



**HAL**  
open science

# Raisonnement à base de règles implicatives floues - Inférence et Sémantique

H. Jones

► **To cite this version:**

H. Jones. Raisonnement à base de règles implicatives floues - Inférence et Sémantique. Sciences de l'environnement. Doctorat Informatique, Université de Toulouse, Toulouse III, 2007. Français. NNT : . tel-02590291

**HAL Id: tel-02590291**

**<https://hal.inrae.fr/tel-02590291>**

Submitted on 15 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER  
UFR MIG

## THESE

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE**  
délivré par l'université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline : **Informatique**

présentée et soutenue  
par

**Hazaël JONES**

le 10 décembre 2007

---

# Raisonnement à base de règles implicatives floues

## - Inférence et Sémantique -

---

### JURY

Brigitte Charnomordic	Ingénieur de recherche, INRA, Montpellier
Didier Dubois	Directeur de Recherche CNRS, IRIT, UPS, Toulouse (directeur de thèse)
Sylvie Galichet	Professeur, LISTIC, Université de Savoie, Annecy (rapporteur)
Marie-Pierre Gleizes	Professeur, IRIT, UPS, Toulouse (président du jury)
Serge Guillaume	Ingénieur de recherche, Cemagref, Montpellier
Jacky Montmain	Professeur, Ecole nationale supérieure des techniques industrielles et mines d'Alès (rapporteur)
Nathalie Perrot	Ingénieur de recherche, INRA, Paris-Grignon

Cette thèse a été préparée conjointement dans les laboratoires :



Inra



Cemagref



CNRS



IRIT



---

## Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenu pendant ces trois années de thèse entre l'INRA et le Cemagref de Montpellier et l'IRIT de Toulouse.

J'adresse donc à mes encadrants Serge Guillaume et Brigitte Charnomordic mes remerciements sincères pour leur aide au quotidien qui fut cruciale pour le bon déroulement de ma thèse. Ils m'ont permis d'effectuer ma thèse dans les meilleures conditions et ils ont su me former à un métier : la recherche.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Didier Dubois qui malgré la distance a su m'apporter son soutien et son impressionnante connaissance de la logique floue. Les apports théoriques de ma thèse lui doivent beaucoup. J'aimerais aussi louer ses capacités pédagogiques qui lui permette de faire comprendre simplement des concepts assez complexes.

Je remercie les rapporteurs de mon mémoire de thèse Sylvie Galichet et Jacky Montmain pour avoir accepté d'évaluer mon travail en un temps record. Leurs remarques et leurs questions apportent beaucoup à mon travail et ouvrent des perspectives intéressantes. L'humour de Jacky m'a permis de survivre à un retard d'avion de 2 heures le jour de ma soutenance.

Je remercie Yannick Renard du CTFC pour son optimisme et pour le temps qu'il a passé à m'expliquer le fonctionnement de la fabrication du Comté. Notre collaboration fût enrichissante et les dégustations de Comté instructives et délicieuses.

Je remercie les membres de mon comité de thèse, Olivier Naud et Joël Abecassis qui grâce à leurs sensibilités différentes et à leurs conseils avisés m'ont apporté beaucoup quant aux orientations de mon travail.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury pour leurs remarques intéressantes qui m'ont permis d'améliorer la version finale de mon manuscrit.

Durant ma thèse, j'ai eu le plaisir d'effectuer des vacances en informatique auprès de Philippe Vismara et Gilles Carraux. Je tiens à les remercier chaleureusement car ils m'ont permis d'apprendre un élément important du métier auquel je me destine : l'enseignement.

Enfin, je souhaite remercier tous les "potes" du Cemagref et de l'INRA avec qui j'ai passé des moments de franches rigolades et qui m'ont permis d'aller travailler avec le sourire tous les jours. Et de passer de bonnes soirées entre potes!;-)

Merci à ma Jessica d'avoir supporté mes trois années de thèse et surtout la dernière année où je rentrais tard et épuisé le soir.



*« Avec de la méthode et de la logique on peut arriver à tout  
aussi bien qu'à rien. »*

*Pierre Dac*



---

## Résumé

Cette thèse considère la modélisation de connaissances expertes par des règles implicatives floues. Elle étudie les avantages de ces règles par rapport aux règles les plus utilisées parmi les règles floues : les règles conjonctives.

Cependant, l'inférence à partir de règles implicatives et d'entrées floues n'est pas simple et a longtemps été un frein à leur utilisation, les principales difficultés étant la complexité de l'inférence avec plusieurs règles et des entrées floues, la conception de partitions adaptées, et l'interprétation sémantique pour des utilisateurs habitués au raisonnement avec des règles floues conjonctives.

Nos travaux portent sur ces points. Nous présentons une méthode d'inférence à partir de règles implicatives floues et d'entrées floues, qui permet d'implémenter facilement le raisonnement implicatif dans les cas mono et bidimensionnels.

Nous donnons aussi des éléments de comparaison entre règles conjonctives et implicatives, et nous étudions la sémantique de ces différentes règles, d'un point de vue logique et pratique.

Une illustration à un cas réel dans le domaine de l'agroalimentaire est présentée. Il s'agit de prévoir les défauts éventuels du fromage de Comté après affinage à partir des informations avant affinage, les informations disponibles étant composées des connaissances expertes du CTFC (Centre Technique des Fromages Comtois), et des données sur le procédé.

Les méthodes développées étant génériques, les outils proposés sont utilisables pour une classe d'applications large : celle où les connaissances expertes s'expriment sous forme d'un modèle. Ils offrent des pistes de modélisation qui respectent à la fois l'imprécision des données et les caractéristiques du raisonnement expert.

## Abstract

This thesis considers expert knowledge modelling by implicative fuzzy rules. It explores the benefits of these rules compared to the most frequently used fuzzy rules : conjunctive rules.

However, inference from implicative rules and fuzzy inputs is not easy and has long been an impediment to their use. The main difficulties are the complexity of the inference with several implicative rules and fuzzy inputs, the partition design, and the semantic interpretation for users familiar with the reasoning with conjunctive fuzzy rules.

Our work focuses on these points. We present an inference method using implicative fuzzy rules and fuzzy inputs, which can easily implement the implicative reasoning in the one and two-dimensional case.

We also give a comparison between conjunctive rules and implicative rules, and we study the semantics of these rules, in terms of logic and practical use.

A real world illustration in the food industry is presented. The goal of this work is the prediction of post maturing cheese defects with information available before the maturing process. Available information comes from CTFC (Technical Center on Comtois Cheese) expert knowledge and process data.

Since the developed methods are generic, they can be used for a wide class of applications : those in which the expert knowledge is expressed in the form of a model. They provide modeling perspectives that respect both imprecise data and expert reasoning characteristics.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Contexte et motivations . . . . .	13
1.2	Organisation du document . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Systèmes de règles floues</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Raisonnement à base de règles floues . . . . .	18
2.2.1	Qu'est-ce qu'une règle ? . . . . .	19
2.2.2	Raisonnement à base de règles . . . . .	19
2.2.3	Exemple de système de règles . . . . .	19
2.3	Différents types de règles floues . . . . .	21
2.3.1	Connaissance négative et connaissance positive . . . . .	21
2.3.2	Deux façons de voir une règle . . . . .	22
2.3.3	Résiduation . . . . .	24
2.3.4	Règles implicatives . . . . .	25
2.3.4.1	Règles implicatives graduelles . . . . .	26
2.3.4.2	Règles implicatives à certitude . . . . .	28
2.3.5	Règles conjonctives . . . . .	28
2.3.5.1	Règles conjonctives à possibilité . . . . .	29
2.3.5.2	Règles conjonctives antigraduées . . . . .	30
2.3.6	Résumé en vue de l'utilisation . . . . .	30
2.4	Comparaison : règles implicatives graduelles et règles conjonctives à possibilité . . . . .	31
2.4.1	Agrégation . . . . .	31
2.4.2	Interpolation . . . . .	32
2.4.3	Influence de la forme des ensembles flous . . . . .	34
2.4.4	Accumulation de règles . . . . .	35
2.4.5	Cohérence et redondance . . . . .	35
2.4.5.1	Cohérence d'un ensemble de règles . . . . .	36
2.4.5.2	Redondance d'un ensemble de règles . . . . .	37
2.4.5.3	Résumé sur la cohérence . . . . .	37
2.4.5.4	Cohérence pour un ensemble de règles implicatives . . . . .	37
2.4.6	Mécanisme d'inférence . . . . .	38
2.4.6.1	Règles conjonctives . . . . .	38
2.4.6.2	Règles implicatives . . . . .	38
2.5	Conclusion . . . . .	39

<b>3</b>	<b>Méthodes d'inférence</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction	44
3.2	Indépendance inférentielle	44
3.2.1	Définitions et résultats	44
3.2.2	Une méthode permettant d'obtenir l'indépendance inférentielle	45
3.2.3	Conditions suffisantes en une dimension	46
3.2.4	Conditions suffisantes en deux dimensions	48
3.3	Décomposition	48
3.3.1	Décomposition par $\alpha$ -coupes	49
3.3.2	Décomposition par partitionnement	50
3.4	Inférence mono-dimensionnelle	50
3.4.1	Entrée dans le noyau d'un sous-ensemble de la partition	51
3.4.2	Expression analytique pour une entrée floue	52
3.4.2.1	Implication de Rescher-Gaines	53
3.4.2.2	Implication de Gödel	53
3.4.2.3	Implication de Goguen	54
3.4.3	Entrée rectangulaire de niveau 1 entre deux noyaux	55
3.4.4	Entrée rectangulaire de niveau $\alpha$ entre deux noyaux	57
3.4.5	Analyse de la complexité de l'algorithme	58
3.5	Inférence 2D	58
3.5.1	Partitions de sortie d'un système à deux dimensions	59
3.5.2	Inférence 2D pour une entrée précise	61
3.5.2.1	Zone 2D entre les noyaux (Zone 3)	63
3.5.2.2	Zone 2D intra-noyau et extra-noyau (zone 2)	64
3.5.3	Continuité des bornes de la sortie inférée	65
3.5.4	Points anguleux	66
3.5.5	Analyse de la complexité de l'algorithme	68
3.6	Passage à des dimensions supérieures : limites	68
3.6.1	Indépendance inférentielle	69
3.6.2	Partitions de sortie	69
3.6.3	Inférence nD	69
3.6.3.1	Les différentes zones de l'inférence	69
3.6.3.2	La continuité	69
3.6.3.3	Les points anguleux	70
3.7	Conclusion	70
<b>4</b>	<b>Sémantique, Interprétation et Conception des Systèmes d'Inférence Floue</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction	74
4.2	Signification des règles	74
4.2.1	Conjonctif et Implicatif : deux types de raisonnement	75
4.2.2	Respect de l'imprécision des entrées	76
4.2.3	Partitions d'entrée : illustration	77
4.2.4	Partition de sortie et compensations	78
4.2.5	Quantification d'une sortie imprécise : attribution d'étiquettes	80
4.3	Cohérence et interprétabilité	82
4.3.1	Interprétabilité	82
4.3.2	Couverture	83
4.3.3	Partitions de sortie : illustration en 2D	84

---

4.3.3.1	2 sous-ensembles flous par variable d'entrée . . . . .	84
4.3.3.2	3 sous-ensembles flous par variable d'entrée . . . . .	87
4.3.3.3	Nombre différent de sous-ensembles flous dans chaque dimension . . . . .	89
4.4	Coopération de plusieurs systèmes de règles floues . . . . .	90
4.4.1	Règles conjonctives ; raffinement impossible . . . . .	91
4.4.2	Collaboration entre systèmes de règles implicatives . . . . .	92
4.4.2.1	En parallèle . . . . .	92
4.4.2.2	En cascade . . . . .	93
4.4.2.3	Combinaison des deux types de structures . . . . .	95
4.5	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Application à la fabrication fromagère de Comté</b> . . . . .	<b>99</b>
5.1	Introduction . . . . .	100
5.2	Contexte . . . . .	100
5.2.1	Le Comté . . . . .	100
5.2.2	Evaluation du Comté . . . . .	109
5.2.3	Filière Comté et Centre Technique des Fromages Comtois (CTFC) . . . . .	110
5.2.4	Un besoin d'anticipation . . . . .	111
5.3	Informations disponibles et objectifs . . . . .	111
5.3.1	Données . . . . .	112
5.3.1.1	Méthodes de mesure . . . . .	112
5.3.1.2	Présentation des données . . . . .	113
5.3.2	Connaissances expertes . . . . .	115
5.3.2.1	Les connaissances sur le rôle des différentes variables . . . . .	115
5.3.2.2	Exemples de formalisation par les techniciens . . . . .	117
5.3.3	Objectifs . . . . .	118
5.4	Etude de trois systèmes de règles . . . . .	119
5.4.1	Rappel sur la quantification des résultats . . . . .	119
5.4.2	Un premier système expert simple . . . . .	122
5.4.3	Rappel sur les arbres de décision classiques . . . . .	127
5.4.3.1	Définitions . . . . .	127
5.4.3.2	Algorithme CART (Breiman) . . . . .	128
5.4.4	Système créé à partir des données . . . . .	129
5.4.4.1	Arbre binaire induit . . . . .	129
5.4.4.2	Construction du système de règles implicatives . . . . .	131
5.4.4.3	Résultats règles implicatives . . . . .	135
5.4.5	Système expert et raffinement . . . . .	135
5.4.5.1	Système considéré . . . . .	135
5.4.5.2	Analyse des prédictions imprécises et très imprécises . . . . .	142
5.4.5.3	Création d'un système à partir de ces résultats . . . . .	143
5.5	Conclusion . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Conclusions - Perspectives</b> . . . . .	<b>153</b>
6.1	Conclusions . . . . .	153
6.2	Perspectives . . . . .	154
<b>A</b>	<b>Glossaire des systèmes d'inférence floue</b> . . . . .	<b>157</b>

---

---

<b>B Théories des possibilités</b>	<b>165</b>
B.1 Mesure de possibilité . . . . .	165
B.2 Distribution de possibilité . . . . .	166
B.3 Distribution de possibilité conjointe . . . . .	166
B.4 Possibilité garantie . . . . .	166
B.5 Significations des degrés de possibilité et possibilité garantie . . . . .	167
B.6 Mesure de nécessité . . . . .	167
B.7 Relations entre possibilité et nécessité . . . . .	167
B.8 Résiduation . . . . .	168
B.8.1 Algèbre résiduée . . . . .	168
B.8.2 Implication résiduée . . . . .	168
<b>C Glossaire du fromage</b>	<b>171</b>
C.1 Le vocabulaire . . . . .	171
C.2 Les données . . . . .	172
<b>Table des figures</b>	<b>177</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>181</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>183</b>

---

---

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte et motivations

Le travail présenté dans ce mémoire vise l'utilisation pratique de règles floues. Pour cela, leur sémantique est étudiée dans le but de déterminer quelles règles sont les plus adéquates pour modéliser une classe d'applications assez large : les procédés complexes mettant en œuvre des connaissances expertes.

La logique floue [Zadeh - 1965] peut être considérée comme une véritable interface entre le domaine du symbolique (les concepts) et le domaine du calcul numérique de par sa capacité à modéliser la nature imprécise des concepts linguistiques.

Historiquement, les systèmes d'inférence floue ont été mis au point pour reproduire le raisonnement basé sur des connaissances expertes [Mamdani & Assilian - 1975]. Par la suite, des méthodes d'apprentissage [Sugeno - 1985] héritées du domaine numérique (réseaux de neurone ou algorithmes génétiques) ont été adaptées dans le but d'améliorer la performance numérique. Cette recherche de performance numérique a éclipsé le but premier des règles floues : leur interprétabilité. Au Japon, de nombreuses applications de ces systèmes ont été réalisées : on peut notamment citer le métro Sendai (Juillet 1987), le lave linge Aïsaïgo Day Fuzzy de Matsushita (Février 1990) mais aussi en Europe [Mamdani - 1974] avec la régulation d'une chaudière à vapeur dont la commande est connue. Citons encore le travail développé par l'équipe du Professeur Sugeno sur la commande à distance d'un hélicoptère sans pilote. Ce système possède 15 variables d'état et 4 de commande. Il est géré par une base de règles composé d'une douzaine de blocs d'une soixantaine de règles chacun. On voit bien que l'interprétabilité du système n'est plus du tout recherchée dans un tel système avec autant de règles. Cependant, il a volé!

Le succès des systèmes d'inférence floue dans le domaine du contrôle flou s'explique en grande partie par la facilité de présentation du raisonnement sous forme de règles, par les capacités d'interpolation de ces systèmes et par la rapidité du calcul. Cependant, l'interprétation de ces règles floues, dites règles de Mamdani (ou règles conjonctives à possibilité), n'est pas aussi simple que l'on pourrait penser de prime abord : le processus d'inférence floue n'est pas une extension de la logique classique. Le raisonnement avec les règles de Mamdani n'est pas conforme à la théorie de Zadeh sur le raisonnement approché [Zadeh - 1979]. Le comportement gênant de ces règles vis-à-vis de la logique a été mis en évidence par Baldwin et Guild [Baldwin & Guild - 1980] et Di Nola et al. [Nola et al. - 1989]. Comme l'ont montré les travaux de Dubois et Prade [Dubois & Prade - 1996], il existe bien des systèmes de règles floues respectant le raisonnement approché de Zadeh et dont l'inférence est compatible avec la logique : les règles implicatives. Cependant, en grande partie à cause des difficultés de calcul des règles utilisant une implication, les règles implicatives ont été négligées pour la modélisation de systèmes experts au profit des

---

règles conjonctives.

Dans la littérature, à partir des années 90, se dégage un chemin de réflexion pour revenir à des systèmes flous interprétables, et éviter les boîtes noires.

Pour réaliser des systèmes interprétables, on a besoin de contraindre les procédures d'apprentissage [Glorennec - 1999], [Casillas et al. - 2002], [Casillas et al. - 2003b], [Guillaume - 2001a], [Guillaume - 2001b], [Guillaume & Charnomordic - 2004b].

Cependant, l'interprétation logique des systèmes de règles conjonctives reste celle d'une accumulation d'exemples possibles à un certain niveau; elle est incompatible avec l'expression de contraintes, qui peut être nécessaire pour interpréter le raisonnement sous-jacent.

Il est alors naturel de revenir aux règles implicatives pour construire des systèmes de règles interprétables. Dubois, Prade et Ughetto ont proposé une typologie des différentes règles floues [Dubois & Prade - 1996, Ughetto - 1998b, Ughetto et al. - 1999, Dubois et al. - 2003] afin de déterminer quel type de règles est adapté à quelle modélisation.

Notre travail hérite de ces deux mouvances souhaitant remettre l'interprétabilité au premier plan des systèmes de règles flous.

Dans des applications pratiques, les données sont souvent imprécises du fait de capteurs imprécis ou bien des évaluations par analyse sensorielle. Il apparaît alors indispensable de rendre compte de cette imprécision par des entrées floues. Cependant, inférer à partir de règles implicatives avec des entrées floues est difficile car on ne peut pas inférer règle à règle comme avec les règles conjonctives.

Notre premier objectif est de rendre les règles implicatives plus faciles à utiliser en développant une méthode d'inférence à partir d'entrées floues. Notre second objectif, qui est au moins aussi important que le premier, est de rendre ce type de règles plus accessible à la communauté du flou. En effet, la grande majorité des systèmes de règles utilisés dans les applications sont des règles conjonctives. Il est donc nécessaire de clarifier l'interprétation des règles implicatives vis-à-vis des règles conjonctives car une confusion importante existe entre ces deux représentations. Une meilleure connaissance permettra l'utilisation adéquate de ces différents types de règles selon la classe de problèmes à modéliser ce qui est indispensable pour que l'interprétabilité soit à nouveau au cœur des systèmes de règles floues.

## 1.2 Organisation du document

Ce document est organisé comme suit :

Le **chapitre 2** est décomposé en deux parties : la première partie étudie la sémantique des règles floues. Elle est essentiellement basée sur les travaux de Dubois, Prade et Ughetto dont elle rappelle les principaux résultats. Elle montre que le sens d'une règle floue "si ..., alors ..." dépend de l'opérateur reliant l'entrée et la sortie d'un tel système. Il existe deux grandes classes d'opérateur : les conjonctions floues et les implications floues qui donnent lieu à deux types de règles : les règles conjonctives et les règles implicatives. Nous rappelons les différences sémantiques entre ces règles ainsi que les 2 sous-catégories existant pour ces deux types de règles : les règles *graduelles* et à *certitude* pour les règles implicatives, les règles à *possibilité* et *antigraduées* pour les règles conjonctives. La sémantique associée à ces règles permet de constater que les règles implicatives graduelles sont les règles adéquates pour la classe d'applications abordée dans ce manuscrit : les procédés pour lesquels nous disposons de connaissances expertes.

La seconde partie de ce chapitre compare les règles implicatives graduelles aux règles conjonctives à possibilité (ou règles de Mamdani). Nous étudions les différences en terme d'agrégation des sorties, d'accumulation de règles dans un système ou lors du processus de défuzzification.

---

Ce chapitre se termine sur le problème majeur des règles implicatives par rapport aux règles conjonctives : l'inférence à partir d'entrées floues. En effet, les processus usuels d'inférence règle à règle ne sont plus possibles avec les règles implicatives faisant intervenir des entrées floues.

Le **chapitre 3** détaille la méthode que nous avons développée pour l'inférence à partir d'entrées floues. Cette méthode est basée sur une double décomposition. Cette décomposition se fait sur l'entrée floue par  $\alpha$ -coupes afin de se ramener à un ensemble d'entrées rectangulaires. Une autre décomposition par partitionnement est faite selon la partition d'entrée sur les entrées rectangulaires afin de ne considérer que des inférences locales. Des algorithmes de complexité linéaire sont donnés pour les cas mono et bidimensionnels. La complexité est fonction du nombre d' $\alpha$ -coupes. Ce nombre conditionne la précision de la sortie. Nous discuterons ensuite des difficultés de gestion de systèmes de dimension plus grande.

Le **chapitre 4** propose des clés d'interprétation et de modélisation pour les règles implicatives graduelles. En effet, ce type de règles n'étant que très peu utilisé, un utilisateur habitué aux règles conjonctives aura des difficultés. Nous développerons donc les points suivants : la construction des partitions de sortie, l'interprétation des résultats obtenus et la collaboration entre plusieurs systèmes. La construction des partitions de sortie doit en effet garantir la cohérence du système tout en conservant son interprétabilité. Nous présentons la construction d'indicateurs pour quantifier l'imprécision de la sortie et sa qualité. Nous verrons aussi plusieurs méthodes de collaboration entre systèmes d'inférence : l'utilisation en parallèle ou le chaînage de systèmes d'inférence floue, afin de simuler des systèmes de plus grande dimension en couplant les résultats de plusieurs systèmes de petites dimensions.

Enfin, le **chapitre 5** présente une application à la fabrication fromagère du Comté. L'objectif de ce travail est de prévoir les caractéristiques d'un fromage après affinage (4 à 10 mois) à partir des informations disponibles avant l'affinage. Nous détaillerons les principes de fabrication du Comté qui reste une fabrication artisanale avec une forte variabilité entre les fromages selon la fromagerie, le lait utilisé, la saison et les méthodes de fabrication du fromager. La collaboration avec le CTFC (organisme de conseil et de formation des fromagers) a donné lieu à plusieurs systèmes de règles. Bien que cette étude se concentre sur un point bien précis d'une application (prédiction de la fermeté de la pâte du fromage), nous essayons de dégager une méthodologie pour traiter une classe bien plus importante d'applications : les applications où la connaissance experte est importante et où la sortie s'exprime de manière continue.

Pour faciliter la lecture, on trouvera un glossaire en **annexe A** rappelant les termes importants, en particulier sur la logique et les règles floues utilisés dans cette thèse. L'**annexe B** rappellera les informations à connaître sur la théorie des possibilités pour bien comprendre le chapitre 2. L'**annexe C** détaillera les termes et variables liés à la fabrication fromagère du Comté.





## Chapitre 2

# Systemes de regles floues

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Raisonnement à base de regles floues</b>	<b>18</b>
2.2.1	Qu'est-ce qu'une règle?	19
2.2.2	Raisonnement à base de regles	19
2.2.3	Exemple de système de regles	19
<b>2.3</b>	<b>Différents types de regles floues</b>	<b>21</b>
2.3.1	Connaissance négative et connaissance positive	21
2.3.2	Deux façons de voir une règle	22
2.3.3	Résiduation	24
2.3.4	Règles implicatives	25
2.3.4.1	Règles implicatives graduelles	26
2.3.4.2	Règles implicatives à certitude	28
2.3.5	Règles conjonctives	28
2.3.5.1	Règles conjonctives à possibilité	29
2.3.5.2	Règles conjonctives antigraduelles	30
2.3.6	Résumé en vue de l'utilisation	30
<b>2.4</b>	<b>Comparaison : règles implicatives graduelles et règles conjonctives à possibilité</b>	<b>31</b>
2.4.1	Agrégation	31
2.4.2	Interpolation	32
2.4.3	Influence de la forme des ensembles flous	34
2.4.4	Accumulation de regles	35
2.4.5	Cohérence et redondance	35
2.4.5.1	Cohérence d'un ensemble de regles	36
2.4.5.2	Redondance d'un ensemble de regles	37
2.4.5.3	Résumé sur la cohérence	37
2.4.5.4	Cohérence pour un ensemble de regles implicatives	37
2.4.6	Mécanisme d'inférence	38
2.4.6.1	Règles conjonctives	38
2.4.6.2	Règles implicatives	38
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons une typologie des différentes règles floues. Les règles floues sont des règles utilisant des ensembles flous [Zadeh - 1965]. Les ensembles flous représentent des concepts **imprécis** ou **incertains**. Ils permettent de se rapprocher de la représentation que l'esprit humain a des objets qui l'entourent : un "petit chien", une "température chaude", un "homme jeune"... Tous ces concepts ont dans l'esprit humain des définitions imprécises. On ne passe pas brutalement de "jeune" à "vieux" le jour de notre 25<sup>ième</sup> anniversaire. Ces concepts sont graduels et imprécis.

La théorie des possibilités a été introduite par Zadeh en 1978 [Zadeh - 1978], elle permet la prise en compte de l'incertitude dans les raisonnements sur des connaissances imprécises. Le lecteur non habitué à la théorie des possibilités trouvera en annexe B les principales définitions de cette théorie. Cette dernière est basée sur les notions de **possibilité** et de **nécessité** et propose un ensemble de mesures permettant d'évaluer à quel point la réalisation d'un événement donné est possible ou certaine. Grâce à la théorie des possibilités, on modélisera des informations imprécises, incertaines ou graduelles par des distributions de possibilités. La distribution de possibilité utilisée dépendra du type d'informations modélisées. Pour des connaissances expertes exprimant des contraintes, on utilisera des distributions de possibilité. Pour représenter des faits observés, la distribution de possibilité garantie est adaptée.

Une manière de raisonner à partir de la théorie des possibilités est d'utiliser des règles floues. Nous montrerons comment fonctionne le raisonnement à base de règles floues en section 2.2. Nous rappelons ensuite la typologie des différentes règles dans la section 2.3, typologie qui a été proposée par Dubois, Prade et Ughetto [Dubois & Prade - 1996, Ughetto - 1998b]. Nous verrons qu'il est possible de décomposer les règles floues en deux catégories principales : les règles implicatives [Dubois & Prade - 1992a] qui fonctionnent avec des distributions de possibilité et les règles conjonctives [Mamdani & Assilian - 1975] qui utilisent des distributions de possibilité garantie. Malgré leur compatibilité avec les opérateurs logiques, les règles implicatives ont été jusqu'à présent très peu utilisées en pratique contrairement aux règles conjonctives.

Nous décrirons ces différents types de règles afin de montrer pourquoi les règles implicatives graduelles sont les plus adaptées à la représentation de connaissances expertes dans lesquelles interviennent des concepts évoluant de façon continue.

Enfin, en section 2.4, nous comparerons les règles implicatives graduelles aux règles les plus couramment utilisées dans les systèmes d'inférence floue : les règles conjonctives à possibilité. Cette comparaison montrera d'une part les avantages des règles implicatives graduelles par rapport aux règles conjonctives à possibilité, d'autre part la difficulté limitant la mise en œuvre des règles implicatives : le calcul de l'inférence à partir d'entrées floues.

## 2.2 Raisonnement à base de règles floues

Nous allons voir ici le fonctionnement et l'intérêt du raisonnement à base de règles floues dans une optique de représentation de la connaissance. Le lecteur peu familier avec les différentes notions des systèmes d'inférence floue trouvera un glossaire en annexe A. Avec des règles floues, les connaissances représentées peuvent être imparfaites (c'est-à-dire imprécises, incertaines ou vagues).

Les règles floues ont été créées pour représenter des connaissances. Néanmoins, elles ont été ensuite beaucoup utilisées pour le contrôle flou de procédés [Palm & Driankov - 1995]. Les systèmes de règles floues sont alors utilisés comme un outil d'approximation de fonctions numériques, et l'interprétabilité passe au second plan. Nous nous plaçons ici dans le cas où l'interprétabilité

---

est essentielle. Nous rappelons que l'interprétabilité d'un système peut se définir par la facilité de compréhension qu'aura un expert à comprendre les relations d'entrées/sorties définies par le système.

### 2.2.1 Qu'est-ce qu'une règle ?

Une règle est une connaissance qui sert à faire le lien entre des informations connues et d'autres informations que l'on peut déduire ou inférer.

Un règle est une expression de la forme : "Si  $X$  est  $A$ , alors  $Z$  est  $O$ ". Elle exprime une relation entre les variables  $X$  et  $Z$ . On appelle " $X$  est  $A$ " la prémisse de la règle, et " $Z$  est  $O$ " la conclusion de la règle. En général, on estime que la connaissance exprimée par cette règle est valide. Le type de raisonnement utilisé est donc déductif car on essaye de déduire des informations sur les valeurs de sortie à partir des valeurs des entrées.

### 2.2.2 Raisonnement à base de règles

Le raisonnement à base de règles présente certains avantages : tout d'abord, il est facile à comprendre et à interpréter. De plus, il est assez naturel car l'être humain raisonne souvent sous forme de règles : "s'il pleut dehors, alors je vais prendre un parapluie". Un autre atout de ce type de raisonnement est sa modularité, en effet, il est possible d'ajouter des règles ou d'en enlever simplement selon les besoins de l'utilisateur.

Pour raisonner à base de règles, il faut :

- une base de connaissance : les règles,
- un ensemble de faits : les données,
- un moteur d'inférence.

Le processus du raisonnement à base de règles est le suivant : dans un premier temps, on détermine les faits pertinents pour la base de règles, ensuite, on détermine parmi les règles applicables la ou les règles qu'il convient de déclencher effectivement. Pour finir, on agrège la partie conclusion des règles pour obtenir le résultat inféré par les faits. On notera que selon le type de règles utilisées, il peut être nécessaire d'agréger la relation entre les règles avant de pratiquer l'inférence.

Par rapport aux règles logiques booléennes, les règles floues présentent l'intérêt de la progressivité du raisonnement, et de l'utilisation d'étiquettes linguistiques floues. Cependant, leur mise en œuvre est beaucoup plus complexe que celle des règles classiques, comme nous le verrons plus loin.

### 2.2.3 Exemple de système de règles

Le système suivant modélise le comportement d'un automobiliste "raisonnable" face à un feu tricolore. On remarque que les règles utilisées sont assez intuitives et modélisent le système de manière interprétable. La figure 2.1 montre juste quelques règles envisageables, il faudrait bien entendu plus de règles pour modéliser complètement le système.

---

Si le feu est ...	et Si ma vitesse est ...	et Si le feu est ...	Alors, je ...
rouge	élevée	proche	freine fort
rouge	faible	loin	maintiens ma vitesse
orange	moyenne	loin	freine doucement
vert	faible	proche	accélère
Prémises			Conclusion

FIG. 2.1: Règles modélisant le comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore

On remarque que dans cet exemple certaines variables sont floues et d'autres ne le sont pas. Par exemple, un feu tricolore est soit vert, soit orange ou soit rouge, il ne peut pas être entre le vert et le rouge puisque le changement de couleur est instantané. En revanche, la vitesse est typiquement une variable floue : la différence entre une vitesse faible et une vitesse moyenne n'est pas une valeur stricte. On ne peut pas dire qu'à 25 km/h la vitesse est faible et qu'elle est moyenne à 26 km/h. Pour illustrer ce fonctionnement, voici les ensembles flous correspondant à la modélisation du comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore.

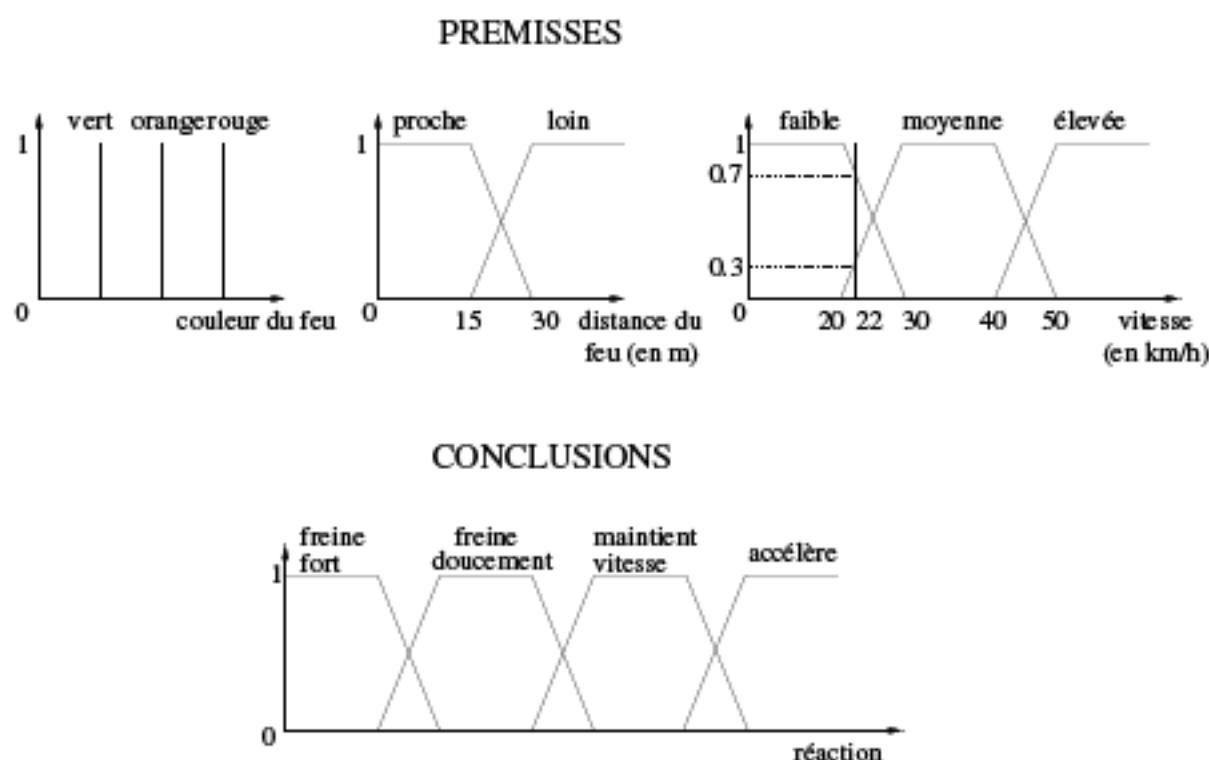


FIG. 2.2: Modélisation des différents ensembles flous correspondant au comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore

Le principe est ensuite le suivant : plus la condition sur les prémisses est vraie, plus l'action préconisée pour les conclusions doit être respectée. En fait, selon les données des prémisses, certaines règles seront déclenchées à un certain degré. Avec les règles habituellement utilisées dans les systèmes d'inférence floue (type Mamdani - Sugeno, voir annexe A), la partie conclusion est en fait une interpolation entre les conclusions des différentes règles activées.

Par exemple, si la vitesse est de 22 km/h, celle-ci sera considérée comme faible avec un degré égal à 0.7 et moyenne avec un degré de 0.3 (cf. figure 2.2). Dans ce cas, on considère que la vitesse est plus faible que moyenne, les règles avec une vitesse faible auront donc plus d'impact sur la conclusion.

## 2.3 Différents types de règles floues

### 2.3.1 Connaissance négative et connaissance positive

Lorsqu'on formule une proposition, celle-ci peut faire appel à deux formes de connaissance : négative ou positive. Par exemple, si on affirme : « Les écoles sont ouvertes la semaine », on exprime surtout que les propositions pour lesquelles cette propriété est fausse sont impossibles. C'est-à-dire que les écoles ne sont pas ouvertes le week-end. On est alors en présence de connaissance négative, car celle-ci exprime une contrainte : « Les écoles ne sont pas ouvertes le week-end ». Lorsqu'on exprime une contrainte, ou une restriction sur le domaine d'une valeur, alors, on parle de connaissance négative.

En revanche, si quelqu'un affirme : « Les jours d'école, entre 10 heures et 12 heures, les écoles

sont ouvertes », alors il exprime plutôt le fait qu'à ces horaires, les écoles sont ouvertes de manière garantie. Cela ne les empêche pas d'être ouvertes à d'autres heures, mais on est sûr qu'elles sont ouvertes dans cette plage horaire. Cette information est donc garantie possible, il s'agit alors de connaissance positive car la connaissance est vue comme un exemple de ce qui est possible à coup sûr (un fait observé par exemple).

De plus, une information négative peut être interdite par d'autres valeurs : il existe des jours dans la semaine où l'école est fermée (jours fériés, mercredi). De la même manière, une connaissance positive non vérifiée par les connaissances actuelles sur le sujet peut être validée par d'autres informations : il peut y avoir cours à d'autres heures qu'entre 10 et 12 heures.

### 2.3.2 Deux façons de voir une règle

La manière dont on concevra les règles influera sur la manière d'agrèger différentes règles. Imaginons un système de règles cherchant à déterminer si des personnes peuvent covoiturer ensemble pour un jour précis.

Soit l'ensemble de règles suivant :

1. Si Robert est d'accord pour covoiturer, alors il part au travail entre 7h et 9h
2. Si Marie est d'accord pour covoiturer, alors elle part au travail entre 6h et 7h
3. Si Jack est d'accord pour covoiturer, alors il part au travail entre 8h et 9h
4. Si Jessica est d'accord pour covoiturer, alors elle part au travail entre 8h et 10h

Si Marie est absente, seules les règles 1, 3 et 4 sont activées, l'horaire possible s'obtient par l'intersection des résultats de chaque règle. On a alors :  $[7, 9] \cap U \cap [8, 9] \cap [8, 10] = [8, 9]$  avec  $U$  l'univers de la sortie tout entier. On remarque que lorsqu'une règle ne s'applique pas, afin de ne pas modifier le résultat de sortie, sa conclusion est considérée comme  $U$  l'univers de sortie, puisque  $U$  est un élément neutre pour l'intersection. Dans cette représentation, on voit la règle comme une contrainte.

En revanche, lorsqu'on considère l'ensemble de règles suivant :

1. Tous les employés de l'entreprise travaillent de 9h à 12h et entre 14h et 17h
2. Les cadres de l'entreprise travaillent (aussi) de 17h à 18h
3. Les informaticiens de l'entreprise travaillent (aussi) de 13h à 14h
4. Les vigiles de l'entreprise travaillent (aussi) de 8h à 9h

Imaginons que les règles 1, 2 et 3 soient déclenchées. On est donc en présence d'un cadre informaticien employé par cette entreprise. Les horaires de travail sont à présent données par l'union des différents horaires de travail :  $([9, 12], [14, 17]) \cup [17, 18] \cup [13, 14] \cup \emptyset = [[9, 12], [13, 18]]$ . Dans cet exemple, on voit que l'élément neutre de l'union est l'ensemble vide. Cette représentation considère chaque règle comme une information supplémentaire.

La première classe (premier exemple) définit les **règles dites implicatives**, la seconde classe (deuxième exemple) les **règles conjonctives**.

Cette différence entre les deux représentations est fondamentale puisqu'elle différencie les règles selon deux classes : la première classe correspond à une implication  $A \rightarrow O$ , la deuxième à une conjonction  $A \wedge O$ . Pour plus de détails sur les opérateurs utilisés, on peut se référer à [Dubois & Prade - 1996], [Yager - 1996] ou [Weisbrod - 1996].

Ces deux représentations sont une borne supérieure et inférieure de la relation  $R$  entre l'entrée et la sortie de la règle "Si  $X$  est  $A$ , alors  $Z$  est  $O$ " :

$$A \wedge O \subseteq R \subseteq A \rightarrow O \quad (2.1)$$

Puisque ces règles sont différentes, leurs sorties s'interprètent différemment :

- des exemples de valeurs conjointement possibles en ce qui concerne les règles conjonctives, soit les valeurs correspondant à la représentation :  $A \cap O$
- des restrictions sur un ensemble de valeurs possibles en ce qui concerne les règles implicatives. Avec cette modélisation, on considère que les règles s'expriment ainsi :  $\bar{A} \cup O$  ce qui revient à éliminer les contre-exemples de la règle :  $A \cap \bar{O}$ .

On a donc en fait la relation suivante qui correspond aux zones hachurées des figures 2.3 et 2.4 :

$$A \cap O \subseteq R \subseteq \bar{A} \cup O \quad (2.2)$$

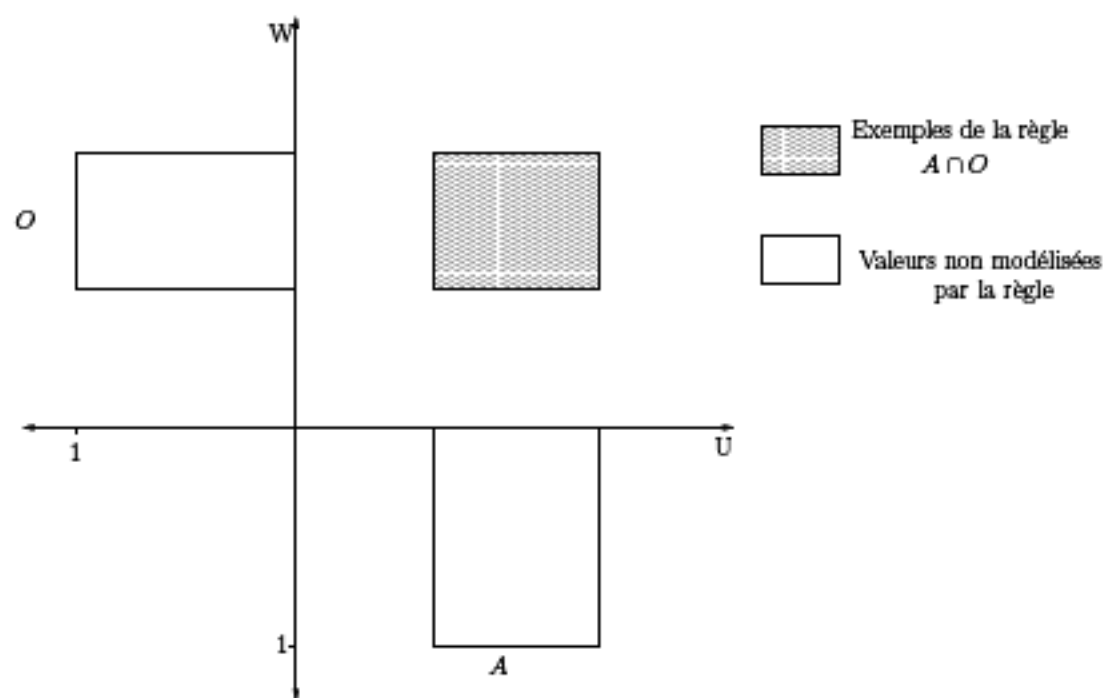


FIG. 2.3: Représentation des valeurs d'une règle conjonctive  $A \wedge O$



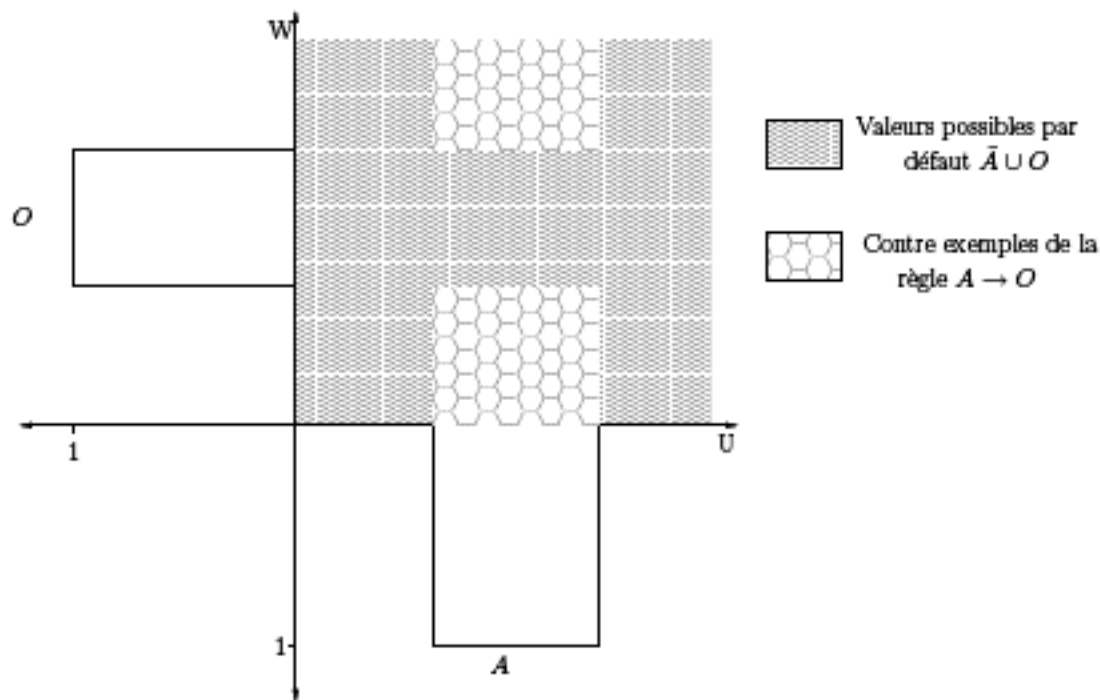


FIG. 2.4: Représentation des valeurs d'une règle implicative  $A \rightarrow O$

Nous verrons par la suite que ces deux classes de règles se décomposent chacune en 2 sous-catégories. Il y a donc 4 catégories principales de règles floues : les règles conjonctives à possibilité, les règles conjonctives antigraduées, les règles implicatives à certitude et les règles implicatives graduées [Dubois & Prade - 1992a]. Avant de détailler le fonctionnement de ces différents types de règles, donnons quelques rappels sur la notion de résiduation qui va conduire à un type d'implication particulier.

### 2.3.3 Résiduation

La logique résiduée est un modèle principalement utilisé dans le domaine de la logique floue. Ce modèle repose sur une algèbre résiduée. À partir d'une telle algèbre, on peut ensuite définir la notion d'implication résiduée. La notion de norme triangulaire est aussi très importante dans ce contexte. Certaines des règles implicatives que nous utiliserons par la suite reposent sur des implications résiduées, comme nous le verrons en section 2.3.4.1. Nous commençons par définir une algèbre résiduée et la t-norme afin de pouvoir définir les implications résiduées.

Une algèbre résiduée peut se définir à partir du quadruplet  $(L, \leq, \top, \mathcal{J})$  où :

- $(L, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné (un treillis) possédant un sommet égal à  $\mathbf{1}$
- $\top$  est la norme triangulaire [Klement et al. - 2000] (ou t-norme) associée à  $(L, \leq)$ . Une t-norme  $\top$  définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $[0, 1]$  est une fonction définie ainsi :
  - elle est commutative :  $x \top y = y \top x$
  - elle est associative :  $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$
  - elle est monotone :  $a \top b \leq c \top b$  si  $a \leq c$  et  $b \leq d$
  - $\mathbf{1}$  est élément neutre :  $\mathbf{1} \top x = x$
  - $\mathbf{0}$  est élément absorbant :  $\mathbf{0} \top x = \mathbf{0}$
- $\mathcal{J}$  est une implication résiduée. Nous définirons en détail les propriétés de l'implication résiduée par la suite.

Nous allons tout d'abord voir quelques exemples de t-normes :

$$a \top_{\min} b = \min\{a, b\}$$

$$a \top_{\text{prod}} b = a \cdot b$$

$$a \top_{\text{Lukas}} b = \max\{0, a + b - 1\}$$

Le minimum, le produit et la t-norme de Lukasievtz sont les t-normes les plus courantes. On peut noter que la t-norme du minimum  $\top_{\min}$  est une borne supérieure de toutes les t-normes existantes.

Une implication résiduelle de  $\top$  est une opération binaire  $J$  sur  $[0, 1]$  définie par :

$$J(\alpha, \gamma) = \sup\{\delta \in [0, 1] \mid \alpha \top \delta \leq \gamma\} \quad (2.3)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$

$$\alpha \top \beta \text{ ssi } \beta \leq J(\alpha, \gamma)$$

Les principales propriétés de l'implication résiduelle mises en évidence par Morsi [Morsi - 2005] sont décrites dans l'annexe B.

### 2.3.4 Règles implicatives

Les règles implicatives, dont la signification a été donnée en 2.3.2, peuvent être vues comme une application directe des théories de Zadeh [Zadeh - 1979] sur le raisonnement approché. Selon Zadeh, chaque grain de connaissance peut être vu comme une restriction sur un ensemble de possibles. En théorie des possibilités [Dubois & Prade - 1984; 1988], on représente les connaissances par des distributions de possibilité  $\pi$ .

La proposition «  $X \in A$  » peut alors être interprétée ainsi :

$$\forall u \in U, \pi_X(u) \leq \mu_A(u),$$

où  $\mu_A(u)$  est la fonction d'appartenance au sous-ensemble flou  $A$ . Une fonction d'appartenance  $\mu_A(u)$  définit pour tout point de l'univers le degré d'appartenance de  $u$  à l'ensemble flou  $A$ . L'inégalité provient du fait que l'information «  $X$  est  $A$  » n'exclut pas qu'une nouvelle information restreigne encore plus l'ensemble des valeurs possibles de  $X$ .

Les règles implicatives peuvent être vues comme une extension de la logique classique : en logique classique, le modus ponens correspond à :

$$A \wedge (A \rightarrow O) \models O$$

où  $\models$  représente l'inférence logique.  $\wedge$  est la t-norme associée à la relation considérée. En logique floue, on a le modus ponens généralisé proposé par Zadeh en 1973 [Zadeh - 1973, Martin-Clouaire - 1987] :

$$A' \wedge (A \rightarrow O) \models O'$$

Ce qui signifie que pour un fait  $A'$ , on est capable de déduire une valeur  $O'$  de l'implication  $A \rightarrow O$ . Pour une entrée  $A'$ , la valeur de sortie  $O'$  correspondante est donnée par :

$$\mu_{O'}(w) = \sup_{u \in U} \top(\mu_{A'}(u), \mu_A(u) \rightarrow \mu_O(w)) \quad (2.4)$$

Cette combinaison-projection est connue sous le nom de composition **sup**- $\top$  (ou *compositional rule of inference*). Elle est souvent notée  $\circ$ . Les opérateurs de conjonction et d'implication ne peuvent pas être choisis indépendamment l'un de l'autre. Le choix de  $\top$  détermine donc l'opérateur d'implication.

L'agrégation de ces règles se fait de manière conjonctive car celles-ci représentent une possibilité non garantie : des valeurs considérées comme possibles par une règle peuvent être interdites par d'autres règles. Ce qui peut aussi s'écrire :

$$O' = A' \circ \bigcap_{i=1}^n A_i \rightarrow O_i \quad (2.5)$$

Les deux types de règles implicatives correspondent aux deux interprétations logiques d'une règle de type  $A \rightarrow O$  :

- soit  $A$  est faux ou  $O$  est vraie
- soit  $O$  est vraie chaque fois que  $A$  est vraie, c'est-à-dire que  $A \rightarrow O$  est totalement vrai si  $O$  est au moins aussi vrai que  $A$ .

Ces deux interprétations sont équivalentes lorsqu'on regarde la table de vérité de l'implication  $\rightarrow$  (cf. tableau 2.1). En fait,  $A \rightarrow O$  est faux si et seulement si  $A$  est vraie et  $O$  est faux.

$A \rightarrow O$	$O$	$\neg O$
$A$	vraie	faux
$\neg A$	vraie	vraie

TAB. 2.1: Table de vérité de  $A \rightarrow O$

Cependant, ces deux types d'interprétation mènent à deux types d'implication :

- les implications résiduelles pour lesquelles  $A \rightarrow O$  est totalement vraie si et seulement si  $O$  est au moins aussi vraie que  $A$ . On appelle ces règles *règles graduelles*. Cette interprétation signifie que les images de  $A$  par la relation  $R$  sont dans  $O$ , ce qui peut s'écrire :  $A \circ R \subseteq O$ .
- les implications de la forme  $\neg A \vee O$  où  $\neg$  est la négation et  $\vee$  la disjonction floue. Ces règles sont appelés règles à certitude. Cette interprétation signifie en fait que les éléments hors de  $A$  ou dans  $O$  appartiennent à la relation, ce qui se note :  $R \subseteq \bar{A} \cup O$ . Remarquons qu'en logique floue, la formulation  $\neg A \vee O$  s'interprète différemment de la logique classique.

### 2.3.4.1 Règles implicatives graduelles

Les règles implicatives graduelles peuvent être comprises comme : « Plus  $X$  est  $A$ , plus  $Z$  est  $O$  ». Ces règles correspondent à la relation  $A \circ R \subseteq O$  lorsque  $\circ$  est la composition **sup**- $\wedge$  où  $\wedge$  est souvent le minimum. La relation peut alors se noter :

$$\sup_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \pi_{Z|X}(w, u)) \leq \mu_O(w) \quad (2.6)$$

$\pi_{Z|X}(w, u)$  est une distribution de possibilité conditionnelle. Elle exprime la relation de dépendance entre  $X$  et  $Z$ , elle permet de déterminer à quel point un événement  $w \in W$  est possible, sachant que l'événement  $u \in U$  est possible au degré  $\pi_X(u)$ .

Il existe différents types de règles implicatives graduelles selon l'implication utilisée dans l'équation 2.4. Nous en étudierons trois :

- Implication (résiduée) de Gödel :  $a \rightarrow o = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ o & \text{sinon} \end{cases}$

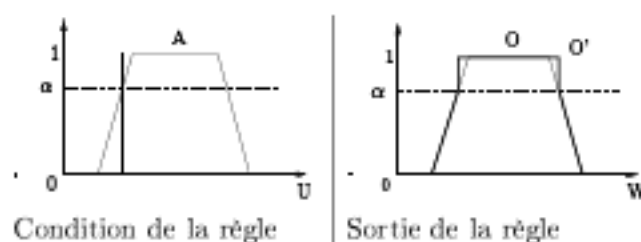


FIG. 2.5: Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Gödel) et une entrée stricte

- Implication (résiduée) de Goguen :  $a \rightarrow o = \begin{cases} \min(1, o/a) & \text{if } a \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

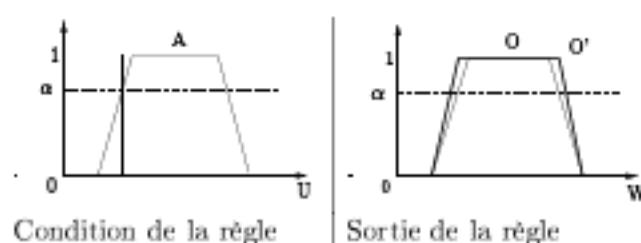


FIG. 2.6: Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Goguen) et une entrée stricte

Avec Goguen, la t-norme est le produit.

- Implication (non résiduée) de Rescher-Gaines :  $a \rightarrow o = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On peut noter que l'implication de Rescher-Gaines est la relation non-floue la moins spécifique vérifiant la relation 2.6 puisqu'elle est égale au noyau des autres implications. La figure 2.7 montre l'inférence d'une entrée stricte à partir d'une règle implicative graduelle modélisée par l'implication de Rescher-Gaines.

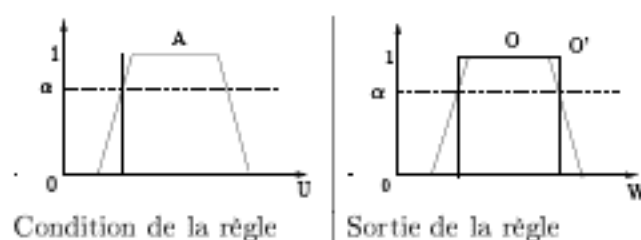


FIG. 2.7: Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Rescher-Gaines) et une entrée stricte

On choisira une implication de Rescher-Gaines si on souhaite obtenir un résultat imprécis mais non flou. On pourra aussi choisir l'implication de Goguen pour sa forme trapézoïdale.

Pour plus de détails sur les règles implicatives graduées, on peut se référer à [Prade - 1988] ou [Dubois & Prade - 1992b]. Ces règles sont particulièrement adéquates pour des processus d'interpolation.

### 2.3.4.2 Règles implicatives à certitude

Les règles à certitude peuvent s'interpréter ainsi : « plus  $X$  est  $A$ , plus il est certain que  $Z$  soit  $O$  ». Ce type de règles correspond à la représentation  $R \subseteq \bar{A} \cup O$ . Lorsque l'union est le  $\max$  et la négation de  $A$ ,  $1 - A$ , on obtient la contrainte suivante qui revient à utiliser l'implication de Kleene-Dienes  $a \rightarrow o = \max(1 - a, o)$  :

$$\pi_{Z|X}(w, u) \leq \max(1 - \mu_A(u), \mu_O(v)) \quad (2.7)$$

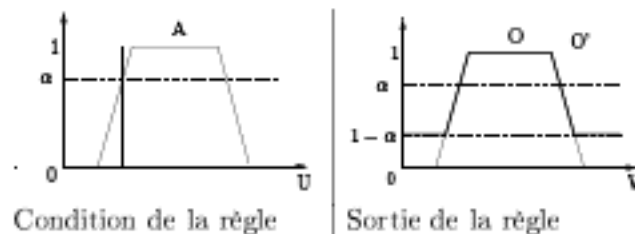


FIG. 2.8: Inférence avec une règle implicative à certitude (implication de Kleene-Dienes)

Ce type de règles permet de propager de l'incertitude. Il n'est pas efficace pour faire de l'interpolation.

### 2.3.5 Règles conjonctives

Comme nous l'avons vu précédemment, les règles conjonctives représentent des données, c'est-à-dire des couples de valeurs conjointement possibles. En effet, puisqu'on utilise un opérateur de conjonction entre l'entrée  $A$  et la sortie  $O$  de la règle, la règle signifie qu'on peut avoir simultanément les faits " $X$  est  $A$ " et " $Z$  est  $O$ " (cf équation 2.2).

Pour une variable  $X$ , la distribution de possibilité garantie associée à «  $x \in A$  est possible » est telle que :

$$\forall u \in U, \delta_X(u) \geq \mu_A(u)$$

Cette information ne représente plus une restriction des valeurs possibles, l'inégalité signifie que rien n'empêche de nouvelles informations d'étendre les valeurs garanties possibles à d'autres valeurs de  $U$ . Pour plus d'information sur la théorie des possibilités, le lecteur se référera à l'annexe B.

Les règles conjonctives sont agrégées de manière disjonctive puisque qu'elles représentent des valeurs garanties possibles, leur valeur neutre est donc l'ensemble vide qui est un élément neutre pour l'union. La conclusion  $O'$  d'un ensemble de règles conjonctives  $\{A_i \wedge O_i, i = 1, \dots, n\}$  étant donné une entrée floue  $A'$  est donc définie par :

$$O' = A' \circ \bigcup_{i=1}^n A_i \wedge O_i \quad (2.8)$$

L'agrégation disjonctive peut s'interpréter comme suit : puisque le degré de possibilité de la sortie d'une règle est garanti, si plusieurs règles sont activées, alors toutes leurs conclusions sont garanties. L'opérateur de disjonction généralement utilisé est le **max**. Ce type d'agrégation équivaut à une accumulation d'informations. Plus on a de règles, plus on va avoir d'informations et plus le nombre de couples de valeurs d'entrée/sortie simultanément possibles sera important. Les règles conjonctives représentent donc des données observées, et non pas des contraintes connues. Par conséquent ces règles ne peuvent exprimer ni l'impossibilité, ni l'interdiction. Une valeur non observée n'est pas impossible, elle n'est tout simplement pas "garantie" possible.

Considérons une entrée précise  $\mathbf{u}_0$ , si on a  $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_0) = \alpha$  avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Les valeurs dans  $\mathcal{O}$  sont toujours possibles, mais elles ne sont garanties qu'au degré  $\alpha$ .

Le degré de possibilité garanti  $\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  exprime à quel point les événements  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont possibles conjointement.

- Un degré de possibilité garanti en sortie du système  $\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 1$  signifie que pour  $\mathbf{X} = \mathbf{u}$ , la valeur  $\mathbf{w}$  est totalement possible pour  $\mathbf{Z}$ .
- En revanche,  $\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$  signifie que si  $\mathbf{X} = \mathbf{u}$ , alors, aucune règle ne peut garantir que  $\mathbf{w}$  est possible (ou impossible) pour  $\mathbf{Z}$ . Si la règle ne s'applique pas, on est dans le cas où  $\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$ , les valeurs sont donc toutes possibles, mais elles ne sont pas garanties.

Un degré d'appartenance 0 à  $\mathcal{O}$  n'interdit rien, la valeur n'est pas garantie possible, mais elle reste pourtant possible. L'ensemble flou  $\mathcal{O}$  obtenu correspond donc à la borne inférieure des valeurs possibles pour la valeur  $\mathbf{Z}$ .

Pour résumer, le résultat obtenu en sortie doit s'interpréter de la manière suivante :

- $\mu'_{\mathcal{O}}(z) = 0$  : on ne peut rien dire sur la valeur  $z$ , elle n'est pas garantie (mais elle est possible puisqu'une autre règle peut éventuellement la garantir)
- $\mu'_{\mathcal{O}}(z) \in ]0, 1[$  : la possibilité de  $z$  est garantie à un certain niveau.
- $\mu'_{\mathcal{O}}(z) = 1$  : la valeur  $z$  est totalement possible.

Par la suite, nous allons détailler les deux types de règles conjonctives : les règles à possibilité et les règles antigraduées [Dubois & Prade - 1996].

