



HAL
open science

Capacité de transport de sédiments dans les cours d'eau en régime non-uniforme

E. Herouin

► **To cite this version:**

E. Herouin. Capacité de transport de sédiments dans les cours d'eau en régime non-uniforme. Sciences de l'environnement. Doctorat Mécanique, Université Claude Bernard Lyon I Villeurbanne, 1998. Français. NNT: . tel-02577738

HAL Id: tel-02577738

<https://hal.inrae.fr/tel-02577738>

Submitted on 14 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Capacité de transport de sédiments dans les cours d'eau en régime non-uniforme

*Thèse pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Lyon 1 - Claude Bernard
Discipline : Mécanique*

Eric Hérouin, sous la direction de Bernard Gay

<u>Jury :</u>	Richard Perkins	Président
	Georges Charnay	Rapporteur
	Walter Graf	Rapporteur
	Rémy Pochat	Rapporteur
	Patrick Bourgin	
	Bernard Gay	
	André Paquier	

Département Gestion des Milieux Aquatiques
Division Hydrologie – Hydraulique
Unité de Recherche Modélisation

Groupement de Lyon
3 bis quai Chauveau CP 220
69336 Lyon Cedex 09

Tél : 04 72 20 87 87 – Fax : 04 78 47 78 75

30 juin 1998

Université Lyon I - Claude Bernard
U.F.R de Mécanique

1998

THESE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Lyon I

Discipline : Mécanique

soutenue publiquement à Lyon le 30 juin 1998

Eric Hérouin

**CAPACITE DE TRANSPORT DE SEDIMENTS
DANS LES COURS D'EAU
EN REGIME NON-UNIFORME**

Directeur de Thèse : Bernard Gay

JURY :

Richard Perkins	Président
Georges Charnay	Rapporteur
Rémi Pochat	Rapporteur
Walter Graf	Rapporteur
Patrick Bourgin	
Bernard Gay	
André Paquier	

REMERCIEMENTS

Une thèse est certes un exercice personnel, mais pas un exercice autarcique. Je tiens donc à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je commence par remercier le jury qui m'a décerné le grade de Docteur pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, et en particulier les trois rapporteurs : Georges Charnay, Walter Graf et Rémy Pochat.

Je remercie mon Directeur de Thèse, Bernard Gay, pour les intenses moments qu'il a su me consacrer, ainsi que le président de l'université de Lyon 1 : Marc Dechavanne, qui a su mettre un terme à mes souffrances en m'imposant le 1^{er} Avril 1998 comme ultimatum de dépôt du mémoire.

Je remercie Bernard Chastan pour m'avoir accueilli au sein de la Division Hydrologie-Hydraulique à l'époque où il en conduisait le destin, André Paquier qui a suivi mon travail durant ce septennat de recherches, Pierrick Givone chef de la Division Hydrologie-Hydraulique, qui a su m'aider à traverser les moments de doutes, Philippe Ramez et Marie-Bernadette Albert, pour nos discussions fructueuses, ainsi que toute la Division Hydrologie-Hydraulique pour son soutien et sa bonne humeur.

Je remercie tous mes collègues du Laboratoire d'Hydroécologie Quantitative du Cemagref-Lyon pour m'avoir fait découvrir qu'une rivière n'était pas uniquement une succession de sections en travers caractérisées par un D_{50} .

Je remercie Pascal Hamm pour les échanges scientifiques que nous avons entretenus sur le thème du transport solide en régime uniforme.

Je remercie Nicolas Lamouroux et Nicolas Boisson pour avoir eu le courage de relire différentes versions de cette thèse au cours de son élaboration, et m'avoir conseillé durant la rédaction.

Je remercie pour leur soutien moral et logistique ma mère Anneliese, mes frères Frank et Wilfried, ma cousine Katharina, mes amis Marion et Jean-François, Isabelle, Zackaria et Coralie, Jean-Louis, Denis et François, Geneviève et Christian.



TABLES DES MATIERES

<u>NOTATIONS</u>	9
<u>INTRODUCTION</u>	13
<u>PARTIE 1 : MECANISMES DU TRANSPORT SOLIDE</u>	17
1.1 Analyse dimensionnelle	17
1.1.1 Description des mécanismes de transport solide	18
1.1.2 Variables retenues	20
1.1.3 Grandeurs adimensionnelles choisies	21
1.1.4 Régime uniforme	23
1.1.5 Régime non-uniforme	25
1.2 Modélisation du transport solide : Etat de l'art	27
1.2.1 Phase liquide : équations de Saint-Venant	27
1.2.2 Conservation de la masse des sédiments et déformation du lit	28
1.2.3 Equation dynamique : débit solide et capacité de transport	28
1.2.4 Lois de chargement	29
1.2.4.1 Formulation des lois de chargement	30
1.2.4.2 Inertie des particules en mouvement	31
1.2.4.3 Inertie de la structure du fond	31
1.2.4.4 Comparaison des différentes approches	33
1.2.5 Transport solide en crue	34
1.3 Détermination de la capacité de transport	35
1.3.1 Lois établies en régime uniforme	36
1.3.1.1 Charriage	36
1.3.1.2 Suspension	37
1.3.2 Variables hydrodynamiques conditionnant la capacité de transport	38
1.3.2.1 Vitesse débitante et profil des vitesses	38
1.3.2.2 Contrainte au fond, traînée et portance	39
1.3.2.2 Turbulence	40
1.3.2.4 Forces induites par la non-uniformité de l'écoulement	41
1.3.3 Analyse théorique des lois de capacité de transport par charriage	41
1.3.1.1 Influence de la contrainte au fond	41
1.3.1.2 Influence de la turbulence	44
1.3.4 Analyse théorique de la capacité de transport en suspension	49
Conclusion de la première partie	54
<u>PARTIE 2 : BILAN DES FORCES ET DE LEURS MOMENTS</u>	
<u>S'EXERCANT SUR UNE PARTICULE POSE SUR LE FOND</u>	57
2.1 Bilan des forces	58
2.1.1 Hypothèse de pression hydrostatique	58
2.1.2 Les différentes forces agissant sur une particule posée au fond	60
2.1.1.1 Poids et pression	60
2.1.1.2 Portance	61

2.1.1.3 <i>Trainée</i>	62
2.1.1.4 <i>Masse ajoutée</i>	62
2.2 Bilan des moments s'exerçant sur une particule posée au fond	62
2.2.1 Description du bilan des moments	63
2.2.2 En régime uniforme	64
2.2.3 En régime non-uniforme ou non-permanent	65
2.3 Estimation de l'ordre de grandeurs des forces supplémentaires	67
2.3.1 Gradient de pression	67
2.3.2 Masse ajoutée	69
2.3.3 Variation rapide du débit	71
Conclusion de la seconde partie	72
<u>PARTIE 3 : LIENS ENTRE FROTTEMENT AU FOND,</u>	
<u>DISSIPATION D'ENERGIE ET VITESSE DEBITANTE</u>	73
3.1 Etat de l'art	74
3.1.1 Profils verticaux des vitesses	74
3.1.2 Turbulence	76
3.1.3 Contrainte au fond	76
3.1.3.1 <i>En régime uniforme</i>	76
3.1.3.2 <i>En régime permanent non-uniforme</i>	77
3.1.3.3 <i>En régime transitoire</i>	77
3.2 Equations des profils similaires ou pseudo-similaires	78
3.2.1 Rappel de l'établissement des équations générales	78
3.2.2 Ecoulements externes 2D permanents le long d'une paroi	79
3.2.3 Ecoulements confinés :	80
3.2.4 Ecoulements à surface libre	80
3.2.5 Absence de profils similaires en cas de surface libre	82
3.3 Contrainte au fond au 2ème ordre près	83
3.3.1 Les deux premiers moments des équations de l'écoulement 2D à surface libre	83
3.3.2 Conditions de l'invariance l'équation de conservation de l'énergie	84
3.3.3 Expression de la contrainte au fond au 2ème ordre près	85
3.3.3.1 <i>Calcul de la contrainte au fond en régime non uniforme</i>	86
3.3.3.2 <i>Cas d'un profil logarithmique</i>	87
3.4 Calcul du profil vertical des vitesses et des contraintes au 2ème ordre près	88
3.4.1 Etablissement des équations	88
3.4.2 Résolution des équations	91
3.4.2.1 <i>Ecoulement laminaire</i>	91
3.4.2.2 <i>Ecoulement turbulent sur parois lisses</i>	94
3.4.2.3 <i>Ecoulement turbulent sur parois rugueuses</i>	97
3.4.3 Ordre de grandeur des corrections	98
3.5 Calcul de la ligne d'eau	99
3.5.1 Equations de Saint-Venant modifiées	99
3.5.2 Nécessité d'utiliser les équations modifiées	100
Conclusion de la troisième partie	102

<u>PARTIE 4 : EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES ET NOUVELLES APPROXIMATIONS</u>	105
4.1 Présentation du modèle et des configurations simulées	105
4.2 Résultats des simulations	107
4.2.1 Profils verticaux	107
4.2.1.1 Vitesse	107
4.2.1.2 Turbulence	108
4.2.1.3 Hypothèse de Bradshaw	109
4.2.2 Variation longitudinale de l'intensité turbulente	110
4.2.3 Variation longitudinale de la contrainte au fond	112
4.2.4 Distance d'influence des ruptures de pentes	116
4.2.5 Domaine de validité de l'approche asymptotique au 2ème ordre près	118
4.3 Modélisation unidimensionnelle	119
4.3.1 Modélisation l'intensité turbulente	120
4.3.2 Modélisation de la contrainte au fond	121
4.3.3 Confrontation et calage du modèle unidimensionnel avec les résultats des simulations	121
4.3.4 Autres modèles envisageables	122
Conclusion de la quatrième partie	123
<u>PARTIE 5 : INFLUENCE DE LA NON-UNIFORMITE DE L'ECOULEMENT SUR LE TRANSPORT SOLIDE</u>	125
5.1 Effets de la non-uniformité de l'écoulement sur la capacité de transport	125
5.1.1 Charriage	127
5.1.2 Suspension	129
5.1.3 Géométries d'une rivière naturelle	132
5.1.4 Variations naturelles des débits : les crues	132
5.2 Transport solide en milieu naturel, vers l'opérationalité	133
5.2.1 Evolution du lit aux échelles kilométrique et de la décennie	134
5.2.2 Stabilité d'ouvrages	135
5.2.3 Structure de substrat	135
Conclusion de la cinquième partie	136
<u>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</u>	137
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	141
<u>ANNEXES</u>	149

NOTATIONS

Signes :

=	est égal à
\approx	est peu différent de
\propto	est proportionnel à
$\langle a \rangle$	moyenne de a au sens de la turbulence

Indices :

x	longitudinal
y	transversal
z	vertical
i	parallèle au fond
k	perpendiculaire au fond
0 ou f	au fond
s	en surface
S	des particules solides
u ou U	en régime uniforme
crit	critique
inst	instantané

Variables :

C	Coefficient de Chezy
C_D	Coefficient de traînée
C_L	Coefficient de portance
$C_F = \sqrt{C_D^2 + C_L^2}$	
D	Diamètre caractéristique d'une particule
f	Vitesse longitudinale adimensionnelle
F	Primitive de f par rapport à η
$Fr = \frac{U_m}{\sqrt{g h_m}}$	Nombre de Froude
g	Accélération de la pesanteur : en France $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$
h	Tirant d'eau
h_m	Tirant d'eau moyen
$I = -\frac{\partial Z_f}{\partial x}$	Pente du fond
k	Energie cinétique turbulente
k_s	Hauteur des aspérités
K_S	Coefficient de Manning-Strickler

L	Largeur
m_{ur}	Ecart maximal relatif des fluctuations de vitesse au fond
$m = \frac{ u_{max} - \bar{u} }{\sigma_u}$	Rapport des fluctuations maximales des vitesses sur leur écart type
p	Porosité
P	Pression
P_f	Pression au fond
Q	Débit liquide
q	Débit liquide par unité de largeur
Q_s	Débit solide
q_s	Débit solide par unité de largeur
Q_s^*	Capacité de transport
q_s^*	Capacité de transport par unité de largeur
q_{sc}^*	Capacité de transport par charriage par unité de largeur
q_{ss}^*	Capacité de transport en suspension par unité de largeur
$Re = \frac{U_m h}{\nu}$	Nombre de Reynolds
$Re_p = \frac{u^* D}{\nu}$	Nombre de Reynolds particulaire
U_c	Vitesse longitudinale caractéristique
U_e	Vitesse extérieur loin de la paroi
U_f	Vitesse longitudinale près du fond
U_m	Vitesse débitante
U_s	Vitesse longitudinale à la surface
U	Composante longitudinale de la vitesse selon x
V	Composante transversale de la vitesse selon y
V_s	Vitesse d'une particule solide
V_c	Vitesse de chute d'une particule solide
W	Composante verticale de la vitesse selon z
u^*	Vitesse de frottement
$\langle u_i u_j \rangle$	Composante du tenseur de Reynolds
t	Temps
T_c	Durée de chargement
x	Abscisse longitudinale
X_c	Distance de chargement
y	Abscisse transversale
z	Cote
$Z = \frac{D}{h}$	Rugosité relative
Z_f	Cote du fond
Z_s	Cote de la surface libre

α	Angle du fond avec l'horizontale
α_i	Coefficients de Coriolis
β_i	Coefficients de Boussinesc
δ	Epaisseur de la couche limite
$\eta = \frac{z - Z_f}{h}$	Cote adimensionnelle
κ	Constante de von Karman : en général $\kappa = 0,4$
λ_0	Coefficient de frottement
λ_1	Coefficient de dissipation d'énergie
λ_u	Coefficient de frottement et de dissipation d'énergie en régime uniforme
ν	Viscosité cinématique
ν_t	Viscosité turbulente
ρ	Masse volumique de l'eau
ρ_s	Masse volumique des particules solides
τ_{ij}	Composante du tenseur des contraintes
$\tau = \tau_{xz}$	Contrainte longitudinale
τ_0	Contrainte au fond $\tau_0 = \rho u^2$
τ_{0crit}	Contrainte critique de mise en mouvement
$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$	Densité relative des particules par rapport à l'eau
Δ_A	Coefficient de masse ajoutée
$\phi = \frac{q_s}{D^{3/2}(g\Delta)^{1/2}}$	Débit solide adimensionnel
ϕ	Angle de repos des particules solides
ϕ_i	Fonction de correction du profil adimensionnel des vitesses
$\Psi = \frac{\tau_0}{g(\rho_s - \rho)D}$	Paramètre de Shields
ζ	Epaisseur caractéristique
$i_f = \frac{\sqrt{\langle u_f^2 \rangle}}{U_f}$	Intensité des fluctuations de la vitesse longitudinale au fond
$\eta_s \propto \frac{\langle w^2 \rangle_m}{V_c}$	Paramètre de sédimentation
$I_2 = \frac{\int_0^h u^2 du}{h U_m^2}$	Coefficient de quantité de mouvement

$$I_3 = \frac{\int_0^h u^3 du}{h U_m^3}$$

Moment adimensionnel d'ordre trois des vitesses

$$\sigma = \frac{\tau}{\tau_{0u}}$$

Contrainte adimensionnelle

Gradients longitudinaux :

$$\omega_0 = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\omega_4 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{\partial h}{\partial x}$$

INTRODUCTION

La détermination du seuil de mise en mouvement des matériaux du lit et des débits solides y transitant est importante pour plusieurs raisons. Ces paramètres conditionnent l'évolution morphologique des cours d'eau par l'équilibre entre les apports solides amont et la capacité de transport associée au régime hydrologique des cours d'eau. Ils déterminent également la qualité physique du substrat des cours d'eau (granulométrie et porosité), qui constitue un habitat pour les macro-invertébrés benthiques [Peckarsky 1985], un lieu de reproduction de certaines espèces de poissons [Olsson & Persson 1988]. Ils conditionnent également la stabilité des ouvrages construits sur le cours du lit : seuils, ponts, protections de berges,...

De nombreux modèles relient le seuil de mise en mouvement des matériaux constituant le lit des cours d'eau ainsi que les débits solides y transitant, aux débits liquides et aux caractéristiques du lit [Graf 1971]. Or, lorsque l'on compare les prédictions de ces modèles entre elles et avec les débits solides mesurés, on observe une énorme dispersion, couramment d'un facteur 2, pouvant aller jusqu'à un facteur 10 [Lebreton 1974]. Les sources potentielles d'erreurs sont multiples. Tout d'abord, les mesures du seuil de mise en mouvement et d'un débit solide in situ sont délicates ; il ne faut donc pas écarter l'incertitude des mesures du fait des appareils, mais également du choix de l'endroit où sont faites les mesures [Beschta 1987]. La mise en oeuvre des formules de transport solide laisse souvent une certaine marge d'appréciation à l'ingénieur, en particulier dans la détermination de la contrainte efficace, ce qui peut également introduire certains écarts. Toutes ces lois nécessitent la détermination du coefficient de frottement du lit. Or, ce dernier peut varier avec la forme du fond [Fredsoe 1981], la végétation, le débit, la concentration de particules en suspension [Vanoni et al. 1960 in Graf 1971],... Les autres sources d'erreurs sont les caractéristiques du lit ou de l'écoulement qui ne sont pas prises en compte par le modèle utilisé. Il s'agit de la non-uniformité du régime d'écoulement, de l'hétérogénéité granulométrique [Parker 1982 in Ramez 1995], de la porosité, des organismes vivants qui peuvent agir sur la cohésion du substrat [Statzner et al. 1996], de la température au voisinage de 0°C [Graf 1971],...

La plupart des lois de transport solide applicable en rivière ont été établies en canaux expérimentaux en régime uniforme. Or la morphologie d'un cours d'eau naturel est rarement uniforme [Beschta 1987]. Elle est fréquemment constituée d'alternances de zones peu profondes : les radiers et de zones plus profondes : les mouilles. Ces alternances sont généralement en phase avec le tracé en plan du cours d'eau, en particulier les méandres [Leopold & Wolman 1964]. Dans une telle morphologie, l'écoulement n'est jamais uniforme. D'autre part, les débits liquides peuvent varier rapidement lors de crues, ce qui constitue une autre source de non-uniformité de l'écoulement, le cas le plus extrême étant la rupture de barrage.

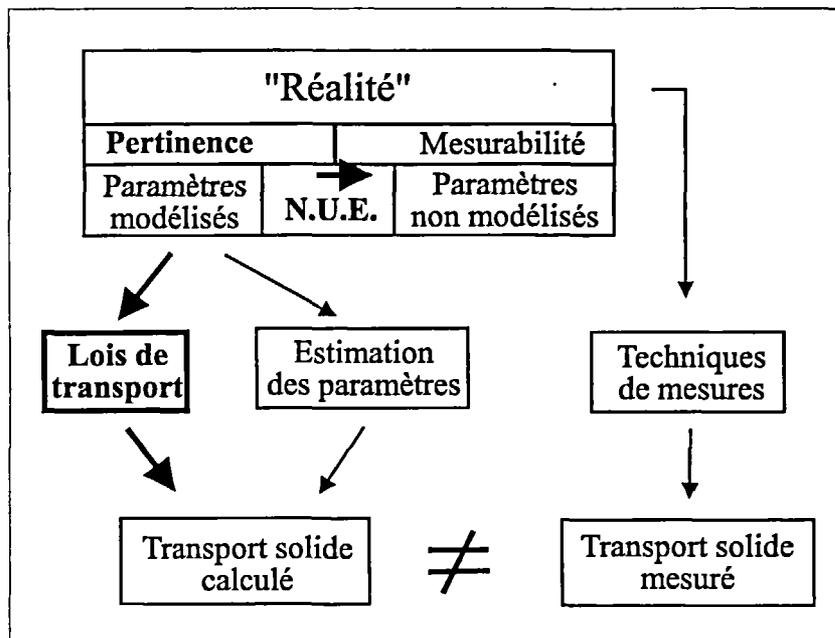
La pratique actuelle en ingénierie fait que l'on utilise des lois valables en régime uniforme dans des écoulements que l'on sait ne jamais l'être. Dans quelle mesure l'utilisation systématique de lois en dehors de leur domaine de validité est-elle fondée ? Quelles sont les erreurs commises en les utilisant ? Est-il possible d'en proposer d'autres ?

L'objet de ce mémoire est de faire une synthèse de réflexions et d'investigations théoriques sur la nécessité et la possibilité d'affiner les lois du transport solide lorsque les conditions d'écoulement ne sont plus uniformes. Nous resterons dans le domaine des écoulements faiblement chargés en matériaux solides. Le débit solide reste alors négligeable par rapport au débit liquide, ainsi la présence de particules au sein de l'écoulement ne modifie pas la rhéologie de l'eau.

Ce travail relève de la modélisation des systèmes complexes. Les difficultés inhérentes à ce type de systèmes sont la multidimensionalité des processus, la maille et l'opérationnalité des modèles, permettant leur transfert à l'ingénierie.

L'opérationnalité d'un modèle suppose qu'il satisfasse trois critères [Bonnafous 1989] : la cohérence, la pertinence, la mesurabilité, auxquels nous rajoutons un coût raisonnable de mise en oeuvre. La cohérence ne pose pas de difficultés majeures si le modèle est formalisé mathématiquement. Elle suppose simplement qu'il n'y ait pas d'erreurs de calcul ou de raisonnement mathématique. Un modèle est d'autant plus pertinent qu'il rend compte avec précision de tous les processus physiques en jeu, et qu'il s'approche le plus du réel perceptible. Le réel perceptible est la perception du réel que nous permettent les instruments de mesures disponibles à une date donnée, il est donc variable. La pertinence peut être limitée par le coût économique de la puissance de calcul. Un modèle est mesurable si les données nécessaires sont disponibles, ou peuvent être acquises avec les moyens techniques disponibles et un coût raisonnable. Le critère de pertinence entre généralement en conflit avec ceux de mesurabilité et de coût raisonnable. Souvent, plus un modèle est pertinent, plus il requiert également de puissance de calcul et d'informations sur le système étudié, informations qui deviennent rapidement inaccessibles.

Les différents enjeux de la modélisation du transport solide sont synthétisés sur la figure ci-dessous.



Par ailleurs, le transport solide peut être modélisé à différentes échelles : à l'échelle des particules solides, à l'échelle d'une surface homogène de lit (substrat et tirant d'eau variant peu), ou à l'échelle d'un tronçon homogène de cours d'eau (gabarit moyen et pente moyenne variant peu). Nous devons veiller à conserver la mesurabilité du modèle tout en augmentant sa pertinence. Ceci sera sans doute conditionné par le choix de la maille du modèle.

L'action de la non-uniformité du régime d'écoulement se manifeste à deux niveaux. Tout d'abord, lorsque les conditions d'écoulement changent, le lien entre la capacité de transport et le débit est modifié du fait de l'action des gradients sur le bilan des forces, et de l'inertie du profil des vitesses et de la turbulence. Ensuite, le débit solide s'adapte avec un certain retard, lié à l'inertie des particules solides en mouvement et de la structure du fond. Ce dernier point a fait l'objet d'un certain nombre de travaux, qui ont proposé des lois de chargement [Daubert & Lebreton 1967]. C'est sur le premier aspect que nous allons concentrer nos efforts. Les travaux sur cet aspect sont rares dans le domaine fluvial. Par contre, en hydraulique côtière et estuarienne, la bibliographie est nettement plus riche [Raudkivi 1989], ce qui est tout à fait compréhensible, car les phénomènes transitoires y sont prédominants. Ceci étant, il s'agit souvent d'écoulements périodiques en équilibre, caractérisés par une fréquence et un débit moyen nul, comme la houle. Ceci constitue une différence suffisamment significative avec les écoulements fluviaux pour que les résultats du domaine maritime ne soient pas transférables au domaine fluvial.

En régime uniforme, le coefficient de frottement qui relie la contrainte au fond à la vitesse débitante n'est fonction que de la rugosité ; l'intensité de la turbulence est également liée au coefficient de frottement ; le taux de dissipation d'énergie mécanique totale et le coefficient de frottement sont égaux. En régime non-uniforme, ces relations n'existent plus et

le coefficient de frottement, l'intensité de la turbulence et le taux de dissipation d'énergie ne dépendent plus directement les uns des autres. Or toutes les lois de transport solide établies en régime uniforme utilisent implicitement ce lien, dont il faudra nous passer.

Du fait de leurs coûts d'acquisition élevés, les mesures de transport solide en rivière sont rares. Du fait de la multidimensionnalité marquée des processus de transport solide en rivière, les mesures in situ sont très difficiles à exploiter. Nous nous limiterons donc essentiellement à l'exploitation de mesures expérimentales existantes en laboratoire, milieu totalement contrôlé.

Dans la première partie, nous allons analyser les différents modèles de transport solide existant, en leur donnant une interprétation physique faisant la part des influences de la contrainte au fond, de la turbulence et du taux de dissipation d'énergie.

Dans la seconde partie, nous analyserons la contrainte critique de mise en mouvement en faisant apparaître l'action des forces supplémentaires : gradient de pression et masse ajoutée, ainsi que l'influence de la pente du fond sur la stabilité du substrat.

Dans la troisième partie, nous allons établir à partir d'une intégration des équations de Navier-Stokes, une correction au second ordre près du coefficient de frottement par rapport aux gradients longitudinaux et temporels du tirant d'eau et de la vitesse débitante. Nous nous placerons dans le cas d'un régime non-uniforme asymptotique, c'est-à-dire loin d'un front ou d'une rupture de pente.

Dans la quatrième partie, nous utiliserons un modèle numérique bidimensionnel vertical résolvant les équations de Navier-Stokes pour étudier l'influence d'une rupture de pente sur le coefficient de frottement et l'intensité de la turbulence. Nous déterminerons la distance nécessaire pour l'établissement du régime non-uniforme asymptotique, ainsi que la pertinence du modèle établi dans la troisième partie. Nous proposerons un modèle unidimensionnel de détermination de la contrainte au fond et de l'intensité turbulente en régime non-uniforme.

Dans la cinquième partie, nous rassemblerons toutes les corrections que nous avons proposées pour analyser l'influence de ces différents termes sur le calcul du transport solide en régime non-uniforme. Nous calculerons également l'influence de la non-uniformité du régime sur le débit solide moyen sur une succession d'alternance radiers-mouilles, ainsi que sur le volume solide transporté durant une crue.

PARTIE 1 : MECANISMES DU TRANSPORT SOLIDE

Les modèles de transport solide à faible concentration sont basés sur une équation de continuité de la phase solide qui rend compte de l'interaction entre particules en mouvement et particules constituant le lit, une loi de capacité de transport qui rend compte de l'interaction entre l'écoulement et les particules solides en mouvement et une équation liant débit solide et capacité de transport. L'interaction entre l'écoulement et les particules constituant le lit est caractérisée par la contrainte au fond, qui rend compte à la fois du frottement au fond (action des particules sur l'écoulement) et du mouvement des particules (action de l'écoulement sur les particules). La turbulence près du fond et au sein de l'écoulement joue un rôle essentiel pour la suspension et influe également le charriage, nous allons lui prêter une attention particulière.

Les lois de capacité de transport existantes ont été établies en canal expérimental pour des écoulements parfaitement uniformes, ce qui est loin d'être le cas en rivière. Une prise en compte de la non-uniformité du transport solide a été développée dans le cadre des travaux sur les lois de chargement. Ces dernières prennent en compte le retard entre la capacité de transport et le débit solide, mais considèrent que le lien entre capacité de transport et écoulement est le même qu'en régime uniforme. Des travaux plus récents tentent de déterminer la modification de la capacité de transport en fonction des gradients spatiaux et temporels de l'écoulement.

Cette première partie a pour objectif de faire une analyse dimensionnelle du transport solide en régime non-uniforme, puis passer en revue les modèles classiques de transport solide et leurs fondements théoriques, pour terminer par une présentation des travaux récents sur le transport solide en régime non-uniforme. Nous établirons ensuite un modèle de loi de capacité de transport, séparant explicitement contrainte au fond, turbulence et vitesse débitante, restant ainsi pertinent en régime non-uniforme.

1.1 ANALYSE DIMENSIONNELLE

Pour cette analyse, nous nous plaçons dans le cas d'un canal de section rectangulaire large sans apports latéraux, la largeur et la pente pouvant varier. Nous allons, dans un premier temps, analyser les mécanismes responsables du transport solide et déterminer les variables nécessaires pour décrire ces mécanismes, et voir dans quelles conditions certaines d'entre elles peuvent être omises. Dans un second temps, nous allons voir comment en régime uniforme certaines variables sont liées entre elles. Pour terminer, nous ajouterons aux variables précédemment identifiées, les dérivées premières et secondes des grandeurs moyennes qui caractérisent l'écoulement (vitesse débitante, tirant d'eau et largeur), ce qui

nous permettra d'aborder le régime non-uniforme. Nous considérerons non seulement les vitesses et les forces moyennes, mais également leurs fluctuations turbulentes, en prenant notamment en compte les "bursts".

1.1.1 Description des mécanismes de transport solide

On distingue classiquement charriage et suspension [Gyr 1983] (Figure 1.1), alors qu'il y a en fait continuité entre les deux phénomènes et que la limite est forcément arbitraire. Le charriage est le mouvement des particules solides près du fond par roulement ou saltation. Ce sont surtout la traînée et la portance liées au champ moyen des vitesses qui sont responsables de leur trajectoire, la turbulence y joue un rôle secondaire. La suspension est le mouvement des particules solides au sein de l'écoulement, ce sont les fluctuations verticales des vitesses et les vitesses moyennes longitudinales qui sont surtout responsables de leur trajectoire. La suspension est toujours associée à du charriage. Lorsqu'il y a des particules d'une taille donnée en suspension, il y en a également en charriage.

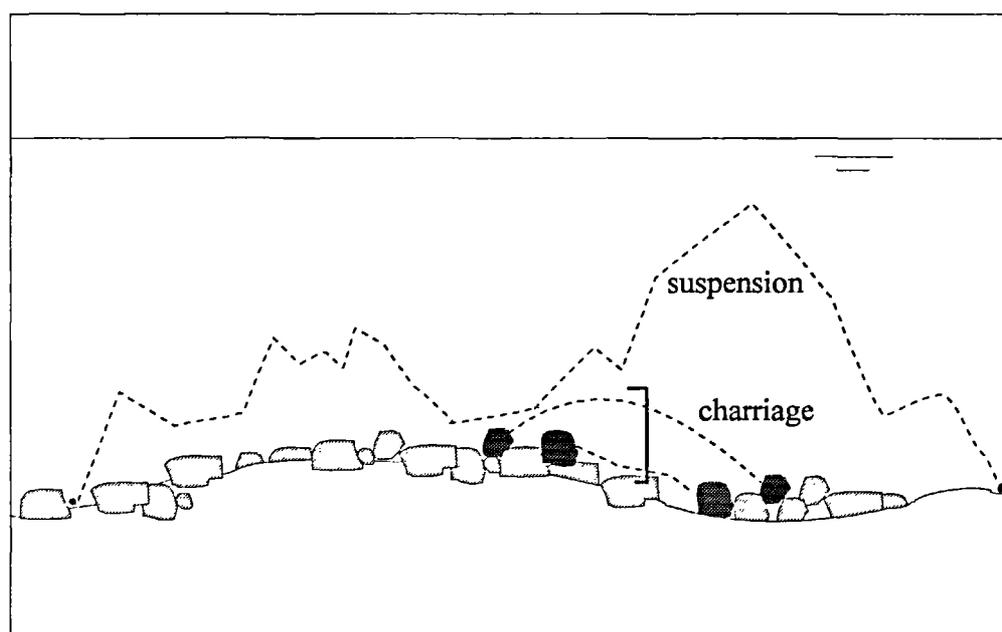


Figure 1.1 - Les différents modes de transport solide

A champ hydrodynamique identique, les particules en suspension sont plus petites que les particules se déplaçant exclusivement par charriage. Si on augmente le débit, une particule va tout d'abord rester au repos car l'écoulement n'a pas assez d'énergie pour la mettre en mouvement, c'est-à-dire celle nécessaire pour faire passer son centre de gravité au-dessus de la particule immédiatement à l'aval. Ensuite, la particule est charriée par roulement puis par sauts. Lorsque le débit liquide est suffisant pour que les fluctuations verticales des vitesses

puissent compenser la vitesse de chute des particules, ces dernières sont transportées en suspension.

Les transferts d'énergie entre écoulement moyen, turbulence et particules solides sont relativement complexes (Figure 1.2). L'énergie potentielle de l'eau est transformée en énergie cinétique du champ moyen des vitesses fluides. Une partie de l'énergie cinétique moyenne fluide est transformée en énergie cinétique turbulente sous l'effet du cisaillement de l'écoulement induit par le fond, l'autre est communiquée aux particules solides par les forces de traînée ou de portance. L'énergie cinétique turbulente sera soit dissipée en chaleur sous l'effet de la viscosité dans les plus petites structures turbulentes, soit communiquée aux particules solides. Lors de leur chute, les particules transfèrent de l'énergie aux structures turbulentes et dissipent le reste en chaleur au cours des chocs.

Tous ces transferts d'énergie ne sont pas instantanés, et induisent des inerties dans la répartition de l'énergie mécanique dans chacun des trois compartiments de l'écoulement : le champ moyen, le champ turbulent et les particules en mouvement.

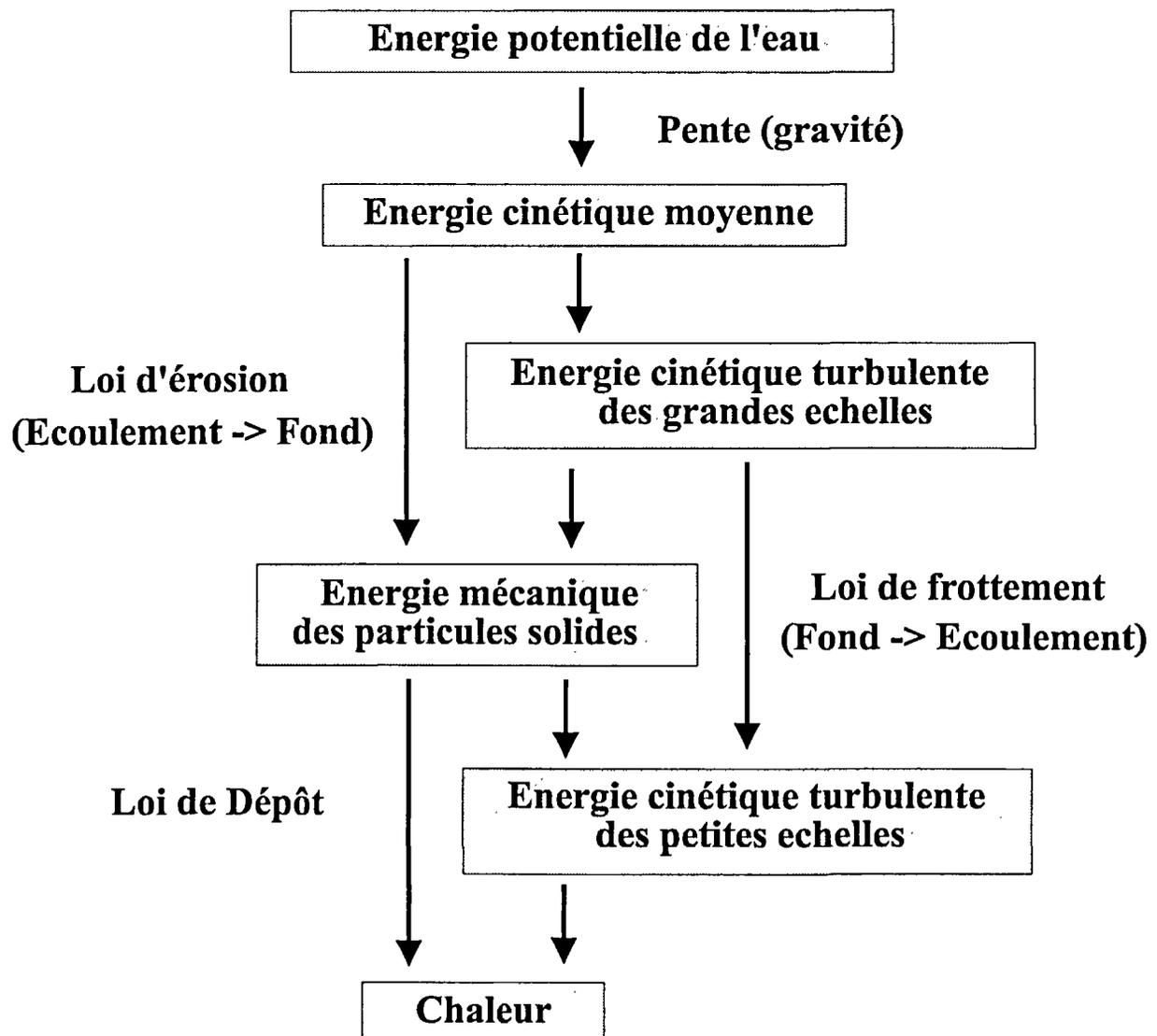


Figure 1.2 - Transferts d'énergie au sein d'un écoulement transportant des particules

1.1.2 Variables retenues

Nous avons identifié 16 variables à prendre en compte pour décrire le transport solide :

- le débit solide par unité de largeur

$$q_s$$

- la contrainte au fond

$$\tau_0$$

ou la vitesse de frottement

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

- l'énergie cinétique turbulente moyenne :

$$k_m^2 = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} k^2 dz$$

ou l'énergie cinétique turbulente verticale moyenne

$$\langle w^2 \rangle_m = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} \langle w^2 \rangle dz$$

- les fluctuations de la vitesse longitudinale près du fond

$$\langle u_f^2 \rangle$$

- le diamètre caractéristique d'une particule

$$D$$

- la masse volumique d'une particule

$$\rho_s$$

- le tirant d'eau

$$h$$

- la pente du fond

$$I$$

- la largeur du canal

$$L$$

- la pression au fond

$$P_f$$

- la vitesse débitante

$$U_m$$

- la moyenne du carré de la vitesse longitudinale sur la verticale

$$\frac{1}{h} \int_{z_f}^{z_s} U^2 dz$$

- la moyenne du cube de la vitesse longitudinale sur la verticale

$$\frac{1}{h} \int_{z_f}^{z_s} U^3 dz$$

- la masse volumique de l'eau

$$\rho$$

- la viscosité cinématique de l'eau

$$\nu$$

- l'accélération de la pesanteur

$$g$$

Nous avons choisi deux descripteurs pour la turbulence car celle-ci est anisotrope en rivière ou en canal [Graf 1971], du fait d'un rapport élevé entre la largeur et le tirant d'eau.

Nous aurions pu prendre également des descripteurs du profil vertical de la turbulence verticale et de la turbulence horizontale, mais cela aurait rendu l'analyse encore plus complexe. Dans le cas d'une turbulence isotrope, le rapport entre contrainte au fond et énergie cinétique turbulente est un indicateur de la répartition verticale de l'énergie cinétique turbulente, dans la mesure où au fond turbulence et contrainte sont liées par la loi de paroi, qui reste valable en régime non-uniforme, comme nous le verrons plus loin.

1.1.3 Grandeurs adimensionnelles choisies

Le théorème de Vaschy-Buckingham [Vaschy 1892] appliqué à la mécanique (3 grandeurs indépendantes : temps, espace et masse) nous permet de décrire notre phénomène par 13 grandeurs adimensionnelles (16 variables dimensionnelles moins 3 grandeurs indépendantes). Ces grandeurs ne sont, en aucun cas, uniques ; il existe une infinité de systèmes de grandeurs adimensionnelles convenant à notre problème.

- la densité relative des particules par rapport à l'eau :

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (1.1)$$

Ce rapport est à peu près constant pour les sédiments des cours d'eau et vaut environ 1,6.

- le débit solide adimensionnel:

$$\phi = \frac{q_s}{D^{3/2}(g\Delta)^{1/2}} \quad (1.2)$$

- le paramètre de Shields (contrainte adimensionnelle):

$$\psi = \frac{\tau_0}{g(\rho_s - \rho)D} \quad (1.3)$$

Ce paramètre permet de comparer les forces que l'écoulement exerce sur la particule solide à son poids immergé.

- l'intensité des fluctuations de la vitesse longitudinale au fond :

$$i_{if} = \frac{\sqrt{\langle u_f^2 \rangle}}{U_f} \quad (1.4)$$

- l'intensité turbulente moyenne :

$$i_t = \frac{\sqrt{2k_m}}{U_m} \quad (1.5b)$$

ou le paramètre de sédimentation :

$$\eta_s \propto \frac{\sqrt{\langle w^2 \rangle_m}}{V_c} \quad (1.5a)$$

avec $V_c(\rho, \nu, \rho_s, D)$ vitesse de chute de la particule

Le paramètre de sédimentation permet de comparer les fluctuations verticales positives des vitesses, qui fournissent de l'énergie potentielle aux particules en mouvement, et la vitesse de chute qui retransforme l'énergie potentielle des particules en énergie cinétique turbulente.

- le nombre de Reynolds particulaire :

$$Re_p = \frac{u^* D}{\nu} \quad (1.6)$$

L'influence du nombre de Reynolds particulaire devient négligeable lorsqu'il est supérieur à 400 [Vanoni 1946, in Jansen et al 1979].

- la pente du fond:

$$I = -\frac{\partial Z_f}{\partial x} = \tan \alpha \quad (1.7)$$

- la rugosité relative :

$$Z = \frac{D}{h} \quad (1.8)$$

Ce paramètre a une influence directe (pouvant aller jusqu'à 50%) pour des petites valeurs : $Z > 1/4$ [Bettess 1984].

- le coefficient de frottement:

$$\lambda_0 = \frac{u^{*2}}{U_m^2} = \frac{f}{8} = \frac{g}{C^2} = \frac{g}{K_s^2 R_H^{1/3}} \quad (1.9)$$

avec f : coef. de Darcy, C : coef. de Chezy, K_s : coef. de Strickler.

Ce coefficient dépend de la nature du fond, et donc de la taille des particules constituant le fond.

- le coefficient de quantité de mouvement :

$$I_2 = \frac{1}{h U_m^2} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz \quad (1.10)$$

Celui-ci est lié au profil de vitesse.

- le moment adimensionnel d'ordre trois des vitesses :

$$I_3 = \frac{1}{h U_m^3} \int_{Z_f}^{Z_s} U^3 dz \quad (1.11)$$

Celui-ci est lié au profil de vitesse.

- la pression adimensionnelle du fond:

$$P_{ad} = \frac{P_f}{\rho g h} \quad (1.12)$$

- le rapport largeur/tirant d'eau:

$$\frac{L}{h} \quad (1.13)$$

Si le canal n'est pas suffisamment large, les effets de parois influenceront le profil vertical des vitesses.

1.1.4 Régime uniforme

En régime uniforme, l'écoulement est en équilibre. Les énergies mécaniques sont constantes, ce qui implique que les apports d'énergie potentielle, les transferts d'énergie cinétique du champ moyen au champ turbulent et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente sont égaux. Si on écrit le bilan des forces de frottement et de gravité sur un volume de contrôle basé sur une section transversale de canal et que l'on néglige les frottements sur les parois latérales, sa projection sur l'axe de l'écoulement s'écrit :

$$\tau_0 L dx = \rho g L h dx \Leftrightarrow \tau_0 = \rho g h \quad (1.14)$$

Ceci nous fournit une relation entre les variables.

En régime uniforme, le coefficient de frottement λ_0 , noté alors λ_u , est lié à la rugosité relative Z (d'où une relation supplémentaire), c'est le cas en particulier pour la loi de Manning-Strickler, le coefficient K_s pouvant être estimé par la loi de Keulegan [1938 in Yen 1991], valable lorsque $Re_p > 70$:

$$K_s = \frac{21}{D^{1/6}} \quad \text{d'où} \quad \lambda_0 = \lambda_u \approx 2,27 \cdot 10^{-3} Z^{1/3} \quad (1.15)$$

La production et la dissipation d'énergie cinétique turbulente se compensent. Le profil des vitesses ne dépend donc que de la taille des particules constituant les rugosités du fond. En particulier les moments des vitesses sur la verticale ne dépendent que du coefficient de frottement ou de dissipation d'énergie (les deux sont égaux en régime uniforme) : $I_2(\lambda_u)$ et $I_3(\lambda_u)$. Ce qui fait deux relations supplémentaires.

Les fluctuations turbulentes sont proportionnelles à la contrainte au fond, car c'est cette dernière qui est responsable de la production d'énergie cinétique turbulente, ce qui fait deux relations supplémentaires : une pour l'intensité turbulente au fond, et l'autre pour l'intensité turbulente moyennée sur la verticale.

Si la pente du fond est faible, elle peut être négligée, ce qui fait une variable en moins.

Les lignes de courant sont parallèles entre elles et la pente du fond est faible, la pression est donc hydrostatique, ce qui constitue une relation supplémentaire.

Nous avons donc en régime uniforme une variable de moins et 7 relations entre variables. Il ne reste donc plus que 5 grandeurs adimensionnelles à prendre en compte sur les 13 identifiées au paragraphe précédent, pour caractériser le transport solide en régime uniforme.

- le débit solide adimensionnel:

$$\phi = \frac{q_s}{D^{3/2}(g\Delta)^{1/2}} \quad (1.2)$$

- le paramètre de Shields :

$$\psi = \frac{\tau_0}{g(\rho_s - \rho)D} \quad (1.3)$$

- le nombre de Reynolds particulaire négligeable lorsqu'il est supérieur à 400 :

$$Re_p = \frac{u^* D}{\nu} \quad (1.6)$$

- la rugosité relative négligeable lorsqu'elle est inférieure à 1/4 :

$$Z = \frac{D}{h} \quad (1.8)$$

- la densité relative des particules par rapport à l'eau valant environ 1,6 en rivière :

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (1.1)$$

Les lois de transport solide en régime uniforme, sur fond plat et homogène, exprimeront donc le débit solide adimensionnel en fonction du paramètre de Shields, auquel peuvent éventuellement s'ajouter le Reynolds particulaire et la densité relative. La capacité de transport en régime uniforme s'exprime alors généralement en fonction de la contrainte au fond (elle-même fonction de la hauteur d'eau, de la vitesse débitante et du diamètre des particules) et du diamètre des particules.

1.1.5 Régime non-uniforme

Nous allons caractériser la non-uniformité et la non-permanence du régime d'écoulement par les gradients longitudinaux et temporels de la vitesse débitante (U_m), du tirant d'eau (h), de la pression au fond (P_f) et de la géométrie (Z_f et L), ce qui fait 10 grandeurs adimensionnelles.

Nous considérerons que les variations temporelles de la géométrie (largeur et cote du fond) sont suffisamment lentes pour ne pas induire une non-uniformité de l'écoulement. La pente figurait déjà dans la liste des variables déterminant les processus de transport solide. Nous ne rajoutons plus que 7 grandeurs adimensionnelles liées aux gradients.

Nous introduirons également deux dérivées secondes, celle de la cote du fond par rapport à l'abscisse longitudinale et celle de la cote de la surface libre par rapport au temps. En effet, une rupture brutale de pente va avoir un effet important sur l'écoulement près du fond et donc sur la contrainte. Par ailleurs une variation rapide de la surface libre sera liée à des accélérations importantes pouvant avoir un impact sur le bilan des forces s'exerçant sur une particule solide. Nous n'envisagerons pas ici le cas du ressaut.

Ces nombres adimensionnels supplémentaires sont donc au nombre de 9 :

1 - le gradient du tirant d'eau ou de la cote de la surface libre :

$$\omega_0 = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (1.16)$$

2 - une accélération adimensionnelle moyenne :

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad (1.17)$$

3 - un gradient spatial adimensionnel de la vitesse :

$$\omega_2 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} \quad (1.18)$$

4 - un gradient temporel adimensionnel de la hauteur d'eau :

$$\omega_3 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.19)$$

5 - le rapport des variations relatives de L et h

$$\omega_4 = \frac{1}{\lambda_u} \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] \quad (1.20)$$

6 - un gradient de pression au fond adimensionnel :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P_f}{\partial x} \quad (1.21)$$

7 - un gradient temporel adimensionnel de la pression au fond :

$$\frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{\rho g U_m} \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad (1.22)$$

8 - une dérivée seconde adimensionnelle de la cote du fond :

$$h \frac{\partial^2 Z_f}{\partial x^2} \quad (1.23)$$

9 - une dérivée seconde adimensionnelle de la cote de la surface libre :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 Z_s}{\partial t^2} \quad (1.24)$$

L'équation de conservation de la masse (présentée ci-dessous) nous fournit une relation supplémentaire, ce qui ramène à 8 le nombre de grandeurs adimensionnelles indépendantes :

$$L \frac{\partial h}{\partial t} + Lh \frac{\partial U_m}{\partial x} + L U_m \frac{\partial h}{\partial x} + h U_m \frac{\partial L}{\partial x} = L \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial L h U_m}{\partial x} = 0 \quad (1.25a)$$

$$(1.25a) \Leftrightarrow \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0 \quad (1.25b)$$

Or nous voudrions ne définir le phénomène que par les 6 grandeurs adimensionnelles basées sur les dérivées longitudinales et temporelles de variables macroscopiques caractérisant l'écoulement : $\partial h / \partial x$, $\partial h / \partial t$, $\partial L / \partial x$ (ou $\partial U_m / \partial x$ ce dernier étant lié aux autres gradients par l'équation de conservation de la masse) et $\partial U_m / \partial t$, et les deux dérivées secondes $\partial^2 Z_f / \partial x^2$, $\partial^2 Z_s / \partial t^2$. Nous voudrions en particulier ne pas faire intervenir les gradients de la pression au fond. Pour cela, il faut se donner une loi de répartition de la pression (répartition hydrostatique des pressions, ou répartition linéaire sur la verticale des vitesses verticales), ce qui nous donne deux relations et permet d'éliminer les deux variables adimensionnelles liées aux gradients de pression au fond.

1.2 MODELISATION DU TRANSPORT SOLIDE : ETAT DE L'ART

Nous analysons dans ce paragraphe les modèles existants de transport solide à faible débit solide par rapport au débit liquide ou à faible concentration de particules en mouvement au sein de l'écoulement. Les modèles sont basés sur l'écoulement de deux phases en interaction, et non une phase de mélange, comme c'est le cas pour la modélisation des laves torrentielles [Meunier 1991].

1.2.1 Phase liquide : équations de Saint-Venant

Les restrictions faites précédemment permettent de faire l'hypothèse que la rhéologie de l'écoulement liquide n'est pas modifiée par la présence de particules en mouvement. L'eau est considérée comme un fluide newtonien.

Par ailleurs, les vitesses en rivières sont inférieures à 10 m/s, donc négligeables par rapport à la célérité des ondes acoustiques dans l'eau. L'eau pourra donc être considérée comme incompressible. On pourra donc rendre compte des écoulements en rivières par les équations de Navier-Stokes.

Les écoulements en rivière sont presque toujours turbulents ($Re = U_m h / \nu > 1000$ et couramment $10^5 < Re < 10^7$).

L'écoulement de paroi est souvent rugueux ($Rep = u^* k_s / \nu > 70$), mais pas toujours.

La pression est supposée hydrostatique, ce qui implique, comme nous le verrons au paragraphe 2.1.1, une pente de la surface libre inférieure à 10%, une dérivée seconde du tirant d'eau par rapport au temps faible devant l'accélération de la pesanteur et une faible courbure des lignes de courant.

Le profil vertical des vitesses, la turbulence et la loi de frottement sont supposés être ceux du régime uniforme.

On utilise couramment, pour ne pas dire exclusivement, les équations de Saint-Venant [1871], qui sont issues d'une intégration des équations de Navier-Stokes, sur le tirant d'eau pour la version bidimensionnelle et sur la section en travers pour la version unidimensionnelle.

Nous présentons ci-dessous les équations unidimensionnelles de Saint-Venant [Graf & Altinakar 1996] :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[I_2 \frac{Q^2}{S} \right] + gS \frac{\partial Z_s}{\partial x} = -P_m \frac{\tau_0}{\rho} - k_l \frac{Q}{S} q_l \quad (1.33)$$

avec q_l : débit latéral, $k_l = 0$ ou 1 pour un débit latéral respectivement entrant ou sortant.

Les équations de Saint-Venant sont une bonne approximation de la réalité physique de l'écoulement liquide au voisinage du régime uniforme, dans la mesure où la contrainte au fond est liée à la vitesse débitante par le profil vertical en équilibre. Cette approximation devra sans doute être remise en cause dans le cadre de notre étude.

1.2.2 Conservation de la masse des sédiments et déformation du lit

La conservation de la masse de la phase solide est traduite par l'équation suivante :

$$(1-p) \frac{\partial S_s}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = Q_{sl} \quad (1.34)$$

avec p : porosité, S_s : aire de la phase solide et Q_{sl} : débit solide

Le système d'équations (1.32) (1.33) et (1.34) est connu sous le nom des équations de Saint-Venant - Exner [1925 in Graf & Altinakar 1996]. La plupart des modèles numériques de transport solide sont basés sur ces équations [Goodwin 1986, Ko 1990, Valiani 1992] avec éventuellement plusieurs équations de transport régissant les différentes classes granulométriques [Rahuel et al. 1989].

L'érosion et le dépôt doivent être répartis en travers de la section, ce qui est généralement fait au prorata d'une fonction de la contrainte au fond [Ko 1990]. De plus il faudrait en toute rigueur calculer la contrainte en tout point de la section, et tenir compte de la pente transversale du lit, ce que peu de modèles font.

La déformation de la section est délicate, du fait de l'hystérésis entre le dépôt et l'érosion. En particulier, il n'y a pas de dépôts en haut des berges contrairement aux érosions. Beaucoup de modèles ne prennent pas en compte cette hystérésis.

