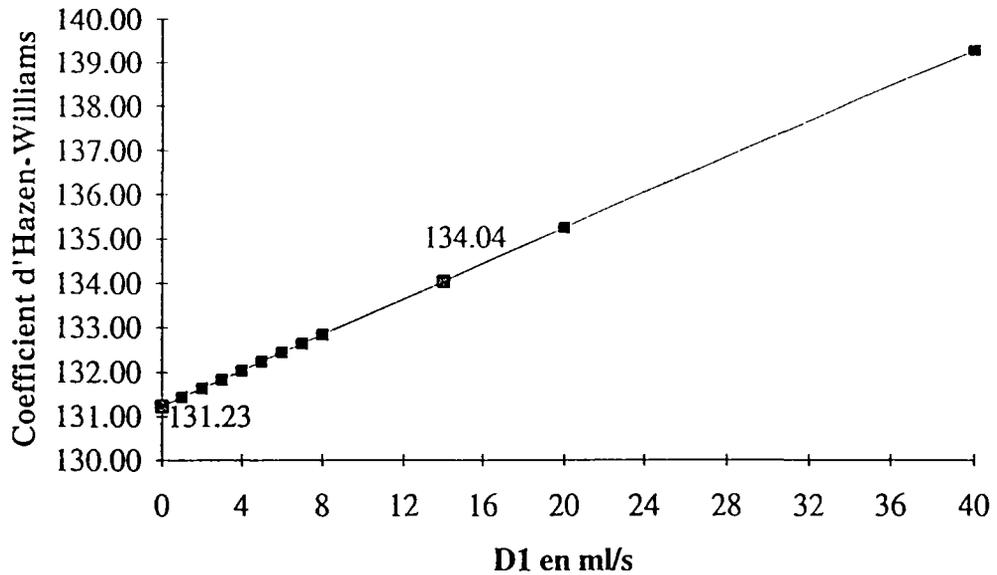


figure 118 : estimation de la rugosité des conduites en PVC

Réolvons le problème de l'Identité du réseau avec comme poids pour chaque mesure les précisions des appareils. Il n'y a pas de mesure de débit, mais il est utile de donner un ordre de grandeur pour le débit en tête. Une demande D3 a été ajoutée à la piscine (pour expliquer la chute de la charge, cf. figure 115).

Estimations après ouverture du poteau d'incendie à Carretes

Pour des problèmes d'observabilité, il a fallu supposer connue la rugosité C_3 . De plus, comme l'on possédait une assez bonne estimation de la demande industrielle, on la suppose constante, ce qui permet de pouvoir déterminer D_3 .

Le vecteur de mesure est :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} q_{\text{SURV/RBET}} \\ h_{193} \\ h_{69} \\ h_{150} \\ h_{92} \\ h_{23} \\ h_{\text{ANIS}} \\ h_{207} \\ h_{220} \end{pmatrix}$$

Les valeurs prises par le vecteur de mesure et les erreurs de mesures sont :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} -75.00 \\ 210.50 \\ 211.13 \\ 202.90 \\ 208.20 \\ 210.21 \\ 192.64 \\ 179.60 \\ 211.20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \end{matrix} \quad \Delta y^1 = \begin{pmatrix} 5.00 \\ 2.00 \\ 0.60 \\ 2.00 \\ 2.00 \\ 0.60 \\ 0.50 \\ 0.50 \\ 2.00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \end{matrix}$$

L'algorithme MCP converge en 11 itérations en partant de :

$$x^0 = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_2 \text{ (PVC)} \\ D_1 \text{ (Dom)} \\ D_3 \text{ (Pisc)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 141 \\ 2.39 \\ 16.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{ml/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

Les estimations par intervalle linéaires (cf III-5.9) sont :

$$\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^1 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^1 \text{ (PVC)} \\ \hat{D}_1^1 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_3^1 \text{ (Pisc)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134.32 \pm 46.58 \\ 117.45 \pm 8.14 \\ 7.67 \pm 6.5 \\ 9.45 \pm 41.74 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{ml/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

La somme des résidus pondérés au carré est égale à : 50.869. Les corrections de poids de l'algorithme MCPA ne change pas, à la virgule près.

On remarque que l'estimation de la deuxième rugosité est trop à droite, cette rugosité devant être proche de 132. En augmentant les poids en 23, 220, 92 et 64, pour lesquels on a constaté de forts résidus (avec MCPA) et en favorisant les charges aux noeuds ANIS et 207, le vecteur des poids est alors :

$$\Delta y^2 = \begin{pmatrix} 5.00 \\ 2.00 \\ 6.00 \\ 2.00 \\ 7.00 \\ 8.00 \\ 0.50 \\ 0.50 \\ 9.00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{l/s} \\ \text{m} \end{matrix}$$

L'algorithme MCP converge en 14 itérations en partant de x^0 .

Les estimations et les intervalles de confiance sont

$$\hat{x}^2 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1^2 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_2^2 \text{ (PVC)} \\ \hat{D}_1^2 \text{ (Dom)} \\ \hat{D}_3^2 \text{ (Pisc)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85.07 \pm 80 \\ 131.46 \pm 42 \\ 4.74 \pm 15 \\ 28.09 \pm 95 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{ml/s} \\ \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

La somme des résidus pondérés au carré est égale à : 2.33.

