



HAL
open science

Écoulement granulaire à haute vitesse sous l'action de la force centrifuge : application en environnement à la problématique de l'épandage granulaire

A. Le Quiniou

► **To cite this version:**

A. Le Quiniou. Écoulement granulaire à haute vitesse sous l'action de la force centrifuge : application en environnement à la problématique de l'épandage granulaire. Sciences de l'environnement. Doctorat d'université spécialité génie mécanique, Université Blaise Pascal Clermont II, 2009. Français. NNT : . tel-02592385

HAL Id: tel-02592385

<https://hal.inrae.fr/tel-02592385>

Submitted on 15 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D. U : 1977
E D S P I C : 455

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL - CLERMONT II
ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Préparée au **CEMAGREF**
et
Présentée par

Aurélie LE QUINIOU

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ
SPÉCIALITÉ : GÉNIE MÉCANIQUE

Écoulement granulaire à haute vitesse sous l'action de la force centrifuge.

Application en agroenvironnement à la problématique de l'épandage.

Soutenue publiquement le 23 novembre 2009 devant le jury :

| | | |
|-------------------|---|-------------------------|
| M. J. Rajchenbach | Directeur de Recherche au CNRS, | Président et Rapporteur |
| M. F. Chevoir | Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, | Rapporteur |
| M. T. Biben | Professeur à l'université de Lyon, | Examinateur |
| M. F. Nicot | Chargé de Recherche au Cemagref, | Examinateur |
| M. Y. Lapusta | Professeur à l'IFMA, | Directeur de thèse |
| M. F. Rioual | Chargé de Recherche au Cemagref, | Co-encadrant de thèse |
| M. E. Hugo | Chef de l'unité TSCF au Cemagref | Membre invité |



Remerciements

Au terme de ce long travail de recherche, je tiens à remercier très chaleureusement un bon nombre de personnes ayant contribué à l'élaboration de cette thèse. Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Luc Oger qui a été l'instigateur de ce travail. Il a encadré mon stage de Master avec grande attention et m'a indiqué ce sujet de thèse.

Cette thèse s'est déroulée au Cemagref de Montoldre dans l'allier. Je remercie Didier Méchineau puis Anne Rizand, directeurs régionaux du groupement de Clermont-Ferrand ainsi que Dominique Didelot puis Vincent Abt, responsables adjoints de l'unité TSCF, délégués pour le site de Montoldre, de m'avoir accueillie au sein de leur établissement et de m'avoir permis de mener mes travaux dans de bonnes conditions.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Jean Rajchenbach et François Chevoir qui ont pu trouver le temps de rapporter mon manuscrit et de formuler des critiques aussi constructives. Je souhaite exprimer ma gratitude à François Nicot et Thierry Biben qui ont bien voulu examiner ce travail et qui ont suivi l'avancée des travaux avec bienveillance lors des comités de thèse. Vos remarques à l'égard de mes travaux et nos échanges au cours de la soutenance ont été très enrichissants. Un très grand merci également à Emmanuel Hugo, chef de l'unité TSCF, d'avoir participé au jury.

Je tiens également à remercier vivement Yuri Lapusta, mon directeur de thèse, pour m'avoir soutenue et conseillée tout au long de ma thèse. J'ai toujours apprécié la confiance et la liberté qu'il m'a accordées. Une importante partie de ce travail n'aurait pas été possible sans l'apport et les compétences scientifiques de François Rioual qui m'a orienté tout au long de la thèse et m'a permis d'avancer dans ma réflexion.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les membres du séminaire GRAINS pour les nombreux conseils qu'ils m'ont prodigués. Je remercie également Colin Thornton et Michel Louge pour leurs commentaires pertinents lors de la relecture des articles.

Je voudrais remercier tous les membres du Cemagref à qui je dois d'avoir travaillé dans une ambiance chaleureuse. J'adresse un grand merci à Emmanuel Piron qui a su me faire profiter de son expérience et m'apporter de précieux conseils. Je souhaite exprimer ma reconnaissance à toute l'équipe technique pour la réalisation des dispositifs expérimentaux et tout particulièrement Philippe Héritier, Henri Cherasse et Guy Brenon pour leur travail d'orfèvres. Un grand merci à mes camarades thésards : Teddy, Emilie, Mickaël, pour leurs conseils et leur soutien. Mais également merci à Jean-Christophe pour ses aller-retour matinaux à Varennes. Je souhaite ex-

REMERCIEMENTS

primer ma gratitude aux secrétaires qui m'ont aidée très gentiment d'innombrables fois : Irène, Eveline, Christine, Eliane. Je n'oublie pas l'ensemble des stagiaires de fin d'étude de l'IFMA : Nicolas Heois, Bechir Elhedhili et Julien Boudet qui ont contribué à enrichir cette étude.

Merci à mes proches, familles et amis, pour leur soutien, qui ont également participé à leur manière à la réalisation de cette thèse. Merci pour les relectures de Morgane, Romain, Sylvie, JM et Nicolas. Je retiens surtout leur sympathie et leurs encouragements au cours de ces trois années qui n'ont pas toujours été faciles.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude des mécanismes physiques mis en jeu lors de l'interaction d'un milieu granulaire avec une paroi en rotation. Cette situation s'inspire du procédé d'épandage centrifuge de particules d'engrais en agroenvironnement dont la maîtrise est encore mal assurée dans la pratique.

Dans la première partie de cette thèse, un flux dilué de particules a été considéré. On étudie expérimentalement et théoriquement la nature des trajectoires impliquant frottement, roulement, choc, pour trois types de particules de formes bien caractérisées et une modélisation de ces trajectoires est proposée en introduisant un frottement de roulement à partir des expériences. On montre la difficulté de définir un coefficient de frottement unique selon la dynamique de la particule le long de la paroi (choc ou frottement au contact).

Dans la seconde partie de cette thèse, on étudie par la méthode des éléments discrets, le cas d'un écoulement dense le long de la paroi en rotation. L'écoulement consiste en une première phase de choc suivie d'une élongation sous l'action combinée des forces d'inertie (centrifuge, Coriolis) et enfin d'un mouvement de particules indépendantes. On caractérise quantitativement la structure de cet écoulement. On montre que le flux de particules est soumis à une sollicitation complexe qui associe des taux de déformation essentiellement de type traction, compression et dans une moindre mesure de cisaillement. On étudie également le rôle des degrés de liberté de rotation des particules dans l'écoulement et on met en évidence l'existence d'un coefficient de frottement critique particule/paroi qui contrôle l'apparition du roulement sans glissement pour les particules de l'écoulement. On détermine enfin par la modélisation un coefficient de frottement effectif de l'écoulement granulaire le long de la paroi en fonction du degré de liberté de rotation des particules de l'écoulement ainsi que de leurs propriétés mécaniques.