1.2.3 Equation dynamique : débit solide et capacité de transport

Pour chaque type de sédiment, on doit distinguer le débit solide observé en volume par unité de largeur noté q_s , et la capacité de transport de l'écoulement en volume par unité de largeur notée q_s^* , appelé également débit solide à saturation. Le débit solide n'est pas nécessairement égal à la capacité de transport, en particulier s'il n'y a rien à transporter.

Le débit solide est égal à la capacité de transport, lorsque le taux d'érosion est égal au taux de dépôt (les taux sont ici des débits par unité de temps) :

$$T_e(D, \tau_0) = T_d(D, \tau_0, q_s) \Leftrightarrow q_s = q_s^*(D, \tau_0) \quad (1.35)$$

Il existe très peu de mesures concernant ces taux d'érosion et de dépôts, ce sont les capacités de transport qui ont fait l'objet de la plupart des travaux.

L'égalité entre débit solide et capacité de transport est réalisée à deux conditions :

- le matériau est disponible au fond,
- le régime uniforme est établi pour l'écoulement et le transport solide.

Si le débit solide n'est pas égal à la capacité de transport, il tend vers cette dernière. Si le régime n'est pas uniforme alors le débit solide tend vers la capacité de transport avec une certaine inertie.

Si le matériau transporté n'est pas présent au fond alors le débit solide est inférieur à la capacité de transport. C'est le cas par exemple de l'auto-suspension ou "wash load", car il s'agit de particules très fines ne constituant pas le lit, car la capacité de transport de ces particules est très grande et jamais atteinte, les apports amont étant insuffisants.

L'équation dynamique du sédiment peut s'écrire :

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial q_s}{\partial x} + K_s \frac{\partial^2 q_s}{\partial x^2} = [T_d - T_e] = \frac{V_s}{X_c} [q_s^* - q_s] \quad (1.36)$$

avec V_s : vitesse moyenne des sédiments, X_c : distance de chargement,

K_s : coefficient de dispersion lié à l'hétérogénéité des vitesses des particules solides

L'équation (1.36) est une équation de convection dispersion du débit solide avec un second membre faisant intervenir le taux de dépôt et le taux d'érosion. On voit par l'équation (1.36) qu'il y a équivalence entre une approche par la capacité de transport et une approche par les taux d'érosion indépendants du débit solide, et de dépôts variant linéairement avec le débit solide. Ceci permet en général de bien rendre compte des mécanismes de transport solide à faible concentration. Nous allons détailler ce point dans le paragraphe 1.2.4 sur les lois de chargement.

L'équation (1.36) est rarement utilisée, on considère généralement que le débit solide est égal à la capacité de transport.

Nous consacrerons la section 1.3 à cette question. Nous y examinerons en détail les bases théoriques des lois empiriques donnant la capacité de transport, afin de poser les bases des modifications à leur apporter en régime non-uniforme.

1.2.4 Lois de chargement

On entend par lois de chargement, les lois qui traduisent le retard spatial ou temporel du débit solide par rapport à la capacité de transport. Ceci pouvant résulter d'une modification des conditions d'écoulement, ou d'un apport solide inférieur à la capacité de transport (blocage du transit solide par un barrage). Pour que cette question ait un sens il faut évidemment qu'il y ait suffisamment de matériau mobilisable à l'aval par l'écoulement.

C'est ce phénomène qui a le plus été étudié dans le cadre du transport solide en régime non-uniforme. Nous en faisons ici un état de l'art, en y apportant quelques critiques.

Ce retard peut s'expliquer :

- par l'inertie des particules solides qui ne réagissent pas immédiatement aux modifications de la capacité de transport [Daubert et Lebreton 1967],
- par le temps ou la distance nécessaire à l'adaptation de la structure du fond aux nouvelles conditions d'écoulement [Wijbenga & Klaassen 1983, Jain 1992],
- mais également par le temps ou la distance nécessaire à l'établissement du nouveau profil des vitesses et de la nouvelle structure turbulente, et donc de l'inertie de la capacité de transport elle-même.

1.2.4.1 Formulation des lois de chargement

Tous les auteurs [Daubert et Lebreton 1967, Bell et Sutherland 1983, Rahuel 1988, Jain 1992, Balayn 1996] modélisent le retard spatial par des lois de type exponentiel, le retard temporel modélisé par le même type de loi est plus rarement pris en compte dans les modèles.

L'équation générale s'écrit :

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial q_s}{\partial x} + K_s \frac{\partial^2 q_s}{\partial x^2} = [T_d - T_e] = \frac{V_s}{X_c} [q_s^* - q_s] \quad (1.36)$$

Pour prendre en compte le retard spatial :

- Daubert & Lebreton [1967], Jain [1992] et Phillips & Sutherland [1985] proposent :

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} = \frac{q_s^* - q_s}{X_c} \quad (1.37)$$

Cette équation est une simplification de l'équation (1.36).

- Bell et Sutherland [1983] propose :

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} = \frac{q_s^* - q_s}{X_c} + \frac{q_s}{q_s^*} \frac{\partial q_s^*}{\partial x} \quad (1.38)$$

L'équation (1.38) proposée par Bell & Sutherland [1983] a l'inconvénient de donner $q_s = q_s^*$ pour tout $x > X^*$ si on a $q_s(X^*) = q_s^*$, car alors :

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} = \frac{\partial q_s^*}{\partial x}$$

Cela veut dire qu'une fois que le débit solide a atteint la capacité de transport, il y reste, peu importe l'évolution de l'écoulement à l'aval, c'est un peu une loi de chargement instantané. Par ailleurs, les valeurs de X_c , obtenues par régression sur des données expérimentales, sont fonction du temps, ce qui conforte le fait que cette formulation est mal adaptée. L'ordre de grandeur du retard spatial (quelques dizaines de centimètres) est le même

qu'en utilisant la formule de Daubert & Lebreton [1967]. De plus, il semble que les auteurs se soient finalement ralliés à l'équation (1.35), comme en témoigne leur publication de 1985. En conséquence nous ne retiendrons que cette expression.

Pour prendre en compte le retard temporel, Jain [1992] propose:

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} = \frac{q_s^* - q_s}{T_c} \quad (1.39)$$

avec $T_c = X_c/V_s$: durée de chargement

1.2.4.2 Inertie des particules en mouvement

Phillips & Sutherland [1985] expriment X_c linéairement avec libre parcours moyen d'une particule solide X_s , lui-même fonction linéaire de $(\tau_0 - \tau_{0c})$:

$$X_c = C_1 X_s = C_2 [\tau_0 - \tau_{0c}] = \alpha_X D (\psi - \psi_c) \quad \text{avec } C_1, C_2 \text{ Cste et } \alpha_X > 4000 \quad (1.40)$$

Les auteurs font remarquer que les distances ainsi obtenues sont très courtes (quelques dizaines de centimètres). Armanini & Di Silvio [1988] considèrent que le retard spatial est inférieur à la taille des ondulations du fond, et comme ils résolvent les équations sur un pas d'espace supérieur à la taille des ondulations du fond, ils considèrent que le débit solide est toujours égal à la capacité de transport, ou tout du moins le débit solide moyenné sur le pas d'espace de résolution.

Ceci semble raisonnable dans le cas du charriage, mais n'est sans doute plus vrai dans le cas de transport en suspension, pour lequel le libre parcours moyen des particules est nettement plus élevé.

1.2.4.3 Inertie de la structure du fond

La structure du fond peut s'appréhender à deux échelles, la forme du fond, et en particulier les dunes, et l'imbrication des particules constituant le fond.

Les caractéristiques des dunes (hauteur, longueur d'ondes) dépendent des conditions d'écoulement [Wijbenga & Klaassen 1983], et leur formation est intimement liée aux processus de transport solide. Par ailleurs les dunes sont responsables d'une partie de la résistance à l'écoulement [Fredsoe 1981]. De nombreux auteurs ont montré que la hauteur des dunes s'adaptait avec une certaine inertie aux modifications des conditions d'écoulement [Gee 1973, Allen 1978, Fredsoe 1979 et 1981, Wijbenga & Klaassen 1983]. Ils proposent des lois de relaxations exponentielles pour la hauteur des dunes. Cette inertie est certainement liée à l'inertie du débit solide.

L'agencement des particules au fond les unes par rapport aux autres dépend également des conditions d'écoulement. Jain [1992] pense que l'inertie du débit solide est liée à l'agencement des particules posées au fond. Il rend compte de ce processus en considérant

deux catégories de particules (Figure 1.3) : les particules exposées à l'écoulement et les particules non-exposées avec différentes probabilités de mise en mouvement. La proportion de particules exposées ne s'adaptent que progressivement à la modification des conditions d'écoulement. C'est la différence de ces deux probabilités et la distance ou le temps qu'il faut pour arriver aux nouvelles proportions à l'équilibre des deux catégories de particules, qui font que le retard spatial n'est pas relié à la longueur moyenne d'un saut.

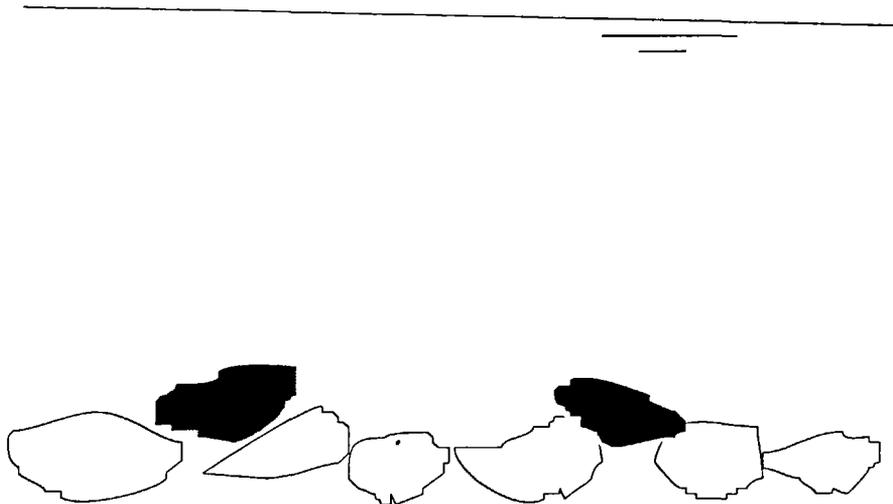


Figure 1.3 - Particules exposées en noir et particules non-exposées en blanc [Jain 1992]

Jain propose les expressions suivantes pour les retards spatial et temporel:

$$X_c = -\frac{X_s}{\ln(s)} \quad (1.41)$$

Avec X_s : longueur moyenne d'un saut

$$T_c = -\frac{T_B}{\ln(s)} \quad \text{avec} \quad T_B = \frac{6h}{U_m} \quad (1.42)$$

Avec T_B : temps entre deux bursts

$$s = (1+\gamma)(1-\varepsilon)(r-p)$$

r : probabilité de mouvement d'une particule exposée,

p : probabilité de mouvement d'une particule non-exposée,

γ : probabilité moyenne de particules non-exposées déstabilisées par un choc (elles passent dans la couche exposée),

ε : probabilité de particules en mouvement regagnant une position stable (dans la couche non-exposée).

Pour le calcul de la vitesse des particules solides, Jain a utilisé la formule (1.43) de Engelund & Fredsoe [1976, in Phillips & Sutherland 1989] :

$$V_s = 8.5u^* \sqrt{1 - \sqrt{\frac{u_{crit}}{u^*}}} \quad (1.43)$$

A partir de ses propres mesures et des mesures de Bagnold [1936 in Jain 1992], Jain [1992] propose :

$$X_c = \frac{X_s}{1.82[\Psi - \Psi_{crit}]} \quad (1.44a) \quad \text{avec} \quad X_s = V_s T_B = 5.1h \frac{u^*}{U_m} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\Psi_{crit}}{\Psi}}} \quad (1.44b)$$

$$\text{Par ailleurs (1.41) et (1.42) impliquent : } \frac{T_c}{T_B} = \frac{X_c}{X_s} \quad (1.45)$$

$$T_c = \frac{T_B}{1.82[\Psi - \Psi_{crit}]} = \frac{h}{0.30 U_m [\Psi - \Psi_{crit}]} \quad (1.46)$$

1.2.4.4 Comparaison des différentes approches

Les approches de Jain et des autres auteurs cités sont a priori contradictoires, chacun considérant que son modèle s'ajuste bien aux données.

La seule convergence entre les différents auteurs est l'ordre de grandeur du libre parcours moyen d'une particule, qui est de l'ordre de quelques dizaines de centimètres, et que ce dernier augmente quand la contrainte au fond augmente, ce qui est la moindre des choses.

Les données de Jain [1992] sont au nombre de 4, ce qui limite la portée de ces conclusions, alors que les données de Phillips & Sutherland [1985] sont nombreuses mais très dispersées, ce qui limite également la portée de leurs conclusions.

Réexaminons les arguments théoriques des différents auteurs.

Pour Phillips & Sutherland [1985], il y a un lien entre libre parcours moyen et retard spatial, donc plus la contrainte est importante, plus il faudra de temps ou de distance pour qu'une particule donnée retouche le fond, et par conséquent le retard augmente quand la contrainte au fond augmente.

Alors que pour Jain [1992], c'est le contraire, puisque c'est l'inertie de la structure du fond qui est responsable du retard spatial, plus la contrainte est forte, plus le nombre de particules mis en mouvement est important, et plus la structure du fond s'adapte vite, d'où un retard qui diminue quand la contrainte au fond augmente.

Si l'on considère que le retard est proportionnel au nombre de particule mis en mouvement par unité de temps et de surface, et au libre parcours moyen, on devrait alors faire la somme de ces deux termes. Ce qui fait que l'inertie au chargement va augmenter pour les faibles valeurs du paramètre de Shields par l'effet de structure du substrat, et pour les fortes valeurs du paramètre de Shields par l'effet de la suspension. Cette approche consensuelle demanderait à être validée.

La difficulté majeure de mise en oeuvre des lois de chargement réside dans la détermination de la distance ou du temps de chargement. Ces derniers pourront être des paramètres de calage du modèle au même titre que le coefficient de frottement ou le diamètre représentatif des particules solides [Balayn 1996].

1.2.5 Transport solide en crue

Quelques travaux ont tenté de mettre en évidence l'impact de la nature transitoire de l'écoulement sur la dynamique des sédiments. Des expériences en laboratoire [Graf & Suzka 1985, Suzka & Graf 1987] comparent le volume solide transporté lors du passage d'une onde de crue (Vol_s) avec la prédiction faite par un calcul en régime uniforme (Vol_{s0}), la formule de transport solide ayant été calée sur le canal expérimental en régime uniforme.

Un lien est établi entre l'écart des volumes transportés et la forme de la crue. Cette dernière est représentée par le rapport entre la variation de tirant d'eau maximum (Δh) et le temps de montée (ΔT_R), le temps de descente (ΔT_D) et le temps total de la crue (ΔT). Les auteurs utilisent en particulier le paramètre P, qui n'est autre que la version globale du nombre adimensionnel proposé en (1.19) :

$$P = \frac{1}{u^*} \frac{\Delta h}{\Delta T} \quad (1.47)$$

Suzka propose la relation suivante, obtenue par régression sur les données recueillies en canal expérimental :

$$\frac{Vol_s - Vol_{s0}}{Vol_{s0}} = 115 \left[\frac{1}{u^*} \frac{\Delta h}{\Delta T} \right]^{1/2} \left[\frac{D_{50} I}{\Delta h} \right]^{1/2} - 0,3 \quad (1.48)$$

Les résultats sont ensuite appliqués aux crues rapides. L'écart estimé lors d'une vidange de retenue sur le Rhône est de 25%.

Des mesures antérieures [Griffiths & Sutherland 1977] ont été effectuées sur le même type d'écoulement. Les auteurs arrivent à la conclusion que les lois du transport solides en régime uniforme donnent des résultats satisfaisants. Comme le fait remarquer Graf à juste titre, les ondes de crues étudiées par Griffiths correspondent à des facteurs P compris entre 0,0003 et 0,002 ce qui donne effectivement un écart faible sur le volume transporté si l'on se ramène à la relation déduite des expériences de Graf.

Par contre, le fait que la relation de Suzka fasse intervenir uniquement ΔT la durée de la crue est curieux, car les gradients ne jouent plus aucun rôle. Ceci pose problème pour une formule qui veut prendre en compte la nature non-uniforme du régime hydraulique.

Par ailleurs, la façon de calculer le débit solide équivalent en régime uniforme diffère d'un auteur à l'autre. En effet, le débit solide est fonction en régime uniforme du débit et de la hauteur d'eau, ces grandeurs étant liées par le régime uniforme :

$$q_s = f(\tau_0) \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \rho g \frac{q^2}{K_s^2 h^{7/3}} \quad \text{et} \quad q^2 = K_s^2 I h^{10/3} \quad (1.49)$$

On peut calculer indifféremment le débit solide à partir du débit liquide ou de la hauteur d'eau :

$$q_s = f(\tau_0) \quad \text{avec} \quad \tau_{0h} = \rho g I h \quad \text{ou} \quad \tau_{0q} = \rho g \frac{q^{3/5} I^{7/10}}{K_s^{3/5}} \quad (1.50)$$

En régime non-uniforme ce n'est plus le cas, et l'on trouvera des valeurs différentes selon que l'on calcule le débit solide à partir de la hauteur d'eau ou du débit.

Graf le calcule à partir de la hauteur d'eau (τ_{0h}), Griffiths en faisant la moyenne arithmétique entre la valeur obtenue à partir du débit et celle obtenue à partir de la hauteur d'eau ($(\tau_{0h} + \tau_{0q})/2$).

Il serait plus naturel de recalculer une contrainte au fond à partir du débit et de la hauteur d'eau, en utilisant l'expression de la loi de frottement sans faire intervenir la pente :

$$\tau_0 = \rho g \frac{q^2}{K_s^2 h^{7/3}} \quad (1.51)$$

1.3 DETERMINATION DE LA CAPACITE DE TRANSPORT

L'objectif de ce paragraphe est d'analyser la manière dont la capacité de transport dépend des caractéristiques de l'écoulement. Ce paragraphe va au-delà d'un état de l'art, puisqu'il vise à donner une interprétation théorique à des lois souvent empiriques, pour ensuite pouvoir les modifier en régime non-uniforme.

Dans un premier temps, nous allons présenter quelques lois donnant la capacité de transport par charriage ou en suspension, en analysant les variables qu'elles font intervenir. Il existe plusieurs dizaines de lois de capacité de transport. Il ne s'agit en aucun cas pour nous de donner une liste exhaustive.

Dans un second temps, nous décrirons d'après les travaux existants, la nature de l'écoulement en régime non-uniforme, et la manière dont les variables conditionnant la capacité de transport sont modifiés en régime non-uniforme

Dans un troisième temps, nous proposerons un cadre théorique d'analyse de la capacité de transport par charriage ou en suspension, permettant, à travers les variables identifiées au paragraphe précédent, une prise en compte de la non-uniformité de l'écoulement.

1.3.1 Lois établies en régime uniforme

1.3.1.1 Charriage

Nous donnons ici trois formules donnant la capacité de transport par charriage :

- Meyer-Peter-Müller [1948]

$$\phi^* = 8[\psi - 0,047]^{3/2} \quad (1.52) \quad \Leftrightarrow \quad q_{sc}^* = \frac{8,1 \cdot 10^{-5}}{\Delta} [\tau_0 - 461\Delta D]^{3/2} \quad (1.53)$$

$$\psi = \alpha A \quad \text{avec} \quad A = \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{R_f}{D} J \quad (1.54) \quad \text{avec} \quad R_f = \frac{S_f}{P_f} \quad (1.55) \quad \text{et} \quad \alpha = \left[\frac{K_s}{K_r} \right]^{3/2} \quad (1.56)$$

J : pente de la ligne d'énergie

K_s : Coef. de Strickler total

K_r : Coef. de Strickler de peau

Le facteur correctif α traduit le fait que les berges et la résistance de forme ne contribuent pas au transport par charriage.

- Nielsen [1992 in Hogg 1996]

$$\phi^* = 12\sqrt{\psi} [\psi - 0,047] \quad (1.57) \quad \Leftrightarrow \quad q_{sc}^* = \frac{12,1 \cdot 10^{-5}}{\Delta} \sqrt{\tau_0} [\tau_0 - 461\Delta D] \quad (1.58)$$

Cette formule est une variante de la formule de Meyer-Peter-Müller. Elle semble s'étendre plus facilement pour les valeurs élevées du paramètre de Shields ($>0,25$) [Hogg 1996] lorsqu'il y a charriage et suspension. La formule de Nielsen donne alors le débit solide par charriage et non le débit solide total.

- Einstein [1950]

$$\frac{A^* \phi^*}{1 + A^* \phi^*} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B^*/\psi - 1/\eta_0}^{+B^*/\psi - 1/\eta_0} e^{-u^2} du \quad \text{avec} \quad A^* = 43,5; \quad B^* = 1/7 \quad \text{et} \quad \eta_0 = 2 \quad (1.59)$$

$$\text{et} \quad \psi = \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{R_g}{D} J \quad (1.60) \quad R_g : \text{rayon hydraulique associé au grain}$$

Le rayon hydraulique associé au grain est une autre manière de ne prendre en compte que la partie de la contrainte au fond s'exerçant effectivement sur les particules du fond.

Cette formule est basée sur une théorie probabiliste des trajectoires de particules que nous ne détaillerons pas ici.

Commentaires

En régime uniforme, les lois ne font intervenir qu'une variable hydrodynamique : la contrainte au fond. Or, la turbulence de parois, en l'occurrence les bursts, joue également un rôle déterminant dans le processus de mise en mouvement. Cependant, l'intensité de la turbulence est liée à la contrainte au fond en régime uniforme.

Les lois de capacité de transport par charriage ne font pas intervenir la vitesse débitante car elle ne joue pas directement de rôle du fait du confinement du charriage près du fond.

1.3.1.2 Suspension

Nous donnons ici deux formules de capacité de transport en suspension.

- Engelund-Hansen [1967]

$$\phi^* = 0,24 B A^{3/2} \quad \text{avec} \quad B = \frac{V_m^2}{g\Delta D} = \frac{\rho V_m^2}{\tau_{0\text{total}}} A \quad (1.61)$$

$$q_{ss}^* = 0,025 K_S^2 R_H^{1/3} \sqrt{\Delta} D^{3/2} A^{5/2} \quad (1.62)$$

Cette formule donne le débit total par charriage et suspension. Elle n'est valable que lorsqu'il y a des particules en suspension, c'est-à-dire lorsque le paramètre de Shields est supérieur à 0,25.

- Einstein [1950 in Graf 1971]

Elle est basée sur une répartition de la concentration selon la loi de Schmidt-Rouse [1938] :

$$C(z) = C_a \left[\frac{h-z}{z} \frac{a}{h-a} \right]^{\frac{\sigma_s}{\kappa\eta_s}} \quad (1.63) \quad \text{avec} \quad \eta_s = \frac{u^*}{V_C} \quad \text{et} \quad \sigma_s : \text{nombre de Schmidt}$$

$$q_{ss}^* = \int_a^h C_a \left[\frac{h-z}{z} \frac{a}{h-a} \right]^{\frac{\sigma_s}{\kappa\eta_s}} 5,75 u^* \log(30,2z) dz \quad (1.64)$$

Elle s'écrit :

$$q_{ss}^* = \frac{11,6 C_a u^* a}{\rho_s} [2,303 \log(30,2h) I_1 + I_2] \quad (1.65)$$

$$I_1 = 0,216 \frac{A_E \frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s} - 1}{[1 - A_E] \frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s}} \int_{A_E}^1 \left[\frac{1 - \mu}{\mu} \right]^{\frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s}} d\mu \quad (1.66)$$

$$I_2 = 0,216 \frac{A_E \frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s} - 1}{[1 - A_E] \frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s}} \int_{A_E}^1 \left[\frac{1 - \mu}{\mu} \right]^{\frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s}} \ln \mu d\mu \quad (1.67)$$

La concentration au fond C_a est prise à une hauteur $a = 2D$ du fond.

Commentaires

Comme dans le cas du charriage, la turbulence intervient par le biais de la contrainte au fond, mais également directement en compensant la vitesse de chute. La vitesse moyenne intervient ici directement car elle conditionne la vitesse longitudinale des particules en suspension.

1.3.2 Variables hydrodynamiques conditionnant la capacité de transport

Nous avons vu qu'en ce qui concerne le charriage, la formule générale dépend de la contrainte moyenne au fond, de la contrainte critique moyenne et de l'intensité de la turbulence au fond. L'intensité de la turbulence au fond est liée aux bouffées turbulentes de paroi ou bursts [Yalin 1992]. En ce qui concerne la suspension, il faut ajouter l'intensité turbulente moyenne sur la colonne d'eau et la vitesse débitante. C'est donc la modification des liens entre ces paramètres qu'il faudra étudier en régime non-uniforme.

1.3.2.1 Vitesse débitante et profil des vitesses

En régime uniforme à surface libre, le profil des vitesses peut être approché par une loi logarithmique, même si ce n'est vrai en toute rigueur au-dessus de 5 fois la hauteur des rugosités et sur les 20% inférieurs de la colonne d'eau. En régime non-uniforme, le profil des vitesses est modifié [Tu & Graf 1992, Song & Graf 1994] comme le montre la figure 1.4. Le profil est plus "carré" en régime accéléré qu'en régime uniforme, en régime décéléré c'est le contraire.

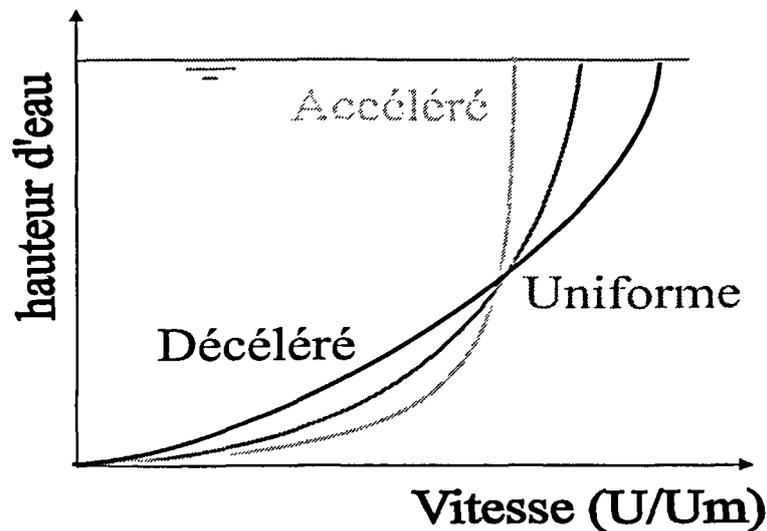


Figure 1.4 - Répartition verticale des vitesses longitudinales en régimes uniforme, accéléré et décélééré

Les vitesses d'écoulement jouent un rôle important dans le transport par suspension. En effet, la vitesse des particules en suspension est proche de la vitesse de l'écoulement. On a vu dans le paragraphe précédent que le débit solide par suspension dépendait directement de la vitesse débitante. Ceci étant, la vitesse moyenne des particules en suspension est inférieure à la vitesse débitante, car la concentration des particules en suspension est plus élevée au fond où les vitesses sont plus faibles. En régime non-uniforme, le profil des vitesses est modifié, et avec lui le lien entre la vitesse débitante et la vitesse moyenne des particules, et par conséquent la capacité de transport. Le fait que le profil des vitesses soit plus "carré" tend à augmenter la capacité de transport en régime accéléré.

1.3.2.2 Contrainte au fond, traînée et portance

Le profil des vitesses est déterminant pour la portance. En régime accéléré, le gradient des vitesses, et donc la portance, augmentent dans la partie inférieure de l'écoulement et diminuent dans la partie supérieure. Comme la concentration des particules est plus élevée près du fond, c'est l'augmentation de la portance près du fond qui l'emporte et la capacité de transport tend de ce fait à augmenter en régime accéléré.

La contrainte au fond est très liée au profil des vitesses près du fond. En effet, cette contrainte est directement liée aux gradients des vitesses près du fond et à la rugosité de ce dernier, comme en témoignent les lois classiques de parois rugueuses en régime uniforme [Chow, 1959] :

$$U(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) \text{ avec } k_s \text{ hauteur des aspérités} \quad (1.68)$$

Or, le profil des vitesses est modifié en régime non-uniforme, et avec lui le lien entre vitesse débitante et contrainte au fond. La figure 1.4 montre que le gradient du profil des vitesses au fond augmente en régime accéléré et diminue en régime décéléré. Ceci fait qu'à tirant d'eau et débit égaux, la contrainte au fond augmente en régime accéléré et diminue en régime décéléré.

La traînée et la portance s'exerçant sur une particule posée sur le fond sont étroitement liées à la contrainte au fond, qui est d'ailleurs le paramètre clé du calcul de la capacité de transport par charriage.

1.3.2.2 Turbulence

La turbulence au fond se caractérise par des fluctuations de forces et de vitesses relativement structurées. Ces structures de parois, appelés bouffées turbulentes ou "bursts", [Yalin 1992] sont liés à l'alternance de fluide lent et rapide, du fait de l'éjection vers le haut par portance de petits tourbillons naissant à la paroi et s'étendant ensuite à toute la colonne d'eau. La turbulence au sein de l'écoulement est donc très influencée par la turbulence de parois. En effet, la turbulence est essentiellement produite au niveau de la paroi. En rivière, la turbulence est produite par le fond, mais également par les berges.

En régime uniforme, l'équilibre entre production, transfert et dissipation d'énergie turbulente déterminent le profil des vitesses et fait que le niveau de turbulence est lié indifféremment au taux de dissipation d'énergie ou à la contrainte au fond, ces deux grandeurs étant liées en régime uniforme.

En régime non-uniforme, la turbulence n'est plus liée à la vitesse débitante du fait de son inertie. En effet, lorsque l'écoulement est accéléré, les fluctuations de vitesses augmentent avec un certain retard par rapport au champ moyen des vitesses qui les génère. Ceci fait que l'intensité turbulente est plus faible en régime accéléré (Figure 1.5). Lorsque l'écoulement est décéléré, la génération de turbulence diminue. Cependant, les structures existantes mettent un certain temps à se dissiper, ce qui engendre un retard de l'ajustement des fluctuations turbulentes. Ceci fait que l'intensité turbulente est plus forte en régime décéléré (Figure 1.5).

Le lieu principal de production de la turbulence étant le fond, la turbulence est quasiment à l'équilibre au fond et son écart relatif à l'équilibre augmente au fur à mesure que l'on s'éloigne du fond [Coleman et al. 1977] (Figure 1.5).

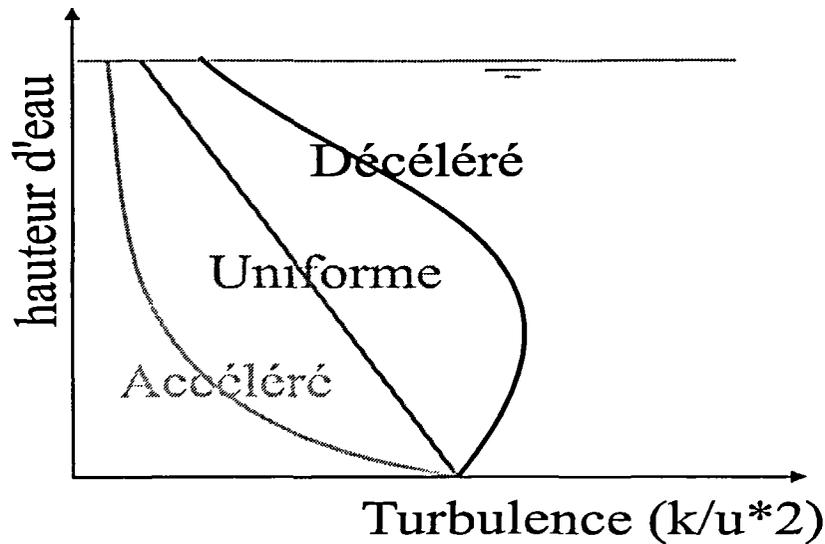


Figure 1.5 - Répartition verticale de l'énergie cinétique turbulente par rapport à la vitesse de frottement, en régimes uniforme, accéléré et décéléré

1.3.2.4 Forces induites par la non-uniformité de l'écoulement

La non-uniformité du régime hydraulique induit également des forces qui sont directement liées aux gradients longitudinaux (pression) et temporels (masse ajoutée), que nous appellerons forces supplémentaires.

1.3.3 Analyse théorique des lois de capacité de transport par charriage

Nous allons examiner l'influence de deux variables sur la capacité de transport par charriage : la contrainte au fond et la turbulence au fond.

1.3.1.1 Influence de la contrainte au fond

Pour le charriage, les particules en mouvement sont très proches du fond, nous allons donc considérer que le débit solide est le produit du nombre de particules mises en mouvement par unité de temps D_s et de la longueur d'une trajectoire X_s , elle-même produit de la durée de la trajectoire T_s au sein de l'écoulement et de la vitesse longitudinale moyenne de la particule V_s :

$$q_{sc}^* = D_s X_s = D_s T_s V_{sx} \quad (1.69)$$

On considère que l'énergie cinétique transmise aux particules lors de la mise en mouvement est proportionnelle à la différence entre la contrainte instantanée et la contrainte critique, ce qui permet d'exprimer la vitesse initiale V_{si} de la trajectoire d'une particule au sein de l'écoulement :

$$V_{si} \propto \sqrt{\tau_0 - \tau_{0crit}} \quad (1.70)$$

Engelund & Fredsoe [1976, in Phillips & Sutherland 1989] propose pour la vitesse longitudinale moyenne des particules solides en mouvement une formule qui se rapproche de (1.70) :

$$V_{sx} = 8,5u * \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\Psi_{crit}}{\Psi}}} \propto \sqrt{\tau_0 - \sqrt{\tau_0 \tau_{0crit}}} \quad \text{pour } 1,7 < \frac{\Psi_{crit}}{\Psi} < 25 \quad (1.71)$$

Si on considère que la trajectoire d'une particule solide n'est déterminée que par sa vitesse initiale et ses caractéristiques physiques (taille, forme, masse volumique), ce qui suppose en particulier que la composante verticale de sa vitesse initiale soit faible par rapport à sa vitesse de chute. La longueur d'un saut peut être calculé en considérant que la trajectoire est parabolique (Figure 1.6) avec comme condition initiale :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(0) = \sin \phi_1 V_{si} \quad (1.72) \quad \text{avec } \phi_1 : \text{angle de repos de la particule solide}$$

On obtient alors l'équation de la parabole :

$$z(t) = \sin \phi_1 V_{si} t - \frac{g t^2}{2} \quad (1.73)$$

$$x(t) = \cos \phi_1 V_{si} t \quad (1.74)$$

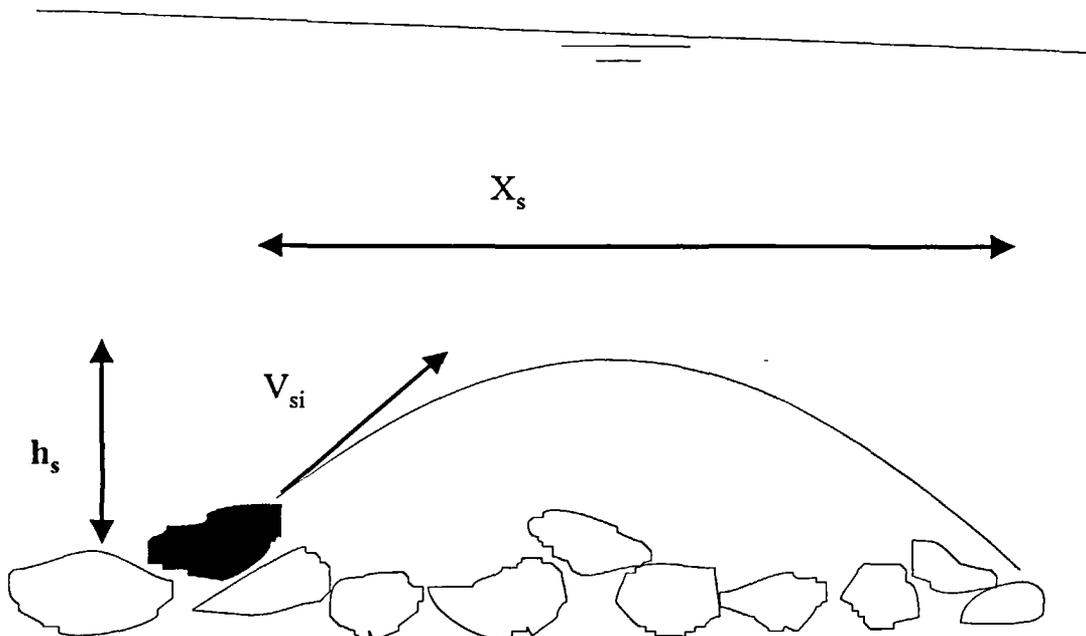


Figure 1.6 - Modélisation des processus de charriage

La longueur d'un saut est l'abscisse de l'intersection de la trajectoire avec le fond. On calcule tout d'abord l'instant associé. En posant $z(t) = 0$ dans l'équation (1.73), on obtient :

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{2 \sin \phi_1 V_{si}}{g} \quad (1.75)$$

En utilisant les équations (1.74) et (1.75), on obtient la longueur d'un saut :

$$X_s = \frac{\sin[2\phi_1] V_{si}^2}{g} \quad (1.76)$$

La hauteur d'un saut s'obtient par conservation de l'énergie mécanique entre l'instant de mise en mouvement et l'instant où la vitesse verticale change de sens :

$$h_s = \frac{\sin^2 \phi_1 V_{si}^2}{2g} \quad (1.77)$$

L'expression (1.77) néglige les forces de traînée et de portance qui vont influencer la hauteur d'un saut, et ce d'autant plus que la vitesse initiale sera élevée car la traînée et la portance sont proportionnelles au carré de la vitesse relative de la particule. La hauteur d'un saut va varier donc a priori en fonction de la vitesse initiale avec une puissance différente de 2, d'où :

$$h_s = \frac{\sin^2 \phi_1 V_{si}^{2-\alpha_c}}{2g} \quad (1.78)$$

Dans le cas où la vitesse initiale n'est pas négligeable par rapport à la vitesse de chute, la distance parcourue augmentera plus vite que la hauteur d'un saut, mais on considérera qu'elle reste proportionnelle au carré de la vitesse initiale de la particule.

Il faut ensuite tenir compte du temps de mise en mouvement d'une particule. En effet, on ne peut imaginer deux mises en mouvement au même endroit et en même temps. Si on considère que le temps de mise en mouvement est proportionnel au rapport du diamètre de la particule sur sa vitesse, la fréquence est proportionnelle à la vitesse des particules solides. On obtient :

$$q_{sc}^* \propto V_{sc}^3 \propto [\tau_0 - \tau_{0crit}]^{3/2} \quad (1.79)$$

On retrouve la formule de Meyer-Peter & Müller [1948], décrite en (1.51).

Dans ces conditions, la concentration des particules près du fond, obtenue à partir de l'équation (1.78) varie avec la contrainte de la manière suivante :

$$C_a = \frac{q_{sc}}{h_s V_{si}} \propto V_{si}^{\alpha_c} \propto [\tau_0 - \tau_{0crit}]^{2\alpha_c} \quad (1.80)$$

Le paramètre α_c est nécessairement positif dans la mesure où la concentration au fond augmente avec la contrainte.

1.3.1.2 Influence de la turbulence

La turbulence joue également un rôle important sur la mise en mouvement et le débit solide par charriage. La fréquence de dépassement du seuil de mise en mouvement est liée au phénomène de bursts est donc aux fluctuations de vitesses près du fond [Yalin 1992], ceci aura pour effet que le seuil de la contrainte moyenne de mise en mouvement sera inférieur au seuil instantané de mise en mouvement. Le paramètre à prendre en compte est l'intensité des fluctuations des vitesses au fond, dont l'échelle spatiale est supérieure à la taille des particules solides.

Les fluctuations efficaces pour mettre en mouvement les particules solides ne couvrent pas tout le spectre, mais uniquement les basses fréquences. En effet, il faut que la taille des structures turbulentes soit supérieure à la taille des particules. Il ne faut donc pas travailler sur le signal instantané, mais sur un signal vitesse lissé par moyenne glissante sur le temps de passage d'une structure turbulente au droit d'une particule posée au fond. C'est ce signal que nous utilisons dans la suite, et c'est l'écart-type de ce signal que nous notons σ_{U_f} , U_f étant la vitesse moyenne à une certaine distance du fond.

Nous allons maintenant estimer l'influence de la turbulence sur le transport solide par charriage à l'aide de la fonction de densité de probabilité des vitesses près du fond. Les données expérimentales montrent que les fluctuations de vitesses suivent une distribution normale [Graf 1971] :

$$p_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{U_f}} e^{-\frac{[u-U_f]^2}{2\sigma_{U_f}^2}} \quad (1.81)$$

Nous notons l'intensité turbulente au fond :

$$i_t = \frac{\sigma_{U_f}}{U_f} \quad (1.82)$$

Les mesures effectuées en rivière montrent que $15\% < i_t < 25\%$ [Kalinske et Van Driest, 1939].

Si nous supposons que la distribution de la vitesse longitudinale reste normale et que le débit solide instantané est donné par une expression du type Nielsen [1992, in Hogg 1996] (1.56), le débit solide par charriage s'écrit :

$$q_s^* \propto \frac{1}{\sigma_{U_f}} \int_{u_{crit}}^{+\infty} e^{-\frac{[u-U_f]^2}{2\sigma_{U_f}^2}} u [u^2 - U_{f,crit}^2] du \quad (1.83)$$

On constate qu'il n'y a pas de seuil de mise en mouvement dans le cas de l'expression (1.82). En effet, du fait de la forme de la fonction de densité de probabilité, toute vitesse a une probabilité d'occurrence non nulle. Si on veut définir un seuil de mise en mouvement en écoulement turbulent, il faut définir une limite aux fluctuations des vitesses. On pose :

$$m_{U_f} = \frac{|u-U_f|_{max}}{U_f} \quad (1.84)$$

Kalinske [1947 in Graf 1971] propose :

$$m_{Uf} \approx 3i_t \quad (1.85) \quad \text{avec} \quad i_t = \frac{\sigma_{Uf}}{U_f} \approx 25\% \quad (1.86) \quad \text{d'où} \quad m_{Uf} \approx 0,75$$

Des mesures de fluctuations des vitesses à 10 Hz [McLean et al. 1996] montrent en régime uniforme $m_{Uf} \approx 0,3$.

On retrouve la valeur proposée par Kalinske [1947 in Graf 1971] $m_{Uf} \approx 0,75$ pour les mesures de McLean et al. [1996] effectuée à 40 cm à l'aval d'une marche de 4 cm.

D'autres mesures de fluctuations des vitesses, toujours à 10 Hz, [Babakaiff & Hickin 1996] montrent qu'en régime uniforme $m_{Uf} \approx 0,3$ à 0,4.

Nous en concluons que les valeurs proposées par Kalinske [1947 in Graf 1971] doivent être considérées comme l'extrême limite supérieure.

Pour simplifier les calculs, nous allons considérer une densité de probabilité constante $p_2(u)$, qui a le mérite d'engendrer des fonctions polynomiales et un seuil de mise en mouvement. Cette distribution s'éloigne certes de la distribution normale, mais nous semble satisfaisante pour mettre en évidence des tendances théoriques :

$$p_2(u) = \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \quad \text{pour} \quad U_f(1 - m_{Uf}) < u < U_f(1 + m_{Uf}) \quad (1.87)$$

L'influence de la turbulence modifie la vitesse moyenne au fond de mise en mouvement (Figure 1.10), dans la mesure où c'est la vitesse maximale qui détermine le seuil de mise en mouvement. La turbulence définit ensuite deux domaines de charriage (Figure 1.7). Le premier correspond à des vitesses au fond qui fluctuent de part et d'autre du seuil de mise en mouvement, le second à des vitesses au fond toujours supérieures au seuil de mise en mouvement.

Vitesse au fond u_f

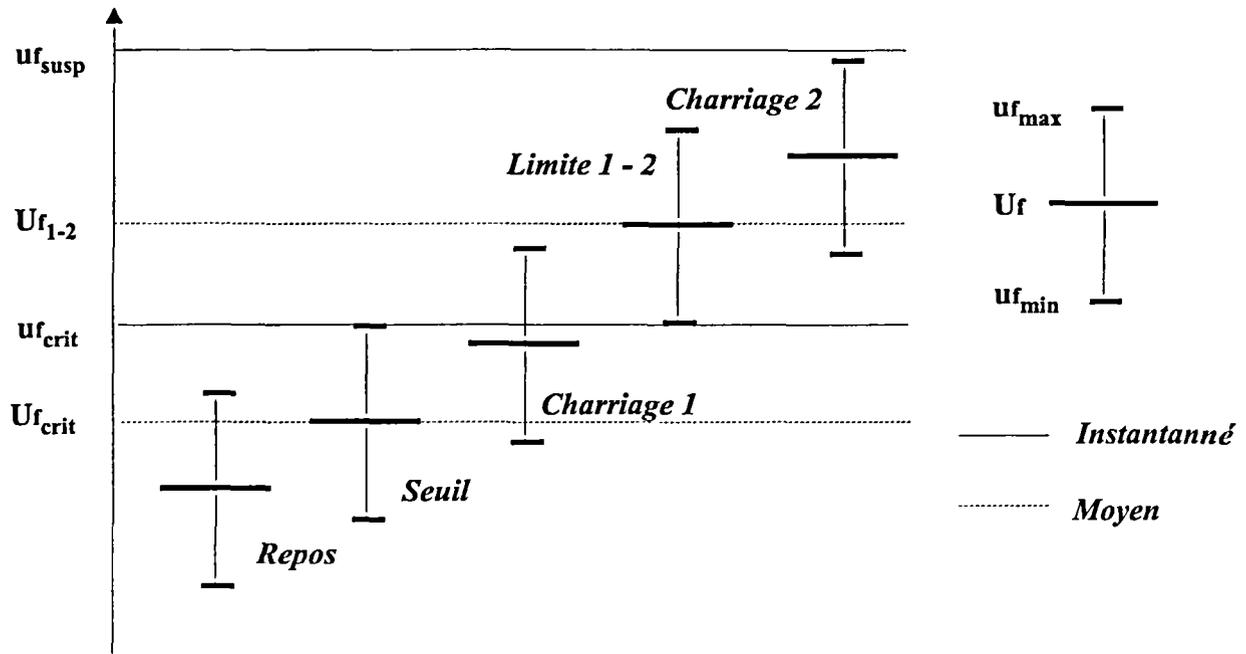


Figure 1.7 - Influence de la turbulence sur le seuil de mise en mouvement

Nous allons maintenant calculer la capacité de transport dans chacun des deux domaines décrits ci-dessus :

$$\text{si } \frac{U_{f,crit}}{1+m_{Uf}} < U_f < \frac{U_{f,crit}}{1-m_{Uf}} \text{ on a : } q_{scl}^* \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \int_{u_{f,crit}}^{[1+m_{Uf}]U_f} u[u^2 - u_{f,crit}^2] du \quad (1.88)$$

$$\text{si } U_f > \frac{U_{f,crit}}{1-m_{Uf}} \text{ on a : } q_{scl}^* \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f [1-m_{Uf}]U_f} \int_{[1-m_{Uf}]U_f}^{[1+m_{Uf}]U_f} u[u^2 - u_{f,crit}^2] du \quad (1.89)$$

En partant de l'expression (1.88), on calcule q_{scl} :

$$q_{scl}^* \propto \frac{1}{8m_{Uf} U_f} \left[\left[[1+m_{Uf}]^2 U_f^2 - u_{f,crit}^2 \right]^2 \right] \quad (1.90)$$

L'équation (1.90) peut s'écrire :

$$q_{scl}^* \propto \frac{1}{8m_{Uf}} \sqrt{1 - \frac{u_{f,crit}^2}{U_f^2}} \left[\left[[1+m_{Uf}]^2 U_f^2 - u_{f,crit}^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right] \quad (1.91)$$

On retrouve une formule de type Meyer-Peter-Müller corrigée.

La contrainte critique moyenne correspond à un transport solide nul et donc à l'égalité des bornes d'intégration. Elle s'écrit :

$$U_{f,crit} = \frac{u_{f,crit}}{[1+m_{Uf}]} \quad (1.92)$$

On a donc la contrainte critique moyenne en fonction de la contrainte critique instantanée et l'intensité de la turbulence au fond, puisque la contrainte au fond est proportionnelle au carré de la vitesse au fond. En remplaçant U_f^2 par τ_0 dans (1.91), on obtient :

$$q_{sc1}^* \propto \frac{[1+m_{Uf}]^3}{8m_{Uf}} \sqrt{1-[1+m_{Uf}]^2 \frac{\tau_{0crit}}{\tau_0}} [\tau_0 - \tau_{0crit}]^{3/2} \text{ avec } \tau_{0crit} = \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{[1+m_{Uf}]^2} \quad (1.93)$$

On peut tirer de (1.93) une expression du paramètre de Shields moyen en fonction du paramètre de Shields instantané :

$$\Psi_{crit} = \frac{[\Psi_{crit}]_{inst}}{[1+m_{Uf}]^2} \quad (1.94)$$

L'écart entre la contrainte critique instantanée et la contrainte critique moyenne est d'un facteur 1,8 si m_{Uf} est de 0,35 (ordre de grandeur en régime uniforme).

En repartant de l'expression (1.90), on peut écrire également q_{s1}^* :

$$q_{scl}^* \propto \frac{1}{|U_{fmax} - U_f|} [\tau_{max} - \tau_{0crit}]^2 \quad (1.95)$$

Dans ce cas, nous arrivons à rendre compte à 20% près des mesures de McLean et al. [1996]. Ces mesures ont été effectuées dans deux écoulements dont seule la vitesse moyenne au fond varie. La vitesse maximale au fond et donc τ_{0max} , ainsi que le fond et donc τ_{0crit} , sont identiques dans les deux cas écoulements. La différence entre vitesse moyenne et vitesse maximale diffèrent d'un rapport 1,8 entre les deux écoulements et les débits solides d'un rapport 0,66. Le produit des deux rapports est égal à 1,18, alors que l'équation (1.95) prédit un rapport 1 dans ce cas.

En partant de l'expression (1.89), on calcule q_{sc2}^* :

$$q_{sc2}^* \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} [u^4 - 2u^2 u_{fcrit}^2] \frac{[1+m_{Uf}] U_f}{[1-m_{Uf}] U_f} \quad (1.96)$$

$$q_{sc2}^* \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \left[U_f^4 [1+m_{Uf}]^4 - [1-m_{Uf}]^4 \right] - 2 \left[[1+m_{Uf}]^2 - [1-m_{Uf}]^2 \right] U_f^2 u_{fcrit}^2 \quad (1.97)$$

En utilisant la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ dans (1.97), on obtient :

$$q_{sc2}^* \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \left[U_f^4 \left[[1+m_{Uf}]^2 - [1-m_{Uf}]^2 \right] \left[[1+m_{Uf}]^2 + [1-m_{Uf}]^2 \right] - 8m_{Uf} U_f^2 u_{fcrit}^2 \right] \quad (1.98)$$

En utilisant les formules $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ et $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$ dans (1.98), on obtient :

$$q_{sc2}^* \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \left[8m_{Uf} [1+m_{Uf}^2] U_f^4 - 8m_{Uf} U_f^2 u_{fcrit}^2 \right] \quad (1.99)$$

$$q_{s2}^* \propto 4 U_f \left[[1+m_{Uf}^2] U_f^2 - u_{fcrit}^2 \right] \quad (1.100)$$

En remplaçant U_f^2 par τ_0 dans (1.100), on obtient :

$$q_{s2}^* \propto [1+m_{Uf}^2] \sqrt{\tau_0} [\tau_0 - \tau_{0crit}] \quad \text{avec} \quad \tau_{0crit} = \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{[1+m_{Uf}^2]} \quad (1.101)$$

On retrouve une loi de type Nielsen [1992], qui est réputée meilleure lorsque le charriage est important, ce qui correspond aux conditions de validité de q_{s2}^* .

L'écart par rapport au débit solide q_{s2}^* calculé en négligeant les effets de la turbulence est de 8% si m_{Uf} est égale à 0,35.

Examinons si une loi de type q_{s2}^* a réellement un domaine de validité, car il est fort probable que lorsque la contrainte instantanée est partout supérieure à la contrainte critique instantanée, il y ait déjà des particules se déplaçant en suspension.

Le domaine de validité de q_{s1}^* est caractérisé par :

$$U_f > \frac{u_{fcrit}}{1-m_{Uf}} \Leftrightarrow \psi > \frac{[\Psi_{crit}]_{inst}}{[1-m_{Uf}]^2} = \left[\frac{1+m_{Uf}}{1-m_{Uf}} \right]^2 \Psi_{crit} (i_t) \quad (1.102)$$

Si nous prenons $\Psi_{crit} = 0,047$ et $m_{Uf} = 35\%$, l'inégalité (1.102) s'écrit : $\psi > 0,20$. Nous ne sommes pas loin du seuil de suspension, qui est couramment pris égal à 0,25.

Le domaine de validité de q_{s2}^* dépend de l'intensité de la turbulence, mais d'après les mesures expérimentales son domaine de validité est faible, d'autant plus que la limite entre charriage et suspension est relativement floue.