L'algorithme MCPA donne le même résultat. Ce sont ici les poids initiaux, qui sont très importants et qui permettent d'obtenir une estimation de C_2 et de C_1 pour laquelle on a plus confiance.

Les intervalles de confiances par approximation linéaire sont ici trop pessimistes. En effet, pour le calcul de l'incertitude sur l'estimation par une méthode de Monte-Carlo on obtient :

$$\begin{aligned} 72.09 &\leq \hat{C}_1^2 \leq 98.77 \\ 125.75 &\leq \hat{C}_2^2 \leq 138.39 \\ 1.05 &\leq \hat{D}_1^2 \leq 8.62 \quad (\text{ml/s}) \\ 5.47 &\leq \hat{D}_3^2 \leq 51.01 \quad (\text{l/s}) \end{aligned}$$

Estimations après ouverture du poteau d'incendie à Perez

Nous ne disposons d'aucune mesure de débit et la hauteur du réservoir RBET est seulement connue pour 14h et pour 15h, les enregistrements toutes les minutes ayant commencé à 14h30. Pour connaître la hauteur du niveau du réservoir, pour la période de

l'ouverture du poteau d'incendie, à partir des marches-Arrêt des pompes et d'un débit théorique de 520 m³/h sur l'arc SP/4, il est possible de déterminer la charge au réservoir RBET par une simulation comme le montre assez bien la figure 119.

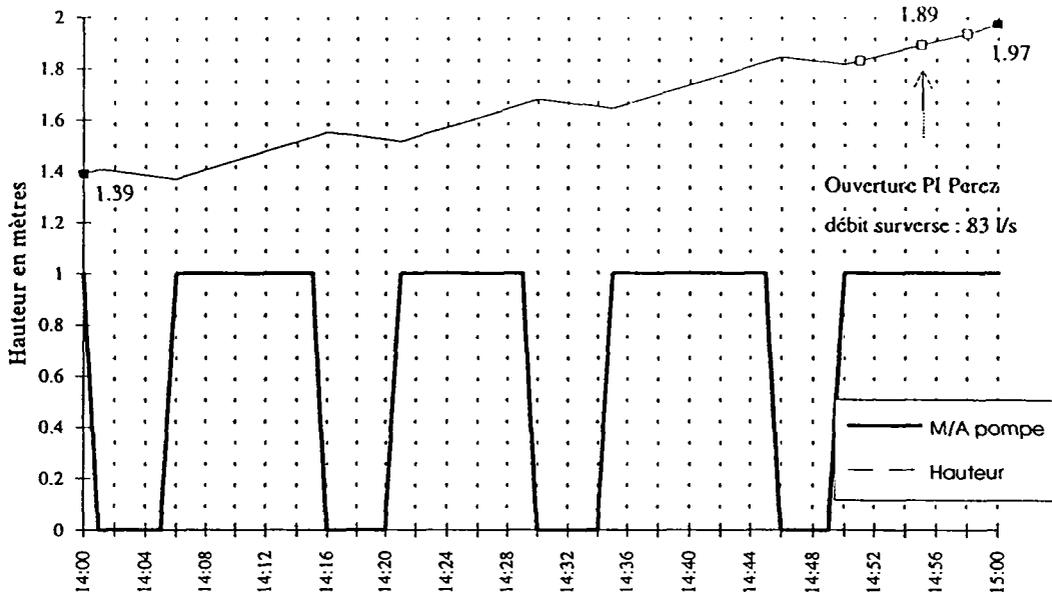


figure 119 : simulation du niveau du réservoir de Bétance de 14h à 15h

C_2 est supposée connue et égale à 131,46, valeur qui a été fixée précédemment.

Le vecteur de mesure est :

$$y^{\text{mes}} = \begin{pmatrix} h_{193} \\ h_{69} \\ h_{150} \\ h_{92} \\ h_{23} \\ h_{220} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 212.50 \\ 212.47 \\ 212.40 \\ 213.20 \\ 206.06 \\ 209.70 \end{pmatrix} \quad \Delta y^l = \begin{pmatrix} 6 \\ 0.6 \\ 2 \\ 8 \\ 0.6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ m}$$

L'algorithme MCP converge en 10 itérations en partant de :

$$x^0 = \begin{pmatrix} C_1 \text{ (F-St)} \\ C_3 \text{ (VP)} \\ D_1 \text{ (Dom.)} \\ D_2 \text{ (Ind.)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 90 \\ 5.1 \\ 0.37 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ml/s} \\ \text{ml/s} \\ \text{l/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

Les estimations par intervalle linéaires (cf III-5.9) sont :

$$\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \text{ (F-St)} \\ \hat{C}_3 \text{ (VP)} \\ \hat{D}_1 \text{ (Dom.)} \\ \hat{D}_2 \text{ (Ind.)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93.6 \pm 116.7 \\ 119.8 \pm 377.7 \\ 1.74 \pm 27.2 \\ 0.32 \pm 1.0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{ml/s} \\ \text{l/s} \end{matrix}$$

pour le calcul de l'incertitude sur l'estimation par une méthode de Monte-Carlo on obtient :

$$\begin{aligned} 60.04 &\leq \hat{C}_1^2 \leq 232.92 \\ 13.68 &\leq \hat{C}_3^2 \leq 144349 \\ -6 &\leq \hat{D}_1^2 \leq 21 \quad (\text{ml/s}) \\ -0.38 &\leq \hat{D}_2^2 \leq 0.62 \quad (\text{l/s}) \end{aligned}$$