On termine en précisant les questions qui restent en suspens concernant la tribologie de contact entre particules en vue d'une caractérisation quantitative de ces écoulements pour les différents types de granulés.

Mots-clés : Ecoulement Granulaire Haute Vitesse, Forces d'inertie (Centrifuge, Coriolis), Méthode des Eléments Discrets, Expérimentations, Collisions, Frottement de Roulement, Roulement sans Glissement, Traction-Compression.

Abstract

This PhD Thesis focuses on the physical mechanisms in play during the interaction of a granular material with a rotating boundary. This configuration is inspired by the process of centrifugal spreading of fertilizer particles in agro-engineering.

In the first part of this thesis, a dilute flow of particles has been considered. We study experimentally and theoretically the features of the trajectories involving friction, rolling and collisions for three kinds of particles of well characterized shape and a modelling of these trajectories is proposed by introducing a rolling friction coefficient calibrated by experiments. We show the difficulty of defining a single friction coefficient according to the dynamics of the particle along the boundary (impact or friction at contact).

In the second part of this PHD thesis, we study using the discrete element method, the case of a dense granular flow of particles along a rotating boundary. The flow consists firstly of an impact followed by an elongation under the added action of the inertial forces (Centrifugal, Coriolis) and at last an independent motion of the particles. We characterize quantitatively by discrete element modelling the structure of this flow. We show that the flow of particles is subjected to a complex strain rate involving traction, compression and to a less extent shear. We consider also the influence of the rotation freedom degrees of the particles in the flow and we show the existence of a critical friction coefficient particle/boundary which controls the apparition of rolling without sliding for the particles in the flow. Finally, we show that we can define at the continuum scale an effective friction coefficient of the granular flow along the boundary as a function of the degrees of freedom of the particles in the flow as well as their mechanical properties.

We finish by addressing some open questions on tribology and contact mechanics in order to achieve a quantitative characterization of these flows for the different kinds of granules.

Keywords : Granular flows high velocity, Inertial forces (Centrifugal, Coriolis), Discrete Element Method, Experiments, Collisions, Rolling friction, Rolling without Sliding, Traction-Compression.