Ceci étant, cette formule permet de calculer le débit solide par charriage, lorsque ce dernier coexiste avec la suspension. Il permet également dans ce cas, de calculer la concentration au fond :

$$C_a \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \int_{[1-m_{Uf}]U_f}^{[1+m_{Uf}]U_f} C_{ainst}(u) du \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \int_{[1-m_{Uf}]U_f}^{[1+m_{Uf}]U_f} [\tau_0(u) - \tau_{0crit}]^{\alpha_c} du \quad (1.103)$$

Soit, en faisant une approximation très grossière de l'intégrale (1.103) :

$$C_a \propto \frac{1}{2m_{Uf} U_f} \int_{[1-m_{Uf}]U_f}^{[1+m_{Uf}]U_f} [u^2 - U_{fcrit}^2]^{\frac{\alpha_c}{2}} du \approx \left[[1+m_{Uf}^2] \tau_0 - \tau_{0crit} \right]^{\frac{\alpha_c}{2}} \quad (1.104)$$

L'effet de la turbulence permet peut-être d'expliquer la variabilité des seuils de mise en mouvement donnés dans la littérature, pour peu que les contextes expérimentaux diffèrent par le niveau de la turbulence.

Nous avons vu qu'en ce qui concerne le charriage, la formule générale dépend de la contrainte moyenne au fond et de la contrainte critique moyenne et de l'intensité de la turbulence au fond. C'est donc la modification de ces trois paramètres qu'il faudra étudier en régime non-uniforme.

1.3.4 Analyse théorique de la capacité de transport en suspension

La suspension est essentiellement conditionnée par le niveau de turbulence, les vitesses d'écoulement et la concentration de particules en mouvement près du fond. La concentration près du fond renvoie à l'interaction avec le fond et aux processus de mise en mouvement et de charriage. Selon Leeder [1983], confirmant l'hypothèse de Bagnolds [1966, in Leeder 1983], c'est l'asymétrie des fluctuations turbulentes qui génèrent une force vers le haut. Il montre que le module des fluctuations verticales vers le haut est supérieur à celui des fluctuations vers le bas, mais ont lieu sur un temps plus court du fait du respect de la conservation de la masse. Ce phénomène est lié à la structure de la turbulence de paroi et aux bouffées turbulentes associées [Yalin 1992, Isdiyana 1993].

Les particules en suspension au sein de l'écoulement ont tendance à suivre les particules fluides à leur vitesse de chute près et avec une certaine inertie. L'équilibre entre la force de traînée exercée par le fluide sur une particule en suspension et son poids relatif des particules détermine sa vitesse de chute. La portance n'intervient pas dans la détermination de la vitesse de chute. Les forces de traînée et de masse ajoutée déterminent l'inertie avec laquelle une particule en suspension s'adapte aux variations du champ instantané des vitesses. Plus une particule est petite, ou plus sa densité est proche de celle de l'eau, plus sa vitesse de chute et son inertie sont faibles, et plus la particule solide suit la trajectoire des particules fluides. Ajoutons à cela que plus la particule est petite, plus elle est sensible à la totalité du spectre de la turbulence.

Lorsque l'écoulement est turbulent autour de la particule, la vitesse de chute s'écrit [Clift et al 1978] :

$$V_c = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g}{C_D(Re_p)} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} D} \quad (1.106)$$

Lorsque l'écoulement est laminaire autour de la particule, la vitesse de chute s'écrit [Stokes 1851] :

$$V_c = \frac{g}{18\nu} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} D^2 \quad (1.107)$$

On distinguera la capacité de transport par charriage q_{sc}^* de la capacité de transport en suspension q_{ss}^* selon que la particule est à une distance inférieure ou supérieure à la distance a :

$$q_s^* = q_{sc}^* + q_{ss}^* = \int_0^a C_s(z) V_s(z) dz + \int_a^h C_s(z) V_s(z) dz \quad (1.113)$$

avec C_s : Concentration en particules solides

V_s : Vitesse longitudinale des particules solides

Par définition la capacité de transport en suspension par unité de largeur est l'intégrale sur le tirant d'eau du produit de la concentration des particules en mouvement par leur vitesse:

$$q_{ss}^* = \int_0^h C_s(z) V_s(z) dz = h C_a V_m \left[\frac{1}{h-a} \int_a^h \frac{C_s(z)}{C_a} \frac{V_s(z)}{V_m} dz \right] \quad (1.114)$$

La vitesse moyenne des particules sera proche de la vitesse de l'eau à une profondeur de $\eta_m^* h_{50}$, η_m étant définie par :

$$V_{sm} \propto V(\eta_m h_{50}) \quad \text{avec} \quad U_m \propto V(\eta_m h) \quad (1.116) \quad \text{et} \quad \int_0^{h_{50}} C_s(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^h C_s(z) dz \quad (1.117)$$

Le paramètre η_m permet de prendre en compte le profil logarithmique des vitesses, et en particulier le fait que la vitesse débitante est observée à $\eta_m^* h$. La valeur de η_m en rivière est de l'ordre de 0,4.

On peut considérer que la répartition verticale de particules en mouvement suit une loi exponentielle, donnée ci-dessous :

$$C(z) = C_a e^{-\frac{15}{\eta_s} \left[\frac{z-a}{h-a} \right]} \quad (1.119) \quad \text{avec} \quad \eta_s \propto \frac{\sqrt{\langle w^2 \rangle}}{V_c} \quad \text{paramètre de sédimentation} \quad (1.5)$$

Par intégration de l'expression (1.119), la concentration moyenne s'écrit :

$$C_m = \frac{1}{h-a} \int_a^h C(z) dz = \frac{C_a}{h-a} \int_a^h e^{-\frac{15z-a}{\eta_s h-a}} dz = -\eta_s \frac{C_a}{15} \left[e^{-\frac{15z-a}{\eta_s h-a}} \right]_a^h = \eta_s \frac{C_a}{15} \left[1 - e^{-\frac{15}{\eta_s}} \right] \quad (1.120)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation est faible (par rapport à 15) :

$$C_m \propto \frac{\sqrt{\langle w^2 \rangle}}{V_c} \frac{C_a}{15} \quad (1.121)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation tend vers l'infini, C_m tend vers C_a .

La vitesse de frottement intervenant fréquemment dans le paramètre de sédimentation doit être considéré comme une caractéristique de la turbulence. Il est plus rigoureux de prendre la moyenne du module des fluctuations verticales des vitesses ou l'énergie cinétique turbulente si la turbulence est isotrope. Cela n'a pas d'importance en régime uniforme, mais sera capital en régime non-uniforme. Pour prendre en compte la répartition verticale des fluctuations des vitesses verticales, il faut déterminer les profils verticaux de la turbulence et donc utiliser l'équation de Schmidt-Rouse (1.122) (Figure 1.8) [Rouse 1938 in Graf 1996] à la place de l'équation (1.119) (Figure 1.9) :

$$C(z) = C(z_0) \left[\frac{h-z}{z} \frac{z_0}{h-z_0} \right]^{\frac{\sigma_s}{\kappa \eta_s}} \quad (1.122)$$

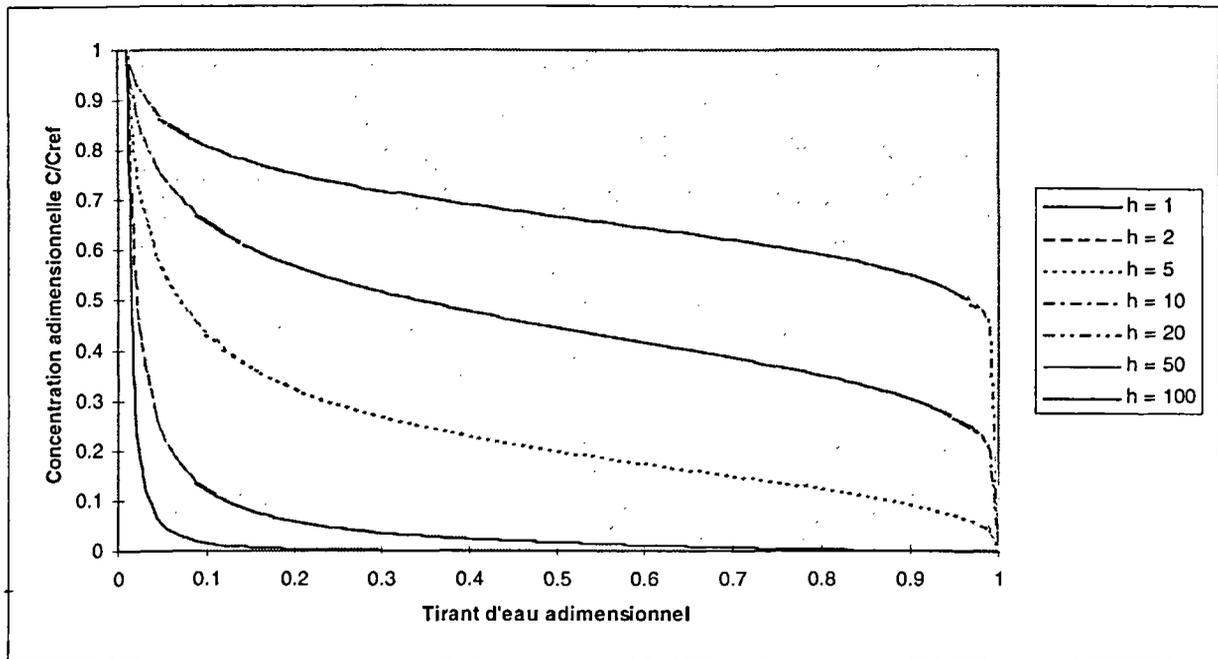


Figure 1.8 - Profils verticaux de concentration de type Schmidt-Rouse en fonction du paramètre de sédimentation

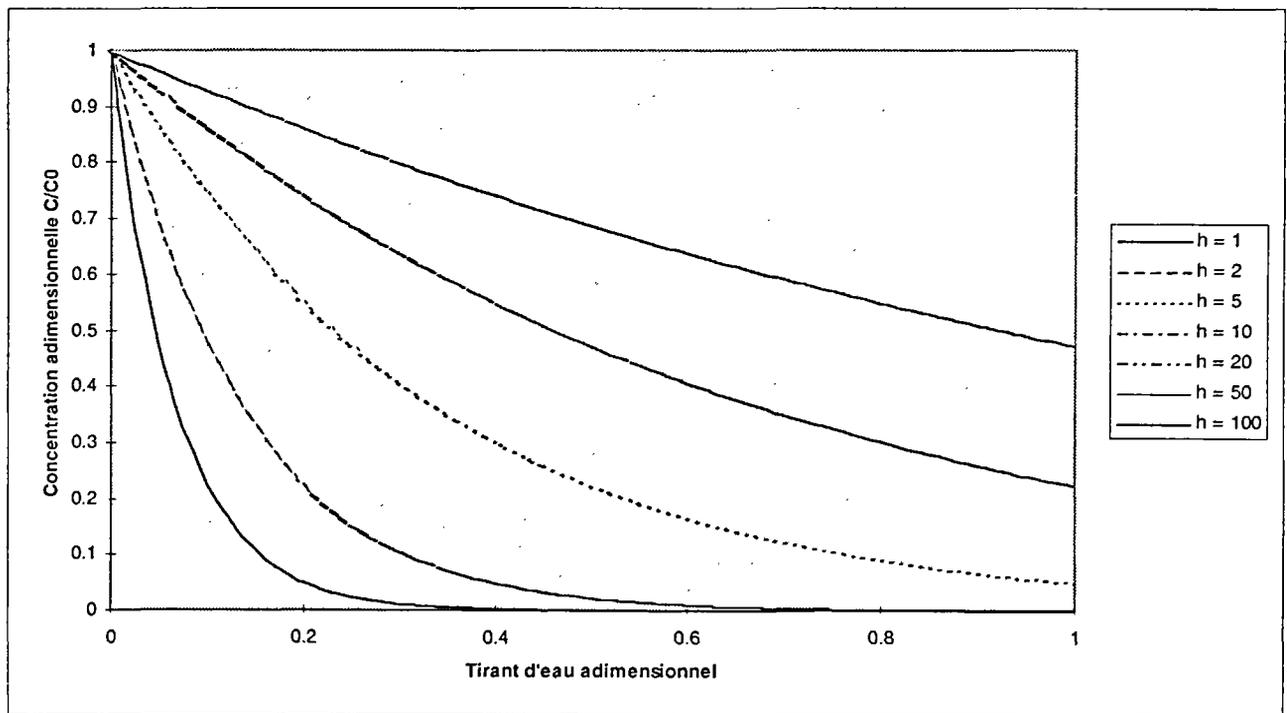


Figure 1.9 - Profils verticaux de concentration de type exponentiel en fonction du paramètre de sédimentation

La hauteur d'eau moyenne des particules en suspension s'écrit :

$$h_{50} = \frac{1}{h C_0} \int_0^h z C(z) dz = \frac{1}{h_0} \int_0^h z e^{-\frac{15z}{\eta_s h}} dz = -\frac{\eta_s}{15} \left[z e^{-\frac{15z}{\eta_s h}} \right]_0^h + \frac{\eta_s}{15} \int_0^h e^{-\frac{15z}{\eta_s h}} dz \quad (1.123a)$$

$$h_{50} = -h \frac{\eta_s}{15} e^{-\frac{15}{h}} + h \left[\frac{\eta_s}{15} \right]^2 \left[1 - e^{-\frac{15}{h}} \right] = h \frac{\eta_s}{15} \left[\frac{\eta_s}{15} \left[1 - e^{-\frac{15}{h}} \right] - e^{-\frac{15}{h}} \right] \quad (1.123b)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation est faible (par rapport à 15) :

$$h_{50} \approx h \left[\frac{\eta_s}{15} \right]^2 \quad (1.124)$$

La vitesse moyenne des particules en suspension est alors celle du fluide à une hauteur de $\eta_m * h_{50}$, du fait des profils de vitesses et de concentrations. En utilisant les relations 1.5 et 1.124, et en considérant qu'en rivière l'énergie cinétique turbulente k est proportionnelle aux fluctuations verticales, on obtient :

$$V_{sm} = \eta_m U(h_{50}) \propto U_m \left[\frac{h_{50}}{h} \right]^{1/6} \propto U_m [\eta_s]^{1/3} = U_m \left[\frac{\sqrt{\langle w^2 \rangle}}{V_c} \right]^{1/3} \propto U_m \left[\frac{\sqrt{k}}{V_c} \right]^{1/3} \quad (1.125)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation tend vers l'infini, h_{50} tend vers $h/2$, la vitesse moyenne des particules est alors égale à la vitesse débitante de l'eau.

Le tirant d'eau varie avec le débit et donc avec la vitesse :

$$I = \frac{U_m^2}{K_s^2 h^{4/3}} \Leftrightarrow h = U_m^{3/2} K_s^{3/2} I^{3/4} \quad (1.126)$$

Il reste à déterminer l'évolution de C_a en fonction de la contrainte au fond et de la turbulence. On reprendra l'expression (1.104) :

$$C_a \propto \left[[1 + m_{uf}^2] \tau_0 - \tau_{0crit} \right]^{2 \alpha_c} \quad (1.104)$$

Nous prendrons dans la suite $\alpha_c = 1$.

Nous allons approcher le débit solide par :

$$q_{ss}^* \approx C_m V_{sm} h \quad (1.128)$$

Nous avons parfaitement conscience de la grossièreté d'une approximation (1.128) qui néglige le terme $\int_a^h [C(y) - C_m] [V_s(z) - V_{sm}] dz$. Cela a été notre parti pris, sans lequel une expression analytique était hors de notre portée. Nous devons garder ce point en mémoire, car il pourra nous poser des problèmes, en particulier pour la déformation des profils verticaux en régime non-uniforme.

On peut donc écrire lorsque le paramètre de sédimentation est faible par rapport à 15, en substituant les équations (1.121) et (1.125) dans l'équation (1.128) :

$$q_{ss}^* \propto \sqrt{[1 + m_{uf}^2] \tau_0 - \tau_{0crit}} k^{2/3} U_m h = \sqrt{[1 + m_{uf}^2] \tau_0 - \tau_{0crit}} k^{2/3} q \quad (1.129)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation tend vers l'infini, on a $C_m = C_a$ et $V_{sm} = U_m$ dans l'équation (1.128), qui s'écrit alors :

$$q_{ss}^* \propto \sqrt{[1 + m_{Uf}^2] \tau_0 - \tau_{0crit}} U_m h = \sqrt{[1 + m_{Uf}^2] \tau_0 - \tau_{0crit}} q \quad (1.130)$$

Nous remarquons que dans l'équation (1.130) la turbulence n'intervient plus que par l'intermédiaire de la concentration près du fond.

En régime uniforme pour une pente et un coefficient de Strickler donnés, k , U_m et h sont liés à τ_0 :

$$k \propto u^{*2} \propto \tau_0 \quad (1.131)$$

$$h \propto \frac{\tau_0}{I} \quad (1.132)$$

$$U_m \propto K_s \tau_0^{2/3} \sqrt{I} \quad (1.133)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation est faible par rapport à 15 et que la contrainte critique est négligée par rapport à la contrainte au fond (ce qui est légitime dans le cas de la suspension), l'équation (1.129) devient :

$$q_s \propto \tau_0^{7/6} q \propto \frac{K_s}{I} \tau_0^{17/6} = \frac{K_s}{I} \tau_0^{2.83} \quad (1.134)$$

Lorsque le paramètre de sédimentation est grand par rapport à 15, et toujours en négligeant la contrainte critique, l'équation (1.130) devient :

$$q_s \propto \sqrt{\tau_0} q \propto \frac{K_s}{I} \tau_0^{13/6} = \frac{K_s}{I} \tau_0^{2.17} \quad (1.135)$$

Dans la littérature on trouve des formules où l'exposant de la contrainte varie entre 2,5 et 3 (voir §1.3.1.2), ce qui est cohérent avec les exposants trouvés.

En régime accéléré, l'intensité de la turbulence diminue, le rapport de la concentration moyenne sur la concentration au fond diminue. D'un autre côté, la contrainte au fond augmente, et par conséquent la concentration au fond également, à condition que la diminution de l'intensité de la turbulence ne compense pas l'augmentation de la contrainte (voir §1.3.3). De plus les vitesses près du fond augmentent, ce qui tend à augmenter le débit solide. Nous avons donc là encore à faire avec des influences opposées. On peut penser que l'effet prépondérant est l'influence de la turbulence sur la concentration moyenne, pour les valeurs moyennes (inférieures à 15) du paramètre de sédimentation, et la contrainte sur la concentration au fond pour les valeurs élevées (supérieures à 15) du paramètre de sédimentation. Nous étudierons plus en détail ces effets au cours de la cinquième partie.

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

Les équations de Saint-Venant, comme les lois de transport solide existantes, ne sont valides qu'au voisinage du régime uniforme car elles supposent que le lien entre contrainte au fond, intensité turbulente et vitesse débitante reste celui déterminé en régime uniforme et exprimé par la loi de frottement.

D'une part, le débit solide ne s'adapte qu'avec une certaine inertie, à un écart entre débit solide et capacité de transport, que cet écart soit dû à une variation de la capacité de transport du fait de la non-uniformité de l'écoulement, ou à un excès ou déficit en apports solides amont. Ceci est lié à l'inertie des particules solides en mouvement et la structure du fond.

D'autre part, la capacité de transport est modifiée du fait de la non-uniformité de l'écoulement liquide, qui induit une modification du lien de la contrainte au fond, du profil des vitesses et du profil de la turbulence avec la vitesse débitante.

Nous avons résumé les processus de transport solide qui interviennent en régime non-uniforme sur la figure 1.10. Les liaisons en gras sont celles qui seront particulièrement étudiées dans ce mémoire.

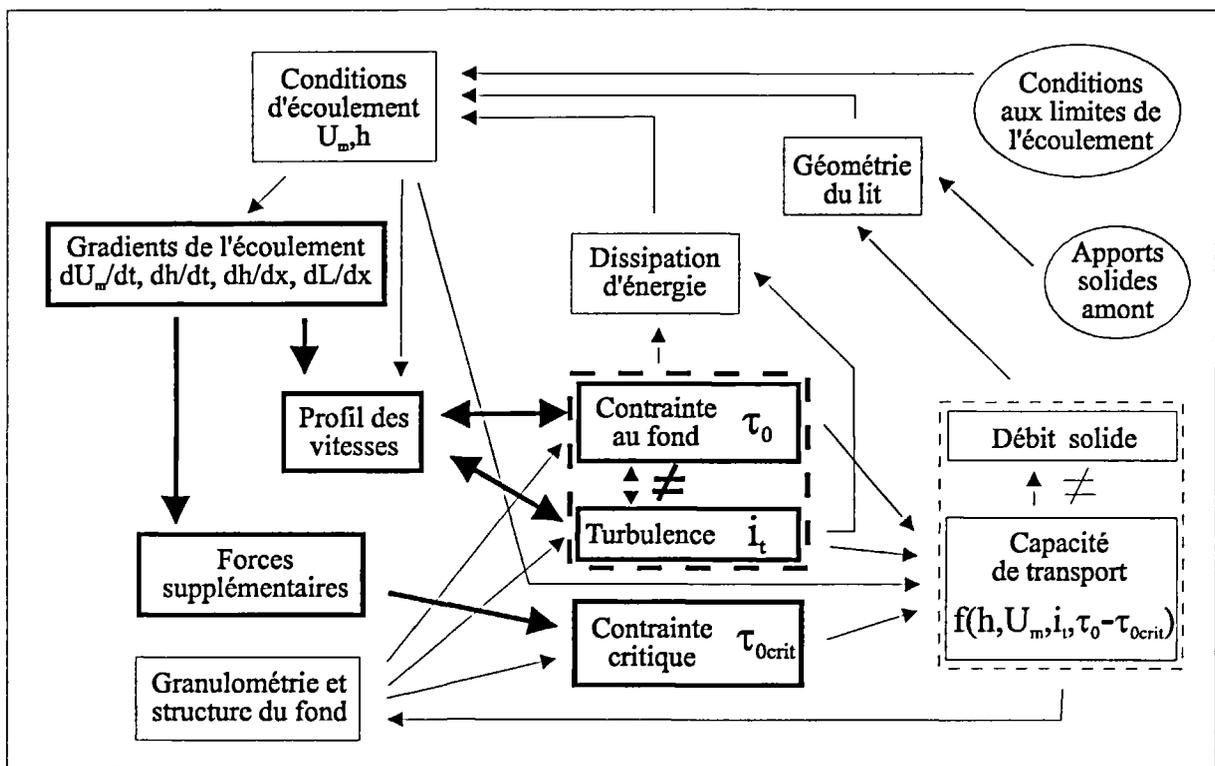


Figure 1.10 - Schéma des différents mécanismes de transport solide en régime non-uniforme, les mécanismes étudiés sont indiqués en gras

Nous avons tenté de mettre en évidence les influences respectives de la contrainte au fond, de la turbulence et du débit liquide sur la capacité de transport. Nous avons parfois fait

des hypothèses fortes permettant un calcul analytique, ce qui était notre parti pris. Cependant une démarche similaire peut être effectuée pour toute loi de capacité de transport.

La capacité de transport par charriage est liée à la contrainte au fond et à l'intensité de la turbulence. L'influence de la turbulence se fait surtout sentir à proximité du seuil de mise en mouvement. En prenant une loi de type Nielsen [1992, in Hogg 1996] et une répartition uniforme des fluctuations de vitesse, on obtient :

$$\text{Si } \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{1+m_{max}} < \tau_0 < \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{1-m_{max}} \text{ on a :}$$

$$q_{sc1} * \propto \frac{1}{8m_{max}} \sqrt{1 - \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{\tau_0}} \left[[1+m_{max}]^2 \tau_0 - [\tau_{0crit}]_{inst} \right]^{3/2} \quad (1.91)$$

$$\text{Si } \tau_0 > \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{[1-m_{max}]^2} : q_{sc2} * \propto \sqrt{\tau_0} \left[[1+m_{max}^2] \tau_0 - [\tau_{0crit}]_{inst} \right] \quad (1.101)$$

La contrainte seuil de mise en mouvement est modifiée de la manière suivante :

$$\tau_{0crit} = \frac{[\tau_{0crit}]_{inst}}{[1+m_{max}]^2} \quad (1.93)$$

Le paramètre critique de Shields est modifié de la manière suivante :

$$\Psi_{crit} = \frac{[\Psi_{crit}]_{inst}}{[1+m_{max}]^2} \quad (1.94)$$

Le rapport entre paramètres critiques moyen et instantané est d'environ 1,8 en rivière.

L'influence de la turbulence sur la capacité de transport en suspension se fait surtout sentir pour les valeurs faibles du paramètre de sédimentation, quand les concentrations en surface sont faibles. En effet, c'est dans un contexte d'hétérogénéité vertical marqué que l'effet d'homogénéisation est le plus important. L'effet de la contrainte au fond se fait par la détermination de la concentration au fond.

Pour la capacité de transport en suspension, nous proposons :

$$\text{si } \eta_s \ll 15 \quad q_{ss} * \propto \sqrt{\tau_0 - \tau_{0crit}} k^{2/3} q \quad (1.129)$$

$$\text{si } \eta_s \gg 15 \quad q_{ss} * \propto \sqrt{\tau_0 - \tau_{0crit}} q \quad (1.130)$$

L'objet de cette thèse est l'étude de la modification de la capacité de transport en fonction de la nature non-uniforme de l'écoulement. L'écart entre la capacité de transport et le débit solide ne sera pas abordé au-delà de l'état de l'art fait dans cette première partie. Les effets de la nature non-uniforme de l'écoulement sur la capacité de transport s'expriment de deux façons.

Des forces supplémentaires qui n'existent pas en régime uniforme apparaîtront du fait des gradients spatiaux et temporels. Nous les prendrons en compte en modifiant paramètre de Shields critique. Ce point sera abordé dans le seconde partie.

La modification du profil de vitesse et de la turbulence va modifier les relations liant λ_0 , I_2 et I_3 aux autres grandeurs adimensionnelles. Ceci se traduira par une modification des liens entre la vitesse moyenne et la contrainte au fond, les termes de traînée et de portance, ainsi que la turbulence. De ce fait, le paramètre de Shields et le paramètre de sédimentation seront modifiés et ne seront plus liés entre eux comme en régime uniforme. Ce point sera abordé dans les troisième et quatrième parties.

La différence entre le paramètre de Shields et le paramètre de Shields critique, ainsi que l'intensité de la turbulence au fond, permettront de calculer la capacité de transport par charriage et la concentration au fond dans le cas de la suspension. Le paramètre de sédimentation permettra de calculer la concentration moyenne en fonction de la concentration au fond, et donc la capacité de transport en suspension. Ces points seront traités dans la cinquième partie.

PARTIE 2 :
BILAN DES FORCES ET DE LEURS MOMENTS
S'EXERCANT SUR UNE PARTICULE POSE SUR LE FOND

Il est important de revenir au phénomène physique de base, à savoir les forces qui s'exercent sur une particule au fond d'une rivière, pour pouvoir modifier des formules plus globales donnant la capacité de transport en fonction des grandeurs hydrauliques, et en particulier le paramètre de Shields critique.

Pour comprendre le phénomène de charriage, nous allons analyser les forces et leurs moments s'exerçant sur une particule au repos sur un fond constitué des particules de même caractéristiques. Le bilan des forces s'exerçant en régime uniforme, puis en régime non-uniforme, va nous permettre de déterminer les forces à prendre en compte en fonction des conditions d'écoulement. Le bilan des moments des forces va nous permettre de déterminer la modification du seuil de mise en mouvement en régime non-uniforme.

Les axes sont liés au fond (Fig. 2.1) : (O,i) est parallèle au fond et (O,j) est perpendiculaire au fond. Les abscisses longitudinales sont notées i dans cette partie, pour ne pas faire de confusion avec l'axe horizontal des x . Il en est de même pour les cotes j et α est l'angle du fond par rapport à l'horizontale, la pente s'écrit donc $I = \tan\alpha$. On considérera que les vitesses moyennes près du fond sont parallèles au fond.

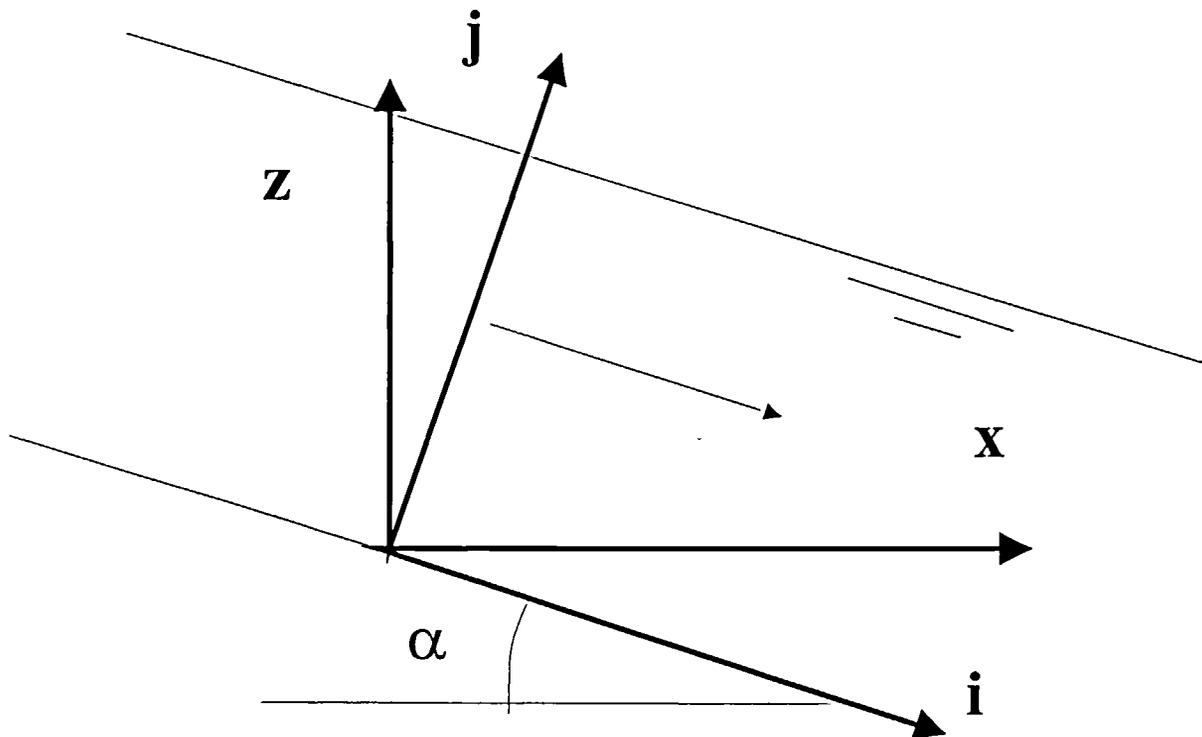


Figure 2.1 - Système d'axes utilisé

2.1 BILAN DES FORCES

Nous allons en préambule de cette section examiner l'hypothèse de pression hydrostatique, que nous ferons dans la suite de ce mémoire. Nous examinerons ses conséquences, et en particulier les écoulements qui ne la respectent pas.

Nous passerons ensuite en revue toutes les forces agissant sur une particule posée au fond d'un écoulement à surface libre. Il y a celles qui ne dépendent pas directement de gradients longitudinaux ou temporels et sont donc toujours présentes, et celles qui dépendent uniquement de ces gradients et qui n'apparaissent donc qu'en régime non-uniforme. Cela ne veut pas dire que les premières restent inchangées en régime non-uniforme, puisqu'elles sont indirectement liées aux gradients longitudinaux, par l'intermédiaire de la modification des profils verticaux. Ce dernier point sera l'objet de la troisième partie, nous n'aborderons ici que les effets des forces directement liées aux gradients longitudinaux ou temporels.

Nous examinerons ensuite dans quelles conditions de non-uniformité de l'écoulement, les forces supplémentaires sont à prendre en considération.

2.1.1 Hypothèse de pression hydrostatique

Nous donnons dans ce paragraphe les conditions de validité de l'hypothèse de répartition hydrostatique de la pression au sein d'un écoulement à surface libre.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement sur l'axe vertical s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (2.1)$$

L'hypothèse de répartition hydrostatique de la pression s'écrit :

$$P = P_s - \rho g [z - Z_s] \quad (2.2)$$

Cette hypothèse (2.2) revient à négliger le premier membre de l'équation (2.1) devant l'accélération de la pesanteur.

Ce premier membre est constitué de trois termes : 1 - terme transitoire, 2 - accélération normale (courbure), 3 - accélération tangentielle (pente). Il faut donc que ces trois termes soient négligeables devant l'accélération de la pesanteur g . En régime permanent, la pression est hydrostatique perpendiculairement à des lignes de courant rectilignes et horizontales.

Dans le cas d'un canal incliné en régime uniforme, la pression est donnée par [Hérouin 1991] :

$$P = P_s - \cos^2 \alpha \rho g [z - Z_s] \quad (2.3)$$

Sur les très fortes pentes ($I > 10\%$), la pression ne peut plus être considérée comme rigoureusement hydrostatique.

La condition sur l'accélération normale se traduit par une condition sur le rayon de courbure verticale des lignes de courant, noté R_v [Hérouin 1991] :

$$\frac{V^2}{R_v} \ll g \quad (2.4)$$

Lorsque la courbure des lignes de courant est trop importante la condition précédente n'est plus vérifiée. C'est en particulier le cas dans un ressaut, autour d'ouvrages (figure 2.2) (seuils, vannes, épis) et dans les écoulements à fortes rugosités.

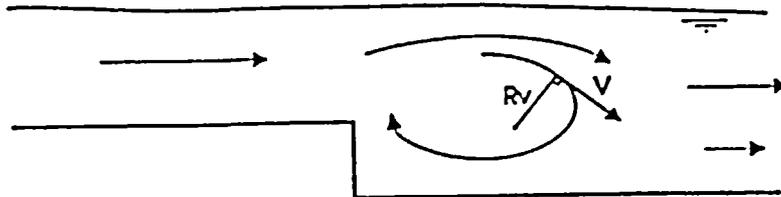


Figure 2.2 - Recirculation en aval d'une marche

La condition sur l'accélération verticale doit être vérifiée au moins au fond et à la surface [Hérouin 1991] :

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z_s}{\partial t^2} \ll g \quad (2.5) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_f}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z_f}{\partial t^2} \ll g \quad (2.6)$$

Dans certains écoulements transitoires, les conditions précédentes ne sont pas vérifiées. C'est le cas pour la propagation des vagues, un glissement de terrain dans une retenue (figure 2.3), une ouverture brutale d'une vanne (aval immédiat), ou rupture de barrage (aval immédiat).

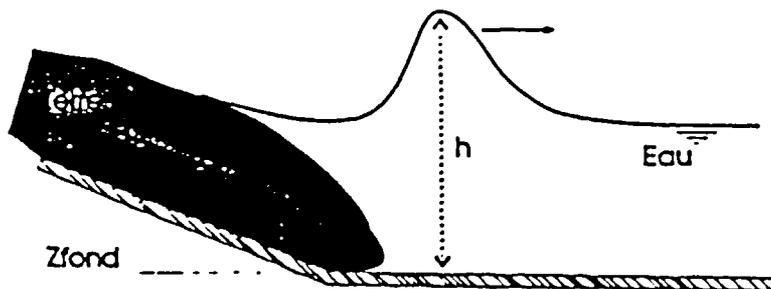


Figure 2.3 - Effet d'un glissement de terrain

Si on néglige le gradient de pression atmosphérique, l'hypothèse de pression hydrostatique (2.2) se traduit pour les gradients de la pression au fond par :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P_f}{\partial x} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P_s}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.7) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.8)$$

2.1.2 Les différentes forces agissant sur une particule posée au fond

Une particule posée au fond subit des forces de la part des particules avec lesquels elle est en contact. Au repos, ces forces compensent les autres forces s'exerçant sur la particule que nous allons détailler maintenant.

2.1.1.1 Poids et pression

Dans un liquide au repos, le poids et le gradient de pression hydrostatique, ou poussée d'Archimède, conduisent naturellement à la notion de poids relatif. Lorsqu'il y a un écoulement, ces deux forces doivent être analysées séparément car elles ne sont plus colinéaires. En effet, le poids s'exerce selon la verticale, alors que la poussée d'Archimède s'exerce perpendiculairement aux lignes de courant. Les composantes du poids et les gradients de pression ont les expressions suivantes :

- le poids P projeté sur une perpendiculaire au fond :

$$P_j \vec{j} = - \frac{\pi}{6} \rho_s g D^3 \cos \alpha \vec{j} \quad (2.9)$$

- le poids P projeté sur une parallèle au fond :

$$P_i \vec{i} = \frac{\pi}{6} \rho_s g D^3 \sin \alpha \vec{i} \quad (2.10)$$

- la poussée d'Archimède P_A , qui est liée à la composante du gradient de pression normale au fond et aux lignes de courant près du fond. Si les lignes de courant sont rectilignes près du fond, alors la pression est localement hydrostatique perpendiculairement au fond, et on peut écrire :

$$P_A \vec{j} = \frac{\pi}{6} \rho g D^3 \cos \alpha \vec{j} \quad (2.11)$$

- le terme lié au gradient longitudinal de pression F_P projeté sur une parallèle au fond :

$$F_P \vec{i} = \frac{\pi}{6} D^3 \frac{\partial P_f}{\partial x} \cos \alpha \vec{i} \quad (2.12)$$

Si la pression est hydrostatique, (2.12) s'écrit :

$$F_P \vec{i} = \frac{\pi}{6} \rho g D^3 \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha \vec{i} \quad (2.13)$$

Nous pouvons réintroduire la notion de poids relatif Pr , mais uniquement perpendiculairement à l'écoulement en regroupant les expressions (2.9) et (2.11) :

$$Pr_j \vec{j} = [P_j + P_A] \vec{j} = - \frac{\pi}{6} [\rho_s - \rho] g D^3 \cos \alpha \vec{j} \quad (2.14)$$

2.1.1.2 Portance

La portance intègre les effets de l'écart du gradient de pression par rapport au gradient hydrostatique, liée au cisaillement de l'écoulement et à la rotation de la particule sur elle-même. Pour une particule posée sur le fond, c'est le gradient de vitesses près du fond qui induit la portance. On peut écrire la portance F_L [Clift et al 1978] :

$$F_L \vec{j} = \frac{\pi}{6} \rho C_L (Re_p) D^3 U_f \left[\frac{\partial U}{\partial j} \right]_f \vec{j} \quad (2.15)$$

avec $C_L (Re_p)$: Coefficient de portance et $Re_p = \frac{u^* D}{\nu}$: Nombre de Reynolds particulaire

Cette relation fait intervenir la vitesse et le gradient des vitesses au fond. Il faut déterminer à quelle distance du fond j_f , ces valeurs sont prises. On considérera une distance du fond proportionnelle au diamètre de la particule.

Si on suppose que le profil près du fond est logarithmique, on peut écrire:

$$U(j) = \kappa u^* \ln \left[\frac{j}{j_0} \right] \quad \text{avec } j_0 = a_0 D \quad (2.16)$$

$$U_f(j_f) = \kappa u^* \ln \left[\frac{a_1 D}{a_0 D} \right] = \kappa u^* \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right] \quad \text{avec } j_f = a_1 D \quad (2.17)$$

$$\text{Par dérivation de (2.16), on obtient : } \frac{\partial U}{\partial j} = \frac{\kappa u^*}{j} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial U}{\partial j} \right]_f = \frac{\kappa u^*}{a_1 D} \quad (2.18)$$

$$\text{En substituant (2.17) dans (2.18), on obtient : } \left[\frac{\partial U}{\partial j} \right]_f = \frac{U_f}{a_1 \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right] D} \quad (2.19)$$

En substituant (2.19) dans (2.15), on obtient :

$$F_L = \frac{1}{a_1 \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right]} \frac{\pi}{6} \rho C_L D^2 U_f^2 = \frac{\pi}{6} \rho C'_L D^2 U_f^2 \quad \text{avec } C'_L = \frac{C_L}{a_1 \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right]} \quad (2.20a)$$

Nous pouvons exprimer la portance en fonction de la contrainte au fond en utilisant les équations (2.17 et (2.20a) :

$$F_L = \frac{\pi}{6} \frac{\kappa^2 \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right]}{a_1} C_L \tau_0 D^2 \quad (2.20b)$$

2.1.1.3 Traînée

La traînée F_D intègre les frottements de peau et les effets du sillage autour de la particule. Sa composante permanente s'écrit [Clift et al.1978] :

$$F_D \vec{i} = \frac{\pi}{6} \rho C_D (Re_p) D^2 U_f^2 \vec{i} \quad (2.21a)$$

avec $C_D (Re_p)$: Coefficient de traînée et $Re_p = \frac{u^* D}{\nu}$: Nombre de Reynolds particulaire

Comme la portance, la force de traînée est proportionnelle à la contrainte au fond :

$$F_D \vec{i} = \frac{\pi}{6} \tau^2 \ln^2 \left[\frac{a_1}{a_0} \right] C_D (Re_p) D^2 \tau_0 \vec{i} \quad (2.21b)$$

La composante transitoire de la traînée F_B , appelé terme de Basset, intègre l'histoire du sillage au cours du temps. Elle peut s'écrire [Clift et al. 1978]:

$$F_B \vec{i} = \rho \Delta_H \frac{3D^2}{2} \int_{-\infty}^t \frac{\partial U_f}{\partial t} \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \vec{i} \quad (2.22)$$

On négligera ce terme car non seulement sa prise en compte est complexe, mais elle nécessite la connaissance de l'historique du champ des vitesses autour de la particule solide. Ceci n'est envisageable que dans le cadre d'une approche lagrangienne [Yvergniaux 1989, Isdiyana 1993], or nous avons exclus ce type d'approche.

2.1.1.4 Masse ajoutée

La masse ajoutée est due à l'accélération du fluide autour de la particule, qui en communique une partie à la particule solide. Elle s'écrit [Clift et al.,1978] :

$$F_A \vec{i} = \frac{\pi}{12} \Delta_A \rho D^3 \frac{\partial U_f}{\partial t} \vec{i} \quad \text{avec } 1 < \Delta_A < 2 \text{ coefficient de masse ajoutée} \quad (2.23)$$

2.2 BILAN DES MOMENTS S'EXERÇANT SUR UNE PARTICULE POSEE AU FOND

La détermination du seuil de mise en mouvement en régime uniforme est décrite par de nombreux auteurs [Graf 1971, Jansen et al. 1979]. Nous reprenons dans un premier temps leur démarche pour l'étendre dans un deuxième temps au régime non-uniforme.

Le mouvement initial de la particule sera un roulement sur la particule aval, ce mouvement sera conditionné par le bilan des moments des forces par rapport au point de contact de la particule avec ses voisines, situé le plus aval.

Après avoir déterminé les moments résultants de chacune des forces en jeu, nous allons calculer l'expression du paramètre de Shields critique classique (en régime uniforme et

sur un fond quasi-horizontal), puis l'expression du paramètre de Shields critique en régime non-uniforme. Ceci va nous permettre d'exprimer ce paramètre en fonction du paramètre critique de Shields classique et des gradients longitudinaux et temporels de l'écoulement.

2.2.1 Description du bilan des moments

Le moment des composantes perpendiculaires à l'écoulement (selon k) des différentes forces sera calculé comme le produit de la résultante des forces par la distance du point de contact aval à la droite (A,j). Les seules forces ayant des composantes non nulles perpendiculaires à l'écoulement sont le poids relatif et la portance. Le poids relatif s'applique au centre de gravité A . Nous ferons l'hypothèse que la résultante de la portance peut s'appliquer également en un point de (A,j), peu importe lequel, car le moment n'en est pas affecté. Ceci implique une hypothèse de symétrie des forces de portance par rapport au plan (O, i, j).

Concernant le moment des composantes dans l'axe de l'écoulement (selon i), deux cas sont distingués. La projection du poids selon la direction i , auquel nous ajouterons le gradient longitudinal de pression s'appliquera au centre de gravité A . La traînée, à laquelle nous ajouterons la masse ajoutée, s'appliquera en un point B situé au-dessus du centre de gravité A . La figure 2.4 récapitule les forces et leurs moments résultants. Cette figure est classique, nous n'y avons ajouté que le gradient de pression et la masse ajoutée.

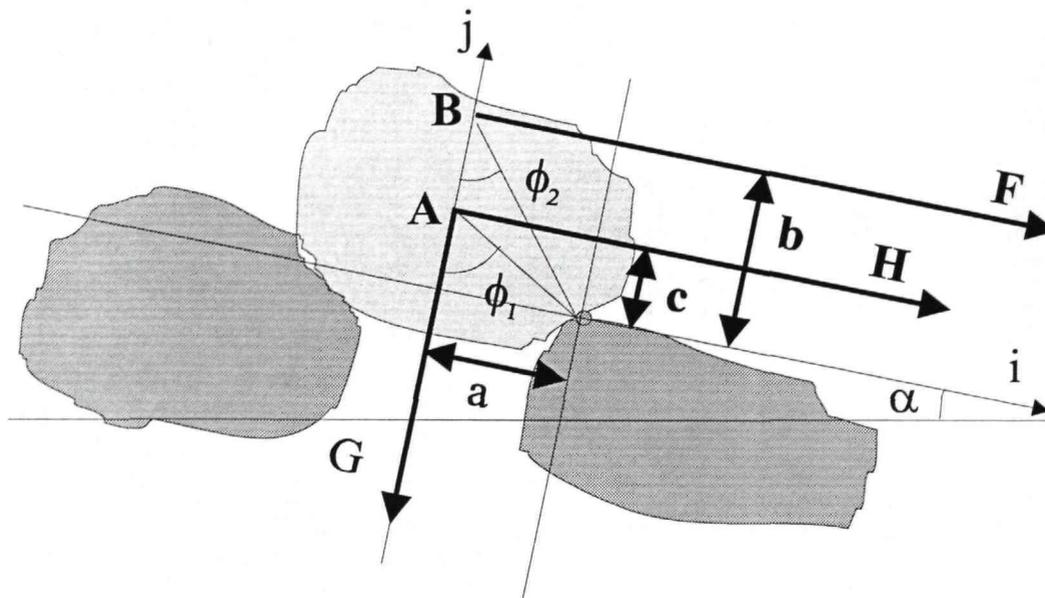


Figure 2.4 - Bilan des moments des forces s'exerçant sur une particule posée sur le fond

On définit l'angle de repos statique ϕ_1 par : $\frac{a}{c} = \tan \phi_1$ (2.24)

et l'angle de repos dynamique ϕ_2 par : $\frac{a}{b} = \tan \phi_2$ (2.25)

Le seuil de mise en mouvement correspond à l'annulation de la somme des moments:

$$Fb + Hc = Ga \quad (2.26)$$

2.2.2 En régime uniforme

Nous allons calculer le paramètre de Shields critique, correspondant à l'annulation du moment, par rapport au point de contact aval, des forces s'exerçant sur la particule :

$$F = \frac{\pi}{6} \rho C_D D^2 U_f^2 \quad H = \frac{\pi}{6} \rho_s g D^3 \sin \alpha \quad \text{et} \quad G = \frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g D^3 \cos \alpha - \frac{\pi}{6} \rho C_L D^2 U_f^2 \quad (2.27)$$

(2.26) et (2.27) permettent d'écrire :

$$\frac{\pi}{6} \rho C_D D^2 U_f^2 b + \frac{\pi}{6} \rho_s g D^3 \sin \alpha c = \frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g D^3 \cos \alpha a - \frac{\pi}{6} \rho C_L D^2 U_f^2 a \quad (2.28)$$

En divisant (2.28) par $\frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g D^3 a$, on obtient :

$$\frac{\rho C_D D^2 U_f^2 b}{(\rho_s - \rho) g D^3 a} + \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \sin \alpha \frac{c}{a} = \cos \alpha - \frac{\rho C_L D^2 U_f^2}{(\rho_s - \rho) g D^3} \quad (2.29)$$

En substituant (2.24) et (2.25), (2.29) devient :

$$\left[C_L + \frac{C_D}{\tan \phi_2} \right] \frac{U_f^2}{u^{*2}} \frac{\rho u^{*2}}{(\rho_s - \rho) g D} = \cos \alpha - \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \frac{\sin \alpha}{\tan \phi_1} \quad (2.30)$$

En posant :

$$C_F = \tan \phi_2 C_L + C_D \quad (2.31)$$

Les équations (2.30) et (2.31) permettent d'écrire :

$$\frac{\rho u^{*2}}{(\rho_s - \rho) g D} = \frac{1}{C_F \frac{U_f^2}{u^{*2}}} \left[\cos \alpha \tan \phi_2 - \sin \alpha \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \frac{\tan \phi_2}{\tan \phi_1} \right] \quad (2.32)$$

L'équation (2.32) diffère légèrement de celle de Carstens [1966 in Graf 1971] :

$$\frac{\rho U_f^2}{(\rho_s - \rho) g D} = 3,61 [\cos \alpha \tan \phi_1 - \sin \alpha] \quad (2.33)$$

Cette équation assimile ϕ_1 et ϕ_2 et fait l'hypothèse implicite que la ligne d'eau est horizontale, ce qui n'est pas gênant dans le cas d'une faible pente.

Nous rappelons l'expression du paramètre de Shields:

$$\psi = \frac{\tau_0}{g(\rho_s - \rho) D} \quad (1.3)$$

En régime uniforme la pente I est généralement très faible, d'où :

$$\tan \alpha \approx 0 \text{ et } \cos \alpha \approx 1$$

Le paramètre de Shields critique en régime uniforme sur pente faible peut alors s'écrire, à partir de (1.3) (2.32), (2.33) et (2.17) :

$$\Psi_{Ucrit} = \frac{\tan \phi_2}{C_F(R_{ep}, \phi_2) \left[\frac{U_f}{u^*} \right]^2} = \frac{\tan \phi_2}{C_F(R_{ep}, \phi_2) \kappa^2 \ln^2 \left[\frac{a_1}{a_0} \right]} \quad (2.34)$$

Le paramètre de Shields critique en régime uniforme est donc fonction du Reynolds particulaire et de ϕ_2 l'angle de repos dynamique, inférieur à l'angle au repos statique.

La courbe de Shields [Shields 1936, in Graf 1971] rend compte de la variation du paramètre de Shields en fonction du Reynolds particulaire, dans le cas d'une granulométrie uniforme. Le paramètre de Shields est indépendant du Reynolds particulaire, lorsque ce dernier est supérieur à 400 [Vanoni 46 in Graf 1971]. Shields [1936] propose alors une valeur de 0,06. Les différents auteurs proposent des valeurs variant de 0,047 [Zeller 1963 in Graf 1971] à 0,076 [Schoklitsch 1950 in Graf 1971], 0,088, voire 0,138, pour des granulométries étendues [Parker 1982 in Ramez 1995].

2.2.3 En régime non-uniforme ou non-permanent

Nous reprenons la même analyse qu'en régime uniforme, mais en tenant compte des deux forces supplémentaires que sont la masse ajoutée et le gradient de pression au fond.

$$F = \frac{\pi}{6} \rho C_D D^2 U_f^2 + \frac{\pi}{12} \Delta_A \rho D^3 \frac{\partial U_f}{\partial t} \quad H = \frac{\pi}{6} \rho_s g D^3 \sin \alpha - \frac{\pi}{6} D^3 \frac{\partial P_f}{\partial x} \cos \alpha \quad (2.35)$$

$$\text{et } G = \frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g D^3 \cos \alpha - \frac{\pi}{6} \rho C_L D^2 U_f^2$$

(2.24) et (2.35) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{6} \rho C_D D^2 U_f^2 b + \frac{\pi}{12} \Delta_A \rho D^3 \frac{\partial U_f}{\partial t} b + \frac{\pi}{6} \rho_s g D^3 \sin \alpha c - \frac{\pi}{6} D^3 \frac{\partial P_f}{\partial x} \cos \alpha c \\ & = \frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g D^3 \cos \alpha a - \frac{\pi}{6} \rho C_L D^2 U_f^2 a \end{aligned} \quad (2.36)$$

En divisant (2.36) par $\frac{\pi}{6}(\rho_s - \rho)g D^3 a$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho C_D D^2 U_f^2 b}{(\rho_s - \rho)g D^3 a} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_A \rho D^3}{(\rho_s - \rho)g D^3} \frac{\partial U_f}{\partial t} \frac{b}{a} - \frac{D^3}{(\rho_s - \rho)g D^3} \frac{\partial P_f}{\partial x} \cos \alpha \frac{c}{a} + \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \sin \alpha \frac{c}{a} \\ & = \cos \alpha - \frac{\rho C_L D^2 U_f^2}{(\rho_s - \rho)g D^3} \end{aligned}$$

(2.37)

En utilisant (2.31) : $C_F = \tan \phi_2 C_L + C_D$ et (2.29) : $\frac{a}{c} = \tan \phi_1$ et $\frac{a}{b} = \tan \phi_2$, (2.37) devient :

$$\begin{aligned} & C_F \frac{U_f^2}{u^{*2}} \frac{\rho u^{*2}}{(\rho_s - \rho)g D} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_A \rho}{(\rho_s - \rho)g} \frac{\partial U_f}{\partial t} \frac{1}{\tan \phi_1} - \frac{1}{(\rho_s - \rho)g} \frac{\partial P_f}{\partial x} \frac{\cos \alpha}{\tan \phi_1} \\ & = \cos \alpha \tan \phi_2 \left[1 - \frac{\rho_s \tan \alpha}{\rho_s - \rho \tan \phi_1} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le paramètre de Shields critique en régime non-uniforme s'obtient à partir de (2.25) et (2.38) :

$$\Psi_{\text{crit}} = \Psi_{\text{ucrit}} \left[\cos \alpha \left[1 + \frac{1}{\tan \phi_1} \frac{1}{(\rho_s - \rho)g} \frac{\partial P_f}{\partial x} - \frac{\rho_s \tan \alpha}{\rho_s - \rho \tan \phi_1} \right] - \frac{\Delta_A}{2g} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{\partial U_f}{\partial t} \frac{1}{\tan \phi_2} \right] \quad (2.39)$$

Nous allons exprimer la vitesse au fond en fonction de la vitesse moyenne à l'ordre 0 par rapport aux gradients longitudinaux, c'est-à-dire en supposant que les relations en régime uniforme restent valables. La suite du calcul est donc un développement limité au voisinage du régime uniforme.