### 2.3.5.1 Règles conjonctives à possibilité

La première partie de l'inéquation 2.1 peut s'écrire :

$$\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) \wedge \mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{w}) \leq \mu_{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (2.9)$$

Soit avec des possibilités garanties :

$$\mu_{\mathbf{X}, \mathbf{Z}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \geq \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) \wedge \mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{w}) \quad (2.10)$$

Les règles conjonctives à possibilité [Dubois & Prade - 1996], « Si  $\mathbf{X}$  est  $\mathbf{A}$  alors  $\mathbf{Z}$  est  $\mathcal{O}$  » peuvent maintenant s'écrire : « Plus  $\mathbf{X}$  est  $\mathbf{A}$ , alors plus il est possible que  $\mathbf{Z}$  soit  $\mathcal{O}$  ». L'opérateur « alors » correspond ici à une conjonction. La sortie de la règle est donc une distribution de possibilité garantie :  $\delta_{\mathbf{Z}|\mathbf{X}} = \mu_{\mathbf{A}} \wedge \mu_{\mathcal{O}}$ . Si l'on choisit pour opérateur de conjonction le **min**, l'on retrouve les règles de Mamdani.

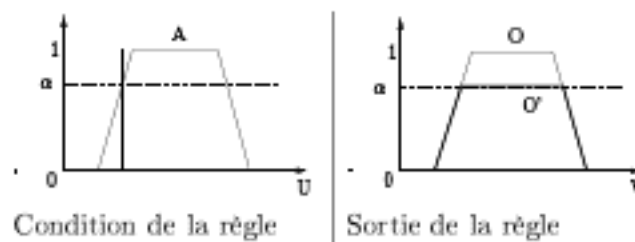


FIG. 2.9: Inférence avec une règle conjonctive à possibilité et une entrée stricte

### 2.3.5.2 Règles conjonctives antigraduelles

Ce type de règles très peu utilisé est obtenu par complémentarité par rapport aux trois autres types de règles. En effet, les règles implicatives graduelles et les règles conjonctives à possibilité agissent toutes les deux sur le noyau de la sortie. Les règles implicatives à certitude agissent sur le support de la sortie. Par complémentarité, on peut donc construire des règles conjonctives agissant sur le support de la sortie.

Nous ne détaillerons pas leur fonctionnement. Elles correspondent à la contrainte suivante :

$$\forall (u, w) \in U \times W, \max(\pi_{X,Z}(u, w), 1 - \mu_A(u)) \leq \mu_O(w) \quad (2.11)$$

Ces règles peuvent s'interpréter de la manière suivante : « plus  $X$  est proche du noyau de  $A$ , plus les valeurs autour du noyau de  $O$  sont possibles pour  $Z$  ». On notera que les valeurs autour du noyau de  $O$  doivent quand même être dans le support de  $O$  pour avoir une influence. La figure 2.10 montre l'inférence à partir d'une règle conjonctive antigraduelle. Le nom de règles antigraduelles vient du fait qu'elles ont un comportement inverse à celui des règles implicatives graduelles (Rescher-Gaines). Les premières rétrécissent le support et les secondes élargissent le noyau.

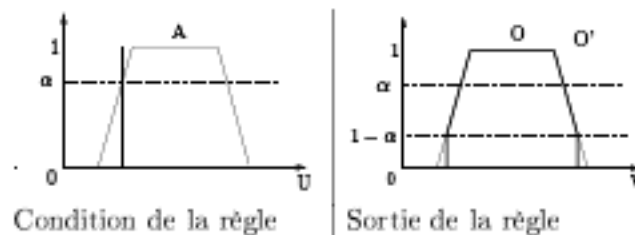


FIG. 2.10: Inférence avec une règle conjonctive antigraduelle et une entrée stricte

Leur interprétation n'est pas aisée d'un point de vue sémantique.

### 2.3.6 Résumé en vue de l'utilisation

Nous avons vu que les règles floues peuvent être décomposées en quatre types de règles [Ughetto et al. - 1999, Dubois et al. - 2003] qui sont des sous-catégories des règles conjonctives et implicatives.

Pour savoir quel type de règle il faut utiliser, on suit ce raisonnement :

Si la règle représente :

- une contrainte, une obligation, une restriction : règle *implicative*

Si la règle *implicative* représente :

- la certitude ou la typicalité : règle *à certitude*
- une évolution graduelle ou la proximité : règle *graduelle*
- des exemples de ce qui est possible, des données : règle *conjonctive à possibilité*

De cette manière, on peut choisir le type de règle adapté à ce qu'on veut modéliser. Les règles implicatives semblent être les règles les plus adéquates dans le cas où l'on utilise des connaissances expertes qui s'expriment sous forme de contraintes. Lorsque la relation liant les entrées aux sorties est graduelle et continue, les règles implicatives graduelles sont les règles les plus adaptées.

Après cette étude d'un point de vue logique, nous allons maintenant présenter un comparatif des règles implicatives graduelles et des règles conjonctives à possibilité d'un point de vue pratique.

## 2.4 Comparaison : règles implicatives graduelles et règles conjonctives à possibilité

Nous comparerons ici les systèmes de règles implicatives graduelles et de règles conjonctives à possibilité afin de déterminer leurs avantages et inconvénients selon certains critères :

- agrégation des résultats en sortie,
- capacité d'interpolation,
- influence de la forme des ensembles flous,
- accumulation de connaissances dans une base de règles,
- cohérence,
- mécanisme d'inférence.

### 2.4.1 Agrégation

Comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, les règles implicatives s'agrègent conjonctivement et les règles conjonctives disjonctivement. La figure 2.11 illustre l'agrégation de ces deux types de règles pour le système de règles suivant :

1. Si  $X$  est  $A_1$ , alors  $Z$  est  $O_1$
2. Si  $X$  est  $A_2$ , alors  $Z$  est  $O_2$
3. Si  $X$  est  $A_3$ , alors  $Z$  est  $O_3$



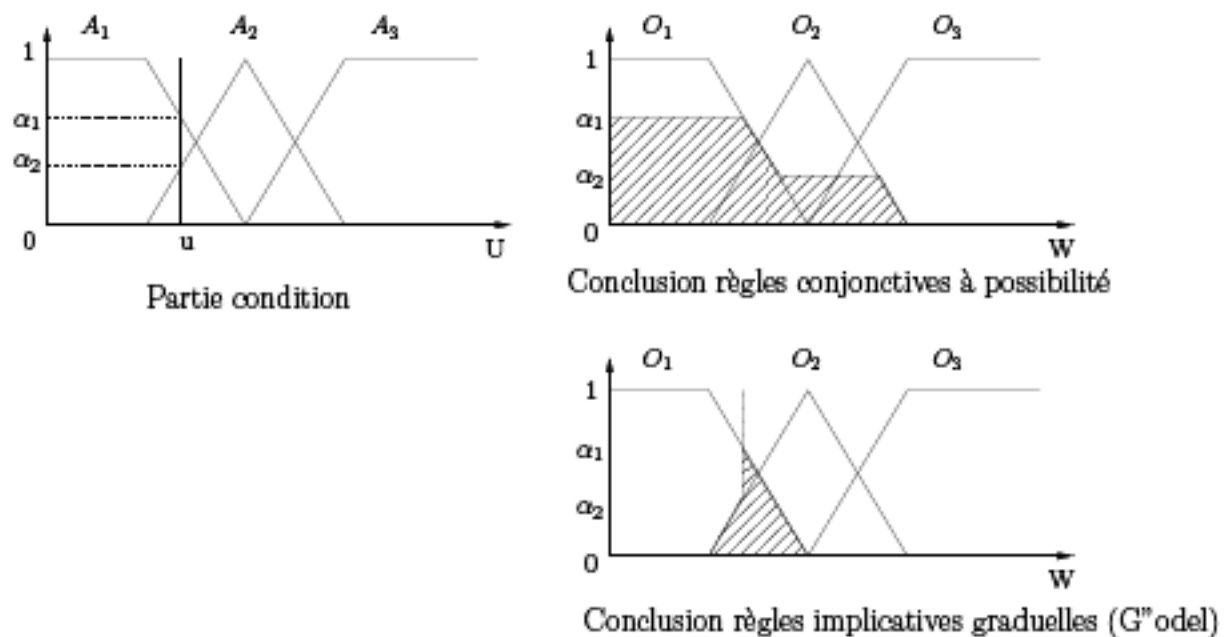


FIG. 2.11: Agrégation des sorties pour une entrée précise  $u$

On peut remarquer que l'interprétation de la sortie inférée à partir de règles conjonctives à possibilité est difficile puisque la sortie est assez vague et non normalisée. En revanche, la sortie obtenue à partir d'un ensemble de règles implicatives est à l'intersection des sorties des deux règles activées, elle a donc une imprécision plus restreinte. De plus, elle est normalisée donc plus facilement interprétable.

#### 2.4.2 Interpolation

Nous considérons ici des partitions floues fortes, c'est-à-dire telle que  $Noyau(A_i) = \{a_i\}$  et  $Support(A_i) = [a_{i-1}, a_{i+1}]$  (Cf figure 2.12 (a) et (b)).

Le mécanisme d'interpolation mis en œuvre pour les règles de Mamdani est décrit en détail dans [Dubois et al. - 1999]. Nous rappelons ici les principaux résultats. Pour les règles conjonctives, la figure 2.12 montre la distribution de possibilité de sortie inférée par trois règles :  $A_i \wedge O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). On voit que lorsque l'entrée varie de  $a_1$  à  $a_2$  (a), seuls les niveaux où sont tronqués  $O_1$  et  $O_2$  sont affectés (b). Puisque le maximum de la distribution de sortie est un intervalle, une étape de défuzzification est nécessaire. Les figures (c) et (d) montrent les résultats en utilisant les défuzzifications de la moyenne des maxima et du centre de gravité. Seul le centre de gravité mène à une fonction continue qui est, en général, monotone. En fait, il a été montré que dans certaines situations, un ensemble de règles floues cherchant à exprimer qualitativement un comportement monotone peut produire des lois de contrôle non monotones [Schott & Whalen - 1996, Van Broekhoven - 2007]. Cependant, contrairement à ce qui est attendu, cette fonction n'est pas linéaire.

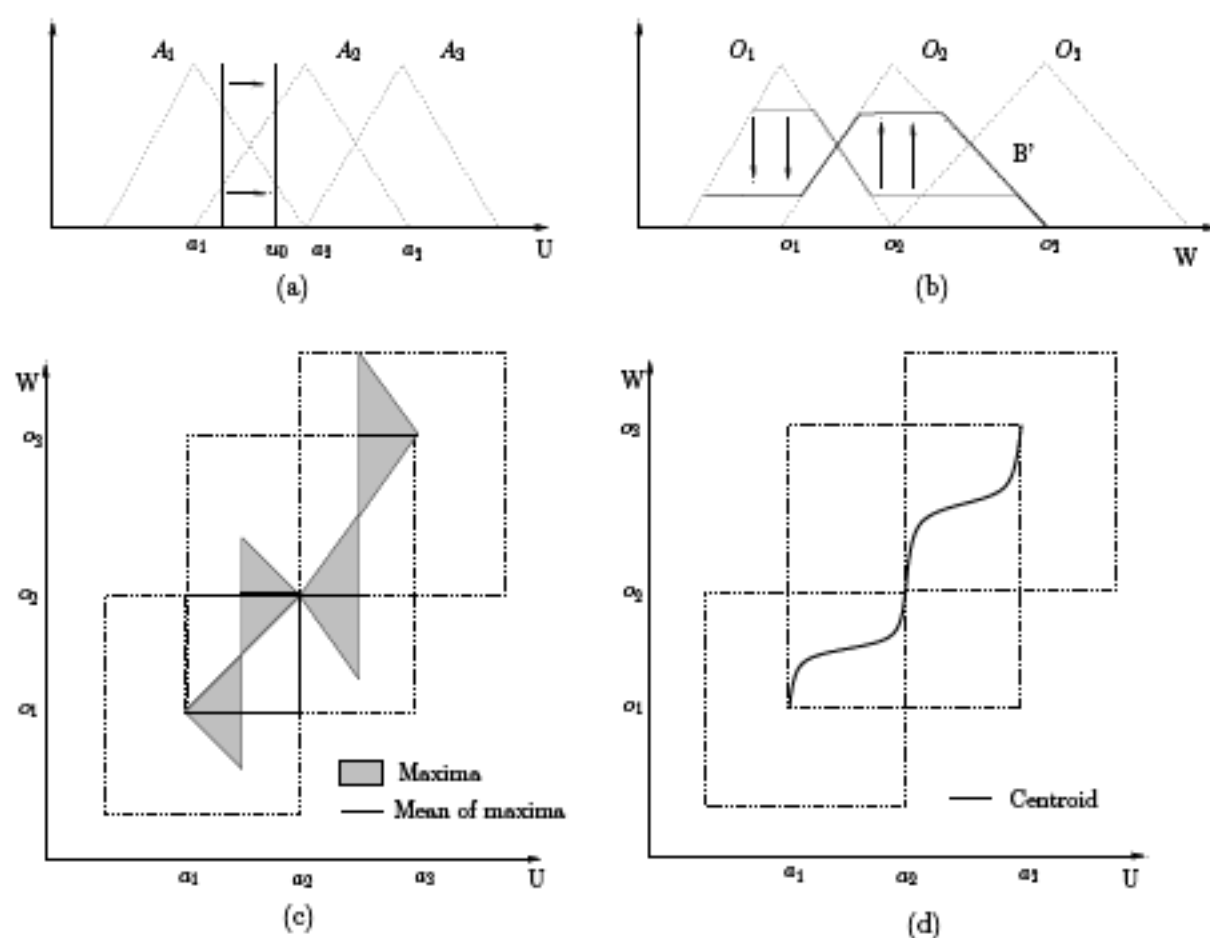


FIG. 2.12: Interpolation avec des règles conjonctives à possibilité

En ce qui concerne les règles implicatives graduelles, le problème de défuzzification ne se pose pas pour cet exemple puisque le noyau de la sortie est unique. Plus généralement, l'imprécision issue d'un système de règles implicatives est en général interprétable sans défuzzification. Nous pouvons voir sur la figure 2.13 que le maximum est unique (b), il n'est donc pas nécessaire de passer par une étape de défuzzification. La figure 2.13(c) nous montre que l'évolution de ce maximum unique est linéaire (par morceaux).

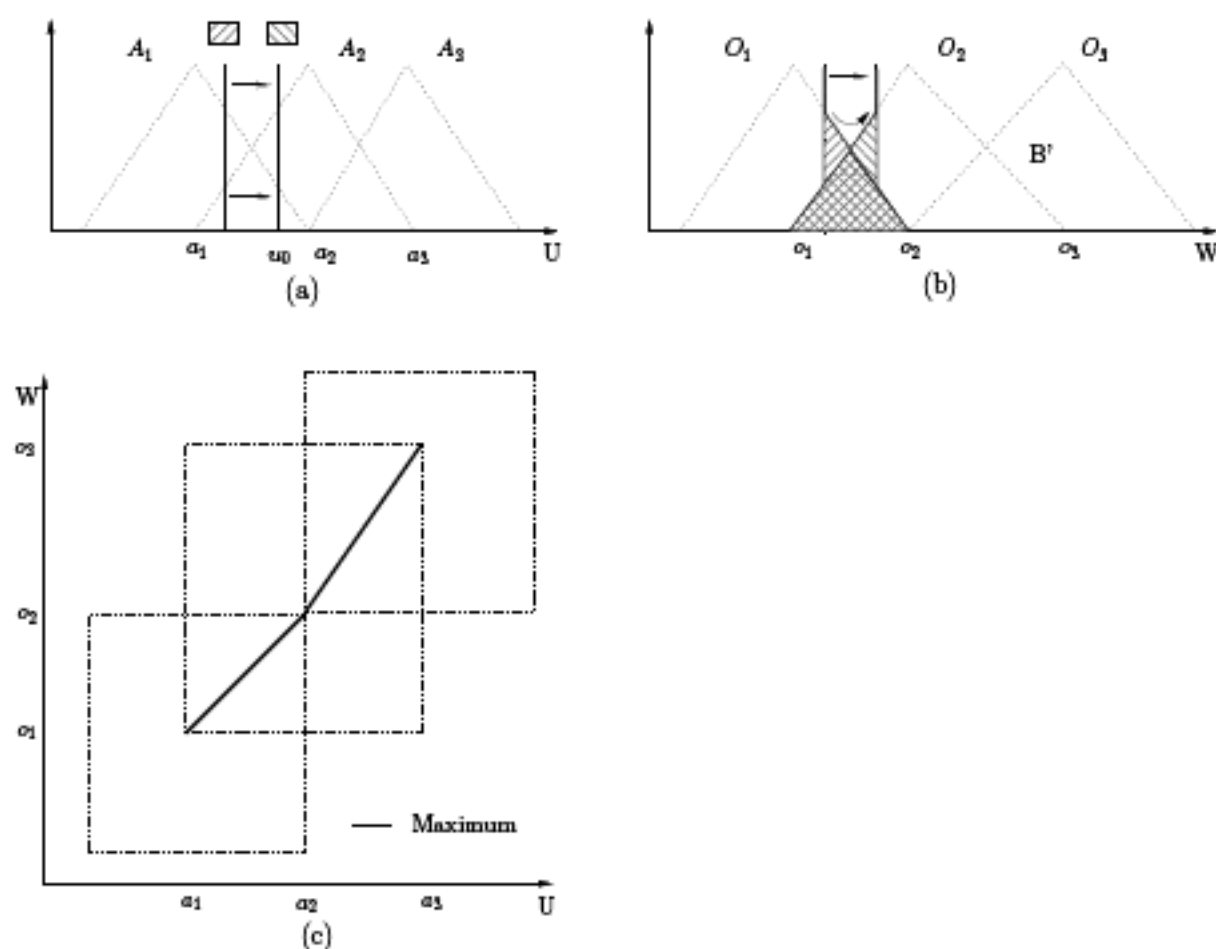


FIG. 2.13: Interpolation avec des règles implicatives graduelles

### 2.4.3 Influence de la forme des ensembles flous

Si nous considérons des règles activées au même niveau, pour les règles conjonctives à possibilité, on a le comportement suivant : lorsque deux ensembles flous de sortie ont la même largeur, la valeur inférée (par la moyenne des maxima ou le centre de gravité) est exactement entre les deux sous-ensembles comme l'illustre la partie gauche de la figure 2.14. Ce résultat est celui souhaité, en effet lorsque deux sorties sont activées au même niveau, on souhaite que la sortie défuzzifiée soit entre les deux ensembles flous.

Cependant, si un ensemble de sortie est plus large que l'autre, la valeur défuzzifiée va se déplacer vers le plus large des deux, ce qui n'est pas forcément intuitif (cf partie gauche de la figure 2.15).

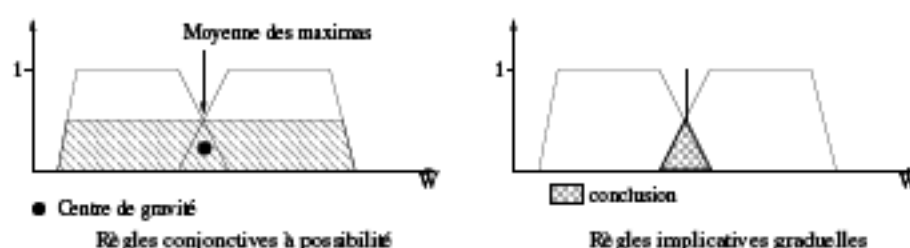


FIG. 2.14: Ensembles flous de sortie de même largeur

Ce comportement n'est pas possible avec des règles implicatives car celles-ci sont agrégées de manière conjonctive. Le résultat reste donc dans l'intersection des deux ensembles de sortie quelle que soit leur forme (cf parties droites des figures 2.14 et 2.15)

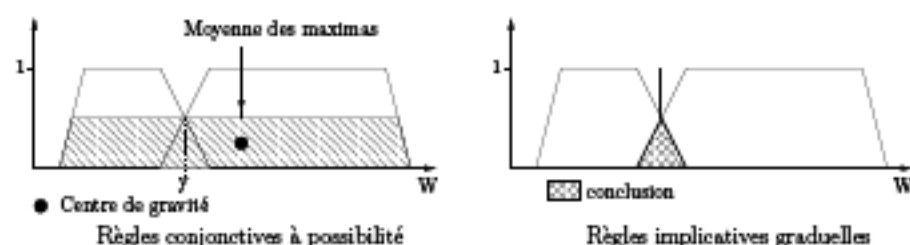


FIG. 2.15: Ensembles flous de largeurs différentes

#### 2.4.4 Accumulation de règles

Ajouter une règle conjonctive à une base de règles élargit la distribution de possibilité de sortie. Le système de règles aura donc toujours une solution, même si la base de règles comporte des règles conflictuelles. En fait, plus on aura de règles dans la base, plus celle-ci sera imprécise tendant vers l'univers de sortie tout entier assez rapidement. Ce comportement problématique est souvent caché par le processus de défuzzification, mais il est dangereux car on s'attend à avoir un système plus précis en ajoutant des règles dans la base, ce qui n'est pas le cas. La confusion vient du fait que les règles conjonctives sont parfois interprétées comme des règles logiques.

Les règles implicatives expriment des contraintes sur les valeurs d'entrée/sortie. Par conséquent, plus on a de règles dans la base, plus le système est précis. De plus, si des règles sont contradictoires, le système n'aura pas de solution, cette propriété est intéressante car elle va nous permettre de tester la cohérence logique de la base de règles.

#### 2.4.5 Cohérence et redondance

La notion de cohérence est traitée en détail dans [Dubois et al. - 1997, Ughetto - 1998b, Ayel & Rousset - 1990]. Une base de règles est incohérente si des règles déclenchées simultanément ont des résultats contradictoires. La notion de cohérence s'applique seulement aux règles implicatives. Elle ne signifie rien pour les règles conjonctives puisqu'il s'agit juste d'exemples de valeurs d'entrées et de sorties conjointement possibles.

La cohérence d'un ensemble de propositions est définie par l'absence de contradiction logique. Par la suite, nous présentons différents cas à éviter pour conserver la cohérence. Ensuite, nous définirons la cohérence pour un ensemble de règles implicatives.

### 2.4.5.1 Cohérence d'un ensemble de règles

**Logique classique :** La consistance logique d'un ensemble de règles peut se définir par l'existence d'un modèle le vérifiant. Ainsi, aucune déduction de l'ensemble de règles ne doit conduire à une contradiction. Le système est incohérent si on peut déduire la clause vide à partir de l'ensemble de règles et d'une entrée. Pour vérifier la cohérence d'un ensemble de règles, il faut s'attacher à trois aspects :

1. Cohérence de chaque règle :
  - Pas de règle indéclenchable ( $A \wedge \neg A \rightarrow B$ )
  - Pas de déclenchement impliquant une clause vide ( $A \wedge B \rightarrow \neg A$ )
2. Cohérence de l'ensemble des règles :
  - Pas de conflit entre deux règles ou plus (résultats contradictoires  $A \rightarrow B$  et  $A \rightarrow \neg B$ ).
  - Pas de chaînes d'inférence contradictoires : deux ou plusieurs chaînes d'inférence avec des conditions identiques mènent à des résultats contradictoires ( $\{A \rightarrow B, B \rightarrow D\}$  et  $\{A \rightarrow C, C \rightarrow \neg D\}$ ).
  - Pas de règles avec des conditions inutiles (elles ont la même conclusion et les conditions qui les différencient forment une tautologie :  $A \wedge B \rightarrow C$  et  $A \wedge \neg B \rightarrow C$ ).
  - Pas de boucle d'inférence ( $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A\}$ ).
  - Pas de couverture incomplète de l'espace d'entrée. Une couverture incomplète n'est cependant pas problématique si elle correspond réellement à un manque de connaissances ou à des impossibilités réelles (physiques).
3. Cohérence de l'ensemble des règles vis-à-vis de chaque entrée possible.

**Logique floue :** Avec des règles floues, on peut reprendre les trois aspects précédents, sachant que  $A \wedge \neg A \neq \emptyset$  en général :

1. Cohérence de chaque règle :
  - Pas de règle indéclenchable ( $A \wedge \neg A \rightarrow B$ ) : cette notion n'a pas vraiment de sens avec des règles floues car  $A$  et  $\neg A$  peuvent avoir des valeurs communes lorsque  $A$  est un ensemble flou.
  - Pas de déclenchement impliquant une clause vide ( $A \wedge B \rightarrow \neg A$ ) : tout d'abord au niveau de la représentation des connaissances, on peut juger qu'il n'est pas judicieux de prendre le même domaine (celui de  $A$ ) en entrée et en sortie d'un système. Cependant, en logique floue, cette clause n'est pas forcément vide.
2. Cohérence de l'ensemble des règles :
  - Pas de conflit entre deux règles ou plus (résultats contradictoires  $A \rightarrow B$  et  $A \rightarrow \neg B$ ) : en logique floue,  $B$  et  $\neg B$  ont une intersection commune. Par conséquent, une sortie non normalisée peut exister. Or, avec les règles implicatives, une sortie non normalisée est le signe d'une incohérence. On est donc pas obligé d'inférer une sortie vide pour être contradictoire.
  - Pas de chaînes d'inférence contradictoires : deux ou plusieurs chaînes d'inférence avec des conditions identiques mènent à des résultats contradictoires ( $\{A \rightarrow B, B \rightarrow D\}$  et  $\{A \rightarrow C, C \rightarrow \neg D\}$ ) : en logique floue, si on chaîne des systèmes d'inférence, des problèmes de cohérence similaires pourront être mis à jour si les sorties déclenchées n'ont pas d'intersection commune.
  - Pas de règles avec des conditions inutiles : par exemple, si seulement deux ensembles flous  $B_1$  et  $B_2$  couvrent l'univers  $V$ , les règles  $A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$  et  $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,1}$  ont une condition inutile sur  $V$  car la règle  $A_1 \rightarrow O_{1,1}$  serait suffisante.

- Pas de boucle d'inférence : en représentation des connaissances, une boucle d'inférence n'est pas conforme à la manière de raisonner des experts car les entrées et les sorties sont bien identifiées. Cependant, une telle boucle serait possible si l'on construisait le système suivant :  $A_1 \rightarrow B_1$ ,  $B_1 \rightarrow C_1$  et  $C_1 \rightarrow A_1$
- Pas de couverture incomplète de l'espace d'entrée.

3. Cohérence de l'ensemble des règles vis-à-vis de chaque entrée possible.

#### 2.4.5.2 Redondance d'un ensemble de règles

**Logique classique :** Il faudra vérifier la redondance d'une règle par rapport à d'autres règles. Des problèmes de redondances peuvent arriver lorsqu'une règle a des conditions supplémentaires ou bien lorsqu'elle a moins de conclusions ( $A \wedge B \rightarrow C$  et  $A \rightarrow C$  ou  $A \rightarrow B$  et  $A \rightarrow B \wedge C$ ).

**Logique floue :** Des problèmes de redondances peuvent aussi se produire en logique floue. Par exemple,  $A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$  et  $A_1 \rightarrow O_{1,1}$  sont redondantes car la seconde est moins spécifique.

#### 2.4.5.3 Résumé sur la cohérence

Pour résumer, les trois aspects qui ont du sens vis-à-vis de la représentation des connaissances sont les suivants :

- la cohérence interne de chaque règle : selon Zadeh [Zadeh - 1979], une règle implicative  $A \rightarrow O$  est cohérente si les ensembles flous  $A$  et  $O$  sont normalisés.
- la cohérence de l'ensemble de règles floues : si pour toute entrée, il existe une valeur de sortie compatible aux règles du système, alors l'ensemble de règles est cohérent.
- la redondance dans le système de règles : ce problème est moins grave que la cohérence du système de règles car il ne modifie pas le résultat obtenu. En revanche, la base est plus complexe et moins facile à inférer lorsqu'elle est redondante. Une règle implicative est redondante par rapport à la base de règles  $R$  si elle ne modifie pas les connaissances de cette base. Les règles redondantes sont donc les règles les moins spécifiques car elles apportent une information moins précise que celle existant déjà. On peut noter qu'un système de règles respectant l'indépendance inférentielle ne peut pas être redondant. Nous nous focaliserons donc sur les problèmes de cohérence.

#### 2.4.5.4 Cohérence pour un ensemble de règles implicatives

**Définition :** Cohérence d'un ensemble de règles implicatives : un système de règles implicatives est cohérent si pour toutes les valeurs d'entrée possibles, il existe au moins une valeur de la sortie inférée complètement compatible, pour ce faire, la sortie inférée doit être normalisée.

De manière plus explicite, en présence d'un ensemble de règles, chaque sous-ensemble de l'entrée (ou intersection de sous-ensembles) doit déclencher des règles ayant des sorties dont l'intersection est normalisée en sortie. Par exemple, si on a les règles  $A_1 \rightarrow O_1$  et  $A_2 \rightarrow O_2$ , si  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ , les sous-ensembles de sorties  $O_1$  et  $O_2$  doivent aussi vérifier  $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$  afin qu'un fait de l'entrée ne puisse pas entraîner une clause vide en sortie.

Cette notion de cohérence est fortement liée aux partitions utilisées en entrée et en sortie du système de règles. Nous détaillerons en section 3.5.1 et 4.3 les partitions d'entrées et de sortie à utiliser pour respecter la cohérence du système.

### 2.4.6 Mécanisme d'inférence

Il existe deux approches différentes pour l'inférence de plusieurs règles floues [Martin-Clouaire - 1987, Buckley & Hayashi - 1994] :

- FITA (First Infer Then Aggregate) : elle consiste à effectuer la composition **sup – min** règle à règle puis à agréger les résultats. Les systèmes de règles conjonctives utilisent cette méthode d'inférence qui est particulièrement facile à mettre en œuvre puisqu'on peut inférer localement (c'est-à-dire règle à règle)
- FATI (First Aggregate Then Infer) : elle consiste à appliquer la composition **sup – min** à la relation  $R$ . On effectue ici une inférence globale puisqu'on applique globalement l'inférence à l'ensemble de règles disponibles. Cette méthode est plus compliquée à mettre en œuvre.

#### 2.4.6.1 Règles conjonctives

Avec les règles conjonctives, pour une base de règles  $A_i \wedge O_i, i = 1, \dots, n$ , la sortie est donnée par la formule 2.8 :

$$O' = A' \circ \bigcup_{i=1, \dots, n} A_i \wedge O_i$$

Cette relation (FATI) signifie que les règles doivent être agrégées avant de pouvoir appliquer la composition **sup – min** notée  $\circ$ . Cependant, les opérateurs  $\circ$  et  $\bigcup$  commutent. On peut alors écrire la relation précédente ainsi :

$$\begin{aligned} O' &= A' \circ \bigcup_{i=1, \dots, n} A_i \wedge O_i \\ &= \bigcup_{i=1, \dots, n} (A' \circ A_i \wedge O_i) \\ &= \bigcup_{i=1, \dots, n} (O'_i) \end{aligned} \quad (2.12)$$

On peut alors utiliser le mécanisme d'inférence règle à règle qui se compose de trois étapes :

1. sélection des règles déclenchées par l'entrée,
2. déclenchement des ces règles une par une,
3. combinaison des conclusions obtenues pour chaque règle (on agrège les différents résultats).

Ceci revient à faire une combinaison disjonctive des conclusions partielles  $O'_i$  comme le montre l'équation 2.12. Cette méthode est intéressante car elle dispense de construire la relation  $R$ , très complexe lorsque les règles ont plusieurs entrées.

#### 2.4.6.2 Règles implicatives

Les règles implicatives s'aggrègent conjonctivement, on part du schéma d'inférence suivant :

$$O' = A' \circ \bigcap_{i=1, \dots, n} A_i \rightarrow O_i$$

En revanche,  $\circ$  et  $\bigcap$  ne commutent pas. Il a été démontré [Dubois & Prade - 1984] que seule l'inclusion suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}' &= A' \circ \bigcap_{i=1, \dots, n} A_i \rightarrow O_i \\ &\subseteq \bigcap_{i=1, \dots, n} (A' \circ A_i \rightarrow O_i) = \bigcap_{i=1, \dots, n} \mathcal{O}'_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Avec ces règles, le résultat à partir de l'approche FITA n'est généralement pas exploitable puisque la conclusion  $\mathcal{O}'$  qui en résulte est une approximation supérieure de la conclusion réelle. Avec une entrée imprécise, il peut même conduire à l'indétermination totale (la sortie est égale à l'univers de sortie tout entier).

En général, avec les règles implicatives, on est donc contraint d'utiliser le schéma d'inférence FATI pour avoir la solution exacte de la sortie inférée :

$$\mathcal{O}' = A' \circ \bigcap_{i=1, \dots, n} A_i \rightarrow O_i \quad (2.15)$$

En revanche, pour des entrées précises  $\mathbf{u}$ , on peut se ramener à un processus d'inférence FITA puisque l'inclusion de la relation 2.13 devient une égalité :

$$\mathcal{O}' = \mathbf{u} \circ \bigcap_{i=1, \dots, n} A_i \rightarrow O_i = \bigcap_{i=1, \dots, n} (\mathbf{u} \circ A_i \rightarrow O_i) \quad (2.16)$$

En présence d'entrées précises, on peut donc utiliser le même schéma que celui utilisé pour des règles conjonctives.

Cependant, si l'on souhaite représenter des informations entachées d'imprécision en entrée, il est nécessaire d'utiliser des entrées floues et donc, le schéma d'inférence FATI. Les algorithmes d'inférence donnant une solution exacte [Turksen & Tian - 1993] ont une complexité très élevée. Nous donnerons dans le chapitre suivant de nouveaux algorithmes d'inférence à partir d'entrées floues dans le cas de règles implicatives graduelles mono et bidimensionnelles. Ces algorithmes, basés sur la propriété d'indépendance inférentielle, sont de complexité réduite, donc utilisables en pratique.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de montrer qu'il existe deux types de règles en logique floue, qui ont deux sens bien distincts :

- les règles implicatives qui sont une généralisation floue des règles classiques et qui permettent de représenter des contraintes floues,
- les règles conjonctives qui représentent des exemples de valeurs conjointement possibles.

Pour chacune de ces catégories, on a deux types de règle selon que l'activation de la règle est répercutée sur le noyau (règles implicatives graduelles et règles conjonctives à possibilité) ou sur le support (règles implicatives à certitude ou règles conjonctives antigraduelles).

Grâce à cette description inspirée des travaux de [Dubois & Prade - 1992a; 1996] et [Ughetto - 1998b], il est plus facile de décider du type de règles correspondant à la modélisation souhaitée. Dans notre cas, les règles implicatives graduelles sont les plus adéquates car elles permettent de modéliser des connaissances expertes mais aussi d'appréhender des concepts de sortie graduels.

Nous avons donc comparé les règles implicatives graduelles aux règles conjonctives à possibilité pour mettre en avant le bon comportement des règles implicatives en ce qui concerne



l'interpolation, l'influence de la forme de la partition de sortie, l'accumulation de connaissances dans une base de règles et le respect de la cohérence.

Cependant, nous avons souligné l'une des difficultés principales de ce type de règles : l'inférence à partir de système multi-dimensionnel lorsqu'on est en présence d'entrées floues. Des solutions sont apportées dans le chapitre suivant. Par ailleurs, comme les règles implicatives sont peu utilisées, et que leur fonction peut dérouter l'utilisateur habitué à modéliser avec les règles conjonctives, il est important de donner des éléments pratiques d'utilisation de d'interprétation de ces règles. C'est ce que nous ferons dans le chapitre 4.

---

**Figures**

2.1	Règles modélisant le comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore . . . . .	20
2.2	Modélisation des différents ensembles flous correspondants au comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore . . . . .	21
2.3	Représentation des valeurs d'une règle conjonctive $A \wedge O$ . . . . .	23
2.4	Représentation des valeurs d'une règle implicative $A \rightarrow O$ . . . . .	24
2.5	Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Gödel) et une entrée stricte . . . . .	27
2.6	Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Goguen) et une entrée stricte . . . . .	27
2.7	Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Rescher-Gaines) et une entrée stricte . . . . .	27
2.8	Inférence avec une règle implicative à certitude (implication de Kleene-Dienes) . . . . .	28
2.9	Inférence avec une règle conjonctive à possibilité et une entrée stricte . . . . .	30
2.10	Inférence avec une règle conjonctive antigraduelle et une entrée stricte . . . . .	30
2.11	Agrégation des sorties pour une entrée précise $\mathbf{u}$ . . . . .	32
2.12	Interpolation avec des règles conjonctives à possibilité . . . . .	33
2.13	Interpolation avec des règles implicatives graduelles . . . . .	34
2.14	Ensembles flous de sortie de même largeur . . . . .	35
2.15	Ensembles flous de sortie de largeurs différentes . . . . .	35

**Tables**

2.1	Table de vérité de $A \rightarrow O$ . . . . .	26
-----	--	----

---



## Chapitre 3

# Méthodes d'inférence

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
<b>3.2</b>	<b>Indépendance inférentielle</b>	<b>44</b>
3.2.1	Définitions et résultats	44
3.2.2	Une méthode permettant d'obtenir l'indépendance inférentielle	45
3.2.3	Conditions suffisantes en une dimension	46
3.2.4	Conditions suffisantes en deux dimensions	48
<b>3.3</b>	<b>Décomposition</b>	<b>48</b>
3.3.1	Décomposition par $\alpha$ -coupes	49
3.3.2	Décomposition par partitionnement	50
<b>3.4</b>	<b>Inférence mono-dimensionnelle</b>	<b>50</b>
3.4.1	Entrée dans le noyau d'un sous-ensemble de la partition	51
3.4.2	Expression analytique pour une entrée floue	52
3.4.2.1	Implication de Rescher-Gaines	53
3.4.2.2	Implication de Gödel	53
3.4.2.3	Implication de Goguen	54
3.4.3	Entrée rectangulaire de niveau 1 entre deux noyaux	55
3.4.4	Entrée rectangulaire de niveau $\alpha$ entre deux noyaux	57
3.4.5	Analyse de la complexité de l'algorithme	58
<b>3.5</b>	<b>Inférence 2D</b>	<b>58</b>
3.5.1	Partitions de sortie d'un système à deux dimensions	59
3.5.2	Inférence 2D pour une entrée précise	61
3.5.2.1	Zone 2D entre les noyaux (Zone 3)	63
3.5.2.2	Zone 2D intra-noyau et extra-noyau (zone 2)	64
3.5.3	Continuité des bornes de la sortie inférée	65
3.5.4	Points anguleux	66
3.5.5	Analyse de la complexité de l'algorithme	68
<b>3.6</b>	<b>Passage à des dimensions supérieures : limites</b>	<b>68</b>
3.6.1	Indépendance inférentielle	69
3.6.2	Partitions de sortie	69
3.6.3	Inférence nD	69
3.6.3.1	Les différentes zones de l'inférence	69
3.6.3.2	La continuité	69
3.6.3.3	Les points anguleux	70
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>70</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans de nombreuses applications, les données sont entachées d'imprécision. Il est alors naturel, si une valeur est imprécise, de rendre compte de son imprécision en utilisant à la place de la valeur ponctuelle un ensemble flou plus représentatif de la réalité. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 l'inférence à partir d'une entrée floue est difficile avec les règles implicatives car les techniques usuelles d'inférence ne fonctionnent plus. Actuellement, il n'existe pas de méthode permettant de bien manipuler ce type d'inférence avec des règles floues. Les travaux existants traitent seulement de l'implication de Rescher-Gaines dans le cas monodimensionnel [Ughetto et al. - 1997]. Une autre méthode a été développée dans [Dubois et al. - 1988] pour l'implication de Gödel mais elle impose des partitions dans lesquelles les noyaux s'intersectent. Il existe aussi des méthodes d'inférence basée sur la discrétisation de l'entrée floue [Turksen & Tian - 1993] mais leur complexité est très élevée.

De nouveaux résultats [Morsi & Fahmy - 2002] déjà abordés dans [Ughetto - 1998a] nous ont permis de mettre au point une technique d'inférence à partir d'entrées floues dans les cas mono et bidimensionnel. Notre méthode d'inférence est basée sur une double-décomposition :

- décomposition de l'entrée en un nombre fini de coupes induisant une approximation
- décomposition selon une partition permettant de simplifier les calculs en se ramenant à une inférence locale.

Tout d'abord, en section 3.2 nous démontrerons une propriété intéressante dans l'optique d'une inférence à partir d'une entrée floue. Nous montrerons alors comment simplifier l'inférence en pratiquant une double-décomposition (section 3.3). Nous développerons ainsi notre méthode d'inférence dans le cas monodimensionnel en section 3.4 et bidimensionnel en section 3.5. Pour finir, la section 3.6 montrera certaines limites de cette méthode lorsqu'on souhaite passer à un système de dimension plus élevée.

## 3.2 Indépendance inférentielle

### 3.2.1 Définitions et résultats

Le système de règles  $\{A_j \rightarrow O_j, j = 1, \dots, n\}$  est bien conditionné s'il produit en sortie le fait  $O_i$  en présence du fait  $A_i$  en entrée  $\forall i = 1, \dots, n$  :

$$\forall i, A_i \circ \bigcap_j (A_j \rightarrow O_j) = O_i$$

En général, cette condition n'est pas satisfaite et on a en fait la propriété suivante :

$$A_i \circ \bigcap_j (A_j \rightarrow O_j) = O'_i \subset O_i$$

Selon Morsi [Morsi & Fahmy - 2002], si on substitue chaque conclusion avec la sortie inférée  $O'_i$  le système  $A_j \rightarrow O'_j$  est bien conditionné :

$$A_i \circ \bigcap_j (A_j \rightarrow O'_j) = O'_i$$

La preuve utilisée par Morsi considère les propriétés de l'implication résiduelle [Trillas & Valverde - 1981, Morsi - 2005] vérifiées par les opérateurs de Gödel et Goguen pour la relation  $\bigcap_j (A_j \rightarrow O_j) = \bigcap_j (A_j \rightarrow O'_j)$  démontrée dans [Morsi & Fahmy - 2002]. Avec un système

bien conditionné, les règles respectent la propriété d'*indépendance inférentielle*. Ceci signifie que chaque règle se comporte localement comme si elle était seule sur sa plage d'influence.

La propriété d'indépendance inférentielle a été étudiée pour des systèmes de règles conjonctives de type Mamdani [Nola et al. - 1989]. Les conclusions de cette étude montrent qu'elle n'est pas vérifiable en pratique dès que les sous-ensembles d'entrée du système se chevauchent.

### 3.2.2 Une méthode permettant d'obtenir l'indépendance inférentielle

La règle de combinaison-projection (Compositional Rule of Inference ou CRI) de Zadeh généralisée [Dubois & Prade - 1984, Martin-Clouaire - 1987] donne le résultat inféré suivant pour  $\mathcal{O}'$  :

$$\mathcal{O}'(z) = \min_{j \in N} \sup_{x \in U} A'(x) \top J(A_j(x), O_j(z)), z \in V \quad (3.1)$$

On sait que le critère  $\mathcal{O}' = O_j$  lorsque  $A' = A_j$  est satisfait lorsqu'on utilise des inférences avec une règle unique. En revanche, ce critère n'est pas vérifié en général lorsqu'on a un schéma d'inférence à règles multiples.

Morsi et Fahmy prouvent dans [Morsi & Fahmy - 2002] que les deux schémas d'inférence suivants sont équivalents pour tous les sous-ensembles normalisés  $A'$  de  $U$  :

- Schéma 1 :  $CRI_I$ 
  - Règles : si  $x$  est  $A_j$  alors  $z$  est  $O_j$ ,  $j \in N$
  - Observation :  $x$  est  $A'$
  - Conclusion :  $z$  est  $\mathcal{O}'$  (résultat de l'inférence)
- Schéma 2 :  $CRI_{II}$ 
  - Règles : si  $x$  est  $A_j$  alors  $z$  est  $O'_j$ ,  $j \in N$
  - Observation :  $x$  est  $A'$
  - Conclusion :  $z$  est  $\mathcal{O}''$  (résultat de l'inférence)

On a alors la relation suivante :  $CRI_I(A') = CRI_{II}(A')$ . Cette relation d'équivalence a été prouvée pour les méthodes d'inférence FITA et FATI et pourrait être utile à la conception d'un système bien conditionné.

Pour obtenir l'indépendance inférentielle, on cherche à avoir :  $A_i \circ \bigcap_k (A_k \rightarrow O_k) = O_i$ , cependant on remarque qu'en général, on a seulement  $A_i \circ \bigcap_k (A_k \rightarrow O_k) = O'_i$ . On aimerait savoir si, lorsque l'on remplace les différentes sorties  $O_k$  par  $O'_k$ , si l'équation suivante sera vraie :

$$A_i \circ \bigcap_k (A_k \rightarrow O'_k) = O'_i \quad (3.2)$$

Or, on sait que  $CRI_I(A') = CRI_{II}(A')$ , donc  $\bigcap_k (A_k \rightarrow O_k) = \bigcap_k (A_k \rightarrow O'_k)$ . Donc l'équation 3.2 est bien vérifiée.

Une manière d'obtenir un système bien conditionné serait donc de calculer  $\forall i$  la relation  $A_i \circ \bigcap_k (A_k \rightarrow O_k)$ . Ensuite, il ne reste plus qu'à remplacer les sorties du système par les différents  $O'_i$  obtenus. On est sûr que ce nouveau système sera bien conditionné et qu'il sera équivalent au système de départ.

Ce résultat est intéressant, mais il n'est pas raisonnablement utilisable dans le but de trouver des méthodes d'inférence plus efficaces. En effet, pour trouver le système bien conditionné, il faut effectuer une première inférence avec un système qui n'est pas bien conditionné.

### 3.2.3 Conditions suffisantes en une dimension

Afin de construire un algorithme efficace d'inférence, nous avons utilisé la propriété intéressante d'indépendance inférentielle [Ughetto - 1998a], qui nous donne des systèmes bien conditionnés.

Par la suite, on s'intéresse à la forme des partitions qui permet de garantir que le système soit bien conditionné. Deux cas sont considérés : les implications résiduées (Gödel et Goguen) et l'implication de Rescher-Gaines.

**Théorème 1** *Un système de règles implicatives floues  $\{A_i \rightarrow O_i, i = 1, \dots, n\}$  est bien conditionné lorsqu'on a :*

$$\forall i = 1, \dots, n \exists x \in \text{Noyau}(A_i), \mu_{A_j}(x) = 0, \forall j \neq i$$

**Preuve :** Soit  $\top$  une norme triangulaire sur  $[0, 1]$ , et  $\rightarrow$  l'implication résiduée correspondante  $a \rightarrow b = \sup\{c, a \top c \leq b\}$ . La composition **max** - **min** est généralisée en une composition **max** -  $\top$ .

L'agrégation des règles implicatives est conjonctive, on obtient avec l'opérateur de conjonction **min** :

$$\forall z \in W, \sup_{x \in U} \mu_{A_i}(x) \top \min_{j \in N} (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{O_j}(z)) = \mu_{O_i}(z)$$

Nous pouvons déplacer  $\mu_{A_i}(x)$  et la t-norme  $\top$  à l'intérieur du **min** grâce à la commutativité de la t-norme et du min et parce que  $\mu_{A_i}(x)$  est indépendant de  $j$ . Nous cherchons les conditions suffisantes pour que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\forall z, \sup_{x \in U} \min_{j \in N} (\mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{O_j}(z))) = \mu_{O_i}(z)$$

Cette condition suffisante est équivalente à :

$$\forall z, \exists x \in U, \min_{j \in N} (\mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{O_j}(z))) = \mu_{O_i}(z)$$

Alors, les conditions suivantes sont suffisantes pour que cette égalité soit vraie :

$$\forall z, \exists x \in U \begin{cases} \forall j \neq i, \mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{O_j}(z)) \geq \mu_{O_i}(z) & (3.3) \\ \mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{O_i}(z)) = \mu_{O_i}(z) & (3.4) \end{cases}$$

**Implications résiduées** Lorsqu'on choisit  $x \in \text{Noyau}(A_i)$ , alors  $\mu_{A_i}(x) = 1$  et l'équation (3.4) est évidemment vérifiée puisque  $1 \rightarrow \mu_{O_i}(z) = \mu_{O_i}(z)$  pour les implications résiduées (Gödel et Goguen).

Maintenant, nous devons traiter l'équation (3.3). Si nous considérons  $x$  dans le noyau de  $A_i$ , alors  $\mu_{A_i}(x) = 1$ . Une condition suffisante est alors :

$$\forall z, \exists x \in \text{Noyau}(A_i), \forall j \neq i, \mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{O_j}(z) \geq \mu_{O_i}(z) \quad (3.5)$$

On remarque que si  $\mu_{A_j}(x) > \mu_{O_j}(z)$ , l'équation (3.5) n'est en général pas vraie. Si cette inégalité stricte est vérifiée  $\forall x \in \text{Noyau}(A_i)$ , alors le système n'est pas bien-conditionné. On choisit donc  $\mu_{A_j}(x) \leq \mu_{O_j}(z)$ , ainsi l'équation (3.5) est toujours vraie.

Les systèmes flous respecteront la dernière inégalité  $\mu_{A_j}(x) \leq \mu_{O_j}(z)$  si la propriété suivante est vraie : au moins une valeur dans le noyau de l'ensemble flou ne doit pas appartenir au support des autres ensembles flous d'entrée. C'est-à-dire comme nous pouvons le voir sur la figure 3.1 :

$$\exists x \in \text{Noyau}(A_i), \mu_{A_j}(x) = 0, \forall j \neq i. \quad (3.6)$$

**CQFD**

Cette preuve s'étend à une entrée de dimension  $n$  en interprétant  $x$  comme un vecteur de coordonnées.

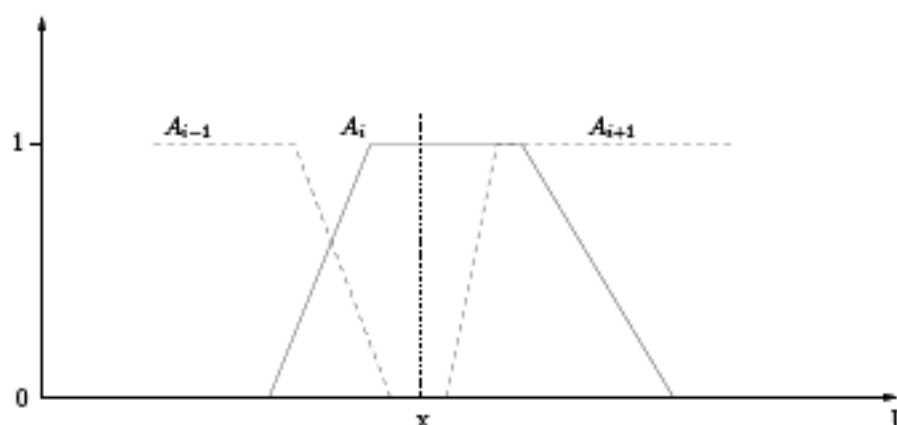


FIG. 3.1: Une partition floue permettant l'indépendance inférentielle

Avec des partitions floues fortes (cf. figure 3.4) la propriété suivante est vraie :

$$\forall j \neq i, \forall x \in \text{Noyau}(A_i), \mu_{A_j}(x) = 0$$

Le système est donc bien conditionné dans ce cas. De plus, on a une propriété plus forte intéressante pour l'inférence : avec les implications de Gödel et de Goguen il suffit qu'un seul point  $x$  de l'entrée  $A'$  soit dans le noyau de  $A_i$  (c'est-à-dire  $x \in \text{Noyau}(A_i) \cap A'$ ) pour que la sortie du système soit  $O_i$ . En effet, la condition 3.6 est vérifiée pour tout  $x$  du noyau avec des partitions fortes.

Nous allons maintenant analyser l'implication de Rescher-Gaines.

**Implication de Rescher-Gaines** Avec l'implication de Rescher-Gaines, l'équation (3.4) est vérifiée si,  $\forall z$ , on choisit un  $x$  tel que  $\mu_{A_i}(x) = \mu_{O_i}(z)$ . Si on considère des partitions fortes en entrée et en sortie en une dimension, alors, seules les règles adjacentes  $A_i \rightarrow O_i$  et  $A_{i+1} \rightarrow O_{i+1}$  sont déclenchées. Pour  $j \neq \{i, i+1\}$ , l'équation (3.3) est donc vraie. Pour  $j = i+1$ , cette équation devient :

$$\mu_{A_i}(x) \top ((\mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow (\mu_{O_{i+1}}(z))) \geq \mu_{O_i}(z)$$

Grâce aux partitions fortes, l'équation est équivalente à :

$$\mu_{A_i}(x) \top ((1 - \mu_{A_i}(x) \rightarrow (1 - \mu_{O_i}(z))) \geq \mu_{O_i}(z)$$

qui est vraie si  $\mu_{A_i}(x) = \mu_{O_i}(z)$ . La propriété de bon conditionnement est donc vraie pour l'implication de Rescher-Gaines en présence de partitions fortes.



En revanche, lorsqu'un élément  $x$  appartient au noyau de  $A_k$ , la sortie du système est le noyau de  $O_k$  puisque l'implication de Rescher-Gaines est une implication non floue.

### 3.2.4 Conditions suffisantes en deux dimensions

En deux dimensions, la démonstration est similaire à celle donnée pour le cas monodimensionnel. On arrive alors à la condition suffisante suivante :

$$\begin{cases} \exists x \in \text{Noyau}(A_k), \mu_{A_i}(x) = 0, \forall i \neq k & (3.7) \\ \exists y \in \text{Noyau}(B_l), \mu_{B_j}(y) = 0, \forall j \neq l & (3.8) \end{cases}$$

Cette condition est similaire à celle trouvée en une dimension. Elle sera notamment respectée par des partitions fortes possédant un point du noyau  $2D$  d'une règle n'appartenant à aucune autre règle. On appelle noyau  $2D$  d'une règle  $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$  la zone en deux dimensions qui appartient au noyau de  $A_i$  et au noyau de  $B_j$  (cf figure 3.2).

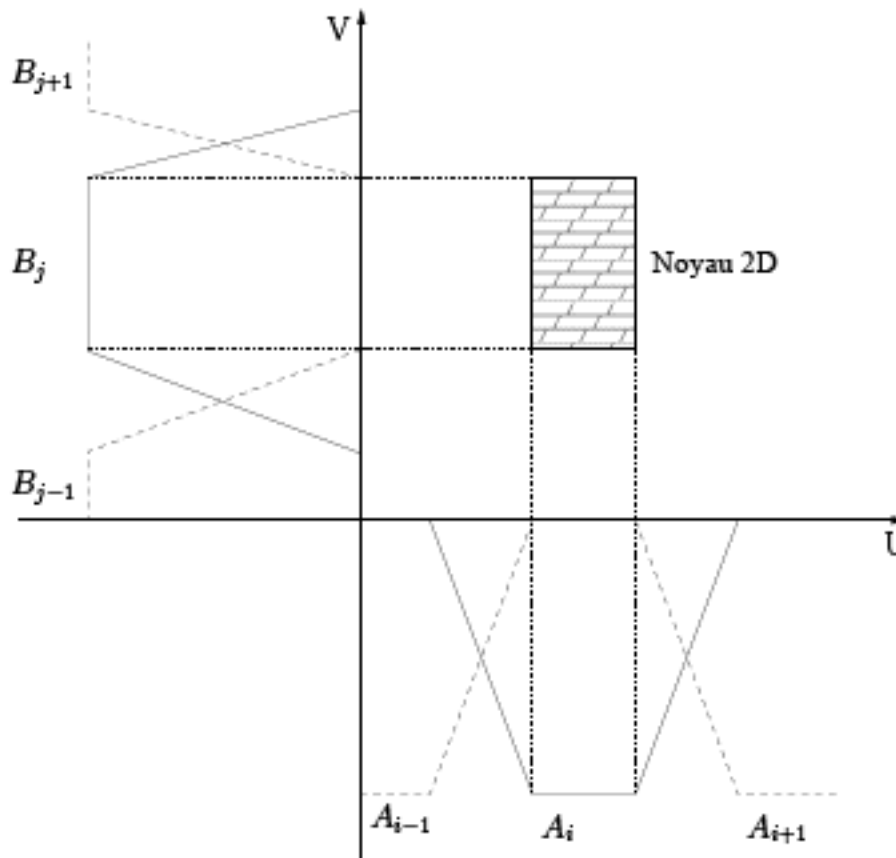


FIG. 3.2: Noyau 2D de  $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$

## 3.3 Décomposition

Nous allons maintenant utiliser des partitions floues fortes et nous servir des propriétés d'indépendance inférentielle pour simplifier l'inférence en décomposant l'entrée de manière adéquate.

On notera que ces décompositions sont possibles grâce au principe suivant pour une relation floue  $R$  :

$$(A \cup A') \circ R = (A \circ R) \cup (A' \circ R)$$

L'inférence est donc équivalente lorsqu'on raisonne à partir de l'union d'ensembles flous ou bien lorsqu'on raisonne à partir de ces ensembles séparément et qu'on fait ensuite l'union de leurs résultats.

Notre méthode est basée sur une double décomposition que nous allons détailler.

### 3.3.1 Décomposition par $\alpha$ -coupes

Une  $\alpha$ -coupe de  $A$  est un intervalle défini comme suit :  $\forall \alpha > 0$ ,

$$I_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Selon le principe de décomposition, on a la relation suivante :  $A = \bigcup_{\alpha_j \in [0,1]} \alpha_j A_{\alpha_j}$  où  $A_{\alpha_j}$  est une entrée rectangulaire de niveau 1 dont la largeur est l' $\alpha$ -coupe  $I_{\alpha_j}$ . Cette relation est une relation d'égalité si le nombre d' $\alpha$ -coupe est infini. En revanche, si le nombre d' $\alpha$ -coupe est fini, l'entrée floue approximée de  $A$  sera incluse entre les deux approximations (cf figure 3.3) :

$$\bigcup_{j=1, \dots, n} \alpha_j A_{\alpha_j} \subseteq A \subseteq \bigcup_{j=1, \dots, n} \alpha_j A_{\alpha_{j+1}} \quad (3.9)$$

La figure 3.3 montre les deux décompositions possibles : par l'extérieur ou par l'intérieur.

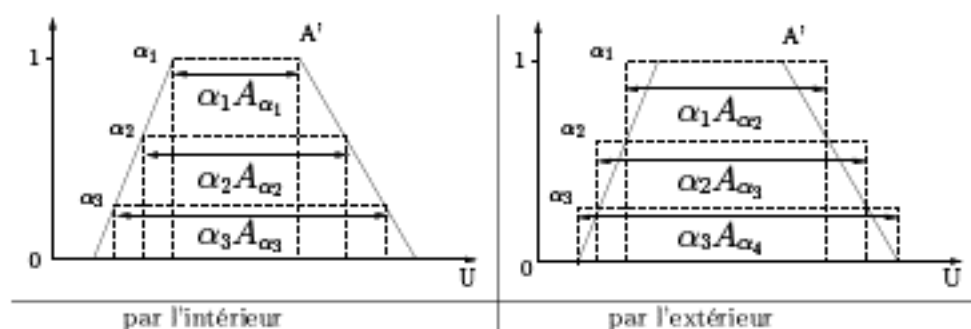


FIG. 3.3: Décomposition par  $\alpha$ -coupes

La décomposition par l'extérieur est intéressante car elle contient l'entrée approximée. La sortie approchée contiendra donc aussi la sortie réelle. La décomposition par l'intérieur est utilisée si on souhaite que le noyau de l'approximation soit identique au noyau de l'entrée floue. On peut aussi imaginer qu'il serait intéressant de conserver les approximations supérieure et inférieure pour pouvoir raisonner avec deux approximations comme avec les Rough Sets [Dubois & Prade - 1990].

Comme nous le montre l'équation (3.9), le choix du nombre d' $\alpha$ -coupes déterminera la précision de l'approximation.

### 3.3.2 Décomposition par partitionnement

Cette décomposition permet d'isoler les noyaux pour lesquels, grâce à la notion d'indépendance inférentielle, l'inférence est facile à calculer. Afin de partitionner l'espace d'entrée, on considère les supports et les noyaux séparément. On notera  $E_k$  les intervalles issus de la décomposition. Chaque  $E_k$  est dans le support d'au plus deux conditions floues (cf. figure 3.4).

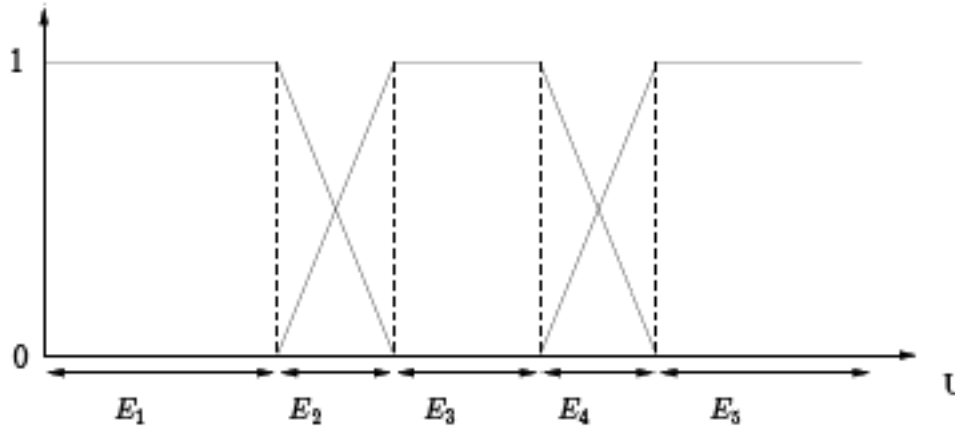


FIG. 3.4: Décomposition par partitionnement

En partant d'une entrée floue  $A'$  sur une partition d'entrée, on effectuera une décomposition par  $\alpha$ -coupes pour simplifier l'entrée floue  $A'$ . Ensuite, on limitera au support de  $A'$  la décomposition par partitionnement des sous-ensembles flous d'entrée. On a donc la relation suivante :

$$A' = \bigcup_{\alpha} \left( \alpha (\bigcup_{k=1, \dots, p} E_k \cap A_{\alpha}) \right)$$

où  $p$  est le nombre d'intervalles  $E_k$ .

Le résultat de l'inférence à partir d'une entrée floue  $A'$  est donc égal à :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k=1, \dots, p} \left( \bigcup_{\alpha} (\alpha \top (\mathcal{O}'_k)) \right)$$

où  $\mathcal{O}'_k = (E_k \cap A_{\alpha}) \circ R$  et  $\top$  la t-norme de l'implication correspondante.