Même si ce dernier résultat souligne qu'il faut avoir une confiance limitée pour l'estimation ponctuelle, les valeurs obtenues pour les rugosités sont celles attendues physiquement. Aussi, nous considérons avoir identifié les rugosités du réseau de la ville de Muret et les valeurs sont :

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_1 \text{ (F-St)} = 93.6 \\ \hat{C}_2 \text{ (PVC)} = 131.46 \\ \hat{C}_3 \text{ (VP)} = 119.8 \end{pmatrix}$$

Le paysage piézométrique trop plat, l'imprécision des mesures et l'absence de mesure de débit ont rendu plus difficile cette estimation.

CONCLUSION GENERALE

Les méthodes et algorithmes, présentés tout au long de cette étude, permettent de résoudre les trois problèmes complémentaires de l'Analyse, de l'Identification du réseau et du Choix des mesures. Rappelons pour chacun de ces trois thèmes, les points forts et les principaux résultats.

Pour le problème de l'Analyse nous avons réalisé la conception puis l'implémentation d'un code de calcul très performant en taille de réseau et en temps d'exécution. A partir de la donnée du vecteur d'état constitué des classes de rugosités et des classes de demandes, à partir de la donnée des charges aux noeuds réservoirs, on calcule toutes les autres variables du réseau vérifiant les équations de l'équilibrage hydraulique.

Ce travail a contribué à situer et à comparer les différents algorithmes proposés depuis Hardy-Cross pour résoudre ce problème. L'algorithme retenu est de Newton sur le lagrangien avec inversion de la matrice hessienne du problème dual par la méthode des moindres degrés. Le choix réalisé et l'implémentation qui en a été faite constituent une amélioration en temps et en taille.

La procédure d'Identification consiste à donner une estimation ponctuelle du vecteur des classes de rugosité et des classes des demandes et à lui associer une estimation par intervalle. La minimisation du critère des moindres carrés avec poids sous contraintes assure l'existence et l'unicité locale. L'Analyse des résidus permet la vérification de l'adéquation du modèle.

L'algorithme de résolution est une modification de l'algorithme de Levenberg-Marquardt qui tient compte des contraintes. Les techniques de réduction du nombre des inconnues, et du recalcul des poids pourraient sans doute être utilisées dans d'autres contextes. L'application de la méthode a donné de bons résultats en situation réelle pour l'identification du réseau de la ville de Marennes.

Pour le choix de la nature, du nombre et de l'emplacement des mesures, nous proposons une réponse, à notre connaissance innovante. Les techniques mises en oeuvre pourrait être réutilisées dans d'autres contextes.

La méthode consiste à minimiser l'influence des erreurs de mesures sur l'estimation du vecteur d'état, tout en assurant l'indépendance maximale des mesures.

Dans ce cadre, un algorithme glouton, présentant l'avantage d'être polynomial, a été développé. Pour le choix résultant, le problème de l'Identification du réseau est mieux conditionné. Il a été constaté sur des petits réseaux que la solution obtenue réalisait le *minimum global du critère du choix*.

Dans la partie validation, nous avons été confrontés à des situations réelles : manque de mesures, mauvais emplacements, précisions insuffisantes. Notre travail a consisté à montrer que notre méthodologie est efficace même dans ces cas.

L'Identification des rugosités et des demandes de la ville de Muret a été plus difficile que celle de Marennes pour plusieurs raisons : la charge est quasiment constante dans tout le réseau, ce qui n'avantage pas l'Identification fondée sur les mesures de pression ; il n'y a pas de mesure de débit, et les mesures de pression manquent de précision.

Une attention soutenue et un effort particulier doivent être faits au respect de l'emplacement, du nombre et de la nature des mesures réalisées, ainsi qu'à la précision de celles-ci.

Cette étude est d'abord destinée au diagnostic hydraulique d'un réseau dans le cadre des réflexions sur le renforcement et le renouvellement, et dans celui de la surveillance et de la gestion des installations. Il trouve un prolongement naturel dans le développement et le calage des modèles de qualité d'eau dans les réseaux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A. AVEZ, Calcul différentiel, *Masson*, Paris, 1983.

Mokhtar S. BAZARAA, Hanif D. SHERALI and C. M. SHETTY, Nonlinear Programming - Theory and Algorithms, 2ième édition, *John Wiley & Sons, Inc.*, 1993.

Andrzej BARGIELA and Graham D. HAINSWORTH, Pressure and Flow Uncertainty in Water Systems, *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 115, n° 2, p. 212-229, March 1989.

Claude BERGE, Graphes et Hypergraphes, 2ième édition, *Dunod*, 1973.

Stéphane BERTHIN, Indices de fiabilité d'un système de distribution d'eau potable, *Mémoire de D.E.A.*, discipline mécanique et ingénierie, Université Louis Pasteur Strasbourg, 79 pages, 1994.