Table des matières

| | |
|--|----------|
| Remerciements | iii |
| Résumé | v |
| Abstract | vii |
| Table des matières | ix |
| Notations Principales | xv |
| Introduction | 1 |
| 1 Propriétés rhéologiques des matériaux granulaires | 5 |
| 1.1 Les matériaux granulaires | 5 |
| 1.2 Les trois états des matériaux granulaires | 6 |
| 1.2.1 Le régime quasi-statique | 7 |
| 1.2.2 Le régime collisionnel | 7 |
| 1.2.3 Le régime dense | 8 |
| 1.3 Caractéristiques des milieux granulaires denses | 10 |
| 1.3.1 Caractérisation macroscopique | 10 |
| 1.3.1.1 Frottement interne et frottement effectif | 10 |
| 1.3.1.2 Compacité | 11 |
| 1.3.1.3 Dilatance | 12 |
| 1.3.2 Caractérisation microscopique | 13 |
| 1.3.2.1 Réseau de contacts | 13 |
| 1.3.2.2 Nombre de coordination et mobilisation du frottement | 14 |
| 1.3.2.3 Propagation des rotations | 14 |
| 1.3.2.4 Encombrement stérique | 15 |
| 1.4 Interactions entre particules | 16 |
| 1.4.1 La méthode de dynamique moléculaire | 16 |
| 1.4.2 Contact maintenu et impact élastique normal | 17 |
| 1.4.3 Dissipation lors des chocs | 19 |
| 1.4.3.1 Modélisation DEM de la viscosité | 20 |
| 1.4.3.2 Modélisation DEM de la plasticité | 21 |
| 1.4.4 Dissipation par frottement | 23 |
| 1.4.4.1 Modélisation DEM d'un impact frottant | 24 |
| 1.4.5 Impact oblique | 25 |
| 1.4.5.1 Analyse corps rigides | 26 |
| 1.4.5.2 Effet de la compliance tangentielle | 27 |
| 1.4.5.3 Caractérisation des paramètres mécaniques | 29 |
| 1.4.5.4 Effet de la vitesse angulaire des particules | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.4.6 | Impact de particules non sphériques | 31 |
| 1.4.6.1 | Rugosité de surface | 31 |
| 1.4.6.2 | Modélisation DEM de formes complexes | 31 |
| 1.4.6.3 | Modélisation DEM par blocage des rotations | 32 |
| 1.4.6.4 | Caractérisation des paramètres mécaniques | 34 |
| 1.5 | Conclusions | 35 |
| 2 | Configurations expérimentales | 37 |
| 2.1 | Matériaux utilisés | 37 |
| 2.1.1 | Particules modèles en plastique | 37 |
| 2.1.2 | Engrais minéraux | 38 |
| 2.1.2.1 | Particules d’engrais d’Ammonitrate | 38 |
| 2.1.2.2 | Particules d’engrais de KCl | 39 |
| 2.1.3 | Comportement élastique des matériaux | 40 |
| 2.1.4 | Les pales utilisées | 41 |
| 2.1.5 | Caractérisation des paramètres mécaniques | 42 |
| 2.1.5.1 | Méthode de Coulomb | 42 |
| 2.1.5.2 | Expériences de choc avec les billes plastiques | 43 |
| 2.1.5.3 | Expériences de choc avec les Ammonitrates | 49 |
| 2.1.5.4 | Expériences de choc avec les particules de KCl | 51 |
| 2.2 | Les dispositifs expérimentaux | 56 |
| 2.2.1 | Dispositif expérimental numéro 1 en 2D | 56 |
| 2.2.1.1 | Protocole expérimental | 56 |
| 2.2.1.2 | Normalité des distributions expérimentales | 58 |
| 2.2.2 | Dispositif expérimental numéro 2 en 3D | 60 |
| 2.2.2.1 | Protocole expérimental | 60 |
| 2.2.2.2 | Traitements d’images | 61 |
| 2.3 | Conclusions | 63 |
| I | Ecoulement dilué de particules. | 65 |
| 3 | Trajectoire expérimentale le long d’une pale rotative | 67 |
| 3.1 | Caractérisation de la trajectoire | 67 |
| 3.1.1 | Influence de la gravité | 67 |
| 3.1.2 | Deux phases d’écoulement distinctes | 68 |
| 3.1.3 | Effets aérodynamiques | 69 |
| 3.1.4 | Vitesse du centre de masse et vitesse angulaire | 71 |
| 3.2 | Etude des chocs à hautes vitesses | 72 |
| 3.2.1 | Coefficient de restitution | 72 |
| 3.2.2 | Coefficient de frottement | 74 |
| 3.3 | La phase de rebonds | 75 |
| 3.3.1 | Paramètres de scaling | 75 |
| 3.3.2 | Position de collage | 75 |
| 3.4 | La phase de collage | 76 |
| 3.4.1 | Vitesse de glissement | 76 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.4.2 | Temps d'accélération sur la pale | 78 |
| 3.4.3 | Vitesse du centre de masse et vitesse angulaire | 78 |
| 3.5 | Conclusions | 79 |
| 4 | Modélisation analytique/dynamique moléculaire de la trajectoire | 81 |
| 4.1 | Définition de nombres caractéristiques | 82 |
| 4.2 | La phase de rebonds | 83 |
| 4.2.1 | Vol balistique entre deux impacts | 84 |
| 4.2.1.1 | Cas particulier : le premier rebond | 84 |
| 4.2.1.2 | Cas général : les autres rebonds | 85 |
| 4.2.2 | Impact de la particule avec la pale | 86 |
| 4.2.3 | Position de collage | 87 |
| 4.2.4 | Vitesses en fin de phase de saut | 88 |
| 4.2.4.1 | Vitesse du centre de masse | 88 |
| 4.2.4.2 | Vitesse angulaire | 89 |
| 4.3 | La phase de collage | 89 |
| 4.3.1 | Evolution des vitesses | 90 |
| 4.3.2 | Observation avec le modèle de dynamique moléculaire | 91 |
| 4.3.3 | Estimation du frottement critique | 91 |
| 4.3.4 | Cas particulier : particule sans rotation | 93 |
| 4.3.5 | Influence des rebonds sur la trajectoire | 93 |
| 4.4 | Comparaison avec les expérimentations | 95 |
| 4.4.1 | Coefficient de frottement critique | 96 |
| 4.4.2 | Valeurs en fin de phase de rebonds | 97 |
| 4.4.2.1 | Position de collage | 97 |
| 4.4.2.2 | Vitesse du centre de masse | 97 |
| 4.4.2.3 | Vitesse angulaire avant collage | 98 |
| 4.4.3 | Vitesses en fin de pale | 99 |
| 4.5 | Conclusions | 101 |
| 5 | Prise en compte de la forme de la particule | 103 |
| 5.1 | Modélisation de particules quasi-sphériques | 103 |
| 5.1.1 | Effets aérodynamiques | 104 |
| 5.1.2 | Effets inertiels | 104 |
| 5.1.3 | La phase de rebonds | 105 |
| 5.1.3.1 | Position de collage | 105 |
| 5.1.3.2 | Vitesse du centre de masse | 105 |
| 5.1.4 | La phase de collage | 106 |
| 5.1.4.1 | Vitesse de glissement | 106 |
| 5.1.4.2 | Vitesses en fin de pale | 108 |
| 5.1.4.3 | Temps d'accélération sur la pale | 110 |
| 5.2 | Modélisation de trajectoire de particules de formes irrégulières | 111 |
| 5.2.1 | Deux comportements différents | 111 |
| 5.2.2 | La phase de collage | 112 |
| 5.2.2.1 | Vitesses en fin de pale | 112 |
| 5.2.2.2 | Temps d'accélération sur la pale | 113 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 5.3 | Conclusions | 114 |
| II | Ecoulement dense de particules. | 117 |
| 6 | Etude de l'écoulement de particules | 119 |
| 6.1 | Description de l'écoulement simulé | 120 |
| 6.2 | Caractérisation macroscopique de l'amas | 123 |
| 6.2.1 | Temps de désagrégation de l'amas | 123 |
| 6.2.2 | Dynamique de l'amas granulaire | 125 |
| 6.2.3 | Centre de masse de l'amas | 126 |
| 6.2.4 | Conclusions | 126 |
| 6.3 | Grandeurs caractéristiques du problème | 127 |
| 6.4 | Structure de l'écoulement dense de particules | 129 |
| 6.4.1 | Compacité | 129 |
| 6.4.2 | Suivi de particules se déplaçant dans l'amas granulaire | 131 |
| 6.4.2.1 | Trajectoire des particules | 131 |
| 6.4.2.2 | Vitesses des particules | 132 |
| 6.4.3 | Forces de contact | 135 |
| 6.4.4 | Mobilisation du frottement | 137 |
| 6.5 | Bilan énergétique | 138 |
| 6.5.1 | Energie fournie par la pale en rotation | 138 |
| 6.5.2 | Energie cinétique des particules dans l'écoulement | 139 |
| 6.5.3 | Dissipation par frottement | 139 |
| 6.5.4 | Energie élastique de déformation des particules | 140 |
| 6.5.5 | Dissipation d'énergie par inélasticité des chocs | 141 |
| 6.5.6 | Coefficient de gain énergétique | 143 |
| 6.6 | Bilan de quantité de mouvement | 145 |
| 6.6.1 | Hypothèses de l'approche de Saint-Venant | 145 |
| 6.6.2 | Application des équations de Saint-Venant à l'épandage centrifuge | 147 |
| 6.6.2.1 | Equations moyennées dans l'épaisseur à 2 dimensions | 147 |
| 6.6.2.2 | Etude de la friction effective à la paroi | 148 |
| 6.6.2.3 | Contraintes normales | 152 |
| 6.6.3 | Profil de vitesses eulériennes dans l'écoulement | 153 |
| 6.6.3.1 | Etude numérique de la vitesse selon (Ox) | 156 |
| 6.6.3.2 | Etude numérique de la vitesse selon (Oy) | 157 |
| 6.6.4 | Evaluation des nombres sans dimension | 160 |
| 6.6.5 | Conclusions | 161 |
| 6.7 | Ecoulement de particules sans rotation | 162 |
| 6.7.1 | Blocage des rotations | 162 |
| 6.7.2 | Friction effective à la paroi | 162 |
| 6.7.3 | Bilan énergétique | 163 |
| 6.7.3.1 | Energie cinétique de translation | 163 |
| 6.7.3.2 | Dissipation par frottement | 163 |
| 6.7.3.3 | Coefficient de gain énergétique | 164 |

| | | |
|-----------------------------------|--|------------|
| 6.7.4 | Profil de vitesses eulériennes dans l'écoulement | 166 |
| 6.7.4.1 | Etude numérique de la vitesse selon (Ox) | 166 |
| 6.7.4.2 | Etude numérique de la vitesse selon (Oy) | 167 |
| 6.8 | Conclusions | 170 |
| 6.8.1 | Vers l'épandabilité de granulats. | 171 |
| Conclusions - Perspectives | | 173 |
| Publications | | 177 |
| Bibliographie | | 179 |