Nous avons donc décomposé l'entrée floue  $A'$  en entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$  appartenant soit à des noyaux, soit à une zone de chevauchement entre deux noyaux. Par la suite, nous traiterons donc l'inférence à partir d'une entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ . Nous aborderons les cas mono et bidimensionnel.

## 3.4 Inférence mono-dimensionnelle

Grâce à la décomposition par partitionnement, nous obtenons des zones où l'influence de la partition est limitée à deux de ses éléments au plus. De plus, grâce à la décomposition par  $\alpha$ -coupes, nous travaillons à partir d'une entrée rectangulaire. Nous allons donc essayer de déterminer la sortie inférée à partir d'une telle entrée. Nous commencerons par traiter l'inférence d'une entrée appartenant au noyau d'un sous-ensemble de la partition, car elle est facilitée par l'indépendance inférentielle. Ensuite, nous nous placerons dans le cas le plus complexe où l'entrée subit l'influence de deux éléments de la partition d'entrée car elle se situe entre les deux noyaux.

### 3.4.1 Entrée dans le noyau d'un sous-ensemble de la partition

Lorsque l'entrée rectangulaire se situe dans le noyau d'un élément de la partition, le résultat est alors évident. En effet, grâce à l'indépendance inférentielle, si  $E_k \cap A_\alpha$  est non vide et dans le noyau de  $A_i$ , on obtient pour un niveau  $\alpha = 1$  soit  $O_i$  en sortie (Gödel, Goguen) soit le noyau de  $O_i$  (Rescher-Gaines) (cf. figure 3.5)

En revanche, lorsque  $\alpha$  est inférieur à 1, la sortie de ce sous-ensemble est tronquée au niveau  $\alpha$  comme le montre la figure 3.6.

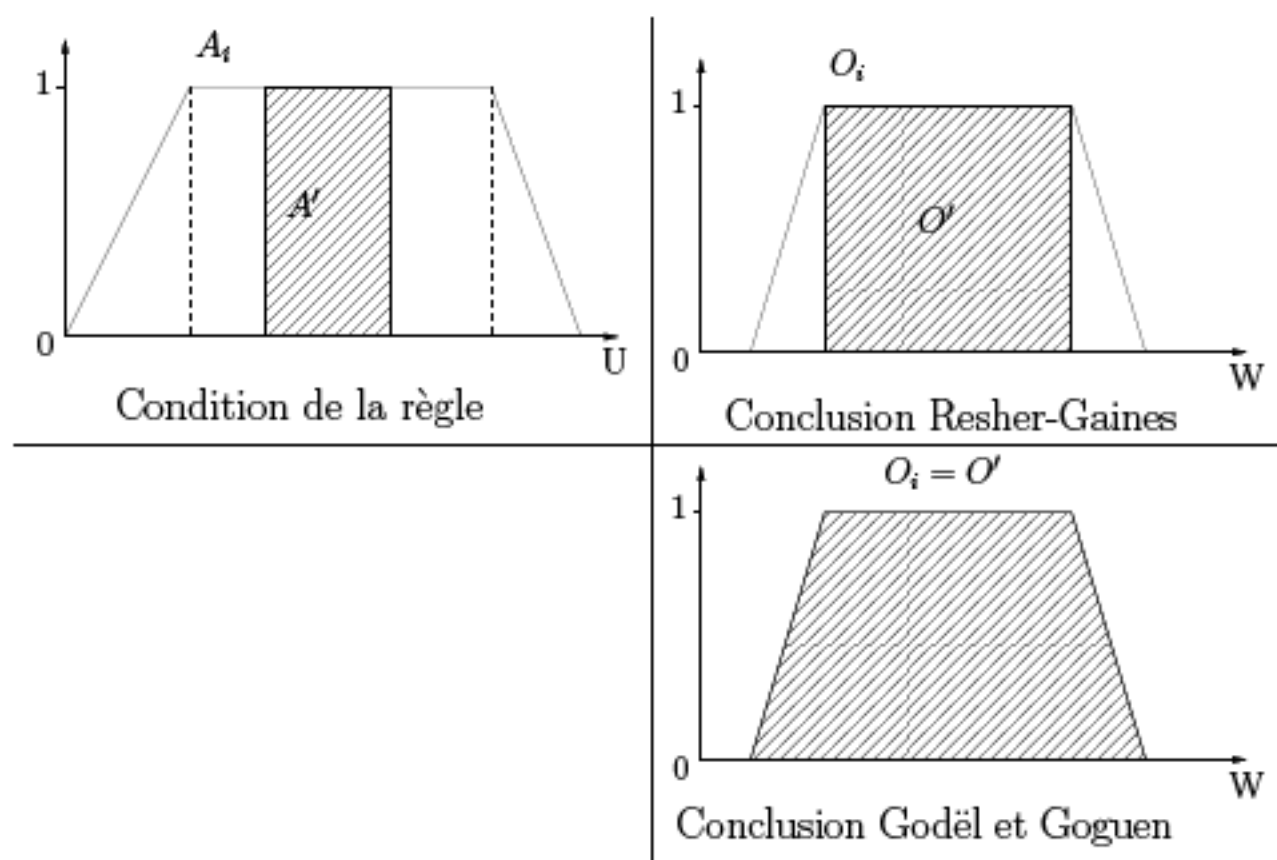


FIG. 3.5: Inférence à partir d'une entrée de niveau 1 pour la zone correspondant au noyau

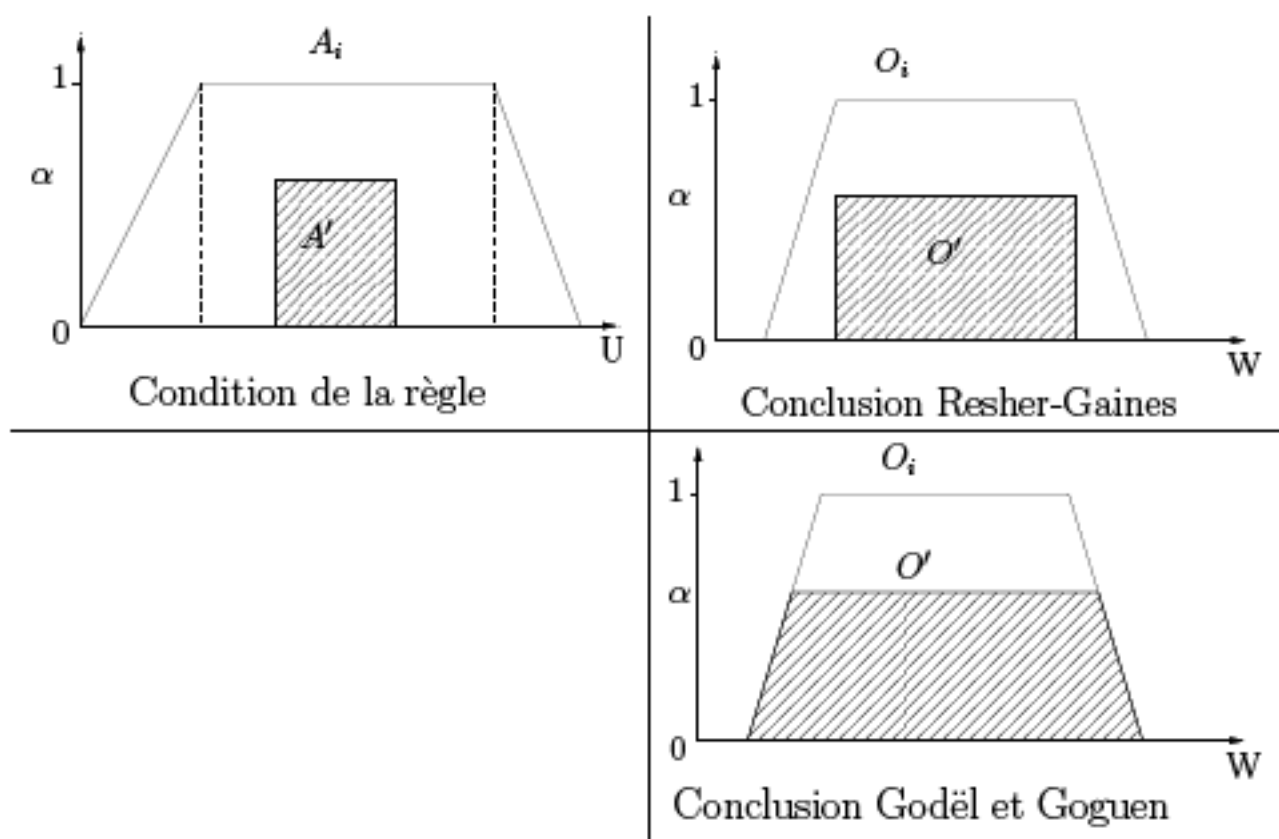


FIG. 3.6: Inférence à partir d'une entrée de niveau  $\alpha$  pour la zone correspondant au noyau

### 3.4.2 Expression analytique pour une entrée floue

Dans le cas monodimensionnel, il est possible de déterminer l'expression analytique du résultat de l'inférence. Pour ce faire, nous considérerons une entrée floue  $A$  dont le support se situe dans l'intervalle entre les noyaux de deux conditions de règles adjacentes (qui est le cas le plus compliqué à traiter). La sortie est alors donnée par :

$$\mu_O(z) = \sup_{x \in U} \mu_A(x) \top \min \left( \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{O_i}(z), \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{O_{i+1}}(z) \right)$$

Puisque nous utilisons des partitions floues fortes, notons  $\mu = \mu_{A_i}$ , et  $\nu = \mu_{O_i}$  pour simplifier :

$$\mu_O(z) = \sup_{x \in U} \mu_A(x) \top \min \left( \mu(x) \rightarrow \nu(z), (1 - \mu(x)) \rightarrow (1 - \nu(z)) \right) \quad (3.10)$$

Nous étudierons les différentes implications. La figure 3.7 illustre certaines des notations. On note par la suite  $a_i$  le noyau de  $A_i$ ,  $a$  le noyau de  $A$ ,  $a_{i+1}$  le noyau de  $A_{i+1}$ ,  $o_i$  le noyau de  $O_i$ ,  $o$  le noyau de la sortie inférée  $O$ ,  $o_{i+1}$  le noyau de  $O_{i+1}$ . Les bornes gauche et droite du support de l'entrée floue  $A$  sont notées  $a_l$  et  $a_r$ . On note  $\epsilon = \min \left( \mu(x) \rightarrow \nu(z), (1 - \mu(x)) \rightarrow (1 - \nu(z)) \right)$ .

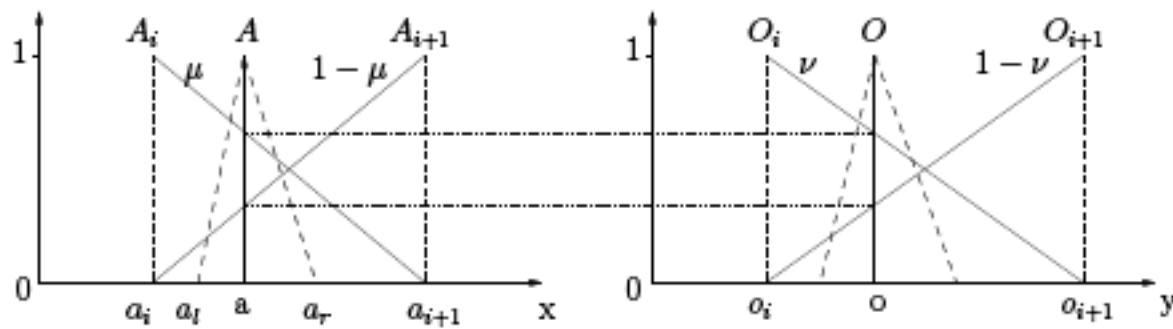


FIG. 3.7: Notation (Rescher-Gaines)

### 3.4.2.1 Implication de Rescher-Gaines

Considérons le cas de l'implication de Rescher-Gaines. Il est clair que  $e > 0$  si et seulement si  $\mu(x) = \nu(z)$ , où on a  $e = 1$ . Puisque  $x$  est égal à  $\mu^{-1}(\nu(z))$ , le résultat de l'inférence  $OR_G$  est tel que :

$$\mu_{OR_G}(z) = \mu_A(\mu^{-1}(\nu(z)))$$

En fait, si la partition d'entrée est la même que la partition de sortie, la sortie inférée sera identique à l'entrée floue.

### 3.4.2.2 Implication de Gödel

En ce qui concerne l'implication de Gödel,  $\top = \min$ , on a alors 3 cas différents pour le processus d'inférence :

- $\mu(x) = \nu(z)$  alors  $e = 1$
- $\mu(x) > \nu(z)$  alors  $e = \nu(z)$
- $\mu(x) < \nu(z)$  alors  $e = 1 - \nu(z)$

A partir de l'équation 3.10, on peut déduire :

$$\begin{aligned} \mu_{Gödel}(z) &= \max \left( \mu_A(\mu^{-1}(\nu(z))), \sup_{\mu(x) < \nu(z)} \min(\mu_A(x), \right. \\ &\quad \left. 1 - \nu(z)), \sup_{\mu(x) > \nu(z)} \min(\mu_A(x), \nu(z)) \right) \\ &= \max \left( \mu_A(\mu^{-1}(\nu(z))), \min(1 - \nu(z), \right. \\ &\quad \left. \sup_{\mu(x) < \nu(z)} \mu_A(x)), \min(\nu(z), \sup_{\mu(x) > \nu(z)} \mu_A(x)) \right) \end{aligned}$$

On remarque que  $\{x | \mu(x) > \nu(z)\}$  est de la forme  $[a_i, \mu^{-1}(\nu(z))]$ . Par conséquent, le degré de possibilité  $\sup_{\mu(x) > \nu(z)} \mu_A(x)$  est égal à 1 si  $\mu^{-1}(\nu(z)) > a$  (le noyau de  $A$ ) et  $\mu_A(\mu^{-1}(\nu(z)))$  sinon. En fait, il correspond au degré d'appartenance de  $\mu^{-1}(\nu(z))$  à l'intervalle flou  $[a_i, A]$ .

De la même manière,  $\sup_{\mu(x) < \nu(z)} \mu_A(x)$  est égal à 1 si  $\mu^{-1}(\nu(z)) < a$ , et  $\mu_A(\mu^{-1}(\nu(z)))$  sinon. Cela équivaut au degré d'appartenance de  $\mu^{-1}(\nu(z))$  à l'intervalle flou  $[A, a_{i+1}]$  Dubois & Prade [1988]. On obtient alors l'équation suivante :

$$\mu_{O_{\text{God}}}(z) = \max \left( \mu_A(\mu^{-1}(\nu(z))), \min \left( 1 - \nu(z), \mu_{[A, a_{i+1}]}(\mu^{-1}(\nu(z))) \right), \min \left( \nu(z), \mu_{[a_i, A]}(\mu^{-1}(\nu(z))) \right) \right)$$

Le résultat de l'inférence  $O_{\text{God}}$  a le même noyau  $o = \nu^{-1}(\mu(a))$  que  $O_{\text{RG}}$  et est tel que :

$$\mu_{O_{\text{God}}}(z) = \begin{cases} \max(\mu_{O_{\text{RG}}}(z), 1 - \nu(z)) & \text{si } z < o \\ \max(\mu_{O_{\text{RG}}}(z), \nu(z)) & \text{si } z > o \end{cases}$$

### 3.4.2.3 Implication de Goguen

Pour l'implication de Goguen,  $e = \min \left( \min \left( 1, \frac{\nu(z)}{\mu(x)} \right), \min \left( 1, \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)} \right) \right)$  et  $\top = *$ . Nous savons que  $\mu_A(x) = 0, \forall x \notin ]a_i, a_r[$ ; nous ne considérerons donc seulement par la suite  $]a_i, a_r[$ . Pour un  $x_0$  donné, nous notons  $x_0 = \mu^{-1}(\nu(z_0))$ . Nous avons alors 3 cas :

- $\mu(x) = \nu(z) \Leftrightarrow x = x_0$  alors  $e = 1$
- $\mu(x) > \nu(z) \Leftrightarrow x \in ]a_i, x_0[$  alors  $e = \min \left( \frac{\nu(z)}{\mu(x)}, 1 \right) = \frac{\nu(z)}{\mu(x)}$
- $\mu(x) < \nu(z) \Leftrightarrow x \in ]x_0, a_r[$  alors  $e = \min \left( 1, \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)} \right) = \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)}$

Le résultat pour l'implication de Goguen s'écrit :

$$\mu_{O_{\text{Gog}}}(z) = \max \left( \mu_A(x_0), \sup_{x \in ]a_i, x_0[} \mu_A(x) * \frac{\nu(z)}{\mu(x)}, \sup_{x \in ]x_0, a_r[} \mu_A(x) * \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)} \right)$$

On a alors deux cas :

- $z < o$  :

Tout d'abord, on étudie  $\sup_{x \in ]a_i, x_0[} \mu_A(x) * \frac{\nu(z)}{\mu(x)}$ . Sur  $]a_i, x_0[$ ,  $\mu_A(x)$  augmente et  $\mu(x)$  diminue. Pour  $x = x_0, \mu(x) = \nu(z)$  donc  $\sup_{x \in ]a_i, x_0[} \mu_A(x) * \frac{\nu(z)}{\mu(x)} = \mu_A(x_0)$ .

Nous étudions ensuite l'intervalle  $]x_0, a_r[$ . Cette étude est plus complexe et nous donne le résultat  $\sup_{x \in ]x_0, a_r[} \mu_A(x) * \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)} = \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(a)}$ . Une démonstration géométrique prouve que  $\forall z < o, \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)}$  est toujours supérieure à  $\mu_A(x_0)$ .

Le résultat final est alors égal à :

$$\mu_{O_{\text{Gog}}}(z) = \max \left( \mu_A(x_0), \mu_A(x_0), \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(a)} \right) = \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(a)}$$

- $z > o$  :

L'étude de  $\sup_{x \in ]a_i, x_0[} \mu_A(x) * \frac{\nu(z)}{\mu(x)}$  donne  $\frac{\nu(z)}{\mu(a)}$ . Dans l'intervalle  $]x_0, a_r[$ ,  $\sup_{x \in ]x_0, a_r[} \mu_A(x) * \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(x)} = \mu_A(x_0)$ . Comme précédemment, on montre que  $\frac{\nu(z)}{\mu(x)} > \mu_A(x_0)$ .

Par conséquent, le résultat de l'inférence pour  $z > o$  est :

$$\mu_{O_{\text{Gog}}}(z) = \max \left( \mu_A(x_0), \frac{\nu(z)}{\mu(a)}, \mu_A(x_0) \right) = \frac{\nu(z)}{\mu(a)}$$

Le résultat  $O_{Gog}$  de l'inférence a le même noyau  $o = \nu^{-1}(\mu(a))$  que  $O_{RG}$  et est tel que :

$$\mu_{O_{Gog}}(z) = \begin{cases} \frac{1-\nu(z)}{1-\mu(a)} & \text{si } z < o \\ \frac{\nu(z)}{\mu(a)} & \text{si } z > o \end{cases}$$

Nous allons maintenant montrer comment inférer à partir d'une entrée rectangulaire.

### 3.4.3 Entrée rectangulaire de niveau 1 entre deux noyaux

Nous noterons l'intervalle de l'entrée rectangulaire concernée  $[\underline{i}_t, \underline{i}_r]$ . La fonction d'appartenance d'une entrée rectangulaire de niveau 1 est donc définie par :

$$\mu_{[\underline{i}_t, \underline{i}_r]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{i}_t \leq x \leq \underline{i}_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'entrée rectangulaire est située dans une zone d'intersection de deux ensembles flous, donc deux règles sont activées.

La sortie correspondante est telle que :

$$\mu_{O'}(z) = \sup_{a_t \leq x \leq a_{t+1}} \min_{i=1, \dots, n} \left( \mu_{[\underline{i}_t, \underline{i}_r]}(x) \top \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{O_i}(z) \right)$$

Donc

$$\mu_{O'}(z) = \sup_{a_t \leq x \leq a_{t+1}} \min \left( \mu_{[\underline{i}_t, \underline{i}_r]}(x) \top \mu_{A_t}(x) \rightarrow \mu_{O_t}(z), \mu_{[\underline{i}_t, \underline{i}_r]}(x) \top \mu_{A_{t+1}}(x) \rightarrow \mu_{O_{t+1}}(z) \right) \quad (3.11)$$

Cependant, puisque l'entrée est de type rectangulaire, on a deux cas :

- soit  $\mu_{[\underline{i}_t, \underline{i}_r]}(x) = 0$ , alors on en déduit que  $\mu_{O'}(z) = 0$  car  $0$  est un élément absorbant pour la t-norme :  $0 \top x = 0$ .
- soit  $\mu_{[\underline{i}_t, \underline{i}_r]}(x) = 1$ , la formule (3.11) se simplifie puisque  $1$  est l'élément neutre de la t-norme et qu'on a donc  $1 \top x = x$ . L'équation devient alors :

$$\mu_{O'}(z) = \sup_{\underline{i}_t \leq x \leq \underline{i}_r} \min \left( \mu_{A_t}(x) \rightarrow \mu_{O_t}(z), \mu_{A_{t+1}}(x) \rightarrow \mu_{O_{t+1}}(z) \right) \quad (3.12)$$

Ensuite le comportement de la sortie  $\mu_{O'}(z)$  dépend de l'implication choisie. Nous étudions les implications de Rescher-Gaines, Gödel et Goguen. La figure 3.8 rappelle le résultat de l'inférence à partir d'une entrée précise en présence de deux règles implicatives graduelles.



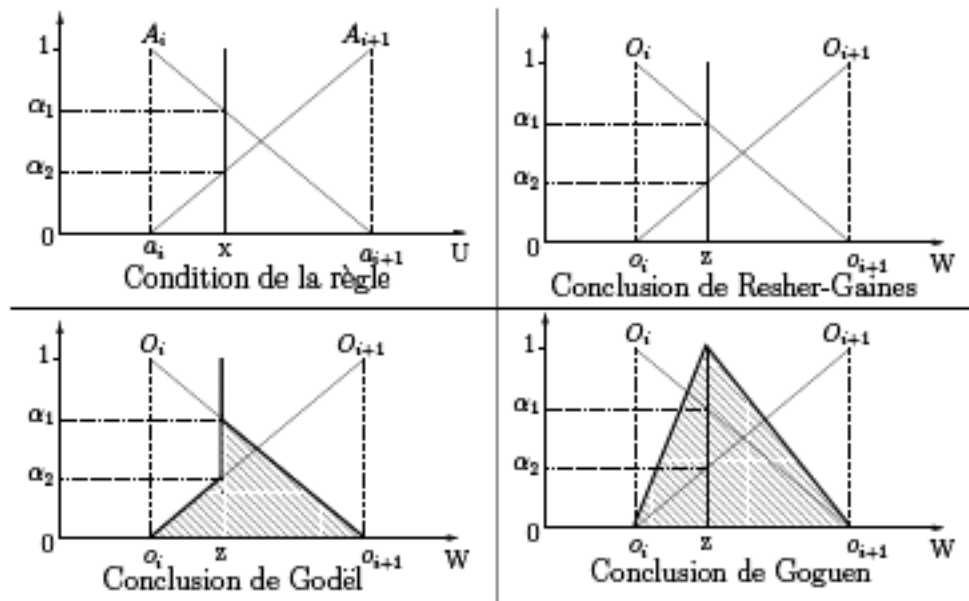


FIG. 3.8: Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée précise

Pour Resher-Gaines, on voit que lorsque l'entrée  $x$  se déplace entre  $i_l$  et  $i_r$ , la sortie  $z$  est telle que :  $\mu_{O_i}(z) = \mu_{A_i}(x)$ . Donc lorsque l'entrée est un intervalle  $[i_l, i_r]$ , alors la sortie est un intervalle  $[z_l, z_r]$ . La figure 3.9 nous montre l'inférence avec un intervalle en entrée et l'implication de Resher-Gaines. De la même manière, il est possible d'inférer à partir d'une entrée rectangulaire en utilisant l'implication de Gödel ou de Goguen (cf figure 3.9). Puisque la sortie est continue entre les bornes de l'intervalle, il suffit d'inférer les bornes de l'intervalle pour connaître les bornes de l'intervalle de sortie.

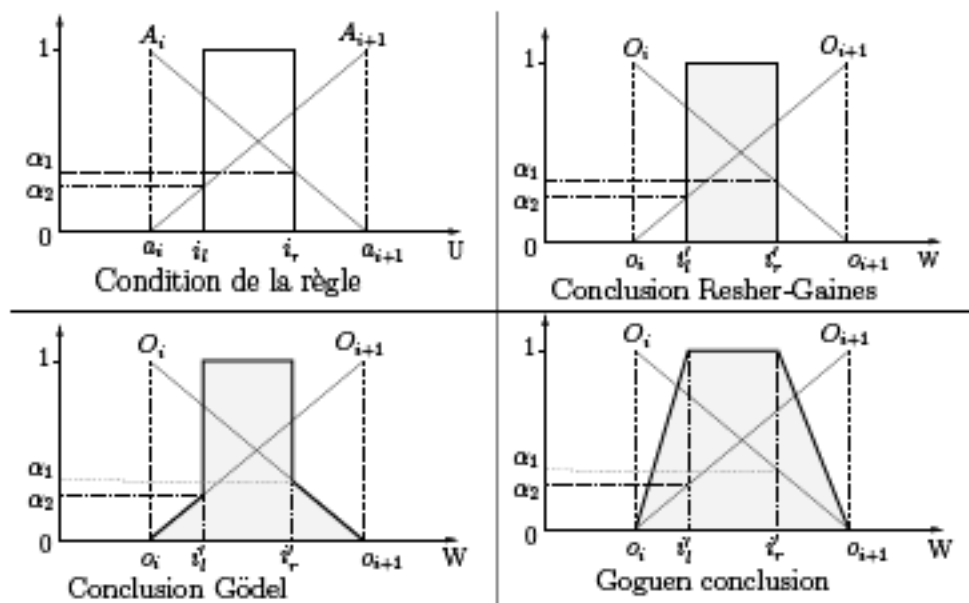


FIG. 3.9: Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée rectangulaire de niveau 1

Nous venons de montrer qu'il est assez facile d'inférer avec une entrée rectangulaire de niveau  $\mathbf{1}$ . Mais qu'en est-il pour une entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ ?

### 3.4.4 Entrée rectangulaire de niveau $\alpha$ entre deux noyaux

On part de l'équation (3.11). On a alors deux cas à traiter, puisque  $\mu_{[t_r, t_r]}(\mathbf{x})$  est la fonction d'appartenance d'une entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ , on a soit :

- $\mu_{[t_r, t_r]}(\mathbf{x}) = 0$  alors  $\mu_{O'}(z) = 0$
- $\mu_{[t_r, t_r]}(\mathbf{x}) = \alpha$  alors on obtient l'équation suivante :

$$\mu_{O'}(z) = \sup_{t_l \leq x \leq t_r} \min \left( \alpha \top \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{O_i}(z), \alpha \top \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{O_{i+1}}(z) \right)$$

Puisque  $\alpha$  et  $\top$  sont indépendants de  $\mathbf{x}$  et de  $i$ , le système est équivalent à :

$$\mu_{O'}(z) = \alpha \top \sup_{t_l \leq x \leq t_r} \min \left( \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{O_i}(z), \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{O_{i+1}}(z) \right) \quad (3.13)$$

Si on note  $\mu_{O'_i}(z)$  le résultat de l'inférence avec une entrée rectangulaire de niveau  $\mathbf{1}$ , on a alors l'équation suivante :  $\mu_{O'}(z) = \alpha \top \mu_{O'_i}(z)$ .

On remarque que, par rapport à l'entrée rectangulaire de niveau  $\mathbf{1}$ ,  $\alpha$  va en fait avoir un effet limitant sur la hauteur de la sortie. Aucun élément de la sortie ne pourra être supérieur au niveau  $\alpha$  puisque le minimum est la borne supérieure des t-normes. Ensuite, selon l'implication choisie, la t-norme ne sera pas la même. Pour Rescher-Gaines et Gödel, la t-norme est le minimum. La sortie est donc tronquée au niveau  $\alpha$ , mais sa forme est inchangée. En ce qui concerne Goguen, la t-norme est le produit. La sortie est donc elle aussi tronquée au niveau  $\alpha$  mais les pentes externes au noyau sont modifiées (Cf figure 3.10).

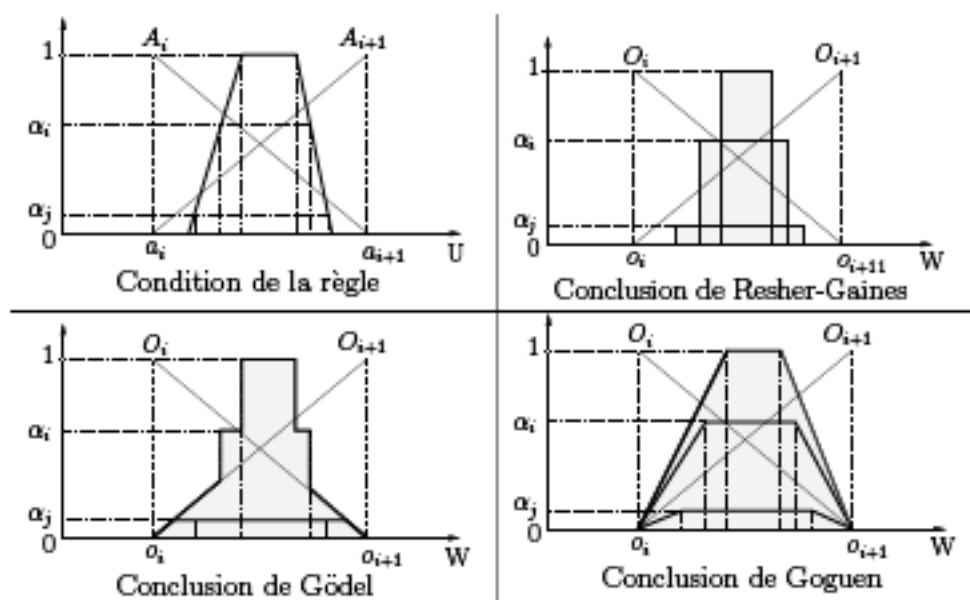


FIG. 3.10: Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée floue décomposée sur 3 niveaux  $\alpha_j < \alpha_i < 1$

Si on résume le processus d'inférence en une dimension, il est nécessaire de :

- Décomposer l'entrée floue par  $\alpha$ -coupes afin de considérer chaque entrée floue comme un ensemble d'entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ .
- Décomposer chaque entrée rectangulaire selon la partition d'entrée afin de séparer les noyaux des zones intermédiaires.

Pour chaque entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ , il faudra :

- Inférer à partir de chaque borne de l'entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ .
- Faire l'enveloppe convexe de toutes les sorties inférées ainsi qui correspondra à la sortie inférée pour cette entrée rectangulaire.
- Faire l'union des sorties calculées pour toutes les entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ . Cette union est le résultat final.

### 3.4.5 Analyse de la complexité de l'algorithme

Le nombre d'alpha-coupes est fini, on le notera  $n_\alpha$ .

- Les décompositions de l'entrée floue dépendent du nombre d' $\alpha$ -coupes. On est donc en  $O(n)$ .
- La décomposition de chaque entrée rectangulaire dépend du nombre d'entrées rectangulaires (qui est égal au nombre d' $\alpha$ -coupes) et du nombre d'intervalles d'entrée intersectés. On est donc en  $O(n)$ .
- L'inférence à partir de chaque borne de l'entrée rectangulaire nécessite 2 calculs par  $\alpha$ -coupes. On est donc en  $O(n)$ .
- L'enveloppe convexe peut être déterminée en analysant chacune des  $2n$  bornes inférées. On est donc en  $O(n)$ .
- Il reste à faire l'union des  $n_\alpha$  sorties calculées. On est donc en  $O(n)$ .

La complexité de cet algorithme est donc en  $O(n)$  puisqu'elle combine 5 opérations en  $O(n)$ . Cet algorithme a donc une complexité linéaire fonction du nombre d' $\alpha$ -coupes.

## 3.5 Inférence 2D

Dans cette section, nous étendons notre méthode d'inférence à partir d'entrées floues au cas bidimensionnel avec Rescher-Gaines. Les règles sont de la forme  $A_k \wedge B_l \rightarrow O_{k,l}$ . Une double décomposition est faite comme expliqué précédemment pour chaque entrée floue (décomposition par partitionnement, décomposition par  $\alpha$ -coupes avec  $\alpha$  identique dans chaque dimension).

Par conséquent, la sortie inférée est le résultat d'une double union :

$$O' = \bigcup_{k=1, \dots, n_k, l=1, \dots, n_l} \left( \bigcup_{\alpha} (\alpha \top O'_{k,l}) \right) \quad (3.14)$$

où  $\top$  est la t-norme de l'implication et  $\bigcup$  est le maximum. Dans (3.14),  $O'_{k,l}$  est le résultat de l'inférence des entrées rectangulaires  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  décomposés respectivement sur les intervalles  $E_k$  et  $F_l$  des 2 partitions d'entrée.

Considérons l'inférence à partir d'entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$  dans chaque dimension. La figure 3.11 nous montre une telle situation.

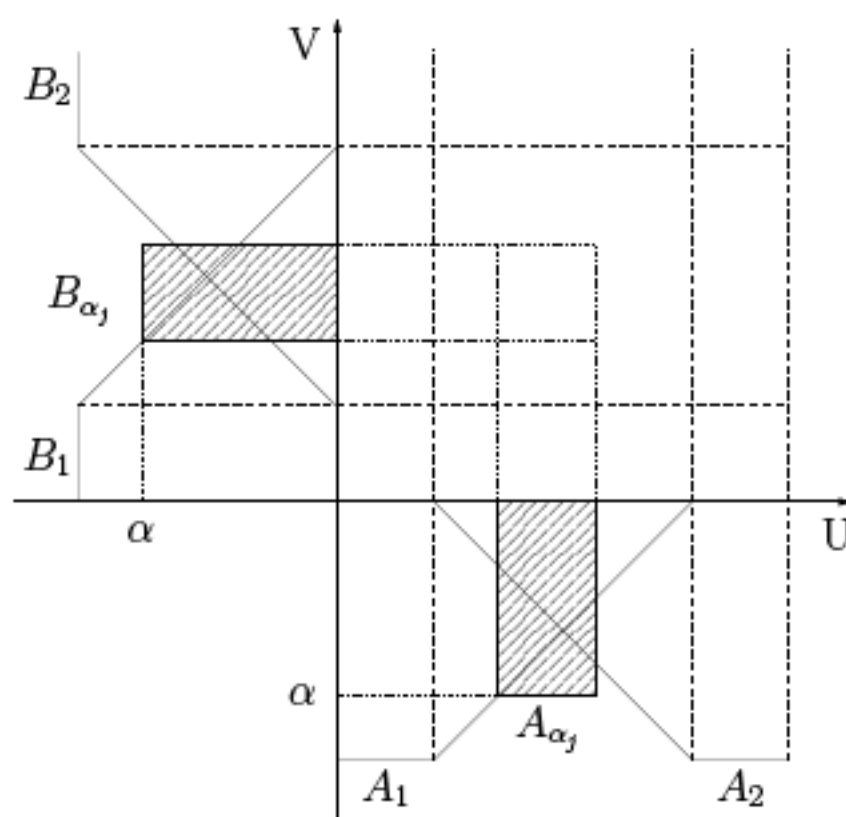


FIG. 3.11: Zones définies par les partitions d'entrées

Nous nous proposons d'inférer à partir de chaque borne des entrées rectangulaires afin d'obtenir les bornes de la sortie. Nous allons examiner les différentes étapes de la procédure. Tout d'abord, il faudra tenir compte de la cohérence du système de règles, nous commencerons donc par analyser la forme que doivent avoir les partitions de sortie. Enfin, nous vérifierons si l'inférence à partir des bornes de chaque intervalle est suffisante. Pour cela, nous devons vérifier la continuité de la sortie et sa monotonie.

### 3.5.1 Partitions de sortie d'un système à deux dimensions

L'objectif est de trouver des sorties permettant de maintenir la cohérence du système de règles. Pour ce faire, il faut qu'il existe une intersection commune aux sous-ensembles flous de sortie du système de règles susceptibles d'être déclenchées simultanément. Avec des partitions floues fortes en entrée, une entrée précise peut déclencher les quatre règles suivantes :

- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{1,1}$
- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{1,2}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{2,1}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{2,2}$

Une condition nécessaire et donc d'avoir  $O_{1,1} \cap O_{1,2} \cap O_{2,1} \cap O_{2,2} \neq \emptyset$ . On peut remarquer qu'en choisissant en sortie des partitions floues fortes, le système est obligatoirement incohérent. Pour créer ces partitions de sorties, nous avons choisi d'appliquer une fonction linéaire aux partitions d'entrées. Nous avons décidé de nous intéresser aux zones où les sous-ensembles flous d'entrée se croisent car c'est dans ces zones que peuvent apparaître des incohérences. Nous considérons

donc les partitions d'entrée suivantes :  $A_1, A_2$  sur  $U$  et  $B_1, B_2$  sur  $V$ .

Afin de simplifier les calculs, on choisit des sous-ensembles flous normalisés : on a donc pour  $A_1$  et  $B_1$  des triangles dont les coordonnées sont  $(0,0), (0,1)$  et  $(1,0)$  et pour  $A_2$  et  $B_2$  les triangles  $(0,0), (1,1)$  et  $(1,0)$ . Puisque les ordonnées sont  $(0,1,0)$  dans les deux cas, on notera pour simplifier les sommets par leurs abscisses  $Absci(A_1) = Absci(B_1) = (0,0,1)$  et  $Absci(A_2) = Absci(B_2) = (0,1,1)$ . Les partitions  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  sont illustrées sur la figure 3.12.

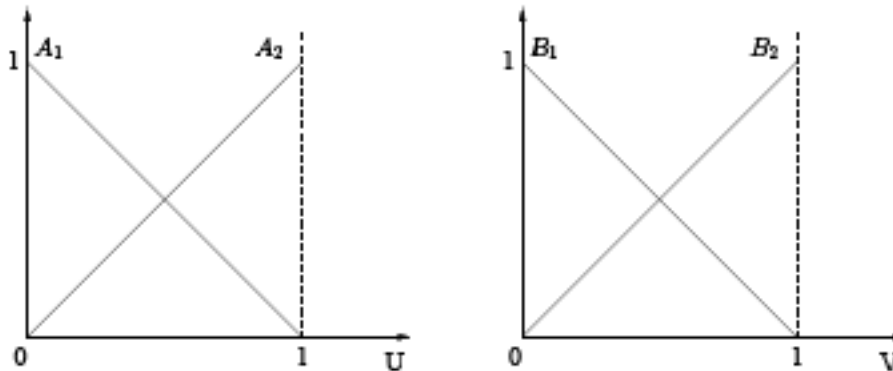


FIG. 3.12: Partitions d'entrées du système

Pour obtenir des partitions de sorties à partir de ces partitions d'entrées, on applique la fonction linéaire suivante :  $f(x, y) = a + bx + cy$  avec  $a, b$  et  $c \geq 0$ . Nous avons choisi d'utiliser une fonction linéaire car c'est le choix le plus simple permettant de garantir la gradualité et la monotonie du système de règles.

Les sommets des sorties sont calculés à partir des sommets des entrées. Ce calcul doit se faire selon les 4 règles possibles sur les 4 partitions d'entrées :

$$- A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$$

$$\begin{aligned} O_{1,1} = f(Absci(A_1), Absci(B_1)) &= a + bAbsci(A_1) + cAbsci(B_1) \\ &= a(1, 1, 1) + b(0, 0, 1) + c(0, 0, 1) \\ O_{1,1} &= (a, a, a + b + c) \end{aligned}$$

$$- A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$$

$$\begin{aligned} O_{1,2} = f(Absci(A_1), Absci(B_2)) &= a + bAbsci(A_1) + cAbsci(B_2) \\ &= a(1, 1, 1) + b(0, 0, 1) + c(0, 1, 1) \\ O_{1,2} &= (a, a + c, a + b + c) \end{aligned}$$

$$- A_2 \wedge B_1 \rightarrow O_{2,1}$$

$$\begin{aligned} O_{2,1} = f(Absci(A_2), Absci(B_1)) &= a + bAbsci(A_2) + cAbsci(B_1) \\ &= a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) \\ O_{2,1} &= (a, a + b, a + b + c) \end{aligned}$$

$$- A_2 \wedge B_2 \rightarrow O_{2,2}$$

$$\begin{aligned} O_{2,2} = f(Absci(A_2), Absci(B_2)) &= a + bAbsci(A_2) + cAbsci(B_2) \\ &= a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 1, 1) \\ O_{2,2} &= (a, a + b + c, a + b + c) \end{aligned}$$

Les ensembles  $O_{1,1}$ ,  $O_{1,2}$ ,  $O_{2,1}$  et  $O_{2,2}$  sont donc les suivants lorsqu'on choisit  $c$  plus petit que  $b$  :

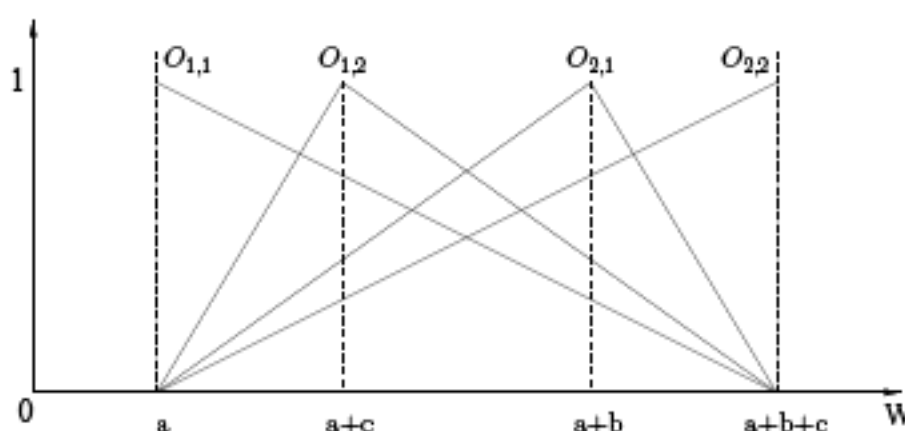


FIG. 3.13: Partition de sortie du système en utilisant la fonction linéaire  $a + bx + cy$

On remarque que  $O_{1,1}$  et  $O_{2,2}$  forment une partition forte. En revanche, la partition dans son ensemble ( $O_{1,1}$ ,  $O_{1,2}$ ,  $O_{2,1}$  et  $O_{2,2}$ ) n'est plus une partition forte. Par construction, les sommets des sous-ensembles sont symétriques par rapport à l'axe  $z = a + \frac{b+c}{2}$ . Il est aussi intéressant de noter que si  $b = c$  alors  $O_{1,2}$  et  $O_{2,1}$  sont confondus. La sortie sera alors seulement composée de trois sous-ensembles flous. Avec ces ensembles  $O_{1,2}$  et  $O_{2,1}$  distincts, la sortie inférée pour une entrée dans les noyaux de  $A_1$  et de  $B_2$  sera différente de la sortie inférée pour une entrée dans les noyaux de  $A_2$  et de  $B_1$ . Dans ces conditions, la sortie  $O_{1,2}$  sera plus proche de  $O_{1,1}$  que de  $O_{2,2}$ . De la même manière, la sortie  $O_{2,1}$  de  $O_{2,2}$  que de  $O_{1,1}$ . Si le système à modéliser est symétrique, on utilisera alors des fonctions symétriques pour créer les partitions.

Cette méthode nous montre comment créer une partition de sortie à partir de fonctions linéaires. Ainsi, le système de règles créé est cohérent. Cependant, créer des partitions à partir de fonctions linéaires est assez contraignant. Nous pouvons conserver les propriétés intéressantes de cette partition, tout en relâchant la construction à partir de fonctions linéaires :

- $O_{1,1}$  et  $O_{2,2}$  forment une partition forte.
- $Support(O_{1,2}) = Support(O_{2,1}) = Support(O_{1,1}) \cap Support(O_{2,2})$ .

La figure 3.14 nous montre une partition correspondant à cette représentation. Par la suite, nous noterons  $\sigma^-(\alpha)$  la plus petite des deux abscisses de  $W$  (univers de sortie) dont le degré d'appartenance à  $O$  est  $\alpha$ . La plus grande est notée  $\sigma^+(\alpha)$ . La figure 3.14 illustre cette notation sur le sous-ensemble  $O_{1,2}$ .

Cette partition est cohérente car les sorties issues de ces règles seront normalisées. De plus, elle reste interprétable car tous les ensembles sont distinguables.  $O_{1,2}$  et  $O_{2,1}$  pourront être choisis identiques ou non selon le problème à modéliser.

### 3.5.2 Inférence 2D pour une entrée précise

Avec les partitions fortes, il y a trois situations différentes selon la position de l'entrée précise (cf figure 3.15).

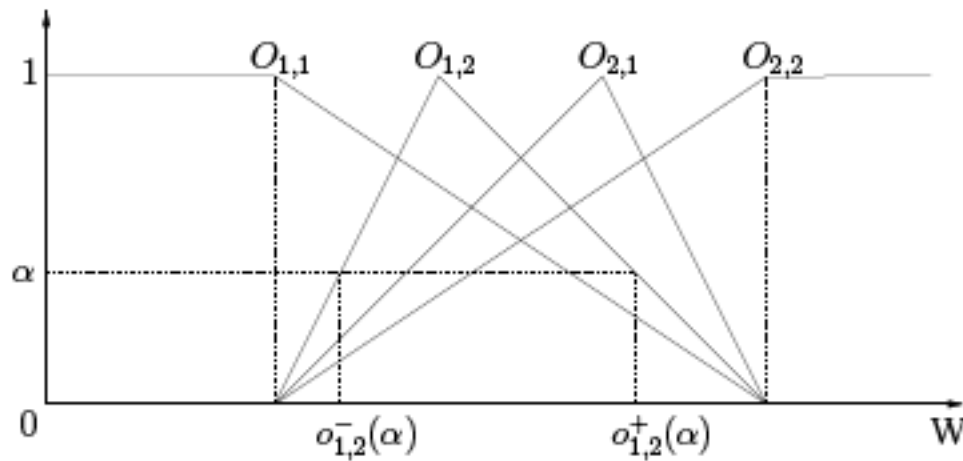


FIG. 3.14: Partition de sortie respectant la cohérence et l'interprétabilité du système

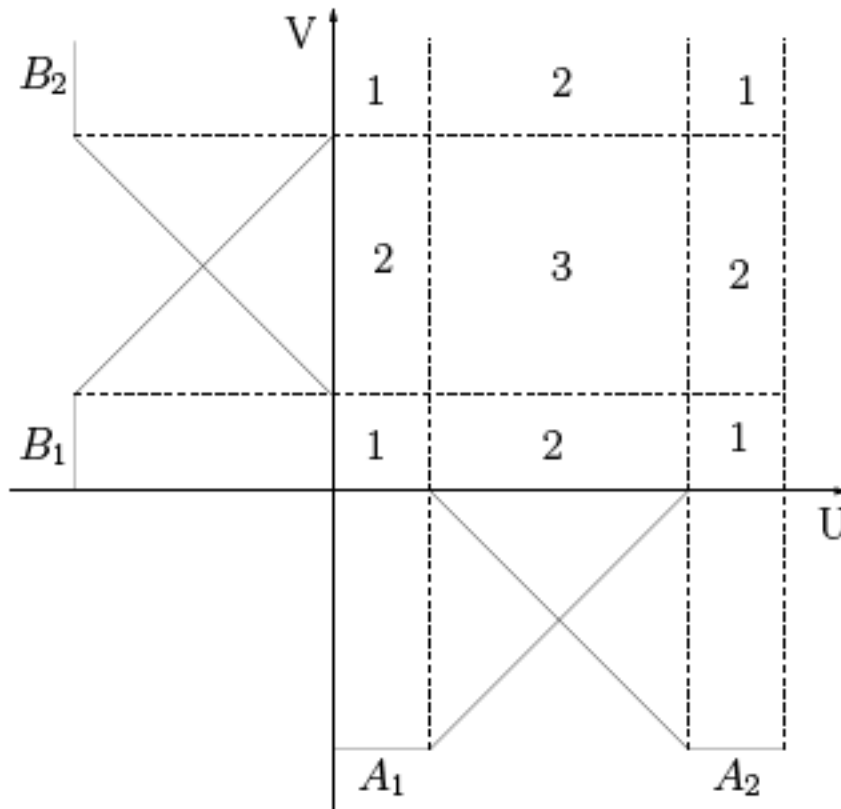


FIG. 3.15: Zones définies par les partitions d'entrées

- Zone 1 : Les deux entrées appartiennent aux noyaux des ensembles flous  $A_k$  dans  $U$  et  $B_l$  dans  $V$ . Dans cette situation, il est possible d'inférer directement la sortie grâce à l'indépendance inférentielle des règles. Cette sortie est égale à  $Noyau(O_{k,l})$  pour l'implication de Rescher-Gaines. Cette zone peut aussi être considérée comme un cas particulier de la zone 3.3 car elle correspond au cas où seulement une règle est activée.
- Zone 2 : l'entrée se situe dans le noyau d'une dimension et dans la zone de chevauchement

sur l'autre dimension. Par exemple, l'entrée  $x$  se situe dans le noyau de  $A_1$  et l'entrée  $y$  se situe entre les noyaux de  $B_1$  et  $B_2$ . Par conséquent, deux règles sont déclenchées :  $A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$  et  $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$ .

- Zone 3 :  $x$  et  $y$  sont entre les noyaux de deux ensembles flous adjacents dans  $U$  et  $V$ . Quatre règles sont activées dans cette configuration qui est la plus complexe.

Tout d'abord, nous traiterons la zone 3 puisque la zone 2 n'est en fait qu'un cas particulier de celle-ci.

### 3.5.2.1 Zone 2D entre les noyaux (Zone 3)

On note  $\alpha_1 = \mu_{A_1}(x)$ ,  $\alpha_2 = \mu_{A_2}(x)$ ,  $\beta_1 = \mu_{B_1}(y)$  et  $\beta_2 = \mu_{B_2}(y)$  comme l'illustre la figure 3.16. Etant donné une entrée précise, nous pouvons calculer la sortie de Rescher-Gaines [Dubois et al. - 1995], qui est un intervalle défini par sa borne inférieure  $z_{\min}$  et sa borne supérieure  $z_{\max}$ . Les sous-zones de la zone 3 sont définies sur la figure 3.16 selon la valeur de  $m = \min(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ , où  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ ,  $\beta_1 = 1 - \beta_2$ . Le tableau 3.1 donne la valeur de  $m$  pour chaque zone. Nous détaillons l'inférence dans la zone 3.1. Dans cette zone, la borne inférieure  $z_{\min}$  peut provenir de 4 règles :

- $A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$  nous donne la borne  $\sigma_{1,1}^-(\beta_1)$  puisque  $\beta_1$  est plus petit que  $\alpha_1$ .
- $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$  nous donne la borne  $\sigma_{1,2}^-(\alpha_1)$  puisque  $\alpha_1$  est plus petit que  $\beta_2$ .
- $A_2 \wedge B_1 \rightarrow O_{2,1}$  nous donne la borne  $\sigma_{2,1}^-(\beta_1)$  puisque  $\beta_1$  est plus petit que  $\alpha_2$ .
- $A_2 \wedge B_2 \rightarrow O_{2,2}$  nous donne la borne  $\sigma_{2,2}^-(\alpha_2)$  puisque  $\alpha_2$  est plus petit que  $\beta_2$ .

Zone	3.1	3.2	3.3	3.4
$\min(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$

TAB. 3.1: Propriétés de chaque zone

Puisque l'agrégation des règles est conjonctive, la borne inférieure  $z_{\min}$  est la plus grande de ces bornes.

$$z_{\min} = \max(\sigma_{1,1}^-(\beta_1), \sigma_{1,2}^-(\alpha_1), \sigma_{2,1}^-(\beta_1), \sigma_{2,2}^-(\alpha_2))$$

$\sigma_{1,1}^-(\beta_1)$  est toujours la plus petite puisque son maximum est la plus petite abscisse du noyau de  $O_{1,1}$ . De plus,  $\sigma_{2,1}^-(\beta_1)$  est plus petite que  $\sigma_{2,2}^-(\alpha_2)$  car  $\beta_1 < \alpha_2$ . Par conséquent la borne inférieure se simplifie en :

$$z_{\min} = \max(\sigma_{1,2}^-(\alpha_1), \sigma_{2,2}^-(\alpha_2))$$

De la même manière, on calcule la borne supérieure  $z_{\max} = \min(\sigma_{1,1}^+(\beta_1), \sigma_{1,2}^+(\alpha_1), \sigma_{2,1}^+(\beta_1), \sigma_{2,2}^+(\alpha_2))$  qui se simplifie en :  $z_{\max} = \min(\sigma_{1,1}^+(\beta_1), \sigma_{1,2}^+(\alpha_1))$ .

Le tableau 3.2 récapitule les résultats pour toutes les sous-zones de la zone 3. Cette table est très intéressante car elle réduit le calcul d'une borne de la sortie au maximum ou au minimum de deux valeurs.



Zone	Borne inférieure $z_{\min}$	Borne supérieure $z_{\max}$
3.1	$\max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\alpha_1))$
3.2	$\max(o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\beta_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\beta_1))$
3.3	$\max(o_{2,1}^-(\alpha_2), o_{2,2}^-(\beta_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\alpha_2))$
3.4	$\max(o_{1,2}^-(\beta_2), o_{2,2}^-(\alpha_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\beta_2))$

TAB. 3.2: Intervalles de sortie de la zone 3

### 3.5.2.2 Zone 2D intra-noyau et extra-noyau (zone 2)

La zone 2 peut être vue comme un cas particulier de la zone 3. Il existe 4 zones (2.1, 2.2, 2.3 et 2.4) adjacentes aux zones 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 (cf. figure 3.16). Il y a au plus deux règles activées en zone 2 à cause des partitions fortes en entrée. Par exemple, pour la zone 2.1 où  $\beta_1 = 0$  et  $\beta_2 = 1$ , seules les règles suivantes sont activées :

- $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$
- $A_2 \wedge B_2 \rightarrow O_{2,2}$

Le comportement est le même qu'en zone 3 mais moins de règles sont activées. En zone 2.1,  $z_{\min}$  est la même qu'en zone 3.1 puisque les sorties  $O_{1,2}$  et  $O_{2,2}$  sont activées :

$$z_{\min} = \max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$$

En revanche,  $O_{1,1}$  n'étant pas déclenchée,  $z_{\max}$  devient alors :

$$z_{\max} = o_{1,2}^+(\alpha_1)$$

Des calculs similaires peuvent être faits dans les autres sous-zones.

Les sorties de la zone 2 sont résumées dans le tableau 3.3 :

Area	Borne inférieure $z_{\min}$	Borne supérieure $z_{\max}$
2.1	$\max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$	$o_{1,2}^+(\alpha_1)$
2.2	$\max(o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\beta_2))$	$o_{2,1}^+(\beta_1)$
2.3	$o_{2,1}^-(\alpha_2)$	$\min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\alpha_2))$
2.4	$o_{1,2}^-(\beta_2)$	$\min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\beta_2))$

TAB. 3.3: Intervalles de sortie de la zone 2

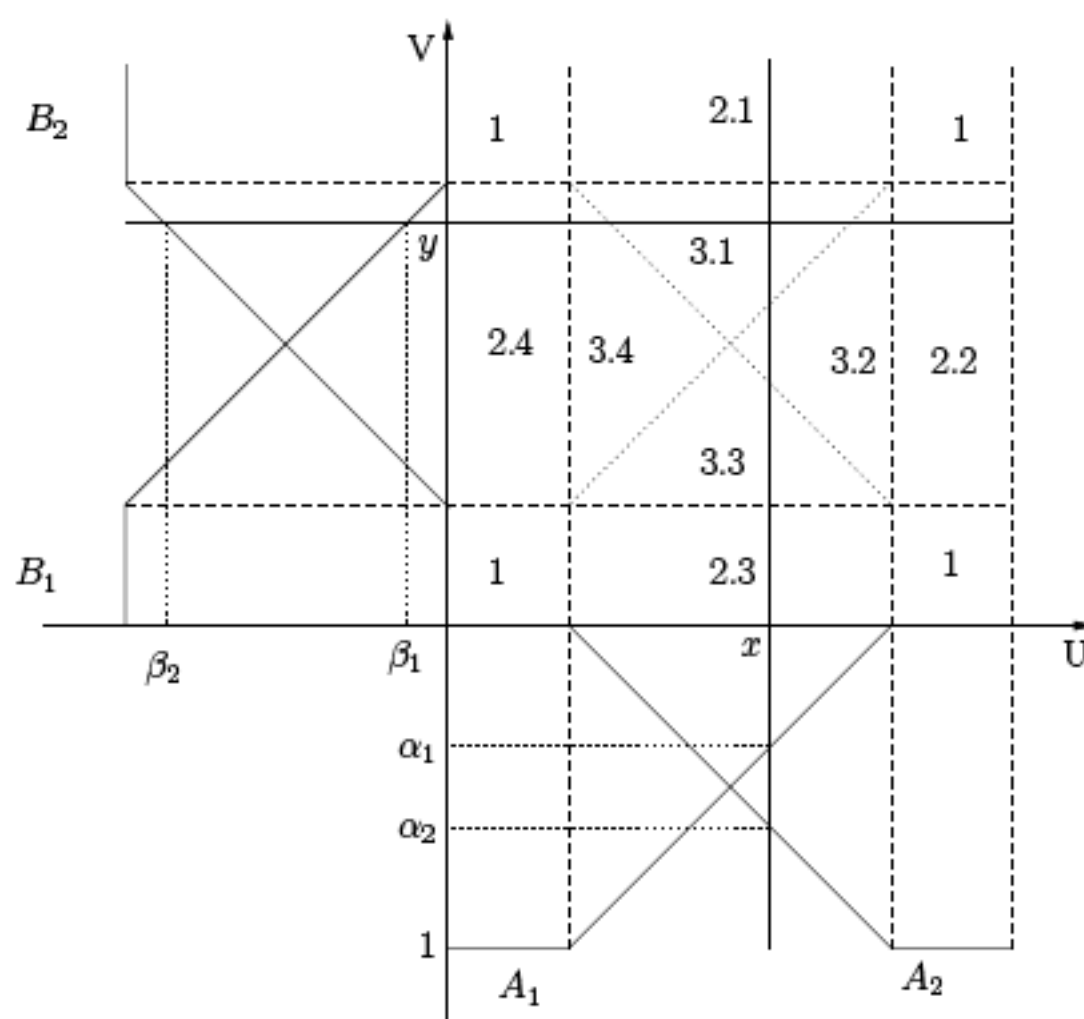


FIG. 3.16: Différentes sous-zones en entrée

Nous venons de voir que les tables permettent d'inférer rapidement des entrées précises. Les bornes des intervalles seront donc facile à inférer. Il faut cependant s'assurer de la continuité de la sortie entre ces bornes.

### 3.5.3 Continuité des bornes de la sortie inférée

Dans cette section, on étudie si l'évolution des bornes de la sortie est continue lorsque les entrées passent d'une zone à une autre. La figure 3.16 montre toutes les transitions possibles. La zone 3 est le cas le plus général. Commençons par la transition concernant les zones 3.1 et 3.2. Cette transition a lieu lorsque  $\alpha_1 = \beta_1$  et  $\alpha_2 = \beta_2$ . La borne inférieure  $z_{\min}$  devient alors :

- $z_{\min 3.1} = \max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$
- $z_{\min 3.2} = \max(o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\beta_2))$

Puisque  $\alpha_1 = \beta_1 < \alpha_2 = \beta_2$ ,  $z_{\min 3.1} = o_{2,2}^-(\alpha_2)$  et  $z_{\min 3.2} = o_{2,2}^-(\beta_2)$ . Par conséquent, nous obtenons  $z_{\min 3.1} = z_{\min 3.2}$  car  $\alpha_2 = \beta_2$ .

Considérons à présent la borne supérieure  $z_{\max}$  :

- $z_{\max 3.1} = \min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\alpha_1))$
- $z_{\max 3.2} = \min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\beta_1))$

Nous avons alors  $z_{\max 3.1} = o_{1,1}^+(\beta_1)$  et  $z_{\max 3.2} = o_{1,1}^+(\alpha_1)$ . Puisque  $\beta_1 = \alpha_1$ , nous obtenons  $z_{\max 3.1} = z_{\max 3.2}$ . On constate donc que les bornes de la sortie inférée sont continues entre les zones 3.1 et 3.2. De la même manière, les transitions entre les zones (3.2,3.3), (3.3,3.4) et (3.4,3.1) sont continues.