M. CARLIER, Hydraulique générale et appliquées, *Eyrolles*, Paris, 1980.

P. CARPENTIER, G. COHEN and Y. HAMAM, Water Network equilibrium, variational formulation and comparison of numerical algorithms, *Paper invited at EURO VII*, Bologna, Italy, June 16-20, 1985.

CEMAGREF, Logiciel ZOMAYET, simulation du fonctionnement d'un réseau AEP sur 24 heures, *Groupement de Bordeaux*, 1988.

M. CHANDRASHEKAR and K.H. STEWART, Sparsity Oriented analysis of large pipe Networks, *Journal of the Hydraulics division, ASCE*, Vol. 101, N° HY4, April, p. 341-355, 1975.

P. G. CIARLET, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, 2ième tirage, *Masson*, 1985.

Guy COHEN, Auxiliary Problem Principle and Decomposition of Optimization Problem, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 32, n° 3, p. 277-305, November 1980.

Guy COHEN and Pierre CARPENTIER, State Estimation and Leak Detection in Water Networks, Proceedings of an International conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, held at Leicester Polytechnic, in Sept 1987, printed in Great Britain by *Research Study Press Ltd.*, Exeter.

M. COLLINS, L. COOPER, R. HELGASON, J. KENNINGTON and L. LEBLANC, Solving the pipe network analysis problem using optimisation techniques, *Management Science*, Vol. 24, n° 7, p. 747-760, March 1978.

Hardy CROSS, Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors, *Bulletin n° 286*, Univ. of Illinois Engr. Experiment Station, 1936.

- Anglès D'AURIAC, A propos de l'unicité de solution dans les problèmes de Réseaux Maillés, *La Houille Blanche*, n° 3, p. 209-212, Mai-Juin 1947.
- Philip J. DAVIS, Circulant matrices, *New-York : Willey*, 250 p., 1979.
- S.E. DELATTRE et de C. THE, Adéquation des modèles de réseaux d'eau potable au comportement réel de la distribution, 71° congrés AGHTM 1991, texte des conférences, p. 479-493, 1991.
- André DIVENOT, Une nouvelle méthode de calcul des réseaux maillés, *La Houille Blanche*, n° 6, p. 365-376, 1980.
- A. DOLAN and J. ALDOUS, Networks and algorithms : an introductory approach, *John Willey & sons*, 1993.
- R. EPP and A. G. FOWLER, Efficient code for steady-state flows in Networks, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 96, n° HY1, p. 43-56, January 1970.
- A. GEORGE and J. W. LIU, Computer Solution of Large Positive Definite systems, *Prentice-Hall Series in Computational Mathematics*, Cleve Moler, Advisor, 1981.
- A. GEORGE and J. W. LIU, The Evolution of the Minimum Degree Ordering Algorithm, *Siam Review*, Vol. 31, N°1, pp. 1-19, March 1989.
- Allen A. GOLDSTEIN, Constructive real Analysis, *Harper international edition*, 1967.
- G. H. GOLUB and C. F. VAN LOAN, Matrix computation, 2nd edition, *John Hopkins University Press*, 1989.
- Y. M. HAMAM and A. BRAMELLER, Hybrid Method for the solution of piping Networks, *Proc. IEE*, Vol. 118, n° 11, November 1971.
- H. O. HARTLEY, The modified Gauss-Newton method for the fitting of non-linear regression functions by least squares, *Technometrics*, n° 3, p. 269-280, 1961.
- A. HAUGUEL, La modélisation des réseaux de distribution d'eau et son évolution, *Informatique et eau*, p.527-534, Novembre 1991.
- Chan f. LAM and M. L. Wolla, Computer analysis of Water distribution systems : Part I - Formulation of Equations, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 98, n° HY2, p. 335- 344, February 1972.
- Chan f. LAM and M. L. Wolla, Computer analysis of Water distribution systems : Part II - Numerical solution, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 98, n° HY3, p. 447-460, March 1972.
- Kevin E. LANSEY and Chuda BASNET, Parameter Estimation for Water Distribution Networks, *Journal of Water Ressources Planning and Management*, Vol. 117, n° 1, p. 126-144, January/February, 1991.
- P. LASCAUX et R. THEODOR, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tome 1. *Masson*, Paris 1986.

C. L. LAWSON and R. J. HANSON, Solving least squares problems, *PRENTICE-HALL, INC.*, London, 1974.

TH. LEKANE, Modèle de calcul de l'écoulement en régime permanent dans un réseau d'eau maillé, *Journal of the hydraulic Research / Journal de recherches Hydrauliques* 17, n° 2, p. 149-163, 1979.

K. LEVENBERG, A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Q. Apl. math.*, n° 2, p. 164-168, 1944.

Zaher MAHJOUB, Réduction de la résolution d'un problème de réseau maillé (B) Sur la convergence locale de certaines méthodes, *RAIRO, Analyse numérique Numerical Analysis*, Vol. 17, n° 1, p. 67-92, 1982.

D. W. MARQUARDT, an algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *J. SIAM*, n° 11, p.591-612, 1963.

D. W. MARTIN and G. PETERS, The application of Newton's method to network analysis by digital computer, *Journal of the institute of water engineers*, vol. 17, p. 115-129, 1963.