Nous allons utiliser la loi de frottement en régime uniforme, qui permet d'écrire :

$$u^* = U_m \frac{\sqrt{g}}{C} \quad (2.40)$$

Par ailleurs, la vitesse au fond vaut :

$$U_f(k_f) = \kappa u^* \ln \left[\frac{a_1 D}{a_0 D} \right] = \kappa u^* \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right] \quad (2.17)$$

En substituant (2.40) dans (2.17), on obtient :

$$U_f = \frac{\kappa \sqrt{g} U_m}{C} \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right] \quad (2.41) \quad \frac{\partial U_f}{\partial t} = \frac{\kappa \sqrt{g}}{C} \ln \left[\frac{a_1}{a_0} \right] \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad (2.42)$$

Par ailleurs, en utilisant la relation (2.34), on peut écrire :

$$U_f = \frac{U_m}{C} \sqrt{\frac{g}{C_F \Psi_{U_{\text{crit}}}}} \quad (2.43) \quad \text{et} \quad \frac{\partial U_f}{\partial t} = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{g}{C_F \Psi_{U_{\text{crit}}}}} \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad (2.44)$$

L'hypothèse de pression hydrostatique s'écrit :

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = \rho g \left[\tan \alpha + \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] \quad (2.45)$$

En substituant (2.44) et (2.45) dans (2.39), le paramètre de Shields critique en régime non-uniforme s'écrit :

$$\Psi_{\text{crit}} = \Psi_{U_{\text{crit}}} \left[\cos \alpha \left[1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \phi_1} + \frac{1}{\tan \phi_1} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] - \frac{\Delta_A}{2C} \sqrt{\frac{1}{g C_F \Psi_{U_{\text{crit}}}}} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{1}{\tan \phi_2} \right] \quad (2.46)$$

$$\text{En posant : } C_a = \frac{\Delta_A}{2} \sqrt{\frac{g}{C_F \Psi_{U_{\text{crit}}}}} \quad (2.47),$$

Le paramètre de Shields critique en régime non-uniforme ou non-permanent (2.46) s'écrit :

$$\Psi_{\text{crit}} = \Psi_{U_{\text{crit}}} \left[\cos \alpha \left[1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \phi_1} + \frac{1}{\tan \phi_1} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] - \frac{C_a}{C} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{1}{g} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{1}{\tan \phi_2} \right] \quad (2.48)$$

2.3 ESTIMATION DE L'ORDRE DE GRANDEURS DES FORCES SUPPLEMENTAIRES

Nous nous plaçons ici dans le cas où la pression peut être considérée comme hydrostatique. Nous allons dans un premier temps estimer en fonction des gradients longitudinaux et temporels l'ordre de grandeur du gradient de pression et de la masse ajoutée par rapport à la traînée. Dans un deuxième temps nous examinerons l'ordre de grandeur des forces supplémentaires dans le cas d'une variation rapide du débit.

2.3.1 Gradient de pression

Une valeur significative du terme de pression peut être liée soit à une variation brusque de la cote du fond, par exemple des alternances seuils mouilles, soit à une variation brusque de la cote de la surface libre, par exemple liée au passage d'une onde de crue de type éclusée ou vidange de barrage.

Le terme de traînée vaut :

$$F_D = \frac{\pi}{6} \rho C_D D^2 U_f^2 \quad (2.21)$$

Le gradient longitudinal de pression hydrostatique s'écrit :

$$F_P = -\frac{\pi}{6} \rho g D^3 \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha \quad (2.13)$$

Le rapport entre cette force supplémentaire et la force de traînée s'écrit :

$$\frac{F_P}{F_D} = -\frac{gD}{C_D U_f^2} \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha \quad (2.49)$$

On se place au voisinage de la mise en mouvement, car cela correspond à la plus petite valeur de la traînée pour laquelle notre calcul présente un intérêt, ainsi qu'à la plus grande valeur du rapport du gradient de pression sur la traînée. Dans ce cas, l'équation (2.32) permet d'écrire :

$$\frac{gD}{C_D U_f^2} \approx \frac{1}{\tan \phi_2 \Delta} < 1,72 \quad \text{avec} \quad \Delta \approx 1,6 \quad \text{et} \quad \phi_2 > 20^\circ \quad (2.50)$$

$$\frac{F_P}{F_D} < -1,72 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.51)$$

Pour des grands pas d'espace (supérieurs à 100m), l'effet sera négligeable car, en général en rivière, on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\text{moy}} < 1\%$$

Par contre si l'on s'intéresse à des phénomènes locaux, comme une intumescence dans un réseau d'assainissement, ou le transport solide à l'échelle d'une mouille, ce terme sera non négligeable, par exemple les valeurs suivantes:

$$\psi \approx \psi_{U_{\text{crit}}} \quad \phi \approx 20^\circ \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -20\% \quad \Rightarrow \quad \frac{F_P}{F_D} \approx 35\%$$

En régime permanent non uniforme avec pente faible de la ligne d'eau (figure 2.5), on a :

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z_s}{\partial x} \approx 0 \quad (2.52)$$

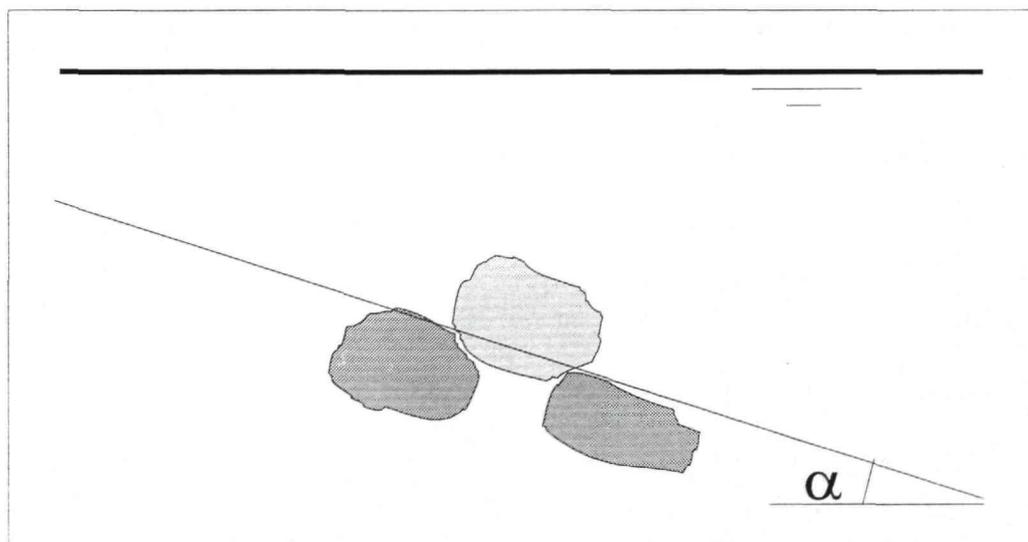


Figure 2.5 - Ecoulement permanent non-uniforme

Le paramètre de Shields critique s'écrit alors :

$$\Psi_{\text{crit}} \approx \Psi_{\text{Ucrit}} \cos \alpha \left[1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \phi_1} \right] \quad \text{si } \alpha < \phi_1 \quad (2.53)$$

Nous voyons que lorsque la pente du fond est égale à l'angle de stabilité du matériau, la contrainte critique est nulle. L'action de l'écoulement n'est plus nécessaire car la particule se met en mouvement sous la seule action de son poids. L'angle de stabilité du matériau est généralement compris entre 20° et 40° [Jansen et al 1979], voire 10° à 100° pour les granulométries hétérogènes en milieu naturel [Buffington et al. 1992]. Il y a une grande variabilité de l'angle de stabilité en milieu naturel, du fait du masquage, de la surexposition et de l'imbrication des particules solides.

2.3.2 Masse ajoutée

Le terme de traînée vaut :

$$F_D = \frac{\pi}{6} \rho C_D D^2 U_f^2 \quad (2.21)$$

Le terme de masse ajoutée vaut :

$$F_A = \frac{\pi}{12} \Delta_A \rho D^3 \frac{\partial U_f}{\partial t} \quad (2.23)$$

On prendra $C_D=0,5$ et $\Delta_A=1$, ce qui correspond aux valeurs utilisées pour une sphère dans un écoulement uniforme à fort Reynolds ($Re > 1000$) [Clift et al. 1978]. Nous faisons l'hypothèse qu'au fond, en couche limite cisailée, le rapport de ces deux coefficients reste du même ordre de grandeur. Le rapport du terme de masse ajoutée sur le terme de traînée vaut :

$$\frac{F_A}{F_D} = \frac{D}{U_f^2} \frac{\partial U_f}{\partial t} \quad (2.54)$$

Le seul cas en rivière où le terme de masse ajoutée peut atteindre des valeurs significatives est le passage d'un front (figure 2.6). On peut considérer qu'il se propage à la même vitesse que l'eau en amont de ce dernier.

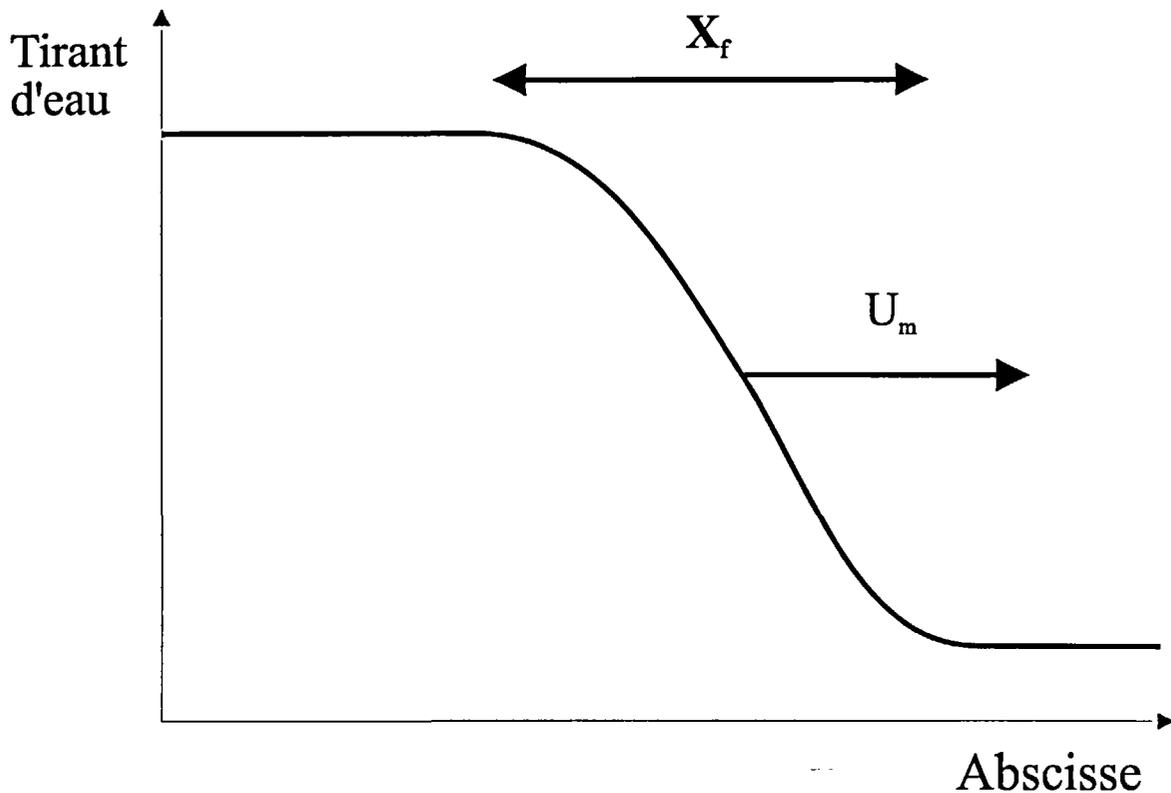


Figure 2.6 - Front lié à une variation rapide du débit

On peut donc estimer la dérivée de la vitesse par rapport au temps par:

$$\frac{\partial U_f}{\partial t} = \frac{U_{f \max}}{T_f} = \frac{U_{f \max}^2}{X_f} \quad \text{avec } X_f : \text{longueur du front} \quad (2.55)$$

et T_f : durée de passage du front

En substituant (2.15) dans (2.16), on obtient :

$$\left[\frac{F_A}{F_D} \right]_{\max} = \frac{D}{X_f} \quad \text{si } X_f > D \quad (2.56)$$

Si $X_f < D$, l'écoulement autour de la particule n'est plus homogène, les formules utilisées pour déterminer la masse ajoutée et la traînée ne sont plus valables, nous ne tirerons donc pas de conclusions dans ce cas.

Pour que le terme de masse ajoutée joue un rôle, il faut que X_f soit petit. Dans ce cas, le temps d'action de ce terme sera faible, il ne produira donc pas de transport. Par contre, il pourrait être responsable, en s'ajoutant à la force de traînée, d'une modification de la structure du fond. Il pourrait ainsi modifier les conditions ultérieures de transport solide, en modifiant les seuils de mise en mouvement des particules constituant le fond.

Ceci étant, pour qu'il y ait un impact réel sur le transport, encore doit-il exister un instant où la somme de la traînée et de la masse ajoutée soit supérieure à la traînée associée à la vitesse maximale. En effet, lorsque la vitesse et la traînée se rapprochent de leur maximum, le gradient temporel de la vitesse et le terme de masse ajoutée diminuent, jusqu'à s'annuler.

2.3.3 Variation rapide du débit

Nous allons déterminer l'influence de la masse ajoutée et du gradient de pression dans le cas d'une variation rapide du débit.

On peut considérer que l'ordre de grandeur du rapport des coefficients C_F et Δ_A est le même pour des écoulements uniformes infinis. C'est près du seuil de mise en mouvement que l'effet de la masse ajoutée sera le plus important. L'ordre de grandeur du coefficient C_a peut donc être majoré par :

$$C_a \leq \frac{\Delta_A}{2} \sqrt{\frac{g}{C_F \Psi_{U_{crit}}}} \approx 1 \quad \text{si} \quad \Delta_A \approx 1 \quad C_F \approx 0,5 \quad \text{et} \quad \Psi_{U_{crit}} \geq 0,05 \quad (2.57)$$

Nous nous placerons dans le cas d'un canal quasi-horizontal, on a alors $\tan \alpha \approx 0$ et $\cos \alpha \approx 1$, d'où :

$$\Psi_{crit} = \Psi_{U_{crit}} \left[1 + \frac{1}{\tan \phi_1} \frac{\rho}{(\rho_s - \rho)} \frac{\partial Z_s}{\partial x} - \frac{C_a}{C} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{1}{g} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{1}{\tan \phi_2} \right] \quad (2.58)$$

Pour estimer un majorant de l'ordre de grandeur des corrections à apporter à la contrainte critique en régime transitoire, nous allons faire les hypothèses suivantes :

- les forces s'appliquent toutes au centre de gravité, d'où $\phi_1 = \phi_2$,
- $C_a = 1$,
- un angle de stabilité de $\phi_1 = \phi_2 = 20^\circ$,
- un Chezy de 30,
- une densité relative par rapport à l'eau de 1,6.

Le paramètre de Shields critique (2.58) s'écrit alors :

$$\Psi_{crit} \approx \Psi_{U_{crit}} \left[1 - 0,057 \frac{1}{g} \frac{\partial U_m}{\partial t} + 1,72 \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] \quad (2.59)$$

Or, l'accélération de l'eau ne peut pas être supérieure à l'accélération de la pesanteur multipliée par le sinus de l'angle que fait la surface libre avec l'horizon. En effet, l'accélération d'un mur d'eau vertical est l'accélération de la pesanteur.

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} < -g \sin \left[\arctan \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] < -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (2.60)$$

On voit donc que le terme de masse ajoutée est dans tous les cas négligeable par rapport au gradient de pression. En substituant (2.60) dans (2.59), on déduit :

$$\left| \frac{\Psi_{crit} - \Psi_{U_{crit}}}{\Psi_{U_{crit}}} \right| < 1,8 \left| \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right| \quad (2.61)$$

Pour obtenir un écart de 10% de la contrainte critique, il faut que la pente de la surface libre soit en valeur absolue supérieure à 5,5%.

Ces valeurs ne se rencontrent que durant les premiers instants d'une rupture de barrage. De plus, pour de telles valeurs, la pression n'est plus hydrostatique et les équations de Saint-Venant ne sont plus valides. Nous pouvons donc en conclure que ces effets peuvent être négligés dans tous les cas, soit parce qu'ils sont effectivement négligeables, soit parce que le calcul hydrodynamique basé sur les équations de Saint-Venant est lui-même déjà faux. Si on souhaite corriger la contrainte critique de mise en mouvement dans le cas d'écoulement transitoire rapide, il faut envisager d'utiliser un autre modèle hydraulique, basé par exemple sur les équations de Serre [1953 in Naaim 1991] qui font l'hypothèse d'une répartition linéaire de la pression sur la verticale.

CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE

Le gradient de pression peut jouer un rôle en cas de variation rapide du débit ou de la morphologie du lit. Concernant la traînée et la portance, elles seront modifiées indirectement par la modification du profil vertical des vitesses. Ceci fera l'objet des troisième et quatrième parties.

Nous avons vu dans cette partie que le seuil de mise en mouvement pouvait être modifié par le gradient longitudinal de la cote de la surface libre en régime transitoire rapide, ou par la pente longitudinale du fond, dans le cas d'une morphologie chahutée. Les écoulements transitoires rapides (temps de montée inférieur à 1 mn) sont rares en milieu naturel, alors que la morphologie d'un cours d'eau est naturellement fortement non-uniforme (la pente locale pouvant valoir couramment jusqu'à +/-10 %) de part les successions de faciès. Pour un même débit et un substrat identique, le seuil de mise en mouvement varie donc énormément d'un point à l'autre d'un cours d'eau.

Le paramètre de Shields critique en régime non-uniforme s'écrit :

$$\Psi_{\text{crit}} = \Psi_{\text{Ucrit}} \left[\cos \alpha \left[1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \phi_1} \right] - \frac{C_A}{C} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{1}{g} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{1}{\tan \phi_2} + \frac{\cos \alpha}{\tan \phi_1} \frac{\rho}{(\rho_s - \rho)} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] \quad (2.48)$$

Le premier terme, lié à une géométrie non-uniforme, rend compte du fait que la mise en mouvement est facilitée lorsque la pente du fond augmente.

Le deuxième terme, liés à un écoulement transitoire, est toujours négligeable devant le troisième.

Le troisième terme, également lié à un écoulement transitoire, est négligeable pour tous les écoulements en rivière, sauf durant les premiers instants d'une rupture de barrage ou d'une ouverture brutale de vanne. Si ce terme est non négligeable, les équations de Saint-Venant ne sont plus valides.

PARTIE 3 :
LIENS ENTRE FROTTEMENT AU FOND,
DISSIPATION D'ENERGIE ET VITESSE DEBITANTE

Les approches classiques de l'hydraulique à surface libre, basées sur les équations de Saint-Venant, confondent fréquemment approche dynamique et approche énergétique, dans la mesure où il y a souvent amalgame sémantique entre frottement et dissipation d'énergie. En régime uniforme, la confusion ne prête pas à conséquence, puisque les coefficients de frottement et de dissipation d'énergie sont égaux. Par contre, il n'en est plus rien en régime non uniforme. Il suffit de se pencher sur le cas du ressaut pour s'en convaincre. En effet au passage d'un ressaut, il y a conservation de la quantité de mouvement, donc peu de frottement aux parois, mais une importante dissipation d'énergie. Sans aller jusqu'à ce cas extrême, en régime non-uniforme, l'énergie cinétique turbulente n'est plus liée à la contrainte au fond, car l'équilibre entre sa production à la paroi et sa dissipation au sein de l'écoulement n'est pas atteint. Nous allons donc devoir distinguer frottement et dissipation d'énergie dans la suite de notre analyse.

La détermination de la contrainte au fond est aussi importante pour le calcul de l'écoulement hydraulique moyen (vitesses moyennes au sens de la turbulence) que pour l'estimation du transport solide par charriage.

En effet, pour l'écoulement hydraulique la contrainte au fond représente l'action des particules constituant le fond sur ce dernier, et donc le terme résistant de l'écoulement. Le terme moteur étant la gravité.

Par contre, pour le transport solide, la contrainte au fond représente l'action de l'écoulement sur les particules constituant le fond, et donc le terme moteur du charriage. Le terme résistant étant cette fois la gravité. En effet cette dernière tend à ramener les particules en mouvement vers le fond où ils tendent à s'immobiliser. La dissipation d'énergie est plutôt liée à la turbulence, qui est le moteur de la suspension.

Le charriage et l'écoulement moyen étant très liés à la contrainte au fond, qui représente l'interaction entre l'écoulement et le fond, il nous faudra déterminer cette contrainte en fonction de la vitesse débitante et des caractéristiques des particules constituant le fond. La suspension et la turbulence sont très liées, il nous faudra déterminer le lien entre l'intensité de la turbulence et la contrainte au fond.

Il existe un certain nombre de résultats concernant les écoulements externes, qui ne sont certes pas nécessairement transposables tels quels, mais sur lesquels nous allons nous appuyer. Nous entendons par écoulements externes, des écoulements semi-infinis, dont les conditions aux limites peuvent être considérées comme fixées à l'infini.

Le lien entre contrainte au fond, dissipation d'énergie et vitesse débitante se fait par l'intermédiaire du profil vertical des vitesses. Toutes les lois donnant la contrainte au fond ou la dissipation d'énergie, en fonction de la vitesse débitante, ont été établies en régime uniforme, comme celle de Manning-Strickler [1923 in Graf 1971] qui est la plus utilisée. Or, la non-uniformité de l'écoulement modifie le profil vertical des vitesses [Cardoso 1989, Coleman et al. 1977]. Les liens établis en régime uniforme entre vitesse débitante et contrainte au fond ne sont alors plus valables.

Le facteur producteur de turbulence est le profil vertical des vitesses, ou plus exactement ses gradients verticaux et la rugosité du fond. Le facteur dissipateur est la viscosité de l'eau. Le taux de dissipation d'énergie est sans doute un bon descripteur de l'intensité de la turbulence. En régime uniforme, l'intensité de la turbulence est liée à la contrainte au fond par le profil des vitesses, puisque qu'il y a équilibre entre production et dissipation d'énergie turbulente. Par contre en régime non-uniforme, l'inertie de la turbulence et la déformation des profils de vitesses font que ce n'est plus le cas. Il ne faudra pas perdre de vue que l'inertie de la turbulence pourra également modifier en retour le profil des vitesses.

Après un bref état de l'art, nous allons dans un premier temps établir les équations des profils pseudo-similaires des vitesses et définir leur domaine de validité. Moyennant un modèle de turbulence de type longueur de mélange et un développement limité au voisinage du régime uniforme, nous calculerons les profils des vitesses, les corrections à apporter à l'expression de la contrainte au fond, ainsi qu'aux équations de Saint-Venant.

3.1 ETAT DE L'ART

3.1.1 Profils verticaux des vitesses

Les profils verticaux des vitesses longitudinales en couche limite en régime établi sur parois rugueuses sont considérés comme logarithmiques [Chow 1959] :

$$u(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) \text{ avec } k_s \text{ hauteur des aspérités} \quad (1.68)$$

Coleman et al. [1977] ont montré que dans une couche limite externe en écoulement accéléré en équilibre, sur fond rugueux, les profils adimensionnels des vitesses étaient similaires avec un profil logarithmique près du fond. Cette situation correspond à une variation exponentielle de la vitesse extérieure.

La plupart des auteurs [in Cardoso 1989 : Coles 1956, Finley 1966, Mellor & Gibson 1966, McDonald 1969, Yaglom 1979] [Hirt & Thomann 1986], qui ont étudié les écoulements en couche limite externe avec gradient longitudinal de pression, expriment le profil vertical des vitesses en utilisant des lois de type Coles [1956 in Cardoso 1989]. La

plupart des travaux sont relatifs aux écoulements décélérés. L'expression générale de ces profils, où δ est l'épaisseur de la couche limite, est :

$$\frac{U}{u^*} = f\left(\frac{u^*z}{\nu}\right) + \omega\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (3.1)$$

La forme proposée par Coles [1956 in Cardoso 1989], où U_δ est la vitesse à la frontière de la couche limite :

$$\frac{U_\delta - U}{u^*} = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \frac{\Pi}{\kappa} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi z}{\delta}\right)\right] \quad (3.2)$$

En couche limite externe, on utilise les paramètres suivants pour décrire les profils des vitesses :

- l'épaisseur de déplacement:

$$\delta_1 = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{U(z)}{U_\delta}\right) dz \quad (3.3)$$

- l'épaisseur de quantité de mouvement:

$$\delta_2 = \int_0^{+\infty} \frac{U(z)}{U_\delta} \left[1 - \frac{U(z)}{U_\delta}\right] dz \quad (3.4)$$

- le facteur de forme de la couche limite :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (3.5)$$

Des mesures expérimentales [Daily & Harleman 1966, in Cardoso 1989] montrent :

- $H < 1,4$ en régime accéléré,
- $H = 1,4$ en régime uniforme,
- $H > 1,4$ en régime décéléré.

- gradient adimensionnel de pression au fond:

$$\beta_1 = \frac{\delta_1}{\tau_0} \frac{\partial P_f}{\partial x} \quad (3.6)$$

Le paramètre Π de la loi de Coles (3.2) ou la constante additive d'une loi logarithmique classique est alors fonction de β_1 en régime non-uniforme.

Cardoso [1989] a montré que l'écoulement en couche limite accélérée à surface libre sur fond lisse reste logarithmique près du fond (sur 5% du tirant d'eau), mais que les profils de type Coles, mis au point pour les écoulements externes, ne s'appliquent pas de façon satisfaisante aux écoulements à surface libre.

3.1.2 Turbulence

Les expériences menées par Coleman et al. [1977] en régime non uniforme sur fond rugueux, par Bradshaw [1967 in Coleman et al. 1977] et Orlando et al. [1974 in Coleman et al. 1977] sur fond lisse, par Pimenta [1975 in Coleman et al. 1977] sur fond rugueux sans gradient de pression, tendent à confirmer l'universalité de la relation linéaire entre la contrainte de Reynolds et l'énergie cinétique turbulente. Les expériences menées par Coleman et al. [1977] confirme l'hypothèse de Bradshaw [1967] :

$$\frac{-\overline{u'w'}}{2k} \approx 0.145 \pm 5\% \quad (3.7)$$

avec u' et w' les fluctuations des vitesses longitudinales et verticales

L'intensité des fluctuations turbulentes (énergie turbulente et contrainte de Reynolds) augmente en régime décéléré, et diminue en régime accéléré, que se soit en couche limite externe permanente accélérée sur fond rugueux [Coleman et al. 1977], en écoulement transitoire à surface libre en milieu estuarien [Anwar & Atkins 1980], ou en écoulement permanent accéléré à surface libre et sur fond lisse [Cardoso 1989].

De plus, les observations en écoulement dans un convergent [Hussain & Ramjee 1976] et en écoulement accéléré à surface libre [Cardoso 1989], montrent que l'intensité de la turbulence tend à diminuer et à se répartir uniformément sur la verticale dans le cas d'un écoulement accéléré. Le rapport u'/u^* étant divisé par un facteur 2 dans le cas d'une contre-pente de 5° .

Cardoso [1989] a recalculé les longueurs de mélange à partir de ses mesures. Il observe une augmentation importante de la longueur de mélange en régime accéléré (de 100% à 500%), dès que l'on s'éloigne un peu du fond.

Les profils des vitesses restant logarithmiques près du fond, et le fond étant le lieu principal de production de la turbulence, on peut penser que le processus de production de turbulence sera peu modifié en régime non-uniforme.

3.1.3 Contrainte au fond

3.1.3.1 En régime uniforme

Les formules utilisées classiquement pour relier le coefficient de frottement ou le taux de dissipation d'énergie en régime uniforme, noté λ_u , à la vitesse débitante dans un écoulement à surface libre sur fond rugueux sont toutes une expression du coefficient de Chezy [Chow 1959] noté C :

$$\lambda_u = \frac{\tau_0}{\rho U_m^2} = \frac{g}{C^2} \quad (3.8)$$

L'expression la plus utilisée pour exprimer le coefficient de Chezy est celle de Manning-Strickler [1923 in Graf 1971] :

$$C = K_S R_H^{1/6} \quad \text{avec } K_S : \text{coefficient de Strickler} \quad (3.9)$$

3.1.3.2 En régime permanent non-uniforme

Les mesures effectuées par Cardoso [1989] permettent d'observer les modifications de la contrainte au fond, en régime accéléré sur paroi lisse. Nous avons reconstitué dans le tableau 2.1 ci-dessous les écarts en % entre la contrainte mesurée et la contrainte calculée en régime uniforme :

Pente en %	5,2	5,2	8,7	8,7	12,3
Écarts de la contrainte en %	37	34	45	31	48

Tableau 2.1 - Reconstitution des écarts de la contrainte au fond en régime accéléré par rapport au régime uniforme sur fond lisse, d'après Cardoso [1989]

L'accélération a bien un effet sur la contrainte. Ceci étant, ces données ne permettent pas de quantifier cet effet par une relation mathématique.

3.1.3.3 En régime transitoire

La plupart des travaux ont été menés sur les vagues. Les vagues périodiques quant à elles nous intéresseront moins, car elles sont d'une certaine manière en état d'équilibre, le phénomène physique étant caractérisé par la fréquence de ces dernières. Les résultats concernant les ondes solitaires [Weiss 1992] ou les écoulements estuariens [Anwar & Atkins 1980] se rapprochent plus des écoulements en rivière.

Il existe néanmoins une différence majeure entre le passage d'une onde de crue et la propagation d'une onde solitaire. Dans le dernier cas le débit moyen au cours du temps est nul et l'onde est provoquée par une perturbation de la cote de la surface libre. Par contre, dans le cas qui nous intéresse, l'onde est due à une variation de débit au cours du temps, il n'y aura a priori pas d'inversion du sens de l'écoulement, même près du fond.

3.2 EQUATIONS DES PROFILS SIMILAIRES OU PSEUDO-SIMILAIRES

L'objectif de ce paragraphe est de présenter l'établissement d'équations prenant en compte le régime non uniforme, en supposant des profils de vitesses pseudo-similaires. Un profil est dit similaire, si son profil adimensionnel ne dépend pas de l'abscisse longitudinale. Il est dit pseudo-similaire si les variations du profil adimensionnel en fonction de l'abscisse longitudinale restent faibles.

Nous allons dans un premier temps rappeler l'établissement des équations générales des profils verticaux adimensionnels des vitesses, ainsi que les équations des profils similaires en écoulement externe, dites de Falkner-Skan [Schlichting 1979, Cebeci 1986]. Nous nous attarderons ensuite sur le cas des écoulements à surface libre. Les travaux présentés ci-dessous ont été menés en parallèle, puis en collaboration avec ceux Pascal Hamm [1996].

3.2.1 Rappel de l'établissement des équations générales

Nous allons maintenant rappeler l'établissement des équations générales régissant les profils adimensionnels des vitesses. La largeur de l'écoulement peut varier, par contre, nous négligerons les effets de bord latéraux.

Nous partons de l'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes suivant x (axe de l'écoulement) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{xVol} \quad (3.12)$$

avec F_{xVol} : composante des forces de volume suivant x

Nous utiliserons également l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.13)$$

Nous allons transformer l'équation de quantité de mouvement (3.12) par le changement de variable (3.14) décrit ci-dessous. Les vitesses sont adimensionnalisées par U_c vitesse caractéristique de l'écoulement, les cotes sont adimensionnalisées par ζ épaisseur caractéristique de l'écoulement de paroi. U_c et ζ dépendent a priori de l'abscisse x et du temps t, mais sont indépendants de la cote z. On fait ainsi apparaître le profil vertical adimensionnel des vitesses longitudinales noté f, on notera f' sa dérivée et F sa primitive :

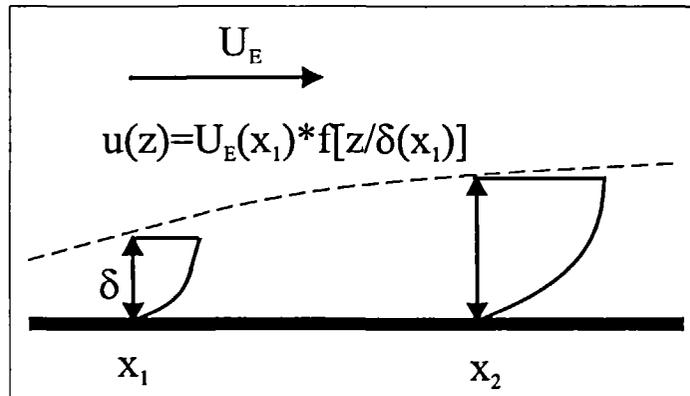
$$\frac{U(z)}{U_c} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{\zeta}; \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad F = \int_0^\eta f(\mu) d\mu \quad (3.14)$$

On montre (cf Annexe 1) que l'équation générale des profils similaires s'écrit :

$$\frac{\zeta}{U_c^2} \frac{\partial U_c}{\partial t} f - \frac{1}{U_c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \eta f' + \frac{\zeta}{U_c} \frac{\partial U_c}{\partial x} (f^2 - f'F) - \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] f'F =$$

$$-\frac{\zeta}{U_c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} + \frac{1}{\zeta U_c} [v_i f'] + T \quad \text{avec} \quad T = \zeta \left[f' \frac{\partial F}{\partial x} - f \frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{\zeta}{U_c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.31)$$

Le terme T représente le taux de déformation du profil adimensionnel des vitesses en fonction du temps et de l'espace. Si le terme T est nul, alors le profil des vitesses n'est fonction ni de l'espace, ni temps. On dit alors que le profil est similaire, comme l'illustre la figure 3.1.



3.1 - Profils similaires

3.2.2 Écoulements externes 2D permanents le long d'une paroi

Dans le cas des écoulements externes laminaires permanents de largeur constante, U_c est la vitesse extérieure à l'infini notée U_e , et ζ l'épaisseur de la couche limite notée δ .

On considère dans le cas présent que la pression généralisée ne varie pas en fonction de z . On peut donc la relier à la vitesse extérieure loin de la paroi :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (3.32)$$

La largeur constante se traduit par : $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.33)$

En substituant (3.32) et (3.33) dans (3.31), on obtient :

$$\frac{\delta}{U_c^2} \frac{\partial U_e}{\partial t} (f-1) - \frac{1}{U_e} \frac{\partial \delta}{\partial t} \eta f' + \frac{\delta}{U_e} \frac{\partial U_e}{\partial x} (f^2 - f'F - 1) - \frac{\partial \delta}{\partial x} f'F = \frac{1}{\delta U_e} [v f'] + T \quad (3.34)$$

En régime permanent, on obtient à partir de (3.34) l'équation de Falkner-Skan [Schlichting 1979] qui s'écrit :

$$\delta \frac{\partial U_e}{\partial x} (f^2 - f'F - 1) - \frac{\partial \delta}{\partial x} U_e f'F = \frac{1}{\delta} [vf']' \quad (3.35)$$

Pour que les profils soient similaires, il faut que les coefficients de l'équation (3.35) en f , f' et F dépendent linéairement les uns des autres. Ceci garantit que les coefficients peuvent être rendus constants, et que la solution de l'équation (3.35) est similaire. La condition de profils similaires ($T = 0$) s'écrit alors :

$$\delta \frac{\partial U_e}{\partial x} = AU_e \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (3.35) \quad \text{et} \quad \delta^2 \frac{\partial U_e}{\partial x} = Bv \quad (3.36) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

3.2.3 Ecoulements confinés :

Brady & Acrivos [1981] ont déterminé des profils similaires dans le cas d'un écoulement cisailé entre deux plaques horizontales avec une vitesse en haut qui augmente avec l'abscisse. L'équation les régissant est obtenue en posant $\zeta = a$ la distance constante entre les deux plaques. Dans ce cas seule la dérivée de la vitesse par rapport à l'abscisse est non nulle. D'où :

$$a^2 \frac{\partial U_e}{\partial x} (f^2 - f'F) = vf''$$

On a néanmoins du mal à imaginer quel type d'écoulement remplit ces conditions en pratique.

3.2.4 Ecoulements à surface libre

En écoulement à surface libre avec pression hydrostatique, U_c est la vitesse débitante notée U_m et ζ est la hauteur d'eau notée h .

L'hypothèse de pression généralisée hydrostatique nous donne :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = \rho g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (3.37)$$

En substituant (3.37) dans (3.31), et en remplaçant U_c et ζ , par respectivement U_m et h , on obtient :

$$\frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} f - \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} \eta f' + \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} f^2 - \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] f' F =$$

$$-\frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \frac{1}{h U_m} [v_t f'] + T \quad (3.49) \quad \text{avec} \quad T = h \left[f' \frac{\partial F}{\partial x} - f \frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{h}{U_m} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.38)$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial U_m}{\partial x} + U_m \frac{\partial h}{\partial x} + U_m \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.39)$$

En substituant (3.39) dans l'équation (3.38), on obtient :

$$\frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} f + \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} [F - \eta] f' + \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} f^2 = -\frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \frac{1}{h U_m} [v_t f'] + T \quad (3.40)$$

Il est intéressant de noter que les profils des vitesses ici ne dépendent pas du gradient longitudinal de la largeur, alors que les équations ont été établies pour une largeur variable. La variation de la vitesse débitante intègre en fait cette variation de largeur.

On peut également donner une expression faisant apparaître le profil adimensionnel des contraintes dans la direction de l'écoulement :

$$\sigma(\eta) = \frac{\tau(\eta)}{\tau_{0u}} = \frac{\tau(\eta)}{\lambda_u \rho U_m^2} \quad (3.41)$$

On obtient :

$$\frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} f + \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} [F - \eta] f' + \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} f^2 = -\frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \lambda_0 \sigma' + T \quad (3.42)$$

On utilisera les gradients adimensionnels suivants, définis en (1.16) à (1.20) :

$$\omega_0 = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad \omega_1 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad \omega_2 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} \quad (3.43)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \omega_4 = \frac{1}{\lambda_u} \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right]$$

On peut écrire (3.42) à l'aide des gradients adimensionnels (3.43) :

$$\omega_1 f + \omega_2 f^2 + \omega_3 (F - \eta) f' = \omega_0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_u} \sigma' + \frac{T}{\lambda_u} \quad (3.44)$$

$$\text{avec} \quad T = h \left[f' \frac{\partial F}{\partial x} - f \frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{h}{U_m} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.38)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (3.42) en régime permanent, en faisant intervenir le nombre de Froude : $Fr = \frac{U_m}{\sqrt{gh}}$ et le nombre de Reynolds : $Re = \frac{U_m h}{\nu}$

$$\frac{Fr^2}{Re} \left(\frac{v_t}{v} f'' + f' \frac{v_t'}{v} \right) + I = \frac{\partial h}{\partial x} (1 - Fr^2 f^2) - \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} Fr^2 f^2 + h Fr^2 \left(f \frac{\partial f}{\partial x} - f' \frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (3.45)$$

3.2.5 Absence de profils similaires en cas de surface libre

Comme pour les écoulements externes, nous nous plaçons dans un écoulement laminaire permanent de largeur constante. Le profil des vitesses est alors régi par une simplification de l'équation (3.40) :

$$\frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} f^2 + \frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} = \frac{1}{h U_m} [v_t f'] + T \quad (3.46)$$

Les conditions de similarité des profils imposent :

$$\frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} = A \frac{v}{h U_m} \quad (3.47) \quad \text{et} \quad \frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} = B \frac{v}{h U_m} \quad (3.48)$$

où A et B sont des constantes

Par ailleurs, la conservation du débit Q impose :

$$h U_m = Cste \Leftrightarrow h \frac{\partial U_m}{\partial x} = - U_m \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.49)$$

Les relations (3.60), (3.61) et (3.62) permettent de déduire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= - \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} = -A \frac{v}{h U_m} = Cste \\ \Rightarrow \frac{\partial Z_s}{\partial x} &= Cste \Rightarrow \frac{gh}{U_m^2} = Cste \Rightarrow h = Cste \end{aligned} \quad (3.50)$$

La condition des profils similaires impose donc un tirant d'eau constant, donc le régime uniforme. Nous voyons donc qu'en écoulement à surface libre, les profils similaires n'existent qu'en régime uniforme, ceci vient du fait que la vitesse qui gouverne l'écoulement n'est plus une vitesse à l'infini, mais une vitesse débitante et que la couche limite (ici l'écoulement tout entier) est bornée par une surface imperméable : la surface libre. Du point de vue des équations, la différence par rapport aux écoulements externes vient du fait que nous avons supprimé un degré de liberté en imposant l'imperméabilité de la surface libre. Ceci est vrai a fortiori pour les écoulements turbulents à surface libre.

Il reste possible d'assouplir ces conditions en considérant des profils pseudo-similaires : localement h et $\partial h / \partial x$ sont supposés constantes ; pour cela il faut que les variations de h soient suffisamment lentes.

Il faudra déterminer le domaine de validité des équations des profils pseudo-similaires par rapport aux gradients longitudinaux et temporels.

Pour cela, il faudra tout d'abord déterminer une approximation de la contrainte au fond au second ordre près, puis calculer le profil des vitesses au deuxième ordre près par rapport aux gradients spatiaux et temporels, et donner enfin une approximation au premier ordre près du second membre de l'équation des profils pseudo-similaires des vitesses.

3.3 CONTRAINTE AU FOND AU 2^{ème} ORDRE PRES

Nous allons tout d'abord établir l'invariance au deuxième ordre près par rapport aux gradients longitudinaux et temporels du moment d'ordre 1 des équations de Prandtl, dans le cas d'un écoulement turbulent, puis en déduire l'expression de la contrainte au fond au second ordre près.

3.3.1 Les deux premiers moments des équations de l'écoulement 2D à surface libre

Les équations de conservation de la quantité de mouvement selon x et de la masse s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{xVol} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

En intégrant sur la verticale les différents moments de l'équation (3.12) en faisant l'hypothèse de répartition hydrostatique de la pression, on obtient les équations des moments des équations de conservation de la quantité de mouvement (cf Annexe 2.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[Lh U_m^{n+1} \int_0^1 \frac{f(\eta)^{n+1}}{n+1} d\eta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[Lh U_m^{n+2} \int_0^1 \frac{f(\eta)^{n+2}}{n+1} d\eta \right] = \\ -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} Lh U_m^n \int_0^1 f(\eta)^n d\eta + \lambda_u L U_m^{n+2} \int_0^1 f(\eta)^n \frac{\partial \sigma(\eta, f(\eta)')}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \quad (3.77)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'obtient en prenant $n = 0$ dans l'équation (3.77) et s'écrit après simplifications (cf Annexe 2.2) :

$$\beta_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \beta_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \beta_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_0 \frac{U_m^2}{h} - U_m^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \quad (3.87)$$

En introduisant les variables adimensionnelles rappelées en (3.56) dans l'équation (3.87), l'équation adimensionnelle de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + \beta_3 \omega_3 = \omega_0 - \frac{\lambda_0}{\lambda_u} + \frac{h}{\lambda_u} \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \quad (3.88)$$

L'équation conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'obtient en prenant $n = 1$ dans l'équation (3.77) et s'écrit après simplifications (cf Annexe 2.3) :

$$\alpha_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \alpha_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \alpha_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_1 \frac{U_m^2}{h} - \frac{1}{2} U_m \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + U_m \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] \quad (3.94)$$

En introduisant les variables adimensionnelles rappelées en (3.56) dans l'équation (3.93), l'équation adimensionnelle de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 = \omega_0 - \frac{\lambda_1}{\lambda_u} - \frac{1}{2} \frac{h}{\lambda_u} \left[\frac{1}{U_m} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] \quad (3.95)$$

Le régime uniforme

En régime uniforme, les deux équations (3.87) et (3.94) se réduisent à une seule :

$$gI = \lambda_0 \frac{U_m^2}{h} = \lambda_1 \frac{U_m^2}{h} \quad (3.96)$$

D'où : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_u = \frac{g}{C^2}$ avec C : coefficient de Chezy (3.97)

3.3.2 Conditions de l'invariance l'équation de conservation de l'énergie

Nous allons montrer qu'avec une condition sur la turbulence, le taux de dissipation de l'énergie λ_1 est stationnaire au voisinage du régime uniforme.

Comme au paragraphe précédent, nous allons rendre compte de la non-uniformité du régime de l'écoulement au travers des trois variables adimensionnelles ω_1 , ω_2 et ω_3 . Nous allons effectuer un développement limité au voisinage du régime uniforme, par rapport à ces trois variables et à leurs gradients longitudinaux et temporels.

Nous rappelons :

$$\frac{u(z)}{U_m} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{h} \quad (3.14) \quad \text{et} \quad \frac{\tau(z)}{\lambda_u \rho U_m^2} = \sigma(\eta, f') \quad (3.41)$$

Le développement limité de f' au voisinage du régime uniforme s'écrit :

$$f' = f_u' \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right] \quad (3.100)$$

$$\text{avec} \quad |\phi|^2 = \sum_{i=1}^9 \int_0^1 \phi_i'^2 d\eta \quad (3.101)$$

Pour ne pas surcharger les écritures nous noterons :

$$O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) = O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \quad (3.102)$$

Le taux de dissipation d'énergie s'écrit :

$$\int_0^1 \sigma(\eta, f'(\eta)) f'(\eta) d\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_u} \quad (3.103)$$

Par un développement limité au voisinage du régime uniforme du taux de dissipation d'énergie, il est démontré (cf Annexe 3) que ce dernier est invariant au second ordre près à la condition que la contrainte puisse se mettre sous les formes :

$$\sigma(\eta, f') = \sigma_\eta(\eta) f'^\alpha \quad (3.121) \quad \Leftrightarrow \quad \tau(z) = \rho U_m^2 \varphi(z) \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial u}{\partial z} \right]^\alpha \quad (3.122)$$

Sous la condition (3.122), l'équation de conservation de l'énergie est invariante au second ordre près par rapport au régime uniforme.

En particulier un écoulement laminaire ($\alpha = 1$) et un écoulement turbulent suivant le modèle de longueur de mélange ($\alpha = 2$) vérifient cette condition, les combinaisons linéaires de fonctions de ce type avec des coefficients α différents ne vérifient pas la condition.

Par contre la condition (3.122) sur l'expression de la contrainte en fonction des gradients verticaux des vitesses est contraignante. En effet, elle suppose que la turbulence est établie et ne dépend que du champ moyen local, c'est-à-dire à l'abscisse considérée. Ceci exclut tout phénomène d'inertie de la turbulence. Nous discuterons cette hypothèse dans la quatrième partie à la lumière des comparaisons entre les conclusions découlant des hypothèses faites ici et des résultats expérimentaux.

3.3.3 Expression de la contrainte au fond au 2^{ème} ordre près

Dans ce paragraphe, nous allons établir une approximation de la contrainte au fond au 2^{ème} ordre près par rapport aux gradients adimensionnels longitudinaux et temporels de

l'écoulement, à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Dans un premier temps, nous allons établir l'expression générale en fonction des coefficients de Boussinesq et Coriolis, puis nous exprimerons ces coefficients dans le cas d'une loi logarithmique pour un écoulement turbulent de paroi.

3.3.3.1 Calcul de la contrainte au fond en régime non uniforme

Le calcul d'un écoulement au voisinage du régime uniforme pourra donc se faire en utilisant l'équation de conservation de l'énergie, dont les coefficients sont constants au second ordre près par rapport au régime uniforme.

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + \beta_3 \omega_3 = \omega_0 - \frac{\lambda_0}{\lambda_u} + \frac{h}{\lambda_u} \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \quad (3.88)$$

L'équation de l'énergie s'écrit par substitution de (3.120) dans l'équation (3.95) :

$$\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 = \omega_0 - 1 - O(|\phi'|^2 \omega_i \omega_j) - \frac{1}{2} \frac{h}{\lambda_u} \left[\frac{1}{U_m} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] \quad (3.123)$$

En faisant la différence entre les équations (3.88) et (3.123), nous obtenons l'expression du coefficient de frottement au second ordre près :

$$\lambda_0 = \lambda_u \left[1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \beta_i) \omega_i + O(|\phi'|^2 \omega_i \omega_j) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \quad (3.124)$$

L'équation (3.124) peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \lambda_u - \beta_3 \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} + (\alpha_3 - \beta_3) \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} - 2\alpha_3 \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] + \lambda_u O(|\phi'|^2 \omega_i \omega_j) \end{aligned} \quad (3.125)$$

Nous renvoyons à l'annexe 4 pour le calcul du dernier terme de l'équation (3.125).

La contrainte au fond au second ordre près se déduit de l'équation (3.124) :

$$\tau_0 \approx \tau_{0u} \left[1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \beta_i) \omega_i + \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h}{U_m} \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \right] \quad (3.140)$$

La contrainte au fond au premier ordre peut également se déduire de l'équation (3.125)

:

$$\begin{aligned} \tau_0 \approx & \tau_{0u} - \beta_3 \rho h \frac{\partial U_m}{\partial t} + (\alpha_3 - \beta_3) \rho U_m \frac{\partial h}{\partial t} - 2\alpha_3 \rho h U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2} \rho U_m^2 \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.141)$$

L'équation (3.141) peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} \tau_0 \approx & \tau_{0u} - \beta_3 \rho h \frac{\partial U_m}{\partial t} + (3\alpha_3 - \beta_3) \rho U_m \frac{\partial h}{\partial t} + 2\alpha_3 \rho U_m^2 \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] \\ & + \frac{1}{2} \rho U_m^2 \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.142)$$

3.3.3.2 Cas d'un profil logarithmique

Dans le cas d'un profil logarithmique, les coefficients de Boussinesq et de Coriolis valent (cf Annexe 5) :

$$\beta_2 = \alpha_1 \approx 1 + \frac{\lambda_u}{\kappa^2} = 1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \quad (3.155)$$

$$\beta_3 \approx -\frac{\lambda_u}{\kappa^2} = -\frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \quad (3.156)$$

$$\alpha_2 \approx 1 + 3 \frac{\lambda_u}{\kappa^2} - 2 \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} = 1 + 3 \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} - 2 \frac{g^{3/2}}{\kappa^3 K_s^3 h^{1/2}} \quad (3.157)$$

$$\alpha_3 \approx -\frac{\lambda_u}{\kappa^2} + \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} = -\frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} + \frac{g^{3/2}}{\kappa^3 K_s^3 h^{1/2}} \quad (3.158)$$

Le coefficient de frottement en régime non-uniforme, au voisinage du régime uniforme, s'écrit alors à partir de (3.125) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \lambda_u \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} + O(|\phi'|^2 \omega_i \omega_j) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.159)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \lambda_u \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^2} \left[2 - 3 \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] + O(|\phi'|^2 \omega_i \omega_j) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

(3.160)

La contrainte au fond au second ordre près se déduit respectivement des équations (3.141) et (3.142) :

$$\tau_0 \approx \tau_{0u} \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \rho U_m^2 \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \quad (3.161)$$

$$\tau_0 \approx \tau_{0u} \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^2} \left[2 - 3 \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] \right] + \frac{1}{2} \rho U_m^2 \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \quad (3.162)$$

Pour que cette correction ait un sens, il faut que les hauteurs et les vitesses aient été calculées à l'aide de l'équation de conservation de l'énergie.