Notations Principales

Caractérisation du système

| | | |
|---------------------------|---|------------------|
| \mathcal{R} | Repère du laboratoire (fixe) | |
| \mathcal{R}' | Repère de la pale (tournant) | |
| \mathcal{R}'' | Repère de la surface virtuelle | |
| \mathbf{n}, \mathbf{n}' | Vecteurs unité, normaux à la paroi | |
| t | Temps | s |
| g | Gravité | m/s ² |
| L_p | Longueur de la pale | m |
| Ω | Vitesse de rotation de la pale | rad/s |
| ω | Position angulaire de la pale | rad |
| $(R + G)$ | Régime de Roulement et Glissement | |
| $(R - G)$ | Régime de Roulement sans Glissement | |
| δX | Erreurs expérimentales sur la mesure de X | |
| h | Hauteur de lâchée de la particule | m |
| γ | Angle d'inclinaison de la paroi | ° |

Caractérisation des particules

| | | |
|---|--|--------------------|
| $R_{(i)}$ | Rayon de la particule (i) | m |
| $m_{(i)}$ | Masse de la particule (i) | kg |
| ρ | Masse volumique | kg/m ³ |
| $E_{(i)}$ | Module d'Young de la particule (i) | Pa |
| $I_{(i)}$ | Moment d'inertie de la particule (i) | kg·m ² |
| $G_{(i)}$ | Module de rigidité de la particule (i) | Pa |
| $\nu_{(i)}$ | Coefficient de Poisson de la particule (i) | |
| $\delta_{(i)}$ | Interpénétration de la particule (i) | m |
| x_0 | Position initiale de la particule | m |
| $\mathbf{x} = (x, y, z)$ | Coordonnées de la particule | m |
| $\mathbf{V} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ | Vitesse de la particule (ou $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$) | m/s |
| $\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ | Accélération de la particule | m/s ² |
| $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z)$ | Vitesse angulaire de la particule | rad/s |
| $\ddot{\theta} = (\ddot{\theta}_x, \ddot{\theta}_y, \ddot{\theta}_z)$ | Accélération angulaire de la particule | rad/s ² |

Notations de l'écoulement dilué

| | | |
|--------------------------------|---|--------------------|
| N, T | Forces normale et tangentielle | N |
| $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ | Impulsion appliquée par la particule | N |
| σ | Tenseur des contraintes | Pa |
| a | Rayon de l'aire de contact | m |
| R^* | Rayon effectif | m |
| m^* | Masse effective | kg |
| E^* | Module d'Young effectif | Pa |
| Λ | Rayon de giration | |
| χ | Modification du rayon de giration Λ | |
| c_1, c_2, r_1, r_2 | Inconnues | |
| δ_n, δ_t | Déplacement normal et tangentiel | m |
| K_n, K_t | Raideurs normale et tangentielle linéaire | N/m |
| κ | Rapport des raideurs K_t et K_n | |
| k_n | Raideur normale non linéaire | N/m ^{3/2} |
| λ | Constante des modèles viscoélastiques non linéaires | |
| K_r | Raideurs de roulement | N·m |
| r_n, r_t | Coefficients de restitution normal et tangentiel au centre de masse | |
| β | Coefficient de restitution tangentiel au point de contact | |
| r_m | Coefficient de restitution normal mesuré | |
| b_n, b_t | Coefficients d'amortissement normal et tangentiel | N·s/m |
| μ | Coefficient de frottement particule/paroi | |
| μ_b | Coefficient de frottement particule/particule | |
| μ_d | Coefficient de frottement dynamique | |
| μ_s | Coefficient de frottement statique | |
| μ^* | Coefficient de frottement critique | |
| μ_r | Coefficient de frottement de roulement | |
| μ_{eff} | Coefficient de frottement effectif | |
| μ_m | Coefficient de frottement mesuré | |
| L_s | Longueur de la phase de saut | m |
| H | Hauteur d'un rebond | m |
| N_c, N_t | Nombre centrifuge et temps de collision | |
| N_{air} | Nombre caractérisant l'effet de l'air | |
| t_c | Temps de collision | s |
| t_e | Temps de propagation des ondes élastiques | s |
| t_{flight} | Temps entre deux collisions | s |
| V_g | Vitesse de glissement | m/s |
| V_i, V_r | Vitesse d'impact et de rebond | m/s |
| θ_i, θ_r | Angle d'impact et de rebond avec la normale | rad |
| V_y | Vitesse d'impact critique [Johnson, 1985] | m/s |
| θ_c | Angle d'impact critique | rad |

| | | |
|--------------------------------|---|-----|
| $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ | Vitesse relative du point de contact | m/s |
| ψ_1, ψ_2 | Angle d'impact et de rebond de la particule au point de contact [Maw et al., 1976] | rad |
| Ψ_1, Ψ_2 | Angle d'impact et de rebond de la particule au point de contact [Foerster et al., 1994] | rad |
| ϕ | Inclinaison de la surface virtuelle [Sommerfeld and Huber, 1999] | rad |

Indices

| | |
|-------------------|---|
| $0, 1, 2 \dots n$ | Valeurs avant les impacts $0, 1, 2 \dots n$ |
| s | Valeurs en fin de phase de rebond |
| e | Valeurs en fin de phase de collage |
| i, r | Valeurs d'incidence et de rebond |

Notations de l'écoulement dense

| | | |
|--|---|-----------------|
| N | Nombre de particules | |
| (L_x, L_y, L_z) | Dimensions du parallélépipède initial | m |
| (x_v, y_v, z_v) | Positions du parallélépipède de mesure | m |
| $(\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v)$ | Dimensions du parallélépipède de mesure | m |
| E_{mur} | Energie fournie par la paroi | J |
| E_c | Energie cinétique | J |
| E_t, E_r | Energie cinétique de translation et de rotation | J |
| E_f | Energie dissipée par frottement | J |
| E_d | Energie de déformation des particules | J |
| E_i | Energie dissipée par inélasticité | J |
| G | Coefficient de gain énergétique | |
| μ_0 | Angle de frottement interne | |
| ν_L, ν_D, ν_C | Différents seuils de compacité | |
| M | Mobilisation du frottement | |
| T_G | Taux de glissement | |
| $Z^{(g)}$ | Nombre de coordination (glissante) | |
| I, J, J' | Nombres inertiels | |
| P | Pression | Pa |
| τ | Contrainte de cisaillement | Pa |
| $\dot{\gamma}$ | taux de cisaillement | s ⁻¹ |
| T_p | Temps de confinement | s |
| $T_{\gamma_x}, T_{\gamma_y}$ | Temps de cisaillement | s |
| T_c | Temps d'élongation | s |
| T_x, T_y | Temps de traction et compression | s |