Michel MINOUX, Programmation mathématique, Théorie et Algorithme, 2 tomes, édition Dunod, 1983.

M. MINOUX et G. BARTNIK, Graphes, Algorithmes et logiciels, *Bordas*, 1986.

J. C. NASH, Compact numerical methods for computers : linear algebra and function minimisation, *Adam Hilger Ltd*, Bristol, 1990.

Lindell E. ORMSBEE, Implicit Network Calibration, *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 115, n° 2, p. 243-257, March 1989.

J. M. ORTEGA and W. C. RHEINBOLT, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, *Computer Science and Applied Mathematics*, Academic Press, 1970.

Takao OZAWA, The Principal Partition of a pair of Graphs and its Applications, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 17, p. 163-186, 1987.

R. S. POWELL, M. R. IRVING, M. J. H. STERLING and A. USMAN, A Comparison of Three Real-Time State Estimation Methods for On-Line Monitoring of Water Distribution Systems, Proceedings of an International conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, held at Leicester Polytechnic, in Sept 1987, printed in Great Britain by *Research Study Press Ltd.*, Exeter, 1987.

William H. PRESS, Brian P. FLANNERY, Saul A. TEUKOLSKY and William T. Vetterling, Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing (Fortran Version), *Cambridge University Press*, p. 498-546, 1990.

Michel SAKAROVITCH, Optimisation Combinatoire : Graphes et Programmation Linéaire, *Enseignement des sciences*, 31, Hermann, 1984.

E. TODINI and S. PILATI, A Gradient Algorithm for the Analysis of Pipe Networks, Proceedings of an International conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, held at Leicester Polytechnic, in Sept 1987, printed in Great Britain by *Research Study Press Ltd.*, Exeter, 1987.

Richard S. VARGA, Matrix iterative Analysis, *Prentice-Hall, Inc.*, 1962.

T. H. WONNACOTT and R. J. WONNACOTT, Statistique, *Economica*, 4^{ème} édition, 1991.

D. J. WOOD and C. O. A. CHARLES, Hydraulic Network Analysis using linear Theory, *Journal of the Hydraulics division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, n° HY7, p. 1157-1170, July 1972.

BIBLIOGRAPHIE

M. A. AJIZ and A. JENNING, A robust incomplete Choleski-conjugate gradient algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, p. 949-966, 1984.

A. AUSLENDER, Optimisation, méthodes numériques, *Masson*, 1976.

A. BENNOUR, Contribution à la résolution de l'Equilibre d'un Réseau d'Eau, *Mémoire Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, Centre d'Automatique et Informatique, 78 pages, Fontainebleau, Juillet 1985.

C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI, Programmes, jeux et réseaux de transport, *Dunod*, 1962.

Pramod R. BHAVE, Calibrating Water Distribution Networks Models, *Journal of Environmental Engineering*, Vol. 114, n° 1, p. 120-136, February 1988.

Gilles BONNET, La Méthode CERBERE : gestion assistée par ordinateur de réseaux maillés sous pression, *Eau et Informatique*, Actes du colloque organisé par l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, p. 169-178, Paris, Mai 1986.

Paul F. BOULOS and Don J. WOOD, Explicit Calculation of Pipe-Network Parameters, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 116, n° 11, p. 1329-1344, November 1990.

Pierre CARPENTIER et Guy COHEN, Etat d'Equilibre d'un réseau de distribution d'Eau - Modélisation - Comparaisons des Méthodes de résolution, *Raport interne Ecole Nationale Supérieure des Mines Paris*, Centre d'automatique et informatique, 65 pages, Fontainebleau, Avril 1983.

Jean CEA, Optimisation - Théorie et algorithmes, Méthodes Mathématiques de l'informatique, *Dunod*, paris, 1971.

M. CHANDRASHEKAR, Extended Set of components in Pipe Networks, *Journal of the hydraulics Division, ASCE*, Vol. 106, N° HY1, January, p. 133-149, 1980.

Guy COHEN and Bernadette MIARA, Optimization with an auxiliary constraint and decomposition, *SIAM Journal Control and Optimization*, Vol. 28, n° 1, p. 137-157, January 1990.

Roger P. DONACHIE, Digital Program for Water Network analysis, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 100, n° HY3, March, p. 393-403, 1974.

Didier DUBOIS et Henri PRADE, Théorie des possibilités : Applications à la représentation des connaissances en informatique, *Masson*, Paris, 1988.

Bernard DUBUISSON, Diagnostic et reconnaissance des formes, *Hermes*, Paris, 1990.

Okitsugu FUJIWARA and Amal U. De SILVA, Algorithm for Reliability-Based Optimal Design of Water Networks, *Journal of Environmental Engineering*, Vol. 116, n° 3, p. 575-587, May/june, 1990

Emanuel GOFMAN and Michael RODEH, Loop equation with unknown pipe characteristics, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 107, N° HY9, p. 1047-1060, September, 1981.

M. GONDRAN et M. MINOUX, Graphes et Algorithmes, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, *Edition Eyrolles*, Paris 1977.

David S. KERSHAW, The incomplete Cholesky - Conjugate Gradient Method for the iterative Solution of Systems of linear Equation, *Journal of Computational Physics*, n° 26, p. 43-65, 1978.