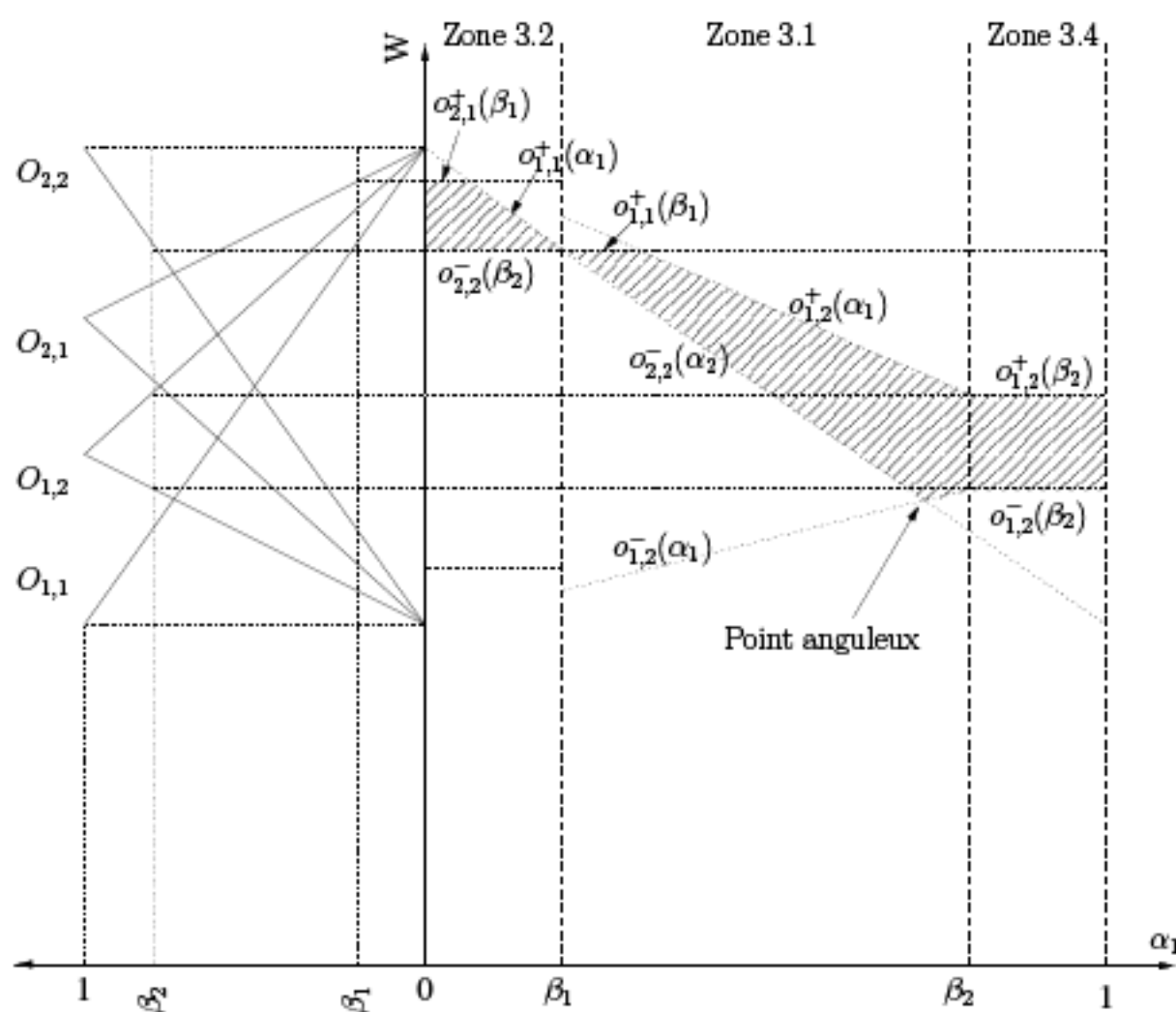
De plus, pour le point unique à l'intersection des 4 zones, la continuité est aussi garantie. En effet, ce point correspond aux niveaux  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ . La borne inférieure est alors égale à  $o_{2,2}^-(\alpha_2)$  pour chaque zone et la borne supérieure est égale à  $o_{1,1}^+(\alpha_1)$ .

Puisque la zone 2 et la zone 1 ne sont que des cas particuliers de la zone 3, les bornes de la sortie sont aussi continues pour ces zones.

### 3.5.4 Points anguleux

Seule une variation continue et *monotone* du système en fonction de l'entrée assure que le résultat de l'inférence est l'enveloppe convexe des sorties inférées à partir des bornes des entrées rectangulaires. Nous devons donc détecter les points de rupture de monotonie (que nous appellerons pour simplifier points anguleux) et les prendre en compte dans le processus d'inférence. Un point anguleux est obtenu si les deux fonctions qui définissent une borne de la sortie (tableau 3.2) évoluent en sens opposé et se croisent.

Par exemple, sur la figure 3.17, un point anguleux apparaît pour la borne inférieure de la zone 3.1. Dans cette zone, la borne inférieure est égale à  $\max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$ , où  $o_{1,2}^-(\alpha_1)$  est croissante et  $o_{2,2}^-(\alpha_2)$  décroissante. Il y a donc un point anguleux lorsque  $o_{1,2}^-(\alpha_1) = o_{2,2}^-(\alpha_2)$ . Comme les ensembles flous  $O_{1,2}$  et  $O_{2,2}$  sont connus, nous pouvons facilement trouver le niveau  $\alpha_1$  qui correspond à ce point anguleux.

FIG. 3.17: Sortie en fonction de  $\alpha_1$ 

Il y a donc au plus un point anguleux par zone, comme nous pouvons le voir dans le tableau 3.4.

Zone	Borne inférieure	Borne supérieure
3.1	$\sigma_{1,2}^-(\alpha_1) = \sigma_{2,2}^-(\alpha_2)$	Non
3.2	$\sigma_{2,1}^-(\beta_1) = \sigma_{2,2}^-(\beta_2)$	Non
3.3	Non	$\sigma_{1,1}^+(\alpha_1) = \sigma_{2,1}^+(\alpha_2)$
3.4	Non	$\sigma_{1,1}^+(\beta_1) = \sigma_{1,2}^+(\beta_2)$

TAB. 3.4: Conditions conduisant à des points anguleux selon la zone

Le nombre d'alpha-coups est fini, on le notera  $n_\alpha$ .

- Décomposer chaque entrée floue par  $\alpha$ -coupes afin de considérer chaque entrée floue comme un ensemble d'entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ .
  - Décomposer chaque entrée rectangulaire selon partition d'entrée afin de séparer les noyaux des zones intermédiaires.
- Pour chaque entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ , il faudra :
- Inférer à partir de chaque borne des entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ .
  - Tester s'il existe des points anguleux qui correspondent à des valeurs d'entrée comprises dans l'entrée rectangulaire considérée.
  - Inférer à partir de toutes les valeurs conduisant à des points anguleux afin de former une union de sorties monotones.
  - Faire l'enveloppe convexe de toutes les sorties inférées ainsi qui correspondra à la sortie inférée pour cette entrée rectangulaire.
  - Faire l'union des sorties calculées pour toutes les entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ . Cette union est le résultat final.

### 3.5.5 Analyse de la complexité de l'algorithme

Soit  $n_\alpha$  le nombre d'alpha-coupes.

- Les décompositions des deux entrées floues dépendent du nombre d' $\alpha$ -coupes. On est donc en  $O(n)$
- La décomposition de chaque entrée rectangulaire dépend du nombre d'entrée rectangulaire (qui est équivalent au nombre d' $\alpha$ -coupes sur chaque dimension) et du nombre d'intervalles d'entrée intersectés (qui n'a plus de sens au dessus de 3 sous-ensembles). On est donc en  $O(n)$ .
- L'inférence à partir de chaque borne de l'entrée rectangulaire nécessite 4 calculs par  $\alpha$ -coupes. On est donc en  $O(n)$ .
- Tester les points anguleux nécessite deux tests par  $\alpha$ -coupes. On a donc  $2n$  tests, on est donc en  $O(n)$ .
- L'inférence à partir des points anguleux nécessite au maximum 2 opérations par  $\alpha$ -coupes. On est donc en  $O(n)$ .
- L'enveloppe convexe peut être déterminée en analysant chacune des  $4n_\alpha$  bornes inférées et les éventuels points anguleux ( $2n_\alpha$  au maximum). On est donc en  $O(n)$ .
- Il reste à faire l'union des  $2n_\alpha$  sorties calculées. On est donc en  $O(n)$

La complexité de cet algorithme est donc en  $O(n)$  puisqu'elle combine 7 opérations en  $O(n)$ . Cet algorithme a donc une complexité linéaire.

## 3.6 Passage à des dimensions supérieures : limites

Dans cette section, nous allons examiner la possibilité de généraliser cette méthode d'inférence à un système multidimensionnel, supérieur à deux dimensions. L'examen des différentes étapes nous permettra d'identifier les points de blocage.

### 3.6.1 Indépendance inférentielle

Nous pouvons tout d'abord rappeler que l'indépendance inférentielle est respectée quel que soit le nombre de dimensions. Pour cette raison, si chaque entrée de la prémisse appartient au noyau d'un ensemble flou de chaque dimension, alors la sortie correspondra à la conclusion de la règle concernée  $A_i \wedge B_j \wedge \dots \wedge N_k \rightarrow O_{i,j,\dots,k}$ . On infèrera donc l'ensemble de sortie  $O_{i,j,\dots,k}$  pour Gödel et Goguen et le noyau de l'ensemble de sortie de cette règle avec Rescher-Gaines.

### 3.6.2 Partitions de sortie

Les partitions doivent respecter la cohérence du système. Ce point semble bien plus complexe à garantir. En effet, en  $n$  dimensions, il sera possible d'activer conjointement toutes les règles dont deux sous-ensembles par dimension sont contigus. Donc une entrée nD pourra déclencher au plus  $2^n$  règles. Ce qui signifie que les  $2^n$  ensembles de sortie devront avoir une intersection commune.

Il est alors difficile de conserver un système interprétable lorsque  $n$  est strictement supérieur à 2. Par exemple, dès que  $n$  est égal à 3, il faut  $2^3 = 8$  sorties distinctes ayant une intersection commune. Il faudra donc réduire ce nombre de sous-ensembles de sortie si on ne veut pas avoir un nombre d'ensembles de sortie trop important pour que la partition de sortie reste interprétable.

On voit donc qu'avec un nombre de dimensions important, on sera donc contraint d'utiliser les mêmes ensembles de sortie pour les conclusions de certaines règles. En réduisant le nombre de conclusions, le pouvoir d'expressivité des règles pourrait être réduit ce qui peut être gênant. Néanmoins, dès deux dimensions, le nombre de sortie peut être déjà restreint comme nous l'illustrons dans le chapitre 4 (section 4.3.3).

### 3.6.3 Inférence nD

En  $n$  dimensions, certains éléments seront plus complexes à calculer, nous allons donner quelques pistes de calcul.

#### 3.6.3.1 Les différentes zones de l'inférence

En  $n$  dimensions, le nombre de zones à étudier sera beaucoup plus important. La zone la plus simple à inférer concernera une entrée nD située pour chaque dimension sur le noyau d'un ensemble. Alors grâce au bon conditionnement, la sortie correspondra à la règle activée.

Le cas le plus complexe adviendra lorsqu'on se situe dans la zone de chevauchement entre deux sous-ensembles flous pour chacune des dimensions de l'espace d'entrée.

Avec le nombre de dimensions, on augmentera le nombre d'ensembles de sortie permettant de déterminer l'intervalle de sortie. Il faudra donc déterminer le minimum et le maximum d'un grand nombre de valeurs pour calculer les valeurs inférées à partir des bornes multidimensionnelles.

Pour les zones plus particulières, afin de ne pas trop complexifier la méthode, il serait judicieux de conserver la méthode de la zone la plus complexe pour ne pas avoir un type de traitement par type de zone. Le nombre de type de zones dépendant du nombre de dimensions, il y aurait alors un nombre de cas spécifiques trop grand.

#### 3.6.3.2 La continuité

Si l'on respecte la cohérence du système de règles, alors la continuité du système sera garantie entre les différentes zones. Avec des partitions de sortie cohérentes, le passage d'un concept à un autre est forcément continu.

### 3.6.3.3 Les points anguleux

Ici aussi, des points anguleux peuvent apparaître. Il faudra donc vérifier pour chaque dimension de l'hypercube de dimension  $n$  si un point anguleux peut apparaître. Bien que le nombre de calculs soit plus important, ce point ne devrait pas être bloquant.

En conclusion, on peut dire qu'en  $n$  dimensions, notre méthode d'inférence n'est pas limitante pour le calcul de la sortie. Plus le nombre de dimensions est grand, plus les calculs seront nombreux. Pour des dimensions très grandes, des problèmes de combinatoires pourraient intervenir. Néanmoins, dans des applications pratiques où l'on modélise des connaissances expertes, 5 dimensions sont largement suffisantes. L'élément contraignant pour passer à  $n$  dimensions se situe au niveau des partitions de sortie. Plus le nombre de dimensions sera grand, plus il sera difficile de conserver un système cohérent et interprétable sans réduire le nombre de sous-ensembles de la partition de sortie. La seule manière pour que le système reste interprétable sera de réduire le nombre d'ensembles flous distincts en sortie. Il faudra donc faire attention à ce que le nombre restreint d'ensemble flou en sortie ne gêne pas l'expressivité du système qui pourrait, dans le pire des cas, être équivalent à un système de dimension inférieure. Nous montrerons dans le chapitre suivant des alternatives permettant de traiter les problèmes multidimensionnels (cf section 4.4).

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode d'inférence avec des règles implicatives permettant de traiter des entrées floues en une dimension et en deux dimensions. Cette méthode se base sur des résultats concernant l'indépendance inférentielle d'une base de règles.

Notre méthode utilise une double décomposition permettant d'approximer l'entrée floue par un certain nombre d'entrées rectangulaires et de se ramener à une inférence locale. L'inférence mono-dimensionnelle est alors assez simple à effectuer. En ce qui concerne l'inférence bidimensionnelle, il est nécessaire de prendre en compte la non-monotonie de l'évolution des bornes de la sortie.

En  $n$  dimensions, nous avons donné quelques éléments montrant que notre méthode d'inférence n'est pas limitante pour le calcul de la sortie. Cependant, l'élément bloquant pour passer à  $n$  dimensions se situe au niveau des partitions de sortie. Plus le nombre de dimensions sera grand, plus il sera difficile de conserver un système cohérent. La seule manière d'y arriver pourra limiter l'expressivité du système de règles.

Dans le chapitre suivant, nous allons examiner comment traiter ces règles d'un point de vue sémantique, en illustrant à l'aide d'exemples leur fonctionnement et signification pratique. Nous détaillerons l'interprétation à donner à ces nouvelles partitions. Nous nous intéresserons aussi à la manière de gérer des systèmes multidimensionnels de dimension supérieure à 2.

---

**Figures**

3.1	Une partition floue permettant l'indépendance inférentielle . . . . .	47
3.2	Noyau 2D de $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$ . . . . .	48
3.3	Décomposition par $\alpha$ -coupes . . . . .	49
3.4	Décomposition par partitionnement . . . . .	50
3.5	Inférence à partir d'une entrée de niveau 1 pour la zone correspondant au noyau . . . . .	51
3.6	Inférence à partir d'une entrée de niveau $\alpha$ pour la zone correspondant au noyau . . . . .	52
3.7	Notation (Rescher-Gaines) . . . . .	53
3.8	Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée précise . . . . .	56
3.9	Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée rectangulaire de niveau 1 . . . . .	56
3.10	Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée floue décomposée sur 3 niveaux $\alpha_j < \alpha_i < 1$ . . . . .	57
3.11	Zones définies par les partitions d'entrées . . . . .	59
3.12	Partitions d'entrées du système . . . . .	60
3.13	Partition de sortie du système en utilisant la fonction linéaire $a + bx + cy$ . . . . .	61
3.14	Partition de sortie respectant la cohérence et l'interprétabilité du système . . . . .	62
3.15	Zones définies par les partitions d'entrées . . . . .	62
3.16	Différentes sous-zones en entrée . . . . .	65
3.17	Sortie en fonction de $\alpha_1$ . . . . .	67

---

**Tables**

3.1	Propriétés de chaque zone . . . . .	63
3.2	Intervalles de sortie de la zone 3 . . . . .	64
3.3	Intervalles de sortie de la zone 2 . . . . .	64
3.4	Conditions conduisant à des points anguleux selon la zone . . . . .	67

---





## Chapitre 4

# Sémantique, Interprétation et Conception des Systèmes d'Inférence Floue

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>74</b>
<b>4.2</b>	<b>Signification des règles</b>	<b>74</b>
4.2.1	Conjonctif et Implicatif : deux types de raisonnement	75
4.2.2	Respect de l'imprécision des entrées	76
4.2.3	Partitions d'entrée : illustration	77
4.2.4	Partition de sortie et compensations	78
4.2.5	Quantification d'une sortie imprécise : attribution d'étiquettes	80
<b>4.3</b>	<b>Cohérence et interprétabilité</b>	<b>82</b>
4.3.1	Interprétabilité	82
4.3.2	Conversion	83
4.3.3	Partitions de sortie : illustration en 2D	84
4.3.3.1	2 sous-ensembles flous par variable d'entrée	84
4.3.3.2	3 sous-ensembles flous par variable d'entrée	87
4.3.3.3	Nombre différent de sous-ensembles flous dans chaque dimension	89
<b>4.4</b>	<b>Coopération de plusieurs systèmes de règles floues</b>	<b>90</b>
4.4.1	Règles conjonctives : raffinement impossible	91
4.4.2	Collaboration entre systèmes de règles implicatives	92
4.4.2.1	En parallèle	92
4.4.2.2	En cascade	93
4.4.2.3	Combinaison des deux types de structures	95
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>96</b>

## 4.1 Introduction

Jusqu'ici les règles implicatives floues, dont nous avons montré la signification logique dans la section 2.3.4 ont surtout été utilisées par des logiciens. En effet, il n'existe que très peu d'utilisations concrètes [Saint-Joan & Desachy - 1995]. Les règles implicatives ont été délaissées au profit des règles conjonctives dont les éléments d'interprétation sont bien connus. Les sorties des règles conjonctives et implicatives représentent deux types d'information sur une même échelle. Il est important de connaître ces nuances pour éviter toute confusion. Dans cette section, nous allons donner des clés d'interprétation et de modélisation pour les règles implicatives. Puisque ces règles ne sont presque pas utilisées, il est nécessaire de préciser leur fonctionnement et la manière de les interpréter vis-à-vis du raisonnement expert.

Les règles implicatives et les règles conjonctives n'ont pas le même sens, ce qui induit de nombreuses différences à l'utilisation :

- un raisonnement différent : les règles implicatives correspondent à une implication logique, les conjonctives à des valeurs d'entrée/sortie conjointement possibles.
- une notion liée aux règles implicatives : la cohérence. Il faudra être vigilant pour que le système reste interprétable tout en évitant les incohérences logiques. La cohérence est toujours vérifiée avec les règles conjonctives car celles-ci représentent seulement des paires de valeurs conjointement possibles.
- des partitions différentes : les règles implicatives offrent la possibilité d'autoriser les compensations sur le domaine de sortie, en utilisant des ensembles de sortie se chevauchant, ou de les interdire en utilisant des ensembles de sortie dont l'intersection est vide. De plus, afin de respecter la cohérence du système, les ensembles de la partition de sortie devront se recouvrir de manière significative. Du fait du processus de défuzzification nécessaire avec les règles conjonctives, les compensations entre les sous-ensembles sont obligatoires.
- le respect de l'imprécision. En présence d'une entrée floue ou d'un raisonnement approximatif, la sortie d'un système doit prendre en compte cette imprécision, il est alors normal d'avoir une sortie floue en sortie de ce système. L'imprécision issue d'un système de règles implicatives peut s'interpréter puisqu'elle est raisonnable, alors que celle issue d'un système de règles conjonctives augmente systématiquement avec le nombre de règles.
- des possibilités d'utilisation conjointe de plusieurs systèmes pour arriver à une solution pour les règles implicatives. Avec les règles conjonctives, coupler différents systèmes rend la sortie de plus en plus imprécise.

Dans ce chapitre, nous allons donc tout d'abord étudier la signification des différents types de règles en section 4.2. Ensuite, nous nous intéresserons à l'interprétabilité des partitions en section 4.3.1. Nous verrons que la forme des partitions de sortie est liée à la notion de cohérence. Pour finir, nous aborderons la coopération entre systèmes en envisageant différentes formes de chaînage en section 4.4.

## 4.2 Signification des règles

Tout d'abord, nous rappelons quelques différences cruciales entre les règles conjonctives et implicatives. Ensuite, nous abordons leur interprétation sémantique d'un point de vue expert et nous analysons comment ces systèmes traitent l'imprécision des entrées.

### 4.2.1 Conjonctif et Implicatif : deux types de raisonnement

Nous détaillons ici deux points importants : la différence dans le raisonnement et la manière dont la sortie doit être gérée.

Les règles conjonctives et les règles implicatives ne représentent pas le même type de raisonnement logique, comme nous l'avons vu au chapitre 2.

Une connaissance experte peut être de deux sortes :

- soit elle est issue d'un raisonnement à base de cas ou du raisonnement par analogie, par similarité. Dans ce cas là, la connaissance experte est très proche des données car celle-ci peut évoluer lorsque de nouvelles données modifient cette connaissance. On parle alors de *connaissance positive* et une modélisation de ces règles peut être faite en utilisant des *règles conjonctives*.
- soit elle correspond à un modèle de l'expert sur un certain domaine. Dans ce cas le modèle créé doit contenir l'ensemble des données possibles pour cette représentation. Le modèle obtenu par l'expert peut provenir d'un modèle mathématique ou être issu du raisonnement par similarité lorsque l'expert a réussi à généraliser à partir des différentes informations pour créer un modèle. L'expert ne se limite pas à ajouter des éléments de connaissance à partir des données, il exprime des contraintes ou des restrictions sur un ensemble de possibles. On parle alors de *connaissance négative* et on utilise les *règles implicatives* pour modéliser ces connaissances. Les éléments qui n'entrent pas dans le modèle de l'expert sont alors des incohérences ou des exceptions. Il existe différentes méthodes sur le traitement des exceptions [Benferhat et al. - 2001] que nous ne traiterons pas ici.

Il convient donc d'utiliser des règles implicatives pour modéliser des connaissances expertes lorsque celles-ci s'expriment sous la forme d'un modèle, c'est à dire de contraintes sur un domaine d'intérêt. Après avoir mis au point les partitions d'entrée et le système de règles, il faudra déterminer la forme des partitions de sortie. Celle ci doit être construite de manière à accepter des compensations ou non. Cet effort supplémentaire par rapport à la constitution d'une base de règles conjonctives sera justifié par une prise en compte des incohérences possibles du système et un meilleur contrôle vis-à-vis des compensations en sortie.

Les différences de signification entre les règles implicatives et conjonctives peuvent être troublantes pour un expert habitué à travailler avec des règles conjonctives car les partitions d'entrées et de sortie des deux types de règles sont représentées sur une échelle similaire normalisée. De plus, la forme "Si . . . , alors . . ." associée aux règles floues est identique quelque soit le type de règles considéré. Cependant, même si les représentations sont proches la signification ne l'est pas car dans un cas, il s'agit de possibilité garantie et dans l'autre de possibilité. Ceci implique des interprétations différentes des partitions de sortie. En revanche, les partitions d'entrée utilisées sont communes aux deux modèles.

Un autre élément à prendre en compte est l'interprétation de la sortie inférée. En effet, celle-ci sera souvent floue. Mais contrairement à la sortie floue obtenue à partir d'un système de règles conjonctives, cette sortie sera interprétable. Cette sortie pourra se résumer à un intervalle lorsqu'on ne considère que son noyau. Sur une échelle graduelle, cet intervalle correspondra à l'ensemble des valeurs possibles en sortie. La défuzzification n'est pas appropriée car toutes les valeurs de cet intervalle noyau ont le même degré de possibilité, les réduire à une valeur serait trop simplificateur. Si une imprécision existe dans le raisonnement ou dans les entrées du système, il est normal qu'elle se répercute en sortie de celui-ci. Néanmoins, une défuzzification pourra être nécessaire pour du contrôle flou par exemple. Dans ce cas, puisque la sortie est plus précise qu'avec les règles de Mamdani et moins dépendante de la largeur des sous-ensembles de la partition, on pourra s'attendre à avoir une sortie plus proche de la réalité avec les règles implicatives.

La sortie d'un tel système est en fait à considérer comme une contrainte sur la possibilité qu'un élément  $w$  appartienne à la sortie.

Une interprétation "à la Mamdani" des sorties issues des règles implicatives pourrait être source d'incompréhension de la part des utilisateurs. Il est donc important de rappeler les points suivants :

1. Largeur de l'intervalle de sortie : L'ajout d'information dans un système de règles implicatives permet de rendre la sortie plus précise donc moins large. Avec les règles de Mamdani, puisqu'il est impossible d'affiner le résultat en rajoutant des règles, ce comportement n'est pas possible. En effet, plus on active des règles dans un système de Mamdani, plus la sortie est imprécise alors qu'avec les règles implicatives, celle-ci devient de plus en plus précise.
2. Détection des contradictions : En présence de règles contradictoires, l'inférence à partir de règles conjonctives donne l'union de deux ensembles flous disjoints en sortie. Avec les règles implicatives, on obtient un ensemble vide en sortie. De ce fait, il est facilement possible de détecter les incohérences d'une base de règles avec les règles implicatives.
3. Ignorance totale : L'ignorance en sortie est désignée par un degré uniformément égal à  $0$  pour les règles conjonctives et uniformément égal à  $1$  pour les règles implicatives.
4. Imprécision raisonnable : Puisque la sortie n'est pas trop imprécise, il est possible de conserver cette information sans requérir à une défuzzification.
5. Normalisation : Avec les règles implicatives, la sortie est normalisée. En revanche, avec les règles conjonctives, celle-ci est en général sous-normalisée ce qui la rend encore plus difficile à interpréter.

Il est important de garder ces points clés à l'esprit lorsqu'on modélise des systèmes experts avec des règles implicatives. Par la suite, nous développons et illustrons différents points ayant trait au fonctionnement des règles implicatives : respect de l'imprécision des entrées, partition de sortie et compensations, quantification d'une sortie imprécise.

#### 4.2.2 Respect de l'imprécision des entrées

Dans cette section, nous expliquons pourquoi les règles implicatives traitent de manière naturelle l'imprécision d'une entrée du fait du processus d'agrégation conjonctif.

La figure 4.1 montre le résultat de l'inférence à partir d'une entrée imprécise pour les règles implicatives  $A_1 \rightarrow O_1$  et  $A_2 \rightarrow O_2$  (implication de Gödel) et les règles conjonctives  $A_1 \times O_1$  et  $A_2 \times O_2$ . On voit que le résultat obtenu avec des règles conjonctives ("à la Mamdani") recouvre l'ensemble de la partition et est sous-normalisé. Le résultat obtenu avec des règles implicatives est bien plus précis puisqu'il est situé dans l'intersection des sorties des différentes règles. On remarque de plus qu'il est normalisé. Le noyau donné par l'implication de Gödel est interprétable par un expert humain. Il lui indique l'intervalle des valeurs pour lesquels cette sortie est totalement possible (mais pas garantie). De la même manière, le support de la sortie montre à partir de quelle valeur cette sortie est complètement impossible.

Selon le type d'information souhaitée par l'expert (possibilité de la sortie ou impossibilité), on s'intéressera plutôt au noyau ou au support de la sortie inférée.

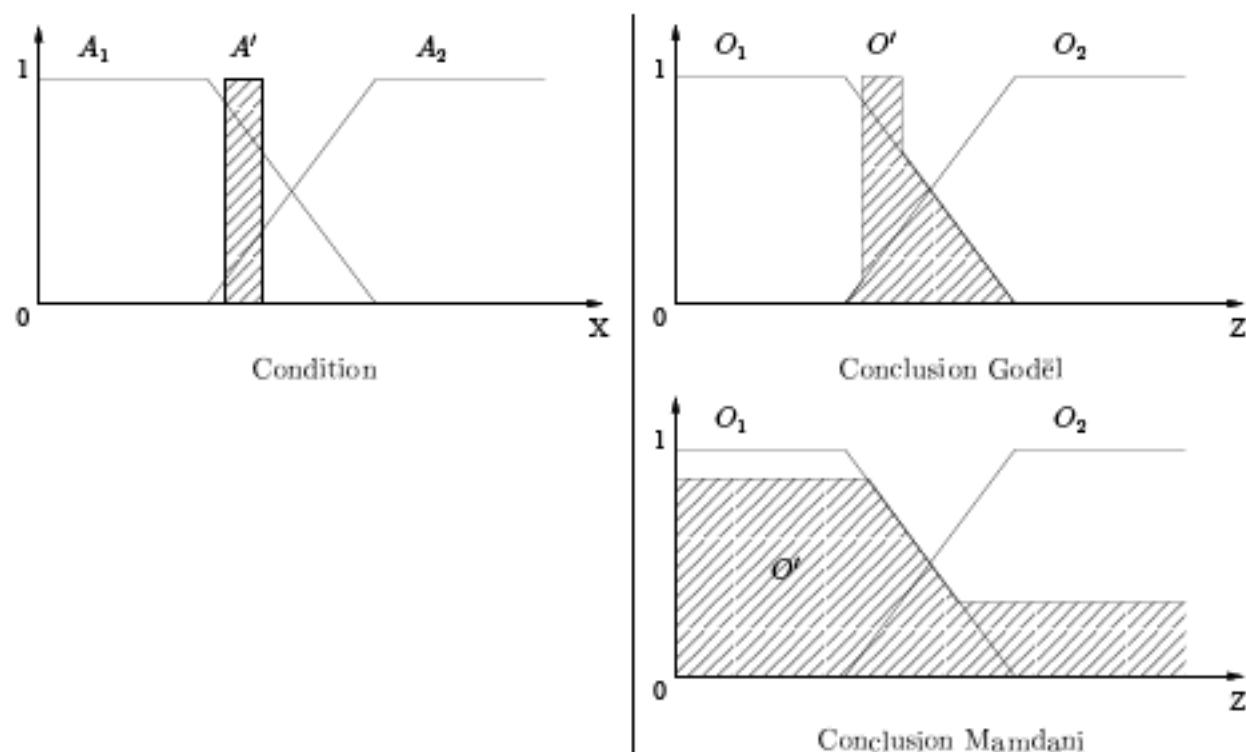


FIG. 4.1: Inférence d'une entrée imprécise implicative/conjonctive

L'imprécision d'une entrée peut provenir d'incertitudes sur les données (capteurs ou analyse sensorielle par exemple) mais aussi du chaînage de systèmes d'inférence floue. Puisque la sortie inférée sera souvent floue, on aura à inférer à partir d'une entrée floue, si l'on ré-utilise la sortie d'un système comme entrée d'un autre système. Utiliser un mécanisme d'inférence respectant cette imprécision est alors crucial pour avoir des résultats interprétables.

#### 4.2.3 Partitions d'entrée : illustration

En entrée, nous avons choisi d'utiliser des partitions floues fortes afin de disposer de la propriété d'indépendance inférentielle développée en section 3.2. De plus, une telle partition respecte tous les éléments d'interprétabilité que nous détaillons en section 4.3.1. Comme montré en section 3.2, si on infère à partir d'une entrée approchée identique à un sous ensemble de la partition, on obtient la sortie correspondant à cette règle.

Ce comportement est souhaitable et intuitif pour un expert car par exemple, si l'expert écrit la règle "Si l'humidité du fromage est forte, alors la pâte est molle" et si une donnée correspond exactement à la représentation qu'il se fait d'une humidité "forte", alors l'expert s'attendra à avoir en sortie une pâte "molle" *quelles que soient les autres règles du système*. Avec des règles implicatives et des partitions fortes, ce comportement est garanti. On peut rappeler qu'il est impossible d'obtenir cette propriété avec des règles conjonctives car l'agrégation des règles est disjonctive.

De plus, une propriété plus forte existe en présence de partitions fortes. Avec les implications de Godël et de Goguen, il suffit qu'un élément de l'entrée appartienne au noyau d'un ensemble flou  $A_i$  de la partition pour inférer  $O_i$  en présence de la règle  $A_i \rightarrow O_i$ . Avec l'implication de Rescher-Gaines, on infèrera le noyau de  $O_i$ . Ceci traduit le fait qu'on ne peut pas être plus

précis que la granularité d'information qu'on a fixée en construisant la partition. Il faudra cependant veiller à construire une partition d'entrée avec une granularité suffisamment informative et contenant un nombre restreint de sous-ensembles flous afin qu'elle reste interprétable. Le nombre d'ensembles flous choisis sera en fait un compromis entre l'interprétabilité et une granularité "assez informative".

Un exemple simple nous permet d'illustrer ce comportement. Regardons par exemple l'influence de l'humidité du fromage après affinage (HFDaff) sur la fermeté de la pâte. Nous avons les trois règles suivantes :

1. Si HFDaff est faible, alors la pâte est ferme
2. Si HFDaff est moyen, alors la pâte est normale
3. Si HFDaff est fort, alors la pâte est molle

En présence d'un HFDaff de **52.5** (moyen), on infèrera la sortie normale comme le montre la figure 4.2.



FIG. 4.2: Résultat de l'inférence pour une entrée de **52.5** (Godël ou Goguen)

Puisqu'on est complètement moyen au niveau de HFDaff, on infère donc le sous-ensemble correspondant à la règle 2, la sortie est donc totalement normale. On ne peut pas être plus précis que ce concept.

#### 4.2.4 Partition de sortie et compensations

Dans un système de règles implicatives à plusieurs variables, puisque les règles implicatives représentent des restrictions, les ensembles flous représentant des concepts conjointement possibles à un certain degré devront avoir une intersection commune.

En revanche, lorsque deux concepts ne sont pas possibles simultanément (aller à *droite* et aller à *gauche* pour un robot par exemple), il est normal que leurs sous-ensembles flous n'aient pas d'intersection commune.

Avec les règles conjonctives, la défuzzification est obligatoire car l'ensemble flou de sortie du système de règles est de plus en plus large au fur et à mesure qu'augmente le nombre de règles activées. Or la défuzzification d'un ensemble non convexe peut donner un résultat n'appartenant à aucun des sous-ensembles flous des règles activées. On a ainsi un phénomène de compensation qui peut être gênant dans certains cas.

Détaillons l'exemple un peu caricatural du robot cherchant à éviter un obstacle. Soit le système de règles suivant :

1. Si l'obstacle est à gauche, éviter par la *droite*
2. Si l'obstacle est à droite, éviter par la *gauche*
3. Si le chemin est libre, aller *tout droit*

La partition *gauche*, *tout droit* et *droite* est donnée figure 4.3. Les ensembles *gauche* et *droite* sont disjoints. Analysons le cas problématique : si un obstacle est assez large, le robot pourra considérer qu'il est autant à gauche qu'à droite. Dans ce cas là, les règles 1 et 2 seront activées à un niveau égal. La règle 3 ne se déclenche pas parce qu'il y a un obstacle. On peut remarquer que la règle 3 n'est pas vraiment sur le même référentiel que les 2 autres règles. Elle correspond en fait à un comportement par défaut du robot.

Avec un système de règles conjonctives, on obtiendra la sortie de la figure 4.3 . La défuzzification d'une telle sortie nous donnera le sous ensemble du milieu : *tout droit*. Le robot ira donc droit dans l'obstacle.

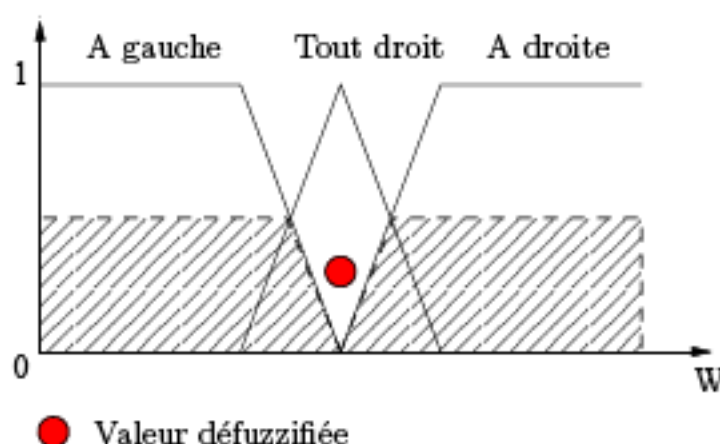


FIG. 4.3: Règles conjonctives et défuzzification

En revanche, avec les règles implicatives et les mêmes ensembles de sorties, le résultat d'une inférence où les ensembles de sortie *droite* et *gauche* sont activés sera l'ensemble vide car l'intersection des résultats sera vide (figure 4.4). Ainsi on pourra déclencher une alarme obligeant le robot à s'arrêter lorsque les règles ne sont pas capables de déduire un résultat à partir de l'état dans lequel se trouve le robot.

Cependant, si l'on a une partition différente en sortie (figure 4.5), les règles implicatives vont permettre les compensations. Ce qui entraînera alors la même conséquence néfaste qu'avec un système de règles conjonctives : *aller tout droit!*

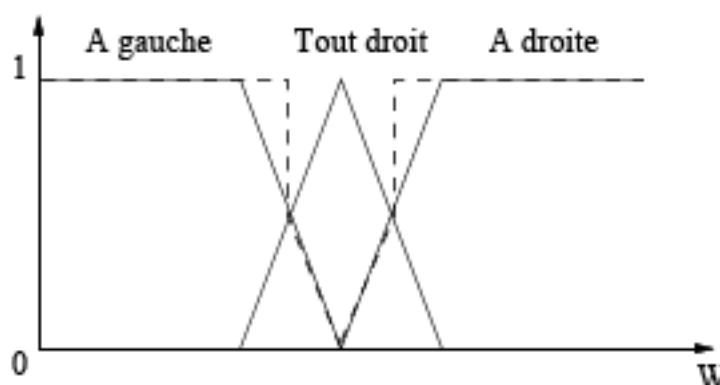


FIG. 4.4: Règles implicatives sans intersection commune en sortie : sortie impossible



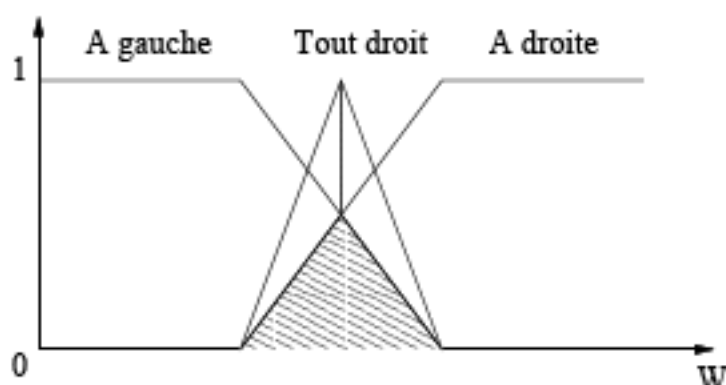


FIG. 4.5: Règles implicatives avec intersection commune en sortie

Pour résumer, avec les règles implicatives, il est possible de décider si l'on veut ou si l'on ne veut pas qu'une compensation soit possible entre deux sous-ensembles flous. En revanche, il faudra être vigilant pour ne pas créer de systèmes incohérents. Nous détaillons le problème de la cohérence en sections 2.4.5 et 3.5.1. La section qui suit s'intéresse à la signification des règles implicatives vis-à-vis des règles conjonctives.

#### 4.2.5 Quantification d'une sortie imprécise : attribution d'étiquettes

Nous nous intéressons ici seulement au noyau des sorties inférées. C'est-à-dire à la partie de la sortie floue qui a la possibilité maximale (1). La sortie inférée étant un intervalle, nous voulons arriver à la caractériser sans perdre l'information de l'imprécision de celle-ci. Notre but est de la comparer avec la sortie réelle qui est le résultat de l'analyse sensorielle d'un panel d'expert. La sortie réelle est donc une valeur numérique entachée d'imprécision et nous souhaitons que les étiquettes permettent de déterminer si notre sortie imprécise inférée est proche de la sortie réelle.

Nous avons mis au point deux étiquettes indiquant :

- la précision de la sortie inférée qui est égal au nombre de sef (sous-ensemble flou) pour lesquels une valeur de la sortie inférée a un degré supérieur aux autres sous-ensembles flous pour cette valeur. Nous avons préféré définir cette précision sans recours à un seuil, ainsi, elle dépend uniquement de la partition de sortie et des sefs majoritaires sur certaines valeurs de l'intervalle inféré.
- l'erreur faite (en nombre de sef). En ce qui concerne la précision de la sortie, celle-ci ne dépend pas directement de la largeur de l'intervalle car un intervalle assez large peut n'appartenir qu'à un seul sous-ensemble flou de sortie. C'est pour cette raison que nous avons choisi de caractériser cette imprécision.

L'étiquette quantifiant la précision peut prendre des valeurs de 1 à  $nb_{sef}$ , le nombre de sous-ensembles de la partition de sortie selon que la sortie inférée recouvre 1 à  $nb_{sef}$  sous-ensembles de la sortie.

L'étiquette quantifiant l'erreur effectuée peut varier de 0 (aucune erreur) à  $nb_{sef} - 1$ . Puisque les sorties représentent des concepts continus et graduels, on verra l'erreur faite en nombre de sef sur une échelle continue.

Montrons les étiquettes données pour un système utilisant 5 règles en sortie. La figure 4.6 illustre une étiquette 30, ce qui correspond à une imprécision de 3 sous-ensembles ( $O_3$ ,  $O_4$  et  $O_5$ ) et une erreur nulle puisque la sortie réelle appartient majoritairement au sous-ensemble  $O_5$ .

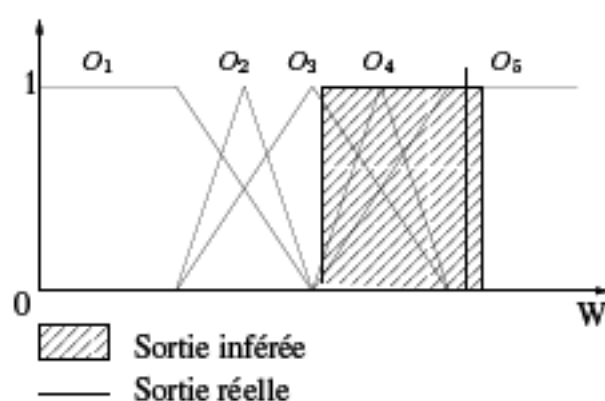


FIG. 4.6: Etiquette 30 sur 5 sefs en sortie

La figure 4.7 illustre une étiquette 10, ce qui signifie que la sortie inférée est précise (un seul sous-ensemble,  $O_5$ , recouvert majoritairement) et juste (erreur nulle).

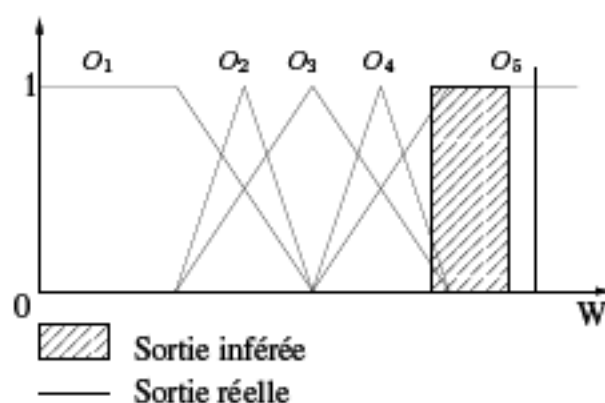


FIG. 4.7: Etiquette 10 sur 5 sefs en sortie

La figure 4.8 illustre une étiquette 14 qui signifie que la sortie inférée est précise (un seul sef  $O_5$  recouvert) mais complètement fautive puisque l'erreur est maximale : le système prédit  $O_5$  alors que la sortie réelle est sur  $O_1$ . L'erreur faite est donc de quatre sous-ensembles flous.

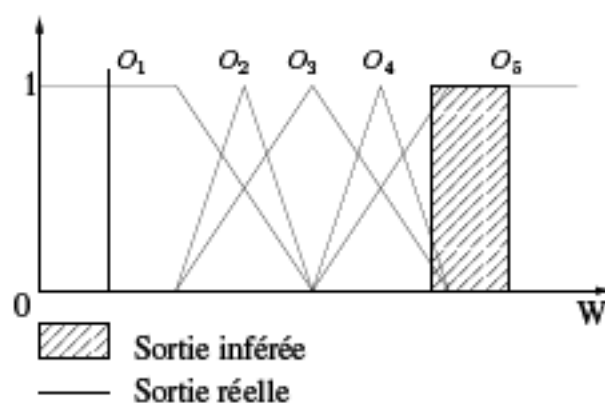


FIG. 4.8: Etiquette 14 sur 5 sefs en sortie

La figure 4.9 illustre une étiquette 22, ce qui correspond à une imprécision de 2 sous-ensembles ( $O_3$  et  $O_4$ ) et à une erreur de 2 sous-ensembles puisque le sous-ensemble le plus proche de la sortie réelle sur  $O_1$  est  $O_3$ .

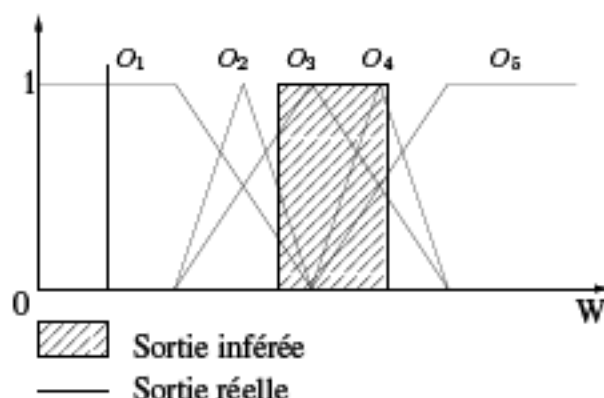


FIG. 4.9: Etiquette 22 sur 5 sels en sortie

Cette méthode permet de rendre compte de la qualité de l'inférence par rapport à deux critères : précision et erreur commise. Lorsque la sortie observée est elle-même imprécise, on pourra faire cette comparaison sur un intervalle. Si on veut retenir de la sortie floue inférée les valeurs qui ne sont pas interdites, on pourra faire cette analyse avec l'intervalle correspondant au support de la cette sortie.

### 4.3 Cohérence et interprétabilité

Les partitions floues fortes ont été utilisées en entrée pour leur propriété intéressante d'indépendance inférentielle. Cette propriété est à la base de notre méthode d'inférence. Les partitions de sortie définies en section 3.5.1 permettent de garantir la cohérence et répondent aussi aux propriétés nécessaires à l'interprétabilité.

#### 4.3.1 Interprétabilité

Nous allons rappeler ici les différentes conditions nécessaires à l'interprétabilité d'un système [De Oliveira - 1999, Espinosa & Vandewalle - 2000, Pedrycz & Oliveira - 1996, Glorennec - 1999, Casillas et al. - 2003b;a].

**Distinguabilité** Afin que chaque label linguistique puisse avoir une signification sémantique, il est nécessaire que chaque ensemble flou de la partition définisse une plage de l'univers distincte de celle de ces voisins.

**Un nombre justifié d'ensembles flous** Le nombre d'ensembles doit être compatible avec le nombre de quantificateurs qu'un être humain peut prendre en compte. Ce nombre ne doit pas dépasser la limite de  $7 \pm 2$  définie par Miller [Miller - 1956]. De plus, la section 4.3.3 montrera qu'il est difficile de dépasser ce nombre de sous-ensembles avec les règles implicatives et de conserver la cohérence et l'interprétabilité du système.

**Normalisation** Un ensemble flou  $A$  est normalisé si  $\exists x$  tel que  $\mu_A(x) = 1$ . En effet, puisque chaque concept a une signification sémantique, chaque concept doit être totalement possible pour au moins une valeur de l'univers. Tous les ensembles flous doivent donc être normalisés pour que la partition soit interprétable [Pedrycz - 1994, Pedrycz & Oliveira - 1996].

**Chevauchement** Tous les ensembles flous de la partition doivent se chevaucher de manière significative. On peut rapprocher cette notion de celle de la couverture du domaine d'intérêt puisque lorsque les ensembles flous de la partition se chevauchent, ils couvrent le domaine d'intérêt.

**Couverture du domaine** Le niveau de couverture  $\varepsilon$  du domaine doit être strictement supérieur à 0. Le niveau de couverture du domaine est défini ainsi sur l'univers d'intérêt  $U$  :

$$\forall u \in U, \exists i \in 1, \dots, n, \mu_{A_i}(u) > \varepsilon$$

pour  $n$  ensembles flous d'entrées  $A_i$ . Lorsque  $\varepsilon > 0$ , le domaine de la partition est totalement couvert.

En entrée du système, une couverture incomplète peut être gênante si une donnée du domaine d'entrée ne correspond à aucune entrée du système. Dans ce cas là, on n'activera aucune règle et on arrivera à un état d'ignorance en sortie.

En sortie du système, une couverture incomplète peut être encore plus gênante car on aura le risque d'activer conjointement des sorties disjointes. Avec les règles conjonctives, il pourrait en découler la défuzzification dans une zone ne correspondant à aucun sous-ensemble flou. Avec les règles implicatives, l'incohérence sera détectée car la sortie sera la clause vide.

Avec des partitions floues fortes [Ruspini - 1969] le niveau de couverture  $\varepsilon$  est supérieur ou égal à 0.5. Avec les partitions définies en section 3.5.1, la variable  $\varepsilon$  est strictement supérieure à 0.5 lorsqu'on a au moins trois sous-ensembles flous pour définir notre partition.

Une couverture complète de l'espace des variables n'est pas forcément suffisante. Effectivement, il est aussi nécessaire que chacune des entrées possibles corresponde au moins à une règle.

En une dimension, il est facile de vérifier la couverture totale des prémisses des règles. En revanche, la complexité augmente rapidement avec le nombre de dimensions d'entrée car il faut que toutes les combinaisons possibles des données d'entrée correspondent à au moins une règle.

### 4.3.2 Couverture

Afin de résoudre le problème de couverture, il existe diverses méthodes :

- Utiliser des fonctions d'appartenance ayant un support infini (fonction Gaussienne) : cette méthode est utilisée en contrôle flou avec des règles conjonctives car elle permet de toujours déclencher une règle même à un niveau très faible. Si ce niveau est faible, la contribution de la règle au résultat du système sera négligeable, ce qui est souhaitable. En revanche, ce fonctionnement n'est pas souhaitable avec des règles implicatives car celles-ci représentent des contraintes sur les valeurs de sortie. Si les entrées ont un support infini, la contrainte est toujours appliquée pour chaque règle existante (puisque toutes les règles sont toujours déclenchées). Si les sorties ont des supports bornés, le système sera sûrement incohérent du fait de l'agrégation conjonctive de celles-ci. Si les sorties ont aussi des supports infinis, alors on ne pourra pas avoir d'incohérence dans le système. Ceci peut être souhaitable en contrôle flou, mais gênant en représentation des connaissances.

- Créer des partitions recouvrant l'espace des entrées (partitions floues fortes le plus souvent) et définir ensuite des règles sur les ensembles ainsi créés. On crée aussi en sortie des partitions recouvrant l'univers d'intérêt. La forme de ces partitions et la raison d'un tel choix est détaillé en section 3.5.1. Par la suite, en section 4.3.3 nous nous intéressons à ces sorties lorsque les partitions d'entrées sont plus complexes (3 sous-ensembles par partition et nombre de sous-ensembles plus important sur une dimension). Cette méthode est la plus intéressante lorsqu'on s'intéresse à la représentation des connaissances.

On peut noter que les propriétés d'interprétabilité des partitions sont intrinsèquement liées à la notion de cohérence. En effet, avec un ensemble de règles implicatives, on aura besoin de chevauchement entre les différents ensembles de sortie afin de garantir la cohérence du système. Néanmoins, il faudra veiller à ce que ce chevauchement ne soit pas trop fort pour que chaque ensemble flou soit distinguable des autres et que la partition reste interprétable par un expert humain.

Nous avons fait le choix d'utiliser des partitions floues fortes en entrée pour faciliter l'inférence et pour leur interprétabilité naturelle. Afin d'éviter les incohérences, la partition de sortie devra donc être construite avec soin. Dans la section suivante, nous abordons ce sujet.

Si on autorise des intersections pour les ensembles flous de sortie, alors en présence de règles implicatives graduelles, le passage d'un concept à un autre se fera de manière graduelle selon l'activation des sorties. Sans intersection, les incohérences du système seront automatiquement détectées.

La section qui suit illustre les problèmes de cohérence des sections 2.4.5 et 3.5.1. En pratique, cette construction des partitions n'est pas évidente. Nous donnons ici une illustration des partitions de sortie possibles selon le nombre de set en entrée, dans le cas d'un système de règles à deux dimensions.

### 4.3.3 Partitions de sortie : illustration en 2D

Nous avons vu les partitions de sortie imposées par le mécanisme d'inférence dans la section 3.5.1. Afin que la base de règles reste cohérente, les partitions de sorties doivent avoir une intersection non vide. Ceci limite donc forcément le nombre de sous ensembles flous de la partition de sortie si l'on veut que le système reste cohérent. Nous présentons différentes illustrations.

#### 4.3.3.1 2 sous-ensembles flous par variable d'entrée

Par exemple, en deux dimensions, si on a 2 sous-ensembles par partition (cf figure 4.10), les règles suivantes peuvent être activées pour une même entrée :

- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{1,1}$
- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{1,2}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{2,1}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{2,2}$

Toutes les règles peuvent être déclenchées simultanément donc  $O_{1,1}$ ,  $O_{1,2}$ ,  $O_{2,1}$  et  $O_{2,2}$  doivent avoir une intersection non vide comme le montre la figure 4.11.  $O_{1,2}$  et  $O_{2,1}$  peuvent être confondus. S'ils le sont, cela signifie que les sorties des règles  $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$  et  $A_2 \wedge B_1 \rightarrow O_{2,1}$  sont les mêmes car  $A$  et  $B$  compensent de la même manière la sortie inférée.

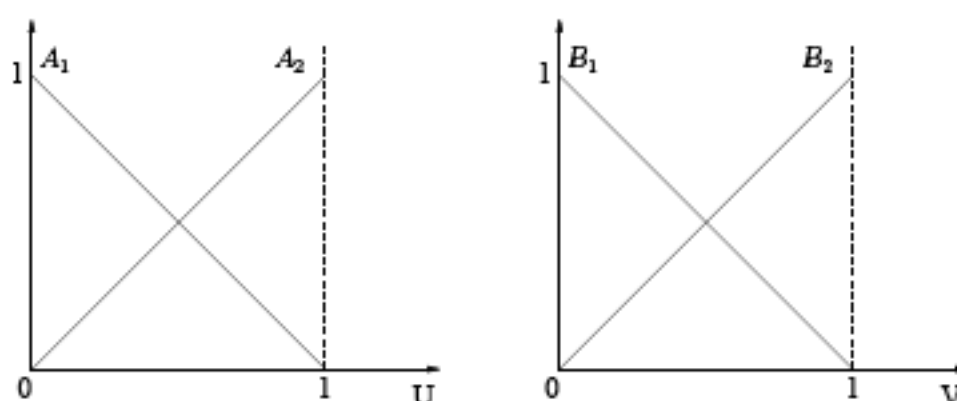


FIG. 4.10: Partitions d'entrée du système

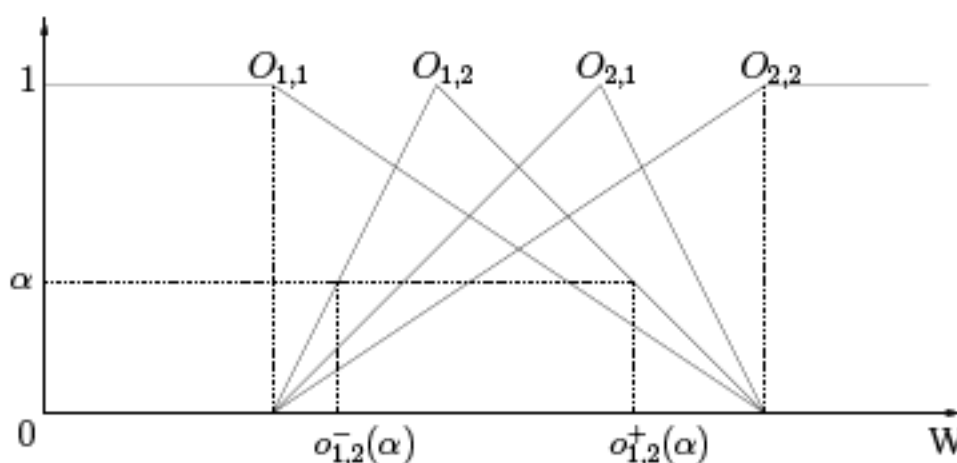


FIG. 4.11: Partition de sortie respectant la cohérence de la base de règles

Nous allons illustrer ce comportement par un système simple :

- Deux variables d'entrées :
  - le *vent* : il peut être *faible* ou *fort*
  - la *nébulosité* : elle peut être *faible* ou *importante*
- Une variable de sortie :
  - la *qualité du temps* : elle est définie par les sous-ensembles suivants : *bonne*, *moyenne* et *mauvaise*

Considérons les règles suivantes :

1. Si le *vent* est *faible* et la *nébulosité* est *faible* alors la *qualité du temps* est *bonne*.
2. Si le *vent* est *faible* et la *nébulosité* est *importante* alors la *qualité du temps* est *moyenne*.
3. Si le *vent* est *fort* et la *nébulosité* est *faible* alors la *qualité du temps* est *moyenne*.
4. Si le *vent* est *fort* et la *nébulosité* est *importante* alors la *qualité du temps* est *mauvaise*.

On voit que dans ce système de règles, les règles 2 et 3 ont la même sortie. Ceci signifie que les variables *vent* et *nébulosité* ont une influence comparable sur le temps : que l'une ou l'autre soit défavorable suffit à déqualifier la qualité du temps. On dira que les entrées se compensent.

La compensation du *vent* sur le temps est équivalente à la compensation liée à la *nébulosité*. La figure 4.12 montre des sous-ensembles cohérents correspondant à cette modélisation.

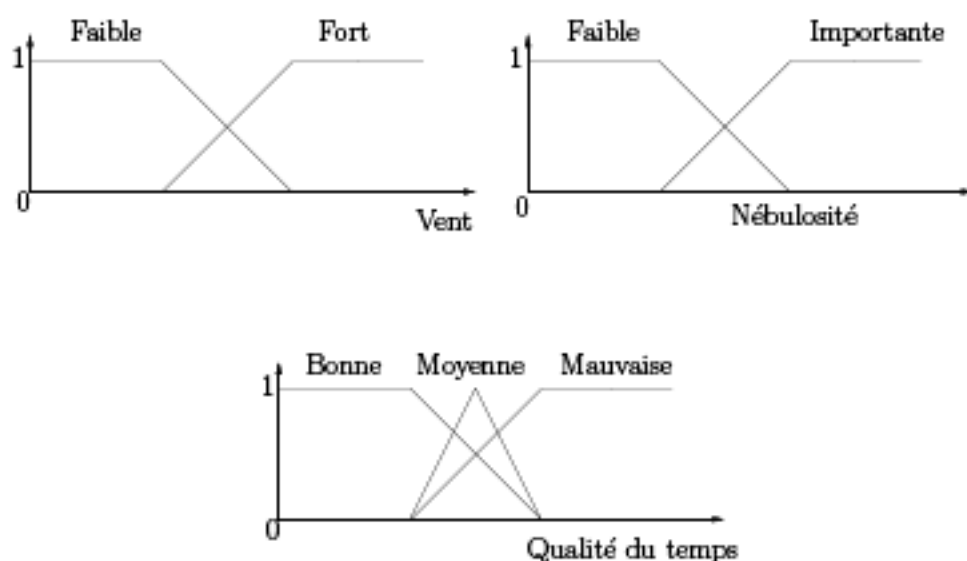


FIG. 4.12: Partitions modélisant le système vent, nébulosité et qualité du temps

Selon le résultat souhaité, il est possible de définir autrement les règles. Par exemple, si on souhaite déterminer la qualité du temps dans le but de faire du cerf-volant. Cette fois-ci, le vent est souhaitable. On peut alors définir le système suivant :

1. Si le *vent* est *faible* et le *nébulosité* est *importante* alors la *qualité du temps* (pour faire du cerf-volant) est *mauvaise*.
2. Si le *vent* est *faible* et le *nébulosité* est *faible* alors la *qualité du temps* (pour faire du cerf-volant) est *moyenne-*.
3. Si le *vent* est *fort* et le *nébulosité* est *importante* alors la *qualité du temps* (pour faire du cerf-volant) est *moyenne+*.
4. Si le *vent* est *fort* et le *nébulosité* est *faible* alors la *qualité du temps* (pour faire du cerf-volant) est *bonne*.

Dans ce cas, on distingue les sous-ensembles de sorties *moyenne-* et *moyenne+* car il est plus important qu'il y ait du vent pour faire du cerf-volant alors qu'il est juste agréable qu'il y ait peu de nuages. La figure 4.13 montre les sous-ensembles correspondant à une telle modélisation.

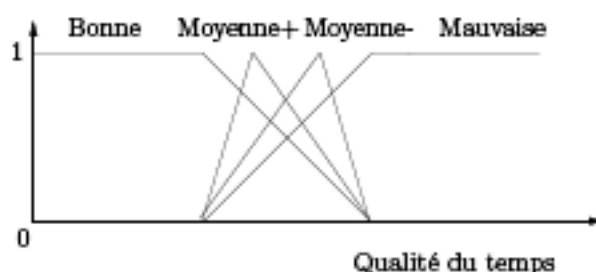


FIG. 4.13: Partitions modélisant le système vent, nébulosité et qualité du temps (pour faire du cerf-volant)

### 4.3.3.2 3 sous-ensembles flous par variable d'entrée

En considérant 3 sous-ensembles flous par entrée, la partition de sortie est plus difficile à déterminer car il est alors possible d'avoir les 9 règles suivantes :

- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{1,1}$
- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{1,2}$
- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_3$  alors  $Z$  est  $O_{1,3}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{2,1}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{2,2}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_3$  alors  $Z$  est  $O_{2,3}$
- Si  $X$  est  $A_3$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{3,1}$
- Si  $X$  est  $A_3$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{3,2}$
- Si  $X$  est  $A_3$  et  $Y$  est  $B_3$  alors  $Z$  est  $O_{3,3}$

En effet, la figure 4.14 illustre graphiquement les combinaisons qui doivent être conjointement possibles. Puisque l'on a des partitions fortes en entrée, il est normal que  $O_{1,1}$  et  $O_{3,3}$  n'aient pas d'intersection commune car il n'est pas possible d'activer en même temps ces règles.