Introduction

L'épandage par action centrifuge est un procédé simple, peu onéreux et largement utilisé en agriculture pour propulser des engrais minéraux sur de grandes largeurs de travail. Dans ce système, les particules s'écoulent le long d'une paroi en rotation à grande vitesse autour d'un axe vertical. Or, du fait de pratiques culturales intensives, ce procédé d'épandage en agriculture s'avère être une source de dégradation importante de l'environnement. En effet, dans le cas d'un excès d'engrais, les erreurs de répartition peuvent induire une pollution des eaux par lessivage du sol. Etre capable de prédire la trajectoire de ces particules d'engrais de la machine à la parcelle permettrait de repérer ces erreurs de répartition, qui se manifestent par de gros écarts entre la dose consigne, correspondant aux besoins des cultures, et la dose réellement apportée. Pour ce faire, il faudrait, dans un premier temps, savoir comment s'écoulent les particules d'engrais dans un distributeur centrifuge. L'objet de cette thèse vise à apporter des connaissances sur les écoulements granulaires secs qui se produisent dans ce système d'épandage.

Les particules d'engrais sont des matériaux granulaires. Les écoulements granulaires ont fait l'objet de recherches actives ces dernières années pour des raisons aussi bien fondamentales qu'appliquées. On les rencontre ainsi dans de nombreux processus industriels (transport de granulés en agro-alimentaire, stockage dans les silos) ainsi qu'en environnement (avalanches de neige, glissements de terrain, mouvement des dunes de sable, . . .).

Ces milieux sont caractérisés par une agitation thermique nulle contrairement aux fluides classiques. En outre, les forces d'interaction entre particules (choc, frottement) sont fortement non linéaires et peuvent être non locales, ce qui conduit à des comportements très riches. Ainsi, on observe qu'un matériau granulaire peut se comporter sous écoulement comme un fluide mais peut aussi présenter certaines propriétés d'un solide ; c'est-à-dire que leur comportement dépend fortement du type de sollicitation. Jusqu'à présent, les écoulements granulaires étudiés sont en général de type gravitaires ou sous cisaillement. Le comportement rhéologique d'un matériau granulaire, sous l'effet d'une contrainte dépendante de l'espace telle que les forces d'inertie (Coriolis, centrifuge) demeure largement méconnu et constitue un domaine de recherche très ouvert.

Nous allons donc d'emblée limiter notre champ d'investigation, en considérant l'écoulement d'une assemblée de grains secs et sans cohésion. Ceci signifie que les particules n'interagissent a priori que par contacts directs (collisions, frottement). L'influence possible de l'air sur la trajectoire de la particule sera discutée. Dans

ces conditions, la rhéologie n'est commandée que par les transferts de quantité de mouvement entre particules ainsi qu'avec la paroi. Mais en dépit de l'apparente simplicité de ce système, le comportement de ces matériaux granulaires peut s'avérer très riche (blocage, instabilité, avalanches, ségrégation, effets de voûte...).

De plus, nous allons considérer des assemblées de particules mono-disperses. Nous ne traiterons pas dans le cadre de cette étude, des effets de différence de tailles de particules pouvant générer des phénomènes de ségrégation comme dans le cas d'écoulements granulaires sous cisaillement. Par ailleurs, la forme des engrais est extrêmement complexe et variée selon leur type de fabrication. Des précédentes investigations ([Tijssens, 2006], [Van Liedekerke, 2007]) ont proposé de modéliser les formes complexes des particules, afin de se rapprocher de la forme réelle des engrais. Ce choix n'a pas été fait dans le cadre de cette étude. Ici, la stratégie est plutôt à terme d'arriver à discerner un minimum de paramètres physiques pertinents capable de décrire l'écoulement. Nous avons choisi de garder la forme sphérique. La forme de la particule est alors prise en compte à travers ses possibles degrés de liberté de rotation.

* * *

Contexte - Objectifs

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein de l'équipe Gepand (Génie des technologies et procédés d'épandage) du Cemagref de Montoldre (Allier). Les recherches présentées ont eu pour objectif d'étudier l'écoulement sur l'organe d'épandage d'abord pour des écoulements dilués de particules, puis dans un second temps, pour des écoulements denses de particules. La différence essentielle est la présence d'interactions entre les particules dans le second cas.

Les précédentes investigations ([Colin, 1997], [Van Liedekerke, 2007]) ont pu mettre en évidence des différences dans la dynamique des particules en sortie de l'organe d'épandage, en fonction des caractéristiques de l'engrais et des réglages du distributeur. Ces études avaient abouti à mettre en avant le frottement matériau/matériel comme un élément important en vue d'une caractérisation de l'épandabilité des différents matériaux. L'objet de cette thèse s'inscrit dans cette démarche qui est de comprendre les mécanismes physiques mis en jeu lors de l'interaction d'un matériau granulaire avec une paroi en rotation.

La démarche choisie consiste à réaliser des expérimentations couplées à la modélisation ci-possible en travaillant tout d'abord sur des particules modèles de forme sphérique puis en abordant le cas de particules réelles d'engrais minéraux.

Deux dispositifs expérimentaux ont été mis en œuvre pour analyser l'écoulement *au sein de l'organe d'épandage*. Le premier dispositif a été conçu pour l'étude d'un flux dilué. L'imagerie rapide permet de suivre la trajectoire, les vitesses de translation et les vitesses angulaires des particules. Un second dispositif innovant à partir

de miroirs a été conçu pour étudier le comportement des matériaux en trois dimensions sur l'organe d'épandage.

La modélisation numérique par la méthode des éléments discrets a été développée à partir de l'utilisation d'un code C en complément du logiciel PFC3D (Itasca).

* * *

Plan du mémoire

Ce rapport s'organise en deux parties et six chapitres.

Nous situons tout d'abord ce travail de thèse dans son contexte scientifique en exposant un certain nombre de généralités relatives à l'étude des matériaux granulaires (les différents régimes à l'échelle macroscopique, les interactions de contact à l'échelle microscopique, les méthodes expérimentales et les méthodes numériques) (Chapitre 1). Le chapitre 2 présente les dispositifs expérimentaux et la caractérisation mécanique des différents matériaux.