3.4 Calcul du profil vertical des vitesses et des contraintes au 2^{EME} ordre près

L'objet de ce paragraphe est d'établir les fonctions de corrections au second ordre près du profil des vitesses (ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3) et des contraintes (σ_1, σ_2 et σ_3). Les équations différentielles régissant ces fonctions de corrections seront établies en introduisant des développements limités au voisinage du régime uniforme des profils de vitesses et des profils de contraintes. La connaissance de ces profils est indispensable pour pouvoir calculer les coefficients γ_i et ξ_i qui se trouvent en facteur devant les dérivées secondes. Nous repartons ici des équations établies section 3.2, traitant des profils pseudo-similaires pour les écoulements à surface libre, ainsi que section 3.3, où ont été établies les équations adimensionnelles de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

3.4.1 Etablissement des équations

Nous allons tout d'abord calculer le profil vertical des contraintes :

$$\sigma(\eta) = \frac{\tau(\eta)}{\tau_{0u}} = \frac{\tau(\eta)}{\lambda_u \rho U_m^2} \quad (3.41)$$

Nous rappelons l'équation de quantité de mouvement :

$$\omega_1 f + \omega_2 f^2 + \omega_3 (F - \eta) f' = \omega_0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_u} \sigma' + \frac{T}{\lambda_u} \quad \text{avec} \quad T = h \left[f' \frac{\partial F}{\partial x} - f \frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{h}{U_m} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.44)$$

L'équation de Saint-Venant, qui n'est autre que la forme intégrale de l'équation de quantité de mouvement (3.44), s'écrit :

$$\beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + \beta_3 \omega_3 = \omega_0 - \frac{\lambda_0}{\lambda_u} + \frac{h}{\lambda_u} \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \quad (3.88)$$

En faisant la différence entre (3.44) et (3.88), on obtient :

$$\sigma' + \frac{\lambda_0}{\lambda_u} = \omega_1(f - \beta_1) + \omega_2(f^2 - \beta_2) + \omega_3[(F - \eta)f - \beta_3] + \frac{h}{\lambda_u} \frac{\partial \beta_3}{\partial x} - \frac{T}{\lambda_u} \quad (3.163)$$

Dans un premier temps, on fait l'hypothèse que les profils restent pseudo-similaires, ce qui revient à supposer :

$$h \frac{\partial \beta_3}{\partial x} - T = O(\lambda_u^2 \omega_i \omega_j) \quad (3.164)$$

L'intégrale de (3.164) donne :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] = O(\lambda_u^2 \omega_i \omega_j) \quad (3.165)$$

On a pose :

$$f = f_u \left[1 + \omega_1 \phi_1 + \omega_2 \phi_2 + \omega_3 \phi_3 + O(|\phi_i|^2 \omega_i \omega_j) \right] \quad (3.166)$$

En substituant (3.166) et (3.164) dans (3.163), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma' + \frac{\lambda_0}{\lambda_u} &= \omega_1(f_u - \beta_1) + \omega_2(f_u^2 - \beta_2) + \omega_3[(F_u - \eta)f_u' - \beta_3] \\ &+ O(|\phi_i| \omega_i \omega_j) + O(\lambda_u |\phi_i|^2 \omega_i \omega_j) + O(\lambda_u^2 \omega_i \omega_j) \end{aligned} \quad (3.167)$$

Le coefficient de frottement au second ordre près est donné par l'équation :

$$\lambda_0 = \lambda_u \left[1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \beta_i) \omega_i + O(|\phi_i|^2 \omega_i \omega_j) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] \quad (3.124)$$

En substituant (3.165) dans (3.124), on obtient :

$$\lambda_0 = \lambda_u \left[1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \beta_i) \omega_i + O(|\phi_i|^2 \omega_i \omega_j) \right] + O(\lambda_u^2 \omega_i \omega_j) \quad (3.168)$$

En substituant (3.168) dans (3.166), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma' + 1 &= \omega_1(f_u - \alpha_1) + \omega_2(f_u^2 - \alpha_2) + \omega_3[(F_u - \eta)f_u' - \alpha_3] \\ &+ O(|\phi_i| \omega_i \omega_j) + O(\lambda_u |\phi_i|^2 \omega_i \omega_j) + O(\lambda_u \omega_i \omega_j) \end{aligned} \quad (3.169)$$

Le développement limité de σ s'écrit :

$$\sigma = \sigma_u \left[1 + \omega_1 \zeta_1 + \omega_2 \zeta_2 + \omega_3 \zeta_3 + O(|\zeta_i|^2 \omega_i \omega_j) \right] \quad (3.170)$$

Le développement limité de $\sigma'+1$ s'écrit alors :

$$\sigma'+1 = \sigma_u' \left[1 + \omega_1 \zeta_1' + \omega_2 \zeta_2' + \omega_3 \zeta_3' + O(|\zeta_i'|^2 \omega_i \omega_j) \right] + 1 \quad (3.171)$$

Comme $\sigma_u' = -1$, (3.171) s'écrit :

$$\sigma'+1 = - \left[\omega_1 \zeta_1' + \omega_2 \zeta_2' + \omega_3 \zeta_3' + O(|\zeta_i'|^2 \omega_i \omega_j) \right] \quad (3.172)$$

Les équations (3.170) et (3.172) donnent :

$$\begin{aligned} -\omega_1 \zeta_1' - \omega_2 \zeta_2' - \omega_3 \zeta_3' &= \omega_1 (f_u - \alpha_1) + \omega_2 (f_u^2 - \alpha_2) + \omega_3 [(F_u - \eta) f_u' - \alpha_3] \\ &+ O(|\phi_i| \omega_i \omega_j) + O(\lambda_u |\phi_i|^2 \omega_i \omega_j) + O(\lambda_u^2 \omega_i \omega_j) + O(|\zeta_i'|^2 \omega_i \omega_j) \end{aligned} \quad (3.173)$$

L'égalisation des deux membres de l'équation (3.173) pour toutes valeurs de ω_1 , ω_2 et ω_3 , donne après intégration (cf Annexe 6.1) :

$$\zeta_1(\eta) = \beta_1 - \int_0^\eta f_u(\mu) d\mu + \alpha_1(\eta - 1) \quad (3.177)$$

$$\zeta_2(\eta) = \beta_2 - \int_0^\eta f_u^2(\mu) d\mu + \alpha_2(\eta - 1) \quad (3.178)$$

$$\zeta_3(\eta) = \beta_3 - \int_0^\eta (F_u(\mu) - \mu) f_u'(\mu) d\mu + \alpha_3(\eta - 1) \quad (3.179)$$

La loi de comportement va déterminer le profil des vitesses, nous prendrons une loi de comportement classique en fonction puissance :

$$\sigma(\eta, f') = \lambda_u \sigma_\eta(\eta) f'^\alpha \quad (3.121) \quad \text{d'où} \quad f' = \left[\frac{\sigma}{\lambda_u \sigma_\eta} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.185)$$

Le développement limité de la contrainte adimensionnelle s'écrit :

$$\sigma(\eta) = \sigma_u(\eta) \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \zeta_i(\eta) + O(|\zeta_i|^2 \omega_i \omega_j) \right] \quad (3.170)$$

Le développement limité de f' par rapport aux ζ_i s'écrit :

$$f' = \left[\frac{\sigma_u(\eta)}{\lambda_u \sigma_\eta(\eta)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^3 \omega_i \zeta_i(\eta) + O(|\zeta_i|^2 \omega_i \omega_j) \right] \quad (3.186)$$

Par ailleurs, le développement limité de f' s'écrit à partir de (3.165):

$$f' = f_u' \left[1 + \omega_1 \phi_1' + \omega_2 \phi_2' + \omega_3 \phi_3' + O(|\phi_i'|^2 \omega_i \omega_j) \right] \quad (3.187)$$

L'égalité entre les équations (3.186) et (3.187) est vraie pour toute valeur du triplet (ω_1 , ω_2 , ω_3). On a donc :

$$f_u' = \left[\frac{\sigma_u(\eta)}{\lambda_u \sigma_\eta(\eta)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.188) \quad \text{et} \quad \phi_i' = \frac{1}{\alpha} \zeta_i(\eta) \quad (3.189)$$

L'équation (3.189) peut donc être intégrée :

$$\phi_i(\eta) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\eta \zeta_i(\mu) d\mu \quad (3.190)$$

Comme $\sigma_u(\eta) = 1 - \eta$ (3.108), l'équation (3.188) s'écrit :

$$f_u(\eta) = \int_0^\eta \left[\frac{1-\mu}{\lambda_u \sigma_\eta(\mu)} \right]^{1/\alpha} d\mu \quad (3.191)$$

Par ailleurs, le fait que l'intégrale du profil des vitesses doit être égale à 1, va nous permettre de calculer λ_u à partir de la loi de comportement du fluide en calculant l'intégrale de l'équation (3.191) :

$$\int_0^1 \int_0^\eta \left[\frac{1-\mu}{\lambda_u \sigma_\eta(\mu)} \right]^{1/\alpha} d\mu d\eta = \int_0^1 f_u(\eta) d\eta = 1 \quad (3.192)$$

D'où :

$$\lambda_u = \left[\int_0^1 \int_0^\eta \left[\frac{1-\mu}{\sigma_\eta(\mu)} \right]^{1/\alpha} d\mu d\eta \right]^\alpha \quad (3.193)$$

3.4.2 Résolution des équations

Nous allons maintenant résoudre les équations des profils de vitesses et des profils de contraintes. Pour les écoulements laminaires, les solutions s'obtiennent analytiquement. Par contre, pour les écoulements turbulents type longueur de mélange, les solutions ne s'obtiennent que numériquement. Pour chaque loi de comportement, nous calculerons également les coefficients de Boussinesq et de Coriolis, le coefficient de dissipation d'énergie ou de frottement en régime uniforme λ_u , ainsi que les coefficients liés aux dérivées secondes (γ_i et ξ_i).

3.4.2.1 Ecoulement laminaire

En régime laminaire, le lien entre la contrainte et le gradient des vitesses est linéaire :

$$\tau(y) = \rho \nu \frac{\partial U(y)}{\partial y} = \rho \nu \frac{U_m}{h} f' \quad (3.196)$$

La contrainte adimensionnelle (3.53) s'écrit : $\sigma(\eta) = \frac{\tau(y)}{\lambda_u \rho U_m^2} = \frac{1}{\lambda_u} \frac{\nu}{U_m h} f'$ (3.197)

Les paramètres de l'équation $\sigma(\eta, f') = \lambda_u \sigma_\eta(\eta) f'^\alpha$ (3.121) sont les suivants :

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_{\eta}(\mu) = \frac{1}{\text{Re}} \Rightarrow \lambda_u = \text{Re} \int_0^1 \int_0^{\eta} [1 - \mu] d\mu d\eta = \frac{\text{Re}}{3} \quad (3.198)$$

Le profil adimensionnel des vitesses en régime uniforme (figure 3.1) s'écrit :

$$f_u = 3 \int_0^{\eta} (1 - \mu) d\mu = \frac{3}{2} \eta [2 - \eta] \quad (3.199)$$

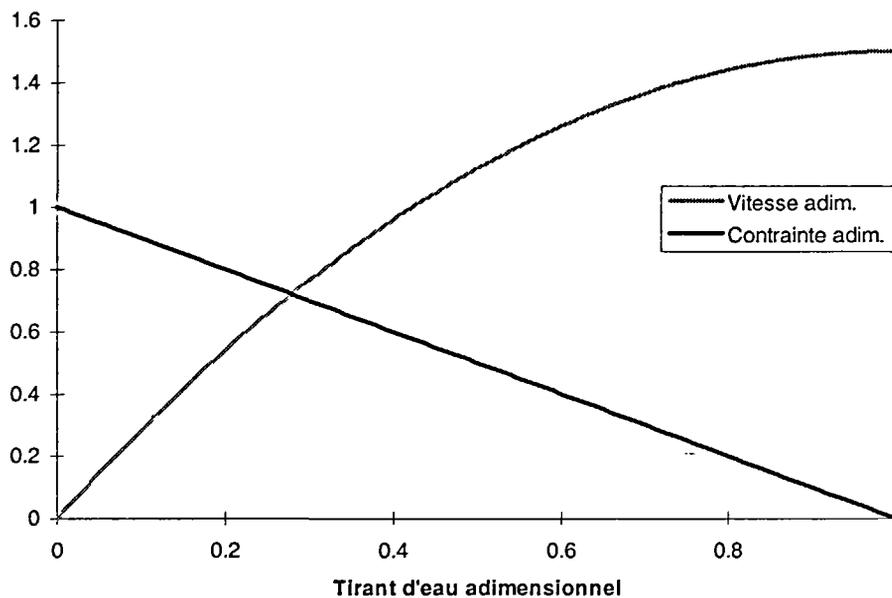


Figure 3.1 - Profil adimensionnel de la contrainte et de la vitesse longitudinale adimensionnelles en fonction de η en régime uniforme laminaire

Les coefficients de Coriolis et de Boussinesc valent (cf Annexe 6.2) :

$$\alpha_2 = 1,54; \alpha_3 = -0,17; \beta_2 = 1,2 \text{ et } \beta_3 = -0,2 \quad (3.202)$$

Les profils adimensionnels des corrections des contraintes et des vitesses par rapport au régime uniforme sont tracés respectivement en figures 3.2 et 3.3 (cf Annexe 6.2).

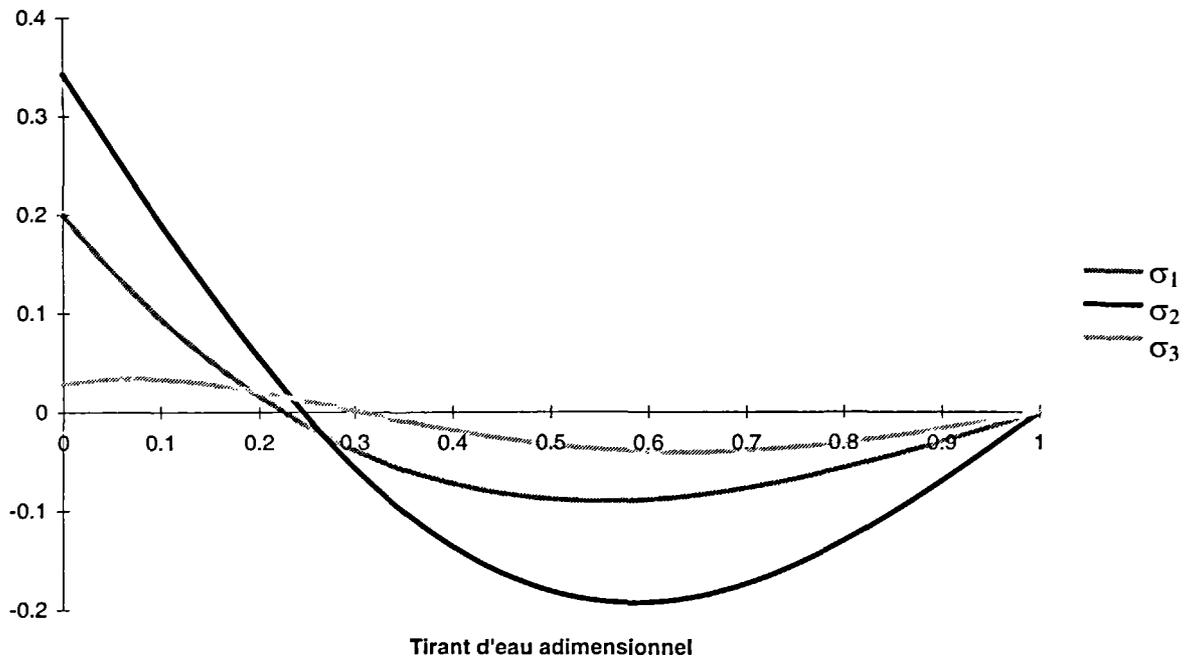


Figure 3.2 - Profils des corrections de la contrainte adimensionnelle en fonction de η en régime non-uniforme laminaire

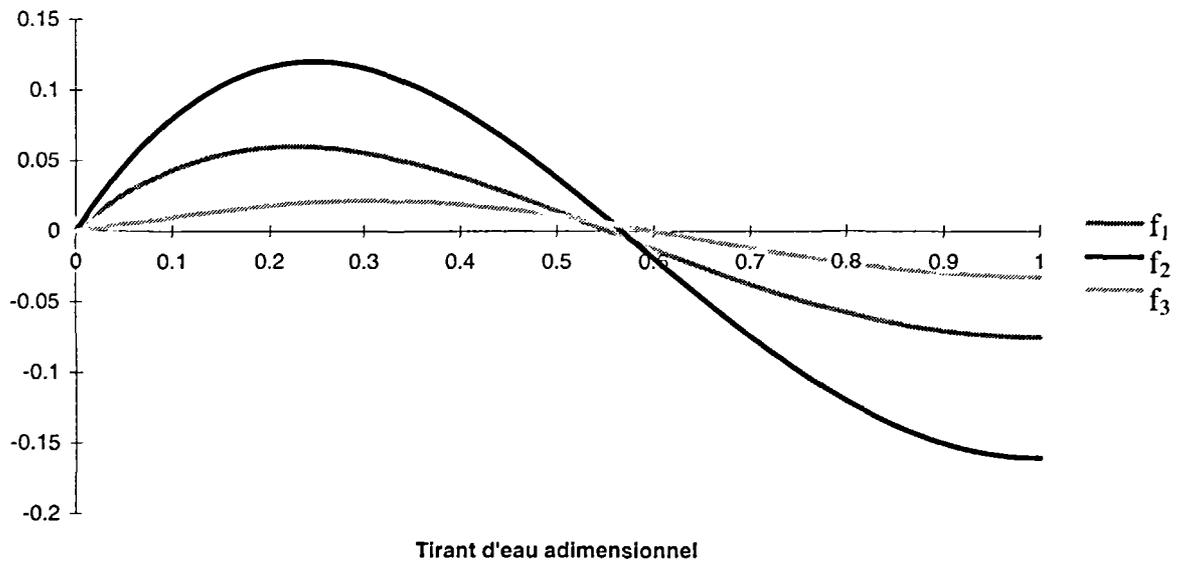


Figure 3.3 - Profils des corrections de la vitesse longitudinale adimensionnelle en fonction de η en régime non-uniforme laminaire

3.4.2.2 Ecoulement turbulent sur parois lisses

Le modèle de longueur de mélange permet d'écrire la contrainte :

$$\tau(y) = \rho l^2(y) \left| \frac{\partial U(y)}{\partial y} \right| \frac{\partial U(y)}{\partial y} = \rho l^2(\eta) \frac{U_m^2}{h^2} f'(\eta) \quad (3.211)$$

Si l'on reprend les notations rappelées au paragraphe précédent, la contrainte adimensionnelle s'écrit :

$$\sigma(\eta) = \frac{\tau(y)}{\lambda_u \rho U_m^2} = \frac{1}{\lambda_u} \frac{l^2(\eta)}{h^2} f'(\eta) \quad (3.212) \text{ et on a : } \alpha = 2 \text{ et } \sigma_\eta(\eta) = \frac{\lambda^2(\eta)}{\lambda_u} \quad (3.213)$$

Le profil adimensionnel des vitesses s'exprime alors :

$$f_u(\eta) = \sqrt{\lambda_u} \int_0^\eta \frac{\sqrt{(1-\mu)}}{\lambda(\mu)} d\mu \quad (3.214)$$

Il faut choisir un modèle de longueur de mélange. Nous avons choisi le modèle le plus classique pour les parois lisses :

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{h} = \chi \eta \quad \text{si } \eta \leq \frac{\lambda_s}{\chi}$$

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{h} = \lambda_s \quad \text{si } \eta \geq \frac{\lambda_s}{\chi} \quad (3.215)$$

avec $\chi = 0,4$ et $\lambda_s = 0,085$

On obtient un coefficient de frottement λ_u de 2.10^{-3} , soit un coefficient de Chezy de 70, puisqu'on a d'après (1.9) :

$$\lambda_u = \frac{g}{C^2} \Leftrightarrow C = \sqrt{\frac{g}{\lambda_u}} \quad (3.216)$$

On obtient également par résolution numérique :

$$\alpha_2 = 1,049, \alpha_3 = -0,016, \beta_2 = 1,017 \text{ et } \beta_3 = -0,017 \quad (3.217)$$

Ces valeurs sont cohérentes avec le profil en puissance 1/7, caractéristique d'un écoulement sur paroi lisse.

Le profil vertical adimensionnel de la vitesse longitudinale en régime uniforme (Fig. 3.4) a été déterminé numériquement par résolution de l'équation différentielle (3.214).

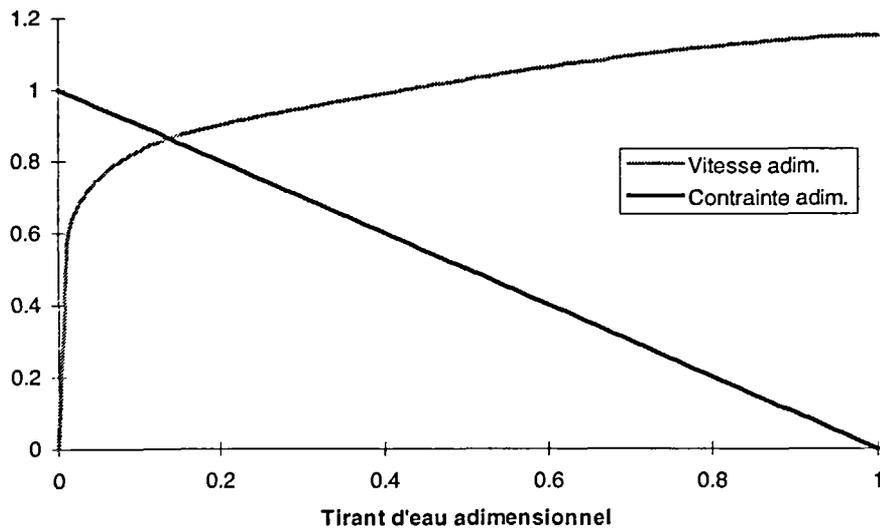


Figure 3.4 - Profil vertical adimensionnel de la vitesse longitudinale et de la contrainte adimensionnelles en régime uniforme turbulent lisse

Les corrections des profils verticaux adimensionnels de la contrainte (figure 3.6), puis de la vitesse longitudinale (figure 3.5) par rapport au régime non-uniforme ont également été déterminées numériquement par résolution des équations différentielles (3.177) à (3.179), et (3.195).

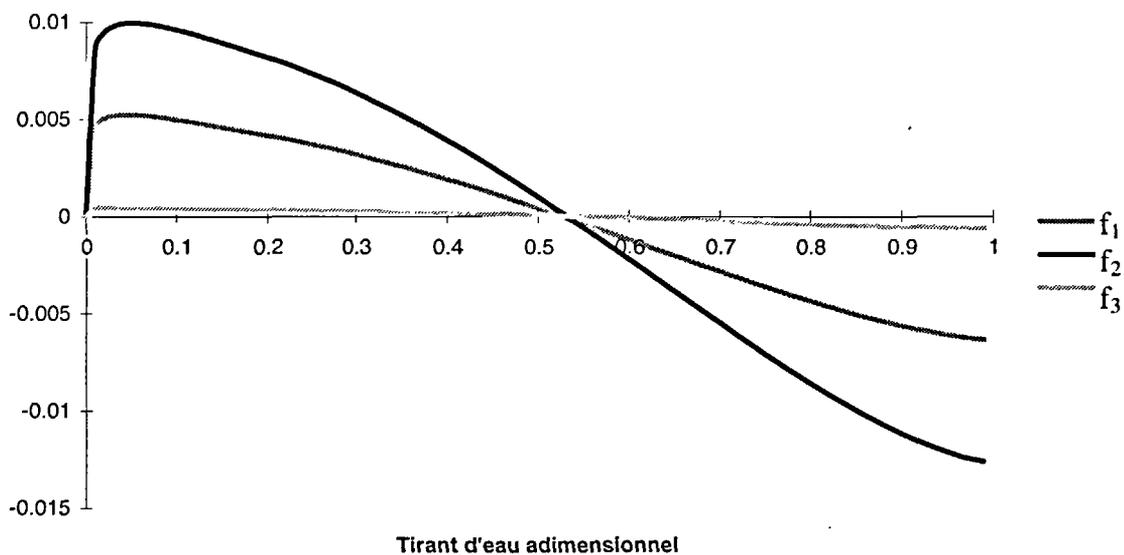


Figure 3.5 - Profils des corrections de la vitesse longitudinale adimensionnelle en fonction de η en régime non-uniforme turbulent lisse ($f_i = f_u \phi_i$)

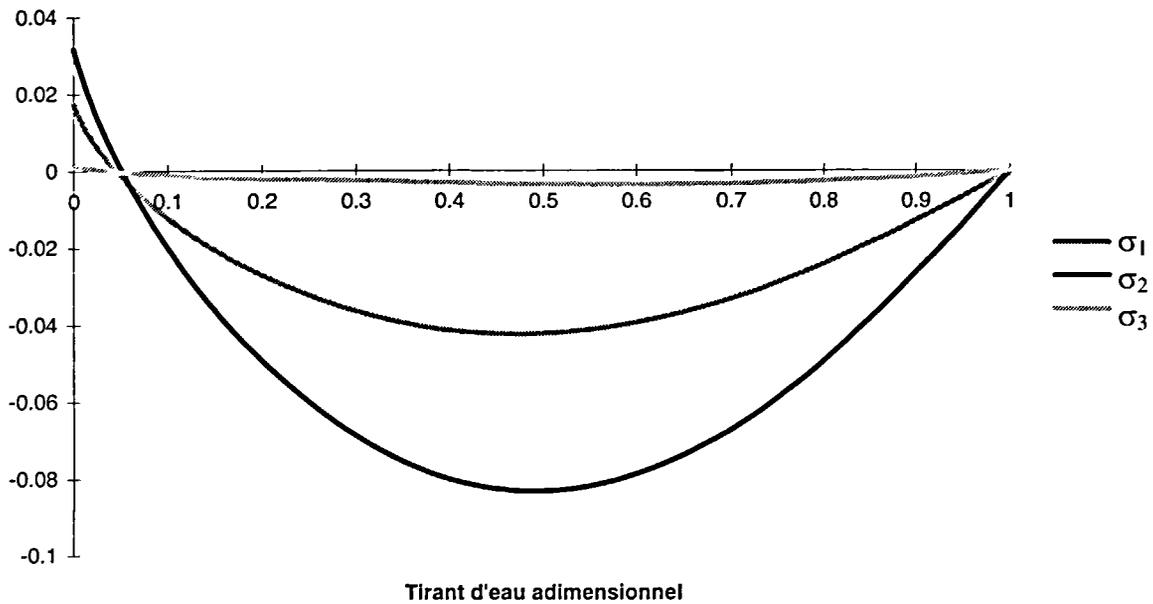


Figure 3.6 - Profils des corrections de la contrainte adimensionnelle en fonction de η en régime non-uniforme turbulent lisse ($\sigma_i = \sigma_u \zeta_i$)

Lorsque les ω_i sont supérieurs en valeur absolue à 1%, les profils doivent commencer à s'écarter de la réalité mesurable, car on observe pour un écoulement accéléré une vitesse maximale en dessous de la surface libre.

Si on fait l'hypothèse de Bradshaw [1967] : $\frac{\overline{-u'w'}}{2k} \approx 0.145 \pm 5\%$ (3.7) l'intensité de la turbulence s'écrit :

$$i_t(\eta) = \frac{2k}{U_m^2} \approx \frac{\overline{-u'w'}}{0.145 U_m^2} = \frac{\tau}{0.145 \rho U_m^2} = 6.9 \lambda_u \sigma(\eta) \approx 6.9 \lambda_u \sigma_u(\eta) \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \zeta_i(\eta) \right] \quad (3.218)$$

L'intensité adimensionnelle de la turbulence (Fig. 3.7) s'écrit à partir de (3.218) :

$$\frac{i_t}{\lambda_u} \approx 6.9 \sigma(\eta) \approx 6.9 \sigma_u(\eta) \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \zeta_i(\eta) \right] \quad (3.219)$$

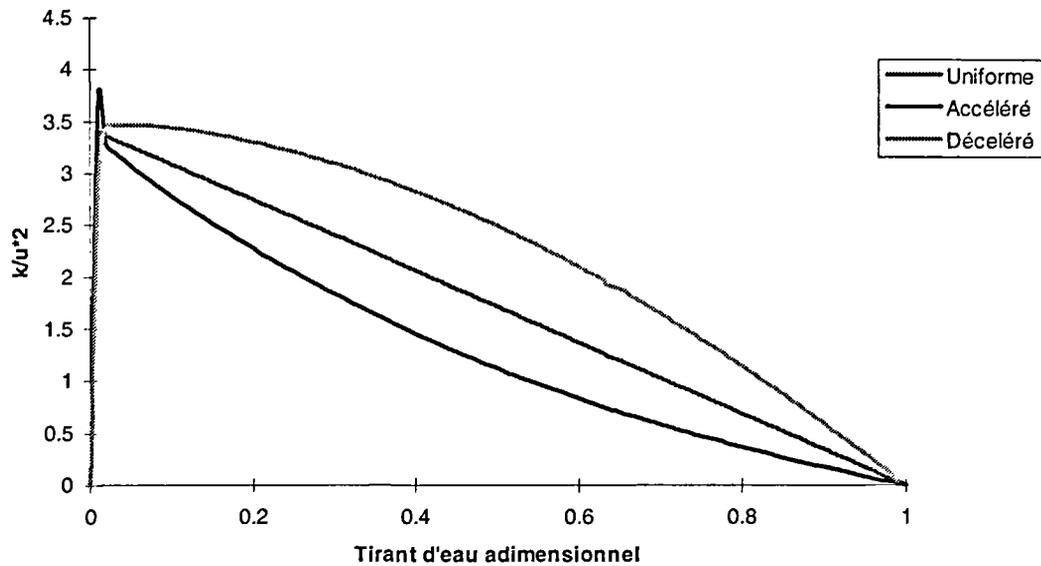


Figure 3.7 - Profil adimensionnel de la turbulence dans un écoulement permanent avec une pente de +0,4% (décéléré) ou -0,4% (accéléré)

On retrouve des résultats qualitatifs cohérents avec les observations expérimentales, à savoir que le rapport de l'intensité de la turbulence sur la contrainte au fond au sein de l'écoulement augmente en régime décéléré et diminue en régime accéléré.

3.5.2.3 Ecoulement turbulent sur parois rugueuses

Pour rendre compte d'un coefficient de frottement à la paroi plus élevé pour les parois rugueuses, nous avons fait varier la pente de la droite donnant la longueur de mélange en fonction de la distance à la paroi, donc la constante de Karman κ . Le tableau 3.1 donne en fonction de κ le coefficient de frottement, ainsi que les coefficients de Coriolis et de Boussinesq.

κ	λ_u	C	α_2	α_3	β_2	β_3
0,4	2.10-3	70	1,049	-0,016	1,017	-0,017
0,5	2,9.10-3	58	1,062	-0,020	1,022	-0,022
0,6	3,9.10-3	50	1,077	-0,025	1,027	-0,027
0,7	5,0.10-3	45	1,093	-0,030	1,032	-0,032
0,8	6,1.10-3	40	1,110	-0,036	1,038	-0,038

Tableau 3.1 Coefficient de frottement, de Coriolis et de Boussinesq en fonction de κ

En faisant varier κ de 0,4 à 0,8 nous retrouvons la gamme classique des parois rugueuses, avec des coefficients de Chezy variant de 70 à 40. Les coefficients de Coriolis et de Boussinesc sont calculés numériquement à partir du profil des vitesses en régime uniforme, également déterminé numériquement. Ces coefficients seront utilisés dans la formule donnant la correction au premier ordre de la contrainte.

3.4.3 Ordre de grandeur des corrections

Nous allons examiner l'ordre de grandeur des variations de la contrainte au fond en régime permanent non-uniforme à largeur constante. Dans ce cas seul $\omega_1 = \omega_3 = 0$.

De plus, on peut exprimer ω_2 en fonction du gradient longitudinal du tirant d'eau :

$$\omega_2 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{\partial h}{\partial x} = -\omega_4 \quad (3.222)$$

Pour cela, nous repartons de l'équation (3.133) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \lambda_u \left[1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \beta_i) \omega_i + h \sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \frac{h}{U_m} \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \right] \\ + O(|\phi|^2 \frac{h}{U_m} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \omega_j) + O(|\phi|^2 h \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) + \lambda_u O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) \end{aligned} \quad (3.133)$$

Moyennant les hypothèses faites dans ce paragraphe, l'équation (3.133) s'écrit :

$$\lambda_0 = \lambda_u \left[1 + (\alpha_2 - \beta_2) \omega_2 + h \gamma_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right] + O(|\phi|^2 h \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) + \lambda_u O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) \quad (3.223)$$

En substituant les expressions de α_2 (3.157) et β_2 (3.155) dans (3.223), on obtient :

$$\lambda_0 = \lambda_u \left[1 - \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \gamma_2 h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \lambda_u O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) + O(|\phi|^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) \quad (3.224)$$

En considérant que K_s est supérieur à 30, ce qui correspond à des rugosités de peau de 10 cm, et que h est supérieur à 0,1 m, on a :

$$\lambda_u = \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} < 0,023 \quad (3.225)$$

$$7,5 < \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] < 12,5 \quad (3.226)$$

Si on prend $\lambda_u = 0,002$, alors :

$$\frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \approx 10 \quad (3.227)$$

Pour que la correction au second ordre près soit valable, il faut que :

$$\gamma_2 h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \ll \lambda_u \quad (2.228)$$

Si on prend $\lambda_u = 0,002$ et $\gamma_2 = -0,38$ (cf Annexe 6.3) et $h < 0,1$ m, la condition (3.228) se traduit par :

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right| \ll \frac{\lambda_u}{\gamma_2 h} \approx \frac{0,005}{h} < 0,05 \text{ m}^{-1} \quad (3.229)$$

Sous cette condition, on obtient comme ordre de grandeur pour la contrainte en régime non-uniforme, à partir de l'équation (3.224) :

$$\lambda_0 \approx 0,002 \left[1 - 10 \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (3.230)$$

L'ordre de grandeur du terme en dérivées secondes fait que la pente ne peut varier de 1% que sur une distance très supérieure à 1 m pour des tirants d'eau que quelques dizaines de cm. Ce qui limite a priori fortement la portée opérationnelle de l'approximation au second ordre près. Par ailleurs, ces formules ne sont a priori pas valides pour des pentes supérieures à 0,1%, ce qui en limite également énormément la portée opérationnelle, pour ne pas dire la réduit à zéro.

3.5 Calcul de la ligne d'eau

Pour que la correction sur la contrainte au fond soit calculée correctement, il faut, en ce qui concerne l'écoulement liquide, résoudre une équation dynamique vraie au 2^{ème} ordre près par rapport aux dérivées longitudinales et temporelles, mais également par rapport aux coefficients de Coriolis liés au profil des vitesses en régime uniforme.

Nous allons donc tout d'abord présenter les équations modifiées, puis les résoudre numériques et avoir ainsi une information sur l'ordre de grandeur de l'erreur liée à l'utilisation des équations de Saint-Venant classique et de celle liée au calcul de la contrainte en supposant le régime uniforme. Ceci permettra de conclure sur la nécessité ou non d'utiliser les équations modifiées de Saint-Venant.

3.5.1 Equations de Saint-Venant modifiées

La modification des équations de Saint-Venant consiste à remplacer l'équation de quantité de mouvement par l'équation de conservation de l'énergie, en prenant en compte les variations des profils adimensionnels des vitesses. En combinant (3.93) et (3.120), on obtient :

$$\alpha_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \alpha_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \alpha_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} - g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] = -\lambda_u \left[1 + O\left[|\phi|^2 \omega_i \omega_j\right] \right] \frac{U_m^2}{h} \quad (3.231)$$

En effet la contrainte au fond représente à la fois la force que l'écoulement exerce sur les sédiments, mais également la force que les sédiments exercent sur l'écoulement. Il serait donc incohérent de modifier son expression pour le calcul du transport solide et non pour le calcul hydraulique. En effet la correction de la contrainte dans la loi de transport, basée sur des vitesses calculées à partir de l'équation de Saint-Venant sans correction de la contrainte, n'a pas de sens, car les erreurs sur l'hydraulique devrait être du même ordre de grandeur que celles sur le débit solide. Si une seule est corrigée, l'erreur totale devrait rester du même ordre de grandeur. Pour ne pas rester dans le domaine du discours au conditionnel, les calculs avec les différentes corrections sont développés dans le paragraphe suivant, et vont permettre de trancher.

Si on considère le profil comme logarithmique en régime uniforme, les coefficients de Coriolis sont donnés par les équations (3.157) et (3.158). L'équation de conservation de l'énergie (3.231) s'écrit alors :

$$\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial U_m}{\partial t} + \left[1 + 4 \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} - 3 \frac{g^{3/2}}{\kappa^3 K_s^3 h^{1/2}} \right] U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} = g \left[I - \left[1 - \left[\frac{g^{3/2}}{\kappa^3 K_s^3 h^{1/2}} - \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{U_m^2}{gh} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{U_m^2}{h} \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} + \frac{U_m^2}{h} O(\omega_i \omega_j) \quad (3.232)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit à partir de l'équation (3.87) et de l'expression de coefficient de Boussinesc (3.155) et (3.156) :

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} - \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_0 \frac{U_m^2}{h} \quad (3.233)$$

3.5.2 Nécessité d'utiliser les équations modifiées

On peut néanmoins se poser la question de savoir si une correction de la contrainte au second ordre, basée sur la vitesse calculée à l'aide de l'équation dynamique classique (ne prenant pas en compte les coefficients de Coriolis) ne fournit pas une approximation suffisante.

Pour vérifier cela, l'équation de Saint-Venant modifiée (3.231) a été programmée dans le logiciel RUBAR3 [Paquier 1995, Balayn 1996] en modifiant le code source FORTRAN de certaines routines. Le détail de la programmation est présenté en annexe 7. Le logiciel RUBAR3 résout les équations de Saint-Venant standard à l'aide d'un schéma explicite de type Van Leer [1981 in Paquier 1995] autorisant les ondes de choc (ressauts) et les variations rapides de débit et de géométrie.

Nous avons choisi tout d'abord de tenter de prouver que la prise en compte de l'équation modifiée est nécessaire, car il suffit d'exhiber un seul contre-exemple pour lequel l'utilisation de l'équation classique n'est pas satisfaisante.

Nous avons étudié un écoulement fluvial décéléré de débit par unité de largeur de $1\text{m}^2/\text{s}$, dans un canal rectiligne très large, de pente 1%, ayant un coefficient de Strickler de 25 USI. Nous avons comparé les lignes d'eau calculées avec les équations de Saint-Venant standard et modifiées (Fig. 3.8), ainsi que les trois corrections de la contrainte au fond suivantes (Fig. 3.9) :

- la correction de la contrainte liée à la différence des vitesses moyennes calculées par les deux différentes équations dynamiques (RUBAR3 et RUBAR3 modifié),
- les deux corrections liées aux gradients longitudinaux et temporels en utilisant respectivement RUBAR3 et RUBAR3 modifié.

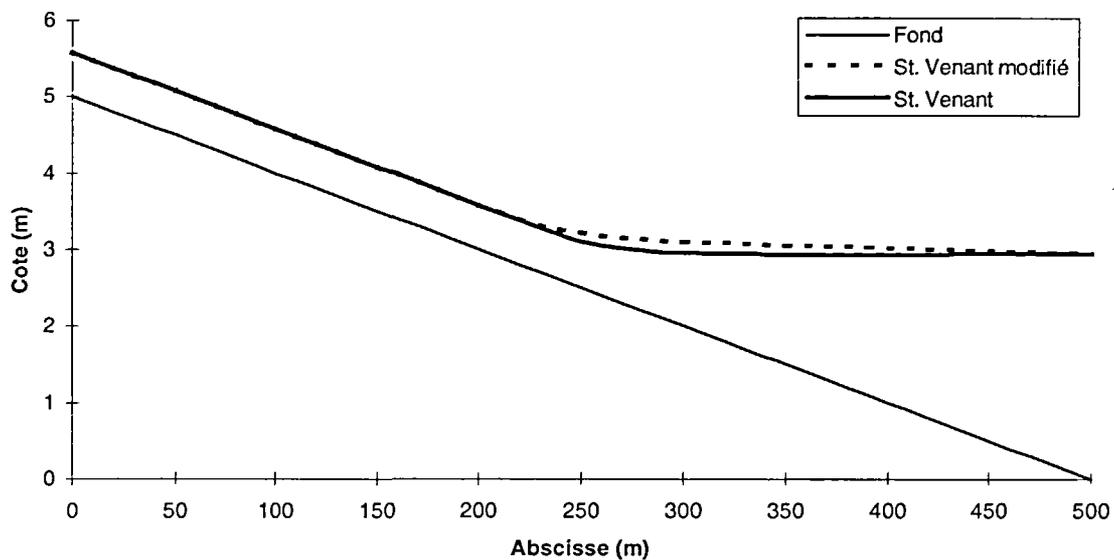


Figure 3.8 - Comparaison des lignes d'eau calculées avec les équations de Saint-Venant standard et modifiées.

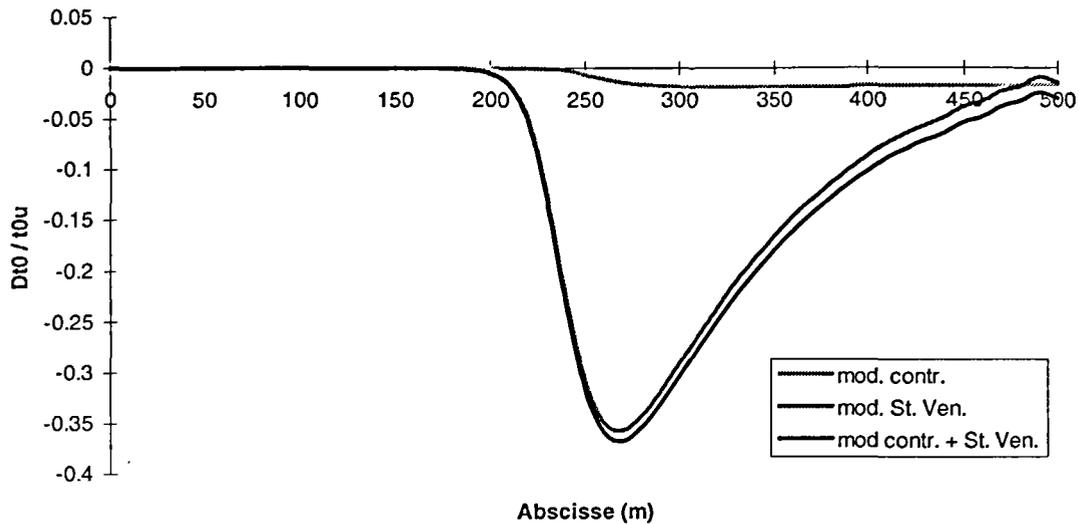


Figure 3.9 - Comparaison de l'écart à la contrainte au fond en régime uniforme avec ceux calculés avec la correction au second ordre seule, les équations de Saint-Venant modifiées seules et les deux.

La figure 3.9 montre clairement que la correction de la contrainte au fond, due à l'utilisation de l'équation de Saint-Venant modifiée, est, dans ce cas, supérieure (jusqu'à un facteur 10) aux corrections liées au gradient longitudinal. Ceci est dû au fait que le calcul de la ligne d'eau résulte de l'intégration de la contrainte selon l'abscisse longitudinale, et qu'elle est donc influencée par l'intégrale des écarts de la contrainte par rapport au régime uniforme. Ce qui fait que la correction de la contrainte est amplifiée par le calcul de la ligne d'eau.

On est donc en droit de conclure qu'il faut utiliser l'équation modifiée de Saint-Venant pour que la correction au second ordre de la contrainte ait un sens.

Conclusion de la troisième partie

Pour déterminer l'influence de la déformation du profil des vitesses longitudinales et de la turbulence sur la contrainte au fond et le transport solide, nous avons tenté d'établir un lien entre la forme des profils adimensionnels et les gradients longitudinaux et temporels du tirant d'eau et de la vitesse débitante. Ce lien suppose que les profils soient établis. Or, la présence de la surface libre fait que les gradients de tirant d'eau et de vitesse ne peuvent être constants qu'en régime uniforme. En écoulement non-uniforme à surface libre, il n'existe pas donc pas de profils similaires, même en régime laminaire. Nous avons donc établi l'équation régissant les profils pseudo-similaires, avec l'hypothèse que les gradients du profil adimensionnel soit faibles. Cette équation s'écrit :

$$\omega_1 f + \omega_2 f^2 + \omega_3 (F - \eta) f' = \omega_0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_u} \sigma' + \frac{T}{\lambda_u} \quad (3.44), \text{ avec :}$$

$$\omega_0 = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{gh}{U_m^2} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad \omega_1 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad \omega_2 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial U_m}{\partial x} \quad (3.44)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \omega_4 = \frac{1}{\lambda_u} \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right]$$

$$\frac{u(z)}{U_m} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{h} \quad (3.14) \quad \text{et} \quad \frac{\tau(z)}{\lambda_u \rho U_m^2} = \sigma(\eta, f') \quad (3.41)$$

$$T = h \left[f' \frac{\partial F}{\partial x} - f \frac{\partial f'}{\partial x} \right] - \frac{h}{U_m} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.38)$$

L'équation intégrale de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\beta_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \beta_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \beta_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_0 \frac{U_m^2}{h} - U_m^2 \frac{\partial I_2}{\partial x} \quad (3.87)$$

L'équation intégrale de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\alpha_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \alpha_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \alpha_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_1 \frac{U_m^2}{h} - \frac{1}{2} U_m \left[\frac{\partial I_2}{\partial t} + U_m \frac{\partial I_3}{\partial x} \right] \quad (3.94)$$

Moyennant l'hypothèse :

$$\tau(z) = \rho U_m^2 \varphi(z) \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial u}{\partial z} \right]^\alpha \quad (3.122)$$

l'équation de conservation de l'énergie est invariante au second ordre près :

$$\alpha_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \alpha_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \alpha_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} - g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] = -\lambda_u \left[1 + O\left[|\phi|^2 \omega_i \omega_j\right] \right] \frac{U_m^2}{h} \quad (3.231)$$

Ce n'est pas le cas l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Par contre, la condition (3.122) exclut toute inertie longitudinale de la turbulence, ce qui risque de la mettre en défaut.

Nous avons ensuite établi des corrections au second ordre près de la contrainte au fond, des profils verticaux des vitesses, des contraintes et de l'énergie cinétique turbulente. Les hypothèses utilisées sont : la répartition hydrostatique des pressions, le modèle de longueur de mélange et l'hypothèse de Bradshaw. La contrainte au fond s'écrit alors au second ordre près :

$$\tau_0 \approx \tau_{0u} \left[1 + \frac{1}{\kappa^2} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^2} \left[2 - 3 \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] \right] \quad (3.162)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho U_m^2 \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right]$$

Ces corrections imposent également de modifier les équations de Saint-Venant en utilisant l'expression de la contrainte au second ordre près. Ceci revient à résoudre les équations de conservation de l'énergie au lieu des équations de conservation de la quantité de mouvement.

Vouloir corriger les contraintes en régime non-uniforme en résolvant les équations de Saint-Venant standard est un non-sens, car les erreurs commises sur les vitesses et les tirants d'eau induisent des erreurs au moins aussi importantes que les erreurs liées à l'expression de la contrainte au fond en fonction de la vitesse et du tirant d'eau.

Si on considère le domaine de validité de ces corrections à 10% pour les gradients adimensionnels, cela se traduit par des gradients longitudinaux inférieurs à 0,1% et à une variation très lente de ces derniers, ce qui en limite énormément l'intérêt opérationnel.

Nous allons examiner dans la quatrième partie, la pertinence des corrections proposées en les comparant aux résultats de simulations numériques bidimensionnelles verticales.

--

PARTIE 4 :
EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES
ET NOUVELLES APPROXIMATIONS

Dans cette partie, nous allons utiliser les possibilités que nous offrent les modèles numériques pour simuler à faibles coûts un grand nombre de configurations d'écoulement. Il s'agit donc d'expériences numériques. Nous allons résoudre les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles verticales avec un modèle de turbulence k, ϵ standard. Nous considérerons que les tendances données par ce modèle sont conformes au réel perceptible [Frey 1991].

Nous allons commencer par présenter le modèle utilisé et les configurations simulées.

Nous interpréterons dans un deuxième temps les résultats, les confronterons au modèle établi dans la troisième partie et proposerons un nouveau modèle permettant de mieux rendre compte des phénomènes observés.

4.1 PRESENTATION DU MODELE ET DES CONFIGURATIONS SIMULEES

Le code de calcul CFX est développé par A.E.A Technology (U.K.). Il résout les équations de Navier-Stokes par une méthode de volumes finis. Les algorithmes de résolution sont du type SIMPLE [Patankar]. Parmi les différents modèles de turbulence proposés, nous avons choisi le modèle standard k, ϵ .

Toutes les simulations ont été effectuées en régime permanent dans des géométries non-uniformes avec des ruptures de pente variant de 0,1% à 20% pour le régime décéléré et de -0,1% à -20% pour le régime accéléré. Les tronçons non-uniformes sont systématiquement encadrés par un tronçon uniforme à l'amont de faible longueur servant de référence, et un tronçon uniforme à l'aval d'une longueur plus importante permettant d'observer l'inertie du retour au régime uniforme.

Les géométries standard utilisées ont les caractéristiques suivantes (Figure 4.1 et 4.2) :

- Tronçon homogène amont de 20 m de long et 1m (écoulement décéléré) ou 1+50I m (écoulement accéléré) de profondeur,
- Tronçon de pente I de 50 m de long,
- Tronçon uniforme de 130 m de long et de 1+50I m (écoulement décéléré) ou 1m (écoulement accéléré) de profondeur.

- 1 maille dans la direction transversale avec des conditions de symétrie sur les parois latérales,
- 1 maille tous les 0,5 à 1 m dans la direction longitudinale,
- des tirants d'eau de l'ordre du mètre, avec 30 mailles réparties sur la verticale selon une progression géométrique de 1,1, les mailles les plus petites étant au fond,
- les conditions aux limites au fond sont des lois logarithmiques sur fond rugueux :

$$U(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) \quad (1.68)$$

- à la surface on impose des contraintes nulles, sauf sur une maille où l'on impose la pression de référence,
- à l'amont et à l'aval, on impose un débit par unité de largeur entrant et un débit par unité de largeur sortant, tous deux identiques de 1m²/s,

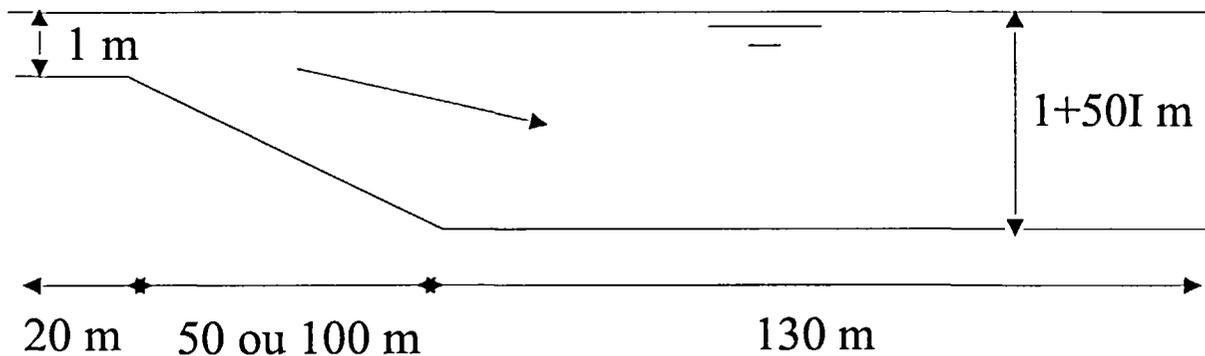


Figure 4.1 - Configuration géométrique en régime décéléré

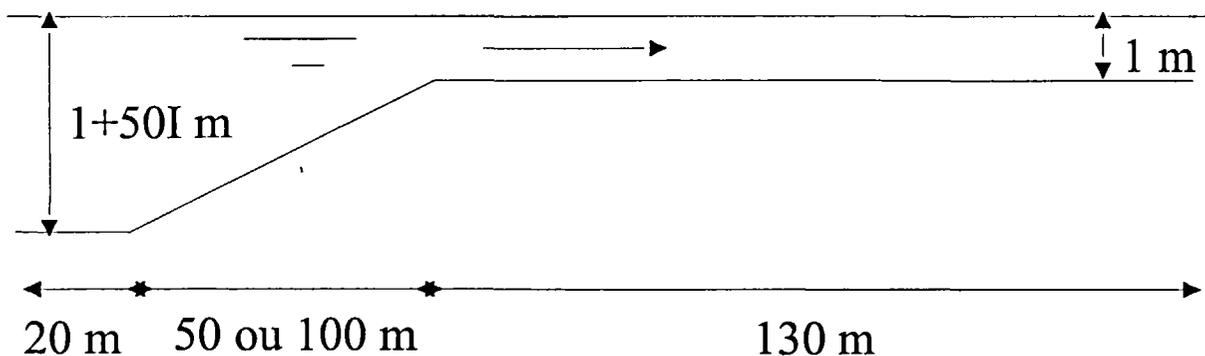


Figure 4.2 - Configuration géométrique en régime accéléré

Les pentes simulées ont été 0,1%, 0,2%, 0,4%, 0,8%, 1,6%, 3,2%, 5%, 10%, 20%, -0,1%, -0,2%, -0,4%, -0,8%, -1,6%, -3,2%, -5%, -10% et -20%.

Pour les pentes de 5% et -5%, on a également utilisé une géométrie avec rupture progressive de la pente.

Pour les pentes de 1,6% et -1,6%, nous avons simulé un régime non-uniforme asymptotique sur 500 m.

4.2 RESULTATS DES SIMULATIONS

Nous allons présenter pour des écoulements uniformes, accélérés et décélérés, successivement les résultats des profils verticaux des vitesses et de la turbulence, puis l'évolution longitudinale de la contrainte et de l'intensité turbulente. Nous présenterons pour terminer les résultats pour un écoulement non-uniforme asymptotique.

4.2.1 Profils verticaux

Nous présentons ici les résultats obtenus pour des pentes de 5% et -5%. Nous comparons les régimes accéléré, décéléré et uniforme.

Nous examinons successivement les profils verticaux de la vitesse longitudinale adimensionnée par rapport à la vitesse débitante, puis par rapport à la vitesse de frottement, et l'énergie cinétique turbulente adimensionnée par rapport à la contrainte au fond. Nous examinerons ensuite l'hypothèse de Bradshaw sur la turbulence.

4.2.1.1 Vitesse

La figure 4.3 confirme que l'évolution des profils adimensionnels est semblable dans notre cas et dans celui des couches limites externes accélérées et décélérées. On observe un profil plus "carré" en régime accéléré et le contraire en régime décéléré.