Frank KORNER, Remarks on the Newton method for solving nonlinear equality constrained optimization problems, *R.A.I.R.O Recherche opérationnelle/Operations Research*, Vol. 24, n° 3, p. 287 à 294, 1990.

Pierre F. LEMIEUX, Efficient Algorithm for Distribution Networks, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 98, N° HY11, p. 1911-1920, November 1972.

Armando LENCASTRE, Manuel d'Hydraulique générale, 4ième tirage, *édition Eyrolles*, 1969.

David G. LUENBERGER, Introduction to linear and nonlinear programming, *Addison-Wesley publishing company*, 1973.

Zaher MAHJOUB, Réduction de la résolution d'un problème de réseau maillé, *RAIRO, Analyse numérique Numerical Analysis*, Vol. 16, N° 2, p. 143-160, 1982.

J. J. MAUGIS, Etude de réseaux de transport et de distribution de Fluide, *R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle/Operations research*, Vol. 11, n° 2, p. 243-248, mai 1977.

Hans Bruun NIELSEN, Methods for analysing Pipe Networks, *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol. 115, n°2, p. 139-157, March 1989.

R. PENROSE, A generalized Inverse for Matrices, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 51, p. 406-413, 1955.

Ranko S. PUDAR and James A. LIGGETT, (1992). Leaks in pipe Networks, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, N° 7, p. 1031-1046, July, 1992.

W. Jepson ROLAND and ALIREZA TAVALLAEE, Pumps and Reservoirs in Networks by Linear Theory, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 101, N° HY3, p. 576-580, March, 1975.

R. SALGADO. E. TODINI and P. E O'CONNELL, Comparison of Gradient Method with some Traditional Methods for the Analysis of Water Supply Distribution Networks, *Proceedings of an International conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution*, held at Leicester Polytechnic, in Sept 1987, printed in Great Britain by *Research Study Press Ltd.* Exeter, 1987.

Gilbert SAPORTA. Probabilités. Analyse de données et Statistiques, Editions TECHNIP, 1990.

A. SEN and M. SRIVASTAVA, Regression Analysis : theory, Methods and Applications, *Springer Verlag*, New york, 1990.

Uri SHAMIR and Charles D. D. HOWARD, Water Distribution Systems Analysis, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 94, N° HY1, January 1968.

James A. SMITH, Water Suply Yield Analysis for Washington metrolitan Area, *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 115, n° 2, p. 230-242, March 1989.

M. TSUKIYAMA and T. FUKUDA, A Heuristic Methodology of Estimation and Control for Large Scale Water Suply Network, *IFAC Control Science and Technology*, 8th. Triennial World Congress, Kyoto in Japan, p. 3847-3852, 1981.

W. J. TURNER, Better Leak Detection in Gas Pipelines, *Comput. Math. aplic.*, Vol. 15, n° 1, p. 69-75, 1988.

Hansjörg WACKER, Continuation Methods, Symposium on Continuation Methods, *Academic Press, INC.*, 1978.

Thomas M. WALSKI, Sherlock Holmes meets Hardy-Cross - or Model Calibration in Austin, Texas, *Journal AWWA*, p. 34-38, march 1990.

D. J. WOOD and A. G. RAYES, Reliability of Algorithms for Pipe Network Analysis, *Journal of the Hydraulics Division*, Proceedings of the american Society of Civil Engineers, Vol. 107, n° HY10, p. 1145-1161, October 1981.

K. ZOLLENKOPF, Bi-Factorisation - Basic Computational Algorithm and Programming Techniques, *Conference on large sets of linear Equations*, p. 75-96, Oxford, April 1970.

ANNEXE

Annexe 1 : Démonstration du lemme II-1.4

Lemme II-1.4

Les a - n lignes de M_0 sont des vecteurs représentatifs de a - n cycles ou chaînes entre réservoirs de G .

Démonstration

La démonstration se fait en deux parties a) et b) ; il faut au préalable démontrer qu'à chaque arc u de C , correspond ou bien un cycle ou bien une chaîne entre deux réservoirs du graphe $(X, \mathbb{A} \cup \{u\})$, ce qui sera fait dans la première partie.

a) G'' est une forêt constituée de f arborescences, chacune de racine un noeud réservoir.

L'adjonction d'un arc de C a deux effets possibles :

- elle laisse inchangée le nombre de composantes connexes ;
- elle diminue le nombre de composantes connexes.

Dans le premier cas l'arc u appartient à un cycle de $(X, \mathbb{A} \cup \{u\})$ (Sakarovitch M. p. 37, 1984).

Dans le second cas, soient $i = I(u)$ l'extrémité initiale de u , et $j = T(u)$ l'extrémité terminale de u . i appartient à une composante connexe de racine, un noeud réservoir R_i , et j appartient à une autre composante connexe de racine : R_j ; il existe un chemin de R_i à i , et un chemin de R_j à j , ces deux chemins étant constitués uniquement par des arcs de \mathbb{A} ; les deux chemins et l'arc u constituent une chaîne de R_i à R_j .

b) Soit Γ un cycle ou une chaîne de G : un sens de parcours sur Γ ayant été fixé, on définit les deux ensembles d'arcs :

Soit Γ^+ (resp. Γ^-) l'ensemble des arcs de Γ orientés dans le sens de parcours (resp. orientés en sens inverse du parcours).