Une première partie est dédiée aux résultats obtenus pour des écoulements de particules à flux dilué (régime mono-particule). Suite à la présentation des travaux expérimentaux pour des particules modèles (chapitre 3), nous proposons une modélisation analytique de l'écoulement pour des particules sphériques (chapitre 4). L'étude expérimentale est complétée au chapitre 5 par l'utilisation de particules réelles de formes différentes et bien caractérisées (engrais Ammonitrate et engrais KCl). Contrairement au cas sphérique, les trajectoires n'ont pas pu être étudiées en détail pour ces particules réelles. Nous proposons néanmoins une modélisation des trajectoires utilisant un frottement de roulement. Nous concluons sur l'influence de la forme de la particule sur certains paramètres.

La deuxième partie est consacrée aux résultats obtenus pour des écoulements de particules à flux dense. Le chapitre 6 aborde l'étude de l'écoulement, par la modélisation discrète, à partir des lois de conservation ainsi qu'une étude de la dynamique à l'échelle de particule.

Nous concluons enfin sur les avancées obtenues dans le cadre de cette thèse et les perspectives à donner à ce travail.

Chapitre 1

Propriétés rhéologiques des matériaux granulaires

Nous présentons tout d'abord les matériaux granulaires. Ils sont généralement classés selon leur sollicitation en trois régimes : le régime quasi-statique, le régime collisionnel et le régime d'écoulement dense. Ce chapitre a pour objet de donner quelques informations générales utiles pour l'étude des écoulements denses à l'échelle microscopique et macroscopique. Nous décrivons succinctement la méthode de dynamique moléculaire. Puis, nous abordons l'étude des interactions entre particules : en présence d'impacts élastiques normaux et obliques et en présence de dissipation d'énergie. La première partie de l'exposé est limitée au cas de grains sphériques de diamètre $2R$, de masse m et de moment d'inertie I . Enfin nous présentons les diverses méthodes numériques pour prendre en compte la forme variée des particules.

1.1 Les matériaux granulaires

On appelle matériau granulaire, un matériau formé d'une collection de particules macroscopiques. La taille des grains peut varier de plusieurs ordres de grandeurs entre les poudres, les farines ($< 100\mu\text{m}$), le sable ($\approx 1\text{mm}$), les granulats ($\approx 1\text{cm}$) et les éboulis de roches ($\approx 1\text{m}$). La forme des grains peut aussi varier. Certains sont sphériques ou ovoïdes comme les graines, mais le plus souvent ils sont anguleux comme par exemple le sable ou les roches.

Les écoulements de matériaux granulaires sont très courants dans divers secteurs industriels qui nécessitent l'acheminement et le stockage des grains :

- les activités minières (extraction des minerais, transport, broyage...),
- le bâtiment et le génie civil (sable, ciments, granulats...),
- l'industrie chimique, pharmaceutique (gélules, comprimés...),
- l'agriculture (engrais minéraux solides),
- l'agroalimentaire (céréales, graines, farines...).

Un autre domaine où les milieux granulaires sont omniprésents est la géophysique, le sol étant un milieu formé principalement de grains. Parmi les situations mettant en jeu des milieux divisés, on trouve :

- les mouvements des dunes,
- les avalanches de roches, les glissements de terrain,
- les écoulements pyroclastiques lors des éruptions volcaniques,
- les avalanches de neige,
- les anneaux de Saturne qui sont formés de gros blocs de glace.

Mieux comprendre les écoulements granulaires permet donc d'une part de résoudre des problèmes d'acheminement et de stockage dans l'industrie, et d'autre part de prévoir les zones potentiellement exposées à des catastrophes naturelles de natures variées. Ces enjeux ont récemment motivé de nombreuses études sur les écoulements de grains dont l'objectif majeur est de déterminer les lois rhéologiques et leurs origines physiques à l'échelle des grains et de leurs interactions [Coussot, 2005]. L'étude micromécanique des matériaux granulaires est un champ d'investigation récent, dans lequel l'usage des simulations numériques discrètes est venu compléter les expériences physiques sur des matériaux modèles. En effet, les matériaux granulaires se prêtent bien à la simulation numérique [Roux and Chevoir, 2005]. Celle-ci peut fournir beaucoup d'informations inaccessibles expérimentalement, comme les positions, les vitesses et les efforts. De plus, elle permet de varier à loisir les paramètres mécaniques des grains et les sollicitations, et donc de multiplier les "expériences numériques".

Les matériaux granulaires sont naturellement multiphasiques : une phase solide dispersée dans une phase liquide et/ou une phase gazeuse. Les différentes interactions possibles entre les phases contribuent à l'extrême variété des comportements observés. Les matériaux granulaires étudiés dans cette thèse sont qualifiés de matériaux granulaires "secs". Cette dénomination signifie que les grains ont une taille suffisante ($> 100\mu m$) pour que les assemblées n'interagissent qu'à travers des contacts directs. Les grains ne subissent ni force de cohésion de type Van Der Waals, ni mouvement brownien, ni diffusion moléculaire, ni interaction avec le fluide interstitiel (on néglige les interactions hydrodynamiques). Ainsi les contacts entre grains constituent les mécanismes élémentaires de transfert de quantité de mouvement et de dissipation d'énergie au sein de l'écoulement. Les écoulements granulaires secs ne sont pas si simples pour autant. Les interactions au niveau des contacts (chocs, frottement) sont souvent non linéaires et non locales. Il n'y a donc pas à l'heure actuelle de théorie ou d'équations constitutives qui permettraient de décrire l'ensemble des comportements observés avec ces matériaux. On ne possède pas l'équivalent des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides qui nous permettrait de décrire avec un même jeu d'équations les différents écoulements. Par ailleurs, une caractéristique originale des milieux granulaires, c'est qu'ils existent sous plusieurs états.

1.2 Les trois états des matériaux granulaires

Selon les sollicitations, les matériaux granulaires présentent des comportements mécaniques variés qui peuvent s'apparenter aux différents états de la matière. Ils

peuvent être assimilés aux solides élastoplastiques, aux fluides visqueux, ou pâteux voire aux gaz denses sous forte agitation [Jaeger et al., 1996] (Fig. 1.1).

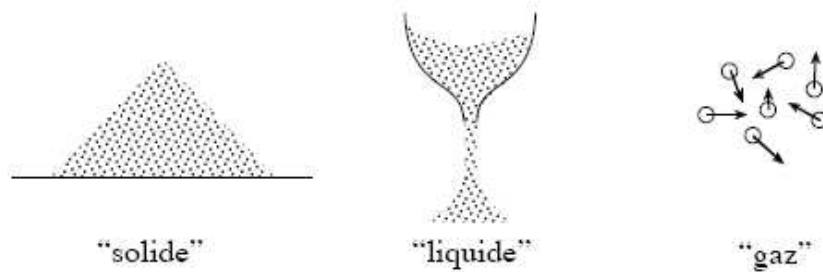


FIGURE 1.1 – Les milieux granulaires peuvent se comporter comme un solide, un liquide ou un gaz selon le mode de sollicitation (Figure extraite de [Pouliquen, 2001]).