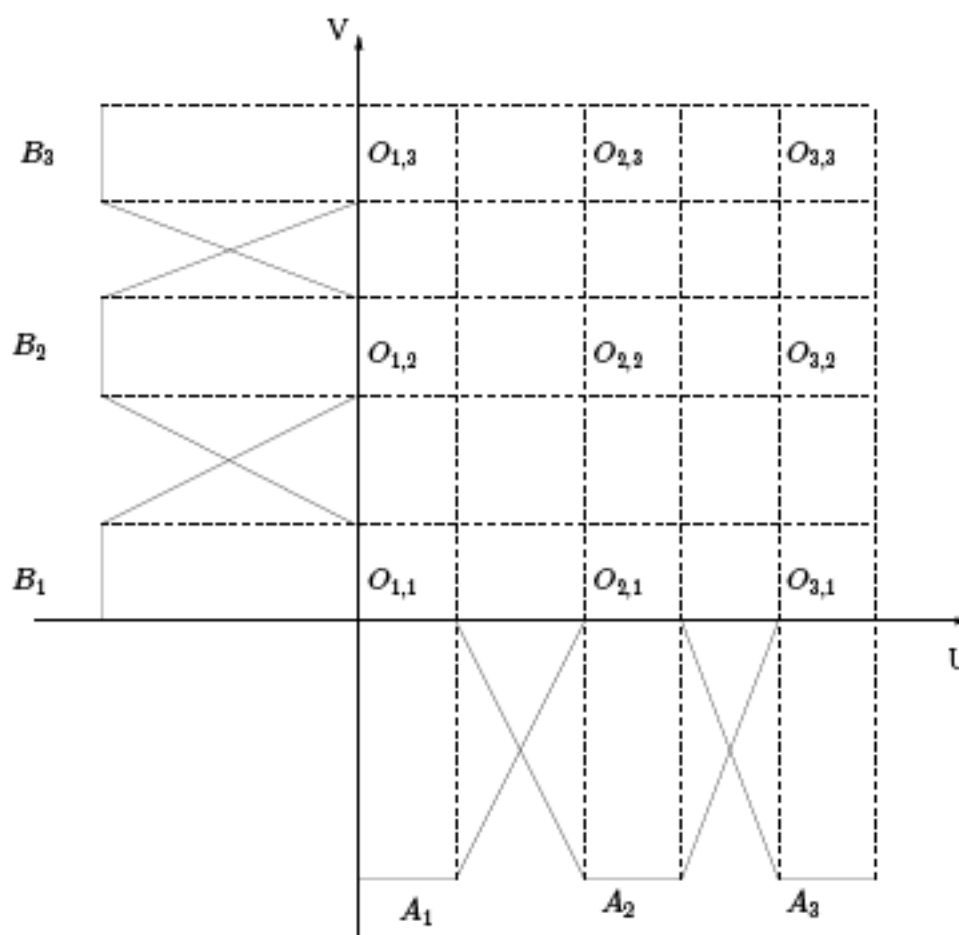


FIG. 4.14: Partitions d'entrée et sortie correspondante

En revanche, toutes les règles doivent avoir une intersection commune avec  $O_{2,2}$ . On en vient donc à tracer la partition de la figure 4.17.



Mais qu'en est-il des sous-ensembles flous  $O_{1,3}$  et  $O_{3,1}$ ? Comment garantir la cohérence vis-à-vis de l'ensemble de règles? En effet,  $O_{1,3}$  doit avoir une intersection commune avec  $O_{1,2}$ ,  $O_{2,3}$  et  $O_{2,2}$ . De la même manière,  $O_{3,1}$  doit avoir une intersection commune avec  $O_{2,1}$ ,  $O_{2,2}$  et  $O_{3,2}$ . Une solution est donc de définir  $O_{1,3} = O_{3,1} = O_{2,2}$ . Ainsi il existe des intersections communes et la partition reste cohérente et interprétable. On peut, bien sûr, aussi prendre  $O_{1,2}$  et  $O_{2,1}$  confondus ainsi que  $O_{2,3}$  et  $O_{3,2}$ . Cette partition est fonctionnelle pour le raisonnement en présence de phénomènes graduels. Chaque entrée influe donc de manière significative et graduelle sur la sortie. Il est donc normal qu'une entrée puisse compenser l'autre entrée. On parle alors de compensation graduelle entre les entrées. On remarquera que si toutes les combinaisons d'entrée sont possibles, il faudra définir une des deux diagonales ( $O_{1,3}$ ,  $O_{3,1}$  et  $O_{2,2}$ ) ou ( $O_{1,1}$ ,  $O_{2,2}$  et  $O_{3,3}$ ) sur un même sous-ensemble afin de garantir la cohérence du système.

Selon la granularité désirée en sortie, il est possible de créer différentes partitions (figures 4.15, 4.16 et 4.17). La partition de sortie sur deux sous-ensembles flous ne correspond pas à un ensemble de règles de trois sous-ensembles par dimension. En effet, le système serait alors tellement simplificateur que le nombre de 3 sous-ensembles par dimension ne serait plus justifié. Il faut au moins trois sous-ensembles en sortie pour utiliser une telle granularité en entrée (3 sous-ensembles par dimension).

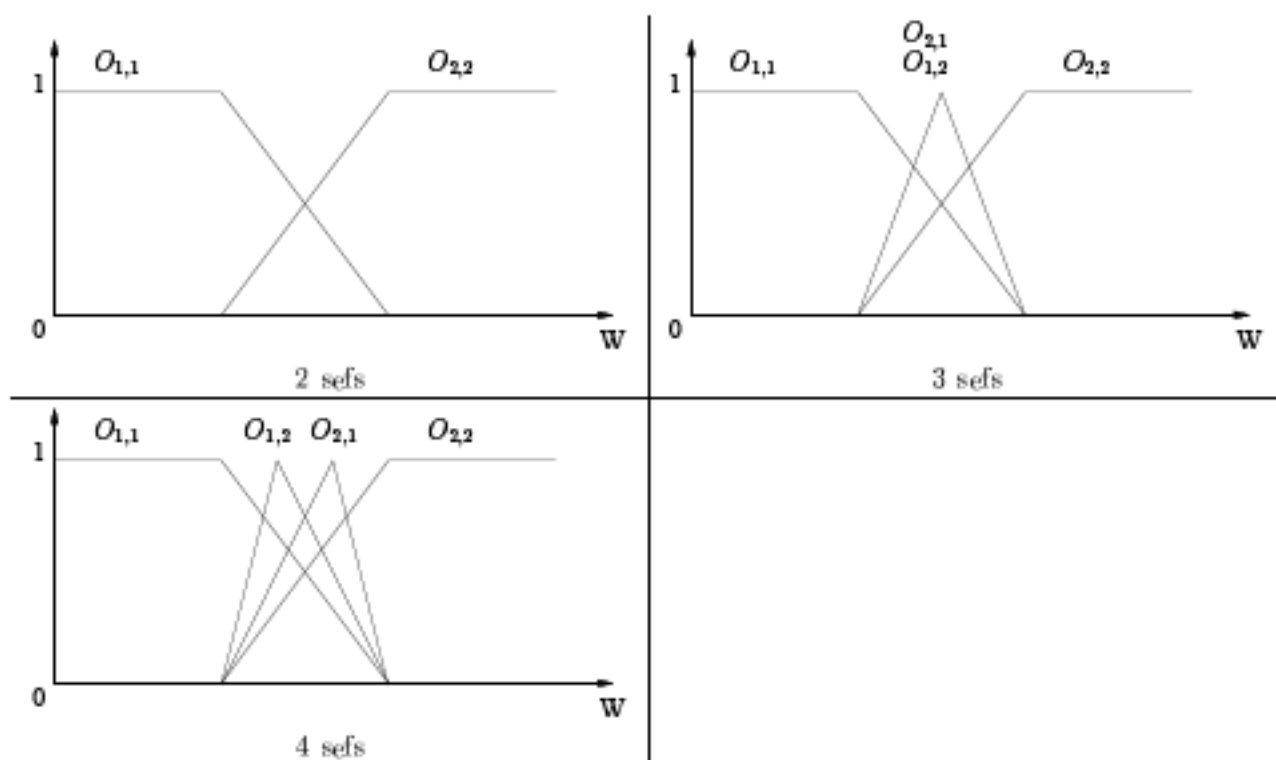


FIG. 4.15: Partitions de sortie (entre 2 et 4 termes)

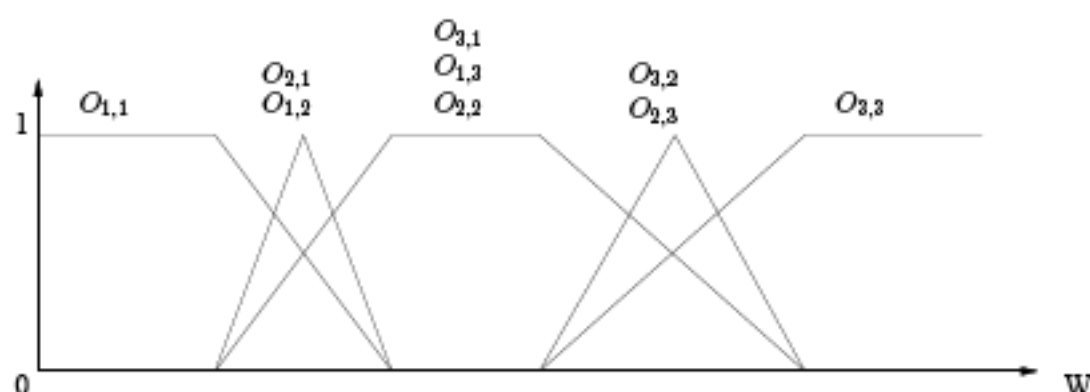


FIG. 4.16: Partition de sortie (5 termes)

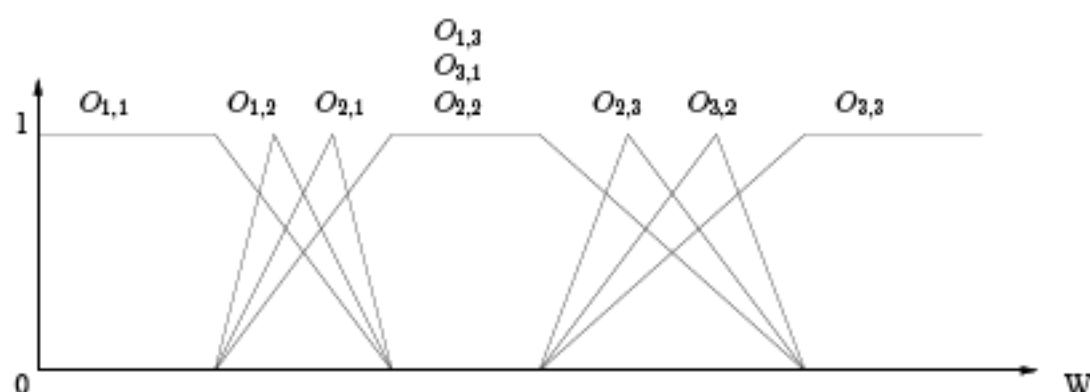


FIG. 4.17: Partition de sortie (7 termes)

Au dessus de 7 sous-ensembles flous par partition, on peut considérer que le système n'est plus interprétable par un expert humain [Miller - 1956]. Nous nous limiterons donc à ce nombre. On peut même penser que 5 sous-ensembles par partition est un chiffre permettant de prendre en compte une granularité déjà fort intéressante. Le passage à 7 sous-ensembles n'est indispensable que lorsqu'on souhaite donner des significations différentes aux règles  $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$  et  $A_2 \wedge B_1 \rightarrow O_{2,1}$  ou  $A_2 \wedge B_3 \rightarrow O_{2,3}$  et  $A_3 \wedge B_2 \rightarrow O_{3,2}$ . Il faudra donc veiller à utiliser un nombre de sous-ensembles limités en entrée si on veut conserver une partition cohérente et interprétable en sortie. Cette différence avec les systèmes de règles conjonctifs est très importante et impose une réflexion supplémentaire sur les partitions.

#### 4.3.3.3 Nombre différent de sous-ensembles flous dans chaque dimension

Si on a un nombre différents de sous-ensembles flous sur chaque dimension : 2 entrées sur  $U$  et 3 sur  $V$  par exemple, les 6 règles suivantes sont alors possibles :

1. Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{1,1}$
2. Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{1,2}$
3. Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_3$  alors  $Z$  est  $O_{1,3}$
4. Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{2,1}$

5. Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{2,2}$
6. Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_3$  alors  $Z$  est  $O_{2,3}$

On voit que la partition de sortie se trouve déséquilibrée par ce système. Afin de conserver la cohérence du système, les entrées pouvant être activées conjointement doivent avoir une intersection non vide :

- Puisque  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  alors  $O_{1,1} \cap O_{2,1} \neq \emptyset$ ,  $O_{1,2} \cap O_{2,2} \neq \emptyset$  et  $O_{1,3} \cap O_{2,3} \neq \emptyset$ .
- Puisque  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  alors  $O_{1,1} \cap O_{1,2} \neq \emptyset$  et  $O_{2,1} \cap O_{2,2} \neq \emptyset$ .
- Puisque  $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$  alors  $O_{1,2} \cap O_{1,3} \neq \emptyset$  et  $O_{2,2} \cap O_{2,3} \neq \emptyset$ .

Il sera donc nécessaire que  $O_{2,2}$  soit confondu avec  $O_{1,3}$  (figure 4.18-(a)) ou  $O_{1,2}$  (figure 4.18-(b)). Le choix entre la partition (a) ou (b) dépend du problème à modéliser.

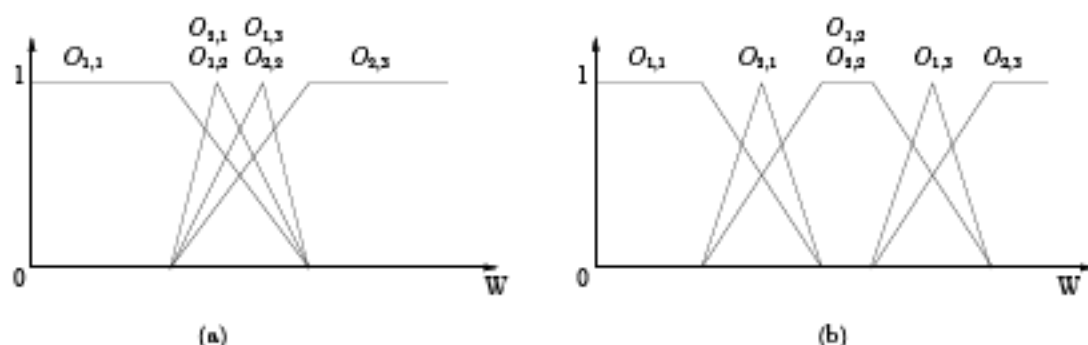


FIG. 4.18: Partitions de sortie lorsqu'on a un nombre différents de concepts par dimension

Il faut être bien conscient de ces difficultés de choix de la partition de sortie pour construire un modèle à base de règles réaliste. Nous allons à présent aborder l'utilisation de plusieurs systèmes de règles implicatives, autre point important de la modélisation d'un système réel.

#### 4.4 Coopération de plusieurs systèmes de règles floues

Dans cette section, nous allons développer différentes manières de préciser la sortie d'un système en utilisant des systèmes d'inférence floue.

- *ajout d'une variable dans la base de règles* : on rajoute alors une variable et des règles directement dans le système et on reprend le processus d'inférence au début. Ceci revient en fait à inférer à partir d'un nouveau système de règles qui contient une variable de plus. Ajouter une nouvelle variable dans un système de règles implicatives rendra la sortie plus précise.
- *en parallèle* : il s'agit de réduire le champs des possibles pour une sortie trop imprécise. On considère qu'une sortie est trop imprécise si elle recouvre plusieurs sous-ensembles de la sortie, ce qui ne permet pas de lui associer de manière sûre un concept.
- *en cascade* : il s'agit de réutiliser le résultat obtenu par un système de règles comme l'une des entrées d'un nouveau système de règles. On peut noter que dans cette situation, la sortie réutilisée est souvent floue.

Tout d'abord, nous rappellerons brièvement que le raffinement est impossible avec un ensemble de règles conjonctives. Ensuite, nous montrerons que la coopération en parallèle ou en cascade est une technique intéressante pour les règles implicatives. En effet, elle permet de coupler plusieurs systèmes de petites dimensions (1D ou 2D) afin d'obtenir un système multidimensionnel. Avec

des entrées floues, l'inférence au delà de 2 dimensions peut s'avérer très complexe comme nous l'avons montré (section 3.6). Le raffinement peut se faire en parallèle si l'on souhaite que chaque système ait la même influence sur le résultat final ou en cascade, si l'on souhaite modéliser des processus séquentiels dont la sortie serait ré-utilisée comme entrée d'un nouveau système. Nous allons à présent détailler les deux types de chaînage possibles avec des règles implicatives.

#### 4.4.1 Règles conjonctives : raffinement impossible

On peut rappeler qu'il n'est pas possible de raffiner à partir de règles conjonctives car celles-ci sont des exemples de valeurs conjointement possibles. Rajouter des règles ne fera alors que rendre la sortie plus imprécise.

Un exemple simple permet de nous en rendre compte. Soit un système de 3 règles conjonctives :

- Si  $X$  est  $A_1$ , alors  $Z$  est  $O_1$
- Si  $X$  est  $A_2$ , alors  $Z$  est  $O_2$
- Si  $X$  est  $A_3$ , alors  $Z$  est  $O_3$

Soit une donnée entre  $A_1$  et  $A_2$ . Alors les sorties  $O_1$  et  $O_2$  sont toutes les deux activées à des niveaux différents comme illustré sur la figure 4.19.

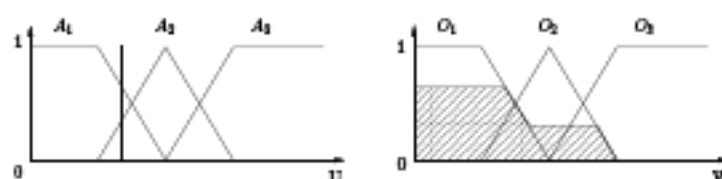


FIG. 4.19: Inférence à partir d'un système de règles conjonctives

Intuitivement, si on cherche à raffiner le système, on peut par exemple rajouter une variable  $B$  et 3 règles au système :

1. Si  $X$  est  $A_1$ , alors  $Z$  est  $O_1$
2. Si  $X$  est  $A_2$ , alors  $Z$  est  $O_2$
3. Si  $X$  est  $A_3$ , alors  $Z$  est  $O_3$
4. Si  $Y$  est  $B_1$ , alors  $Z$  est  $O_1$
5. Si  $Y$  est  $B_2$ , alors  $Z$  est  $O_2$
6. Si  $Y$  est  $B_3$ , alors  $Z$  est  $O_3$

On a cherché à rendre le système plus précis en rajoutant une variable. Mais on voit en fait que si une donnée  $Y$  appartient à l'ensemble  $B_3$ , alors le système sera plus imprécis en sortie.

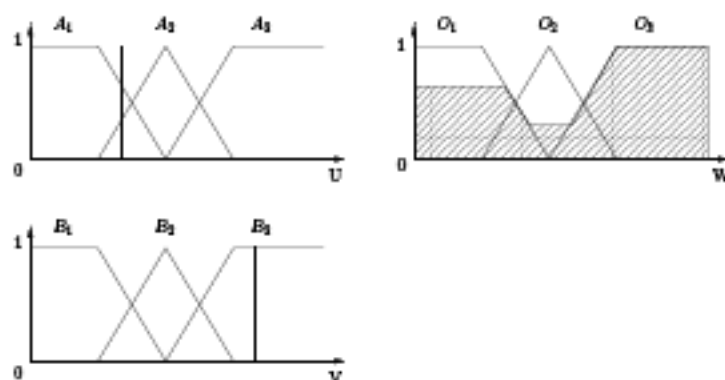


FIG. 4.20: Inférence à partir d'un système de règles conjonctives avec une variable supplémentaire

Ce petit exemple rappelle que l'ajout de variable rend la sortie moins précise avec un ensemble de règles conjonctives.

#### 4.4.2 Collaboration entre systèmes de règles implicatives

Nous développerons deux méthodes de collaboration entre systèmes : en parallèle et en cascade, en analysant leur intérêt respectif, avant de montrer comment les combiner.

##### 4.4.2.1 En parallèle

La figure 4.21 montre le principe de fonctionnement du raffinement en parallèle. Puisqu'avec les règles implicatives chaque règle exprime une restriction du domaine des possibles, ajouter une nouvelle variable et de nouvelles règles dans une base de règles revient donc à imposer une nouvelle contrainte au système de règles. Lorsqu'une sortie est trop imprécise, il peut être nécessaire de raffiner ce résultat en utilisant d'autres informations. On considère qu'une sortie est trop imprécise si elle recouvre plusieurs sous-ensembles de la sortie, ce qui ne permet pas de lui associer de manière sûre un concept.

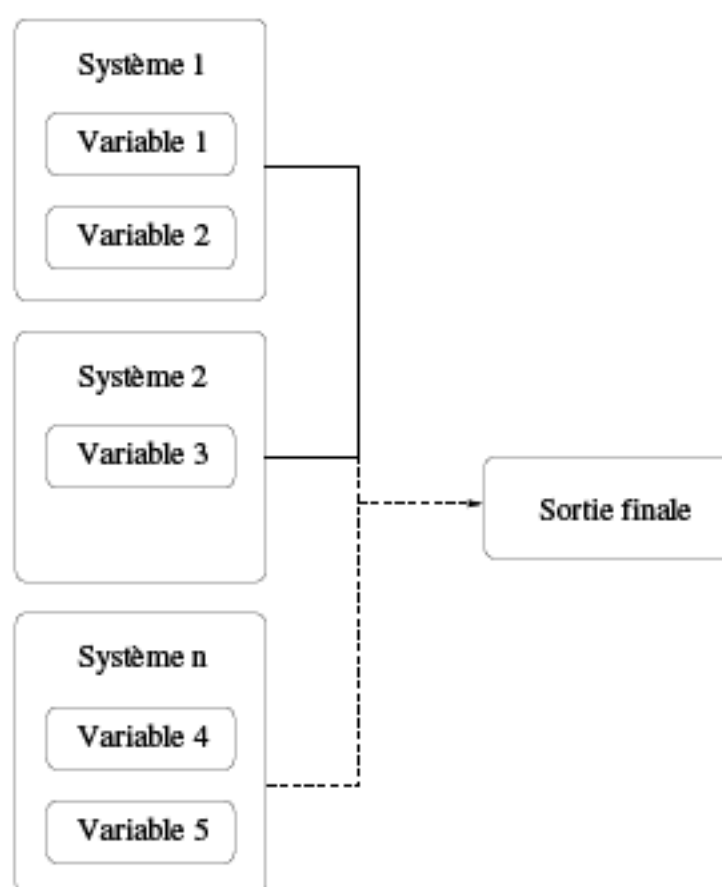


FIG. 4.21: Principe du raffinement en parallèle

L'inconvénient du raffinement est le risque d'incohérences. En effet, si l'intersection des sorties issues de deux systèmes est vide, la sortie globale du système sera alors impossible. Une solution est de choisir un des deux systèmes comme prioritaire et d'utiliser l'autre que lorsqu'il rend les résultats du premier plus fins (il ne pourra pas les rendre plus imprécis). En effet, il n'est pas forcément utile de raffiner des sorties qui sont déjà précises car on ne pourra qu'être plus précis en cumulant d'autres variables. De plus, en raffinant une sortie précise, le risque d'incohérence du système est plus grand. Néanmoins, la méthode de raffinement est intéressante pour préciser les sorties imprécises. Une sortie sera dite imprécise en fonction du nombre de sous-ensembles qu'elle recouvre (cf. étiquettes en section 4.2.5) et en fonction de la précision souhaitée pour ce type de problème.

On utilise plusieurs systèmes opérant sur le même univers de sortie. Puisque l'agrégation des règles implicatives est conjonctive, l'intersection des deux sorties obtenues correspondra à la sortie raffinée.

#### 4.4.2.2 En cascade

La figure 4.23 montre le principe de fonctionnement du raffinement en cascade. L'objectif d'un tel chaînage est de pouvoir combiner des systèmes de manière séquentielle. Lorsqu'on souhaite utiliser une sortie d'un système comme entrée d'un autre système, il est important de prendre en compte certains aspects :

- Le passage de l'univers de sortie à l'univers d'entrée : La variable de sortie est exprimée sur des partitions avec chevauchement alors que la partition d'entrée du système doit être une partition forte si on veut conserver des propriétés intéressantes pour l'inférence (indépendance inférentielle notamment). Il faut donc réfléchir au passage de la partition d'entrée à la partition de sortie. Il existe différentes solutions pour effectuer cette transition. Soit on supprime le sous-ensemble responsable du chevauchement sur la partition, soit on modifie les deux sous-ensembles qui formaient une partition forte en sortie (cf figure 4.22). Le choix des partitions d'entrée dépendra en fait du nombre de sous-ensembles flous dont on a besoin pour exprimer les règles qu'on souhaite implémenter dans le nouveau système de règles.

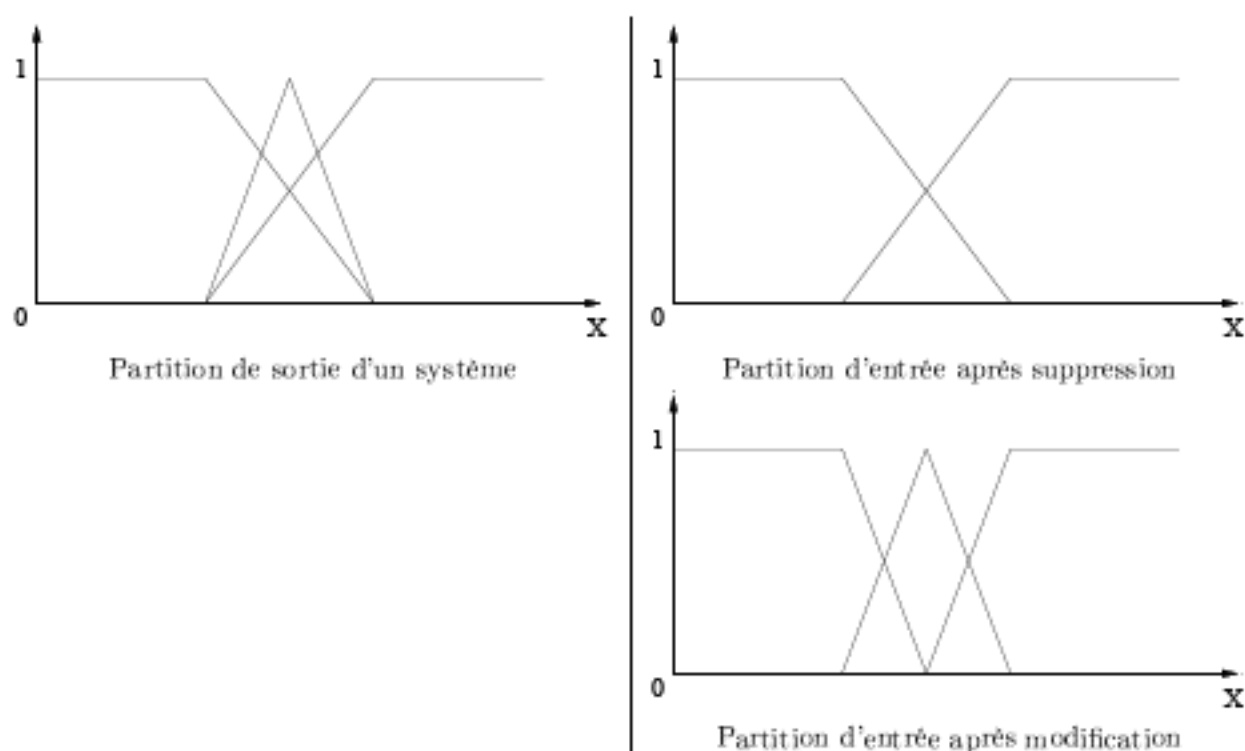


FIG. 4.22: Reconstruction de la partition d'entrée à partir de la partition de sortie

Le choix de supprimer une partition dépendra des règles souhaitées. Si on a besoin d'un sous-ensemble flou intermédiaire, alors on choisira la partition modifiée. Dans le cas contraire, on choisira d'exprimer les règles sur deux sous-ensembles flous en sortie.

- Le respect de l'imprécision : on réutilise l'ensemble flou de sortie comme entrée du nouveau système. Les règles implicatives se prêtent bien à cette ré-utilisation car l'imprécision de la sortie est raisonnable. On ne réduira donc pas le système par une méthode de défuzzification. Ceci confirme l'incontournabilité de l'inférence à partir d'une entrée floue.

On peut noter que la sortie inférée sera déjà décomposée par  $\alpha$ -coupes. On pourra donc la conserver ainsi sans effectuer une nouvelle décomposition par  $\alpha$ -coupes. Il est aussi possible d'effectuer une nouvelle décomposition si on veut une approximation plus fine ou plus grossière de l'entrée du système. De la même manière, si seuls les faits totalement possibles nous intéressent, on pourra seulement conserver le noyau comme une entrée rectangulaire du nouveau système. En revanche, l'étape de décomposition par partitionnement sera nécessaire.

Le système en cascade correspond bien à un processus séquentiel, où l'entrée d'une étape est le résultat de l'étape précédente.

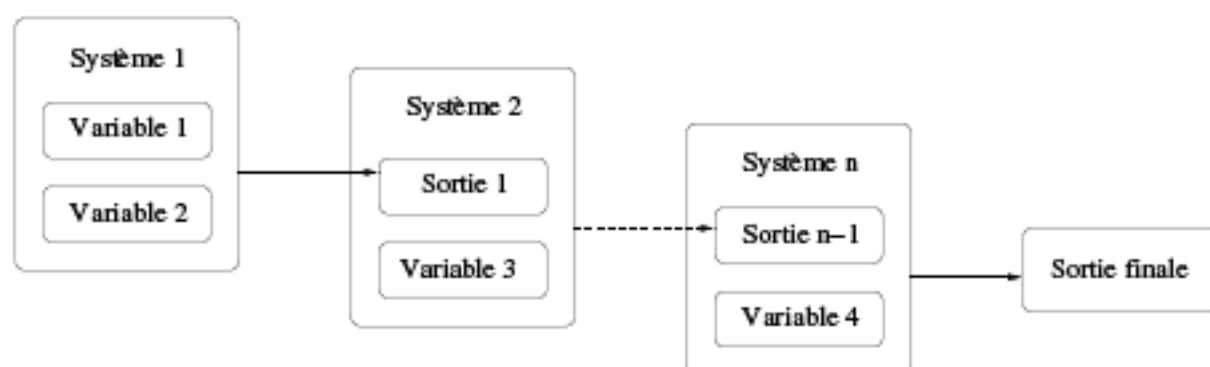


FIG. 4.23: Principe du raffinement en cascade

#### 4.4.2.3 Combinaison des deux types de structures

Il est aussi possible de combiner ces deux types de collaboration lorsqu'on a à la fois des éléments à coupler en parallèle et des sorties à réutiliser dans un processus séquentiel comme l'illustre la figure 4.24.



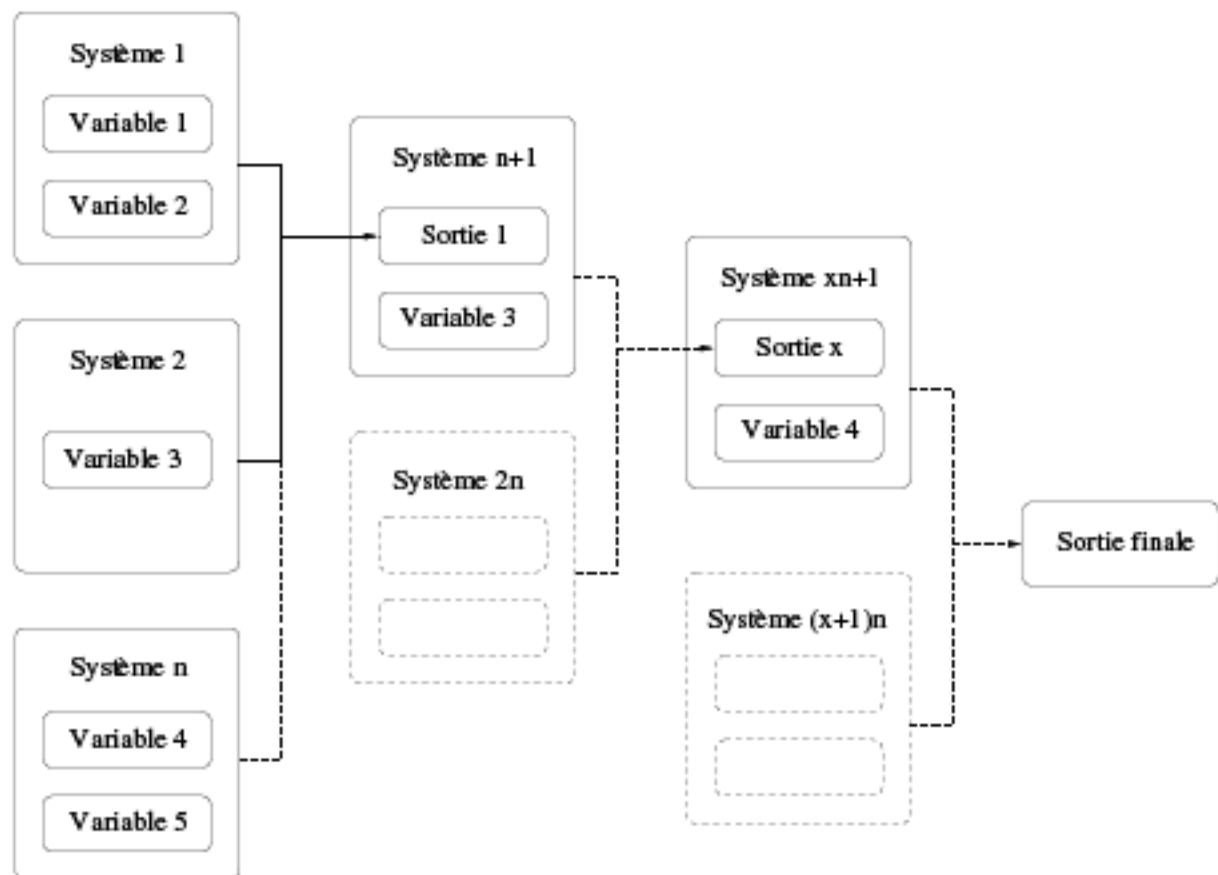


FIG. 4.24: Couplage de raffinement en cascade et en parallèle

Nous venons de voir que l'intérêt de la collaboration entre systèmes est aussi de construire des systèmes utilisant de nombreuses variables en les couplant en parallèle ou de manière séquentielle. Plus le nombre de systèmes sera important, plus le risque d'être incohérent sera grand. Cette technique est néanmoins intéressante car elle permet de traiter un système complexe de manière locale en utilisant des systèmes plus simples.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu quelques éléments d'utilisation pratique des règles implicatives.

Le point fondamental concerne leur signification. En effet, les règles usuellement utilisées dans les systèmes d'inférence sont les règles conjonctives. Or, une interprétation similaire à l'interprétation des règles conjonctives serait erronée car les règles implicatives ne représentent pas du tout le même type d'information. Les règles conjonctives sont adaptées à la représentation d'une accumulation de données floues et les règles implicatives à la représentation de contraintes floues. Il est donc important que l'utilisateur, expert du domaine, voit l'intérêt de ces deux représentations qui sont très différentes par leur signification.

Nous avons présenté les manières de respecter l'interprétabilité des partitions et leur signification pour des règles implicatives. Les notions d'interprétabilité et de cohérence sont liées car,

---

avec les règles implicatives, un chevauchement des sous-ensembles flous de sortie doit exister si l'on veut que le système de sortie soit cohérent. Cependant, si ce chevauchement est trop fort, le système n'est plus interprétable. Il est donc nécessaire de trouver le bon compromis entre interprétabilité et cohérence du système. Nous avons illustré la difficulté de construction des partitions de sortie, quand la granularité des partitions d'entrée augmente, et proposé des solutions.

Le respect de l'imprécision d'une entrée est indispensable lorsqu'on veut prendre en compte l'incertitude sur les données d'un système. En effet, il est normal que l'imprécision des entrées soit propagée en sortie du système. Contrairement aux règles conjonctives, avec les règles implicatives, l'imprécision en sortie reste interprétable car elle est raisonnable par rapport à l'imprécision de la sortie inférée à partir de règles conjonctives. Nous avons proposé des étiquettes permettant de quantifier les sorties imprécises, quant à la largeur de l'intervalle noyau et à l'erreur commise par rapport à la sortie observée, précise ou floue.

De plus, lorsque l'on souhaite chaîner des systèmes, il est important de pouvoir garder l'information de l'imprécision aux différentes étapes de l'inférence. La combinaison de systèmes peut se faire de deux manières en utilisant des systèmes en parallèle ou en utilisant la sortie d'un système comme entrée d'un nouveau système. Dans le deuxième cas, les méthodes d'inférence à partir d'entrées floues sont indispensables pour respecter le caractère imprécis de la sortie ré-utilisée comme entrée. En chaînant les systèmes, il sera possible d'inférer avec un nombre de dimension globalement important en se ramenant localement à des systèmes plus simples.

Il serait intéressant de construire des systèmes permettant de faire interagir les règles implicatives et les règles conjonctives au sein d'une même base de règles [Dubois & Prade - 1992d, Weisbrod - 1996, Ughetto - 1998b, Ughetto et al. - 2001]. En effet, un système complexe contient différents types d'information :

- Des modèles donnés par des experts ou des contraintes physico-chimiques sur le procédé.
- Des valeurs garanties possibles qui peuvent être obtenues à partir de données observées ou du raisonnement par similarité d'un expert.

Ainsi, le processus d'inférence permettra de fournir une borne inférieure et une borne supérieure des valeurs possibles. On pourra alors mieux déterminer la valeur de sortie en couplant ces deux informations. La vérification de la cohérence restera une étape indispensable pour traiter ces deux types d'information conjointement.

---

---

**Figures**

4.1	Inférence d'une entrée imprécise implicative/conjonctive . . . . .	77
4.2	Résultat de l'inférence pour une entrée de 52.5 (Godël ou Goguen) . . . . .	78
4.3	Règles conjonctives et défuzzification . . . . .	79
4.4	Règles implicatives sans intersection commune en sortie : sortie impossible . . . . .	79
4.5	Règles implicatives avec intersection commune en sortie . . . . .	80
4.6	Étiquette 30 sur 5 sefs en sortie . . . . .	81
4.7	Étiquette 10 sur 5 sefs en sortie . . . . .	81
4.8	Étiquette 14 sur 5 sefs en sortie . . . . .	81
4.9	Étiquette 22 sur 5 sefs en sortie . . . . .	82
4.10	Partitions d'entrée du système . . . . .	85
4.11	Partition de sortie respectant la cohérence de la base de règles . . . . .	85
4.12	Partitions modélisant le système vent, nébulosité et qualité du temps . . . . .	86
4.13	Partitions modélisant le système vent, nébulosité et qualité du temps (pour faire du cerf-volant) . . . . .	86
4.14	Partitions d'entrée et sortie correspondante . . . . .	87
4.15	Partitions de sortie (entre 2 et 4 termes) . . . . .	88
4.16	Partition de sortie (5 termes) . . . . .	89
4.17	Partition de sortie (7 termes) . . . . .	89
4.18	Partitions de sortie lorsqu'on a un nombre différents de concepts par dimension . . . . .	90
4.19	Inférence à partir d'un système de règles conjonctives . . . . .	91
4.20	Inférence à partir d'un système de règles conjonctives avec une variable supplémentaire . . . . .	92
4.21	Principe du raffinement en parallèle . . . . .	93
4.22	Reconstruction de la partition d'entrée à partir de la partition de sortie . . . . .	94
4.23	Principe du raffinement en cascade . . . . .	95
4.24	Couplage de raffinement en cascade et en parallèle . . . . .	96

---

## Chapitre 5

# Application à la fabrication fromagère de Comté

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>Contexte</b>	<b>100</b>
5.2.1	Le Comté	100
5.2.2	Evaluation du Comté	109
5.2.3	Filière Comté et Centre Technique des Fromages Comtois (CTFC)	110
5.2.4	Un besoin d'anticipation	111
<b>5.3</b>	<b>Informations disponibles et objectifs</b>	<b>111</b>
5.3.1	Données	112
5.3.1.1	Méthodes de mesure	112
5.3.1.2	Présentation des données	113
5.3.2	Connaissances expertes	115
5.3.2.1	Les connaissances sur le rôle des différentes variables	115
5.3.2.2	Exemples de formalisation par les techniciens	117
5.3.3	Objectifs	118
<b>5.4</b>	<b>Etude de trois systèmes de règles</b>	<b>119</b>
5.4.1	Rappel sur la quantification des résultats	119
5.4.2	Un premier système expert simple	122
5.4.3	Rappel sur les arbres de décision classiques	127
5.4.3.1	Définitions	127
5.4.3.2	Algorithme CART (Breiman)	128
5.4.4	Système créé à partir des données	129
5.4.4.1	Arbre binaire induit	129
5.4.4.2	Construction du système de règles implicatives	131
5.4.4.3	Résultats règles implicatives	135
5.4.5	Système expert et raffinement	135
5.4.5.1	Système considéré	135
5.4.5.2	Analyse des prédictions imprécises et très imprécises	142
5.4.5.3	Création d'un système à partir de ces résultats	143
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>148</b>

---

## 5.1 Introduction

L'application traitée est un procédé agro-alimentaire : la fabrication du fromage de Comté. C'est un exemple de fabrication artisanale utilisant une matière première ayant une variabilité importante : le lait cru. C'est ce qui fait sa richesse, mais c'est aussi ce qui complexifie le processus.

Le but de ce travail est de prévoir les caractéristiques du fromage après affinage (4 à 10 mois) à partir des données avant affinage. On souhaite utiliser seulement les données avant affinage car il est important de détecter les problèmes le plus tôt possible afin de pouvoir réagir sur le processus pour corriger les fromages fabriqués par la suite. L'enjeu est donc de prédire les différentes caractéristiques du Comté afin d'estimer les possibilités de défauts. De nombreuses caractéristiques sont intéressantes dans cette optique. Nous avons effectué nos tests sur la *fermeté* de la pâte mais l'enjeu est à terme de pouvoir prévoir toutes les caractéristiques de celle-ci.

L'usage des règles floues implicatives graduelles se justifie par :

- la variabilité du processus : les ensembles flous sont nécessaires pour modéliser des concepts variables ou imprécis.
- le besoin d'un système transparent : il est aussi nécessaire de connaître les raisons de la prédiction d'un défaut afin de pouvoir expliquer au fromager le raisonnement fait. Il est donc naturel d'utiliser des systèmes de règles floues pour cette représentation.
- les connaissances expertes : l'utilisation de règles floues implicatives est nécessaire lorsqu'on souhaite représenter des connaissances expertes s'exprimant sous forme de contraintes comme c'est le cas dans le procédé étudié.
- l'échelle continue en sortie : les caractéristiques en sortie sont sur une échelle continue. Le passage d'un concept à un autre se fera donc de manière graduelle.

On peut aussi noter que les données disponibles sont entachées d'imprécision provenant des capteurs ou de l'analyse sensorielle. Les règles implicatives graduelles sont donc appropriées pour cette représentation car on est en présence d'informations graduelles et de connaissances expertes.

Tout d'abord, nous exposons le contexte de cette application en section 5.2, puis nous présentons les informations disponibles et les objectifs du projet en section 5.3. Ensuite nous étudions trois systèmes de règles en section 5.4, chacun d'entre eux permettant d'illustrer concrètement les éléments méthodologiques vus dans les chapitres précédents : comparaison des règles conjonctives et implicatives, partitions de sortie adaptées aux règles implicatives, raffinement par coopération de plusieurs systèmes. Nous ferons également en section 5.4.3 un bref rappel sur les arbres de décision, qui nous ont guidés dans les processus de raffinement.

## 5.2 Contexte

### 5.2.1 Le Comté

Le Comté est un fromage français AOC principalement produit en Franche-Comté. Son aire de production s'étend sur les départements du Jura, du Doubs et de l'Ain comme le montre la figure 5.1. L'Appellation d'origine contrôlée (AOC) est un signe français identifiant l'origine de produits alimentaires traditionnels français. Ils font partie des Appellations d'origine protégée européennes (AOP). Le Comté est le premier fromage AOC de France avec environ 40000 tonnes de Comté produites chaque année.



FIG. 5.1: Départements de fabrication du Comté

L'appellation AOC garantit un cahier des charges sur les procédés d'élevage, de fabrication du fromage et de son affinage.

C'est un fromage au lait cru de vache, à pâte pressée cuite. Il se présente en grandes meules de 65 cm de diamètre et d'un poids moyen de 40 kg. Il faut environ 450 litres de lait pour produire une seule meule de comté. C'est un aliment riche en phosphore, en calcium, en sels minéraux et en protéines.

On peut distinguer trois phases dans la fabrication du Comté :

1. **L'élaboration du lait** : le lait est utilisé cru, il doit provenir de vaches de race Montbéliarde, de race Simmental française ou d'un croisement des deux races. Sur l'exploitation, la superficie herbagère doit être au minimum égale à 1 hectare par vache laitière. Le lait doit être apporté à l'atelier de fabrication dans le plus bref délai après chaque traite. Le lait peut n'être emporté à l'atelier de fabrication qu'une fois par jour s'il est correctement refroidi. Le lait est collecté (figure 5.2) puis acheminé par camion citerne (figure 5.3).



FIG. 5.2: Collecte du lait



FIG. 5.3: Acheminement du lait par camion citerne

2. **La fabrication du fromage** (en 20 heures) : la fabrication du fromage est la phase la plus importante du procédé. Le Comté est élaboré artisanalement dans environ 200 petites fromageries de village, les "fruitières", des coopératives, ou des entreprises qui collectent chaque jour le lait des fermes alentour. Les paysans amènent leur production dans des "houilles à lait" attelées à leur voiture ou tracteur. Ou, moins typique, c'est un camion-citerne qui fait la tournée dans les fermes les plus éloignées du village. La fabrication dure 20 heures et se compose de plusieurs étapes :

- **L'emprésurage** : l'emprésurage d'un fromage est l'opération d'ajout d'un coagulant, la présure, pour le faire cailler. En France, la présure animale est imposée par la réglementation en vigueur pour les fromages AOC. Pour le Comté, il s'agit de présure de veau. La figure 5.4 montre l'emprésurage d'un fromage.



FIG. 5.4: Emprésurage d'un fromage

- Le décaillage : le décaillage (figure 5.5) est la phase de découpage du caillé. Il sert à éliminer une partie du petit lait emprisonné dans la masse coagulée en multipliant les surfaces de sortie du sérum : c'est le début de l'égouttage. Le décaillage est une phase délicate qui conditionne la qualité finale du produit et son rendement. Il nécessite de la délicatesse pour ne pas casser le grain.



FIG. 5.5: Décaillage d'un fromage

- La cuisson : le chauffage du caillé (figure 5.6) s'effectue en cuve de cuivre. La caillé doit être maintenu à une température minimum de **53°C** pendant au moins 30 minutes.





FIG. 5.6: Cuisson d'un fromage

- Le brassage : un brassage (figure 5.7) plus ou moins long produit un grain de caillé plus ou moins fin. L'échauffement de la masse durant le brassage favorise la séparation du petit lait.



FIG. 5.7: Brassage du caillé

- L'égouttage : il permet au caillé de se raffermir en expulsant une partie du petit lait comme le montre la figure 5.8.



FIG. 5.8: Egouttage du caillé

- Le moulage : le fromage est soutiré dans de grands moules qui donneront une forme circulaire à la meule (figure 5.9).



FIG. 5.9: Moulage du fromage

- Le pressage : une fois dans le moule, on presse le fromage pendant 7 heures (figure 5.10)



FIG. 5.10: Pressage du fromage

- Le salage : une fois le fromage fait, il est salé en surface (figure 5.11) et frotté.



FIG. 5.11: Salage du fromage

3. **L'affinage** : La figure 5.12 montre une cave d'affinage. Au cours de cette maturation, le Comté fait l'objet de soins attentifs (figures 5.13 et 5.14) favorisant le développement organoleptique qui s'opère naturellement au fil de mois. Certaines de ces opérations sont faites par des robots comme le montre la figure 5.15. La maturation en cave d'affinage est au minimum de 4 mois, mais elle est souvent de 8 à 10 mois, voire plus (18-24 mois). Les Comté dits d'exception peuvent atteindre 36 mois. Les caves d'affinage sont des lieux distincts des lieux de fabrication et sont moins nombreuses que les fromageries.



FIG. 5.12: Cave d'affinage



FIG. 5.13: Retournement d'une meule de Comté



FIG. 5.14: Soins en cave



FIG. 5.15: Retournement d'une meule par un robot

Dans ce procédé, on a donc un grand nombre de variable de contrôle disponible et un procédé assez complexe (compensations et combinaisons mal connus).

### 5.2.2 Evaluation du Comté

Chaque meule de comté fait l'objet d'une notation par un gradeur sur 20 points. Un gradeur est un technicien chargé d'évaluer la qualité du Comté après affinage. Cette notation sanctionne le goût mais aussi l'aspect physique de la meule. Les meules qui obtiennent une note supérieure à 15 points reçoivent une bande verte. Les meules qui obtiennent une note comprise entre 12 et 15 points reçoivent une bande brune, et il est important de souligner que cette bande brune peut sanctionner un léger défaut d'aspect sur un fromage par ailleurs excellent. Les bandes vertes et brunes sont illustrées sur la figure 5.16.



FIG. 5.16: Bandes vertes (à gauche) et brunes (à droite)

Vert ou brun, tous les deux sont d'authentiques Comté dont l'âge minimum est de 4 mois. La couleur de la bande n'a aucun rapport avec l'âge du fromage ni avec une typologie de goût.

Les meules qui n'atteignent pas la note de 12 sont quant à elles retirées des lots Comté et destinées à la fabrication de fromages fondus (tels que La vache qui rit, le Kiri, et autres produits de l'usine du Groupe Bel à Lons-le-Saunier).

Le prix de vente d'un Comté à bande verte sera plus important que celui d'un Comté à bande brune. La perte financière sera encore plus conséquente si le fromage a une note inférieure à 12 et ne peut donc pas être considéré comme du Comté. Détecter les éventuels défauts du Comté est donc économiquement essentiel.

### 5.2.3 Filière Comté et Centre Technique des Fromages Comtois (CTFC)

La filière Comté est constituée de :

- 3200 exploitations laitières
- 190 ateliers de fabrication (les fruitières)
- 20 entreprises d'affinage

Le Comté a une forte valeur ajoutée sur la matière première puisqu'il se vend autour de 10 - 20 euros le kilo. Il est donc d'un grand intérêt économique pour le Jura.

Le CTFC a été créé en 1975 sous le nom de CTC (Comité Technique du Comté), c'est une association régie par la loi de 1901. Il emploie 29 salariés répartis autour de différentes activités, dont :

- Un service d'appui technique formé de 14 techniciens experts en production du lait, technique fromagère et qualité du Comté.
- Un laboratoire de contrôle analytique et service Ferments Lactiques employant 7 personnes.
- Un laboratoire d'analyse sensorielle animé par une spécialiste de la qualité organoleptique du Comté.
- Etudes statistiques et fond documentaire occupant 3 salariés.

Le CTFC assure au sein de la filière Comté un rôle de conseil et d'assistance technique. Il a pour mission d'améliorer la maîtrise de la qualité du Comté depuis la production du lait jusqu'au produit fini, tout en respectant le règlement de l'Appellation d'Origine.

Il réalise aussi les analyses de contrôle de fabrication et du produit fini.

Il effectue des prestations de service pour la surveillance, la maîtrise et l'amélioration de la qualité du Comté auprès des fruitières. Il organise par ailleurs des expérimentations technologiques, des expertises organoleptiques et propose une aide à la mise en place d'une démarche d'Assurance Qualité.

Enfin, le CTFC participe à la vulgarisation des connaissances spécifiques au Comté et à la formation des acteurs de la filière. Le logiciel FisPro (logiciel open source permettant de créer des systèmes d'inférence floue) est notamment utilisé dans certaines de leurs formations.

En intégrant la spécificité du Comté, le CTFC exprime ses compétences auprès :

- des producteurs de lait (technique de traite, matériel et hygiène de traite)
- des fromagers (audit de fabrication, diagnostic, suivi analytique et sanitaire, redressement de fabrication, conseil en équipement, contrôle qualité)
- des affineurs (diagnostic de cave, contrôle sanitaire, profil sensoriel, expertise organoleptique)
- de l'ensemble des acteurs de la filière (élaboration de référentiels, contrôle métrologique, expérimentation, information, formation)

Par ailleurs, la collecte des données issues de l'activité d'assistance technique, leur traitement statistique et leur restitution élaborée [Centre Technique des Fromages Comtois - 2004] donnent au CTFC un rôle centralisateur. Il capitalise les connaissances et les analyses des techniciens et

possède une base de données conséquente sur l'expertise et les analyses du domaine. Pour plus, d'information sur le CTFC, on peut se référer à leur site web : <http://www.espacecomte.com/>

### 5.2.4 Un besoin d'anticipation

Puisqu'un Comté mal noté entraîne une perte économique conséquente pour le fromager, il est nécessaire de prévoir les caractéristiques du Comté afin de rectifier les éventuelles erreurs lors des prochaines fabrications. C'est pour cette raison que cette prévision doit se faire avant l'affinage car si un vice de fabrication existe dans la fromagerie, on ne peut attendre que le fromage soit affiné pour détecter ces éventuels défauts. L'affinage durant au minimum 4 mois, la perte économique serait énorme.

Pour cette raison les prédictions des caractéristiques doivent se faire sur les données de fabrication à 20 heures (c'est-à-dire sur les prélèvements effectués sur le fromage jeune) et avec les données de pré-affinage (qui sont effectuées après 15 jours d'affinage chez le fromager).

Le CTFC a un rôle de formation auprès des jeunes fromagers. Il est donc important de capitaliser la connaissance acquise et de pouvoir présenter le raisonnement allant avec les prédictions effectuées afin de transmettre leur savoir-faire.

## 5.3 Informations disponibles et objectifs

Depuis plusieurs années, le CTFC s'intéresse à l'analyse et à la prédiction des défauts. Le CTFC a déjà travaillé sur le projet AMDEC (Analyse des Modes de Défaillance, de leurs Effets et de leurs Criticités), ce qui les a amenés à formaliser leurs connaissances et leur expertise sous forme de règles décrivant l'influence d'un paramètre sur un défaut. Les défauts [Agroscope - 2004] sont quantifiés en terme de diminution ou d'augmentation du risque d'apparition variable par variable. Ces connaissances ont été intégrées dans un système expert classique.

Les résultats de ce système expert n'ont pas été satisfaisants car le système donnait en sortie toujours un risque maximal d'apparition du défaut. On peut penser que cet échec est dû à un manque de connaissance sur les interactions et à une méthode ne permettant pas les nuances. En effet, les membres du CTFC ont une connaissance assez précise des points critiques mais ils connaissent moins bien les mécanismes d'interaction et de compensation entre les variables.

La figure 5.17 montre les étapes de la fabrication du Comté, les numéros indiquent les différents éléments de cette fabrication :

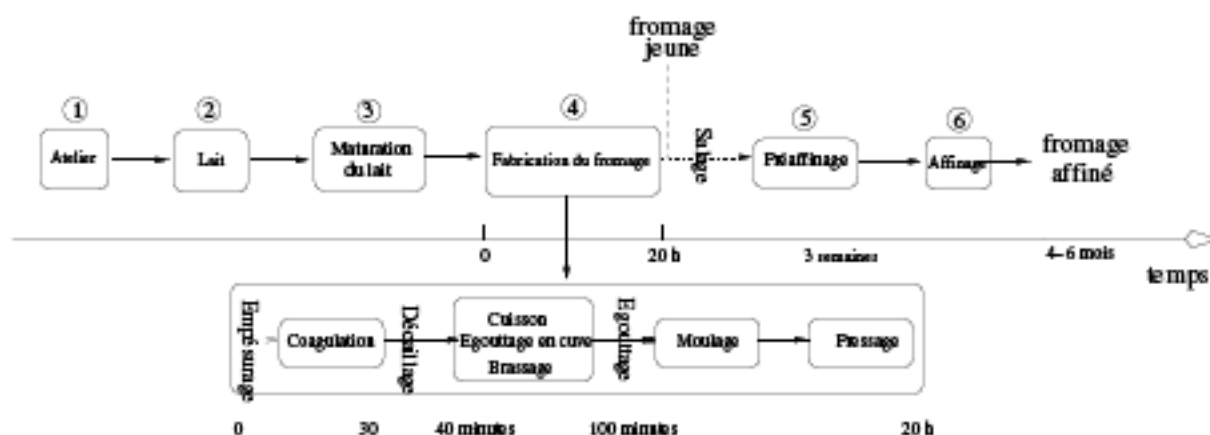


FIG. 5.17: Schéma de fabrication du Comté



1. L'atelier de fromagerie : le risque lié à l'atelier est dû à l'acquis (matériel, humidité, hygiène, ...) de la fromagerie, en effet, on constate que certaines fromageries sont plus sensibles à certains défauts.
2. Le lait : le lait utilisé est aussi un facteur déterminant, on note une différence très importante entre le lait d'été et celui d'hiver car le lait correspond respectivement à une alimentation des vaches par herbe ou par foin.
3. La maturation : des défauts peuvent apparaître selon la qualité des levains utilisés lors de la maturation.
4. La fabrication du fromage 20 heures : la fabrication du fromage est une étape très importante. De plus, de nombreuses informations sont disponibles sur cette étape car beaucoup d'analyses physico-chimiques sont faites à 20 heures. Cette phase est primordiale car il y a beaucoup de variables de contrôle. Selon les experts 70% de la qualité du produit final se joue à cette phase.
5. Le préaffinage : le préaffinage est effectué par la fromagerie, et une série de tests est effectuée à 15 jours.
6. L'affinage : peu d'informations sont disponibles lors de l'affinage des fromages. L'affinage du Comté est un domaine très secret, il est donc impossible d'avoir des informations physico-chimiques concernant l'affinage des fromages. Cependant l'historique de l'atelier d'affinage donne des informations sur les défauts susceptibles d'apparaître dans cet atelier. De toute manière, le but de ce travail étant de prédire les défauts le plus tôt possible, il ne serait pas raisonnable d'utiliser ces données. On peut aussi noter que les experts estiment l'importance de l'affinage dans la qualité finale du Comté à 70%.

### 5.3.1 Données

#### 5.3.1.1 Méthodes de mesure

La plupart des données disponibles caractérisent un lot de meules, c'est-à-dire la production d'un mois dans un atelier donné. On considère qu'il y a une certaine homogénéité entre les meules d'un même mois.

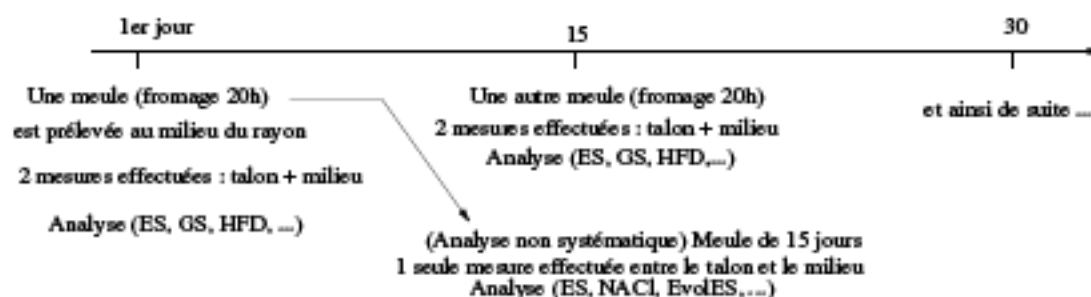


FIG. 5.18: Déroulement des analyses sur meule sur un mois

La figure 5.18 montre le déroulement des analyses faites systématiquement sur le fromage de Comté. Ce procédé est réalisé ainsi : une première série de mesures est faite en deux endroits (milieu de rayon et talon<sup>1</sup>) du fromage jeune. Quinze jours plus tard, on effectue à nouveau des analyses sur la meule de 15 jours sur laquelle des analyses ont déjà été faites. Ces analyses se

<sup>1</sup>Le talon est la zone extérieure de la meule proche de la croûte

font entre le milieu du fromage et son talon. On remarque que les analyses à 15 jours ne sont pas faites au même endroit que les analyses du fromage jeune. Ceci peut poser problème car les meules sont parfois assez hétérogènes : le talon perd plus d'eau que le milieu du fromage.

L'estimation des défauts se fait par analyse sensorielle, celle-ci est faite soit par un gradeur qui estime s'il y a le défaut ou non de manière binaire, soit par un jury de techniciens entraînés qui peut alors donner une échelle d'intensité du défaut. Le jury est beaucoup plus fiable que le gradeur seul car selon les gradeurs, les notes peuvent varier de manière assez importante. Puisqu'on fait la moyenne des notes données, la technique du jury donne un résultat plus fiable. De plus, dans le cas du jury de techniciens, on travaille toujours sur la même meule, la traçabilité est donc garantie et les problèmes dus à l'hétérogénéité d'un lot n'existent plus. Néanmoins, certains fromages sont difficiles à noter : les fromages friables sont fermes mais fragiles, certains techniciens vont les évaluer comme fermes et d'autres comme mous à cause de leur fragilité. On se retrouve alors avec des écarts de fermeté importants en sortie. En moyennant, on aura alors tendance à noter le fromage comme normal alors que celui-ci est plutôt ferme. Il faut donc garder à l'esprit que les résultats de l'analyse sensorielle ne sont pas toujours totalement fiables.

Cette analyse peut être faite sur une meule ou sur un lot, dans ce cas, on considère un certain nombre de meules du lot et une estimation est faite pour obtenir le pourcentage de défauts du lot. L'analyse sur lot est problématique car les experts constatent une hétérogénéité significative entre les individus d'un même lot. Pour cette étude, nous travaillons avec les données du jury de techniciens.

### 5.3.1.2 Présentation des données

Les données utilisables sont de quatre sortes :

- a) les variables résumant l'état initial : ce sont toutes les variables disponibles avant la fabrication du fromage.
- b) les données du fromage à 20h : elles proviennent des analyses physico-chimiques faites sur le fromage jeune. La plupart des mesures sont effectuées en milieu de rayon et en talon. Nous ne les présenterons qu'une fois puisqu'il s'agit des mêmes mesures à deux endroits différents du fromage.
- c) les données de préaffinage à 15 jours : elles proviennent des analyses physico-chimiques effectuées sur le fromage après 15 jours de préaffinage. Cette fois le prélèvement s'effectue entre le milieu de rayon et le talon des fromages prélevés à 20 heures.
- d) les résultats du jury de techniciens après l'affinage du fromage : la plupart des caractéristiques évaluées par le jury de techniciens sont données sur une échelle continue de 0 à 10. Une note est une estimation sensorielle d'une caractéristique.

Le tableau 5.1 résume les variables caractérisant l'état initial ainsi que les données provenant des analyses physico-chimiques du fromage à 20 heures et à 15 jours. Les résultats de l'analyse sensorielle du jury sont donnés par le tableau 5.2. On y trouve l'échelle et les caractéristiques évaluées. Pour plus de détails sur ces données, le lecteur se référera à la section C.2 de l'annexe C. Par la suite, les variables seront préfixées par F20H lorsque ce sont des analyses à 20h et FPR lorsque ce sont des analyses à 15 jours.