A une chaîne Γ de G on associe le vecteur $\gamma \in \mathbb{R}^n$ représentatif de Γ , de composantes :

$$\gamma_j = \begin{cases} 1 & \text{si } u_j \in \Gamma^+ \\ -1 & \text{si } u_j \in \Gamma^- \\ 0 & \text{si } u_j \notin \Gamma \end{cases}$$

Soit ${}^t\omega_i$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur-ligne de la matrice d'incidence A réduite aux noeuds simples ; ω_i est le vecteur représentatif du cocycle élémentaire correspondant au noeud simple x_i de numéro i ; par conséquent si Γ_j est un cycle :

$$\langle \omega_i, \gamma_j \rangle_a = 0 \text{ (Sakarovitch M. p. 74, 1984)}$$

Si Γ_j est une chaîne entre réservoirs on a aussi $\langle \omega_i, \gamma_j \rangle_a = 0$: en effet, si on ajoute un arc entre les deux extrémités de la chaîne pour former un cycle, on ne modifie pas le cocycle représentatif du noeud simple x_i .

La première partie de la démonstration garanti l'existence de Γ_i pour i de 1 à $a-n$, une chaîne entre réservoirs ou un cycle, dont les arcs appartiennent tous à \mathbb{A} , excepté le $i^{\text{ème}}$ arc de C , de numéro $i+n$; choisissons un sens de parcours sur Γ_i , pour que $i+n \in \Gamma^+$.

Soit $M \in \mathbb{M}_{a-n, a}$ la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est le vecteur transposé du vecteur γ_j représentatif de Γ_j , alors M se décompose sur \mathbb{A} et C comme :

$$M = (M_1 \quad I_{a-n}) \quad \text{où } M_1 \in \mathbb{M}_{n, n}$$

De l'orthogonalité entre un vecteur représentatif d'un cocycle aux noeuds simples ω_i et un vecteur représentatif d'un cycle ou d'une chaîne entre deux réservoirs, on déduit que :

$$A \cdot {}^tM = 0_{n, a-n}$$

En se servant des décompositions de chacune des deux matrices :

$$(A_1 \quad A_2) \cdot \begin{pmatrix} {}^tM_1 \\ I_{a-n} \end{pmatrix} = 0_{n, a-n}$$

en particulier : $A_1 \cdot {}^tM_1 + A_2 = 0_{n, a-n}$

d'où : $M_1 = -{}^t(A_1^{-1} \cdot A_2)$

M est donc égale à M_0 ■ ■

Annexe 2 : Le principe du problème Auxiliaire

Le principe du problème Auxiliaire (G. Cohen, 1980), permet de plonger un problème d'optimisation convexe dans une théorie générale qui propose une vaste panoplie d'algorithmes pour lesquels la convergence globale est assurée ; nous allons brièvement en donner la description puis les résultats essentiels en nous restreignant au cas de la dimension finie et au cas différentiable.

Soient U_f un sous-ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^m et $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable ; nous voulons résoudre le problème suivant :

$$(MP) \quad \min_{v \in U_f} g(v)$$

Pour cela, nous choisissons une suite de fonction h_k , $k \in \mathbb{N}$ et de nombres positifs ρ_k , $k \in \mathbb{N}$, et nous envisageons l'algorithme suivant :

Algorithme A2 :

i) Choisir $v^0 \in U_f$ et faire $k = 0$

ii) Résoudre le problème Auxiliaire :

$$(AP)^k \quad \min_{v \in U_f} g_k(v) \text{ où } g_k(v) = h_k(v) + \left\langle \rho_k \nabla g(v^k) - \nabla h_k(v^k), v \right\rangle_m$$

Soit v^{k+1} la solution

iii) arrêt si $\|v^{k+1} - v^k\|$ ou $\|g(v^{k+1}) - g(v^k)\|$ ou $\|\nabla g(v^{k+1})\|$ plus petit qu'un seuil donné ; sinon faire $k \leftarrow k + 1$ et retour en ii)

Cohen donne les conditions pour que cet algorithme converge vers la solution v^* de (MP) :

Théorème A2

On suppose :

(H1) g est convexe, coercive et de classe C^1 sur un ouvert convexe contenant U_f ; ∇g est lipschitzien avec une constante C sur U_f :

$$\exists C > 0 / \|\nabla g(v) - \nabla g(w)\| \leq C \|v - w\|, \quad \forall (v, w) \in U_f \times U_f$$

(H2) Les fonctions h_k sont de classe C^1 sur un ouvert contenant U_f ; les gradients ∇h_k sont fortement monotones avec une constante b_k sur U_f :

$$\exists b_k > 0 / b_k \cdot \|v - w\|^2 \leq \langle \nabla h_k(v) - \nabla h_k(w), v - w \rangle_m, \quad \forall (v, w) \in U_f \times U_f$$

les gradients ∇h_k sont lipschitziens avec une constante B_k sur U_f :

$$\exists B_k > 0 / \|\nabla h_k(v) - \nabla h_k(w)\| \leq B_k \cdot \|v - w\|, \quad \forall (v, w) \in U_f \times U_f$$