1.2.1 Le régime quasi-statique

Un ensemble de grains posés sur une table peut former un tas statique. Le matériau reste sans mouvement et se comporte donc comme un solide. L'empilement est dense, le cisaillement est faible et les déformations sont alors lentes et continues. Dans ce régime, les forces se transmettent par un réseau comme dans le cas statique, mais évoluent au cours du temps. La dissipation d'énergie se fait alors principalement par frottement. C'est le régime étudié par les **mécaniciens des sols**, pour des problèmes de stabilité (talus...) et pour des problèmes de tassement (fondations...) [Nedderman, 1992], [Wood, 1999].

1.2.2 Le régime collisionnel

A l'autre extrême, si on secoue énergétiquement le tas de grains, le milieu devient très agité, dilué et fortement cisailé, avec des particules bougeant dans tous les sens. Dans ce régime qu'on appelle collisionnel, (ou inertiel selon [Bagnold, 1954]), le milieu ressemble à un gaz où les grains jouent le rôle des molécules subissant des collisions binaires. Dans la limite des corps rigides, les collisions peuvent être considérées comme quasi-instantanées i.e. la durée du contact est très courte devant le temps de vol entre deux collisions. Par analogie avec un gaz, ces milieux granulaires peuvent être décrit par la **théorie cinétique des gaz denses** ([Campbell, 1990], [Jenkins and Savage, 1983], [Goldhirsch, 2003]). La différence majeure entre un gaz et un milieu granulaire agité, réside dans la dissipation lors des collisions. Les chocs entre grains sont inélastiques et une partie de l'énergie est perdue à chaque collision. Pour rester dans le régime cinétique, il faut donc injecter de l'énergie au système en secouant par exemple les grains.

1.2.3 Le régime dense

Enfin, entre le régime quasi-statique et le régime collisionnel, on observe des écoulements denses, comme dans un sablier. Les particules interagissent à la fois par collisions et par contacts frictionnels de longue durée. Dans ces situations, des zones diluées coexistent avec des zones compactes. En raison du rôle prépondérant de la dissipation, beaucoup d'écoulements sont donc en régime dense. La différence avec le régime quasi-statique réside dans des effets inertiels importants.

Les écoulements granulaires denses ont été largement étudiés dans six configurations où se produit un cisaillement simple, les propriétés rhéologiques pouvant être mesurées [G.D.R. Midi, 2004]. Ces différentes géométries peuvent être séparées en deux familles : les écoulements confinés, et les écoulements à surface libre.

Les écoulements confinés sont le cisaillement plan (Fig. 1.2(a)) où le cisaillement est dû au mouvement d'une paroi; le cisaillement annulaire (Fig. 1.2(b)), dans lequel le matériau, confiné entre deux cylindres, est cisailé par la mise en rotation du cylindre intérieur; et l'écoulement en conduite verticale (Fig. 1.2(c)), dans laquelle le matériau s'écoule par gravité entre deux plaques rugueuses verticales. Les écoulements à surface libre sont les écoulements sur plan incliné rugueux (Fig. 1.2(d)); les écoulements sur fond meuble (Fig. 1.2(e)) et les écoulements en tambour tournant (Fig. 1.2(f)).

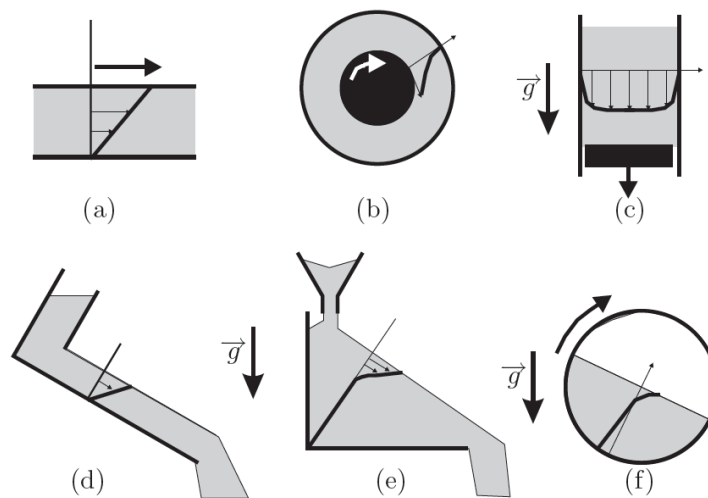


FIGURE 1.2 – Six géométries d'écoulement : (a) le cisaillement plan, (b) le cisaillement annulaire, (c) la conduite verticale, (d) le plan incliné, (e) le socle meuble, (f) le tambour tournant (Figure extraite de [G.D.R. Midi, 2004]).

Les équations constitutives ne sont pas encore établies dans le régime d'écoulement dense [Prochnow, 2002], [Pouliquen and Chevoir, 2002], [G.D.R. Midi, 2004]. Toutefois, dans les configurations sous cisaillement simple, une approche hydrodynamique de type **Saint-Venant**, proposée par [Savage and Hutter, 1989], permet de décrire quantitativement des écoulements relativement complexes. Elle repose sur l'hypothèse que la couche de l'écoulement est fine devant les longueurs ca-

ractéristiques de l'écoulement. C'est le cas dans de nombreux écoulements géophysiques où une couche de matériaux de quelques dizaines de mètres s'écoule sur des kilomètres. L'idée des équations de Saint-Venant est de tirer profit de l'hypothèse de couche mince pour négliger les variations des paramètres selon l'épaisseur et essayer de d'écrire l'écoulement par son épaisseur locale et sa vitesse moyenne.

⇒Le nombre inertiel

La classification des écoulements granulaires en trois régimes (solide, liquide, gaz), bien que fondée sur des arguments physiques raisonnables, est plus historique que rigoureusement établie. D'autres études sur des écoulements sous cisaillement homogène à travers des simulations bidimensionnelles des matériaux granulaires secs [Da Cruz, 2004], [G.D.R. Midi, 2004] proposent de déterminer le régime du matériau en fonction d'un **nombre inertiel** I . Ce nombre sans dimension représente le taux de cisaillement adimensionné et peut être interprété comme le rapport de deux temps : le temps caractéristique de confinement $T_p = \sqrt{\frac{m}{2RP}}$ et le temps de cisaillement $T_\gamma = \frac{1}{\dot{\gamma}}$ (m est la masse des particules, P est la pression agissant sur le milieu et $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement).

$$I = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{m}{2RP}} \quad (1.1)$$

Pour $I \leq 10^{-3}$, il s'agit du régime quasi-statique, où le matériau est décrit comme un solide élastoplastique (état critique de la mécanique des sols). À mesure que I augmente, l'influence de l'inertie s'ajoute au frottement des particules, il s'agit du régime des écoulements denses : la durée moyenne des contacts diminue et le milieu se dilate. Au-delà du régime dense ($I \geq 10^{-1}$), on observe le régime collisionnel, pour lequel des collisions binaires entre les particules dominant le comportement du matériau.