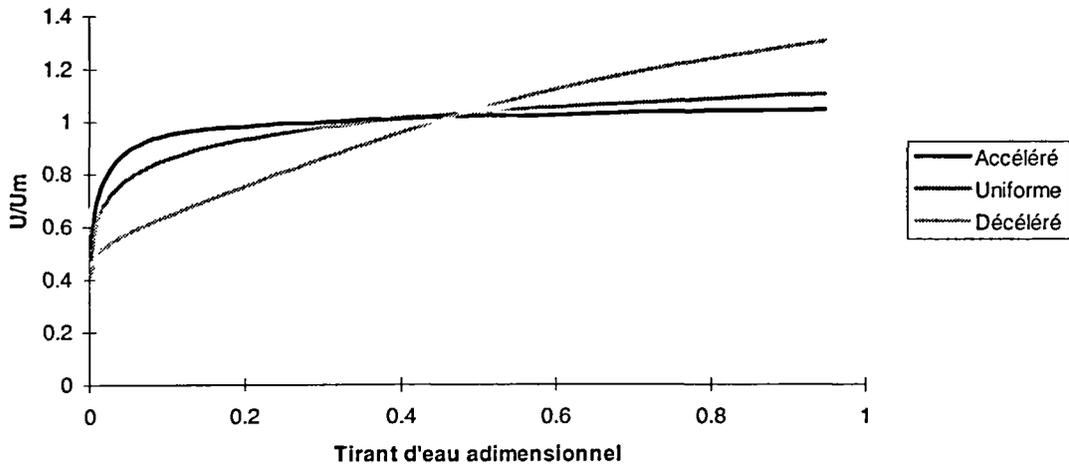


Figure 4.3 - Profil adimensionnel des vitesses par rapport à la vitesse débitante pour des pentes de -5% et +5%

On retrouve sur la figure 4.4, une loi logarithmique en régime uniforme, ainsi qu'un profil logarithmique près du fond en régimes accéléré et décélééré, comme l'a mesuré Cardoso [1989]. Les courbes "Uniforme A" et "Uniforme D" correspondent à deux tirants d'eau différents.

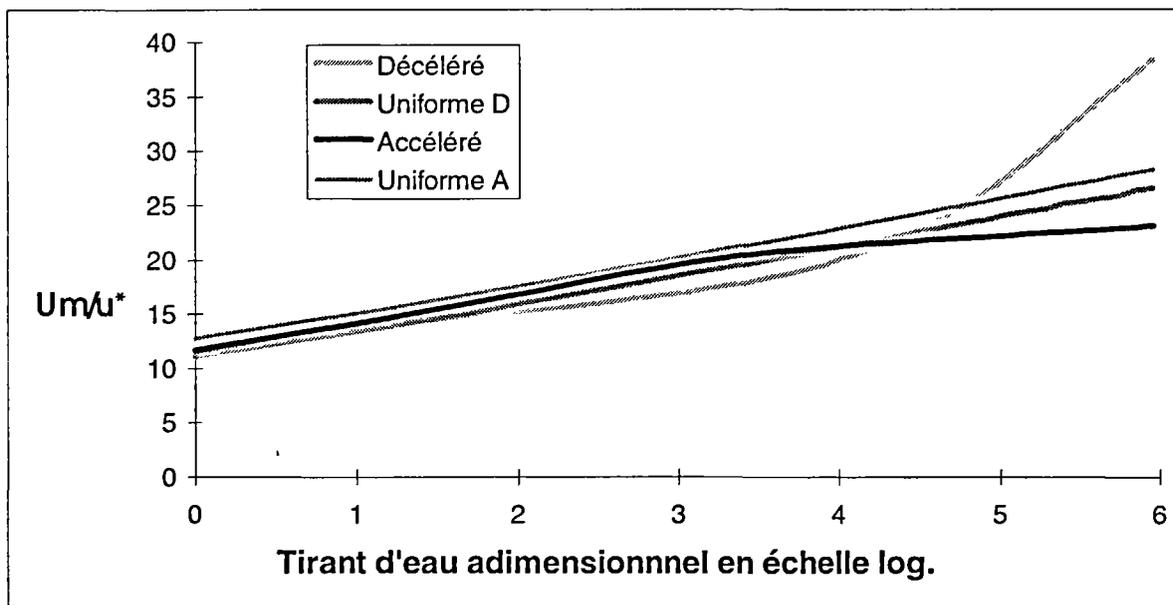


Figure 4.4 - Profil adimensionnel des vitesses par rapport à la vitesse de frottement en fonction du logarithmique du tirant d'eau adimensionnel pour des pentes de -5% et +5%

4.2.1.2 Turbulence

Nous avons choisi de présenter en figure 4.5 le rapport $2k/u^*2$, car il permet de mettre en évidence la déconnexion en régime non-uniforme, entre turbulence et contrainte au fond.

En régime décéléré, la turbulence se dissipe moins vite que ne décroît la contrainte au fond. En régime accéléré, la production de turbulence se fait avec un certain retard par rapport à l'augmentation de la contrainte au fond. Dans les deux cas, c'est à partir de la paroi, lieu de production de la turbulence, que se propage la turbulence pour être ensuite dissipée au sein de l'écoulement par les structures de Kolmogorov.

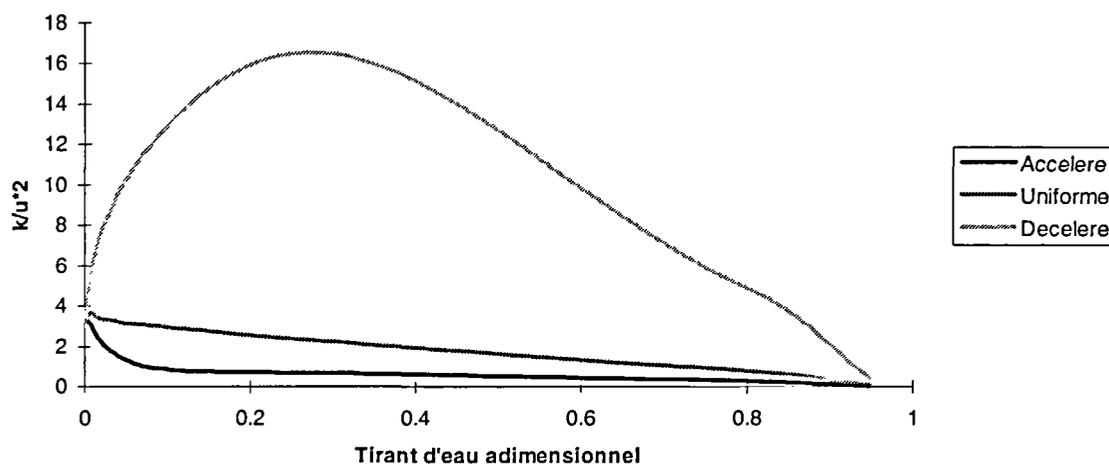


Figure 4.5 - Rapport entre énergie cinétique turbulente et contrainte pariétale pour des pentes de -5% et +5%

4.2.1.3 Hypothèse de Bradshaw

Nous rappelons l'hypothèse de Bradshaw [1967 in Coleman et al. 1977] sur le rapport entre la composante $u'w'$ du tenseur de Reynolds et l'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{-\overline{u'w'}}{2k} \approx 0.145 \pm 5\% \quad (3.7)$$

Le calcul de la composante $u'w'$ du tenseur de Reynolds s'est fait de la manière suivante, la viscosité turbulente ν_t étant calculée par le logiciel :

$$u'w' = -\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.1)$$

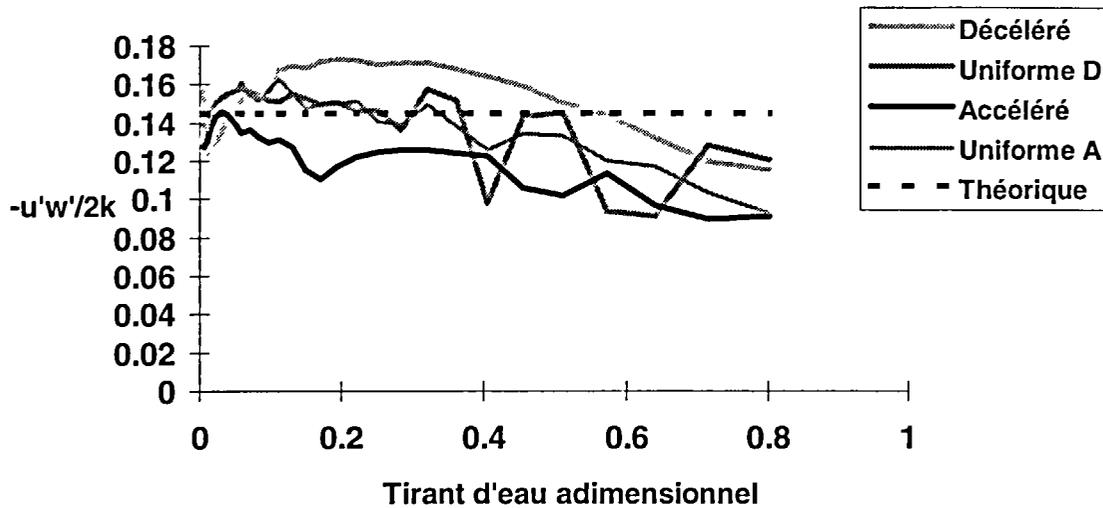


Figure 4.6 - Rapport de la contrainte de Reynolds sur deux fois l'énergie cinétique turbulente pour des pentes de -5% et +5%

Les résultats des simulations (Figure 4.6) en régime uniforme respectent en moyenne à 10% près l'hypothèse de Bradshaw dans la moitié inférieure de l'écoulement, le rapport $-u'w'/2k$ diminue lorsqu'on se rapproche de la surface libre. Le rapport $-u'w'/2k$ est supérieur de 20% pour l'écoulement décélééré et inférieur de 20% pour l'écoulement accéléré. Nous avons vérifié ici que cette hypothèse n'est pas trop malmenée par la non-uniformité de l'écoulement.

4.2.2 Variation longitudinale de l'intensité turbulente

L'intensité turbulente est ici définie comme la racine carrée du rapport entre l'énergie cinétique turbulente et l'énergie cinétique du champ moyen des vitesses : $i_t = \frac{\sqrt{2k_m}}{U_m}$ (1.5b)

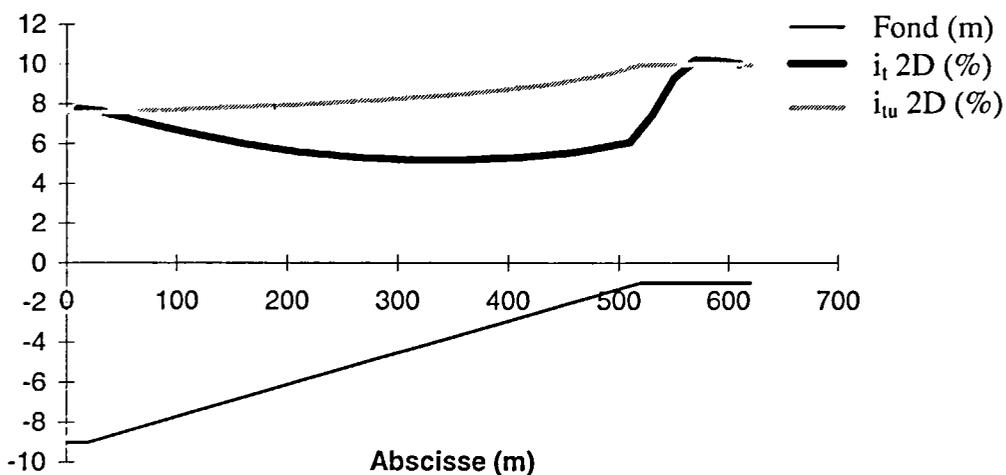


Figure 4.7 - Intensité turbulente (i_t) et intensité turbulente asymptotique (i_{ta}) en écoulement accéléré pour une pente de -1,6%

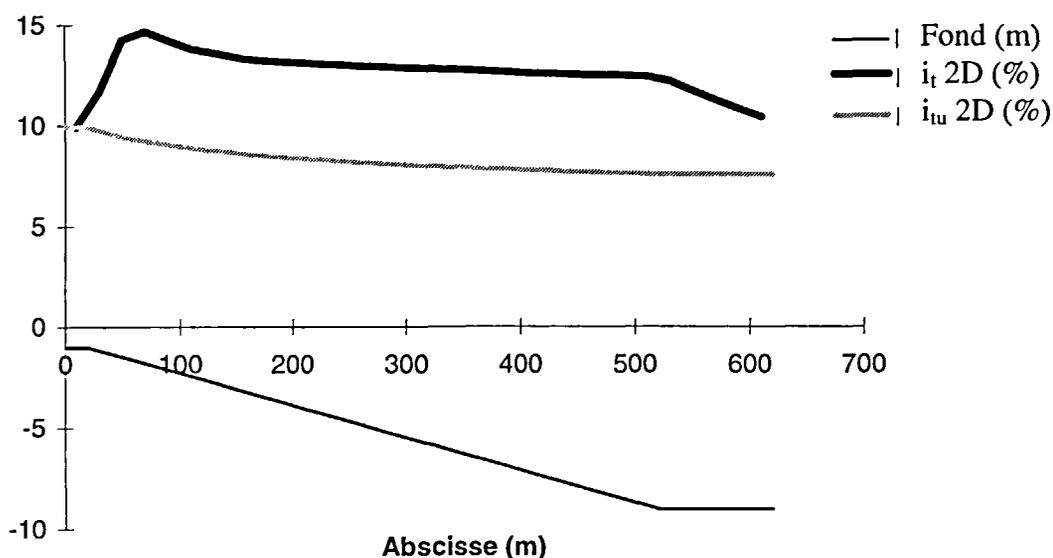


Figure 4.8 - Intensité turbulente (i_t) et intensité turbulente asymptotique (i_{tu}) en écoulement décéléré pour une pente de 1,6%

Les figures 4.7 et 4.8 montrent que l'intensité turbulente tend vers une asymptote. Le fait que la courbe asymptotique ne soit pas une droite horizontale vient du fait que l'intensité turbulente en régime uniforme décroît lorsque le tirant d'eau augmente. Par contre, l'écart entre l'intensité turbulente obtenue par résolution des équations de Navier-Stokes et celle calculée en régime uniforme tend vers un écart constant. Cet écart varie en fonction de la pente.

l (en %)	i_t/i_{tu}	$l/(1-(i_t/i_{tu}))$	$-l/\ln(i_t/i_{tu})$
5	0.47	9.4	6.7
1.6	0.66	4.7	3.8
- 1.6	1.62	2.6	3.3
- 5	3.4	2.1	4.1

Tableau 4.1 - Variation de l'intensité turbulente asymptotique en fonction de la pente

Le tableau 4.1 permet de mettre en évidence que l'intensité turbulente "asymptotique" varierait plutôt avec l'exponentiel de la pente. Ceci étant, il ne s'agit que d'une tendance, car les rapports dans la dernière colonne du tableau restent relativement dispersés.

4.2.3 Variation longitudinale de la contrainte au fond

Les figures 4.9 et 4.10 représentent la variation longitudinale de l'écart relatif entre le coefficient de frottement obtenu par résolution des équations de Navier-Stokes λ_0 et celui calculé à partir des lois établies régime uniforme λ_{0u} dans le cas des deux écoulements accéléré et décéléré :

$$\Delta \lambda_0 = \frac{\lambda_0 - \lambda_{0u}}{\lambda_{0u}} \quad (4.2)$$

Le coefficient de frottement en régime uniforme varie en fonction du tirant d'eau. Pour les présentes simulations, il varie de la manière suivante :

$$\lambda_{0u} = 0,003 h^{-1/4} \quad (4.3)$$

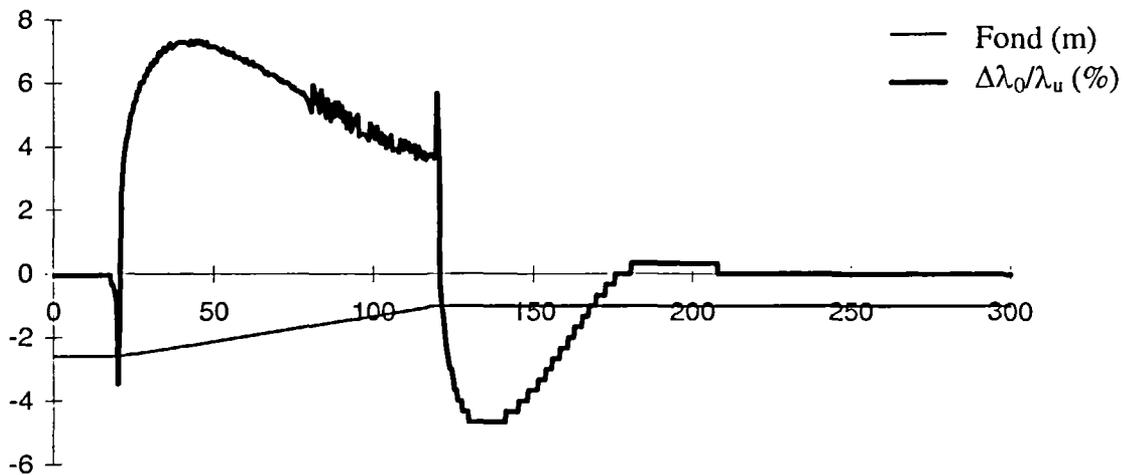


Figure 4.9 - Variation longitudinale de l'écart à la contrainte en régime uniforme dans le cas d'un écoulement accéléré de pente -1,6%.

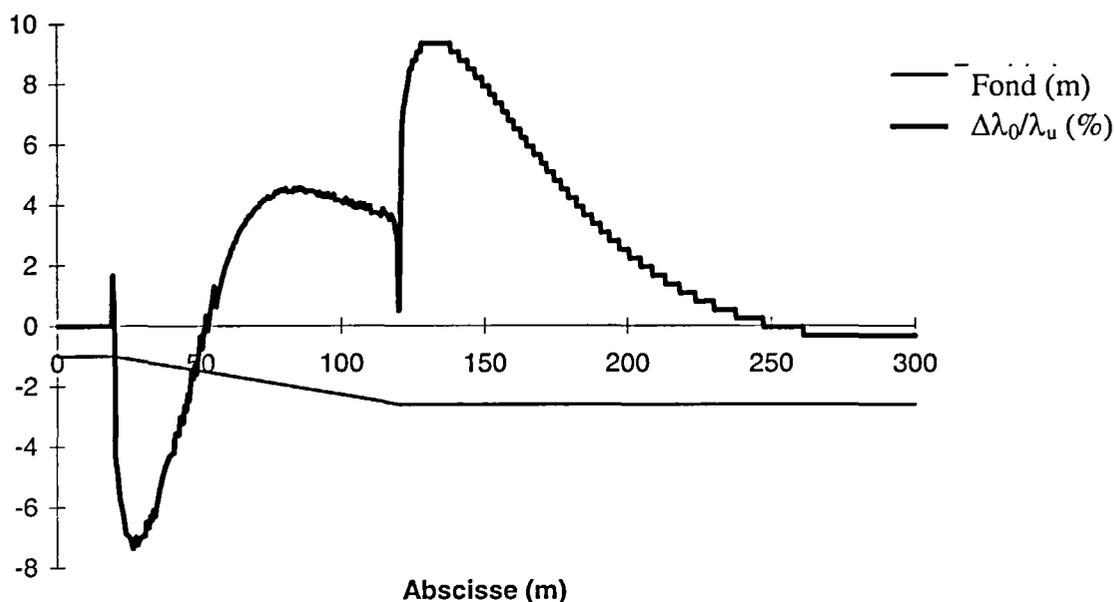


Figure 4.10 - Variation longitudinale de l'écart à la contrainte en régime uniforme dans le cas d'un écoulement décéléré de pente 1,6%.

Nous observons que c'est la rupture de pente qui induit des fortes variations de la contrainte au fond. Ceci est lié aux variations de la vitesse près du fond, engendrées par la courbure des lignes de courant.

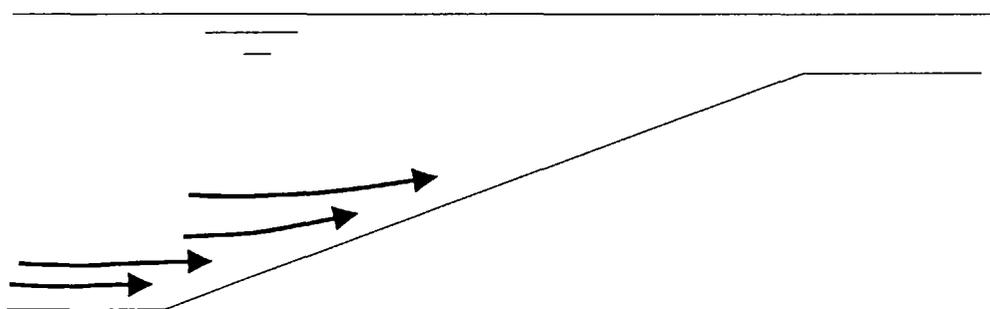


Figure 4.11 - Lignes de courant après une rupture de pente négative (écoulement accéléré)

En régime accéléré (figure 4.11), à la première rupture de pente, les lignes de courant se rapprochent du fond et par conséquent les vitesses près du fond augmentent plus rapidement au fond que dans le reste de l'écoulement. A la deuxième rupture de pente, il se produit le phénomène inverse, ou plutôt un phénomène analogue à celui qui se produit lors de la première rupture de pente de l'écoulement décéléré, décrit ci-après.

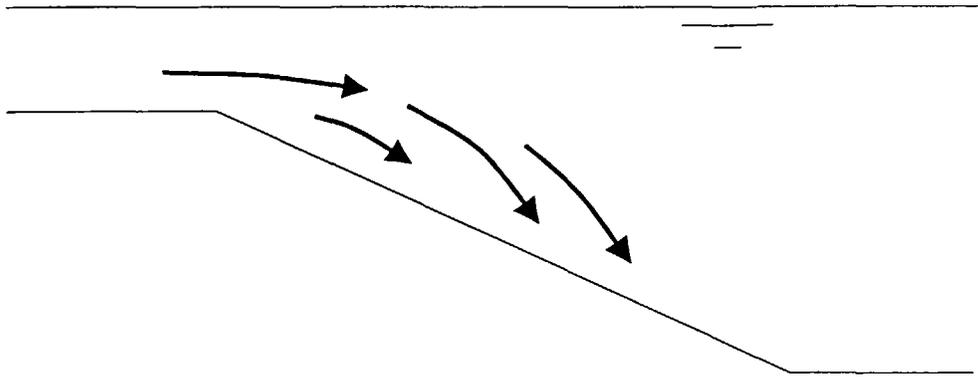


Figure 4.12 - Lignes de courant après une rupture de pente positive (écoulement décéléré)

En régime décéléré (figure 4.12), les lignes de courant s'éloignent du fond à l'aval immédiat de la rupture de pente, ce qui fait diminuer la contrainte au-delà de l'évolution du rapport des sections mouillées. Les lignes de courant se rapprochent ensuite du fond dans la zone où l'écart de la contrainte au régime uniforme s'annule. Cet écart devient alors positif, comme dans le cas de l'écoulement accéléré. Les lignes de courant ont alors une pente supérieure à celle du fond, il se passe alors un phénomène analogue à la première rupture de pente en régime accéléré. Cet écart est ensuite amplifié par la deuxième rupture de pente. Là encore, le phénomène est analogue à celui de la première rupture de pente en régime accéléré.

La figure 4.13 montre que l'écart maximal de la contrainte par rapport au régime uniforme varie linéairement en fonction de la rupture de pente.

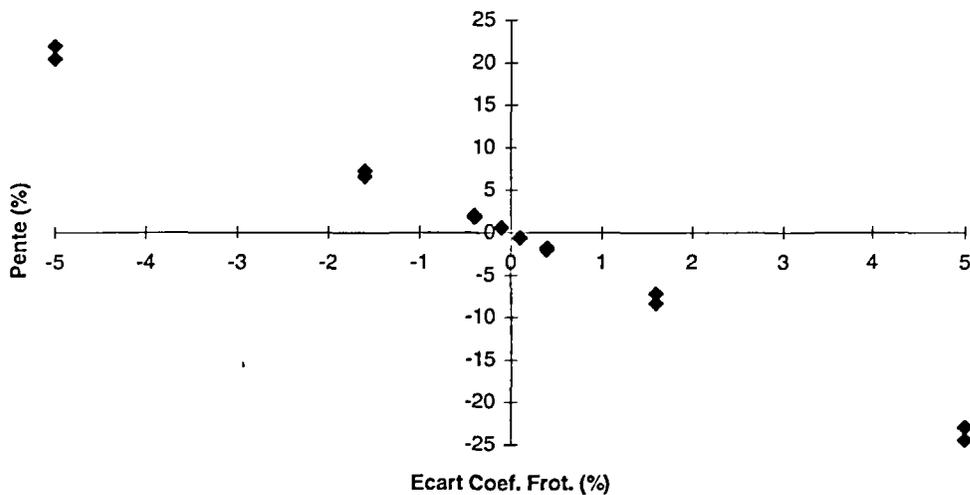


Figure 4.13 - Ecart maximal du coefficient de frottement par rapport au régime uniforme et en fonction de la rupture de pente

La régression linéaire de l'écart relatif du coefficient de frottement par rapport à la rupture de pente donne :

$$\Delta \lambda_0 = -4,51 * \Delta I - 0.0041 (-0,998) \quad (4.4)$$

L'écart au régime uniforme tend ensuite à se résorber progressivement. La contrainte tend d'autant plus rapidement vers la valeur en régime établi que l'écoulement est décéléré et que le tirant d'eau est faible, et d'autant moins vite que l'écoulement est accéléré et que le tirant d'eau est élevé. La distance de relaxation n'est donc pas constante, elle dépend de l'intensité turbulente et du tirant d'eau. Plus l'intensité turbulente est élevée, plus la distance de relaxation est petite, la turbulence homogénéisant plus vite l'écoulement. Plus le tirant d'eau est faible, plus la distance de relaxation l'est également, la hauteur à homogénéiser étant plus faible.

La figure 4.13 tend à montrer que l'effet de courbure du fond lors de la rupture de pente ne semble pas jouer un rôle crucial.

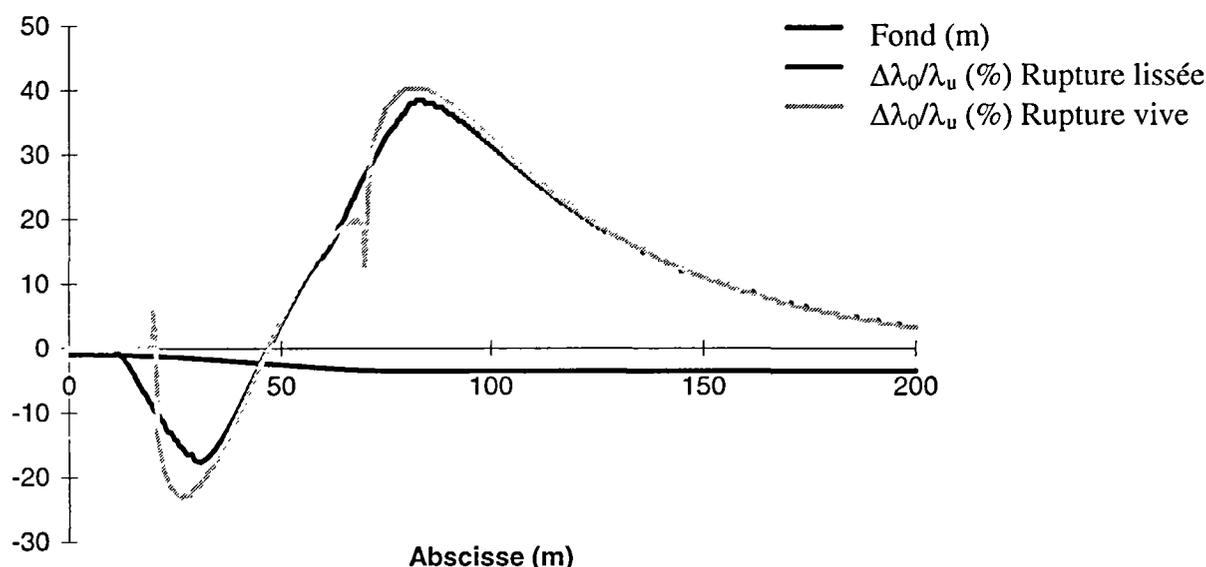


Figure 4.14 - Comparaison entre l'écart relatif de la contrainte selon que la rupture de pente fait un angle vif ou est lissée

On ne note pas de dépendance linéaire entre la courbure du fond et l'écart local de la contrainte au fond (figure 4.14). Par contre l'écart semble être déterminé par la variation cumulée de la pente. On note que l'écart maximum est moins élevé dans le cas d'une variation progressive de la pente. Dans ce cas, les transferts de quantité de mouvement ont déjà commencé à faire tendre l'écart au régime uniforme vers sa valeur asymptotique.

Nous allons examiner la valeur asymptotique du l'écart relatif du coefficient de frottement par rapport au régime uniforme.

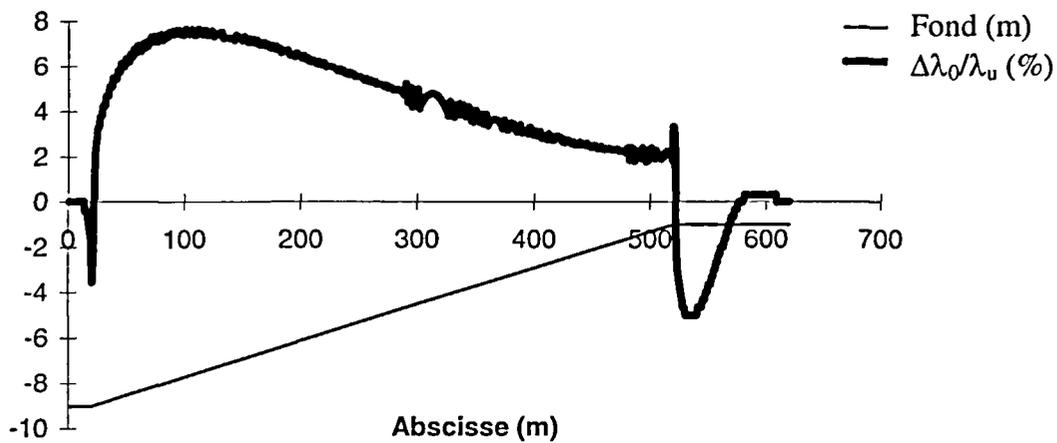


Figure 4.15 - - Ecart relatif du coefficient de frottement et intensité turbulent en régime asymptotique accéléré pour une pente de -1,6%

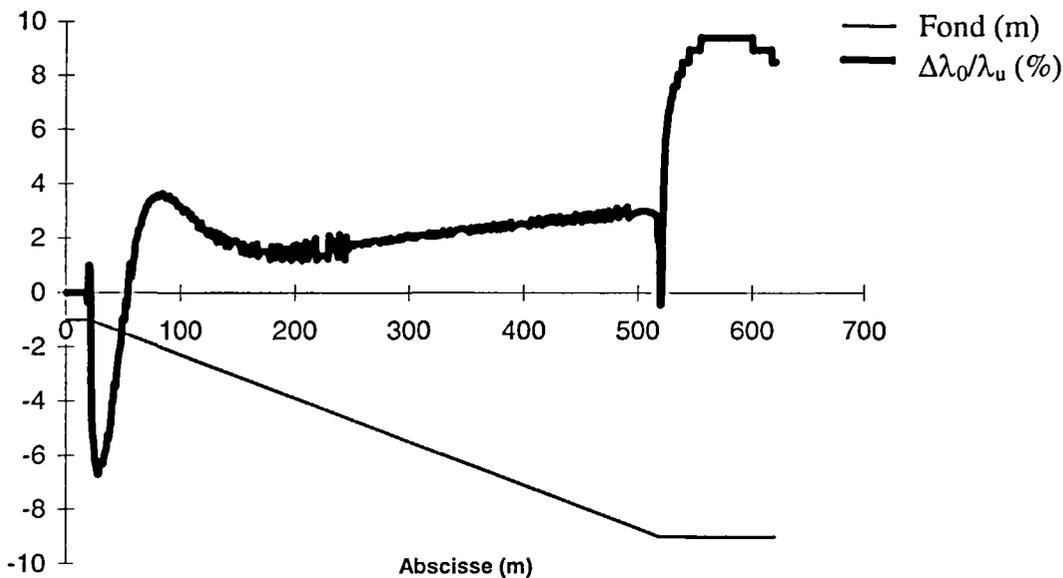


Figure 4.16 - Ecart relatif du coefficient de frottement en régime asymptotique décéléré pour une pente de 1,6%

L'écart du coefficient de frottement par rapport au régime uniforme tend vers une valeur positive qui semble proportionnelle au tirant d'eau, que l'écoulement soit accéléré ou décéléré.

4.2.4 Distance d'influence des ruptures de pentes

Les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 montrent que la distance de relaxation de l'écart relatif du coefficient de frottement et de l'intensité turbulente varie en fonction du tirant d'eau et de

l'intensité turbulente. Nous avons déterminé graphiquement les distances X_r de relaxation vers le régime uniforme dans la partie aval de pente nulle. Nous avons reportées dans le tableau ci-dessous la rupture de pente, la distance de relaxation, le tirant d'eau et l'intensité turbulente moyenne.

ΔI (%)	X_r (m)	h (m)	I_t (%)	$X_u * i_t / h$
-5	230	3,5	7,3	4,8
-1.6	110	1.8	8.3	5,1
-0.1	60	1	10	6,0
0.1	50	1	10	5,0
1.6	40	1	13	5,2
5	27	1	22	5,9

- Tableau 4.2 - Distance de relaxation vers le régime uniforme dans différentes configurations

Le tableau 4.2 montre que $X_r * i_t / h$ est relativement constant et vaut environ 5. Nous pourrions donc approcher la distance d'établissement du régime asymptotique par :

$$X_r \approx 5 * h_m * / i_t \quad (4.5)$$

La distance de relaxation varie linéairement avec le tirant d'eau moyen h_m et l'inverse de l'intensité turbulente. Plus l'intensité turbulente est élevée, plus la distance de relaxation est petite, la turbulence homogénéisant plus vite l'écoulement. Plus le tirant d'eau est faible, plus la distance de relaxation l'est également, la hauteur à homogénéiser étant plus faible.

En rivière naturelle, les valeurs des différents paramètres sont du même ordre de grandeur qu'en canal, mais néanmoins différents. En particulier l'intensité turbulente est plus élevée, elle vaut environ 25% lorsque le coefficient de Strickler vaut entre 20 et 25 USI et que le tirant d'eau est d'environ 1 m. On peut estimer l'ordre de grandeur de la distance d'influence de la rupture de pente à partir de la relation (4.5) : $X_r \approx 20 * h_m$.

On considère un cours d'eau où la largeur est égale à 10 fois le tirant d'eau, et où la distance entre faciès à de l'ordre de 4 fois la largeur. Comme il y aura au moins deux ruptures de pente sur cette distance, la distance moyenne entre deux ruptures de pentes est alors $X_f \approx 4 * 10 / 2 * h_m = 20 * h_m$.

La distance entre deux ruptures de pentes X_r est du même ordre que la distance d'établissement du régime non-uniforme asymptotique X_f . En rivière, l'écoulement a donc rarement la possibilité d'atteindre un régime non-uniforme asymptotique, d'autant plus que la pente entre deux ruptures de pente n'est pas rigoureusement constante. L'étude de ce type d'écoulement a donc une portée opérationnelle limitée.

4.2.5 Domaine de validité de l'approche asymptotique au 2^{EME} ordre près

Nous avons mis en évidence qu'il fallait une distance importante pour qu'un écoulement non-uniforme asymptotique s'établisse. Ceci semble retirer tout intérêt opérationnel à un calcul uniquement asymptotique. Ceci étant, les valeurs en régime non-uniforme asymptotique constituent la limite vers laquelle tend l'écoulement. L'étude de l'écoulement asymptotique présente donc un intérêt, mais n'est pas suffisant. L'approximation au deuxième ordre près est un moyen de déterminer l'écoulement asymptotique. Cette approximation demande à être validée. Nous allons donc, dans ce paragraphe, comparer l'approximation au second ordre près avec les résultats des équations de Navier-Stokes.

L'approximation au premier ordre de l'écart au coefficient de frottement pour une pente de +/-1,6% est de :

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_u}{\lambda_u} \approx \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_u}}{\kappa} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \approx 12,5 \left[1 - 2,5\sqrt{0,003} h^{-\frac{1}{4}} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \approx +/-0,2 \left[1 - 0,14 h^{-\frac{1}{4}} \right] \quad (4.6)$$

Nous avons reporté en figures 4.17 et 4.18 l'écart relatif de la contrainte par rapport au régime uniforme dans le cas d'un plan incliné de +/-1,6% de 500 m de long, et la valeur que prédite l'approximation au second ordre près.

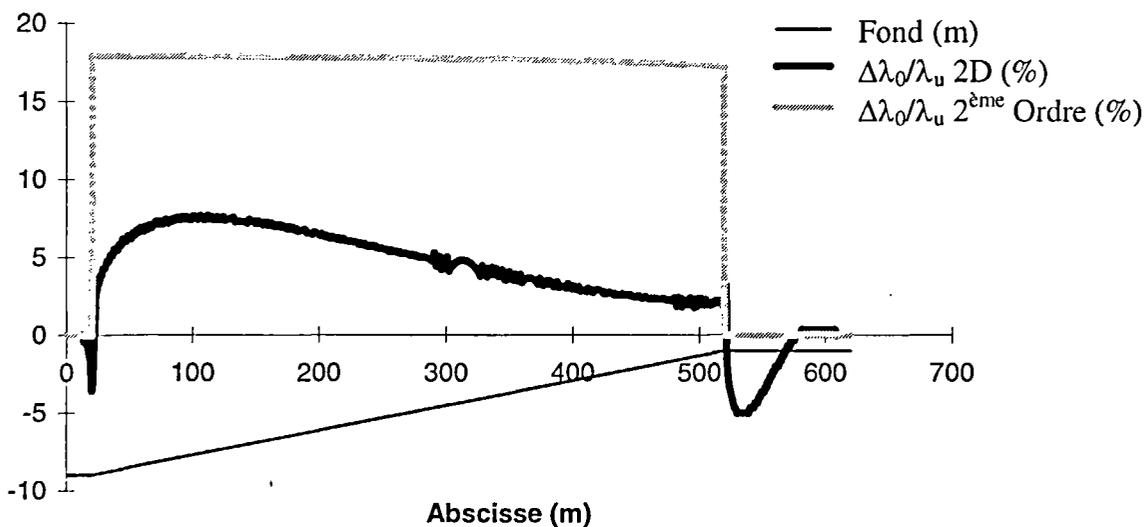


Figure 4.17 - Comparaison des écarts relatifs de la contrainte au fond entre simulation 2D et approximation au second ordre près avec une pente de -1,6%

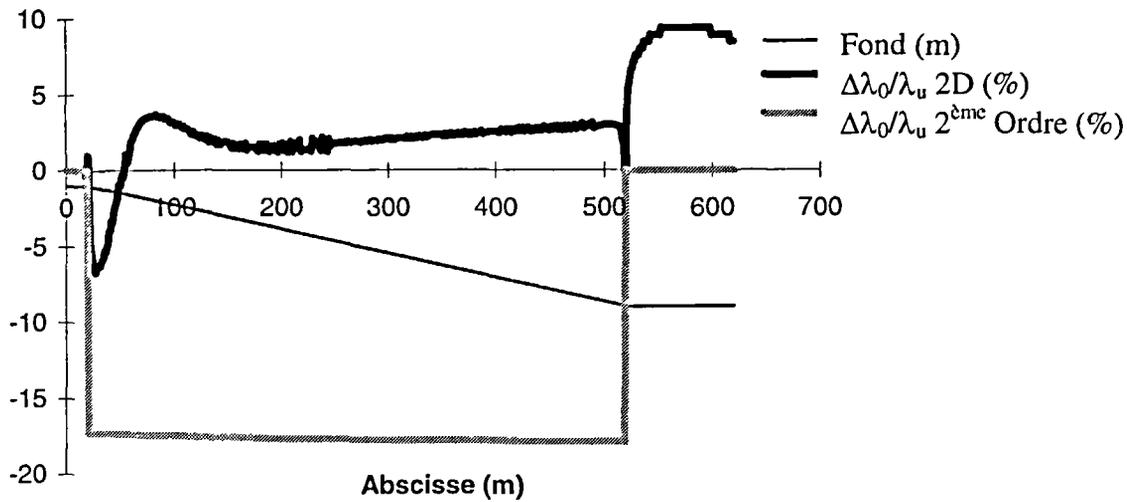


Figure 4.18 - Comparaison des écarts relatifs de la contrainte au fond entre simulation 2D et approximation au premier ordre avec une pente de +1,6%

Les simulations numériques montrent des écarts inférieurs au moins de moitié à l'approximation au second ordre près. L'écart est de moitié après la première rupture de pente, dans un domaine où l'approximation au premier ordre n'est a priori pas valide. Dans la partie aval du plan incliné, on peut considérer que le régime uniforme asymptotique est établi. En régime décéléré, l'approximation au second ordre près surestime d'un facteur 7 l'écart relatif à la contrainte en régime uniforme. En régime décéléré, elle prédit le signe contraire et le surestime également d'un facteur 7 en valeur absolue. L'approximation n'est donc pas valide dans le cas présent, qui sort néanmoins du domaine de validité de l'approximation défini dans la troisième partie.

4.3 MODELISATION UNIDIMENSIONNELLE

Le régime non-uniforme asymptotique n'étant jamais atteint dans un cours d'eau, il est important de rendre compte du régime non-uniforme non-asymptotique. L'objet de ce paragraphe est de proposer un modèle unidimensionnel rendant compte des évolutions longitudinales de la contrainte au fond et de l'intensité turbulente. Ce modèle sera construit et validé à partir des résultats de la résolution des équations de Navier-Stokes. Nous allons tout d'abord proposer une modélisation à partir des observations précédentes, puis la confronter aux résultats des simulations précédentes.

4.3.1 Modélisation l'intensité turbulente

Les observations faites au paragraphe 4.2.2, nous permettent de proposer le modèle suivant pour rendre compte de l'évolution de l'intensité turbulente. La valeur asymptotique de l'intensité turbulente est déterminée par la relation :

$$i_{ta} = \frac{\sqrt{2 k_m}}{U_m} = i_{tu} \exp\left(-\frac{I}{A_1}\right) \quad (4.7)$$

Le coefficient A_1 permet d'ajuster la valeur asymptotique de l'intensité turbulente. Il est proche de 4.

Par ailleurs, les simulations numériques montrent :

$$i_{tu} = \sqrt{3,3 \lambda_{0u}} \quad (4.8)$$

L'hypothèse de Bradshaw [1967 in Coleman et al. 1977] imposerait qu'à la paroi l'énergie cinétique turbulente vaille :

$$k(0) \approx 3,45 u_*^2 \quad (4.9)$$

La distribution étant quasi-linéaire en régime uniforme, on aurait :

$$2 k_m \approx 3,45 u_*^2 \quad (4.10)$$

$$i_{tu} = \sqrt{\frac{2 k_m}{U_m^2}} \approx \sqrt{\frac{3,45 \tau_{0u}}{\rho U_m^2}} = \sqrt{3,45 \lambda_{0u}} \quad (4.11)$$

(4.8) et (4.11) diffèrent légèrement, nous baserons la suite de notre modèle sur (4.8). L'intensité turbulente asymptotique s'écrit donc :

$$i_{ta} = \sqrt{3,3 \lambda_{0u}} \exp\left(-\frac{I}{A_1}\right) \quad (4.12)$$

En régime uniforme, les moments d'ordre 2 et 3 des vitesses calculées valent :

$$I_2 = 1,012 \quad I_3 = 1,034 \quad (4.13)$$

Dans le cas d'un profil en $1/n$, les moments des vitesses s'expriment de la manière suivante :

$$I_2 = \frac{[n+1]^2}{n[n+2]} \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{[n+1]^3}{n^2[n+3]} \quad (4.14)$$

Les valeurs données en (4.13) correspondent à un profil en puissance $1/8$. Par conséquent, on retrouve l'expression du coefficient de frottement en régime uniforme en fonction du tirant d'eau :

$$\lambda_{0u} = 0,003 h^{-1/4} \quad (4.3)$$

L'intensité turbulente asymptotique s'écrit dans le cas des présentes simulations :

$$i_{ta} = 0,1h^{-1/8} \exp\left(-\frac{I}{A_1}\right) \quad (4.15)$$

Le modèle d'évolution de l'intensité turbulente fait l'hypothèse que la distance de relaxation est fonction du rapport de l'intensité turbulente sur le tirant d'eau. Cette grandeur semble être un bon indicateur du transfert de l'énergie cinétique turbulente depuis le fond, où elle est produite, vers toute la colonne d'eau. Plus l'intensité turbulente est élevée et plus le tirant d'eau est faible, plus le transfert d'énergie est rapide. D'où :

$$\frac{\partial i_t}{\partial x} = -A_2 \frac{i_t}{h} [i_t - i_{ta}] \quad \text{avec } A_2 > 0 \quad (4.16)$$

Le modèle proposé s'obtient en substituant (4.15) dans (4.16) :

$$\frac{\partial i_t}{\partial x} = -A_2 \frac{i_t}{h} \left[i_t - 0,1h^{-1/8} \exp\left(-\frac{I}{A_1}\right) \right] \quad \text{avec } A_2 > 0 \text{ et } A_1 > 0 \quad (3.17)$$

4.3.2 Modélisation de la contrainte au fond

Les observations faites au paragraphe 4.2.3 permettent de proposer le modèle suivant pour rendre compte de l'évolution de l'écart du coefficient de frottement :

$$\frac{\partial \Delta \lambda_0}{\partial x} = -B_1 \frac{\partial I}{\partial x} - B_2 \frac{i_t}{h} \Delta \lambda_0 \quad \text{avec } B_1 > 0 \text{ et } B_2 > 0 \quad (4.18)$$

Le premier terme traduit le fait que la variation de l'écart relatif du coefficient de frottement est proportionnelle à la variation de la pente. Le second terme traduit le fait que la distance de relaxation est proportionnelle au tirant d'eau et à l'inverse de l'intensité turbulente.

Le calcul du coefficient de frottement par résolution de l'équation (4.18) suppose d'avoir auparavant calculé l'intensité turbulente en résolvant l'équation (4.17).

4.3.3 Confrontation et calage du modèle unidimensionnel avec les résultats des simulations

Le modèle déterminant l'intensité turbulente et l'écart du coefficient de frottement a été calé sur une dizaine de simulation de manière relativement satisfaisante. Les coefficients ne varient pas d'une simulation à l'autre. Ils prennent les valeurs suivantes :

$$A_1 = 3,5; A_2 = 0,7; B_1 = 13 \text{ et } B_2 = 0,3$$

La comparaison entre le modèle et les résultats de la résolution des équations de Navier-Stokes est donnée ici pour des pentes de -1,6% (figure 4.19) et +1,6% (figure 4.20). Les écarts entre les deux modèles sont comparables pour les autres simulations.

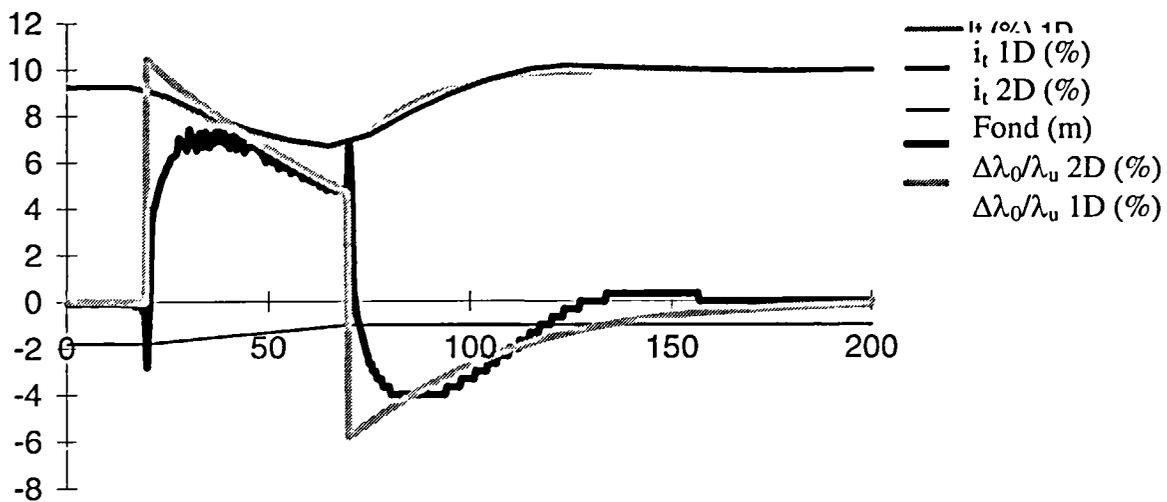


Figure 4.19 - Comparaison entre modèles 1D et 2D Navier-Stokes dans le cas d'un écoulement accéléré avec une pente de 1,6%

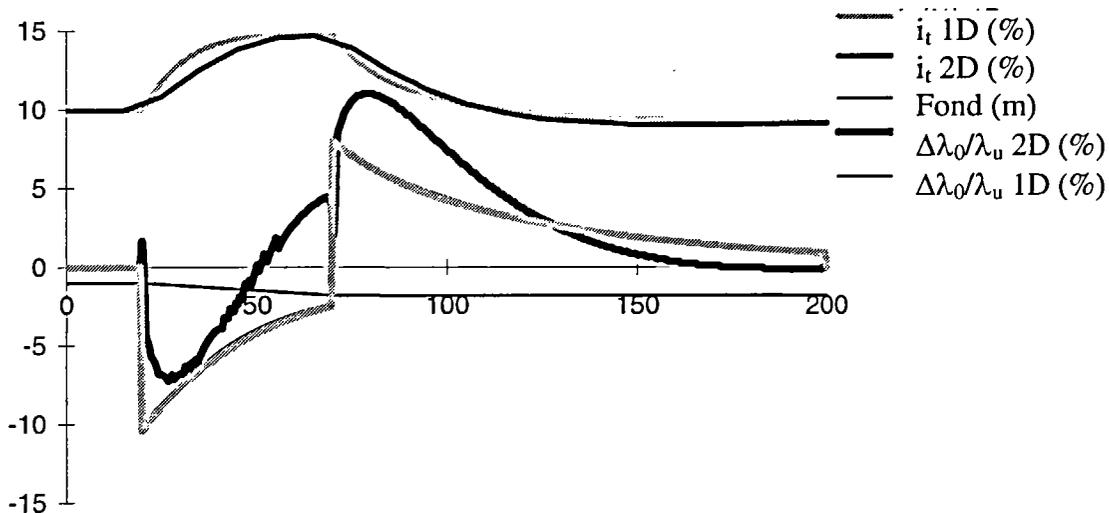


Figure 4.20 - Comparaison entre modèles 1D et 2D Navier-Stokes dans le cas d'un écoulement décéléré avec une pente de 1,6%

Ce modèle rend relativement bien compte des évolutions calculées à l'aide du modèle de Navier-Stokes k, ϵ , sauf du phénomène de rapprochement des lignes de courant en régime décéléré.

4.3.4 Autres modèles envisageables

Si l'on veut mieux rendre compte de l'évolution du coefficient de frottement et de la contrainte, il faut développer un modèle ayant comme variables la vitesse débitante et le tirant d'eau, mais également les moments d'ordres 2 et 3 des vitesses longitudinales, l'énergie

cinétique turbulente et le taux de dissipation d'énergie. Pour mieux rendre compte de l'évolution de l'intensité turbulente un modèle k, ε unidimensionnel apporterait certainement un plus. Du fait de la nécessité de résoudre les profils verticaux des vitesses pour bien rendre compte de l'évolution du coefficient de frottement, un modèle k, ε unidimensionnel est insuffisant. En effet, une énergie cinétique turbulente moyenne dans une section en travers ne donnera aucune information sur la distribution verticale de la turbulence, et ne nous aiderait en rien pour calculer la déformation du profil des vitesses et la modification de la contrainte au fond.

Il faudrait donc calculer à chaque abscisse au moins deux valeurs de toutes les grandeurs hydrodynamiques. On pourra décomposer les profils verticaux suivant différentes fonctions de formes : fond et surface, ou bien régime uniforme et écart au régime uniforme.

CONCLUSION DE LA QUATRIEME PARTIE

Les profils de vitesse et de turbulence sont comparables entre l'approximation au second ordre près et la résolution des équations de Navier-Stokes.

L'évolution longitudinale de l'intensité turbulente semble suivre une loi de relaxation exponentielle vers une valeur asymptotique plus forte en régime décéléré et plus faible en régime accéléré.

L'évolution longitudinale de la contrainte au fond est plus complexe. La valeur du coefficient de frottement fait un saut à chaque variation de pente. Le saut peut être considéré comme proportionnel à la variation de la pente. Ce saut se fait néanmoins sur une certaine distance. Il est positif lorsque la pente diminue (régime accéléré) et négatif lorsque la pente augmente (régime décéléré).

Sur une pente constante en écoulement accéléré, le coefficient de frottement tend vers sa valeur en régime uniforme en suivant une relaxation exponentielle. Sur une pente constante en écoulement décéléré, le coefficient de frottement est d'abord inférieur à sa valeur en régime uniforme, puis lui devient supérieur. On observe alors le même type de relaxation qu'en régime accéléré.

Qu'il s'agisse de l'intensité turbulente ou du coefficient de frottement, la relaxation est d'autant plus rapide que l'intensité turbulente est élevée et que le tirant d'eau est faible.