Etape	Variable	Définition	Unité	Imprécision
Etat initial	saison / mois	hiver ou été	-	aucune
	Atelier	atelier de fabrication du fromage	-	aucune
	Année	année de fabrication du fromage	en mois	aucune
Fromage 20h (F20H)	PH	-	pH	$\pm 0.03$
	ECPH	écart de PH entre le milieu de rayon et le talon	pH	$\pm 0.06$
	LAC	sucre résiduel en milieu de rayon	-	inconnue
	ES	Extrait sec	g/100g	$\pm 0.1$
	GS	Gras sur sec	%	$\pm 0.6$
	HFD	Humidité du fromage dégraissé	%	$\pm 0.6$
	ECHFD	Ecart d'HFD entre le milieu de rayon et le talon	-	$\pm 1.2$
	CAESD	Calcium dans l'extrait sec dégraissé	g/100g	$\pm 0.03$
	LAP	Activité de la leucine aminopeptidase	$\mu\text{mol/g/24h}$	$\pm 2$
Fromage 15j (FPR)	PH	-	pH	$\pm 0.03$
	EvPH	Evolution du pH entre 20h et 15 jours	pH	$\pm 0.06$
	ES	Extrait sec	g/100g	$\pm 0.1$
	EVeIES	Evolution de l'extrait sec entre 20h et 15 jours	g/100g	$\pm 0.2$
	NaCl	Teneur en Chlorure de Sodium	g/100g	$\pm 0.07$
	NACL-H2O	rapport de la teneur en sel sur l'eau	g/100g d'eau	$\pm 0.1$

TAB. 5.1: Données : définition des variables explicatives

Quelques remarques peuvent être faites. Ces données ne sont pas nombreuses puisqu'elles ont un coût d'acquisition élevé du fait du nombre d'analyses faites, de la traçabilité garantie et du jury de techniciens nécessaire à l'évaluation du produit final. Nous avons travaillé sur un échantillon de 492 fromages à 20 heures qui se réduit à 103 fromages lorsqu'on souhaite avoir les analyses à 15 jours.

Echelle	Caractéristique évaluée
Echelle continue de 0 à 10	Note globale de la qualité de la pâte
	Note globale du goût de la pâte
	Note globale du goût de la pâte
	Elasticité de la pâte
	<b>Fermeté de la pâte</b>
	Adhésivité de la pâte
	Onctuosité de la pâte
	Solubilité de la pâte
	Aspect farineux de la pâte
	Aspect granuleux de la pâte
	Intensité du goût du fromage
	Fruité du fromage
	Aspect salé du fromage
	Aspect amer du fromage
	Acidité du fromage
	Aspect piquant du fromage
	Oxydation du fromage
Importance du goût de croûte du fromage	
Importance du goût rance du fromage	
Importance du mauvais goût	
Echelle continue en mois	Age du fromage au moment de la dégustation
4 notes : absence d'yeux - 1 à 2 yeux - 3 à 5 - >6	Nombre d'yeux
4 notes : petit pois - pois - petite cerise - grosse cerise	Taille des yeux
5 notes : absence - 4 à 5 - >6 - petite place - zone mille trous	Petits trous
5 notes : absence - malformés - jumelés - cuiteux - autre	Forme des yeux anormaux
5 notes : absence - 1 à 2 - 3 à 5 - nombreux - poche de becs	Bec
5 notes : absence - 1 à 2 - 3 à 5 - >=6 - nombreuses	Laimre
5 notes : absence - 1 - 2 à 4 - >=5 - nombreuses	Eraillure

TAB. 5.2: Qualité du Comté : évaluations du jury de techniciens

### 5.3.2 Connaissances expertes

#### 5.3.2.1 Les connaissances sur le rôle des différentes variables

- a) Les variables d'état initial : ce sont toutes les variables ne concernant pas directement la fabrication du fromage : la saison (qui est déterminée en fonction du mois de l'année), la qualité du lait et l'atelier de fromagerie fabriquant le fromage et l'année de fabrication.
- b) Les données du fromage à 20h :

- **F20H-PH** : la mesure de pH permet d'estimer le niveau d'acidification atteint dans le fromage 20 heures après le moulage, à la fin du processus d'acidification. Elle permet d'adapter si nécessaire l'ensemencement a posteriori. Les pH élevés augmentent le risque d'apparition de fromages cuiteux.
  - **Ecart de PH (F20H-ECPH)** : ce calcul permet de juger l'homogénéité de l'acidification au sein de la meule et donc de dépister des anomalies d'acidification, principalement dans la zone sensible du talon. Les fromages mal acidifiés en talon sont particulièrement sensibles au défaut de cuite.
  - **Sucre résiduel en milieu de rayon (F20H-LAC)** : cette mesure permet de savoir s'il reste ou non des sucres dans le fromage. S'il en reste, cela signifie que l'acidification des levains a été incomplète. Ces sucres résiduels risquent d'être consommés par des bactéries indésirables au cours de l'affinage.
  - **Extrait sec (F20H-ES)** : la valeur d'extrait sec donne une indication globale de la quantité de matières sèches du fromage (protéine, matières grasses, minéraux, glucides, ...)
  - **Gras sur sec (F20H-GS)** : le gras sur sec permet de connaître la quantité de matière grasse retenue dans le fromage. Par conséquent, cette mesure sert à adapter, a posteriori, l'écraimage partiel du lait mis en œuvre. Les GS faibles favorisent les pâtes fermes et granuleuses. Les GS élevés favorisent les pâtes à consistance molle, les becs, les lainures et les goûts neutres.
  - **F20H-HFD** : ce calcul permet d'estimer l'égouttage réel d'un fromage, surtout lorsque GS varie. Cette mesure est fondamentale pour les experts car l'humidité du fromage détermine l'évolution enzymatique et microbienne de la pâte au cours de l'affinage, ainsi que ses propriétés de texture. Les HFD élevés favorisent les pâtes à consistance molle, les becs et les goûts amers. En revanche, une HFD basse sera favorable aux pâtes fermes et granuleuses, voire les lainures.
  - **Ecart d'HFD (F20H-ECHFHD)** : il permet de connaître l'hétérogénéité de l'égouttage dans la meule. Les fromages à talon humide sont en effet particulièrement sensibles aux ouvertures cuiteuses et chargées.
  - **Calcium dans l'extrait sec dégraissé (F20H-CAESD)** : par ce calcul, on évalue le degré de minéralisation totale du fromage. Cette mesure a été finalement abandonnée par le CTFC car elle ne semble pas très fiable pour prévoir la qualité finale du Comté.
  - **Activité de la leucine aminopeptidase (F20H-LAP)** : le dosage de cette enzyme permet d'estimer le potentiel protéolytique de la meule. Elle permet par conséquent d'évaluer l'aptitude à la conservation du fromage. Les LAP élevées favorisent les pâtes granuleuses, voire même la lainure.
- c) Les données de préaffinage à 15 jours :
- **pH (FPR-PH)** : le pH est un facteur important de l'affinage : un pH élevé favorise le développement microbien et l'activité enzymatique.
  - **Evolution du pH entre 20h et 15 jours (FPR-EvPH)** : l'évolution du pH durant les 15 premiers jours de préaffinage donne une indication sur la consommation de l'acide lactique par les bactéries lors de l'affinage.
  - **Extrait sec (FPR-ES)** : la valeur d'extrait sec donne une indication globale de la quantité de matières sèches du fromage (protéine, matières grasses, minéraux, glucides, ...)
  - **Evolution de l'extrait sec entre 20h et 15 jours (FPR-EVolES)** : on estime ainsi les pertes d'eau du fromage durant les 15 premiers jours de préaffinage. Des pertes d'eau importantes peuvent générer des défauts de pâte (pâte ferme ou granuleuse). Les conditions de préaffinage (hygrométrie notamment) doivent alors être ajustées.
  - **Teneur en NaCl (FPR-NaCl)** : le dosage du taux de sel des fromages âgés de 15 jours

permet d'évaluer la prise de sel initiale des meules. Puisqu'il y a des échanges entre la croûte et la pâte, cette prise de sel est importante car elle constitue un facteur déterminant du taux de sel final des meules. De faibles prises de sel risquent de favoriser l'accélération de la protéolyse et de la fermentation tandis que des prises de sel élevées risquent d'empêcher la fermentation propionique de se produire. Le sel a aussi tendance à sécher le fromage, c'est-à-dire à le rendre moins humide.

- **NaCl dans l'eau des fromages (FPR-NACL-H2O)** : il permet de comparer le résultat des teneurs de sel sur des fromages à différents niveaux d'égouttage.

### 5.3.2.2 Exemples de formalisation par les techniciens

Les techniciens expriment l'influence d'une variable sur un défaut en terme d'augmentation ou de diminution du risque d'apparition d'un défaut. La diminution maximum du risque est différente du risque nul, en effet un risque nul signifie que pour une certaine plage de valeurs, la variable concernée a une influence neutre sur le défaut. La diminution maximum baisse les chances d'apparition d'un défaut. Il faut donc prendre en compte le fait que selon la valeur d'une variable, le risque résultant peut être augmenté, diminué ou stationnaire. La figure 5.19 représente l'influence de l'Humidité du Fromage Dégraissé (HFD) sur le défaut Pâte Ferme Compacte (PFC), tel qu'il était formalisé par les techniciens. Elle peut correspondre à la règle suivante : "Plus l'HFD est fort, alors plus la pâte est molle"

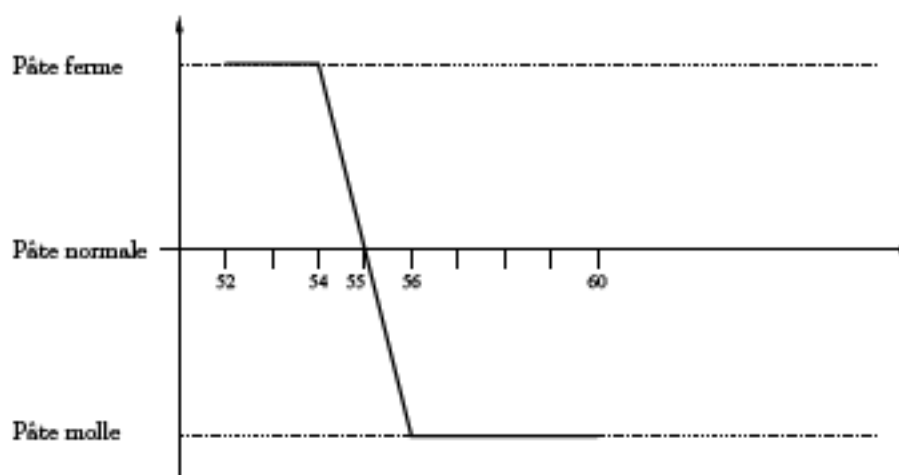


FIG. 5.19: Influence de l'HFD sur la fermeté de la pâte

Les techniciens du CTFC considère que l'HFD a une forte influence sur la fermeté de la pâte, il faudra donc en tenir compte lors de l'utilisation de cette variable. Cependant sa forte imprécision est un problème non négligeable. L'HFD a une incertitude de **0.6** car elle provient du calcul suivant :

$$HFD = \frac{100 - ES}{100 - MG} * 100$$

Il faut donc prendre en compte l'imprécision de l'extrait sec et de la matière grasse dans le calcul d'erreur.

Un autre paramètre intéressant est celui de la saison : selon que la saison soit l'été ou l'hiver, les vaches mangent de l'herbe ou du foin. Une alimentation contenant de l'herbe donne un lait

de meilleure qualité qu'un lait provenant d'une alimentation basée sur le foin. La saison n'est pas un paramètre sur lequel on peut intervenir mais il est important de le considérer car il a une influence sur le risque d'apparition du défaut pâte ferme compacte.

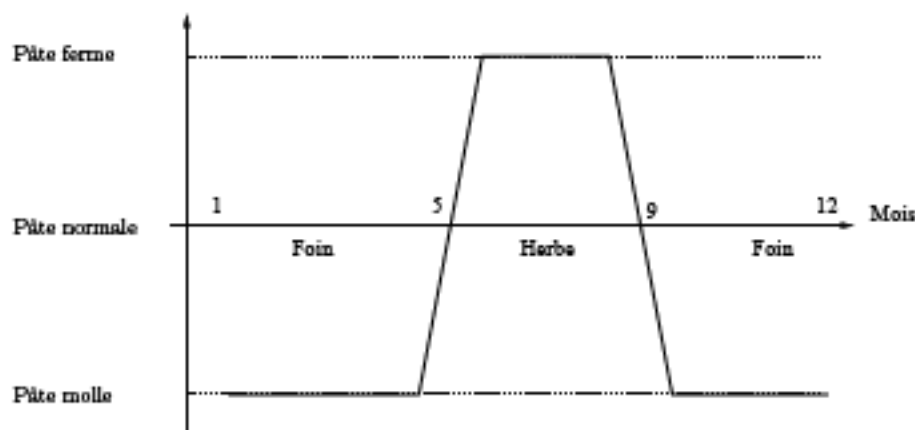


FIG. 5.20: Influence de la saison sur la fermeté de la pâte

La figure 5.20 illustre l'effet de la saison sur le défaut pâte ferme compacte, cependant la saison est moins déterminante que HFD par exemple, avec, comme heureuse conséquence, la possibilité de faire du bon fromage sans défaut même avec du lait d'hiver.

### 5.3.3 Objectifs

Le but de ce projet est double :

- être en mesure de prévoir la fermeté du fromage affiné à partir des informations disponibles avant affinage.
- obtenir une meilleure connaissance des interactions.

Étant donné que les informations disponibles ont une grande variabilité et des incertitudes importantes, il serait irréaliste de vouloir obtenir une quantification précise du risque, seule l'estimation de la tendance est envisageable. De plus, les experts du domaine estiment qu'un fromage se construit à **70%** lors de sa fabrication et à **30%** lors de l'affinage. Puisqu'on n'utilise que les données avant l'affinage, on ne pourra pas obtenir des prédictions parfaites.

Il faut noter que la collaboration INRA-CTFC remonte à plusieurs années. En particulier de premières tentatives de formalisation avec des règles floues conjonctives avaient fait apparaître leur insuffisance pour traiter ce problème. La sortie non défuzzifiée était alors si imprécise que les résultats après défuzzification étaient trop aléatoires. Les points que nous avons cités en faveur des règles implicatives floues étaient apparus au cours de ces travaux.

La collaboration INRA-CTFC a tout d'abord donné lieu à des premiers travaux sur la prédiction par règles expertes floues conjonctives des variables à 20h en fonction des paramètres de fabrication et de l'état initial. [Charnomordic et al. - 1998]. Par la suite, une thèse de doctorat a permis un recueil de l'expertise en fabrication fromagère et a mis au point des plans d'expérience [Glaudel - 1999]. Des travaux sur les arômes du Comté ont été réalisés par le CTFC [Bero-dier et al. - 1997]. Des méthodes d'apprentissage automatique (algorithmes génétiques) de règles floues ont aussi été mises au point dans le but de prédire des paramètres à 20 heures [Guillaume & Charnomordic - 2001]. Nos travaux s'inscrivent dans cette longue collaboration INRA-CTFC. Notre but étant de prévoir certaines caractéristiques du fromage à partir des variables disponibles

avant son affinage.

Parmi toutes les caractéristiques, nous avons choisi la caractéristique de fermeté de la pâte qui est intéressante car elle permet d'isoler deux défauts : la pâte molle et la pâte ferme. Puisque beaucoup de caractéristiques sont évaluées sur une échelle continue, il est important de savoir traiter ce type de problèmes.

Notre démarche a consisté à créer différents systèmes de règles floues avec l'aide des techniciens du CTFC ou directement à partir des données. Nous montrons par la suite les principaux résultats obtenus, et essayons de dégager une méthodologie pour traiter ce problème.

## 5.4 Etude de trois systèmes de règles

Lors de notre collaboration avec le CTFC, nous avons étudié plusieurs systèmes de règles. Une étude systématique des données a été réalisée afin d'identifier les variables les plus importantes pour la caractéristique de fermeté.

Dans le travail présenté ici, nous avons décidé d'utiliser des données d'entrée non floues car la plupart de nos systèmes nécessitaient l'utilisation de plus de deux dimensions et nous avons besoin de maîtriser l'usage pratique des règles implicatives et de leurs sorties déjà entachées d'incertitude.

Les trois systèmes que nous allons présenter sont les suivants :

- Un système simple de deux variables permettant de mettre en évidence les différences entre règles implicatives et règles conjonctives.
- Un système de règles implicatives avec 4 variables construit à partir des données.
- Un système de règles implicatives provenant de la connaissance des experts du CTFC. Nous raffinerons les résultats obtenus avec un autre système issu des données.

Avant de détailler ces trois systèmes, nous donnons un rappel sur la quantification des résultats vis-à-vis de la sortie caractérisant la fermeté de la pâte.

### 5.4.1 Rappel sur la quantification des résultats

Comme nous l'avons détaillé en section 4.2.5, nous utilisons deux étiquettes nous permettant de quantifier la précision de la sortie et l'erreur faite vis-à-vis de la sortie réelle. La première étiquette (précision de la sortie) peut donc prendre des valeurs de 1 à 3 puisque l'univers de sortie (la fermeté de la pâte) est sur trois SEF (ferme, normale, molle).

- 1 : La sortie inférée est précise car elle ne correspond qu'à un seul sous ensemble flou de la sortie. On peut donc savoir précisément si celle-ci est molle, normale ou ferme.
- 2 : La sortie inférée est imprécise car elle chevauche deux sefs de sortie. L'imprécision portera alors sur deux sefs adjacents (par exemple normal et ferme)
- 3 : La sortie inférée est très imprécise car elle recouvre l'ensemble des sefs de la sortie (mou, normal et ferme), on est donc alors dans une situation d'incertitude totale quant aux résultats. Lorsqu'un résultat est aussi imprécis, c'est qu'on manque de connaissances pour calculer notre sortie. Un tel résultat mérite donc d'être raffiné avec d'autres variables.

La deuxième étiquette concerne l'erreur faite et varie de 0 à 2 :

- 0 : Aucune erreur : la sortie inférée appartient au même sef que la sortie réelle.
- 1 : Un sef d'erreur : cette erreur est la plus commune : la sortie inférée et la sortie réelle ont un sef d'écart (par exemple, pour l'individu 327, nous inférons l'intervalle [6.5 ; 10.0] alors que la sortie réelle est 5.000. La sortie réelle appartient donc majoritairement à la catégorie fromage normal alors que la sortie inférée appartient à la catégorie fromage ferme. Il y a donc un sef d'écart entre ces deux sorties.



- 2 : Deux sefs d'erreur : La sortie prédite est soit molle, soit ferme et le résultat réel est inversement ferme ou mou.

Détaillons les différents cas possibles dans le cadre d'une sortie sur trois sous-ensembles flous *molle*, *normale* et *ferme*.

- étiquette 10 (prédiction juste et précise). Le système est adapté au système car la prédiction est juste et donne un résultat précis (l'intervalle inféré ne désigne qu'un seul concept de la partition)

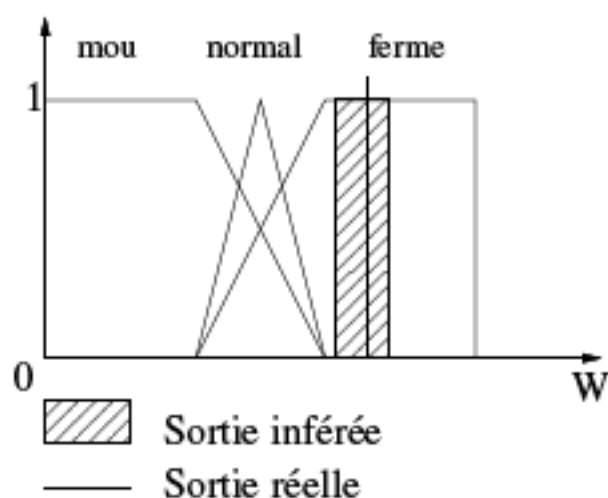


FIG. 5.21: Etiquette 10

- étiquettes 11 et 12 (prédiction mauvaise mais précise). Le système de règles considéré ne semble donc pas adapté à ces fromages.

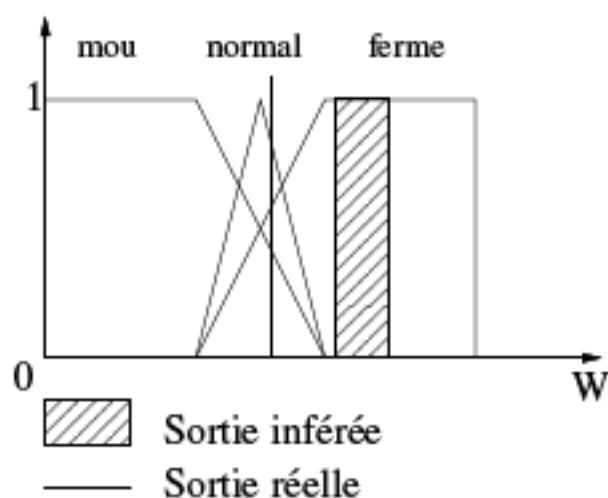


FIG. 5.22: Etiquette 11

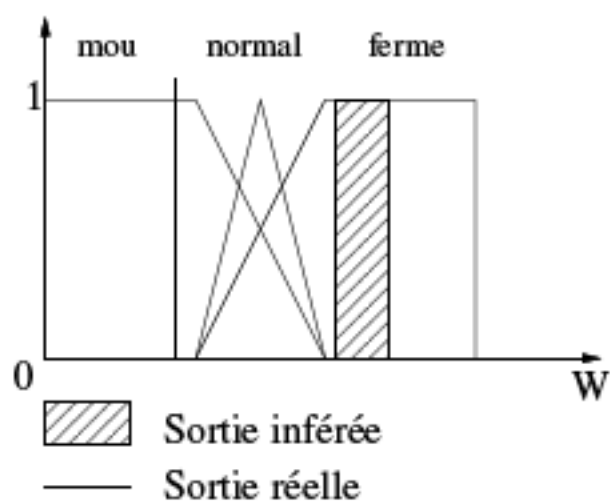


FIG. 5.23: Étiquette 12

- étiquettes 30 et 20 (prédiction imprécise). Le résultat est trop imprécis mais n'est pas faux, l'intervalle inclut la sortie observée, il faudra donc voir s'il est possible de raffiner ces résultats en rajoutant d'autres règles, afin de réduire l'imprécision.

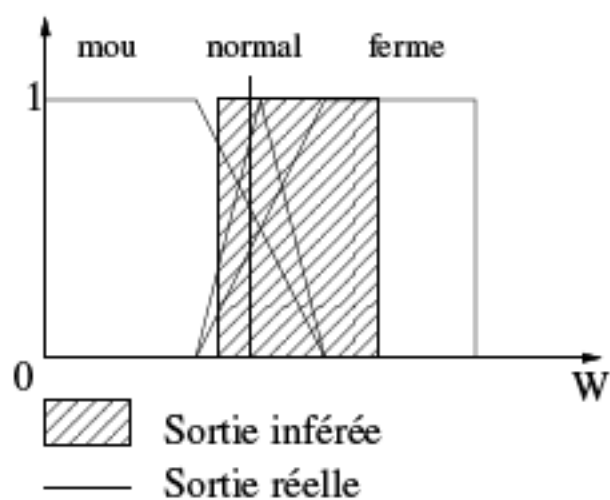


FIG. 5.24: Étiquette 30

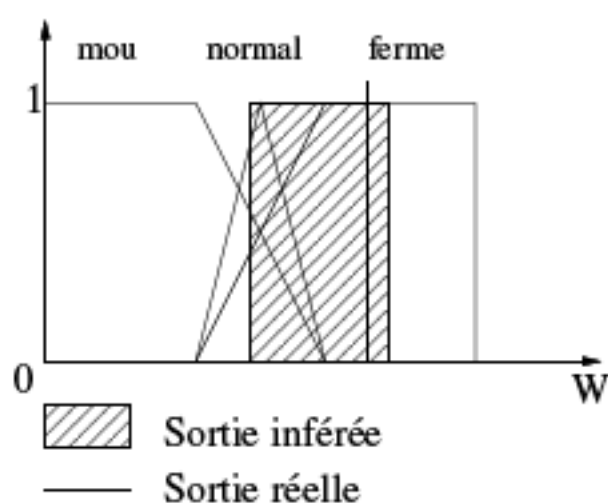


FIG. 5.25: Etiquette 20

- étiquette 21 (prédiction imprécise et fautive) : Comme pour l'étiquette 11 ou 12, le système de règles n'est pas adapté à cet individu.

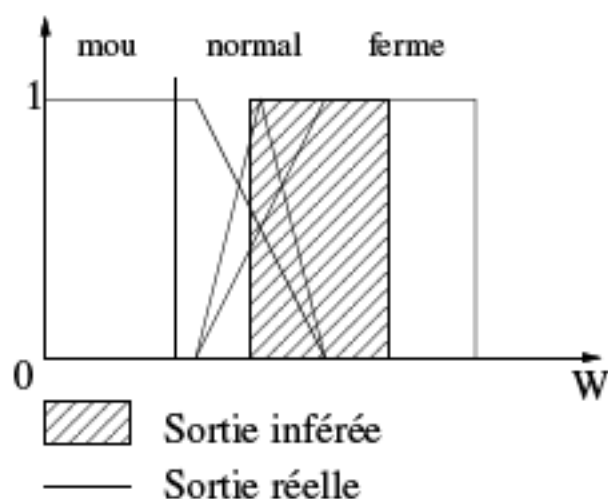


FIG. 5.26: Etiquette 21

Par la suite, nous utiliserons ces étiquettes pour déterminer la qualité de la sortie.

#### 5.4.2 Un premier système expert simple

Nous avons utilisé les variables HFD et EvolES. Elles sont découpées sur leur univers d'intérêt en deux ensembles flous chacune. Le découpage effectué a été fait en accord avec les connaissances des experts sur le sujet. Les sous-ensembles d'entrée sont donnés sur les figures 5.27 et 5.28.

On considère l'HFD comme faible lorsqu'elle est inférieure à **54%** et forte lorsqu'elle est supérieure à **57%**. La zone de transition d'une HFD faible à une HFD forte se situe entre **54%** et **57%**. Ces valeurs ont été déterminées avec les experts, ainsi que pour l'évolution de l'extrait-sec, faible en dessous de **0.2** et forte au dessus de **0.8**. Le point d'intersection se situe à **0.5**.

Nous rappelons que l'HFD représente l'humidité du fromage à la fin du processus de fabrication du fromage. EvolES représente la perte d'eau du fromage après 15 jours de préaffinage. Nous avons construit le système suivant :

**BR1**

1. Si HFD est forte et EvolES est faible alors le fromage sera mou
2. Si HFD est forte et EvolES est forte alors le fromage sera normal
3. Si HFD est faible et EvolES est faible alors le fromage sera normal
4. Si HFD est faible et EvolES est forte alors le fromage sera ferme

Comme nous pouvons le voir, ce système est un système très simplifié qui ne prend en compte que partiellement la complexité du procédé. Néanmoins, ce système va nous permettre de comparer les résultats sur un ensemble de règles implicatives et conjonctives. L'interprétation des règles est simple : quand le fromage est humide, s'il ne perd pas beaucoup d'eau, alors il sera mou. De la même manière, si l'humidité est faible et que beaucoup d'eau est perdu, alors le fromage sera ferme. Lorsque l'humidité et la perte d'eau se compensent, alors le fromage est de fermeté normale.

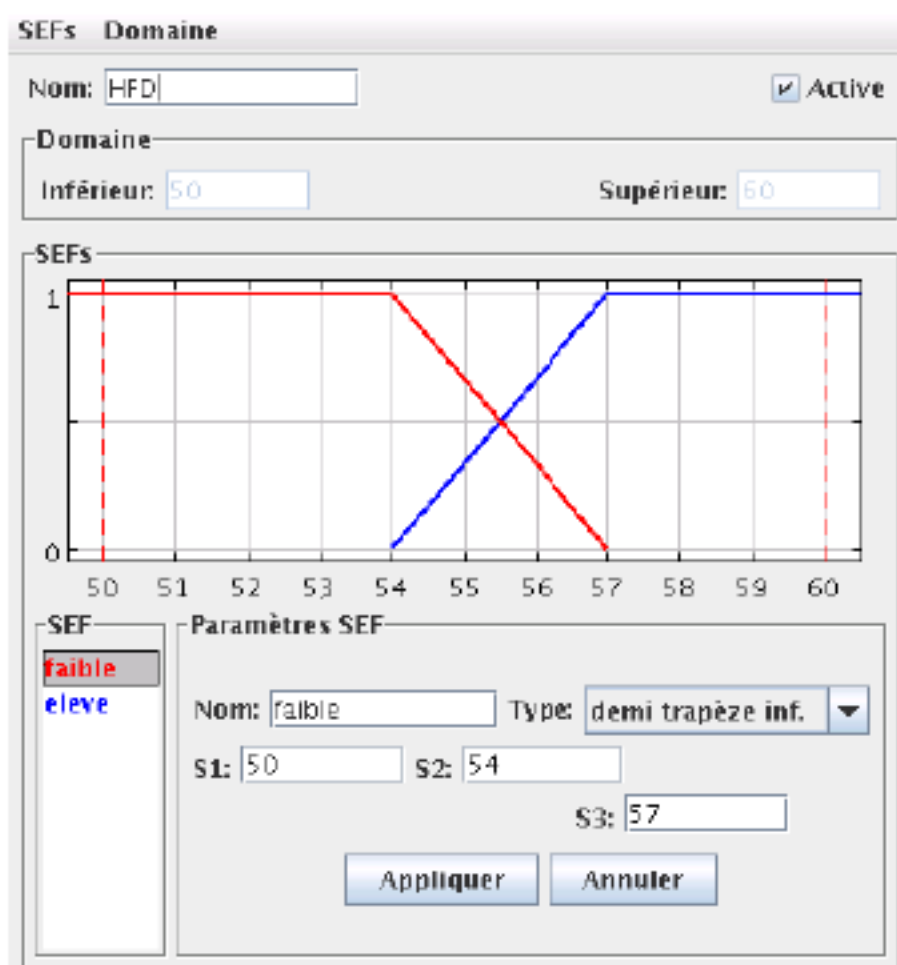


FIG. 5.27: **BR1** - Partition représentant l'Humidité de Fromage Dégraissé

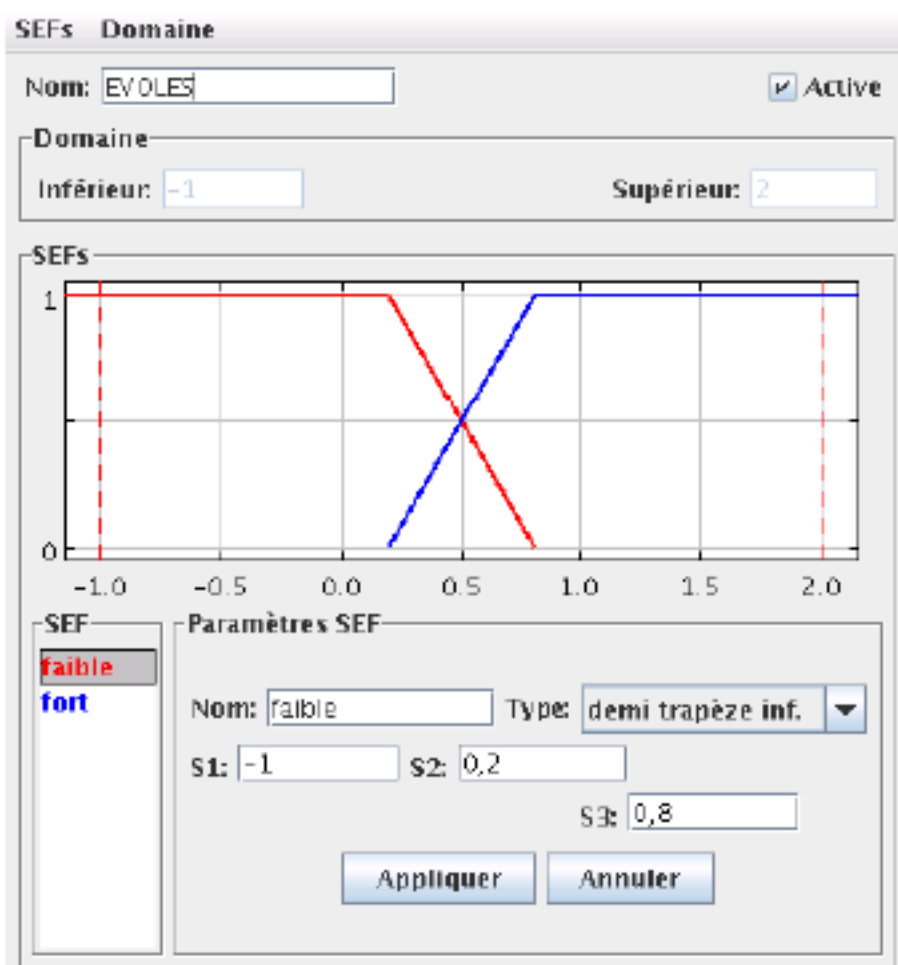


FIG. 5.28: **BRI** - Partition représentant l'Evolution de l'Extrait Sec

Comme nous l'avons vu précédemment, et afin d'éviter des pseudo-conflits dans la base de règles, les partitions de sortie utilisées avec des règles implicatives sont différentes de celles généralement utilisées avec des règles conjonctives. Les figures 5.29 et 5.30 montrent respectivement les partitions de sortie du système implicatif et du système conjonctif. Avec les règles conjonctives, on utilise le logiciel Fispro [Guillaume & Charnomordic - 2004a] avec une défuzzification par les aires. Les informations de défuzzification ne sont pas à prendre en compte sur la figure représentant la partition de sortie avec des règles implicatives.

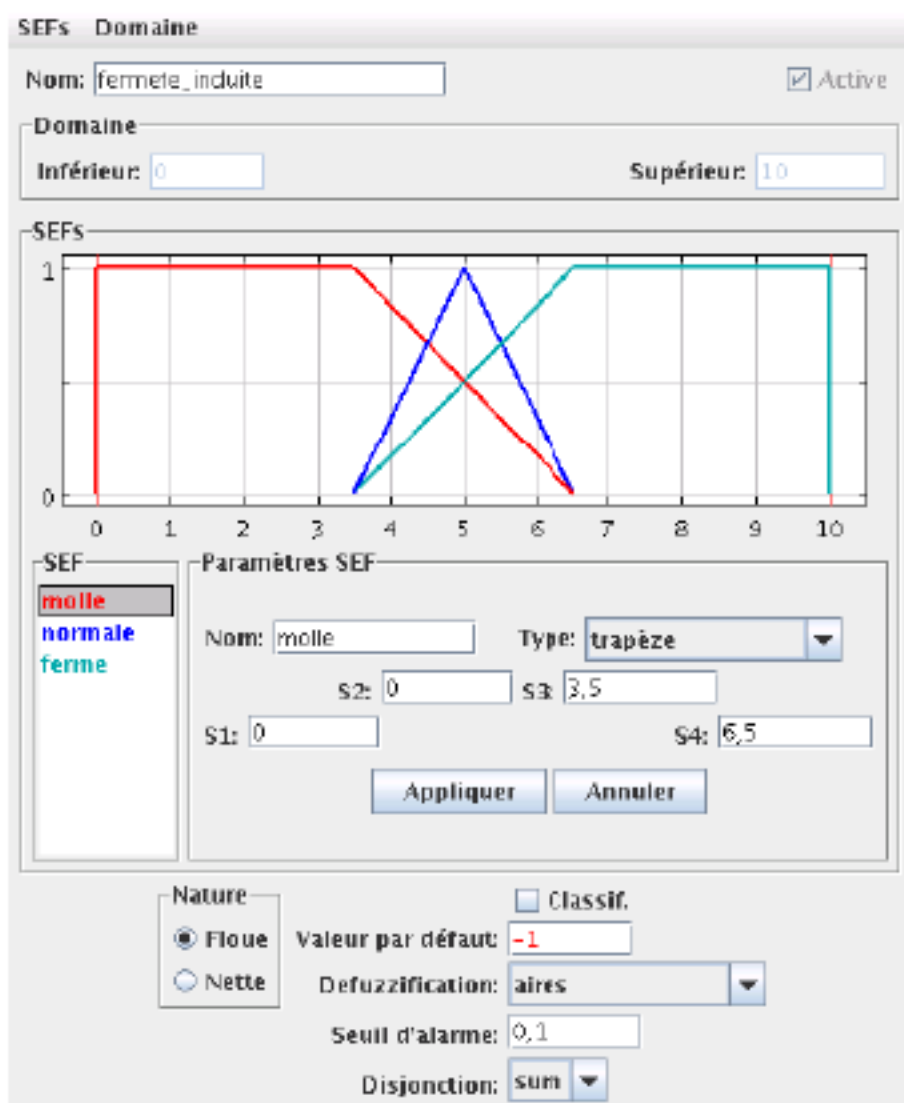


FIG. 5.29: BR1 - Partition représentant la fermeté de la pâte pour le système de règles implicatives

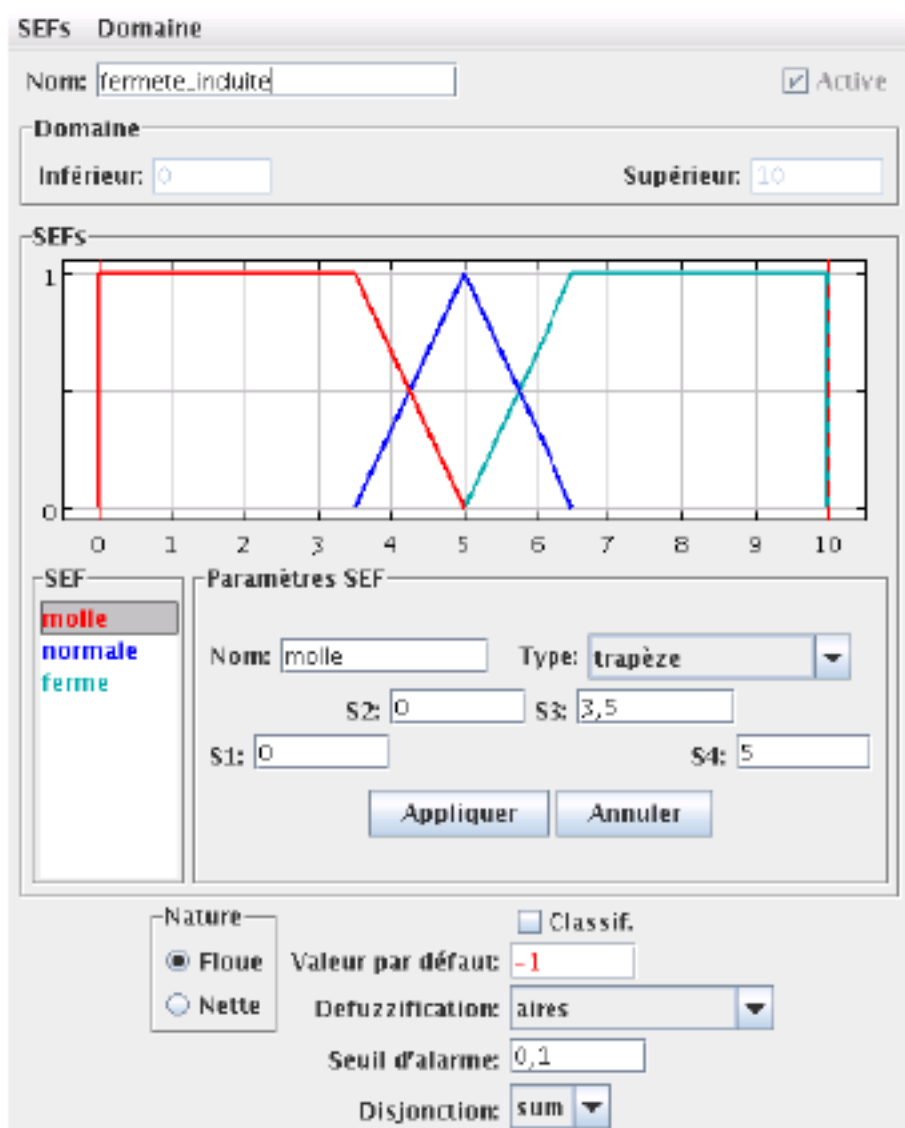


FIG. 5.30: **BR1** - Partition de sortie représentant la fermeté de la pâte pour le système de règles conjonctives

Nous rappelons (cf section 4.2.5) qu'une prédiction est dite imprécise si on ne peut pas choisir entre deux sous-ensembles adjacents de la sortie (normal et mou par exemple).

Ce système a été testé avec des règles conjonctives et des règles implicatives sur des entrées précises. La défuzzification est faite par la méthode des aires en ce qui concerne le système de règles conjonctives.

**Résultats avec des règles implicatives** Le tableau 5.3 nous montre les résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives.

Qualité de la prédiction	Nombre de fromages concernés
Bonne et précise	21
Bonne et imprécise	49
mauvaise	33

TAB. 5.3: Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives

Ces résultats mettent en évidence un nombre important de prédictions imprécises. Ce comportement est attendu car ce système est très simple. Cependant, seulement 33 mauvaises prédictions sont faites avec ce système.

**Résultats avec des règles conjonctives** Le tableau 5.4 nous montre les résultats de l'inférence à partir du système de règles conjonctives.

Qualité de la prédiction	Nombre de fromage concernés
Bonne et précise	47
Bonne et imprécise	0
mauvaise	56

TAB. 5.4: Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles conjonctives

Avec des règles conjonctives, on obtient beaucoup de prédictions erronées à cause du processus de défuzzification. La défuzzification est obligatoire car avec un système de plusieurs règles, la sortie non défuzzifiée est trop imprécise pour être interprétée.

Ce système illustre bien les effets négatifs de la défuzzification. Remarquons aussi que *les règles implicatives* permettent de respecter *les imprécisions du raisonnement* en donnant en résultat *une valeur imprécise lorsque le système n'est pas assez spécifique*.

Avant de détailler les deux systèmes qui suivent, nous allons donner quelques rappels sur les arbres de décision classique qui seront utilisés par la suite.

### 5.4.3 Rappel sur les arbres de décision classiques

#### 5.4.3.1 Définitions

Les arbres de décision sont une famille d'algorithmes d'apprentissage non-paramétriques introduite dans les années 80. Ils suscitent un certain engouement en *Fouille de Données (Data Mining)* tout en étant simples d'utilisation et rapides. Ils permettent de restituer de manière compréhensible les relations existantes entre les variables d'entrée et le phénomène à modéliser. Ils hiérarchisent les variables suivant leurs contributions ce qui rend cette méthode particulièrement intéressante en sélection de variables.

Les arbres de décision sont basés sur un découpage, par des hyperplans, de l'espace engendré par des variables explicatives. Formellement, un arbre de décision est un enchaînement hiérarchique de règles logiques qui permet de diviser la base d'exemples en sous-groupes, en fonction de la valeur des variables d'entrée. L'arbre est construit en recherchant à chaque niveau la variable la plus discriminante pour classer un exemple. Différents algorithmes, qui se distinguent essentiellement par le critère de segmentation appliqué pour définir la variable la plus significative, peuvent être utilisés pour développer l'arborescence. La visualisation de l'arbre permet



d'interpréter l'ensemble des découpages successifs.

La sortie peut être de type classification ou régression. La classification fait référence au fait de prédire une caractéristique discrète tandis que la régression fait référence à la prédiction d'une caractéristique continue.

Les arbres sont composés :

- d'une racine, qui est le point de départ (la racine est un nœud particulier),
- de nœuds, où sont réalisés des tests,
- de feuilles, qui contiennent les données correspondant à une branche de l'arbre.

L'arbre est construit de façon :

- à être le plus discriminant possible,
- tout en minimisant les erreurs de classification.

Notons que les arbres de décision binaire sont sensibles aux seuils et ont tendance à être *instables*, c'est-à-dire que de petites fluctuations dans la base d'exemples utilisée peuvent modifier la topologie de l'arborescence. Parmi les algorithmes d'arbres de décisions les plus connus, on trouve l'algorithme *CART*<sup>2</sup> disponible dans le logiciel R, qui est celui que nous avons utilisé car il est bien adapté à des données numériques continues.

#### 5.4.3.2 Algorithme CART (Breiman)

Nous décrivons ici l'algorithme CART appliqué au cas de la classification, qui est celui que nous utiliserons ici.

La méthode est basée sur des divisions binaires récursives des sous-ensembles de  $X$  ( $X$  étant l'ensemble de départ).

Le nombre de tests à explorer va dépendre de la nature des attributs :

- A un attribut binaire correspond un test binaire.
- A un attribut qualitatif ayant  $n$  modalités, on peut associer autant de tests qu'il y a de partitions en deux classes, soit  $2^n - 1$  tests binaires possibles.
- Et dans le cas d'attributs continus, il y a une infinité de tests envisageables. Dans ce cas, on découpe l'ensemble des valeurs possibles en segments, ce découpage peut être fait par un expert ou fait de façon automatique.

Les 3 points importants de la construction d'un arbre sont les suivants :

- Sélection de la division,
- Décision d'arrêt,
- Attachement d'une étiquette à chaque nœud terminal.

##### 1. Sélection de la division :

L'idée fondamentale est d'avoir les nœuds les plus purs possibles, i.e. l'homogénéité des nœuds fils est plus grande que celle des nœuds parents. L'impureté d'un nœud est au maximum quand toutes les classes sont représentées au sein du nœud avec une probabilité égale. Elle est minimale quand une seule classe est présente dans ce nœud. La meilleure division est celle qui minimise l'hétérogénéité du nœud de l'ensemble des nœuds d'un niveau donné. Soit  $n$  un nœud parent,  $d$  est la division correspond à ce nœud et  $n_d, n_g$  sont des nœuds fils qui correspondent respectivement à la droite et à gauche. La formulation de la meilleure division est nommée la fonction de gain. La fonction utilisée pour mesurer le degré de mélange est la fonction de Gini (ou indice d'impureté de Gini).

<sup>2</sup>Classification and Regression Trees

**Critère de Gini :**

Soit  $p_k$  la proportion d'éléments de la classe  $k$  au nœud  $n$ ,  $p_g$  et  $p_d$  les proportions des effectifs qui arrivent aux nœuds  $n_g$  et  $n_d$ . Alors :

$$i(n) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k^2$$

(analogie avec la formule de Shannon en transmission du signal).

$$\Delta i(d, n) = i(n) - p_g i(n_g) - p_d i(n_d)$$

Au nœud racine  $n_1$ , on cherche à trouver la division  $d^*$  qui donne le niveau d'impureté le plus faible dans toutes les divisions candidates.

$$\Delta i(d^*, n_1) = \max \Delta i(d, n_1)$$

Quand  $n_1$  divise aux nœuds  $n_2$  et  $n_3$  en utilisant la division  $d^*$ , la même procédure de recherche de la meilleure division se répète pour les nœuds fils  $n_2$  et  $n_3$  qui sont devenus maintenant les nœuds parents.

2. **Critère d'arrêt :** On arrête l'évolution de l'arbre quand le changement de niveau d'impureté des nœuds fils n'est pas significatif.
3. **Attachement d'une étiquette à chaque nœud terminal :** La classe d'un nœud terminal est la classe majoritaire.

**Élagage :** Le but est d'obtenir un arbre le plus compact possible, tout en minimisant la proportion d'individus mal classés.

R choisit la méthode d'élagage coût-complexité "*cost complexity pruning*" présentée la première fois par Breiman [Breiman et al. - 1984]. L'arbre optimal est obtenu par une séquence d'opérations de coupures appliquées à l'arbre courant.

Les arbres sont plus compacts en raison de la réunion de deux opérations (construction et élagage).

**Traitement des valeurs manquantes :** Un point attractif de la méthode est de pouvoir manipuler facilement les valeurs manquantes.

La méthode par défaut est le remplacement de la division avec la division faite par la variable qui apporte le deuxième (ou le troisième etc.) plus grand gain.

## 5.4.4 Système créé à partir des données

### 5.4.4.1 Arbre binaire induit

Nous avons voulu tester la capacité d'une méthode de segmentation de l'espace (arbre de décision) pour fournir des règles pouvant servir de base à un système de règles implicatives. Nous avons choisi les variables EvolES, HFD, GS, saison caractérisé par la variable mois, LAP et NaCL car ces variables sont considérées comme importantes par les experts du CTFC dans la détermination de la fermeté de la pâte. La figure 5.31 montre l'arbre obtenu en considérant ces variables. Le découpage est effectué en trois classes (mou, normal et ferme) correspondant au découpage (strict) suivant :

- Entre 0 et 4.5, la pâte est *molle*.
- Entre 4.5 et 5.5, elle est *normale*.

- Entre 5.5 et 10, la pâte est *ferme*.

Ce découpage nous permet plus facilement de mettre au point des règles par la suite car il correspond à la sémantique des experts sur le sujet. Cependant, il est imparfait car il est très sensible aux seuils **4.5** et **5.5**.

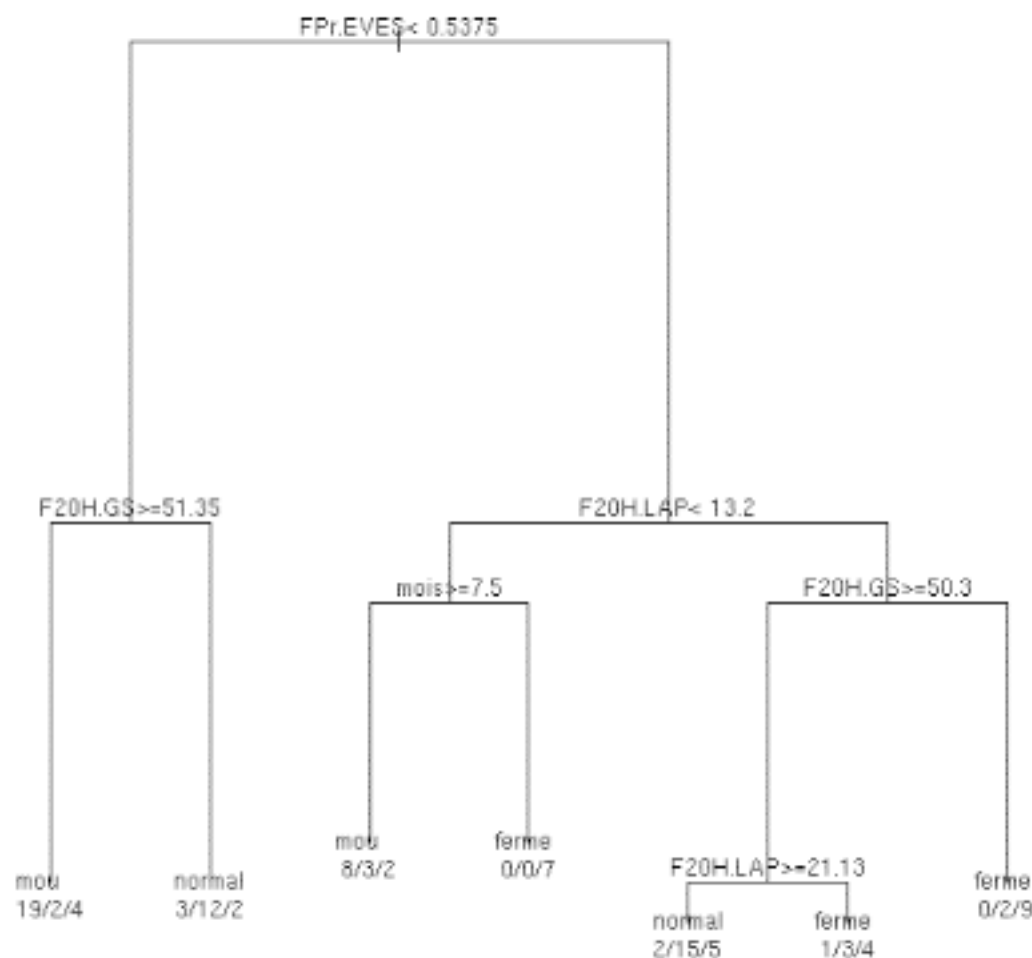


FIG. 5.31: Arbre obtenu en considérant les variables HFD, EvolES, GS, saison, NaCL et LAP

Cet arbre de décision demande quelques explications. Cet arbre est basé sur les données F20H-HFD, FPR-EvolES, F20H-GS, F20H-saison, FPR-NaCL, F20H-LAP et la fermeté divisée en trois classes (mou, normal et ferme). Lisons la branche gauche de cet arbre : si FPR-EvolES est inférieur à **0.5375** et F20H.GS est supérieur ou égal à **51.35** alors le fromage est majoritairement mou. Plus précisément, 19 fromages mous, 2 normaux et 4 fermes de l'ensemble

des 103 fromages “tombent” dans cette feuille. Pour chaque nœud et pour chaque fromage, si la condition est vérifiée, on continue dans la branche gauche de l’arbre. Sinon, on poursuit sur la branche droite.

On remarque qu’EvoLES est la variable la plus discriminante. Les variables GS et LAP apparaissent dès le deuxième niveau de l’arbre. La saison ou bien la variable “mois” est discriminante lorsque le potentiel protéolytique est faible. En revanche, la variable NaCl est absente.

#### 5.4.4.2 Construction du système de règles implicatives

Nous souhaitons maintenant passer au niveau linguistique et exprimer cet arbre à partir de règles. Nous avons construit les 9 règles suivantes qui reprennent les seuils de l’arbre et les relations qui s’en dégagent :

##### BR2

1. Si EvoLES est faible et GS est faible alors la pâte est normale
2. Si EvoLES est faible et GS est moyen alors la pâte est normale
3. Si EvoLES est faible et GS est fort alors la pâte est molle
4. Si EvoLES est forte et LAP est faible et saison  $> 7.5$  alors la pâte est molle
5. Si EvoLES est forte et LAP est faible et saison  $< 7.5$  alors la pâte est ferme
6. Si EvoLES est forte et LAP est moyen alors la pâte est ferme
7. Si EvoLES est forte et LAP est fort et GS est faible alors la pâte est ferme
8. Si EvoLES est forte et LAP est fort et GS est moyen alors la pâte est normale
9. Si EvoLES est forte et LAP est fort et GS est fort alors la pâte est normale

Donnons quelques explications. Ce système privilégie d’abord la variable EvoLES. Ensuite si le potentiel protéolytique est faible, on considère la saison. La variable GS est importante lorsque EvoLES est faible. En revanche, pour un EvoLES fort, il est important de considérer les deux variables GS et LAP pour déterminer la fermeté. Les partitions de GS, LAP sont sur trois seuils car l’arbre a identifié deux seuils pour ces variables. Les autres variables sont définies sur deux sous-ensembles. Les sous-ensembles flous correspondant à ce système sont présentés sur les figures 5.32, 5.33 et 5.34. Les sous-ensembles représentant la saison ne sont pas flous (cf. figure 5.35).

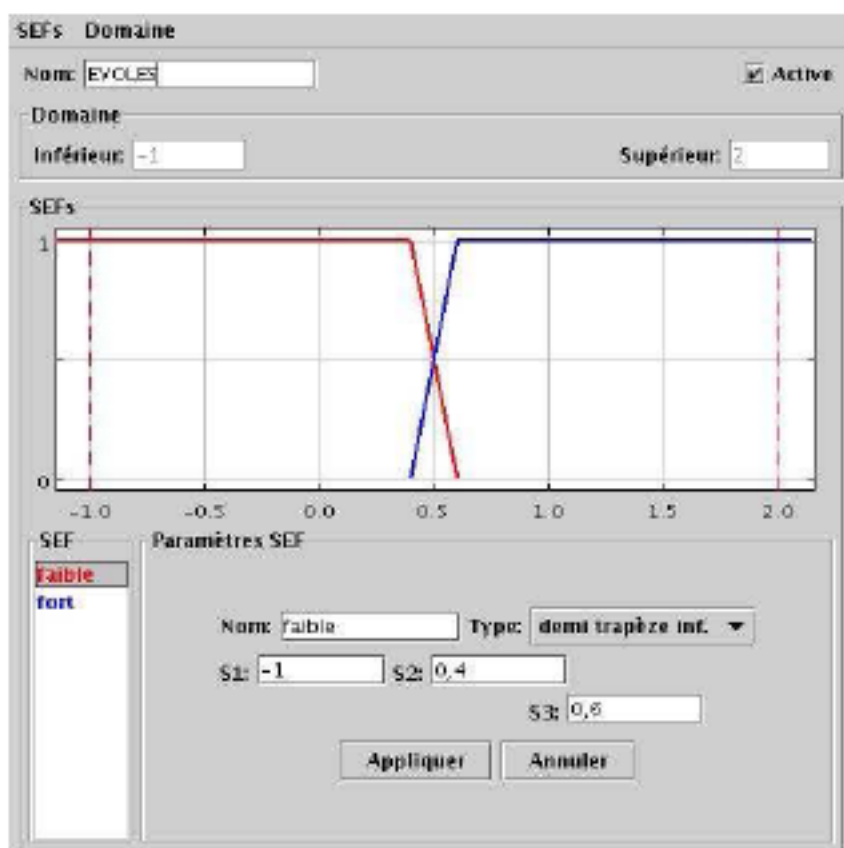


FIG. 5.32: BR2 - Sous-ensembles représentant EvoLES

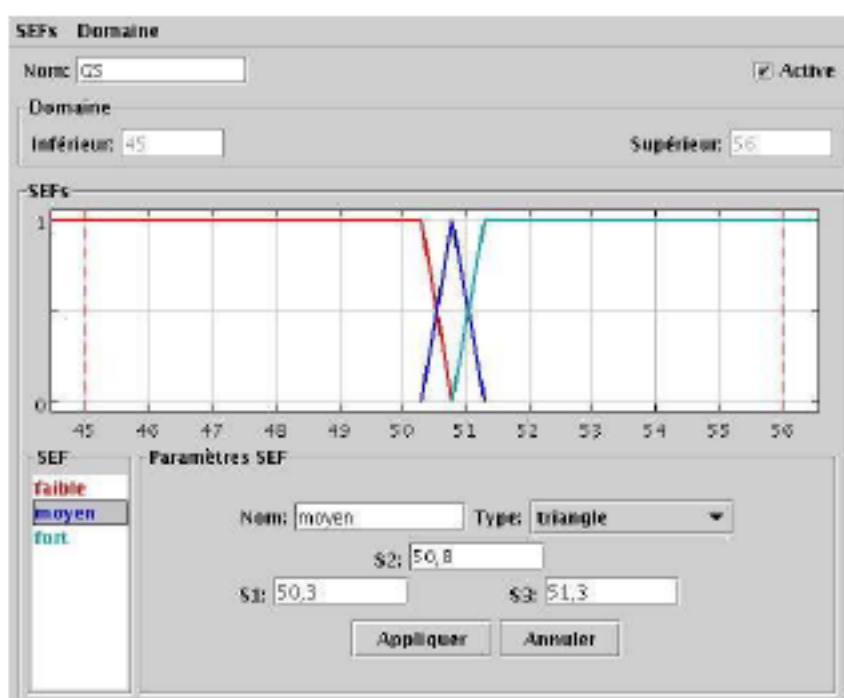


FIG. 5.33: BR2 - Sous-ensembles représentant GS

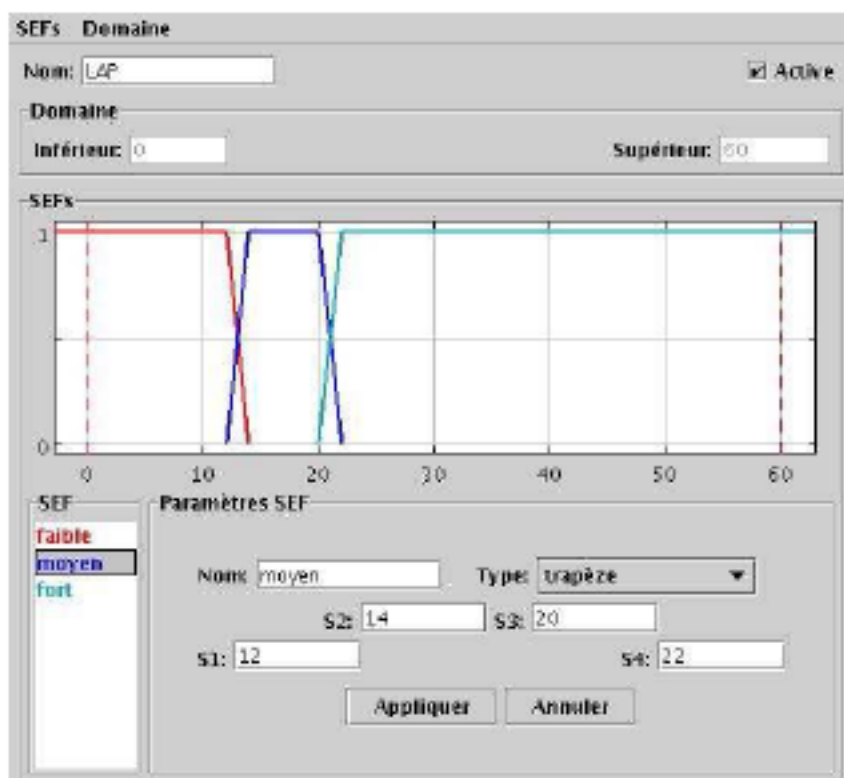


FIG. 5.34: BR2 - Sous-ensembles représentant le potentiel protéolytique LAP

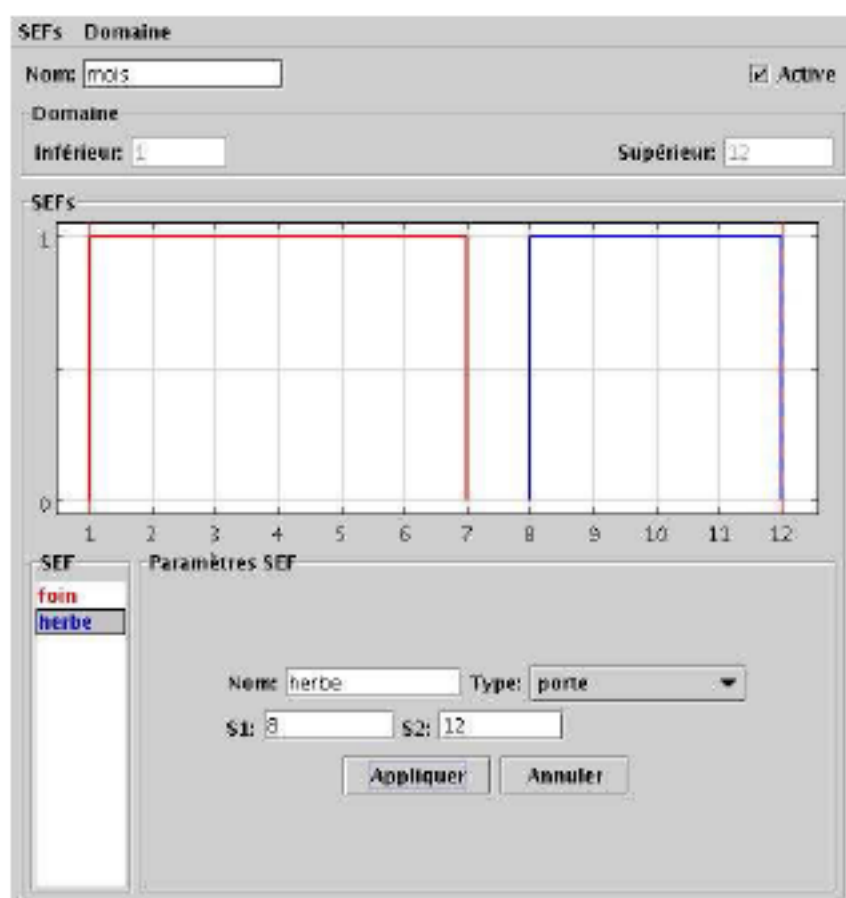


FIG. 5.35: **BR2** - Sous-ensembles représentant la saison

Ce système étant issu d'un arbre précis, nous avons voulu donner des plages plus importantes aux zones correspondant complètement au noyau d'une règle. Les zones de chevauchement sont donc plus restreintes. Les partitions représentant la saison et l'évolution de l'extrait sec sont sur deux sous-ensembles flous. La partition représentant EvolES a aussi un point de transition à **0.5** mais les pentes des sous-ensembles sont assez strictes pour coller à la représentation donnée par l'arbre. Ainsi, EvolES est faible pour des valeurs inférieures à **0.4** et forte pour des valeurs supérieures à **0.6**. La partition représentant la saison est constituée d'ensembles non flous. Cette séparation montre la différence entre hiver et été qui semble vouloir dire que le passage d'une saison à l'autre est assez brutal.