De plus : il existe $\exists b > 0, \exists B > 0$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}, b_k \geq b$ et $B_k \leq B$

(H3) les coefficients ρ_k vérifient :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 \text{ tels que : } \forall k \in \mathbb{N}, \alpha \leq \rho_k \leq \frac{2b_k}{C + \beta}$$

Alors, le problème (MP) a au moins une solution v^* , tandis que les problèmes $(AP)^k$ possèdent une unique solution v^{k+1} ; la suite $g(v^k)$ est strictement décroissante (à moins que $v^k = v^*$ pour un k) et elle converge vers $g(v^*)$; chaque point d'adhérence de la suite v^k est une solution de (MP), donc v^k converge vers v^* si g est strictement convexe.

de plus, supposons :

(H4) ∇g est fortement monotone avec une constante c sur U_f :

$$\exists c > 0 / c \|v - w\|^2 \leq \langle \nabla g(v) - \nabla g(w), v - w \rangle_m, \quad \forall (v, w) \in U_f \times U_f$$

Alors, nous avons l'estimation de l'erreur a priori :

$$\|v^{k+1} - v^*\| \leq \frac{1}{c} \left(\frac{B_k}{\rho_k} + C \right) \|v^{k+1} - v^k\|$$

Pour la démonstration de ce théorème, on pourra consulter G. Cohen (1980).

Remarques

Supposons $U_f = \mathbb{R}^m$; Cohen (1980) fait remarquer que si l'on choisit $h_k = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$,

l'algorithme A2 conduit à l'algorithme du gradient :

$$v^{k+1} = v^k - \rho_k \nabla g(v^k)$$

et si l'on choisit $h_k(w) = \frac{1}{2} \langle \text{Hess}(g)(v^k) \cdot w, w \rangle_m$, l'algorithme A2 conduit à la méthode de Newton généralisée :

$$v^{k+1} = v^k - \rho_k \text{Hess}(g)(v^k)^{-1} \cdot \nabla g(v^k)$$

Annexe 3 : Expression de K_C et de sa pseudo-inverse

On rappelle (paragraphe III-1.4) que pour identifier l'emplacement des arcs de rugosité C_i , on introduit la matrice $S_i \in \mathbb{M}_{\kappa_i, a}$, pour laquelle :

$$S_i \cdot Chw = C_i \mathbf{1}_{\kappa_i} \quad (1)$$

où $\mathbf{1}_{\kappa_i}$ est le vecteur dont toutes les composantes sont des 1.

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} S_i \cdot {}^t S_i &= I_{\kappa_i} \\ S_i \cdot {}^t S_j &= 0_{\kappa_i, \kappa_j}, \text{ si } i \neq j \\ {}^t S_1 \cdot S_1 + {}^t S_2 \cdot S_2 + \dots + {}^t S_\kappa \cdot S_\kappa &= I_a \end{aligned} \quad (2)$$

Ecrivons (1) pour chacune des classes :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_\kappa \end{pmatrix} \cdot Chw = \begin{pmatrix} I_{\kappa_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\kappa_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{\kappa_\kappa} \end{pmatrix} \cdot C$$

En prémultipliant la dernière équation par $({}^t S_1 \quad {}^t S_2 \quad \dots \quad {}^t S_\kappa)$ on obtient :

$$Chw = ({}^t S_1 \quad {}^t S_2 \quad \dots \quad {}^t S_\kappa) \cdot \begin{pmatrix} I_{\kappa_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\kappa_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{\kappa_\kappa} \end{pmatrix} \cdot C$$

Comme $Chw = K_C \cdot C$, on conclut :

$$K_C = ({}^t S_1 \cdot I_{\kappa_1} \quad {}^t S_2 \cdot I_{\kappa_2} \quad \dots \quad {}^t S_\kappa \cdot I_{\kappa_\kappa}) \quad (3)$$

Chacune des classes de rugosités possédant au moins un élément, K_C est de plein rang : $\text{rang } K_C = \kappa$; sa pseudo-inverse K_C^+ est alors égale à :

$$K_C^+ = ({}^t K_C \cdot K_C)^{-1} \cdot {}^t K_C$$

Calculons l'expression de la pseudo-inverse de K_C .

$${}^t K_C \cdot K_C = \begin{pmatrix} {}^t 1_{\kappa_1} \cdot S_1 \\ {}^t 1_{\kappa_2} \cdot S_2 \\ \vdots \\ {}^t 1_{\kappa_\kappa} \cdot S_\kappa \end{pmatrix} \cdot ({}^t S_1 \cdot 1_{\kappa_1} \quad {}^t S_2 \cdot 1_{\kappa_2} \quad \dots \quad {}^t S_\kappa \cdot 1_{\kappa_\kappa})$$

En utilisant les deux premières propriétés de (2), la dernière expression se simplifie :

$${}^t K_C \cdot K_C = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \kappa_\kappa \end{pmatrix}$$

d'où :

$$K_C^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_1} {}^t 1_{\kappa_1} \cdot S_1 \\ \frac{1}{\kappa_2} {}^t 1_{\kappa_2} \cdot S_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\kappa_\kappa} {}^t 1_{\kappa_\kappa} \cdot S_\kappa \end{pmatrix} \quad (4)$$