Ceci étant, la relaxation est lente, puisqu'il a fallu de l'ordre de 25 à 100 m lors les simulations effectuées pour atteindre le régime non-uniforme asymptotique. Le régime asymptotique est atteint plus rapidement en rivière du fait des rugosités qui augmentent l'intensité de la turbulence, mais la distance d'établissement du régime asymptotique est du même ordre que la longueur d'onde des variations de pente.

Nous avons montré que l'approximation au second ordre près n'est pas pertinente pour trois raisons. Les écarts au régime uniforme sont les plus importants à l'aval immédiat des

ruptures de pentes, domaine où l'approximation au premier ordre n'est pas valide. Or les zones d'influence des ruptures de pente sont du même ordre de grandeur que la distance entre deux ruptures de pentes (10 à 50 m pour les cours d'eau de taille moyenne). On n'observera donc pas véritablement l'établissement d'un régime uniforme asymptotique. Dans la partie que l'on pourrait considérer comme asymptotique, l'approximation au second ordre près surestime l'écart relatif d'un facteur 7 en valeur absolue et prédit un signe opposé en régime décéléré. Rappelons toutefois que nous nous sommes placés en dehors de son domaine de validité.

Nous proposons un modèle unidimensionnel rendant compte de façon satisfaisante de l'évolution de l'intensité turbulente en régime non uniforme :

$$\frac{\partial i_t}{\partial x} = -A_2 \frac{i_t}{h} [i_t - i_{ts}] = -A_2 \frac{i_t}{h} \left[i_t - 0,1 h^{-1/4} \exp\left(-\frac{I}{A_1}\right) \right] \quad (4.17)$$

Nous proposons un modèle unidimensionnel rendant compte de manière inégale de l'écart relatif de la contrainte au fond par rapport au régime uniforme :

$$\frac{\partial \Delta \lambda_0}{\partial x} = -B_1 \frac{\partial I}{\partial x} - B_2 \frac{i_t}{h} \Delta \lambda_0 \quad (4.18)$$

Ce modèle ne rend pas bien compte de ce qui se passe après une rupture de pente positive, et prédit un signe opposé dans la zone pseudo-asymptotique en écoulement décéléré.

Une modélisation plus fine de l'écoulement à l'aide d'une décomposition des profils verticaux selon une base comprenant au moins deux vecteurs, par exemple : profil uniforme et écart au régime uniforme, pourrait améliorer encore la modélisation unidimensionnelle du coefficient de frottement en régime non-uniforme.

PARTIE 5 :
INFLUENCE DE LA NON-UNIFORMITE DE L'ECOULEMENT
SUR LE TRANSPORT SOLIDE

Cette partie fait la synthèse des parties 2 à 4. Elle est le pendant de la première partie consacrée à l'analyse des mécanismes de transport solide. Dans la deuxième partie nous avons déterminé l'influence des forces supplémentaires liées au régime non-uniforme et modifiant le paramètre de Shields critique. Dans les parties 3 et 4 nous nous sommes attachés à exprimer les modifications des conditions d'écoulement en régime non-uniforme, en particulier la contrainte au fond et l'intensité turbulente, qui modifie respectivement le paramètre de Shields et le paramètre de sédimentation.

Nous allons dans un premier temps (section 5.1) estimer les effets de la non-uniformité de l'écoulement sur la capacité de transport.

Dans un second temps (section 5.2) nous examinerons l'opérationnalité des modèles proposés.

5.1 EFFETS DE LA NON-UNIFORMITE DE L'ECOULEMENT SUR LA CAPACITE DE TRANSPORT

L'objet de cette section est de comparer les débits solides de charriage et de suspension en régimes accéléré et décéléré calculés à l'aide des lois établies en régime uniforme avec plus ou moins de termes correctifs liés à la non-uniformité de l'écoulement : la contrainte en régime non-uniforme, la pente et l'intensité de la turbulence.

Dans les parties précédentes nous avons estimé l'ordre de grandeur de ces différents termes. C'est maintenant l'impact de ces différents termes sur le débit solide qui nous intéresse. Or, ces effets ont tendance à se compenser, ce qui peut laisser présager que même si individuellement ils ne sont pas négligeables, leur résultante peut l'être.

Par exemple en écoulement décéléré à l'amont d'une mouille, l'augmentation de la pente entraîne une décélération et donc, à vitesse débitante égale, une diminution de la contrainte au fond, qui tend à diminuer la capacité de mobilisation de matériaux constituant le fond. D'autre part, l'augmentation de la pente tend à diminuer également la contrainte critique de mise en mouvement, car elle diminue le moment du poids relatif par rapport au point de contact aval.

Par ailleurs, lorsqu'on s'intéresse au transport solide à grande maille, c'est l'intégrale sur un pas d'espace plus grand que la longueur d'onde des alternances de faciès qui nous intéresse. Les écarts dus aux zones d'accélération compensent ceux liés aux zones de décélération. Là encore la résultante des écarts peut être faible, même si les écarts par zones sont importants.

Nous allons étudier tout d'abord l'écart entre la capacité de transport par charriage (5.1.1) et par suspension (5.1.2) en régime non-uniforme et sa valeur en utilisant la loi du régime uniforme. Nous allons pour cela utiliser les résultats des simulations Navier-Stokes pour exprimer le coefficient de frottement et l'intensité turbulente. Nous allons étudier l'influence des différents facteurs de non-uniformité : la pente du fond, la contrainte au fond et la turbulence.

Nous avons calculé la capacité de transport de trois manières différentes :

- en utilisant les lois établis en régime uniforme, basés sur la contrainte au fond et l'intensité turbulente calculées à partir de la vitesse moyenne et du tirant d'eau avec les formules du régime uniforme, ainsi que le paramètre de Shields classique négligeant l'effet de pente (notée Uniforme),

- en utilisant la contrainte au fond issue de la résolution des équations de Navier-Stokes, mais en gardant l'intensité turbulente du régime uniforme et le paramètre de Shields classique (notée Correction partielle),

- en utilisant la contrainte au fond et l'intensité turbulente issues de la résolution des équations de Navier-Stokes, et en prenant en compte l'effet de pente dans le calcul du paramètre de Shields (notée Non Uniforme).

Nous avons choisi cette progressivité des corrections car les deux groupes de corrections jouent en sens opposés sur la capacité de transport par charriage.

Nous avons choisi de calculer le débit solide à l'aide des lois établies dans la première partie, en assurant leur continuité au seuil de suspension. Les écoulements choisis sont ceux correspondant à des pentes de +5% et -5%, le débit par unité de largeur étant toujours de 1m²/s. Nous avons étudié deux diamètres de sédiments : 0,1 mm pour le charriage et 50 microns pour la suspension. La contrainte au fond et l'intensité turbulente sont calculées par résolution des équations de Navier-Stokes sur des géométries du type de celle de la quatrième partie.

En rivière, les irrégularités morphologiques font que l'écoulement est constitué d'une succession de régimes accélérés et décélérés. Nous quantifierons le débit solide moyen pour une succession de régimes accéléré et décéléré, décrit en figure 5.1 à partir des lois en régime uniforme et celles que nous proposons pour le régime non-uniforme (5.1.3).

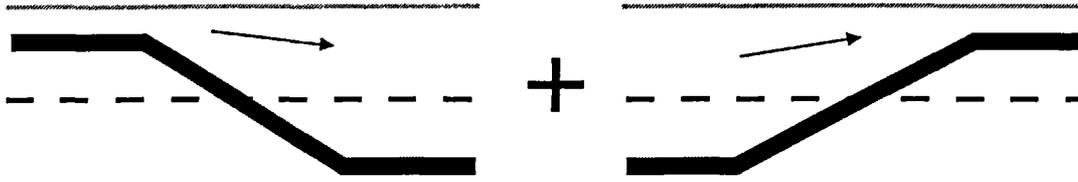


Figure 5.1 - Géométries utilisées pour le calcul du débit solide moyen.
Le fond non uniforme est tracé en trait plein, le fond uniforme lissé en pointillés.

Nous examinerons ensuite les corrections à apporter dans le cas d'une crue se propageant sur un fond quasi-horizontal (5.1.4).

5.1.1 Charriage

La capacité de transport par charriage a été calculée à partir des équations (1.58) et (1.67) que nous avons exprimées ici en fonction du paramètre de Shields :

$$\frac{\Psi_{crit}}{[1+m_i]_t^2} < \bar{\Psi} < \frac{\Psi_{crit}}{[1-m_i]_t^2} \quad \text{on a : } q_{sc-} * \propto \frac{[\Delta D]^{3/2}}{8m_i t} \sqrt{1 - \frac{\Psi_{crit}}{\bar{\Psi}}} \left[[1+m_i]_t^2 \bar{\Psi} - \Psi_{crit} \right]^{3/2} \quad (5.1)$$

$$\bar{\Psi} > \frac{\Psi_{crit}}{[1-m_i]_t^2} : q_{sc+} * \propto [\Delta D]^{3/2} \sqrt{\bar{\Psi}} \left[[1+m_i]_t^2 \bar{\Psi} - \Psi_{crit} \right] \quad (5.2)$$

$$\text{avec } m = \frac{|u_{max} - \bar{u}|}{\sigma_u} \quad (5.3)$$

Le paramètre de Shields critique en régime non-uniforme permanent est donné par l'expression suivante, dérivée de l'équation (2.46) :

$$\Psi_{crit} = \Psi_{U0_{crit}} \cos \alpha \left[1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \phi_1} + \frac{1}{\tan \phi_1} \frac{\rho}{(\rho_s - \rho)} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right] \quad (5.4)$$

Le paramètre de Shields est calculé à partir de la contrainte calculée à l'aide du logiciel CFX.

La capacité de transport en fonction de l'abscisse longitudinale est présentée ci-dessous en régime accéléré (figure 5.1) et décéléré (figure 5.2).

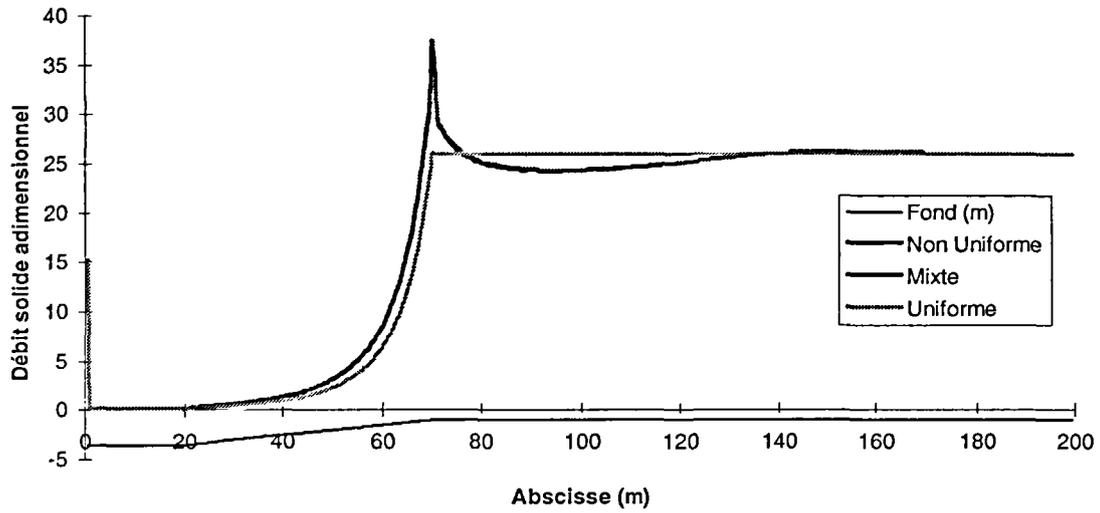


Figure 5.1 - Evolution de la capacité de transport par charriage calculée, prenant en compte différents termes correctifs en régime accéléré.

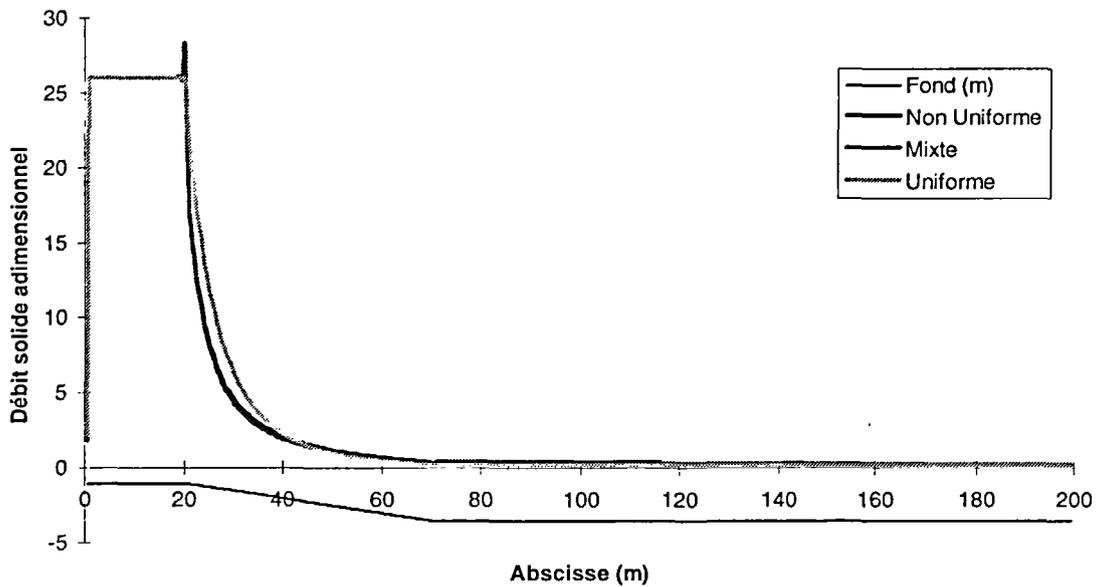


Figure 5.2 - Evolution de la capacité de transport par charriage calculée, prenant en compte différents termes correctifs en régime décéléré

Nous avons calculé l'intégrale sur 150 m (50 m de plan incliné, 50 m en amont et 50 m en aval) de la capacité de transport en régime accéléré, décéléré, en prenant en compte différents termes correctifs (cf tableau 5.1).

Charriage	Corr. τ_0, I et i_t	Corr. τ_0	Uniforme	Ecart en %
Accéléré	10.21	10.27	10.09	+1.2
Décéléré	9.95	9.88	10.09	-1.4
Total	10.08	10.07	10.09	-0.1

Tableau 5.1 - Capacité de transport adimensionnelle de charriage en régime non-uniforme calculée avec différentes corrections

Pour des pentes de 5%, les écarts de la capacité de transport par charriage sont de l'ordre de 1% en régime accéléré et décéléré. Conformément à ce qui était attendu, les corrections augmentent légèrement le charriage en régime accéléré et le diminue en régime décéléré. Ceci est lié aux corrections sur la contrainte au fond, dont dépend principalement la capacité de transport par charriage. Les effets se compensent de telle sorte que l'écart moyen sur une succession de deux plans inclinés de pentes opposées est de l'ordre de 0.1%, que l'on pourra considérer comme nul.

La capacité de transport associée au tirant d'eau moyen est de 3.0 soit 15% seulement de la capacité de transport calculée en régime non-uniforme. Pour obtenir la même capacité de transport en géométrie uniforme, il faut un tirant d'eau de 1,3 m correspondant au tirant d'eau le plus faible augmenté de 1/8 de la différence des tirants d'eau amont et aval.

L'inertie du débit solide liée au libre parcours moyen va s'opposer à l'écart lié à la contrainte au fond. Dans le cas présent, le libre parcours moyen sera de l'ordre du cm (100 fois le diamètre de la particule d'après Daubert & Lebreton [1967]).

5.1.2 Suspension

La capacité de transport par suspension a été calculée à partir de l'équation (1.114) que nous avons exprimée ici en fonction du paramètre de Shields :

$$q_{ss}^* = \int_0^h C_s(z) V_s(z) dz = C_a q \left[\frac{1}{h-a} \int_a^h \frac{C_s(z)}{C_a} \frac{V_s(z)}{V_m} dz \right] \quad (5.6)$$

Nous avons choisi de prendre un coefficient $\alpha_c = 1$ dans l'expression (1.80) donnant la concentration au fond. Celle-ci s'écrit alors :

$$C_a \propto \sqrt{\tau_0 - \tau_{0crit}} \quad (5.6)$$

La capacité de transport en fonction de l'abscisse longitudinale est présentée ci-dessous en régime accéléré (figure 5.3) et décéléré (figure 5.4).

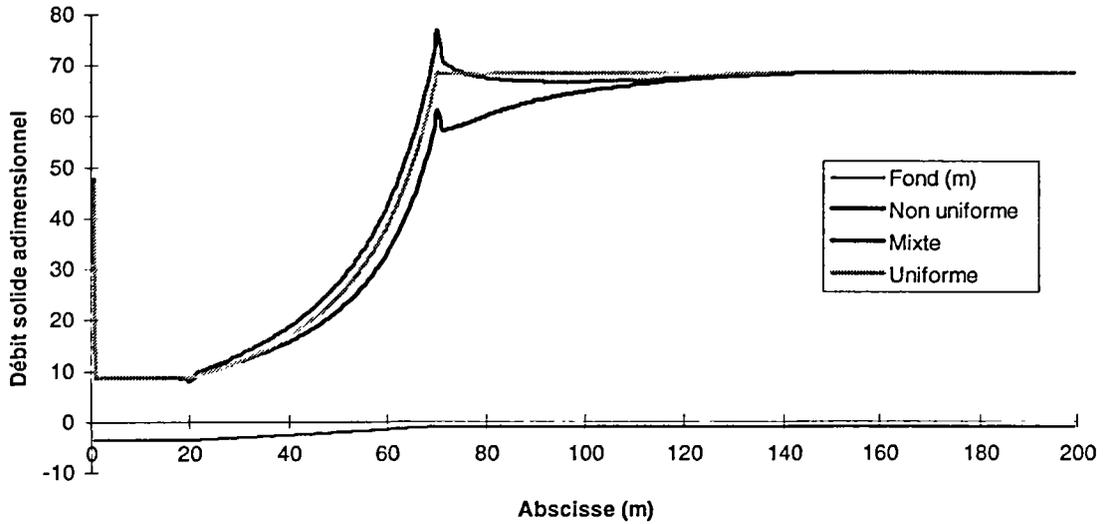


Figure 5.3 - Evolution de la capacité de transport par suspension calculée, prenant en compte différents termes correctifs en régime accéléré.

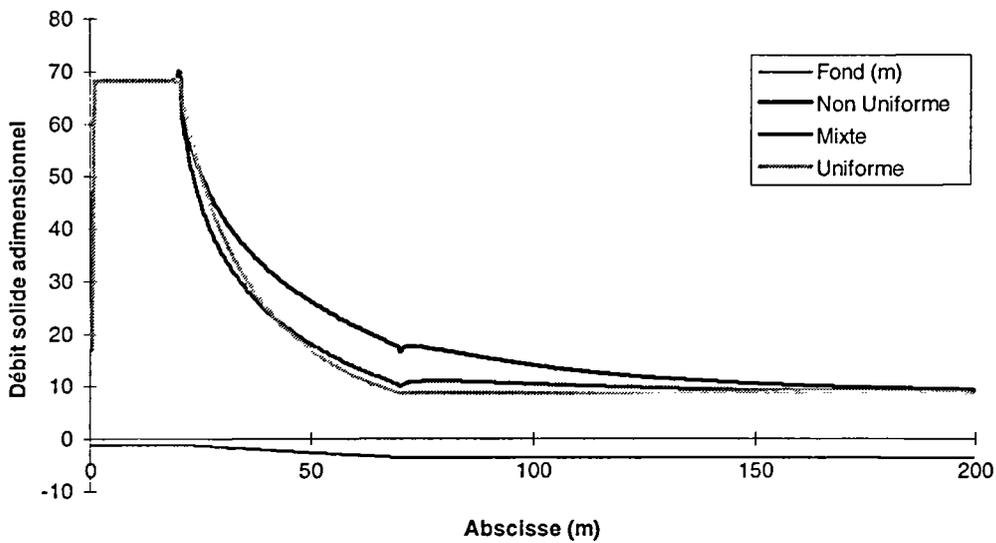


Figure 5.4 - Evolution des capacités de transport en suspension calculées prenant en compte différents termes correctifs en régime décéléré

L'écart de la capacité de transport au régime uniforme est essentiellement dû à l'inertie de la turbulence. Comme pour le charriage, l'écart lié à la contrainte au fond est faible, et celui lié à la pente négligeable : les courbes prenant en compte les corrections "Non-uniforme" et "Mixte" sont confondues. L'effet de la turbulence est opposé à l'effet de la contrainte, ce qui fait que contrairement au charriage, la capacité de transport par suspension augmente en régime décéléré et diminue en régime accéléré. C'est également conforme à ce qui était attendu.

Nous avons calculé l'intégrale sur 150 m (50 m de plan incliné, 50 m en amont et 50 m en aval) de la capacité de transport en régime accéléré, décéléré, en prenant en compte différents termes correctifs (cf tableau 5.2).

Suspension	Corr. τ_0 , I et i_t	Corr. τ_0	Uniforme	Ecart en %
Accéléré	31.6	34.7	34.2	-7.6
Décéléré	38.4	34.6	34.2	+12.3
Total	35.0	34.6	34.2	+2.5

Tableau 5.2 - Capacité de transport adimensionnelle en suspension en régime non-uniforme calculée avec différentes corrections

Pour des pentes de 5%, les écarts de la capacité de transport par suspension par rapport au régime uniforme de l'ordre de 10%. Les effets se compensent de telle sorte que l'écart total est de l'ordre de 2,5%. En pratique, le calage de la ligne d'eau ferait apparaître un coefficient de frottement légèrement supérieur pour prendre en compte les pertes de charge à l'élargissement et au rétrécissement. Comme ce coefficient intervient dans le calcul du débit solide en suspension, le débit solide calculé sans corriger les lois établies en régime uniforme sera supérieur à celui donné dans la quatrième colonne du tableau 5.2. L'écart est donc en réalité inférieur.

La capacité de transport associée au tirant d'eau moyen est de 20.2 soit 60% seulement de la capacité de transport calculée en régime non-uniforme. Pour obtenir la même capacité de transport en géométrie uniforme, il faut un tirant d'eau de 1,6 m correspondant au tirant d'eau le plus faible augmenté de 1/4 de la différence des tirants d'eau amont et aval.

A l'inertie de la turbulence, va s'ajouter l'inertie du débit solide liée à leur libre parcours moyen, lui même lié au rapport entre vitesse de l'écoulement, vitesse de chute et tirant d'eau. Ici le tirant d'eau est de l'ordre de 2 m, la vitesse de l'écoulement 0,5 m/s et la vitesse de chute de l'ordre de 0,1 mm/s, pour des particules de diamètre 50 microns et masse volumique 2600 kg/m³. La longueur moyenne d'une trajectoire entre deux contacts avec le fond est dans ce cas de l'ordre de 5 km. La distance de chargement sera ici nettement supérieure à la distance entre deux ruptures de pentes, les variations de la capacité de transport vont être fortement lissée par l'inertie des particules en mouvement.

5.1.3 Géométries d'une rivière naturelle

Nous avons montré dans les deux paragraphes précédents que l'écart de la capacité de transport moyenne restait faible (quelques % au maximum) entre un calcul prenant en compte les corrections liées au régime non-uniforme et un autre utilisant les lois établis en régime uniforme, mais sur la géométrie non-uniforme. L'écart en prenant une géométrie uniforme lissée est au moins de 50% dans le cas de pentes de 5% sur 50 m. La géométrie lissée équivalente d'un point de vue capacité de transport est plus proche des tirants d'eau les plus faibles. Ceci est sans doute à relier au fait que l'exposant auquel intervient le tirant d'eau dans les formules de transport solide est supérieur à 1. L'enjeu principal n'est donc pas de corriger les lois de transport des effets non-uniforme, mais de rendre compte de la géométrie non-uniforme, comme l'illustre la figure 5.5.

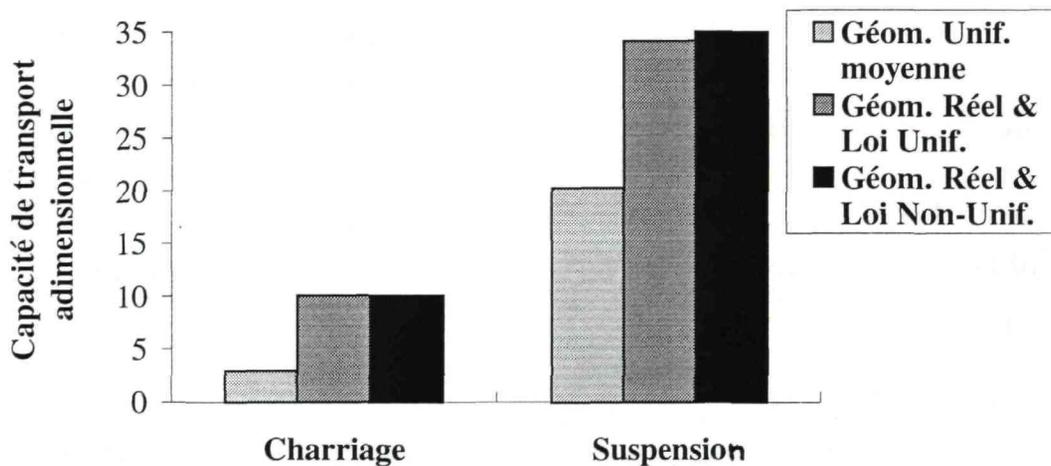


Figure 5.5 - Capacité de transport en fonction de la prise en compte de non-uniformité de la géométrie et de l'écoulement

Cette géométrie réelle peut être prise en compte soit par une description précise, soit en intégrant cette variabilité du fond dans les lois de transport solide, comme c'est le cas pour le coefficient de frottement, soit en construisant une géométrie simplifiée équivalente du point de vue du transport solide. Comme nous l'avons vu aux paragraphes 5.1.1 et 5.1.2, une telle géométrie correspondra plutôt aux points les plus hauts du profil en long du lit [Louis 1996].

5.1.4 Variations naturelles des débits : les crues

Dans le cas d'une crue les écarts liés au profil des vitesses et à l'inertie de la turbulence seront probablement plus faibles que dans le cas des plans inclinés en régime permanent, dans

la mesure où la dérivée particulière du profil des vitesses est nulle si la crue n'est pas amortie. Nous avons vu dans le paragraphe 2.2.3 que les forces supplémentaires liées à la nature non-uniforme de l'écoulement sont faibles. En effet, elles ne font varier le seuil de mise en mouvement que de 5%, pour une pente de la ligne d'eau de 2%, qui pour une crue naturelle est élevé. Si on fait l'hypothèse que la crue se propage à 1 m/s, une pente de 2% correspond à une montée des eaux de l'ordre de 1m en 1 mn.

La précision de l'hydrogramme est donc plus importante que les corrections liées à la non-uniformité de l'écoulement. Comme pour la géométrie, le lissage de la crue est déterminant. Le débit permanent équivalent sur la durée de la crue est supérieur au débit moyen, du fait encore de la non-linéarité de la capacité de transport par rapport au débit. Nous rappelons qu'en régime uniforme et à coefficient de frottement constant, la contrainte au fond varie comme la hauteur d'eau et donc comme le débit à la puissance 0,6. Pour le charriage, l'exposant du débit dans la capacité de transport serait proche de 1 ($1,5 * 0,6 = 0,9$) s'il n'y avait pas de seuil de mise en mouvement, mais ce seuil introduit une non-linéarité. Pour la suspension, on peut négliger l'effet du seuil de mise en mouvement, mais l'exposant est de l'ordre de $2,5 * 0,6 = 1,5$.

5.2 TRANSPORT SOLIDE EN MILIEU NATUREL, VERS L'OPERATIONALITE

Nous avons vu dans la quatrième partie que le transport solide en rivière n'était jamais uniforme en régime permanent du fait de la non-uniformité de la géométrie du lit. Il faut ajouter à cela que le transport solide a lieu essentiellement pendant les crues, ce qui ajoute l'aspect transitoire à la non-uniformité spatiale. Doit-on pour autant faire un relevé topographique précis, modéliser finement la turbulence et les profils des vitesses, voire calculer la trajectoire de chaque particule solide. Une partie de la réponse est donnée par le paragraphe précédent, dans la mesure où les précisions de la géométrie et de l'hydrogramme de crue jouent beaucoup plus que les termes correctifs liés à la contrainte au fond et à la turbulence. Dans le cas de la suspension, l'inertie des particules solides peut être importante, ce qui fait que le transport solide réel sera un lissage de la capacité de transport. L'autre partie de la réponse est donnée par Lafond [1995], qui a montré que les abaques de Camp [1946] étaient plus fiables qu'une simulation euléro-lagrangienne pour calculer l'efficacité d'un décanteur, en plus d'être moins coûteuses. Ces abaques sont basées sur le nombre de Hazen [1904], qui fait intervenir la vitesse de chute, la vitesse débitante, la profondeur et la longueur du décanteur.

Les modèles déterministes à l'échelle des processus élémentaires même s'ils augmentaient la pertinence des modèles de transport solide, diminuent fortement leur mesurabilité. Ils sont donc moins opérationnels que des modèles plus simples, pour la plupart établis depuis une cinquantaine d'années, voire un siècle, et pourtant peu fiables.

La connaissance des phénomènes de transport solide en rivière peut avoir différents objectifs : évolution en long et en plan du lit mineur à l'échelle de la décennie, stabilité d'un ouvrage à l'échelle d'une crue, caractéristiques morphologiques du lit, caractéristiques du substrat, évolution des caractéristiques du substrat lors d'un événement particulier. Ces différents objectifs ne doivent pas nécessairement être abordés à l'aide des mêmes outils. C'est pourquoi nous allons consacrer un paragraphe à chacun d'eux.

5.2.1 Evolution du lit aux échelles kilométrique et de la décennie

Nous nous intéressons ici aux volumes de sédiments transportés avec comme objectif de prédire l'évolution de la topographie du lit à grandes mailles spatiales (de 100 m à 10 km) et temporelles (de la crue à la décennie). L'évolution à des mailles plus petites nous paraît hors de portée d'un modèle, car les données topographiques et lithologiques nécessaires seront trop importantes pour être acquises à un coût raisonnable, et que la succession des événements hydroclimatiques conditionnant le transport solide sont par définition imprévisibles. Un tel modèle sera peut-être plus pertinent, mais non mesurable, donc non opérationnel. Pour que le modèle soit opérationnel, il faut que sa maille de résolution soit cohérente avec les pas de temps et d'espace de la question à laquelle doit répondre le modèle. Aller à des mailles plus petites par soucis de pertinence conduit à se heurter aux limites de la mesurabilité et donc à condamner son modèle à ne jamais être opérationnel.

L'influence de la non-uniformité à l'échelle kilométrique est essentiellement liée à la non-uniformité topographique. Une bonne prise en compte de ces variations en utilisant les lois établies en régime uniforme semble suffisant pour traiter la non-uniformité à cette échelle. Une description détaillée de la topographie n'est pas indispensable, on peut même se demander si elle a un sens dans la mesure où elle est modifiée à chaque crue et que l'on n'a pas pour objectif de suivre son évolution à ce niveau de détail. Il faudrait pour cela être capable de prédire également son évolution en plan conditionné par les courants secondaires. On arrive vite à la simulation tridimensionnelle et à une superbe usine à gaz, qui pourra certes obtenir un prix académique, mais dont aucun ingénieur ne servira jamais. Il faut noter que la géométrie d'un cours d'eau est façonné par et donc intimement lié à l'écoulement, les irrégularités du fond étant intimement liées aux structures turbulentes de même échelle [Yalin 1992, Sidorchuk 1996]. Un modèle déterministe ne prend pas en compte ce lien. Une capacité de transport moyenne par tronçon homogène [Hérouin et al. 1995] semble être la seule façon raisonnable d'appréhender la capacité de transport en rivières naturelles. Il est possible, préférable et moins cher, de lisser la géométrie et de prendre en compte les irrégularités du fond sous forme statistique. Ceci est déjà fréquemment fait pour l'hydraulique lorsqu'on intègre ces irrégularités dans un coefficient de frottement global.

En effet, la morphologie du lit est la résultante des apports solides, du régime hydrologique, des caractéristiques de la vallée : lithologie, caractéristiques et entretien des berges, endiguements,... [Leopold et Wolman 1964] On observe une résultante du passé, pour lequel on ne pourra pas collecter de données supplémentaires. Ceci étant, si l'état observé est l'état asymptotique, peu importe les conditions initiales, elles toutes théoriquement au même l'état d'équilibre. Cet état d'équilibre est dynamique, seuls les caractéristiques du lit sont stables : pente moyenne, gabarit, amplitude des méandres,... De plus, les données sur les apports solides sont très rares. Ceci rend une approche déterministe peu opérationnelle. Il reste donc l'approche statistique visant à relier la morphologie du lit aux caractéristiques accessibles du bassin versant et de la vallée : hydrologie, lithologie, géologie, occupation du sol, aménagements hydrauliques,.... Cette morphologie peut être caractérisée par sa capacité hydraulique : le débit de plein bord [Albert 1992]. Ce débit de plein bord peut ensuite être relié au régime hydrologique et au transit solide, soit par des mesures de transport lors d'un événement, soit en déterminant le seuil de mise en mouvement de matériaux constituant le fond. Cet état d'équilibre est un intégrateur de tous les processus liés à la dynamique du lit, il constitue donc un bon calage pour les modèles prédictifs de l'évolution du lit.

5.2.2 Stabilité d'ouvrages

Dans ce cas, l'extension spatiale et temporelle du domaine de calcul, ainsi que la précision locale recherchée peuvent justifier des approches rejetées dans le cas précédent. Un calcul tridimensionnel peut même s'avérer pertinent. En effet, on recherchera à déterminer la stabilité pour le débit le plus pénalisant, en général le plus élevé associé à une période de retour. La faible étendue spatiale du domaine étudié permet de rendre une topographie fine économiquement réalisable. La précision nécessaire justifie une topographie fine, mais également un calcul hydraulique fin. Ce dernier aura alors tout intérêt à être mené en tridimensionnel.

5.2.3 Structure de substrat

La succession des débits liquides et solides conditionne la structure du substrat des cours d'eau [Petit et al. 1990, Schächli 1992, Gomez 1994, Paola, & Seal 1995]. La structure du substrat : granulométrie, porosité et leur variabilité dans l'espace conditionnent l'habitabilité d'un cours d'eau, en particulier pour les macro-invertébrés benthiques [Peckarsky, 1985], les végétaux aquatiques [Barks & Smart, 1986] et la reproduction de certains poissons [Olsson & Persson, 1988]. Cette structure varie avec un pas d'espace relativement faible à l'intérieur du lit mineur. Un modèle déterministe nécessiterait donc une maille très fine pour rendre compte de l'hétérogénéité du milieu. Comme pour l'hétérogénéité

des conditions d'écoulement, une approche statistique [Lamouroux et al. 1992, 1995 & 1997] semble être la plus opérationnelle dans la mesure où une cartographie du cours d'eau n'est pas recherchée. Un modèle statistique de la structure du substrat reste à construire, il devra intégrer la variabilité de la morphologie des cours d'eau, et en particulier les alternances de faciès et la forme des berges.

CONCLUSION DE LA CINQUIEME PARTIE

Nous avons montré dans cette partie que la prise en compte de la non-uniformité n'influe que très modestement sur le transport solide moyen à l'échelle d'un tronçon homogène de rivière. En effet, les modifications, liés à la non-uniformité de l'écoulement, de la contrainte au fond d'une part, de l'intensité turbulente et de la pente d'autre part, ont des impacts opposés sur la capacité de transport et tendent à se compenser. La capacité de transport résultante de ces effets opposés tend elle-même à être lissée par l'inertie des particules en mouvement. Ce phénomène est plus marqué dans le cas du transport en suspension, dont la capacité de transport est plus affectée par la non-uniformité de l'écoulement.

C'est plutôt la prise en compte de la géométrie réelle et de l'hydrogramme réelle de crue qui peut modifier très sensiblement la capacité de transport. Ceci étant, cette géométrie est modifiée après chaque crue et l'hydrogramme d'une crue future est inconnu. La précision de la géométrie et de l'hydrogramme de crue ne sont pas accessibles à l'échelle du cours d'eau. Il faudra donc se contenter de caractéristiques globales, rendant compte du gabarit moyen et de ses fluctuations ainsi que du régime hydrologique. C'est dans cette direction que les avancées scientifiques sont sans doute les plus prometteuses, avec des concepts de tronçons homogènes, débits de plein bord, géométries caractéristiques, régimes hydrologiques et débits dominants.

Si on s'intéresse au transport solide de manière très local (seuil, épi, prise d'eau) alors les approches tridimensionnelles sont maintenant abordables et peuvent apporter des informations intéressantes. Dans ce cas, le domaine de calcul reste limité et la géométrie est connue avec une bonne précision.

Si l'on s'intéresse à la variabilité de conditions de transport solide ou de stabilité du substrat à l'intérieur d'un tronçon homogène, l'hydraulique statistique semble être une voie d'avenir.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons dans un premier temps analysé les mécanismes de transport solide et identifié les paramètres hydrauliques, qui pouvaient avoir une influence en régime non-uniforme. Ces paramètres ont été classés en deux groupes : les gradients, dont l'action est nulle en régime uniforme, et les grandeurs hydrauliques agissant en régime uniforme, mais qui sont liées entre elles par le régime uniforme. Ceci est en particulier le cas de la contrainte au fond, du taux de dissipation d'énergie et de l'intensité turbulente, qui sont tous les trois liés et en général décrits par la contrainte au fond. Cette liaison n'existant plus en régime non-uniforme, il nous a fallu séparer leur influence. Ceci n'était pas explicité dans les lois de transport en régime uniforme, puisqu'une seule des variables liées est exprimée, même si les autres interviennent implicitement. Cela a été le cas en particulier de la contrainte au fond et de la turbulence, qui sont deux paramètres clés de la capacité de transport d'un écoulement.

Dans un deuxième temps, nous avons analysé l'impact des forces supplémentaires liées à des gradients longitudinaux en refaisant le classique bilan des moments, mais en y intégrant ces forces. Nous avons pu borner l'impact relatif sur le seuil de mise en mouvement en fonction de l'intensité de ces gradients. Seul le terme lié à la pente du fond est couramment non négligeable en rivière. Le terme lié au gradient de la cote de la surface libre n'est à prendre en compte que dans les cas de rupture de barrages ou d'ouvertures brutales de vannes, lorsque les équations de Saint-Venant ne sont plus valides. Dans ce cas, il faudrait utiliser d'autres équations pour l'hydraulique avant d'affiner le calcul de la capacité de transport. Le terme de masse ajoutée lié au choc de l'eau sur les particules solides est quasiment toujours négligeable.

Dans la troisième partie, nous avons montré qu'il n'existait pas de profils similaires en écoulement à surface libre. Leur existence aurait permis d'établir un lien direct entre la contrainte au fond et les gradients spatiaux et temporels du tirant d'eau et de la vitesse. Nous avons donc dû nous contenter d'établir une approximation de la contrainte au fond au second ordre près par rapport aux gradients longitudinaux et temporels du tirant d'eau et de la vitesse débitante. Cette approximation suppose un régime non-uniforme asymptotique à gradients quasi-constants et très faibles, ce qui en limite fortement la portée opérationnelle. Nous avons également calculé les profils asymptotiques de la vitesse longitudinale, de la turbulence, de la contrainte de Reynolds.

Dans la quatrième partie, nous avons montré à l'aide de la résolution des équations de Navier-Stokes et d'un modèle de turbulence k, ϵ que l'écoulement non-uniforme asymptotique s'établissait sur une distance du même ordre, si ce n'est supérieure à la longueur d'onde des alternances de faciès d'un cours d'eau, ce qui retire toute portée opérationnelle à l'approximation établie dans la troisième partie. De plus, les approximations au second ordre

près surestiment en valeur absolue les écarts de la contrainte en régime non-uniforme asymptotique d'un facteur 7 par rapport aux simulations tridimensionnelles, et donne le signe opposé en régime décéléré, pour lequel la contrainte asymptotique semble être, comme en régime accéléré, supérieure à celle calculée en régime uniforme. Quoi qu'il en soit, les écarts les plus importants ne se situent pas dans la zone asymptotique à gradients quasi-constants, mais à l'aval immédiat des zones où les gradients varient rapidement, comme les ruptures de pente, ce qui réduit à néant l'intérêt opérationnel des approximations au second ordre près. Nous avons alors proposé un modèle unidimensionnel rendant compte des variations aux ruptures de pente, ainsi que de l'inertie pour atteindre le régime asymptotique.

Ces calculs nous ont également permis d'établir dans la cinquième partie, que les écarts de la capacité de transport liés à la non-uniformité de l'écoulement restaient faibles : de l'ordre de quelques %. Les différentes corrections sont complètement lissées du fait de leurs impacts opposés pour la contrainte au fond et la turbulence, les pentes positive et négative, la crue et la décrue, ainsi que par l'inertie des particules en mouvement. Par contre, une bonne représentation de la géométrie non-uniforme et des variations de débits et un calage sur des observations amélioreraient sans doute les résultats des modèles de transport solide. Mais cela nécessiterait une telle quantité de données, que le modèle ne serait plus mesurable. Par ailleurs, l'écoulement dans la rivière ne fait pas tout dans les processus de transport solide ; le transport en suspension est souvent plus conditionné par les apports du bassin versant que par la capacité de transport [Beschta 1987].

Nous avons montré le peu d'intérêt des modèles unidimensionnels prenant en compte la non-uniformité de l'écoulement, car les corrections qu'ils apportent sont nettement inférieures à celles venant d'une meilleure précision de la géométrie, tant que l'hypothèse de pression hydrostatique est valide. Il faudrait de plus modifier également les équations de Saint-Venant pour monter d'un ordre leur approximation. Pour résumer, les lois de transport solide établies en régime uniforme sont au même ordre d'approximation que les équations de Saint-Venant, les seules améliorations qu'il conviendrait d'apporter sont donc au niveau de la prise en compte de la non-uniformité de la géométrie.

La voie explorée dans cette thèse semble être une impasse. Pourtant les progrès récents en mécanique des fluides numériques permettent de calculer des écoulements dans des géométries de plus en plus complexes, ce qui est le cas des rivières. Pourquoi un lit de rivière résisterait-il à une approche qui commence à faire des merveilles pour les moteurs, les réacteurs chimiques ? Il nous semble, et d'autres travaux l'ont montré, que l'on ne prédira jamais l'état d'un système complexe en le décortiquant à l'infini, pour appliquer les grandes lois universelles à ses constituants élémentaires, dans le cas présent les équations de Navier-Stokes à l'échelle des particules fluides et solides. Même si l'on a longtemps été incapable de résoudre les équations établies depuis plus d'un siècle, les limites de la puissance de calcul laissent apparaître en se dissipant une limite beaucoup plus fondamentale qu'est la connaissance de l'état initial : géométrie, granulométrie, et des conditions aux limites :

hydrogramme et apports solides futurs. Ces conditions sont difficilement accessibles, car une rivière n'est en principe pas façonnée par l'homme, et les débits futurs sont imprévisibles.

On ne résoudra pas la complexité en compliquant le modèle, bien au contraire. Plus on compliquera le modèle, plus on s'enlisera dans la complexité. Poursuivre dans cette voie, avec un objectif opérationnel et en toute connaissance de cause, relèverait d'une obstination pathologique. Ceci étant, des recherches fondamentales sur la turbulence et le mouvement des sédiments déboucheront peut-être un jour sur des applications opérationnelles.

Il faut également se poser la question des relations subtiles entre hydraulique fluviale et mécanique des fluides. En effet, ses complexes par rapport au mécanicien des fluides conduisent l'hydraulicien à privilégier des options de recherche valorisantes d'un point de vue académique, mais inadaptées à son objet de recherche. Il nous semble que, contrairement à la mécanique des fluides, l'hydraulique fluviale n'est pas une science dure. En effet, en milieu naturel, comme en sciences sociales, on ne peut guère mener d'expérience reproductible. Lorsqu'on transfère en milieu naturel des résultats acquis au laboratoire, le résultat est souvent décevant, voire déroutant, car on ne peut reconstituer en laboratoire toute la complexité du milieu naturel. Or, c'est la complexité du système naturel qui est l'objet de recherche et non ses différents constituants.

Il nous semble que les efforts de recherche et les moyens en ingénierie devraient s'orienter vers les modèles les plus simples possibles compte tenu de la précision recherchée mais prenant en compte tous les paramètres ayant une influence significative, et non pas vers des modèles de plus en plus sophistiqués, mais ne prenant pas en compte tous les paramètres. Les échelles de temps et d'espace du modèle doivent correspondre aux échelles auxquelles les résultats sont attendus et les données récoltées. Pour prendre en compte tous les paramètres sans les avoir nécessairement identifiés ou individualisés, la meilleure solution est le calage du modèle sur des observations du système étudié. La connaissance de l'influence des différents paramètres n'est cependant pas inutile puisqu'elle permet d'affiner la forme des lois. Le calage est alors une mesure intégratrice des valeurs des paramètres intervenant dans les lois, et permet de prendre en compte de manière implicite les variables non explicités par la loi, mais intervenant dans le processus modélisé.

Pour améliorer l'estimation aux grandes mailles (échelles kilométrique et annuel) des débits solides et des évolutions morphologiques, nous suggérons d'améliorer les procédures de lissage ou de prendre en compte la variabilité géométrique sous forme statistique (écart type, par exemple) dans le calcul de la capacité moyenne de transport du tronçon homogène, comme dans le coefficient de Manning-Strickler, qui représente la résistance moyenne du fond à l'écoulement. Par contre, la contrainte moyenne déterminée par la loi de frottement ne peut être utilisée du fait de la non-linéarité des lois de transport solide par rapport à la contrainte au fond. On pourra affiner les lois de transport en les faisant dépendre de descripteurs synthétiques de la variabilité géométrique (alternances de faciès par exemple). Nous

suggérons également de développer des descripteurs synthétiques du régime hydrologique, qui soient pertinents pour les processus de transport solide.

Il nous semble par contre qu'une approche tridimensionnelle autour des ouvrages pour un événement déterminé peut d'avérer être à terme une approche alternative aux modèles physiques. En effet, dans ce cas, les données géométriques et granulométriques sont accessibles, et c'est sans doute la puissance de calcul qui est encore limitante.

Si l'on souhaite avoir des informations sur la variabilité à petite maille, mais que l'on n'a pas d'objectifs cartographiques, l'approche statistique semble être la plus pertinente. Une approche déterministe demanderait une telle acquisition de données, qu'elle serait impossible à mettre en oeuvre. De plus, les données acquises ne seront valables que jusqu'à la prochaine crue morphogène, et les informations apportées ne seront pas nécessaires. C'est le cas des modèles de prédiction de la capacité d'accueil des organismes aquatiques dans les cours d'eau.

BIBLIOGRAPHIE

Albert, M.B. (1992) *Equilibre morphologique et débit de plein bord*, 22ème journées de l'hydraulique, L'avenir de l'eau, question IV, Paris 15-17 septembre 1992, 10pp.

Allen, J.R.L. (1978) *Computational models for dune time-lag: calculations using Stein's rule for dune height*, *Sedim. Geol.* 20, 165-216

Anwar, H.O. & Atkins, R. (1980) *Turbulence measurements in simulated tidal flow*, *J. Hydraul. Div.*, 106(HY8), 1273-1289

Armanini, A. & Di Silvio, G. (1988) *Un modèle filaire en régime non permanent du transport de sédiments de granulométrie étendue*, *J. Hydraul. Res.*, 26(3), 275-292

Bagnold, A.J. (1936) *The movement of desert sand*, *Proc. Royal Soc. London, Royal Society of London*, A157, 594-620

Bagnold, R.A. (1966) *An approach to the sediment transport problem from general physics*, *Prof. Pap. U.S. Geol. Surv.* 422-I, 37pp.

Babakaiff, C.S. & Hickin, E.J. (1996) *Coherent Flow Structures in Squamish River Estuary, British Columbia, Canada*, in *Coherent Flow Structures in Open Channels*, Ed. P.J. Ashworth et al, Wiley, Chichester, UK

Balayn, P. (1996) *Modélisation du transfert de sédiments lors d'un lâcher d'eau en réseau d'assainissement : approche numérique*, Mémoire de DEA "Mécanique et Ingénierie", Université de Strasbourg / ENGEES / Cemagref, 71pp.

Barks & Smart (1986) *Ecology* 67, 1328-1340

Barré de Saint-Venant, (1871) *Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*, *Compte rendu de l'Académie des Sciences, Paris, France*, 73, 147-154

Bell, R.G. & Sutherland, A.J. (1983) *Nonequilibrium bedload transport by steady flows*, *J. Hydraul. Eng.*, 109(3), 351-367

Beschta, R.L. (1987) *Conceptual Models of Sediment Transport in Streams*, *Sediment Transport in Gravel-bed Rivers*, Ed. Thorne, R.C, Bathurst, J.C., & Hey, R.D., Wiley, Chichester, U.K., 387-420

Bettess, R. (1984) *Initiation of sediment transport in gravel streams*, *Proc. Instn. Civ. Engrs, Part. 2*, 77, mars, 79-88

Bradshaw, P. (1967) *J. Fluid Mech.*, 29, 623

Brady, J.F. & Acrivos, A. (1981) *Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow*, J. Fluid Mech., 112, 127-150

Bonnafous, A. (1989) *Le siècle des ténèbres de l'économie*, Economica, Paris, 179pp.

Buffington, J.M., Dietrich, W.E. & Kirchner, J.W (1992) *Friction Angle Measurements on a Naturally Formed Gravel Streambed: Implications for Critical Boundary Shear Stress*, Water Resour. Res. 28(2), 411-425

Camp, T.R. (1946) *Sedimentation and design of settling tanks*, Transactions ESCE 58, 895-936

Cardoso, A. (1989) *Spatially accelerating flow in a smooth open channel*, Thèse n° 813 de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse

Cardoso, A., Graf, W.H. & Gust, G. (1991) *Ecoulement permanent graduellement accéléré dans un canal découvert à fond lisse*, J. Hydraul. Res., 29(4), 525-543

Carstens (1966) *An Analytical and Experimental Study of Bed Ripples under Water Waves*, Quart. Repts. 8 & 9, Georgia Inst. of Tech., School of Civil Eng., Atlanta, U.S.A.

Cebeci, T. (1986) *Unsteady boundary layers with an intelligent numerical scheme*, J. Fluid Mech., 163, 129-140

Chow, V.T. (1959) *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New-York, USA

Clauser, F.H. (1954) *Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients*, J. Aero. Sci. 21, 91-108

Clift, R., Grace, J.R., & Weber, M.E. (1978) *Bubbles, Drops and Particules*, 380 p., Academic Press Inc., San Diego, USA

Coleman, H.W., Moffat, R.J. & Kays, W.M. (1977) *The accelerated fully rough turbulent boundary layer*, J. Fluid Mech., 82(3), 507-528

Coles, D. (1956) *The law of the wake in the turbulent boundary layer*, J. Fluid Mech., 1, 191-226

Cousteix, J. (1989) *Turbulence et couche limite*, Cepadues-Editions, 627 pp.

Daubert, A. & Lebreton, J.C. (1967) *Etude expérimentale et sur modèle mathématique de quelques aspects des processus d'érosion des lits alluvionnaires, en régime permanent et non permanent*, Proc. 12ème Congrès de l'A.I.R.H., Vol 3

Daily, J.W. & Harleman, D.R.F. (1966) *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley, New-York, U.S.A.

Einstein, H.A. (1950) *The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows*, U.S. Dept. Agric., Soil Conserv. Serv., TB 1026

Engelund, F. & Fredsoe, J. (1976) *A sediment transport model for straight alluvial channels*, Nordic Hydrol. 7, 293-306

Engelund, F. & Hansen, E. (1967) *A Monograph on Sediment Transport in Alluvial Channel Streams*, Teknisk Forlag, Copenhagen, Denmark

Exner, F.M. (1925) *Über die Wechsel Wirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flüssen*, Sitzungsber. Akad. Wissenschaft, pt. Ila, Bd. 134, Vienne, Autriche

Finley, P.J., Phoe, K.C. & Poh, C.J. (1966) *Velocity measurements in a thin turbulent water layer*, La Houille Blanche 6

Fredsoe, J. (1979) *Unsteady flow in straight alluvial streams, modification of individual dunes*, J. Fluid. Mech. 91, 497-512

Fredsoe, J. (1981) *Unsteady flow in straight alluvial streams, Part 2 : Transition from dunes to plane bed*, J. Fluid. Mech. 102, 431-453

Frey P., (1991) *Etude expérimentale et simulation numérique du transport turbulent de particules solides dans un décanteur*, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon, Spécialité Mécanique, 150pp.

Gomez, B.(1994) *Water Resour. Res.* 30(7), 2229-2239

Goodwin P. (1986) *Sediment Transport in Unsteady Flows*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, California, U.S.A

Graf, W.H. (1971) *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, New-York, 513 pp.

Graf, W.H. & L. Suszka (1985) *Unsteady flow and its effect on sediment transport*, Proc. 21ème Congrès de l'A.I.R.H, Melbourne, Australie, 19-23 août 1985, 539-544

Graf, W.H. & M.S. Altinakar (1996) *Hydraulique fluviale tome 2 : Ecoulement non permanent et phénomènes de transport*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 378 pp.