Le Gras sur Sec et le potentiel protéolytique sont décomposés sur 3 sous-ensembles flous chacun. Un Gras sur Sec inférieur à **50.3** est faible. Lorsqu'il est supérieur à **51.3**, il est fort. A **50.8**, on considère que le GS est moyen. Les pentes de GS sont assez fortes pour correspondre au sous-ensemble déterminé à partir de l'arbre. De même, les pentes des sous-ensembles définissant la variable LAP sont elles aussi assez fortes. D'un point de vue technicien, certaines règles sont inattendues, mais elles ne sont tout de même pas en contradiction avec les connaissances expertes habituelles.

### 5.4.4.3 Résultats règles implicatives

Les résultats obtenus sont meilleurs que les précédents. Ce système semble bien mieux adapté à la modélisation de la pâte ferme. Le tableau 5.5 nous montre les résultats obtenus avec notre échantillon de 103 fromages.

Qualité de la prédiction	Nombre de fromage concernés
Bonne et précise	55
Bonne et imprécise	20
très imprécise	2
mauvaise	20
très mauvaise	5
mauvaise et imprécise	1

TAB. 5.5: Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives

Environ 3/4 des fromages sont bien prédits et seulement 26 ne le sont pas. On remarque un nombre de fromages bien prédits et précis importants. Ceci est dû au fait que les chevauchements entre les sous-ensembles s'étalent sur des zones assez restreintes. On est donc plus souvent dans le noyau d'une règle. Par conséquent, la sortie qui en résulte est plus précise.

- Prédications imprécises : Nous n'avons pas identifié de variable supplémentaire discriminante en utilisant les arbres de décision sur l'ensemble des variables disponibles. On notera que sur ces 22 fromages (prédications imprécises et très imprécises), 15 ont une fermeté observée normale. Leur fermeté normale doit provenir de compensations différentes puisqu'aucune variable ne semble pouvoir les discriminer.
- Mauvaises prédictions : d'autres variables semblent intervenir (l'extrait Sec notamment). Cependant, sur les mauvaises prédictions, une étude avec un technicien a montré que la moitié des fromages considérés étaient atypiques (fromages très vieux lors de la dégustation ou fromages ne correspondant pas à certains éléments du cahier des charges du Comté). Dans ces cas-là, la prédiction de la fermeté du fromage semble impossible à partir des seules données à 20 heures et de pré-affinage.

En conclusion, le système **BR2** donne des résultats plutôt bons puisqu'on a 75 prédictions correctes dont seulement 20 imprécises. Puisque les experts du CTFC estiment à **70%** l'importance de la fabrication dans le processus et à **30%** celle de l'affinage, on ne peut pas s'attendre à des prédictions meilleures.

Nous venons de voir deux systèmes différents : le système simple **BR1** et le système **BR2** issu des données. Nous allons voir par la suite comment on peut partir des connaissances expertes pour ensuite améliorer les résultats obtenus avec les données.

### 5.4.5 Système expert et raffinement

Le système qui suit a été créé en tenant compte des connaissances expertes mais en donnant une importance élevée à l'évolution de l'extrait-sec comme nous le suggeraient les analyses faites et les résultats obtenus sur nos systèmes de règles.

#### 5.4.5.1 Système considéré

Nous ne considérons ici que les variables qui ont un sens fort pour l'expert. Certaines d'entre elles ont été mises en évidence par des approches automatiques. Nous avons donc choisi de créer



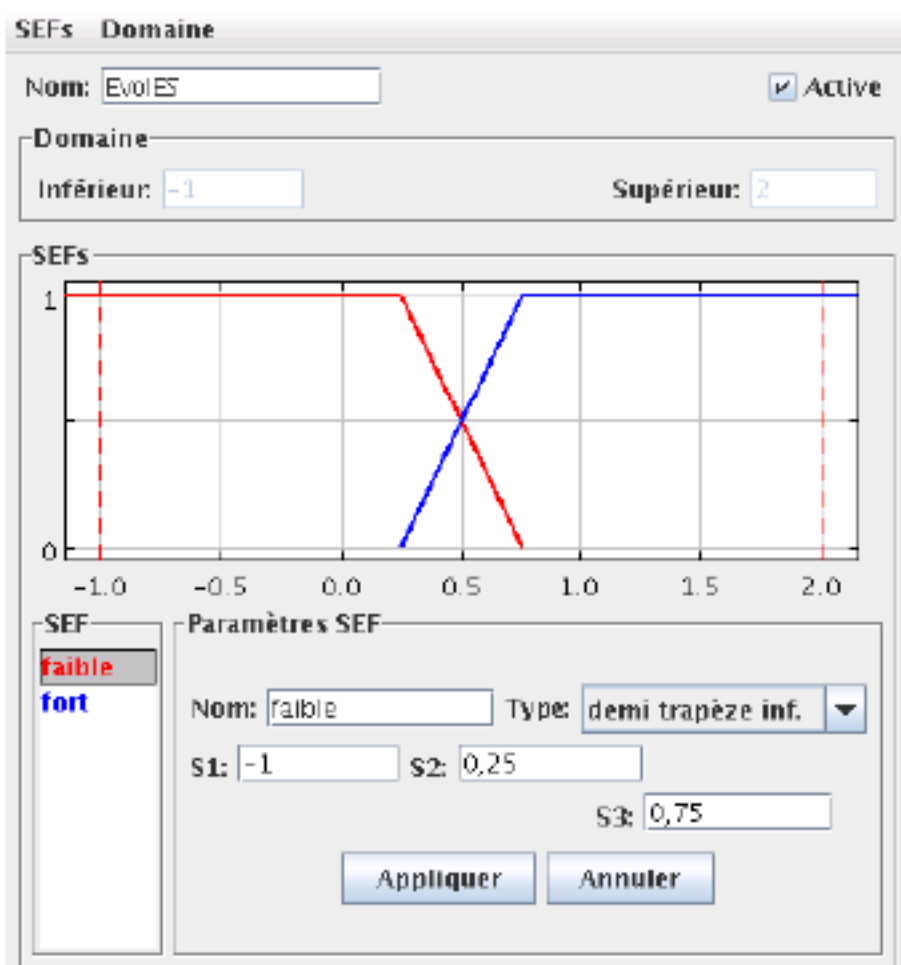
un système à partir de l'évolution de l'extrait sec (EvoES), l'humidité du fromage dégraissé (en talon) HFDTal, le rapport Gras sur Sec (G/S) et la saison. Le choix de l'HFD en talon a été fait car l'analyse des données donnait cette variable comme plus fiable que l'HFD en milieu de rayon. Selon les experts, le passage d'un label à l'autre est très progressif.

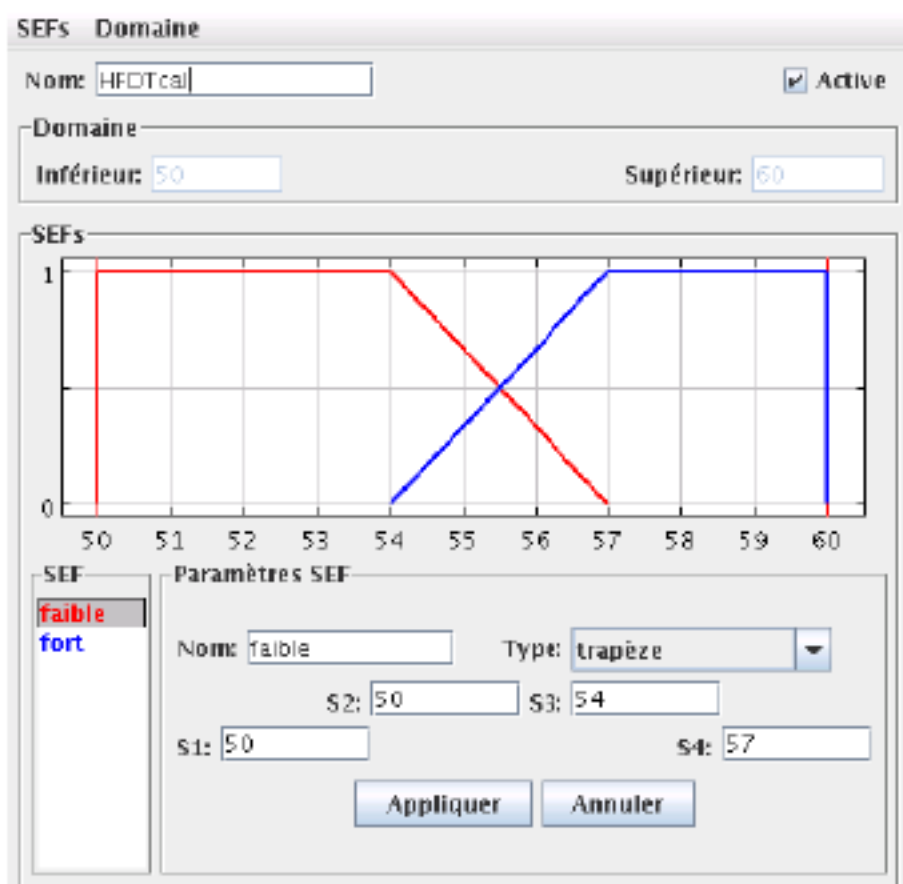
Nous avons donc décidé de créer des ensembles flous dont les zones de chevauchement sont assez importantes. Chaque partition est définie par deux sous-ensembles. Les figures 5.36, 5.37, 5.38, 5.39 et 5.40 nous montrent les partitions choisies pour ces quatre variables et la variable de sortie. On remarque que la partition de la saison est différente de celle sélectionnée pour la base **BR2** à partir des données. Une analyse plus fine nous a permis de réaliser que le passage d'un seuil de 7.5 pour **BR2** au seuil de 5.5 **BR3** était dû à une faible représentativité des mois 6 et 7 dans la zone d'intérêt et de 3 fromages ayant un influence contraire au comportement habituelle de la fermeté vis-à-vis de la saison. Cependant, le seuil le plus naturel pour la saison est bien 5.5 car il s'agit effectivement du passage de l'hiver à l'été (mi-mai).

Nous avons mis en place les 10 règles suivantes :

### BR3

1. Si EvoES est faible et HFDTal est fort et GS est fort alors la pâte est molle
2. Si EvoES est faible et HFDTal est fort et GS est faible et saison est herbe alors la pâte est molle
3. Si EvoES est faible et HFDTal est fort et GS est faible et saison est foin alors la pâte est normale
4. Si EvoES est faible et HFDTal est faible alors la pâte est normale
5. Si EvoES est fort et HFDTal est fort et GS est fort et saison est herbe alors la pâte est normale
6. Si EvoES est fort et HFDTal est fort et GS est fort et saison est foin alors la pâte est ferme
7. Si EvoES est fort et HFDTal est fort et GS est faible alors la pâte est ferme
8. Si EvoES est fort et HFDTal est faible et GS est fort et saison est herbe alors la pâte est normale
9. Si EvoES est fort et HFDTal est faible et GS est fort et saison est foin alors la pâte est ferme
10. Si EvoES est fort et HFDTal est faible et GS est faible alors la pâte est ferme

FIG. 5.36: **BR3** - Partition représentant l'évolution de l'extrait sec

FIG. 5.37: **BR3** - Partition représentant l'Humidité de Fromage Dégraissé en talon

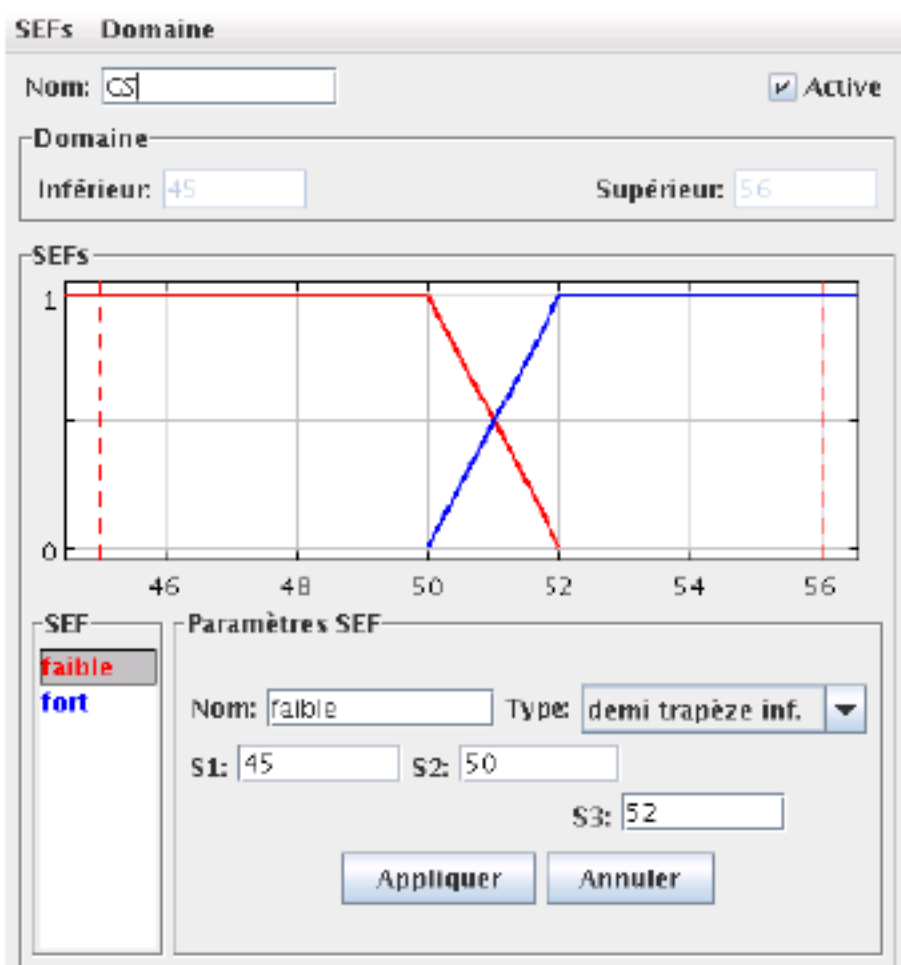
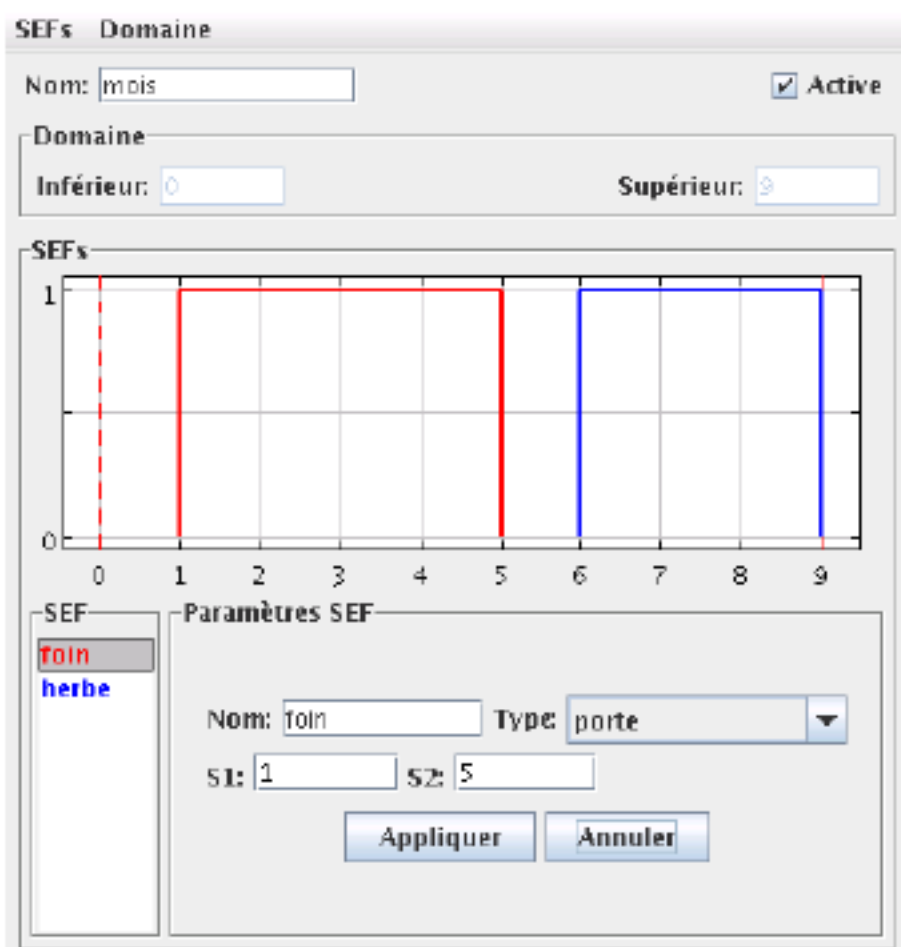


FIG. 5.38: **BR3** - Partition représentant le rapport Gras sur Sec

FIG. 5.39: **BR3** - Partition représentant la saison

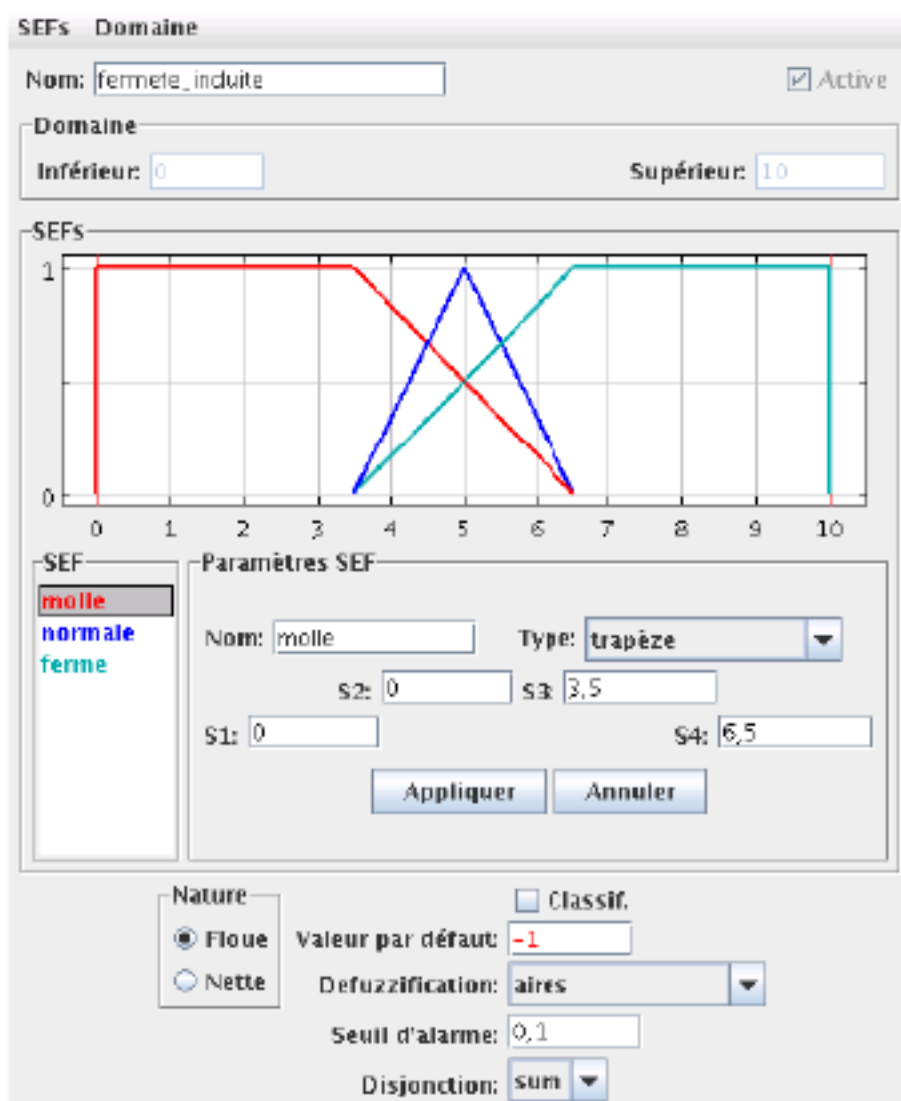


FIG. 5.40: **BR3** - Partition représentant la fermeté de la pâte (sortie de notre système)

Les résultats de ce système de règles implicatives sont donnés dans le tableau 5.6, toujours pour le même échantillon.

Qualité de la prédiction	Nombre de fromages concernés	
	BR3	BR2 (rappel)
Bonne et précise	25	55
Bonne et imprécise	43	20
très imprécise	6	2
mauvaise	16	20
très mauvaise	7	5
mauvaise et imprécise	6	1

TAB. 5.6: Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFDTal, GS et Saison

On obtient donc 29 mauvaises prédictions. On a en revanche 68 prédictions correctes dont les  $\frac{2}{3}$  sont imprécises. Notons que, même si les prédictions très imprécises n'apportent aucune information, elles pourront peut-être être raffinées par la suite.

#### 5.4.5.2 Analyse des prédictions imprécises et très imprécises

Afin de déterminer quelles variables nous permettraient de rendre la prédiction plus précise, nous avons construit un arbre en ne prenant en compte que les fromages menant à des prédictions bonnes mais imprécises pour voir s'il est possible d'améliorer ce système en le raffinant.

L'arbre obtenu (figure 5.41) montre que pour une évolution d'extrait-sec inférieure à **0.41**, on fait beaucoup de pâtes fermes. Au dessus de **0.41**, le PH et le rapport Gras sur Sec interviennent.

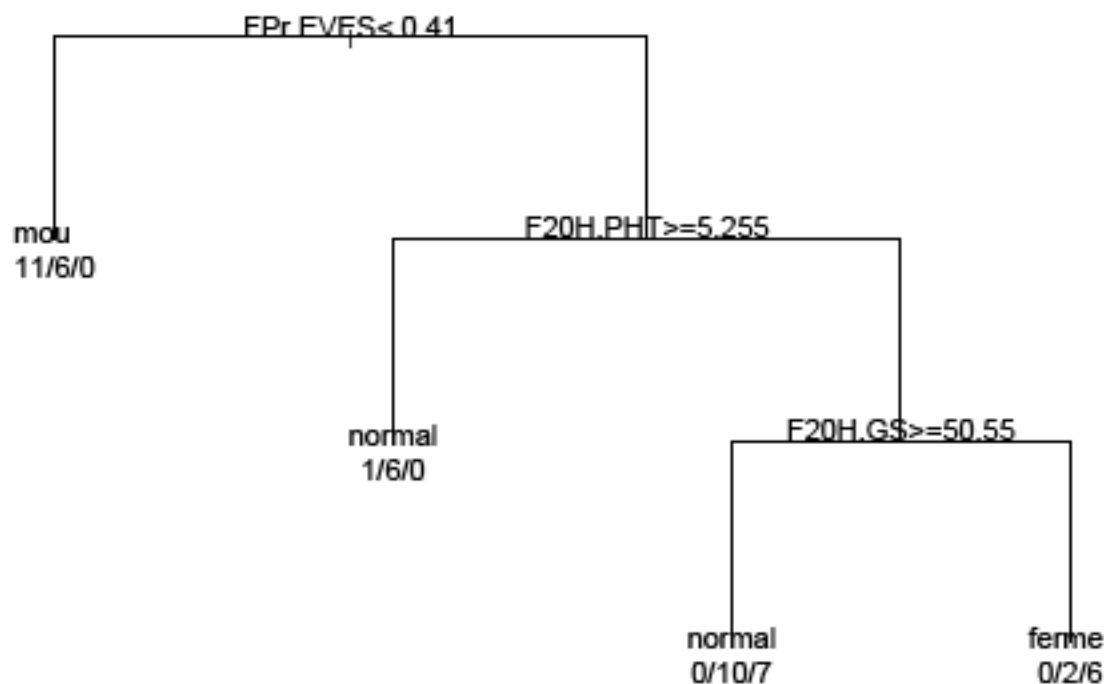


FIG. 5.41: Arbre obtenu à partir de toutes les variables à 15 jours et à 20h sur les données dont la sortie calculée est imprécise

Nous allons donc construire un nouveau système afin de raffiner les résultats obtenus avec **BR3**. Dans la section 4.4 nous montrons les différentes possibilités de raffinement. Dans notre cas, il est évident qu'il faut utiliser un raffinement en parallèle car nous voulons affiner la sortie. Nous ne voulons pas la réutiliser comme entrée d'un nouveau système.

### 5.4.5.3 Création d'un système à partir de ces résultats

Nous avons construit nos sous-ensembles flous à partir des bornes données par l'arbre (cf figures 5.42, 5.43, 5.44 et 5.45). Les partitions sont définies sur deux sous-ensembles flous. L'évolution de l'extrait-sec change d'état à **0.4** comme l'arbre nous le suggère. Le gras sur sec change d'état à **50.5** et le pH à **5.1**. La partition de sortie représente toujours la fermeté sur trois sous-ensembles flous. Le seuil d'EvoLES est plus bas par rapport aux partitions habituels, celui de GS correspond au passage d'un GS faible à un GS moyen.

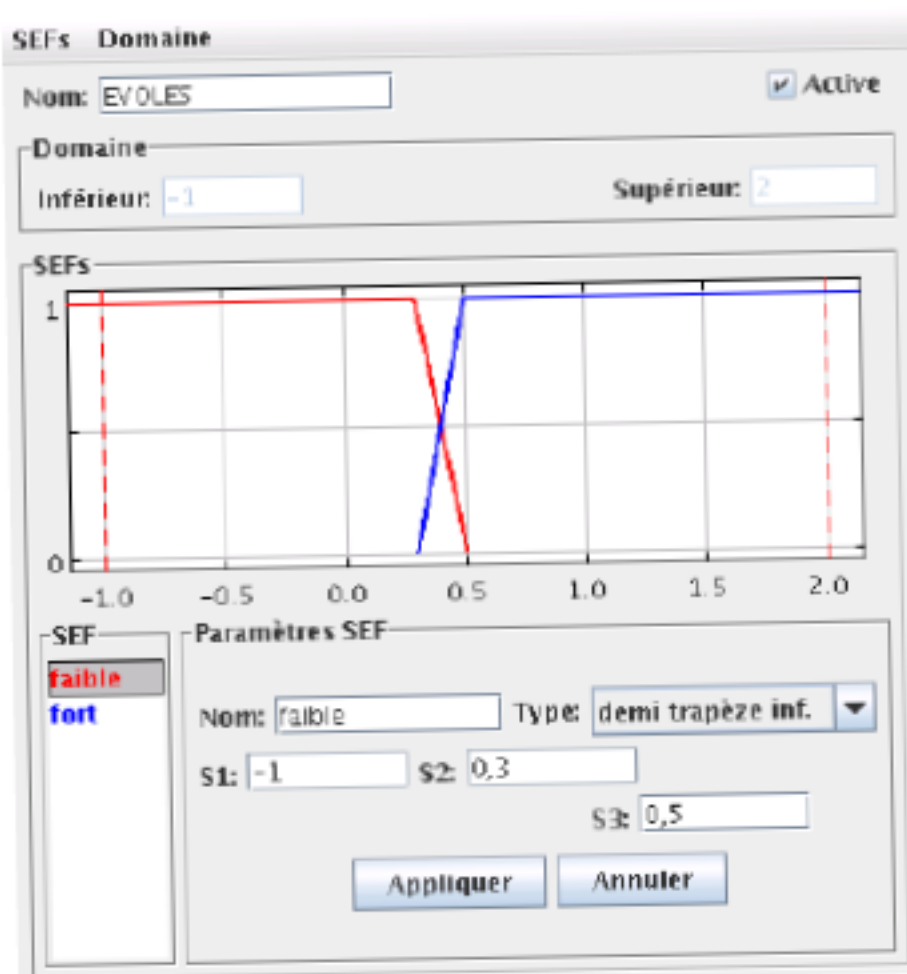


FIG. 5.42: **BR4** - Partition représentant l'évolution de l'extrait sec



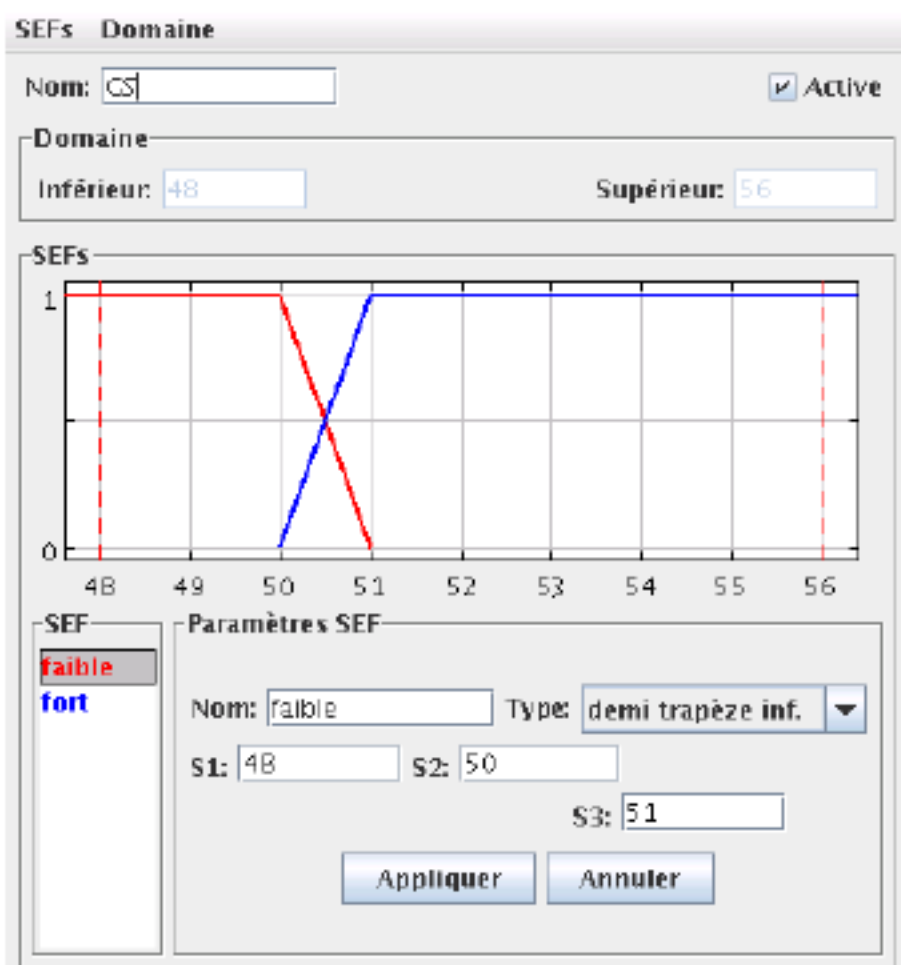


FIG. 5.43: BR4 - Partition représentant le rapport gras sur sec

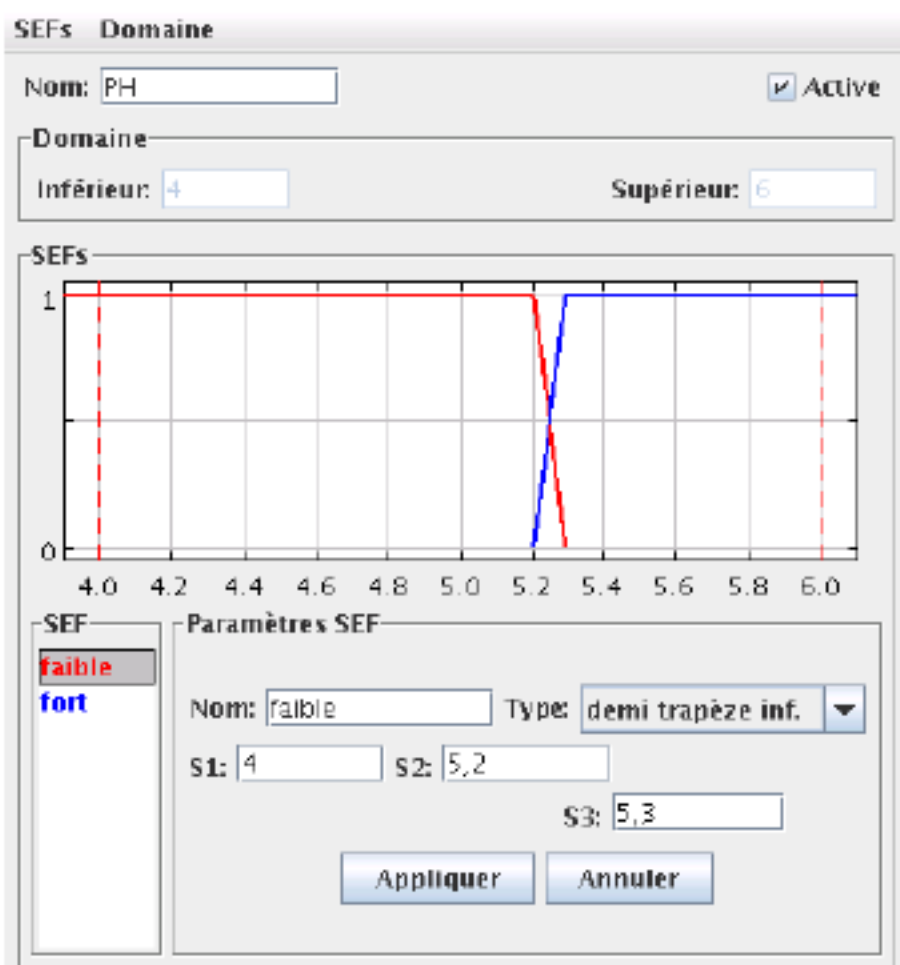


FIG. 5.44: BR4 - Partition représentant le PH

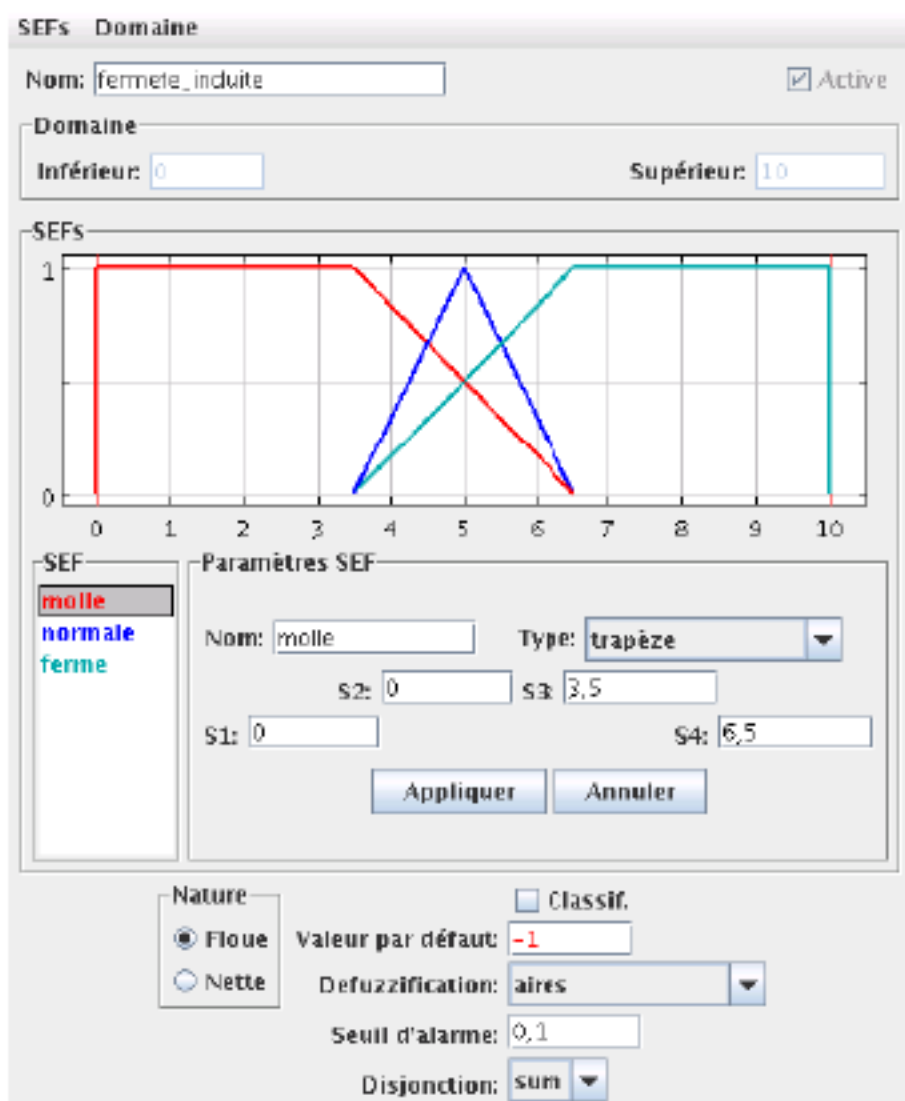


FIG. 5.45: BR4 - Partition représentant la fermeté

Les 4 règles correspondants à ces sous-ensembles sont les suivantes :

#### BR4

1. Si EvolES est faible, alors la pâte est molle
2. Si EvolES est fort et PH est fort, alors la pâte est normale
3. Si EvolES est fort et PH est faible et GS est fort, alors la pâte est normale
4. Si EvolES est fort et PH est faible et GS est faible, alors la pâte est ferme

L'objectif du raffinement est de préciser la prédiction du premier système lorsque que cela est possible. L'architecture du raffinement est présentée sur la figure 5.46. Ainsi, le premier système (BR3) reste prioritaire, ce qui est souhaité car c'est le système le plus fiable et qui est en accord avec les connaissances expertes. Le raffinement est effectué de la manière suivante : on réalise l'intersection de la sortie de BR3 et de celle de BR4. Si celle-ci est vide, on conserve le résultat

obtenu avec **BR3**, sinon le nouveau résultat est l'intersection des sorties **BR3** et **BR4**. En fait, **BR4** n'améliore **BR3** que lorsque c'est possible.

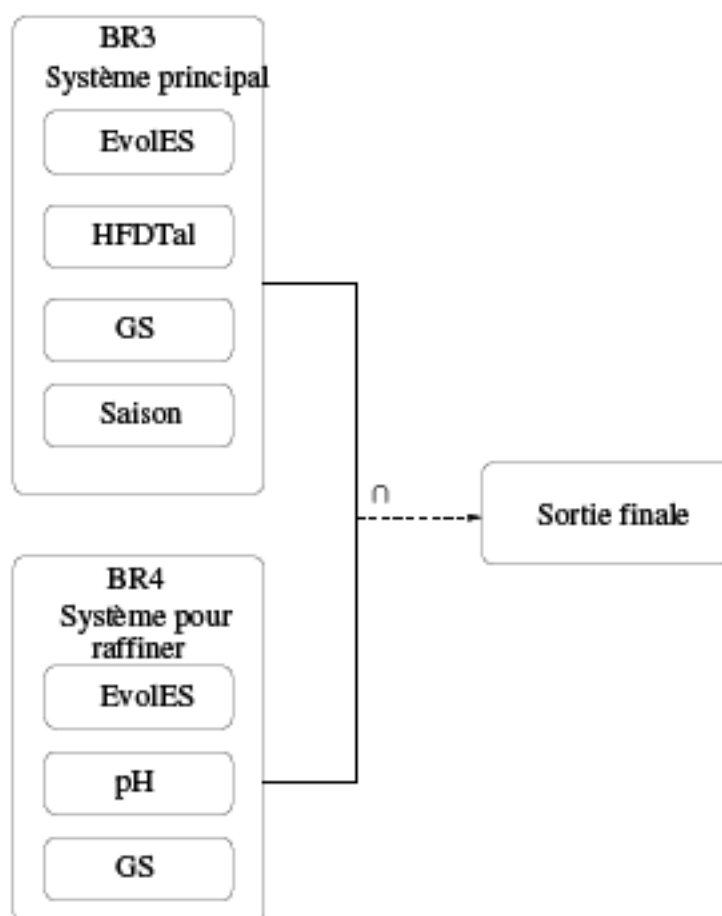


FIG. 5.46: Raffinement du système principal par le second système

Les résultats après raffinement sont donnés dans le tableau 5.7.

Qualité de la prédiction	Nombre de fromages concernés		
	BR4	BR3 (rappel)	BR2 (rappel)
Bonne et précise	39	25	55
Bonne et imprécise	28	43	20
très imprécise	1	6	2
mauvaise	25	16	20
très mauvaise	6	7	5
mauvaise et imprécise	4	6	1

TAB. 5.7: Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFDTal, GS et Saison

Après raffinement, nous avons 67 prédictions correctes (la prédiction très imprécise n'apporte rien au système puisqu'on ne peut pas décider entre mou, moyen et ferme) et 35 mauvaises

prédictions en comptant la prédiction très imprécise.

Nous avons donc amélioré notablement la qualité des résultats grâce au raffinement des prédictions imprécises. A présent,  $2/3$  des bonnes prédictions sont précises alors qu'avant raffinement, seulement  $1/3$  était précis.

## 5.5 Conclusion

Parmi les systèmes étudiés, nous avons retenu trois systèmes pour modéliser la fermeté :

- Le système **BR1** provenait d'une connaissance experte simplifiée, il nous a servi à mettre en évidence la différence entre règles conjonctives et règles implicatives. Les résultats sont convenables pour un système simpliste mais le nombre de prédictions imprécises est tout de même assez élevé.
- Le système **BR2** a été construit à partir des données sélectionnées comme importantes par les experts. Il montre l'intérêt de l'utilisation de méthodes de segmentation de l'espace pour construire des systèmes de règles floues. Les résultats obtenus sont assez précis et le nombre d'erreurs est convenable compte-tenu de cette application.
- L'exemple des systèmes **BR3** et **BR4** montre deux aspects intéressants : tout d'abord, le système issu de l'expertise (**BR3**) donne de bons résultats même s'ils sont plus imprécis que ceux du système **BR2**. Enfin, le raffinement par le système **BR4** des sorties inférées à partir de **BR3** donne des résultats équivalents à **BR2** mais plus précis.

En conclusion sur ces trois systèmes, le système le plus efficace d'un point de vue performance est celui issu des données (**BR2**). Cependant, les résultats du dernier système testé (**BR3** + **BR4**) sont assez proches et sont plus intéressants du point de vue des connaissances des experts du domaine car ils sont directement issues de leurs connaissances.

Ce travail nous a permis d'isoler les variables importantes pour la caractérisation de la fermeté de la pâte. Il nous a amené à développer une méthode pour analyser les résultats des règles implicatives, notamment en exprimant leur validité et leur imprécision. En regardant ces deux éléments, on peut savoir si la sortie inférée correspond (qualitativement) à la sortie observée. Cette sortie inférée n'est pas réduite à une valeur et nécessite d'être interprétée en terme de qualité et de précision.

On peut noter que la forme des partitions de sortie qui est assez particulière, correspond bien au regard des experts sur leur procédé. Ils l'ont adoptée facilement alors qu'ils étaient plutôt habitués à une représentation sous forme de partition forte. Il semble en effet que pour des sorties continues, ce type de modélisation soit adéquat.

Nos travaux ont permis d'enrichir certaines des connaissances des experts (variable LAP notamment). L'approche automatique (système **BR2**, arbres et analyse de données) a attiré l'attention des experts sur l'importance de l'évolution de l'extrait-sec. Après questionnement, ils ont validé a posteriori le rôle essentiel de cette variable. Les systèmes créés par apprentissage à partir des arbres de décisions, et les analyses des données ont pu mettre en évidence qu'EvoLES est la variable la plus importante pour caractériser la fermeté. En partant d'un nombre important de variables mesurées, notre méthode a permis de déterminer 5 variables à prendre en compte pour ce problème.

Un autre point important est que les experts du CTFC se satisfont très naturellement d'une sortie imprécise car elle leur permet de connaître les tendances de sortie. Il vaut mieux pour eux une prédiction imprécise qu'une prédiction erronée.

Le raffinement est un plus indéniable de cette méthode car il permet de préciser des résultats imprécis en utilisant un autre système de règles.

Certains systèmes de règles testés ont aussi mis en évidence que lorsque les partitions ne sont pas conçues avec soin, un certain nombre d'incohérences sont détectées par le système. Notamment, les premiers systèmes mis au point utilisaient des partitions floues fortes en sortie, ce qui menait à un grand nombre d'incohérences.

Pour conclure, il est indispensable de valider ces systèmes sur d'autres échantillons de données, y compris sur les analyses effectuées en routine sur les meules, mais avec une garantie de traçabilité, ce qui permettrait d'avoir régulièrement des données fiables pour étayer la connaissance experte et apprise à partir des données. La méthodologie appliquée dans l'étude présentée dans ce chapitre semble prometteuse pour le cas du Comté, comme pour d'autres cas de procédés ayant une forte variabilité. Cette variabilité peut être due à leur matière première ou à la dimension d'expertise humaine dans la fabrication et dans l'analyse sensorielle.

## Figures

5.1	Départements de fabrication du Comté . . . . .	101
5.2	Collecte du lait . . . . .	102
5.3	Acheminement du lait par camion citerne . . . . .	102
5.4	Emprésurage d'un fromage . . . . .	103
5.5	Décaillage d'un fromage . . . . .	103
5.6	Cuisson d'un fromage . . . . .	104
5.7	Brassage du caillé . . . . .	104
5.8	Egouttage du caillé . . . . .	105
5.9	Moulage du fromage . . . . .	105
5.10	Pressage du fromage . . . . .	106
5.11	Salage du fromage . . . . .	106
5.12	Cave d'affinage . . . . .	107
5.13	Retournement d'une meule de Comté . . . . .	107
5.14	Soins en cave . . . . .	108
5.15	Retournement d'une meule par un robot . . . . .	108
5.16	Bandes vertes (à gauche) et brunes (à droite) . . . . .	109
5.17	Schéma de fabrication du Comté . . . . .	111
5.18	Déroulement des analyses sur meule sur un mois . . . . .	112
5.19	Influence de l'HFD sur la fermeté de la pâte . . . . .	117
5.20	Influence de la saison sur la fermeté de la pâte . . . . .	118
5.21	Étiquette 10 . . . . .	120
5.22	Étiquette 11 . . . . .	120
5.23	Étiquette 12 . . . . .	121
5.24	Étiquette 30 . . . . .	121
5.25	Étiquette 20 . . . . .	122
5.26	Étiquette 21 . . . . .	122
5.27	<b>BR1</b> - Partition représentant l'Humidité de Fromage Dégraissé . . . . .	123
5.28	<b>BR1</b> - Partition représentant l'Évolution de l'Extrait Sec . . . . .	124
5.29	<b>BR1</b> - Partition représentant la fermeté de la pâte pour le système de règles implicatives . . . . .	125
5.30	<b>BR1</b> - Partition de sortie représentant la fermeté de la pâte pour le système de règles conjonctives . . . . .	126
5.31	Arbre obtenu en considérant les variables HFD, EvolES, GS, saison, NaCl et LAP . . . . .	130
5.32	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant EvolES . . . . .	132
5.33	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant GS . . . . .	133
5.34	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant le potentiel protéolytique LAP . . . . .	133
5.35	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant la saison . . . . .	134
5.36	<b>BR3</b> - Partition représentant l'évolution de l'extrait sec . . . . .	137
5.37	<b>BR3</b> - Partition représentant l'Humidité de Fromage Dégraissé en talon . . . . .	138
5.38	<b>BR3</b> - Partition représentant le rapport Gras sur Sec . . . . .	139
5.39	<b>BR3</b> - Partition représentant la saison . . . . .	140
5.40	<b>BR3</b> - Partition représentant la fermeté de la pâte (sortie de notre système) . . . . .	141
5.41	Arbre obtenu à partir de toutes les variables à 15 jours et à 20h sur les données dont la sortie calculée est imprécise . . . . .	142
5.42	<b>BR4</b> - Partition représentant l'évolution de l'extrait sec . . . . .	143
5.43	<b>BR4</b> - Partition représentant le rapport gras sur sec . . . . .	144
5.44	<b>BR4</b> - Partition représentant le PH . . . . .	145
5.45	<b>BR4</b> - Partition représentant la fermeté . . . . .	146
5.46	Raffinement du système principal par le second système . . . . .	147

---

**Tables**

5.1	Données : définition des variables explicatives . . . . .	114
5.2	Qualité du Comté : évaluations du jury de techniciens . . . . .	115
5.3	Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives . . . . .	127
5.4	Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles conjonctives . . . . .	127
5.5	Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives . . . . .	135
5.6	Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFD'Tal, GS et Saison	141
5.7	Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFD'Tal, GS et Saison	147

---





---

## Chapitre 6

# Conclusions - Perspectives

### 6.1 Conclusions

Dans ce travail, nous avons montré comment utiliser les règles implicatives de manière pratique. Pour cela, nous avons tout d'abord suivi la classification mise au point par Dubois et Prade qui décompose les règles floues en deux classes principales : les règles implicatives et les règles conjonctives. Les règles implicatives sont une généralisation floue des règles classiques, elles permettent de représenter des contraintes floues. Les règles conjonctives représentent des exemples de valeurs conjointement possibles. Pour chacune de ces classes, il existe deux sous-catégories : les règles graduelles et les règles à certitude pour les règles implicatives, et les règles à possibilité et antigraduelles pour les règles conjonctives. Nous avons montré que pour notre classe de problèmes, les règles implicatives graduelles sont les plus appropriées. Une comparaison de celles-ci avec les règles les plus utilisées en logique floue (les règles conjonctives à possibilité) a été faite. Elle met en valeur les avantages des règles implicatives graduelles dans une optique de représentation des connaissances expertes. Nous remarquons aussi la difficulté principale liée à l'utilisation de ce type de règles : l'inférence d'un système multi-dimensionnel lorsqu'on est en présence d'entrées floues.

Nous avons développé un algorithme d'inférence efficace permettant de manipuler des entrées floues avec des systèmes de règles implicatives. Ces méthodes sont basées sur une double décomposition : une décomposition par  $\alpha$ -coupes qui permet d'approximer l'entrée floue par un certain nombre d'entrées rectangulaires, et une décomposition par partitionnement qui permet de se ramener à une inférence locale. Dans certains cas, l'inférence est immédiate grâce aux propriétés d'indépendance inférentielle. Cet algorithme de complexité linéaire fonctionne pour des systèmes de dimension réduite.

Les règles implicatives et les règles conjonctives s'expriment sous la même forme linguistique de base "Si ..., alors ..." et utilisent toutes les deux des ensembles flous. Le piège serait de les interpréter de la même manière car elles représentent des informations totalement différentes. Nous avons donc donné des clés d'interprétation et de construction de systèmes de règles implicatives. La sémantique associée aux deux types de règles est complètement différente et change la manière de les interpréter. Nous avons aussi abordé le problème de la cohérence d'un système de règles implicatives. En effet, nous nous sommes rendu compte en construisant de tels systèmes pour notre application que ce point était loin d'être trivial et qu'un utilisateur non avisé pouvait facilement et involontairement créer des incohérences non souhaitées au sein de son système de règles. Nous avons introduit de nouveaux indicateurs pour qualifier la sortie floue inférée, dont

---

l'intérêt est de quantifier l'erreur et l'imprécision. Ces deux critères nous permettent de caractériser la qualité de la sortie de manière assez efficace. Enfin, nous avons montré comment il est possible de faire collaborer différents systèmes d'inférence et ainsi de s'affranchir de la difficulté liée aux systèmes de grande dimension.

Une application à la fabrication fromagère du Comté est présentée. Elle illustre le contexte particulier de la filière Comté et de cette application : procédés complexes, connaissances expertes disponibles, actions humaines des opérateurs tout au long de la fabrication et lors de l'analyse sensorielle.

Ce travail montre trois systèmes différents permettant de modéliser la caractéristique de fermeté du Comté à partir des informations avant affinage. L'étude de ces systèmes a permis de dégager des approches prometteuses : formalisation à l'aide de règles implicatives de la connaissance experte, détection des sorties imprécises, raffinement à l'aide d'arbres de décision construits à partir des données correspondant à ces sorties imprécises.

Précisons que le souci applicatif était présent dès le départ de ce travail de thèse. Nous nous sommes attachés à l'application dès le début, et beaucoup de recherches bibliographiques ont été menées [Jenei et al. - 2001],[Jenei et al. - 2002] et [Ughetto et al. - 2000] (bases de règles incomplètes) [Dubois & Prade - 1992c] et [Radzikowska & Kerre - 2002] (rough sets), [Borgelt & Gebhardt - 1997], [Borgelt & Kruse - 2002] et [Benferhat et al. - 2002] (réseaux possibilistes). Elles ne sont pas présentées dans notre manuscrit car par la suite, nous avons centré notre travail sur les règles implicatives.

Plus généralement, les aller-retours entre application et méthodologie ont été très enrichissants. En effet, le problème de la construction de partitions permettant de garantir l'interprétabilité et la cohérence du système a été mis en évidence par les premiers systèmes réalisés dans l'application réelle, qui présentaient des incohérences non souhaitées. Ainsi, nous avons fait évoluer notre regard sur les partitions, ce qui a profité à la méthodologie développée. De la même manière, la caractérisation de la qualité de la sortie nous a paru indispensable lorsque nous obtenions une centaine de prédictions entachées d'imprécision et que nous souhaitions voir dans quelle mesure elles étaient en accord ou pas avec les données réelles. La méthode développée nous permettait de quantifier l'erreur faite et la précision de la sortie par une étiquette ce qui permet un regard synthétique sur les résultats. Cette thèse aura donc été l'occasion d'établir un lien entre les règles implicatives floues habituellement utilisées par des logiciens et des applications réelles. Nous espérons ainsi que l'utilisation pratique des règles implicatives pourra être mieux comprise et que ce travail pourra être poursuivi suivant les axes que nous définissons par la suite.

## 6.2 Perspectives

Ce travail de thèse appelle d'autres **travaux méthodologiques** qui pourraient être menés suivant 3 axes principaux :

- Le développement de méthodes d'inférence à partir d'entrées floues pour des dimensions supérieures à 2 et pour d'autres implications.
- La coopération des deux types de règles (conjonctives et implicatives) au sein d'une même base de règles.
- L'apprentissage de règles implicatives floues.

Les méthodes mises au point ont été testées sur des applications réelles. Cependant, pour que le système puisse modéliser des systèmes de règles implicatives plus complexes, il apparaît nécessaire de prolonger les développements méthodologiques sur l'inférence à partir d'entrées

---

floues. Il serait intéressant de disposer d'une méthode d'inférence pour des dimensions supérieures à deux. Pour les dimensions correspondant à notre type d'applications (inférieur à 5 dimensions), le problème ne semble pas insurmontable. En revanche, pour des systèmes de dimension élevée, des problèmes de combinatoire risquent de se produire.

Il serait aussi intéressant de généraliser notre méthode à d'autres implications. Il apparaît d'ailleurs que, pour l'implication de Goguen, cette généralisation serait assez immédiate. Cependant, on peut remarquer que le support issu d'une implication de Goguen n'apporte aucune information car il est entièrement dépendant de la forme des partitions de sorties. Pour Gödel, la généralisation s'avère plus compliquée car pour des sorties avec des pentes différentes, l'union des différentes sorties pourrait être plus complexe.

Le deuxième axe concerne la coopération de différents systèmes de règles au sein d'une même base. En effet, les règles implicatives et conjonctives ont souvent été opposées, les premières étant utilisées par des logiciens car elles proviennent directement de la logique classique, les secondes étant réservées au domaine du contrôle flou pour leur facilité d'utilisation et leur capacité d'approximation de fonctions. Ces deux types de règles ont des significations différentes mais peuvent, en étant couplées, donner deux informations complémentaires sur un même problème. En effet, chaque base de règles est censée donner une borne supérieure et inférieure de la sortie réelle. Les règles conjonctives représentant des exemples de ce qui est possible, il est naturel qu'elles représentent la borne inférieure de possibilité de sortie de la base de règles. Les règles implicatives représentant des contraintes, un modèle sur un ensemble de valeurs possibles, elles représentent évidemment la borne supérieure de la sortie réelle. Cependant, dans la pratique, il peut être assez compliqué de garantir la cohérence de deux bases distinctes. En effet, la sortie floue inférée par les règles conjonctives est souvent très large et rend donc un grand nombre de valeurs de la sortie "garanties possibles". Il y aura alors incohérence dans notre base de règles si une valeur est garantie possible par des règles conjonctives et interdite par des règles implicatives. Toute la complexité de la collaboration entre ces deux systèmes se situe donc sur ce point. Les partitions de sortie des règles conjonctives devront être plus fines que celles des règles implicatives si l'on souhaite que le modèle contienne effectivement les données. Pour chaque valeur inférée, on peut imaginer 3 informations : la possibilité garantie (les faits réellement observés), la possibilité potentielle (le modèle qui inclut ces faits) et l'interdiction de certaines valeurs (les contraintes de ce modèle).

Le dernier axe qu'il serait intéressant de développer concerne l'apprentissage de systèmes de règles implicatives floues. En effet, nous avons pu voir en construisant un système de règles implicatives à partir d'une méthode de segmentation de l'espace qu'il était possible de s'aider des données pour construire un système de règles implicatives. Cependant, nous sommes encore bien loin de l'apprentissage automatique de ces règles. Cependant, il est déjà évident que les contraintes de cohérence devront être respectées pour que le système appris ait du sens. On peut dresser un parallèle entre les statistiques et les règles floues. Les règles conjonctives correspondent en fait à un nuage de points et les règles implicatives à un modèle. En statistique, c'est toute la différence entre les statistiques descriptives et les statistiques inférentielles. L'apprentissage de règles implicatives induit le passage d'un ensemble de valeurs possibles à un modèle. Il sera aussi nécessaire de quantifier la qualité du système appris selon les données d'apprentissage.

Du **point de vue applicatif**, beaucoup de travail reste aussi à faire : il serait intéressant de valider la méthodologie sur d'autres applications similaires et en particulier sur d'autres caractéristiques du Comté. Une des autres applications envisageables serait le traitement des vignes contre le mildiou, qui fait l'objet d'un projet ADD GeDuQuE (Gestion Durable de la Qualité de

---

l'Eau). Il contient de l'expertise et des modèles, et les règles implicatives seraient adaptées à une telle application.

**Quant au côté logiciel**, des prototypes des algorithmes ont été implémentés en C++ au sein de la plate-forme libre FisPro (Fuzzy Inference System Professional) développée à l'INRA et au Cemagref. Un travail important de développement et d'interfaçage est à envisager, avec en particulier des visualisations adaptées aux sorties des règles implicatives. L'intégration dans un logiciel open source tel que FisPro est une étape indispensable pour faire connaître de nouveaux outils de raisonnement approché à une large communauté d'utilisateurs.

## Annexe A

# Glossaire des systèmes d'inférence floue

**Agrégation** : L'agrégation des règles est la manière d'agréger les sorties obtenues. Celle-ci peut être disjonctive (maximum) ou conjonctive (minimum)

**Activation** : Un exemple active une règle, ou bien une règle active un exemple, si le degré d'appartenance à la prémisse de la règle est non nul.

**Conditionnement** : (voir système bien conditionné)

**Conjonction** : L'opérateur de conjonction en logique classique est le ET. En logique floue, la conjonction peut être le minimum ou le produit

**Connaissance positive** : Une connaissance positive est une connaissance issue d'un fait observé par exemple. Puisqu'on l'a observé, il est possible de manière garantie. Ce type de connaissance est particulièrement adapté aux règles conjonctives.

**Connaissance négative** : Une connaissance négative est une connaissance exprimant une contrainte. C'est le type de connaissance est particulièrement adapté aux règles implicatives.

**Composition sup-min  $\circ$  (ou compositional rule of inference)** : Soit  $R$  la relation définie sur  $U \times W$  qui représente une règle floue  $A \rightarrow O$ . L'ensemble flou  $O'$  est obtenu en composant  $A'$  et  $R$ , c'est-à-dire en projetant sur  $W$  la combinaison conjonctive (par l'opérateur **min**) de  $R$  et de l'extension cylindrique de  $A'$  sur  $U \times W$ . Par cette composition, on a la relation suivante :

$$O' = A \circ A \rightarrow O = A' \circ R$$

**Défuzzification** : La défuzzification utilise le résultat inféré en sortie du système. Les opérateurs de défuzzification sont différents selon le type de sortie, nette ou floue.