Griffiths, G.A. & A.J. Sutherland (1977) *Bedload transport by translation waves*, J. Hydraul. Div. 103(HY11), 1279-1291

Gyr, A. (1983) *Towards a better definition of the three types of sediment transport*, J. Hydraul. Res. 21(1), 1-14

Hamm, P. (1996) *Généralisation des équations de Saint-Venant avec profils de vitesses et contraintes*, J. Hydraul. Res. 34(4), 481-501

Hazen, A. (1904) *On sedimentation*, Transactions ASCE 53(980), 45-71

Hérouin, E. (1991) *Modélisation des écoulements complexes à surface libre en milieu naturel*, rapport de D.E.A, Université de Lyon I / Cemagref, 95pp.

Hérouin, E., Breil, P. & Albert, M.B. (1995) *Quelles approches pour synthétiser le fonctionnement physique des écosystèmes d'eaux courantes*, Bulletin Français de Pêche et Pisciculture 337/338/339, 141-148

Hirt, F. & Thomann, H. (1986) *Measurement of wall shear stress in turbulent boundary layers subject to strong pressure gradients*, J. Fluid Mech. 171, 547-562

Hogg (1996) *A Model of an Impinging Jet on a Granular Bed, with Application to Turbulent, Event-driven Bedload Transport*, in Coherent Flow Structures in Open Channels, 101-124, Ed. P.J. Ashworth et al, Wiley, Chichester, UK

Hussain, A. & Ramjee, V. (1976) *Effects of the axisymmetric contraction shape on incompressible turbulent flow*, J. Fluid Eng., paper 75-FE-13, March, 58-69

Ibad-Zade, YU.A. (1987) *Movement of sediments in open channels*, T. R. Series, A.A. Balkema, Rotterdam, 364pp.

Isdiyana, (1993) *Simulation lagrangienne de particules solides en suspension dans une couche limite turbulente*, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon, 150pp.

Jain, S.C. (1992) *Note on lag in bedload discharge*, J. Hydraul. Eng. 118(6), 904-917

Jansen P.Ph., L. van Bendegom, J. van den Berg, M. de Vries & A. Zanen (1979) *Principles of river engineering, the non-tidal alluvial rivers*, Pitman, London, 509 pp.

Kalinske A.A. (1947) *Movement of Sediment as Bed-Load in Rivers*, Trans. Am. Geophys. Union 28(4)

Keulegan G.H.(1938) *Laws of turbulent flow in open channels*, J. Nat. Bureau of Standards, Research Paper 1151, 21, 707-741, Washington DC, USA

Ko, Y. (1990) *Simulation of dambreak wave along erodible channels*, Proc. Int. Conf. on river flood hydraulics 17-20 septembre 1990, 239-256

Lafond, J.M. (1995) *Comparaison de modèles de transport en suspension : Application à des ouvrages de stockage-dépollution*, Thèse de Mécanique, Université de Lyon I, 235pp. + annexes

Lamouroux, N., Statzner, B., Fuchs, U., Kohmann, F. & Schmedtje, U. (1992) *An unconventional approach to modelling spatial and temporal variability of local shear stress in stream segments*, Water Resour. Res. 28, 3251-3258

Lamouroux, N., Souchon Y. & Hérouin E. (1995) *Predicting velocity frequency distributions in stream reaches*, Water Resour. Res. 31(9), 2367-2375

Lamouroux, N. (1997) *Hydraulique statistique et prédiction de caractéristiques du peuplement piscicole : Modèles pour l'écosystème fluvial*, Thèse de l'Université Lyon 1, France

- Lau, L.Y. (1983) *Suspended Sediment Effect on Flow Resistance*, J. Hydraul. Eng. 109(5), 757-763
- Lebreton, J-C. (1974) *Dynamique fluviale*, Eyrolles, Paris
- Leeder, M.R. (1983) *On the dynamics of sediment suspension by residual Reynolds stresses - confirmation of Bagnold's theory*, Sedimentology 30, 485-491
- Leopold, L.B., M.G. Wolman & J.P. Miller (1964) *Fluvial Processes in Geomorphology*, Freeman, San Francisco, U.S.A.
- Louis, O. (1996) *Méthodologie de lissage de la géométrie d'un cours d'eau dans le cadre d'une analyse globale par tronçon : Application au transport solide*, Mémoire de fin d'étude, ENSEEIHT / Cemagref, 30pp. + Annexes
- Mc Donald, H. (1969) *The effect of pressure gradient on the law of the wall in turbulent flow*, J. Fluid Mech. 35, 311-336
- Mc Lean, S.R, J.M. Nelson & R.L Shreve (1996) *Flow-sediment Interactions in Separating Flows over Bedforms*, in Coherent Flow Structures in Open Channels, 203-226, Ed. P.J. Ashworth et al, Wiley, Chichester, UK
- Mellor, G.L. & Gibson, D.M. (1966) *Equilibrium turbulent boundary layers*, J. Fluid Mech. 24, 225-253
- Meyer-Peter, E. & R. Müller (1948) *Formulas for Bed-Load Transport*, 2^{ème} Congrès de l'AIRH, Stockholm, Suède
- Meunier, M. (1991) *Eléments d'hydraulique torrentielle*, Montagne 1, Coll. Etudes, Cemagref, Antony, France, 278 pp.
- Naaim, M. (1991) *Modélisation numérique des effets hydrodynamiques provoqués par un glissement solide dans une retenue*, Thèse de l'Université Grenoble I, Spécialité : Mécanique, 158pp.
- Nielsen, P. (1992) *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*, World Scientific, 324pp.
- Olsson & Persson (1988) Arch. Hydrobiol. 133, 621-628
- Orlando, A.F., Moffat, R.J., & Kays, W.M. (1974) Report HMT-17, Mech. Eng. Dept., Stanford University, U.S.A.
- Paola, C. & Seal, R. (1995) Water Resour. Res., 31(5), 1395-1407
- Paquier, A. (1995) *Modélisation et simulation de la propagation de l'onde de rupture de barrage*, Thèse de l'Université de St Etienne, Spécialité : Analyse Numérique
- Parker, G., Klingeman, P.C. & McLean, D.G. (1982) *Bedload and size distribution in paved gravel-bed streams*, J. Hydraul. Div. 108(4), 544-571
- Patankar, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, New-York, U.S.A.

- Peckarsky, (1985) *Can. J. Zool.* 63, 1519-1528
- Petit, F. et al. (1990) *Earth Surf. Proc. Landforms*, 15, 135-148
- Phillips, B.C. & A.J. Sutherland (1985) *Numerical modelling of spatial and temporal lag effects in bed load sediment transport*, 21ème Congrès de l'A.I.R.H., Melbourne, Australie, 19-23 août, 572-576
- Phillips, B.C. & A.J. Sutherland (1989) *L'effet de chargement dans le transport solide par charriage*, *J. Hydraul. Res.*, 27(1), 115-133
- Pimenta, M.M. (1975) Ph.D. Thesis, Mech. Eng. Dept., Stanford University, U.S.A.
- Ramez, P. (1995) *Erosion et transport solide en rivière, Tome 1 : Guide pour la compréhension des phénomènes*, GMA 8, Coll. Etudes, Cemagref, Antony, France, 130pp.
- Rahuel, J.L., F.M. Holly, J.P. Chollet, P.J. Belleudy et G. Yang (1989) *Modeling of riverbed evolution for bedload sediment mixtures*, *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(11), 1521, 1542 et discussion par G. Di Silvio et A. Armanini (1991), 117(7), 949-951
- Raudkivi, A.J. (1989) *On transport of bed load by waves*, *J. Hydraul. Res.*, 27(2), 245-256
- Rouse, H.(1938) *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, Dover Publ., New York, USA
- Rodi, W. (1984) *Turbulence models and their application in hydraulics, a state of art*, A.I.R.H.
- Schlichting, H. (1979) *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New-York, USA,
- Shields, A. (1936) *Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung*, communication PVWES, Berlin, 26
- Schlälchli, U.(1995) *Basic Equations of Siltation of Riverbeds*, *J. Hydraul. Eng.* 121(3), 274-287
- Serre, F. (1953) *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans des canaux*, *La Houille Blanche*, 374-388
- Sidorchuk, A. (1996) *The Structure of River Bed Relief, in Coherent Flow Structures in Open Channels*, 397-421, Ed. P.J. Ashworth et al, Wiley, Chichester, UK
- Song, T. & Graf, W.H. (1994) *Non-Uniform Open-Channel Flow over a Rough Bed*, *J. Hydrosoci. Hydraul. Eng.* 12(1), 1-25
- Strickler, A. (1923) *Beitrage zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauheitszahlen für Ströme, Kanäle und Geschlossene Leitungen*, Wasserwirtschaftsamt, Berne, Suisse
- Statzner, B., Fuchs, U. & Higler, L.W.G. (1996) *Sand erosion by mobile predaceous stream insects: implications for ecology and hydrology*, *Water Resour. Res.*, 32, 2279-2287

- Stokes, G.G. (1851) Transactions Cambridge Philosophy Society 9, Math. Phys. 3, 8-27
- Suszka, L. & Graf, W.H. (1987) *Sediment transport in steep channels at unsteady flow*, 22ème Congrès de l'A.I.R.H., Lausanne, Suisse
- Tu, H. & Graf, W.H. (1992) *Velocity distribution in unsteady open-channel flow over gravel beds*, J. Hydrosoci. Hydraul. Eng. 10(1), 11-25
- Valiani, A. (1992) *Rapid transients in free-surface flows with movable bed: a 2D numerical solution*, Proc. Hydrocomp'92 Int. Conf. on interaction of computational methods and measurements in hydraulics and hydrology, 25-29 Mai 1992, Budapest, Hongrie, 139-146
- Van Leer, B. (1981) *Toward the ultimate conservative difference scheme*, J. Compu. Phys. 32, 101-136
- Van Rijn L.C. (1984) *Sediment transport, part II: Suspended load transport*, J. Hydraul. Eng., 110(11), 1613-1641
- Vanoni, V.A. (1946) *Transportation of Suspended Sediment by Water*, Trans. Am. Soc. Civil Eng., 111, 67-133
- Vaschy, A. (1892) *Sur les lois de similitude en physique*, Annales Télégraphiques 19, 25-28
- Weiss, G.J (1992) *Bottom attack of surge waves*, Proc. 5th Int. Symp. on river sedimentation, Karlsruhe, R.F.A., Vol. 1, 193-197
- Wijbenga, J.H.A. & G.J. Klaassen (1983) *Changes in bedform dimensions under unsteady flow conditions in a straight flume*, Spec. Publs int. Ass. Sediment, 6, 35-48
- Yaglom, A.M. (1979) *Similarity laws for constant-pressure and pressure-gradient turbulent wall flows*, Ann. Rev. Fluid Mech., 11, 505-540
- Yalin, M.S. (1977) *Mechanics of Sediment Transport*, 2^{ème} Ed., Pergamon Press, New-York U.S.A.
- Yalin, M.S. (1992) *River Mechanics*, Pergamon Press, New-York, U.S.A.
- Yen, B.C. ed. (1991) *Channal flow resistance Centennial of Manning's Formula*, US Lybrary of Congress Catalog Card Number 91-66590, USA
- Yvergniaux, P. (1989) *Simulation euléro-lagrangienne du transport de particules solides en suspension dans un écoulement turbulent en canal*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 178 pp.
- Zeller, J. (1963) *Einführung in den Sedimenttransport offener Gerinne*, Schweiz. Bauzeitung, 81

ANNEXES

A.1 - Etablissement des équations générales des profils similaires _____	151
A.2 - Moments de l'équation de quantité de mouvement 2D à surface libre ____	153
A.2.1 <i>Equation générale</i> _____	153
A.2.2 <i>L'équation de conservation de la quantité de mouvement</i> _____	155
A.2.3 <i>L'équation conservation de l'énergie</i> _____	156
A.4 - Calcul des gradients des moments des profils verticaux des vitesses ____	160
A.5 - Calcul des coefficients de Boussinesq et de Coriolis pour un profil logarithmique _____	161
A.6 - Corrections des profils verticaux des contraintes au second ordre près ____	163
A.6.1 <i>Cas général</i> _____	163
A.6.2 <i>Régime laminaire</i> _____	164
A.6.3 <i>Régime turbulent</i> _____	166
A.7 - Résolution des équations de Saint-Venant modifiées à l'aide de RUBAR3	166

A.1 - Etablissement des équations générales des profils similaires

Nous partons de l'équation (3.12) et (3.13) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{\text{vol}} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

Nous allons exprimer l'équation (3.12) à l'aide de fonctions adimensionnelles suivantes :

$$\frac{U(z)}{U_c} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{\zeta}; \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad F = \int_0^\eta f(\mu) d\mu \quad (3.14)$$

Nous allons exprimer chacun des termes de l'équation (3.12) en fonction du profil adimensionnel des vitesses (3.14) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U_c}{\partial t} f - U_c \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \eta f' + U_c \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_c}{\partial x} f - U_c \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \eta f' + U_c \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$\text{En multipliant (3.16) par } U = U_c f : U \frac{\partial U}{\partial x} = U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} f^2 - U_c^2 \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \eta f f' + U_c^2 f \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.17)$$

Lorsque la largeur varie, $\partial V / \partial y$ n'est plus nul dans le repère cartésien (Oxyz), car si (Ox) est la direction de l'écoulement au point considéré (donc en ce point $V = 0$), si l'on se déplace de dy sur l'axe (Oy), le vecteur vitesse fait un angle γ avec l'axe (Ox).

$$\text{Lorsque } y = \frac{L}{2}, \text{ on a : } \tan \gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{d'où : } \tan \gamma = \frac{y}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \quad (3.18)$$

$$\text{Par ailleurs : } V = -\tan \gamma U \quad (3.19)$$

$$(3.18) \text{ et } (3.19) \text{ impliquent : } \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial x} \frac{U}{L} = -\frac{\partial L}{\partial x} \frac{U_c}{L} f \quad (3.20)$$

L'équation de conservation de la masse (3.13) nous permet d'écrire :

$$W = - \int_0^z \frac{\partial U}{\partial x} dk - \int_0^z \frac{\partial V}{\partial y} dk \quad (3.21)$$

En substituant (3.16) et (3.20) dans (3.21), on obtient :

$$W = - \int_0^z \frac{\partial U_c}{\partial x} f dk + \int_0^z U_c \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \eta f' dk - \int_0^z U_c \frac{\partial f}{\partial x} dk + \int_0^z + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{U_c}{L} f dk \quad (3.22)$$

Par le changement de variable $\eta = z / \zeta$, (3.22) s'écrit :

$$W = -\zeta \frac{\partial U_c}{\partial x} \int_0^\eta f(\mu) d\mu + \frac{\partial \zeta}{\partial x} U_c \int_0^\eta \mu f'(\mu) d\mu - \zeta U_c \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta f(\mu) d\mu + \frac{\zeta}{L} \frac{\partial L}{\partial x} U_c \int_0^\eta f(\mu) d\mu \quad (3.23)$$

$$\text{Par intégration par parties : } \int_0^\eta \mu f'(\mu) d\mu = f'[\eta f - F] \quad (3.24)$$

$$\text{Par ailleurs, on a : } \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_c}{\zeta} f' \quad (3.25)$$

Le produit de (3.25) par (3.23), modifiée par substitution de (3.24), donne :

$$W \frac{\partial U}{\partial z} = -U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} f' F + \frac{U_c^2}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} f' [\eta f - F] - \frac{U_c^2}{L} \frac{\partial L}{\partial x} f' F - U_c^2 f' \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3.26)$$

Nous pourrions exprimer la contrainte de cisaillement en régime turbulent à l'aide d'une viscosité turbulente équivalente notée ν_t , cette dernière n'étant pas une constante et dépendant du modèle de turbulence choisi. Pour se ramener au cas laminaire il suffit de poser $\nu_t = \nu$:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right] = \frac{U_c}{\zeta^2} [\nu_t f'] \quad (3.27)$$

On considérera, étant donné que l'axe des y est tangent à la surface d'isovitesse longitudinale, que :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (3.28) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.29)$$

On obtient donc en rassemblant tous les termes de l'équation de quantité de mouvement, à savoir en substituant (3.15), (3.17), (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29) dans (3.12) :

$$\frac{\partial U_c}{\partial t} f - \frac{U_c}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \eta f' + U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} (f^2 - f' F) - \frac{U_c^2}{\zeta} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] f' F = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} + U_c [\nu_t f'] + \frac{U_c^2}{\zeta} T \quad (3.30)$$

On rend l'équation (3.30) adimensionnelle en la divisant par $\frac{U_c^2}{\zeta}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta}{U_c^2} \frac{\partial U_c}{\partial t} f - \frac{1}{U_c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \eta f' + \frac{\zeta}{U_c} \frac{\partial U_c}{\partial x} (f^2 - f'F) - \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \right] f' F = \\ & - \frac{\zeta}{U_c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} + \frac{1}{\zeta U_c} [v_t f'] + T \quad \text{avec} \quad T = \zeta \left[f' \frac{\partial F}{\partial x} - f \frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{\zeta}{U_c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.31) \end{aligned}$$

A.2 - Moments de l'équation de quantité de mouvement 2D à surface libre

A.2.1 Equation générale

Les équations de conservation de la quantité de mouvement selon x et de la masse s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \rho \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{Vol} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

En introduisant l'hypothèse de répartition hydrostatique de la pression généralisée, l'équation (3.12) devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3.64)$$

En multipliant l'équation (3.64) par U^n , on obtient :

$$U^n \frac{\partial U}{\partial t} + U^{n+1} \frac{\partial U}{\partial x} + V U^n \frac{\partial U}{\partial y} + W U^n \frac{\partial U}{\partial z} = -g U^n \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U^n \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + U^n \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3.65)$$

L'équation (3.65) s'écrit également :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{n+1} U \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \frac{1}{n+1} V \frac{\partial U^{n+1}}{\partial y} + \frac{1}{n+1} W \frac{\partial U^{n+1}}{\partial z} \\ & = -g U^n \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U^n \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + U^n \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.66)$$

En multipliant l'équation de conservation de la masse (2.13) par $\frac{U^{n+1}}{n+1}$, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} U^{n+1} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{n+1} U^{n+1} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{n+1} U^{n+1} \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.67)$$

En ajoutant les équations (3.66) et (3.67), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial U^{n+2}}{\partial x} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial V U^{n+1}}{\partial y} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial W U^{n+1}}{\partial z} = \\ & -g U^n \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U^n \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + U^n \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.68)$$

La forme intégrale des équations de Prandtl est l'intégrale des moments d'ordre n par rapport à la vitesse selon x de l'équation (3.68). La forme générale s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} dydz + \frac{1}{n+1} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L \frac{\partial U^{n+2}}{\partial x} dydz \\ & + \frac{1}{n+1} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L \frac{\partial V U^{n+1}}{\partial y} dydz + \frac{1}{n+1} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L \frac{\partial W U^{n+1}}{\partial z} dydz \quad (3.69) \\ & = -g \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^n \frac{\partial Z_s}{\partial x} dydz + \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^n \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dydz + \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^n \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dydz \end{aligned}$$

Nous rappelons les règles de dérivation d'une intégrale dont les bornes sont variables :

$$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \phi dz + \phi(a) \frac{\partial a}{\partial x} - \phi(b) \frac{\partial b}{\partial x} \quad (3.70)$$

En appliquant ces règles (3.70) à l'équation (3.69) et en considérant que la géométrie du lit (ici largeur et cote du fond) ne varie pas en fonction du temps :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^{n+1} dydz - \frac{1}{n+1} \frac{\partial Z_s}{\partial t} \int_0^L U_s^{n+1} dy \\ & + \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^{n+2} dydz - \frac{1}{n+1} \frac{\partial Z_s}{\partial x} \int_0^L U_s^{n+2} dy + \frac{1}{n+1} \int_0^L W_s U_s^{n+1} dy \quad (3.71) \\ & = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^n dydz + \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^n \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dydz + \int_{Z_r}^{Z_s} \int_0^L U^n \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dydz \end{aligned}$$

Or la vitesse verticale à la surface est donnée par :

$$W_s = \frac{\partial Z_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (3.72)$$

L'équation (3.71) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \int_0^L \frac{U^{n+1}}{n+1} dydz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \int_0^L \frac{u^{n+2}}{n+1} dydz \\ & = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \int_0^h \int_0^L u^n dydz + \frac{1}{\rho} \int_0^h \int_0^L u^n \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dydz \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dans la suite, on négligera les frottements sur les parois latérales et que l'on pose $\tau = \tau_{xz}$, dans ce cas (3.73) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \int_0^L \frac{U^{n+1}}{n+1} dydz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \int_0^L \frac{u^{n+2}}{n+1} dydz \\ & = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \int_0^h \int_0^L u^n dydz + \frac{1}{\rho} \int_0^h \int_0^L u^n \frac{\partial \tau}{\partial z} dydz \end{aligned} \quad (3.74)$$

On rappelle :

$$\frac{u(z)}{U_m} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{h} \quad (3.14) \quad \text{et} \quad \frac{\tau(z)}{\lambda_u \rho U_m^2} = \sigma(\eta, f') \quad (3.53)$$

En utilisant les fonctions f (3.14) et σ (3.53), l'équation (3.74) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[Lh U_m^{n+1} \int_0^1 \frac{f(\eta)^{n+1}}{n+1} d\eta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[Lh U_m^{n+2} \int_0^1 \frac{f(\eta)^{n+2}}{n+1} d\eta \right] = \\ & -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} Lh U_m^n \int_0^1 f(\eta)^n d\eta + \lambda_u L U_m^{n+2} \int_0^1 f(\eta)^n \frac{\partial \sigma(\eta, f(\eta)')}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \quad (3.77)$$

Par ailleurs, nous utiliserons les trois premiers moments du profil adimensionnel des vitesses, que nous noterons :

$$I_1 = \int_0^1 f d\eta = 1 \quad I_2 = \int_0^1 f^2 d\eta \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 f^3 d\eta \quad (3.78)$$

Nous utiliserons également les coefficients de Coriolis :

$$\alpha_1 = I_2 \quad \alpha_2 = I_3 \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{I_2 - I_3}{2} \quad (3.79)$$

Ainsi que les coefficients de Boussinesq :

$$\beta_1 = I_1 \quad \beta_2 = I_2 \quad \text{et} \quad \beta_3 = I_1 - I_2 \quad (3.80)$$

A.2.2 L'équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'obtient en prenant $n = 0$ dans l'équation (3.77) :

$$\frac{\partial Lh U_m}{\partial t} + \frac{\partial I_2 Lh U_m^2}{\partial x} = gLh \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_u L U_m^2 [\sigma(0, f'(0)) - \sigma(1, f'(1))] \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} & Lh \frac{\partial U_m}{\partial t} + I_2 Lh U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + U_m \left[\frac{\partial Lh}{\partial t} + I_2 \frac{\partial Lh U_m}{\partial x} \right] + Lh U_m^2 \frac{\partial I_2}{\partial x} \\ & = gLh \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_u L U_m^2 [\sigma(0, f'(0)) - \sigma(1, f'(1))] \end{aligned} \quad (3.82)$$

En considérant que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ et en divisant (3.82) par Lh , l'équation (3.82) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial t} + I_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{U_m}{L} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + I_2 \frac{1}{Lh} \frac{\partial LhU_m}{\partial x} \right] + U_m^2 \frac{\partial I_2}{\partial x} \\ = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{U_m^2}{h} [\sigma(0, f'(0)) - \sigma(1, f'(1))] \end{aligned} \quad (3.83)$$

On pose : $\sigma(0, f'(0)) - \sigma(1, f'(1)) = \frac{\lambda_0}{\lambda_u}$: coefficient de frottement (3.84)

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial Lh}{\partial t} + \frac{\partial LhU_m}{\partial x} = 0 \quad (3.85)$$

En substituant (3.84) et (3.85) dans (3.83), on obtient :

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + I_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + (I_2 - 1) \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_0 \frac{U_m^2}{h} - U_m^2 \frac{\partial I_2}{\partial x} \quad (3.86)$$

Si on fait intervenir les coefficients de Boussinesc (3.80), l'équation (3.86) s'écrit :

$$\beta_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \beta_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \beta_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_0 \frac{U_m^2}{h} - U_m^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \quad (3.87)$$

A.2.3 L'équation conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'obtient en prenant $n = 1$ dans l'équation (3.77)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I_2 LhU_m^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial I_3 LhU_m^3}{\partial x} = gLhU_m \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_u LU_m^3 \int_0^1 \sigma(\eta, f'(\eta)) f'(\eta) d\eta \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} I_2 Lh \frac{1}{2} \frac{\partial U_m^2}{\partial t} + I_3 LhU_m \frac{1}{2} \frac{\partial U_m^2}{\partial x} + \frac{1}{2} U_m^2 \left[I_2 \frac{\partial Lh}{\partial t} + I_3 \frac{\partial LhU_m}{\partial x} \right] \\ = gLhU_m \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_u LU_m^3 \int_0^1 \sigma(\eta, f'(\eta)) f'(\eta) d\eta - \frac{1}{2} LhU_m^2 \left[\frac{\partial I_2}{\partial t} + U_m \frac{\partial I_3}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

En considérant que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ et en divisant (3.89) par LhU_m , l'équation de conservation

de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned}
& I_2 \frac{1}{2 U_m} \frac{\partial U_m^2}{\partial t} + I_3 \frac{1}{2} \frac{\partial U_m^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{U_m}{Lh} \left[I_2 \frac{\partial Lh}{\partial t} + I_3 \frac{\partial Lh U_m}{\partial x} \right] \\
& = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_u \frac{U_m^2}{h} \int_0^1 \sigma(\eta, f'(\eta)) f'(\eta) d\eta - \frac{1}{2} U_m \left[\frac{\partial I_2}{\partial t} + U_m \frac{\partial I_3}{\partial x} \right] \quad (3.90)
\end{aligned}$$

On pose : $\int_0^1 \sigma(\eta, f'(\eta)) f'(\eta) d\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_u}$: taux de dissipation d'énergie (3.91)

En substituant (3.91) et (3.62) dans (3.90), on obtient :

$$I_2 \frac{\partial U_m}{\partial t} + I_3 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{I_2 - I_3}{2} \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_1 \frac{U_m^2}{h} - \frac{1}{2} U_m \left[\frac{\partial I_2}{\partial t} + U_m \frac{\partial I_3}{\partial x} \right] \quad (3.92)$$

En faisant intervenir les coefficients de Coriolis (3.79), l'équation (3.92) s'écrit :

$$\alpha_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + \alpha_2 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \alpha_3 \frac{U_m}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \left[I - \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \lambda_1 \frac{U_m^2}{h} - \frac{1}{2} U_m \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + U_m \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right] \quad (3.93)$$

A.3 - Invariance au second ordre près du taux de dissipation d'énergie

Nous rappelons :

$$\frac{u(z)}{U_m} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{h} \quad (3.14) \quad \text{et} \quad \frac{\tau(z)}{\lambda_u \rho U_m^2} = \sigma(\eta, f') \quad (3.53)$$

Le développement limité de f' au voisinage du régime uniforme s'écrit :

$$f' = f_u \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right] \quad (3.102)$$

$$\text{avec} \quad |\phi|^2 = \sum_{i=1}^9 \int_0^1 \phi_i'^2 d\eta \quad (3.103)$$

Notre objectif est d'écrire un développement limité au voisinage du régime uniforme de l'expression du taux de dissipation d'énergie rappelé ci-dessous :

$$\int_0^1 \sigma(\eta, f'(\eta)) f'(\eta) d\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_u} \quad (3.91)$$

Nous allons tout d'abord écrire le développement limité de Gf' au voisinage du régime uniforme :

$$\sigma f' = \sigma(\eta, f') f' = f_u' \sigma \left[\eta, f_u' \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right] + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right] \quad (3.104)$$

$$\left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right]$$

En faisant un développement limité de σ au voisinage de f_u' , l'équation (3.104) s'écrit :

$$\sigma f' = \left[\begin{aligned} & \sigma(\eta, f_u') + f_u' \frac{\partial \sigma}{\partial f'}(f_u') \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right] \\ & + \frac{1}{2} f_u'^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial f'^2}(f_u') \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right]^2 \\ & + f_u' \frac{\partial \sigma}{\partial f'}(f_u') O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \right] \quad (3.105)$$

$$f_u' \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right]$$

En développant l'équation (3.105), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma f' &= \sigma(\eta, f_u') f_u' + \frac{\partial \sigma}{\partial f_0'} f_u'^2 \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right] \\ &+ f_u' \sigma(\eta, f_u') \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial f'^2} f_u'^3 \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right]^2 \\ &+ f_u' \left[\sigma(\eta, f_u') + \frac{\partial \sigma}{\partial f_u'} f_u' \right] O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \\ &+ O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.106)$$

Si $\frac{\partial \sigma}{\partial f'} f' = \alpha \sigma(\eta, f')$ (3.107), comme on a $\sigma(\eta, f_u') = (1 - \eta)$ (3.108) du fait de la

répartition linéaire sur la verticale des contraintes en régime uniforme, on peut écrire :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial f_u'} f_u' = \alpha(1 - \eta) \quad (3.109) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial f_u'^2} = -\frac{\alpha(1 - \eta)}{f_u'^2} \quad (3.110)$$

En substituant (3.109) et (3.110) dans l'équation (3.106), on obtient :

$$\sigma f' = (1 - \eta) f_u' \left[1 + (1 + \alpha) \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6}' \right] \right] + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \quad (3.111)$$

Si on pose $f_i = f_u \phi_i$ (3.112), l'équation (3.111) s'écrit également :

$$\sigma f' = (1 - \eta) f_u' \left[1 + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right] + (1 + \alpha) \sum \omega_i (1 - \eta) f_i' \quad (3.113)$$

L'intégrale de l'équation (3.113) s'écrit :

$$\int_0^1 \sigma f' d\eta = \int_0^1 (1 - \eta) f_u' d\eta \left[1 + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right] + (1 + \alpha) \int_0^1 \sum \omega_i (1 - \eta) f_i' d\eta \quad (3.114)$$

Par intégration par partie, on a :

$$\int_0^1 (1 - \eta) f_i' d\eta = [(1 - \eta) f_i]_0^1 + \int_0^1 f_i d\eta = \int_0^1 f_i d\eta \quad (3.115)$$

$$\text{Pour } i \neq 0 \text{ on a : } \int_0^1 f_i d\eta = 0 \text{ d'où } \int_0^1 (1 - \eta) f_i' d\eta = 0 \quad (3.116)$$

$$\text{De plus par définition de } f, \text{ on a : } \int_0^1 f d\eta = 1 \quad (3.117)$$

$$\text{La relation (3.117) est vraie en régime uniforme d'où : } \int_0^1 f_u d\eta = 1 \quad (3.118)$$

Les équations (3.115) en prenant $i = 0$ et (3.118) permettent d'écrire :

$$\int_0^1 (1 - \eta) f_u' d\eta = 1 \quad (3.119)$$

En introduisant (3.116) et (3.119) dans l'intégrale de l'équation (3.114), on a :

$$\int_0^1 \sigma f' d\eta = \frac{\lambda_l}{\lambda_u} = 1 + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \quad (3.120)$$

$$\text{La condition } \frac{\partial \sigma}{\partial f'} f' = \alpha \sigma(\eta, f') \quad (3.107) \text{ est vérifiée si } \sigma(\eta, f') = \sigma_\eta(\eta) f'^\alpha \quad (3.121)$$

Si on exprime (3.121) sous forme dimensionnelle, on a :

$$\sigma(\eta, f') = \sigma_\eta(\eta) f'^\alpha \quad (3.121) \Leftrightarrow \tau(z) = \rho U_m^2 \varphi(z) \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial u}{\partial z} \right]^\alpha \quad (3.122)$$

A.4 - Calcul des gradients des moments des profils verticaux des vitesses

Nous rappelons l'expression :

$$f' = f_u' \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \phi_{i+3} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \phi_{i+6} + O \left[|\phi|^2 \left(\omega_i, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \left(\omega_j, \frac{\partial \omega_j}{\partial t}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) \right] \right] \quad (3.102)$$

Nous allons exprimer les gradients longitudinaux et temporels des moments du profil vertical adimensionnel des vitesses, en utilisant la relation (3.102) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(\eta)^2 d\eta = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i(\eta) + O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) \right]^2 d\eta \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_i(\eta) d\eta + O(|\phi|^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(\eta)^3 d\eta = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f_u(\eta)^3 \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i(\eta) + O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) \right]^3 d\eta \\ &= 3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \int_0^1 f_u(\eta)^3 \phi_i(\eta) d\eta + O(|\phi|^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f(\eta)^2 d\eta = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \left[1 + \sum_{i=1}^3 \omega_i \phi_i(\eta) + O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) \right]^2 d\eta \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_i(\eta) d\eta + O(|\phi|^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \omega_j) \end{aligned} \quad (2.128)$$

En regroupant les expressions (3.126) à (3.128), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] &= h \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_i(\eta) d\eta \\ &+ \frac{h}{U_m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_i(\eta) d\eta + O(|\phi|^2 \frac{h}{U_m} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \omega_j) + O(|\phi|^2 h \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) \end{aligned} \quad (3.129)$$

On pose alors :

$$\gamma_i = \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_i(\eta) d\eta \quad (3.130)$$

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_i(\eta) d\eta \quad (3.131)$$

En substituant (3.130) et (3.131) dans l'équation (3.129), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{h}{U_m} \frac{\partial I_2}{\partial t} + h \frac{\partial I_3}{\partial x} - 2h \frac{\partial I_2}{\partial x} \right] &= h \lambda_u \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \gamma_i + \frac{h}{U_m} \lambda_u \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \xi_i \\ &+ O(|\phi|^2 \frac{h}{U_m} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \omega_j) + O(|\phi|^2 h \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) \end{aligned} \quad (3.132)$$

On obtient les expressions suivantes en fonction des différents gradients :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_u \left[1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \beta_i) \omega_i + \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h}{U_m} \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \right] \\ &+ O(|\phi|^2 \frac{h}{U_m} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \omega_j) + O(|\phi|^2 h \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \omega_j) + \lambda_u O(|\phi|^2 \omega_i \omega_j) \end{aligned} \quad (3.133)$$

Il nous faut maintenant exprimer les gradients spatiaux et temporels des gradients adimensionnels ω_1 , ω_2 et ω_3 :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U_m}{\partial t} - 2 \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m^3} \frac{\partial U_m}{\partial x} \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x \partial t} \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U_m}{\partial x} - \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial x} \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \quad (3.136)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m^2} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial U_m}{\partial t} - 2 \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m^3} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial U_m}{\partial x} - \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_u} \frac{h}{U_m} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x \partial t} \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{U_m} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (3.139)$$

A.5 - Calcul des coefficients de Boussinesq et de Coriolis pour un profil logarithmique

Nous allons calculer les coefficients de Boussinesq et de Coriolis associés au régime uniforme dans le cas d'un profil logarithmique.

Le profil des vitesses s'écrit dans ce cas :

$$U(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln \left[\frac{z}{z_0} \right] \quad (3.143)$$

Par intégration de l'équation (3.143) la vitesse moyenne vaut alors :

$$U_m = \frac{u^*}{\kappa} \frac{1}{h} \int_{z_0}^h \ln \left[\frac{z}{z_0} \right] dz = \frac{u^*}{\kappa} \ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \quad (3.144)$$

(3.143) et (3.144) permettent d'écrire le profil adimensionnel des vitesses :

$$f(\eta) = \frac{U(h\eta)}{U_m} = \frac{\ln \left[\frac{h}{z_0} \eta \right]}{\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1} \quad (3.145)$$

Le coefficient de frottement en régime uniforme s'écrit alors :

$$\lambda_u = \frac{u^{*2}}{U_m^2} = \frac{\kappa^2}{\left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^2} \quad (3.146)$$

Calcul de I_2 :

$$I_2 = \int_0^1 f^2 d\eta = \int_0^1 \frac{\left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \eta \right] \right]^2}{\left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^2} d\eta = \frac{z_0}{h \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^2} \int_{z_0}^h \ln^2(x) dx \quad (3.147)$$

$$I_2 = \frac{z_0}{h \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^2} \left[x \left[(\ln x - 1)^2 + 1 \right] \right]_{z_0}^{h/z_0} \quad (3.148)$$

$$I_2 = \frac{z_0}{h \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^2} \left[\frac{h}{z_0} \left[\left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^2 + 1 \right] - 2 \right] = 1 + \frac{\lambda_u}{\kappa^2} \left[1 - 2 \frac{z_0}{h} \right] \quad (3.149)$$

Pour $z_0 \ll h$, l'équation (3.149) s'écrit :

$$I_2 \approx 1 + \frac{\lambda_u}{\kappa^2} \quad (3.150)$$

Calcul de I_3 :

$$I_3 = \frac{z_0}{h \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^3} \left[x \left[(\ln x - 1)^3 + 3(\ln x - 1) - 2 \right] \right]_{z_0}^{h/z_0} \quad (3.151)$$

$$I_3 = \frac{z_0}{h \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^3} \left[\frac{h}{z_0} \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right]^3 + 3 \left[\ln \left[\frac{h}{z_0} \right] - 1 \right] - 2 \right] + 6 \quad (3.152)$$

$$I_3 = \left[\left[1 + 3 \frac{\lambda_u}{\kappa^2} - 2 \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} \right] + 6 \frac{z_0}{h} \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} \right] \quad (3.153)$$

Pour $z_0 \ll h$, l'équation (3.153) s'écrit :

$$I_3 \approx 1 + 3 \frac{\lambda_u}{\kappa^2} - 2 \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} \quad (3.154)$$

On obtient ainsi les coefficients de Boussinesq et de Coriolis :

$$\beta_2 = \alpha_1 = 1 + \frac{\lambda_u}{\kappa^2} \left[1 - 2 \frac{z_0}{h} \right] \approx 1 + \frac{\lambda_u}{\kappa^2} = 1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \quad (3.155)$$

$$\beta_3 = -\frac{\lambda_u}{\kappa^2} \left[1 - 2 \frac{z_0}{h} \right] \approx -\frac{\lambda_u}{\kappa^2} = -\frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \quad (3.156)$$

$$\alpha_2 = 1 + 3 \frac{\lambda_u}{\kappa^2} - \left[2 - 6 \frac{z_0}{h} \right] \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} \approx 1 + 3 \frac{\lambda_u}{\kappa^2} - 2 \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} = 1 + 3 \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} - 2 \frac{g^{3/2}}{\kappa^3 K_s^3 h^{1/2}} \quad (3.157)$$

$$\alpha_3 = -\left[1 + \frac{z_0}{h} \right] \frac{\lambda_u}{\kappa^2} + \left[1 - 3 \frac{z_0}{h} \right] \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} \approx -\frac{\lambda_u}{\kappa^2} + \frac{\lambda_u^{3/2}}{\kappa^3} = -\frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} + \frac{g^{3/2}}{\kappa^3 K_s^3 h^{1/2}} \quad (3.158)$$

A.6 - Corrections des profils verticaux des contraintes au second ordre près

A.6.1 Cas général

Nous partons de l'équation :

$$\begin{aligned} -\omega_1 \zeta_1' - \omega_2 \zeta_2' - \omega_3 \zeta_3' &= \omega_1 (f_u - \alpha_1) + \omega_2 (f_u^2 - \alpha_2) + \omega_3 [(F_u - \eta) f_u' - \alpha_3] \\ &+ O(|\phi_i| |\omega_i \omega_j|) + O(\lambda_u |\phi_i|^2 |\omega_i \omega_j|) + O(\lambda_u^2 |\omega_i \omega_j|) + O(|\zeta_i'|^2 |\omega_i \omega_j|) \end{aligned} \quad (3.173)$$

L'équation (3.173) étant vraie pour toutes les valeurs de ω_i , les coefficients leur étant associés sont nécessairement égaux :

$$\zeta_1' = -f_u + \alpha_1 \quad (3.174a)$$

$$\zeta_2' = -f_u^2 + \alpha_2 \quad (3.175a)$$

$$\zeta_3' = -(F_u - \eta) f_u' + \alpha_3 \quad (3.176a)$$

En intégrant les équations (3.174) à (3.176), on obtient :

$$\zeta_1(\eta) = -\int_0^\eta f_u(\mu) d\mu + \alpha_1 \eta + C_1 \quad (3.174b)$$

$$\zeta_2(\eta) = -\int_0^\eta f_u^2(\mu) d\mu + \alpha_2 \eta + C_2 \quad (3.175b)$$

$$\zeta_3(\eta) = -\int_0^\eta (F_u(\mu) - \mu) f_u'(\mu) d\mu + \alpha_3 \eta + C_3 \quad (3.176b)$$

Nous allons calculer les valeurs des $\sigma_i(1)$:

$$\int_0^1 f_u(\mu) d\mu = \beta_1 \quad (3.180)$$

$$\int_0^1 f_u^2(\mu) d\mu = \beta_2 \quad (3.181)$$

Par intégration par partie, on obtient :

$$\int_0^1 (F_u(\mu) - \mu) f_u'(\mu) d\mu = [(F_u(\mu) - \mu) f_u(\mu)]_0^1 + \int_0^1 (1 - f_u(\mu)) f_u(\mu) d\mu = \beta_3 \quad (3.182)$$

Or, les conditions de contrainte nulle à la surface libre doivent être vérifiées, d'où :

$$\zeta_i(1) = C_i + \alpha_i - \beta_i = 0 \quad (3.183)$$

Ce qui implique : $\zeta_i(0) = C_i = \beta_i - \alpha_i$ (3.184) d'où :

$$\zeta_1(\eta) = \beta_1 - \int_0^\eta f_u(\mu) d\mu + \alpha_1(\eta - 1) \quad (3.177)$$

$$\zeta_2(\eta) = \beta_2 - \int_0^\eta f_u^2(\mu) d\mu + \alpha_2(\eta - 1) \quad (3.178)$$

$$\zeta_3(\eta) = \beta_3 - \int_0^\eta (F_u(\mu) - \mu) f_u'(\mu) d\mu + \alpha_3(\eta - 1) \quad (3.179)$$

A.6.2 Régime laminaire

En régime laminaire, le profil adimensionnel des vitesses en régime uniforme s'écrit :

$$f_u = 3 \int_0^\eta (1 - \mu) d\mu = \frac{3}{2} \eta [2 - \eta] \quad (3.199)$$

Les moments du profil des vitesses s'écrivent :

$$I_2 = \int_0^1 f_u(\eta)^2 d\eta = \int_0^1 \left[\frac{3}{2} \eta [2 - \eta] \right]^2 d\eta = \frac{9}{4} \int_0^1 [4\eta^2 + \eta^4 - 4\eta^3] d\eta = \frac{6}{5} = 1,2 \quad (3.200)$$

$$I_3 = \int_0^1 \left[\frac{3}{2} \eta [2 - \eta] \right]^3 d\eta = \frac{27}{8} \int_0^1 [2\eta - \eta^2]^3 d\eta = \frac{27}{8} \int_0^1 [8\eta^3 - 12\eta^4 + 6\eta^5 - \eta^6] d\eta = \frac{54}{35} \approx 1,54 \quad (3.201)$$

On en déduit les coefficients de Coriolis et de Boussinesc :

$$\alpha_2 = 1,54; \alpha_3 = -0,17; \beta_2 = 1,2 \text{ et } \beta_3 = -0,2 \quad (3.202)$$

En utilisant les expressions (3.177) à (3.179), les fonctions de correction du profil adimensionnel de la contrainte par rapport au régime uniforme s'écrivent :

$$\zeta_1(\eta) = -\int_0^\eta f_u(\mu) d\mu + \alpha_1 \eta = -3\int_0^\eta \mu d\mu + \frac{3}{2}\int_0^\eta \mu^2 d\mu + \alpha_1 \eta = \frac{1}{2}\eta^3 - \frac{3}{2}\eta^2 + \alpha_1 \eta \quad (3.203)$$

$$\zeta_2(\eta) = -\int_0^\eta f_u^2(\mu) d\mu + \alpha_2 \eta = -\int_0^\eta \left[\frac{9}{2}\mu^2 - 9\mu^3 + \frac{9}{4}\mu^4 \right] d\mu + \alpha_2 \eta \quad (3.204)$$

$$\zeta_2(\eta) = -\frac{3}{2}\eta^3 + \frac{9}{4}\eta^4 - \frac{9}{20}\eta^5 + \alpha_2 \eta$$

$$\zeta_3(\eta) = -\int_0^\eta (F_u(\mu) - \mu) f_u'(\mu) d\mu + \alpha_3 \eta = -\int_0^\eta \left[\frac{3}{2}\mu^4 - 6\mu^3 + \frac{15}{2}\mu^2 - 3\mu \right] d\mu + \alpha_3 \eta$$

$$\zeta_3(\eta) = -\frac{3}{10}\eta^5 + \frac{3}{2}\eta^4 - \frac{5}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta^2 + \alpha_3 \eta$$

(3.205)

En utilisant les expressions (3.177) à (3.179), les fonctions de correction du profil adimensionnel des vitesses par rapport au régime uniforme s'écrivent :

$$\phi_1(\eta) = \int_0^\eta \zeta_1(\mu) d\mu = \int_0^\eta \left[\frac{1}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu^2 + \alpha_1 \mu \right] d\mu \quad (3.206)$$

$$\phi_1(\eta) = \frac{1}{8}\eta^4 - \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{\alpha_1}{2}\eta^2$$

$$\phi_2(\eta) = \int_0^\eta \zeta_2(\mu) d\mu = \int_0^\eta \left[-\frac{3}{2}\mu^3 + \frac{9}{4}\mu^4 - \frac{9}{20}\mu^5 + \alpha_2 \mu \right] d\mu \quad (3.207)$$

$$\phi_2(\eta) = -\frac{3}{8}\eta^4 + \frac{9}{20}\eta^5 - \frac{3}{40}\eta^6 + \frac{\alpha_2}{2}\eta$$

$$\phi_3(\eta) = \int_0^\eta \zeta_3(\mu) d\mu = \int_0^\eta \left[-\frac{3}{10}\mu^5 + \frac{3}{2}\mu^4 - \frac{5}{2}\mu^3 + \frac{3}{2}\mu^2 + \alpha_3 \mu \right] d\mu \quad (3.208)$$

$$\phi_3(\eta) = -\frac{1}{20}\eta^6 + \frac{3}{10}\eta^5 - \frac{5}{8}\eta^4 + \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{\alpha_3}{2}\eta^2$$

Nous allons maintenant calculer les coefficients γ_i et ξ_i en écoulement laminaire à partir des équations (3.130) et (3.131) :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_1(\eta) d\eta \approx -0,017$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_2(\eta) d\eta \approx -0,036 \quad (3.209)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_3(\eta) d\eta \approx -0,0066$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_1(\eta) d\eta \approx -0,018 \\ \xi_2 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_2(\eta) d\eta \approx -0,035 \quad (3.210) \\ \xi_3 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_3(\eta) d\eta \approx -0,0059\end{aligned}$$

A.6.3 Régime turbulent :

En régime turbulent lisse, le calcul des coefficients liées aux dérivées secondes donne, à partir des équations (3.130) et (3.131) :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_1(\eta) d\eta \approx -0,20 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_2(\eta) d\eta \approx -0,38 \quad (3.220) \\ \gamma_3 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 \left[\frac{3}{2} f_u(\eta) - 2 \right] f_u(\eta)^2 \phi_3(\eta) d\eta \approx -0,019 \\ \xi_1 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_1(\eta) d\eta \approx -0,24 \\ \xi_2 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_2(\eta) d\eta \approx -0,47 \quad (3.221) \\ \xi_3 &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^1 f_u(\eta)^2 \phi_3(\eta) d\eta \approx -0,016\end{aligned}$$

A.7 - Résolution des équations de Saint-Venant modifiées à l'aide de RUBAR3

Le logiciel RUBAR3 a été utilisé, en modifiant le code source pour résoudre l'équation dynamique modifiée et calculer les contraintes au fond.

Le logiciel RUBAR3 utilise la formulation conservative des équations, les équations ont été transformées en faisant intervenir la section mouillée et le débit. L'équation de la conservation de la masse s'écrit en multipliant (1.27) par U_m :

En développant l'équation (3.229), on obtient :

$$(3.230) \quad \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right] \frac{\partial U_m}{\partial t} + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right] U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} = g \left[1 - \frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{U_m^2}{h} \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\ - \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}}\right] \frac{U_m^2}{gh} \frac{\partial h}{\partial x} - 3 \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}}\right] U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{U_m^2}{h} O(\omega_i \omega_j)$$

En divisant (3.230) par $1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}$, on obtient :

$$(3.231) \quad \frac{\partial U_m}{\partial t} + U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} = \frac{1}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} g \left[1 - \frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{1}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \frac{U_m^2}{h} \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\ - \frac{\left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}}\right]}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \left[\frac{U_m^2}{gh} \frac{\partial h}{\partial x} - 3 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} \right] + \frac{U_m^2}{h} O(\omega_i \omega_j)$$

$$U_m \frac{\partial Lh}{\partial t} + U_m \frac{\partial Lh U_m}{\partial x} = 0 \quad (3.233)$$

En multipliant (3.231) par Lh , on obtient :

$$(3.234) \quad Lh \frac{\partial U_m}{\partial t} + Lh U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} = \frac{gLh}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} g \left[1 - \frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{LU_m^2}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\ - Lh \frac{\left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}}\right]}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \left[\frac{U_m^2}{gh} \frac{\partial h}{\partial x} - 3 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} \right] + LU_m^2 O(\omega_i \omega_j)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{Lh} \right] = \frac{gLh}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \left[LhI - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Lh^2}{2} \right] \right] - \frac{LU_m^2}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\ - Lh \frac{\left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}}\right]}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}\right]} \left[\frac{U_m^2}{gh} \frac{\partial h}{\partial x} - 3 U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} \right] + LU_m^2 O(\omega_i \omega_j)$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] Lh \frac{\partial U_m}{\partial t} + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[4 - 3 \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \right] Lh U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} = \\
& \quad gLh \left[1 - \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \frac{U_m^2}{gh} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \right] - L U_m^2 \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\
& \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] Lh \frac{\partial U_m}{\partial t} + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] Lh U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} = gLhI - gLh \frac{\partial h}{\partial x} - gLh \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \\
& - 3 \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] Lh U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} - L U_m^2 \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\
& \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial Q}{\partial t} + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{Lh} \right] + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[gL \frac{h^2}{2} \right] = gLhI + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] g \frac{\partial h}{\partial x} \\
& - gLh \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[\left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \frac{U_m^2}{gh} - 1 \right] \frac{\partial h}{\partial x} - 3 \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] Lh U_m \frac{\partial U_m}{\partial x} - L U_m^2 \frac{g}{K_s^2 h^{1/3}} \\
& \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial Q}{\partial t} + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{Lh} \right] + \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[gL \frac{h^2}{2} \right] = \left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right] g \frac{h^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \\
& + gLh \left[\left[1 - \frac{U_m^2}{K_s^2 h^{4/3}} \right] - \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \left[\left[\left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \frac{U_m^2}{gh} - 1 \right] \frac{\partial h}{\partial x} - 3 \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \frac{U_m}{g} \frac{\partial U_m}{\partial x} \right] \right] \\
& \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{Lh} + gL \frac{h^2}{2} \right] = g \frac{h^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{gLh}{\left[1 + \frac{g}{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}} \right]} \left[1 - \frac{U_m^2}{K_s^2 h^{4/3}} \right] \\
& - \frac{gLh}{\left[\frac{\kappa^2 K_s^2 h^{1/3}}{g} + 1 \right]} \left[\left[\left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \frac{U_m^2}{gh} - 1 \right] \frac{\partial h}{\partial x} - 3 \left[1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa K_s h^{1/6}} \right] \frac{U_m}{g} \frac{\partial U_m}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$

C'est cette dernière équation qui a été programmée, en modifiant les codes sources du logiciel RUBAR3.

Le transport solide en rivière a lieu pendant un événement transitoire (crue) dans une géométrie non-uniforme ; or la plupart des lois donnant la capacité de transport solide ont été établies en régime uniforme.

Après une revue bibliographique, est analysée la contribution des différents facteurs au transport solide : contrainte au fond, intensité turbulente, vitesse débitante, pente du fond et les gradients longitudinaux et temporels de la cote de la surface libre et de la vitesse débitante. Une modification du paramètre de Shields critique en régime non-uniforme est proposée ; les effets transitoires sont presque toujours négligeables, contrairement aux effets liés à la pente.

Une approximation au second ordre près de la contrainte au fond est éloignée des simulations numériques basés sur la résolution des équations de Navier-Stokes. Par ailleurs cette approximation suppose un régime non-uniforme asymptotique (gradients constants) qui n'est jamais atteint en rivière, sa portée opérationnelle est donc nulle. Un modèle unidimensionnel prenant en compte les ruptures de pente et l'inertie liée au transfert d'énergie permet de rendre compte de manière plus satisfaisante de l'évolution de la contrainte au fond et de l'intensité turbulente en régime non-uniforme.

Enfin, la capacité de transport en régime non-uniforme est comparée à celle résultant de l'application des formules du régime uniforme. Les différents impacts se neutralisent mutuellement dans l'espace et dans le temps. Lors d'une crue sur un tronçon homogène, l'écart entre la capacité de transport en régime non-uniforme et celle calculée en supposant le régime uniforme, reste très faible (quelques %).

Suite à ce travail, il semble préférable de développer des modèles basés sur des descripteurs synthétiques de la géométrie du lit et du régime hydrologique à l'échelle du tronçon homogène, plutôt que de poursuivre dans une approche déterministe à l'échelle des processus élémentaires.



Direction générale
Parc de Tourvoie
BP 44, 92163 Antony cedex
Tél. 01 40 96 61 21 - Fax 01 46 66 37 44
Sur minitel : 3616 Cemagref
Web : <http://www.cemagref.fr>