– Sortie nette :

1. opérateur de **sugeno**

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m W^j C^j}{\sum_{j=1}^m W^j} \quad (\text{A.1})$$

2. opérateur **max net**

$$\hat{y}_i = \{j = \text{argmax}(W^j) \mid j = 1 \dots m\}$$

– Sortie floue :

La figure A.1 illustre le processus de défuzzification pour une sortie floue.

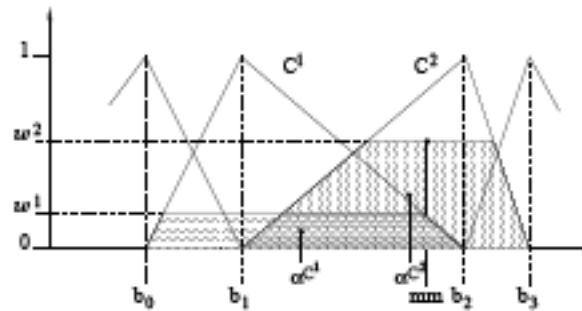


FIG. A.1: Un exemple de défuzzification

1. pondération par les aires Cet opérateur favorise l'interpolation entre termes linguistiques. La sortie est calculée suivant l'équation A.2.

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha^{C^j} \text{area}(C_\alpha^j)}{\sum_{j=1}^m \text{area}(C_\alpha^j)} \quad (\text{A.2})$$

où  $m$  est le nombre de sous-ensembles flous dans la partition,  $\alpha = W^j$  est le niveau d'activation résultant de l'ensemble  $j$ ,  $\alpha^{C^j}$  est l'abscisse du centre de gravité de  $C_\alpha^j$ , et  $C_\alpha^j$  un nouvel ensemble flou, défini à partir de  $C^j$  comme :

$$\mu_{C_\alpha^j}^j(x_i) = \begin{cases} \mu(x_i) & \text{if } \mu^{C^j}(x_i) \leq \alpha \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

2. moyenne des maxima La sortie vaut  $\hat{y}_i = mm$  (figure A.1). Cet opérateur considère seulement le segment correspondant au niveau d'activation maximum. Aussi, il travaille principalement au sein d'un terme linguistique.
3. sugeno Cet opérateur utilise la même formule que pour une sortie nette (équation A.1), mais  $C^j$  représente cette fois le milieu du noyau du SEF  $j$ .

**Disjonction :** L'opérateur de disjonction en logique classique est le OU. En logique floue, la disjonction peut être le maximum

**Ensemble flou :** Un ensemble flou est défini par sa fonction d'appartenance. Un point de l'univers,  $x$ , appartient à un ensemble,  $A$  avec un degré d'appartenance,  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ .

La figure A.2 montre un ensemble flou de forme triangulaire.

**FATI :** La méthode FATI signifie First Aggregate Then Infer : elle consiste à appliquer la composition **sup – min** à la relation  $R$ . On effectue ici une inférence globale puisqu'on applique globalement l'inférence à l'ensemble de règles disponible. Cette méthode est plus compliquée à mettre en œuvre.

**FITA :**

La méthode FITA signifie First Infer Then Aggregate : elle consiste à effectuer la composition

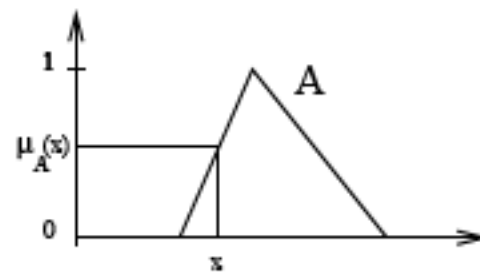


FIG. A.2: Un ensemble flou de forme triangulaire

**sup – min** règle à règle puis à agréger les résultats. Les systèmes de règles conjonctives utilisent cette méthode d'inférence qui est particulièrement facile à mettre en œuvre puisqu'on peut inférer localement (c'est à dire règle à règle)

**Fonction d'appartenance** : Une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  définit pour tout point de l'univers le degré d'appartenance à l'ensemble flou  $A$

**Granularité** : La notion de gradualité d'une partition est liée aux sous-ensembles qui la constitue. La largeur de ceux-ci influera sur la granularité du système d'inférence floue. Avec beaucoup de sous-ensembles flous, on parlera d'une granularité fine. En présence de peu d'ensemble flou, d'une granularité grossière.

**Indépendance inférentielle** : Le système de règles  $\{A_j \rightarrow O_j, j = 1, \dots, n\}$  respecte l'indépendance inférentielle s'il produit en sortie le fait  $O_i$  en présence du fait  $A_i$  en entrée  $\forall i = 1, \dots, n$  :

$$\forall i, A_i \circ \bigcap_j (A_j \rightarrow O_j) = O_i$$

**Interprétabilité** : L'interprétabilité est la facilité de compréhension des relations d'entrées sorties d'un système par un expert humain. L'interprétabilité est évidemment une qualité souhaitable pour un modèle. Il faut néanmoins garder présent à l'esprit que rien n'est gratuit : l'interprétabilité vient de la simplicité des modèles, et cette simplicité même leur interdit en général une haute qualité de résultats.

**Implication de Gödel** :  $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$

**Implication de Goguen** :  $a \rightarrow b = \begin{cases} \min(1, b/a) & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

**Implication de Kleene-Dienes** :  $a \rightarrow b = \max(1 - a, b)$

**Implication de Rescher-Gaines** :  $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Implication résiduelle** : Une implication résiduelle est une implication pour laquelle  $p \rightarrow q$  est totalement vrai si et seulement si  $q$  est au moins aussi vrai que  $p$

**Lukasievitz** : (voir t-norme)



**Minimum :** C'est l'opérateur de conjonction le plus souvent utilisé (notamment pour les règles de Mamdani et pour certaines règles implicatives graduelles).

**Modus ponens :**

$$A \wedge (A \rightarrow O) \models O$$

Ce qui signifie que lorsqu'on a la règle  $A$  implique  $O$  et qu'on a  $A$  en entrée du système considéré, on déduira la sortie  $O$ .

**Modus ponens généralisé :**

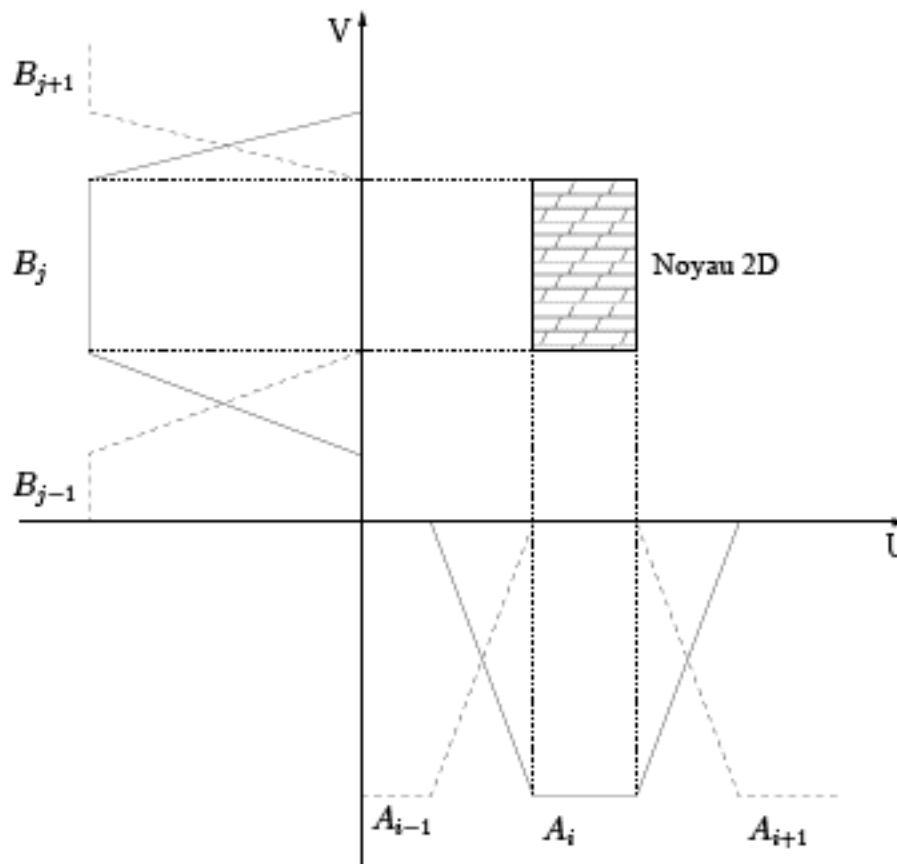
$$A' \wedge (A \rightarrow O) \models O'$$

Ce qui signifie que pour un fait  $A'$ , on est capable de déduire une valeur  $O'$  de l'implication  $A \rightarrow O$ .

**Normalisation :** Un ensemble flou est normalisé si au moins une de ces valeurs est complètement possible. C'est à dire pour un ensemble flou  $A$ ,  $\exists x$  tel que  $\mu_A(x) = 1$ .

**Noyau :** On appelle noyau d'un ensemble flou  $A$  défini par une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$ , l'ensemble des valeurs telles que  $\mu_A(x) = 1$ .

**Noyau 2D :** On appelle noyau 2D d'une règle  $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$  la zone en deux dimensions qui appartient au noyau de  $A_i$  et au noyau de  $B_j$  (cf figure A.3).

FIG. A.3: Noyau 2D de  $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$ 

**Opérateur logique ET** : opérateur de conjonction, noté  $\wedge$ , les plus employés pour les systèmes d'inférence floue sont le minimum et le produit.

**Opérateur logique OU** : opérateur de disjonction, les plus employés pour les systèmes d'inférence floue sont le maximum et la somme.

**Partition floue forte :**

La partition de la variable  $X_i$  sera appelée une partition floue forte si  $\forall x \in X_i, \sum_j \mu_{A_j^i}(x) = 1$ .

La figure A.4 illustre une partition floue forte.

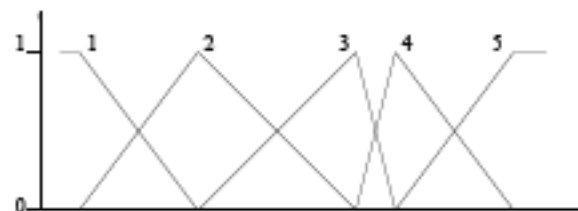


FIG. A.4: Exemple de partition floue forte

**Possibilité** : La possibilité (ou mesure de possibilité) d'un événement  $A$  est un coefficient évaluant à quel point cet événement est possible. Ces valeurs appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ . Un

événement dont la mesure de possibilité est égale à **1** est possible. Si elle est égal à **0**, alors il est impossible.

(voir annexe B pour plus de détails sur la théorie des possibilités)

**Possibilité garantie** : La possibilité garantie (ou mesure de possibilité garantie) d'un événement **A** est un coefficient évaluant à quel point cet événement est garantie possible. Ces valeurs appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ . Un événement dont la mesure de possibilité est égale à **1** est garantie possible. Si elle est égale à **0**, alors il est seulement possible.

**Produit** : C'est un opérateur de conjonction notamment utilisé pour les règles implicatives graduelles modélisées avec l'implication de Goguen.

### Règle floue :

Une règle floue est de la forme *Si je rencontre telle situation Alors j'en tire telle conclusion*. La situation, appelée entrée, prémisse ou antécédent de la règle, est définie par une combinaison de relations de la forme *x est A* pour chacune des composantes du vecteur d'entrée. La partie conclusion de la règle est appelée sortie de la règle.

**SEF** : abbréviation de sous-ensemble flou.

**Sortie inférée par le système** : Soit **O'** la sortie inférée pour une certaine entrée **A'**. Elle dépend bien entendu de la base de règles (implicative ou conjonctive) mais aussi des opérateurs d'agrégation et de défuzzification, et de la nature de la sortie : nette ou floue. L'agrégation des règles peut être disjonctive (règles conjonctives) ou conjonctive (règles implicatives).

**Sous-ensemble flou** : équivalent à ensemble flou.

**Support** : On appelle support d'un ensemble flou **A** défini par une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$ , l'ensemble des valeurs telles que  $\mu_A(x) > 0$ .

**Système bien conditionné** : se référer à la définition d'indépendance inférentielle .

**Système d'inférence floue (SIF)** : Système d'inférence floue (SIF) : Un système d'inférence floue est usuellement formé de trois blocs comme indiqué sur la figure A.5. Le premier, l'étage de fuzzification transforme les valeurs numériques en degrés d'appartenance aux différents ensembles flous de la partition. Le second bloc est le moteur d'inférence, constitué de l'ensemble des règles. Enfin, un étage de défuzzification permet, si nécessaire, d'inférer une valeur nette, utilisable en commande par exemple, à partir du résultat de l'agrégation des règles. Avec les règles implicatives, l'étape de défuzzification ne sera pas forcément nécessaire.

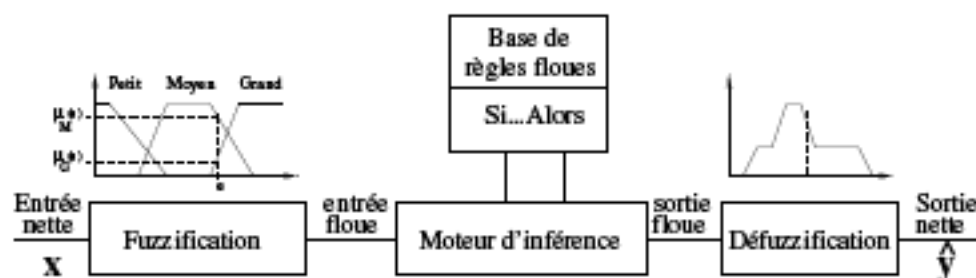


FIG. A.5: Un système d'inférence floue

**t-norme** : La t-norme  $\top$  est une norme triangulaire associée à  $(L, \leq)$ .  $(L, \leq)$  étant un ensemble partiellement ordonné (un treillis) possédant un sommet égal à  $\mathbf{1}$

Une t-norme  $\top$  définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $[0, 1]$  est une fonction définie ainsi :

- elle est commutative :  $x \top y = y \top x$
- elle est associative :  $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$
- elle est monotone :  $a \top b \leq c \top d$  si  $a \leq c$  et  $b \leq d$
- $\mathbf{1}$  est élément neutre :  $\mathbf{1} \top x = x$
- $\mathbf{0}$  est élément absorbant :  $\mathbf{0} \top x = \mathbf{0}$

Voici quelques exemples de t-normes (minimum, produit et Lukasievitz) :

$$a \top_{\min} b = \min\{a, b\}$$

$$a \top_{\text{prod}} b = a \cdot b$$

$$a \top_{\text{lukas}} b = \max\{0, a + b - 1\}$$

Le minimum, le produit et la t-norme de Lukasievitz sont les t-normes les plus courantes. On peut noter que la t-norme du minimum  $\top_{\min}$  est une borne supérieure de toutes les t-normes existantes.



## Annexe B

# Théories des possibilités

Dans cette partie dédiée à l'état de l'art, nous commencerons par un rappel sur la théorie des possibilités. Zadeh a tout d'abord introduit la notion d'ensemble flou en 1965 [Zadeh - 1965] afin de pouvoir représenter des classes d'objets dont les critères d'appartenance sont mal définis. En fait, on réalise que les objets mal définis : "petit", "orage violent", "couleur rouge", "calme", "chaud", ... sont très courants dans notre façon de représenter notre environnement. L'esprit humain arrive facilement à raisonner avec de telles définitions imprécises. Cependant, modéliser de tels concepts s'avère très difficile avec le formalisme de la logique classique. L'utilisation d'un degré d'appartenance partielle d'un objet à une classe permet de modéliser simplement ce genre de concepts.

La théorie des possibilités a été proposée par Zadeh en 1978 [Zadeh - 1978], celle-ci s'appuie sur les ensembles flous. Elle permet de prendre en compte l'incertitude des raisonnements sur des connaissances imprécises ou vagues. Elle propose un système de mesure permettant d'évaluer la possibilité d'un événement à partir d'informations incomplètes.

### B.1 Mesure de possibilité

Soit  $U$  un ensemble d'événements élémentaires, pour chaque événement  $A$ , on peut associer un degré qui évalue à quel point cet événement est possible. On appelle mesure de possibilité et on note  $\Pi$  une fonction définie sur l'ensemble des parties  $P(U)$  de  $U$ , à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que :

- $\Pi(\emptyset) = 0$
- $\Pi(U) = 1$
- $\forall i \in I, I \subseteq \mathbb{N}, A_i \in P(U), \Pi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$

On considère qu'un événement  $A$  dont le degré de possibilité  $\Pi(A)$  est égal à 1 est considéré comme possible. Lorsque  $\Pi(A)$  est égal à 0, l'événement est considéré comme impossible.

On remarque les propriétés suivantes :

- Si  $A_1 \subseteq A_2$  alors  $\Pi(A_1) \leq \Pi(A_2)$  : plus un événement est défini de manière imprécise, plus la possibilité qu'il se réalise est forte
- $\Pi(A \cup \bar{A}) = \max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1$  : Ceci signifie que d'un événement et de son contraire, au moins l'un des deux est possible
- $\Pi(A_1 \cap A_2) \leq \min(\Pi(A_1), \Pi(A_2))$

## B.2 Distribution de possibilité

Afin de définir totalement une mesure de possibilité sur un référentiel  $U$ , il faut définir le degré de possibilité de chaque événement élémentaire  $u$  de  $U$ . La fonction correspondante est appelée distribution de possibilité.

Une distribution de possibilité  $\pi$  est une fonction définie sur  $U$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que :  $\sup_{u \in U} \pi(u) = 1$ .

La condition de normalisation de  $\pi$  peut en fait être considérée comme une condition de cohérence des connaissances sur la variable  $X$  codées par  $\pi$ . Par exemple, on veut être sûr pour le concept "chaud" qu'au moins une température correspond totalement à ce concept.

Le passage d'une mesure de possibilité à une distribution de possibilité se fait alors par la relation :  $\forall u \in U, \pi(u) = \Pi(u)$ .

## B.3 Distribution de possibilité conjointe

Si on considère deux événements élémentaires  $u$  et  $v$  définis sur  $U$  et  $V$ , on peut déterminer à quel point ces deux événements sont possibles conjointement à l'aide d'une distribution de possibilité conjointe  $\pi_{X,Y}(u, v)$ .

Si l'on projette cette distribution sur chaque référentiel, on obtient alors des distributions de possibilités marginales :

$$\forall u \in U, \pi_X(u) = \sup_{v \in V} \pi_{X,Y}(u, v)$$

$$\forall v \in V, \pi_Y(v) = \sup_{u \in U} \pi_{X,Y}(u, v)$$

On notera donc le lien suivant entre une distribution de possibilité conjointe et les distributions de possibilités marginales :

$$\forall (u, v) \in U \times V, \pi_{X,Y}(u, v) \leq \min(\pi_X(u), \pi_Y(v))$$

## B.4 Possibilité garantie

Lorsqu'une mesure de possibilité est égale à  $1$ , cela signifie qu'il existe au moins un événement élémentaire possible. C'est-à-dire qu'il existe une possibilité que cet événement se passe, mais aussi qu'il ne se passe pas. Si on veut plus de certitude sur la possibilité, on peut utiliser la notion de mesure de possibilité garantie. Une possibilité garantie signifie qu'on est sûr que l'événement est possible (il a été observé par exemple).

Une mesure de possibilité garantie  $\Delta$  est une fonction définie sur l'ensemble des parties de  $U$ , à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que :

- $\Delta(\emptyset) = 1$
- $\Delta(A_1 \cup A_2) = \min(\Delta(A_1), \Delta(A_2))$

Il existe une relation entre le degré de possibilité garantie et la distribution de possibilité  $\pi$  :  $\forall A \subseteq U, \Delta(A) = \inf_{u \in A} \pi(u)$ .

Donc, lorsque  $\Delta(A) = \alpha$ , tous les événements élémentaires  $u$  sont possibles au moins au degré  $\alpha$ .

De la même manière que pour la mesure de possibilité, il est possible d'associer à une mesure de possibilité garantie, une distribution de possibilité garantie  $\delta$ .

## B.5 Significations des degrés de possibilité et possibilité garantie

On notera notamment les significations suivantes :

- Si  $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) = 0$  alors cela signifie que  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  est une valeur interdite pour  $\mathbf{x}$ .
- $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) = 1$  signifie que rien n'empêche  $\mathbf{x}$  d'être égal à  $\mathbf{u}$ . C'est donc possible, mais ce n'est pas garanti possible.
- $\delta_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) = 1$  signifie que  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  a été effectivement observé, il est donc garanti possible.
- $\delta_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) = 0$  signifie que  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  n'est pas garanti possible, il est seulement possible. Une valeur nulle ne signifie pas que l'événement est impossible.

## B.6 Mesure de nécessité

Il existe des ambiguïtés dues au fait qu'un événement peut être totalement possible soit parce qu'on a des connaissances nous permettant de l'affirmer, soit parce qu'on a aucune connaissance qui nous permet de l'exclure. La notion de nécessité permet de pallier ces ambiguïtés en mentionnant à quel point un événement est certain.

On appelle mesure de nécessité et on note  $N$  une fonction définie sur l'ensemble des parties  $P(U)$  de  $U$ , à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que :

- $N(\emptyset) = 0$
- $N(U) = 1$
- $\forall i \in I, I \subseteq \mathbb{N}, \mathcal{A}_i \in P(U), N(\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i) = \min_{i \in I} N(\mathcal{A}_i)$

Lorsqu'on a  $N(\mathcal{A}) = 1$ , alors l'événement  $\mathcal{A}$  est certain. En revanche, si on a  $N(\mathcal{A}) = 0$ , l'événement considéré n'est pas certain. Un degré nul ne signifie donc pas que l'événement  $\mathcal{A}$  est impossible, il signifie juste qu'il n'est pas certain. L'impossibilité s'exprime via le degré de possibilité.

Nous pouvons remarquer que les mesures de nécessité et de possibilité s'expriment de manière duale. Nous allons à présent voir quelques propriétés intéressantes des mesures de nécessité

- Si  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$  alors  $N(\mathcal{A}_1) \leq N(\mathcal{A}_2)$  : plus un événement est défini de manière imprécise, plus la certitude qu'il se réalise est forte.
- $N(\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}}) = \min(N(\mathcal{A}), N(\bar{\mathcal{A}})) = 0$  : ceci signifie que si un événement est quelque peu certain, alors son contraire ne l'est pas du tout.
- $N(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \geq \max(N(\mathcal{A}_1), N(\mathcal{A}_2))$

## B.7 Relations entre possibilité et nécessité

On peut remarquer les cas suivants :

- $\Pi(\mathcal{A}) = 0$  et  $N(\mathcal{A}) = 0$  : dans ce cas  $\mathcal{A}$  est impossible.
- $\Pi(\mathcal{A}) = 0$  et  $N(\mathcal{A}) = 1$  : ce cas est impossible, en effet, cela signifierait que  $\mathcal{A}$  est à la fois impossible et certain.
- $\Pi(\mathcal{A}) = 1$  et  $N(\mathcal{A}) = 0$  :  $\mathcal{A}$  est possible, mais n'est pas certain, on est donc dans un état d'incertitude totale.
- $\Pi(\mathcal{A}) = 1$  et  $N(\mathcal{A}) = 1$  : alors  $\mathcal{A}$  est certain.

Les mesures de possibilité et de nécessité sont liées par la formule suivante :

$$\forall \mathcal{A} \subseteq U, N(\mathcal{A}) = 1 - \Pi(\bar{\mathcal{A}}) \quad (\text{B.1})$$

C'est-à-dire que plus un événement est certain (nécessaire), alors plus le contraire de cet événement est impossible. Par exemple, si  $\mathcal{A}$  est complètement nécessaire, on a alors  $N(\mathcal{A}) = 1$ .



Par conséquent,  $\Pi(\bar{A}) = 0$ ,  $\bar{A}$  est donc impossible.

On peut aussi remarquer les propriétés suivantes :

$$\Pi(A) \geq N(A),$$

$$\max(\Pi(A), 1 - N(A)) = 1$$

Ceci signifie donc que si l'un des deux termes est inférieur à  $\mathbf{1}$ , alors le deuxième terme doit être égal à  $\mathbf{1}$ . En conséquence, si  $\Pi(A) < \mathbf{1}$  alors  $N(A) = \mathbf{0}$  et si  $N(A) > \mathbf{0}$ , alors  $\Pi(A) = \mathbf{1}$ .

La logique résiduée est un modèle principalement utilisé dans le domaine de la logique floue. Ce modèle repose sur une algèbre résiduée. À partir d'une telle algèbre, on peut ensuite définir la notion d'implication résiduée. La notion de norme triangulaire est aussi très importante dans ce contexte. Certaines des règles implicatives que nous utiliserons par la suite reposent sur des implications résiduées, comme nous le verrons en section 2.3.4.1.

## B.8 Résiduation

### B.8.1 Algèbre résiduée

Une algèbre résiduée peut se définir à partir du quadruplet  $(L, \leq, \top, J)$  où :

- $(L, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné possédant un sommet égal à  $\mathbf{1}$
- $\top$  est la norme triangulaire [Klement et al. - 2000] (ou t-norme) associée à  $(L, \leq)$ . Pour rappel, une t-norme  $\top$  est une fonction de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $[0, 1]$  définie ainsi :
  - elle est commutative :  $x \top y = y \top x$
  - elle est associative :  $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$
  - elle est monotone :  $a \top b \leq c \top b$  si  $a \leq c$  et  $b \leq d$
  - $\mathbf{1}$  est élément neutre :  $\mathbf{1} \top x = x$
  - $\mathbf{0}$  est élément absorbant :  $\mathbf{0} \top x = \mathbf{0}$
- $J$  est une implication résiduée. Nous définirons en détail les propriétés de l'implication résiduée par la suite.

Nous allons tout d'abord voir quelques exemples de t-normes :

$$a \top_{\min} b = \min\{a, b\}$$

$$a \top_{\text{prod}} b = a \cdot b$$

$$a \top_{\text{Lukas}} b = \max\{0, a + b - 1\}$$

Le minimum, le produit et la t-norme de Lukasiewicz sont les t-normes les plus courantes. On peut noter que la t-norme du minimum  $\top_{\min}$  est une borne supérieure de toutes les t-normes existantes.

### B.8.2 Implication résiduée

Une implication résiduée de  $\top$  est une opération binaire  $J$  sur  $[0, 1]$  définie par :

$$J(\alpha, \gamma) = \sup\{\delta \in [0, 1] \mid \alpha \top \delta \leq \gamma\} \quad (\text{B.2})$$

Ce qui peut aussi s'écrire :  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$

$$\alpha \top \beta \text{ ssi } \beta \leq J(\alpha, \gamma)$$

Voici quelques propriétés de l'implication résiduelle mises en évidence par Morsi :  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$

$$\alpha \top J(\alpha, \gamma) \leq \gamma \tag{B.3}$$

$$J(\alpha, \gamma) \geq \gamma \tag{B.4}$$

$$\text{si } \beta < \gamma \text{ alors } J(\alpha, \beta) \leq J(\alpha, \gamma) \tag{B.5}$$

$$J(\alpha, \alpha \top \gamma) \geq \gamma \tag{B.6}$$

$$\text{si } \alpha < \beta \text{ alors } J(\alpha, \gamma) \geq J(\beta, \gamma) \tag{B.7}$$

$$J(\alpha, \gamma) = 1 \text{ ssi } \alpha \leq \gamma \tag{B.8}$$

$$J(J(\alpha, \beta), \gamma) \geq \alpha \top J(\beta, \gamma) \tag{B.9}$$

$$J(\alpha, J(\beta, \gamma)) = J(\alpha \top \beta, \gamma) \tag{B.10}$$

$$J(\alpha, \beta) \top J(\beta, \gamma) \leq J(\alpha, \gamma) \tag{B.11}$$

$$J(1, \gamma) = \gamma \tag{B.12}$$



---

## Annexe C

# Glossaire du fromage

### C.1 Le vocabulaire

**AOC (Appellation d'origine contrôlée)** : L'AOC est un signe français identifiant l'origine de produits alimentaires traditionnels français. L'appellation AOC garantit un cahier des charges sur les procédés d'élevage, de fabrication du fromage et de son affinage.

**Affinage** : Au cours de cette maturation en cave, le Comté fait l'objet de soins attentifs favorisant le développement organoleptique qui s'opère naturellement au fil de mois. Certaines de ces opérations sont faites par des robots. La maturation en cave d'affinage est au minimum de 4 mois, mais elle est souvent de 8 à 10 mois, voire plus (18-24 mois). Les Comté dits d'exception peuvent atteindre 36 mois. Les caves d'affinage sont des lieux distincts des lieux de fabrication et sont moins nombreuses que les fromageries.

**Brassage** : un brassage plus ou moins long produit un grain de caillé plus ou moins fin. L'échauffement de la masse durant le brassage favorise la séparation du petit lait.

**Cuisson** : le chauffage du caillé s'effectue en cuve de cuivre. La caillé doit être maintenu à une température minimum de **53°C** pendant au moins 30 minutes.

**CTFC** : Le CTFC a été créé en 1975 sous le nom de CTC (Comité Technique du Comté), c'est une association régie par la loi de 1901. Le CTFC assure au sein de la filière Comté un rôle de conseil et d'assistance technique. Il a pour mission d'améliorer la maîtrise de la qualité du Comté depuis la production du lait jusqu'au produit fini, tout en respectant le règlement de l'Appellation d'Origine.

**Décaillage** : le décaillage est la phase de découpage du caillé. Il sert à éliminer une partie du petit lait emprisonné dans la masse coagulée en multipliant les surfaces de sortie du sérum : c'est le début de l'égouttage. Le décaillage est une phase délicate qui conditionne la qualité finale du produit et son rendement. Il nécessite de la délicatesse pour ne pas casser le grain.

**Egouttage** : Il permet au caillé de se raffermir en expulsant une partie du petit lait.

**Emprésurage** : l'emprésurage d'un fromage est l'opération d'ajout d'un coagulant, la présure, pour le faire cailler. En France, la présure animale est imposée par la réglementation en vigueur pour les fromages AOC. Pour le Comté, il s'agit de présure de veau.

**Fabrication du fromage 20 heures** : La fabrication du fromage est une étape très importante. De plus, de nombreuses informations sont disponibles sur cette étape car beaucoup d'analyses

---

physico-chimiques sont faites à 20 heures. Cette phase est primordiale car il y a beaucoup de variables de contrôle. Selon les experts 70% de la qualité du produit final se joue à cette phase.

**Fruitière** : Petites fromageries de village, coopératives, ou entreprises qui collectent chaque jour le lait des fermes alentour afin de fabriquer les meules.

**Gradeur** : Un gradeur est un technicien chargé d'évaluer la qualité du Comté après affinage.

**Maturation** : La maturation consiste à laisser séjourner le lait à une température et un temps donnés, avec ou sans ensemencement du lait par des levains lactiques ou du lactosérum. Elle a 2 objectifs :

- rétablir les équilibres physico-chimiques du lait donnant une meilleure aptitude à la coagulation,
- permettre le développement d'une flore dominante de bactéries lactiques au détriment des germes nuisibles.

**Moulage** : Le fromage est soutiré dans de grands moules qui donneront une forme circulaire à la meule

**Pressage** : Une fois dans le moule, on presse le fromage pendant 7 heures

**Préaffinage** : Le préaffinage est effectué par la fromagerie avant l'affinage du fromage en cave, une série de tests est effectuée à 15 jours.

**Salage** : Une fois le fromage fait, il est salé en surface et frotté.

## C.2 Les données

Le tableau C.1 récapitule les données disponibles (état initial, 20 heures et 15 jours). Le tableau C.2 récapitule les résultats du jury de techniciens.

- **les variables résumant l'état initial** : ce sont toutes les variables ne concernant pas directement la fabrication du fromage : la saison (qui est déterminée en fonction du mois de l'année), la qualité du lait et l'atelier de fromagerie fabriquant le fromage et l'année de fabrication.
- **les données du fromage à 20h** : elles proviennent des analyses physico-chimiques faites sur le fromage jeune. Voici les différentes variables mesurées. La plupart des mesures sont effectuées en milieu de rayon et en talon. Nous ne les présenterons qu'une fois puisqu'il s'agit des mêmes mesures à deux endroits différents du fromage.
  - **PH** : C'est une mesure potentiométrique des ions hydrogènes à l'aide d'une électrode placée dans un échantillon de fromage broyé à sec. Il s'exprime en pH et a une précision  $\pm 0.03$ .
  - **Ecart de PH (ECPH)** : C'est la différence entre le PH en milieu de rayon et le pH en talon du fromage à 20h. Il s'exprime en pH et a une précision  $\pm 0.06$ .
  - **sucres résiduels en milieu de rayon (LAC)** : C'est une note donnée selon l'intensité de coloration du résidu sec obtenu lors de la mesure de l'extrait sec. Cette mesure est donc sans unité et évolue de 0 à 5. Son imprécision est inconnue.
  - **Extrait sec (ES)** : il s'agit de la mesure de la masse d'échantillon restant après dessiccation complète du fromage, déterminée par évaporation de l'eau après étuvage à  $102^{\circ}\text{C}$  pendant 15 heures. Elle s'exprime en g/100g avec une précision de  $\pm 0.1$ .
  - **Gras sur sec (GS)** : il provient du calcul du rapport du taux de matière grasse sur l'extrait sec du fromage en talon. Cette mesure s'exprime en pourcentage avec une précision de  $\pm 0.6$ .

- 
- HFD : Humidité du fromage dégraissé. Il est le résultat d'un calcul mettant en jeu l'extrait sec (ES) et la matière grasse (MG) selon la formule suivante :

$$HFD = \frac{100 - ES}{100 - MG} * 100$$

Il s'exprime en pourcent et a une précision  $\pm 0.6$ .

- Ecart d'HFD (ECHFD) : Il caractérise la différence entre les HFD évaluées en milieu de rayon et en talon de la meule.
  - Calcium dans l'extrait sec dégraissé (CAESD) : il s'agit du ratio entre le taux de Calcium et l'extrait sec dégraissé. Le calcium est évalué par complexométrie en présence d'un indicateur coloré sous lampe UV. Il s'exprime en g/100g avec une précision de  $\pm 0.03$ .
  - Activité de la leucine aminopeptidase (LAP) : la leucine aminopeptidase est une enzyme protéolytique dont l'activité est mesurée par un dosage spectrophotométrique. Le broyat de fromage est mis en contact avec un substrat spécifique. L'intensité de la coloration obtenue après incubation est proportionnelle à la quantité d'enzyme présente. Elle s'exprime en  $\mu\text{mol/g/24h}$  avec une précision de  $\pm 2$ .
-

Etape	Variable	Définition	Unité	Imprécision
Etat initial	saison / mois	hiver ou été	-	aucune
	Atelier	atelier de fabrication du fromage	-	aucune
	Année	année de fabrication du fromage	en mois	aucune
Fromage 20h (F20H)	PH	-	pH	$\pm 0.03$
	ECPH	écart de PH entre le milieu de rayon et le talon	pH	$\pm 0.06$
	LAC	sucre résiduel en milieu de rayon	-	inconnue
	ES	Extrait sec	g/100g	$\pm 0.1$
	GS	Gras sur sec	%	$\pm 0.6$
	HFD	Humidité du fromage dégraissé	%	$\pm 0.6$
	ECHFD	Ecart d'HFD entre le milieu de rayon et le talon	-	$\pm 1.2$
	CAESD	Calcium dans l'extrait sec dégraissé	g/100g	$\pm 0.03$
	LAP	Activité de la leucine aminopeptidase	$\mu\text{mol/g/24h}$	$\pm 2$
Fromage 15j (FPR)	PH	-	pH	$\pm 0.03$
	EvPH	Evolution du pH entre 20h et 15 jours	pH	$\pm 0.06$
	ES	Extrait sec	g/100g	$\pm 0.1$
	EVeIES	Evolution de l'extrait sec entre 20h et 15 jours	g/100g	$\pm 0.2$
	NaCl	Teneur en Chlorure de Sodium	g/100g	$\pm 0.07$
	NACL-H2O	rapport de la teneur en sel sur l'eau	g/100g d'eau	$\pm 0.1$

TAB. C.1: Données : définition des variables explicatives

- **les données de préaffinage à 15 jours** : elles proviennent des analyses physico-chimiques effectuées sur le fromage après 15 jours de préaffinage. Cette fois le prélèvement s'effectue entre le milieu de rayon et le talon des fromages prélevés à 20 heures.
  - PH (FPR-PH)
  - Evolution du pH entre 20h et 15 jours (EvPH) : c'est le calcul de la différence entre le pH du fromage à 15 jours et la moyenne des pH milieu rayon et talon obtenue à 20 heures. Elle s'exprime en pH et a une précision  $\pm 0.06$ .
  - Extrait sec (FPR-ES)
  - Evolution de l'extrait sec entre 20h et 15 jours (EVES) : c'est le calcul de la différence entre l'extrait sec du fromage à 15 jours et la moyenne des extraits secs talon et milieu de rayon obtenus à 20 heures. Il s'exprime en g/100g avec une précision de  $\pm 0.2$ .
  - Teneur en NaCl (FPR-NaCl) : il s'effectue par un dosage des ions chlorures par une méthode coulométrique à l'aide d'un chloruremètre à électrode d'argent. Le résultat en chlorure est converti en chlorure de sodium (sel). L'analyse est effectuée sur une partie de l'échantillon

comprise entre 1.5 et 3 cm sous la croûte. Il s'exprime en g/100g avec une précision de  $\pm 0.07$ .

- NaCl dans l'eau des fromages (FPR-NACL-H2O) : c'est le rapport de la teneur en sel sur l'eau contenue dans le fromage :

$$FPR - NACL - H2O = \frac{FPR - NaCl}{100 - ES} * 100$$

Il s'exprime en g/100g d'eau avec une précision de  $\pm 0.1$ .

- **les résultats du jury de techniciens** après l'affinage du fromage : la plupart des caractéristiques évaluées par le jury de techniciens se fait sur une échelle continue de 0 à 10. Cette note est une estimation sensorielle des différentes caractéristiques.

- **Echelle continue (note sur 10) :**

- NotePate : Evaluation globale de la qualité de la pâte
- NoteGout : Evaluation globale de la qualité du goût de la pâte
- Elasticité de la pâte
- Fermeté de la pâte. C'est sur ce descriptif que nous avons travaillé de manière prioritaire. On remarque qu'un fromage dont la note est inférieure à 4.5 a une pâte molle. Si la note est supérieure à 5.5, la pâte est ferme. Entre les deux, la pâte est normale.
- Adhésivité de la pâte
- Onctuosité de la pâte
- Solubilité de la pâte
- Aspect farineux de la pâte
- Aspect granuleux de la pâte
- Intensité du goût du fromage
- Fruité du fromage
- Aspect salé du fromage
- Aspect sucré du fromage
- Aspect amer du fromage
- Acidité du fromage
- Aspect piquant du fromage
- Oxydation du fromage
- Importance du goût de croûte du fromage
- Importance du goût rance du fromage
- Importance du mauvais goût

- **Echelles différentes :**

- Age du fromage au moment de la dégustation. Il s'exprime en mois.
- Nombre d'yeux (les yeux sont des trous dans la masse du fromage. Les yeux se forment naturellement pendant l'affinage, sous l'effet de gaz libérés par la fermentation. Il y a quatre notes différentes : absence d'yeux, 1 à 2 yeux, 3 à 5 ou >6.
- Taille des yeux : elle est définie par quatre tailles données dans l'ordre croissant : petit pois, pois, petite cerise, grosse cerise.
- Petits trous (les petits trous proviennent souvent de l'espace existant entre les grains au moment du pressage) : définie par 5 notes : absence, 4 à 5, au moins 6, petite place (petite zone contenant des petits trous) zone mille trous (zone contenant un grand nombre de petits trous).
- Forme des yeux anormaux : absence, malformés, jumelés, cuiteux ou autre.
- Bec (fente courte aux bords peu écartés, visible dans la pâte) : absence, 1 à 2, 3 à 5, nombreux, poche de becs.



- Laimure (longue fente aux bords peu écartés, visible dans la pâte) : absence, 1 à 2, 3 à 5 ou une grande,  $\geq 6$  ou deux grandes, grands fils ou trois grandes.
- Erailure (écorchure en surface) : absence, 1, 2 à 4,  $\geq 5$ , nombreuses

Echelle	Caractéristique évaluée
Echelle continue de 0 à 10	Note globale de la qualité de la pâte
	Note globale du goût de la pâte
	Note globale du goût de la pâte
	Elasticité de la pâte
	<b>Fermeté de la pâte</b>
	Adhésivité de la pâte
	Onctuosité de la pâte
	Solubilité de la pâte
	Aspect farineux de la pâte
	Aspect granuleux de la pâte
	Intensité du goût du fromage
	Fruité du fromage
	Aspect salé du fromage
	Aspect amer du fromage
	Acidité du fromage
	Aspect piquant du fromage
	Oxydation du fromage
	Importance du goût de croûte du fromage
Importance du goût rance du fromage	
Importance du mauvais goût	
Echelle continue en mois	Age du fromage au moment de la dégustation
4 notes : absence d'yeux - 1 à 2 yeux - 3 à 5 - $\geq 6$	Nombre d'yeux
4 notes : petit pois - pois - petite cerise - grosse cerise	Taille des yeux
5 notes : absence - 4 à 5 - $\geq 6$ - petite place - zone mille trous	Petits trous
5 notes : absence - malformés - jumelés - cuiteux - autre	Forme des yeux anormaux
5 notes : absence - 1 à 2 - 3 à 5 - nombreux - poche de becs	Bec
5 notes : absence - 1 à 2 - 3 à 5 - $\geq 6$ - nombreuses	Laimure
5 notes : absence - 1 - 2 à 4 - $\geq 5$ - nombreuses	Eraillure

TAB. C.2: Qualité du Comté : évaluations du jury de techniciens

## Table des figures

2.1	Règles modélisant le comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore . . .	20
2.2	Modélisation des différents ensembles flous correspondants au comportement d'un automobiliste face à un feu tricolore . . . . .	21
2.3	Représentation des valeurs d'une règle conjonctive $A \wedge O$ . . . . .	23
2.4	Représentation des valeurs d'une règle implicative $A \rightarrow O$ . . . . .	24
2.5	Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Gödel) et une entrée stricte . . . . .	27
2.6	Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Goguen) et une entrée stricte . . . . .	27
2.7	Inférence avec une règle implicative graduelle (implication de Rescher-Gaines) et une entrée stricte . . . . .	27
2.8	Inférence avec une règle implicative à certitude (implication de Kleene-Dienes . . .	28
2.9	Inférence avec une règle conjonctive à possibilité et une entrée stricte . . . . .	30
2.10	Inférence avec une règle conjonctive antigraduelle et une entrée stricte . . . . .	30
2.11	Agrégation des sorties pour une entrée précise $u$ . . . . .	32
2.12	Interpolation avec des règles conjonctives à possibilité . . . . .	33
2.13	Interpolation avec des règles implicatives graduelles . . . . .	34
2.14	Ensembles flous de sortie de même largeur . . . . .	35
2.15	Ensembles flous de sortie de largeurs différentes . . . . .	35
3.1	Une partition floue permettant l'indépendance inférentielle . . . . .	47
3.2	Noyau 2D de $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$ . . . . .	48
3.3	Décomposition par $\alpha$ -coupes . . . . .	49
3.4	Décomposition par partitionnement . . . . .	50
3.5	Inférence à partir d'une entrée de niveau 1 pour la zone correspondant au noyau . .	51
3.6	Inférence à partir d'une entrée de niveau $\alpha$ pour la zone correspondant au noyau . .	52
3.7	Notation (Rescher-Gaines) . . . . .	53
3.8	Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée précise . . . . .	56
3.9	Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée rectangulaire de niveau 1 . . . . .	56
3.10	Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée floue décomposée sur 3 niveaux $\alpha_j < \alpha_i < 1$ . . . . .	57
3.11	Zones définies par les partitions d'entrées . . . . .	59
3.12	Partitions d'entrées du système . . . . .	60
3.13	Partition de sortie du système en utilisant la fonction linéaire $a + bx + cy$ . . . .	61
3.14	Partition de sortie respectant la cohérence et l'interprétabilité du système . . . .	62
3.15	Zones définies par les partitions d'entrées . . . . .	62
3.16	Différentes sous-zones en entrée . . . . .	65

3.17	Sortie en fonction de $\alpha_1$ . . . . .	67
4.1	Inférence d'une entrée imprécise implicative/conjonctive . . . . .	77
4.2	Résultat de l'inférence pour une entrée de <b>52.5</b> (Godël ou Goguen) . . . . .	78
4.3	Règles conjonctives et défuzzification . . . . .	79
4.4	Règles implicatives sans intersection commune en sortie : sortie impossible . . . . .	79
4.5	Règles implicatives avec intersection commune en sortie . . . . .	80
4.6	Etiquette 30 sur 5 sefs en sortie . . . . .	81
4.7	Etiquette 10 sur 5 sefs en sortie . . . . .	81
4.8	Etiquette 14 sur 5 sefs en sortie . . . . .	81
4.9	Etiquette 22 sur 5 sefs en sortie . . . . .	82
4.10	Partitions d'entrée du système . . . . .	85
4.11	Partition de sortie respectant la cohérence de la base de règles . . . . .	85
4.12	Partitions modélisant le système vent, nébulosité et qualité du temps . . . . .	86
4.13	Partitions modélisant le système vent, nébulosité et qualité du temps (pour faire du cerf-volant) . . . . .	86
4.14	Partitions d'entrée et sortie correspondante . . . . .	87
4.15	Partitions de sortie (entre 2 et 4 termes) . . . . .	88
4.16	Partition de sortie (5 termes) . . . . .	89
4.17	Partition de sortie (7 termes) . . . . .	89
4.18	Partitions de sortie lorsqu'on a un nombre différents de concepts par dimension . . . . .	90
4.19	Inférence à partir d'un système de règles conjonctives . . . . .	91
4.20	Inférence à partir d'un système de règles conjonctives avec une variable supplémentaire . . . . .	92
4.21	Principe du raffinement en parallèle . . . . .	93
4.22	Reconstruction de la partition d'entrée à partir de la partition de sortie . . . . .	94
4.23	Principe du raffinement en cascade . . . . .	95
4.24	Couplage de raffinement en cascade et en parallèle . . . . .	96
5.1	Départements de fabrication du Comté . . . . .	101
5.2	Collecte du lait . . . . .	102
5.3	Acheminement du lait par camion citerne . . . . .	102
5.4	Emprésurage d'un fromage . . . . .	103
5.5	Décaillage d'un fromage . . . . .	103
5.6	Cuisson d'un fromage . . . . .	104
5.7	Brassage du caillé . . . . .	104
5.8	Egouttage du caillé . . . . .	105
5.9	Moulage du fromage . . . . .	105
5.10	Pressage du fromage . . . . .	106
5.11	Salage du fromage . . . . .	106
5.12	Cave d'affinage . . . . .	107
5.13	Retournement d'une meule de Comté . . . . .	107
5.14	Soins en cave . . . . .	108
5.15	Retournement d'une meule par un robot . . . . .	108
5.16	Bandes vertes (à gauche) et brunes (à droite) . . . . .	109
5.17	Schéma de fabrication du Comté . . . . .	111
5.18	Déroulement des analyses sur meule sur un mois . . . . .	112
5.19	Influence de l'HFD sur la fermeté de la pâte . . . . .	117

---

5.20	Influence de la saison sur la fermeté de la pâte . . . . .	118
5.21	Etiquette 10 . . . . .	120
5.22	Etiquette 11 . . . . .	120
5.23	Etiquette 12 . . . . .	121
5.24	Etiquette 30 . . . . .	121
5.25	Etiquette 20 . . . . .	122
5.26	Etiquette 21 . . . . .	122
5.27	<b>BR1</b> - Partition représentant l'Humidité de Fromage Dégraissé . . . . .	123
5.28	<b>BR1</b> - Partition représentant l'Evolution de l'Extrait Sec . . . . .	124
5.29	<b>BR1</b> - Partition représentant la fermeté de la pâte pour le système de règles implicatives . . . . .	125
5.30	<b>BR1</b> - Partition de sortie représentant la fermeté de la pâte pour le système de règles conjonctives . . . . .	126
5.31	Arbre obtenu en considérant les variables HFD, EvolES, GS, saison, NaCL et LAP	130
5.32	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant EvolES . . . . .	132
5.33	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant GS . . . . .	133
5.34	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant le potentiel protéolytique LAP . . . . .	133
5.35	<b>BR2</b> - Sous-ensembles représentant la saison . . . . .	134
5.36	<b>BR3</b> - Partition représentant l'évolution de l'extrait sec . . . . .	137
5.37	<b>BR3</b> - Partition représentant l'Humidité de Fromage Dégraissé en talon . . . . .	138
5.38	<b>BR3</b> - Partition représentant le rapport Gras sur Sec . . . . .	139
5.39	<b>BR3</b> - Partition représentant la saison . . . . .	140
5.40	<b>BR3</b> - Partition représentant la fermeté de la pâte (sortie de notre système) . . . . .	141
5.41	Arbre obtenu à partir de toutes les variables à 15 jours et à 20h sur les données dont la sortie calculée est imprécise . . . . .	142
5.42	<b>BR4</b> - Partition représentant l'évolution de l'extrait sec . . . . .	143
5.43	<b>BR4</b> - Partition représentant le rapport gras sur sec . . . . .	144
5.44	<b>BR4</b> - Partition représentant le PH . . . . .	145
5.45	<b>BR4</b> - Partition représentant la fermeté . . . . .	146
5.46	Raffinement du système principal par le second système . . . . .	147
A.1	Un exemple de défuzzification . . . . .	158
A.2	Un ensemble flou de forme triangulaire . . . . .	159
A.3	Noyau 2D de $A_i \wedge B_j \rightarrow O_{i,j}$ . . . . .	161
A.4	Exemple de partition floue forte . . . . .	161
A.5	Un système d'inférence floue . . . . .	162

---



## Liste des tableaux

2.1	Table de vérité de $A \rightarrow O$ . . . . .	26
3.1	Propriétés de chaque zone . . . . .	63
3.2	Intervalles de sortie de la zone 3 . . . . .	64
3.3	Intervalles de sortie de la zone 2 . . . . .	64
3.4	Conditions conduisant à des points anguleux selon la zone . . . . .	67
5.1	Données : définition des variables explicatives . . . . .	114
5.2	Qualité du Comté : évaluations du jury de techniciens . . . . .	115
5.3	Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives . . . . .	127
5.4	Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles conjonctives . . . . .	127
5.5	Résultats de l'inférence à partir d'un système de règles implicatives . . . . .	135
5.6	Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFDTal, GS et Saison . . . . .	141
5.7	Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFDTal, GS et Saison . . . . .	147
C.1	Données : définition des variables explicatives . . . . .	174
C.2	Qualité du Comté : évaluations du jury de techniciens . . . . .	176



---

## Bibliographie

- Agroscope (2004) – *Les défauts actuels du gruyère* – Rapport technique, ALP forum.
- Ayel, M. & Rousset, M.-C. (1990) – *La cohérence dans les bases de connaissances* – Cépaduès-Editions, Toulouse, France.
- Baldwin, J. F. & Guild, N. C. F. (1980) – Modelling controllers using fuzzy relations – *Kybernetes*, 9, 223–229.
- Benferhat, S., Dubois, D., Garcia, L., & Prade, H. (2002) – On the transformation between possibilistic logic bases and possibilistic causal networks – *International Journal of Approximate Reasoning*, 29, 135–173.
- Benferhat, S., Dubois, D., Prade, H., & Sabbadin, R. (2001) – Exception-tolerant reasoning and decision under uncertainty using qualitative possibility theory. *Künstliche Intelligenz (KI)*, tome 3 (pp. 9–15). Arendtap Desktop Publishing. BB.
- Berodier, F., Stevenot, C., & Schlich, P. (1997) – Descripteurs de l'arome du fromage comte – *Lebensm Wiss Technol*, 298–304.
- Borgelt, C. & Gebhardt, J. (1997) – Learning possibilistic networks with a global evaluation method.
- Borgelt, C. & Kruse, R. (2002) – *Graphical Models : Methods for Data Analysis and Mining* – John Wiley and Sons, LTD.
- Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A., & Stone, C. J. (1984) – *Classification and Regression Trees* – Wadsworth.
- Buckley, J. J. & Hayashi, Y. (1994) – Can approximate reasoning be consistent? – *Fuzzy Sets and Systems*, 65, 13–18.
- Casillas, J., Cordon, O., Herrera, F., & Magdalena, L. (2002) – *Trade-off between Accuracy and Interpretability in Fuzzy Rule Based Modeling* – Physica Verlag, Springer Verlag.
- Casillas, J., Cordon, O., Herrera, F., & Magdalena, L. (2003a) – *Accuracy Improvements in Linguistic Fuzzy Modeling* – tome 129 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer.
- Casillas, J., Cordon, O., Herrera, F., & Magdalena, L. (2003b) – *Interpretability Issues in Fuzzy Modeling* – tome 128 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer.
- Centre Technique des Fromages Comtois (2004) – *Manuel d'interprétation des Analyses* – Poligny.
-



- Charnomordic, B., Glaudel, M., Renard, Y., Noel, Y., & Vila, J.-P. (1998) – Knowledge-based fuzzy control in food industry : A decision support tool for cheesemaking. *Bio-Decision*, Montpellier, France.
- De Oliveira, J. V. (1999) – Semantic constraints for membership function optimization. – *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 29(1), 128–138.
- Dubois, D., Martin-Clouaire, R., & Prade, H. (1988) – *Practical computing in fuzzy logic* – (pp. 11–34)., Fuzzy Computing.
- Dubois, D. & Prade, H. (1984) – Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited – *International Journal of Cybernetics and Systems*, 15, 293–331.
- Dubois, D. & Prade, H. (1988) – *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty* – Plenum Press.
- Dubois, D. & Prade, H. (1990) – Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets – *International Journal of General Systems*, 17, 191–209.
- Dubois, D. & Prade, H. (1992a) – Fuzzy rules in knowledge-based systems - Modelling gradedness, uncertainty and preference. R. Yager & L. Zadeh (réd.), *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems* (pp. 45–68). Kluwer Acad. Publ. DP179.
- Dubois, D. & Prade, H. (1992b) – Gradual inference rules in approximate reasoning – *Information Sciences*, 61, 103–122.
- Dubois, D. & Prade, H. (1992c) – Putting rough sets and fuzzy sets together – *Intelligent Decision Support, Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory*, 203–232.
- Dubois, D. & Prade, H. (1992d) – Upper and lower images of a fuzzy set induced by a fuzzy relation : applications to fuzzy inference and diagnosis – *Inf. Sci.*, 64(3), 203–232.
- Dubois, D. & Prade, H. (1996) – What are fuzzy rules and how to use them – *Fuzzy Sets and Systems*, 84(2), 169–185.
- Dubois, D., Prade, H., & Grabisch, M. (1995) – Gradual rules and the approximation of control laws – *Theoretical aspects of fuzzy control*, 147–181.
- Dubois, D., Prade, H., & Ughetto, L. (1997) – Checking the coherence and redundancy of fuzzy knowledge bases – *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5, 398–417.
- Dubois, D., Prade, H., & Ughetto, L. (1999) – Fuzzy logic, control engineering and artificial intelligence. H. Verbruggen, H.-J. Zimmermann, & R. Babuska (réd.), *Fuzzy Algorithms for control* (pp. 17–57). Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas.
- Dubois, D., Prade, H., & Ughetto, L. (2003) – A new perspective on reasoning with fuzzy rules – *International Journal of Intelligent Systems*, 18(5), 541–567.
- Espinosa, J. & Vandewalle, J. (2000) – Constructing fuzzy models with linguistic integrity from numerical data-AFRELI algorithm – *IEEE-FS*, 8(5), 591.
- Glaudel, M. (1999) – *Contribution à la modélisation d'un processus de fabrication fromagère* – Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon.

- 
- Glorennec, P.-Y. (1999) – *Algorithmes d'apprentissage pour systèmes d'inférence floue* – Editions Hermès, Paris.
- Guillaume, S. (2001a) – Designing fuzzy inference systems from data : an interpretability-oriented review – *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9, 426–443.
- Guillaume, S. (2001b) – *Induction de règles floues interprétables* – Thèse de Doctorat, Insa, Toulouse.
- Guillaume, S. & Charnomordic, B. (2001) – Knowledge discovery for control purposes in food industry databases – *Fuzzy sets and Systems*, 122 (3), 487–497.
- Guillaume, S. & Charnomordic, B. (2004a) – *FisPro : Un logiciel dédié aux systèmes d'inférence floue* – INRA - Cemagref.
- Guillaume, S. & Charnomordic, B. (2004b) – Generating an interpretable family of fuzzy partitions – *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12 (3), 324–335.
- Jenei, S., Klement, E.-P., & Konzel, R. (2001) – Interpolation and extrapolation of fuzzy quantities revisited - an axiomatic approach – *Soft Computing*, 5(3), 179–193.
- Jenei, S., Klement, E.-P., & Konzel, R. (2002) – Interpolation and extrapolation of fuzzy quantities - the multiple-dimensional case – *Soft Comput.*, 6(3-4), 258–270.
- Klement, E. P., Mesiar, R., & Pap, E. (2000) – *Triangular norms* – Kluwer academic publishers.
- Mamdani, E. (1974) – *Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant* – Academic Press, New York.
- Mamdani, E. H. & Assilian, S. (1975) – An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller – *International journal on man-machine studies*, 7, 1–13.
- Martin-Clouaire, R. (1987) – Semantics and computation of the generalized modus ponens : The long paper – *International journal of Approximate Reasoning*, 3, 195–217.
- Miller, G. (1956) – The magical number seven, plus or minus two : Some limits on our capacity for processing information – *Psychological Review*, 63, 81–97.
- Morsi, N. N. (2005) – A small set of axioms for residuated logic – *Inf. Sci.*, 175(1-2), 85–96.
- Morsi, N. N. & Fahmy, A. A. (2002) – On generalized modus ponens with multiple rules and a residuated implication – *Fuzzy Sets Syst.*, 129(2), 267–274.
- Nola, A. D., Pedrycz, W., & Sessa, S. (1989) – An aspect of discrepancy in the implementation of modus ponens in the presence of fuzzy quantities – *Int. J. Approx. Reasoning*, 3(3), 259–265.
- Palm, R. & Driankov, D. (1995) – Fuzzy inputs – *Fuzzy Sets and Systems*, 70, 315–335.
- Pedrycz, W. (1994) – Why triangular membership functions ? – *Fuzzy Sets Syst.*, 64 (1), 21–30.
- Pedrycz, W. & Oliveira, J. V. D. (1996) – Optimization of fuzzy models – *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 26, 627–636.
- Prade, H. (1988) – Raisonner avec des règles d'inférence graduelles – *Revue d'Intelligence Artificielle*, 29–44.
-

- Radzikowska, A. M. & Kerre, E. E. (2002) – A comparative study of fuzzy rough sets – *Fuzzy Sets Syst.*, 126(2), 137–155.
- Ruspini, E. H. (1969) – A new approach to clustering – *Information and Control*, 15, 22–32.
- Saint-Joan, D. & Desachy, J. (1995) – A Fuzzy Expert System for Geographical Problems : an Agricultural Application. *4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems - FUZZ-IEEE/IFES'95, Yokohama, Japon, 20/03/95-24/03/95*, tome 2, (pp. 469–476)., <http://www.ieee.org/>. IEEE.
- Schott, B. & Whalen, T. (1996) – Nonmonotonicity and discretization error in fuzzy rule-based control using oca and mom defuzzification. *Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, (pp. 450–456).
- Sugeno, M. (1985) – An introductory survey of fuzzy control – *Information Sciences*, 36, 59–83.
- Trillas, E. & Valverde, L. (1981) – On some functionally expressible implications for fuzzy set theory. Klement, E. (édité par), *Proc. Third Internat. Seminar on Fuzzy Set Theory*, (pp. 173–190)., Linz, Austria.
- Turksen, I. B. & Tian, Y. (1993) – Combination of rules or their consequences in fuzzy expert systems – *Fuzzy Sets Syst.*, 58(1), 3–40.
- Ughetto, L. (1998a) – Inferential independence of fuzzy rules. *ECAI*, (pp. 605–609).
- Ughetto, L. (1998b) – *Les systèmes à base de règles floues. Vérification de la cohérence et méthodes d'inférence* – Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier.
- Ughetto, L., Dubois, D., & Prade, H. (1997) – Efficient inference procedures with fuzzy inputs. *FUZZY-IEEE'97*, (pp. 567–572)., Barcelona.
- Ughetto, L., Dubois, D., & Prade, H. (1999) – Implicative and conjunctive fuzzy rules - A tool for reasoning from knowledge and examples. *AAAI-99, Orlando, Floride (USA)*, (pp. 214–219)., California. AAAI Press/The MIT Press.
- Ughetto, L., Dubois, D., & Prade, H. (2000) – Fuzzy interpolation by convex completion of sparse rule bases . *Proc.9th IEEE Int. Conf.on Fuzzy Systems(FUZZ-IEEE'00)* , San Antonio (Texas), 07/05/00-10/05/00, (pp. 465–470). IEEE.
- Ughetto, L., Dubois, D., & Prade, H. (2001) – Raisonner avec deux types de règles floues en utilisant exemples et contre-exemples. *Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2001)* , Mons-Belgique, (pp. 121–128)., Toulouse. Cepadues-Éditions. BB.
- Van Broekhoven, E. (March 30,2007) – *Monotonicity aspects of linguistic fuzzy models* – Thèse de Doctorat, University of Gent, Belgium.
- Weisbrod, J. (1996) – A combined approach to fuzzy reasoning – *Proc. of the 4th Europ. Conf. on Intel. Tech. and Soft Comp. (EUFIT'96)*, 544–557.
- Yager, R. R. (1996) – On the interpretation of fuzzy if then rules – *Appl. Intell.*, 6(2), 141–151.
- Zadeh, L. A. (1965) – Fuzzy sets – *Information and Control*, 8, 338–353.

Zadeh, L. A. (1973) – Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes – *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-3, 28–44.

Zadeh, L. A. (1978) – Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility – *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 3–28.

Zadeh, L. A. (1979) – A theory of approximate reasoning – *Machine Intelligence*, 9, 149–194.