La configuration dont nous allons discuter dans cette thèse est l'écoulement d'un matériau, à surface libre, le long d'une paroi rotative verticale, sans paroi latérale (Fig. 1.3). Le milieu s'écoule sous l'effet simultané de la gravité et des forces inertielles. Dans cette configuration nouvelle, on souhaite caractériser deux types de limites de régimes : des écoulements denses de particules et des écoulements dilués de particules.

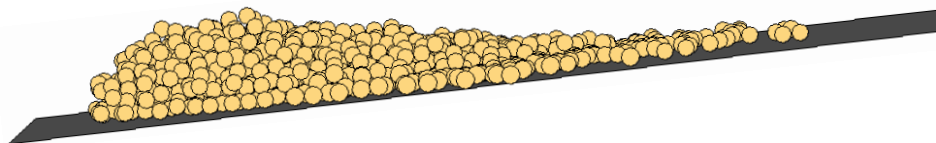


FIGURE 1.3 – Géométrie d'écoulement étudiée dans cette thèse : plan vertical rotatif.

1.3 Caractéristiques des milieux granulaires denses

Les milieux granulaires peuvent être étudiés à différentes échelles :

- l'échelle microscopique : c'est l'échelle des éléments constitutifs du milieu, c'est-à-dire les particules. La taille des particules définit une échelle de longueur.
- l'échelle macroscopique : très grande devant la taille de la plus grande hétérogénéité, on peut à cette échelle supposer le milieu comme homogène. Il est possible grâce à des méthodes d'homogénéisation (champ moyen, milieu effectif...), d'obtenir les caractéristiques d'un "milieu homogène équivalent".

Se pose alors la question du passage du microscopique (propriété étudiée au niveau du contact) au macroscopique (comportement global à l'échelle de l'empilement regroupant généralement un grand nombre de particules). Le problème des milieux granulaires est l'absence de fluctuations thermiques [Duran, 2000] qui permettent en physique statistique de passer de l'échelle microscopique des molécules à l'échelle macroscopique.

C'est pourquoi, on tente fréquemment de définir un volume élémentaire à l'échelle duquel le milieu apparaît statistiquement homogène. Cette approche permet l'utilisation de théories continues, qui dominent largement en physique grâce à leur relative simplicité.

1.3.1 Caractérisation macroscopique

Nous présentons quelques grandeurs qui nous permettront de discuter la loi de comportement de notre écoulement : frottement, compacité, dilatance.

1.3.1.1 Frottement interne et frottement effectif

Dans le régime quasi-statique, le frottement interne permet de définir le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Ce critère énonce qu'un point d'un matériau granulaire est stable si les contraintes normale σ_n et tangentielle σ_t vérifient l'inégalité stricte :

$$|\sigma_t| < \sigma_n \tan \mu_0 \quad (1.2)$$

Lorsque l'égalité est atteinte ($|\sigma_t| = \sigma_n \tan \mu_0$), le matériau s'apprête à glisser. μ_0 est appelé angle de frottement interne du matériau (de l'ordre de 30° dans les sols). Ce critère est analogue à la loi de Coulomb locale, mais l'angle de frottement interne dépend non seulement du coefficient de frottement μ_b entre grains, mais aussi de la forme des grains et de la géométrie de l'empilement (granulométrie, compacité).

Il est possible de généraliser la notion de frottement macroscopique à l'ensemble des déformations du système (déformation quasi-statique, écoulements denses...). D'une manière générale, on définit le **frottement effectif** μ_{eff} dans un matériau granulaire comme étant le rapport des contraintes de cisaillement τ sur les contraintes normales P :

$$\mu_{eff} = \frac{\tau}{P} \quad (1.3)$$

La variation du frottement effectif μ_{eff} avec le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ fait partie de la loi de comportement du milieu granulaire. Elle a été déterminée pour différentes configurations : [Savage and Hutter, 1989], [G.D.R. Midi, 2004], [Da Cruz, 2004], [Koval Junior, 2008]. La figure 1.4 représente cette loi de comportement $\mu_{eff}(I)$ pour les différents régimes. Le régime dense montre que le frottement effectif augmente avec I . Des auteurs ont montré que le frottement effectif est également fonction de l'épaisseur [Pouliquen, 1999] ou de la vitesse locale [Pouliquen and Forterre, 2002].

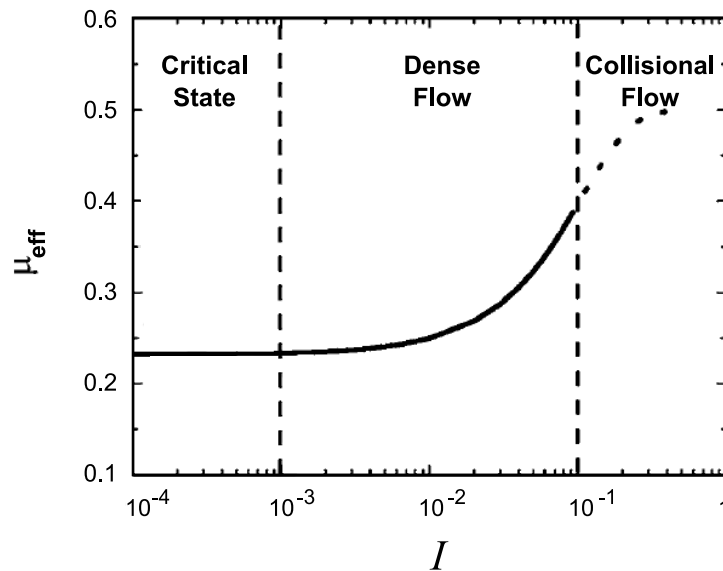


FIGURE 1.4 – Diagramme des régimes d'écoulement granulaire (Figure extraite de [Da Cruz et al., 2005]).

1.3.1.2 Compacité

La compacité ν renseigne sur le taux de remplissage d'un volume donné. Elle est définie comme le rapport entre le volume des grains et le volume total du matériau granulaire. La figure 1.5 illustre la relation qui existe entre la structure du matériau et la compacité dans le cas d'un milieu constitué de sphères ou de disques.

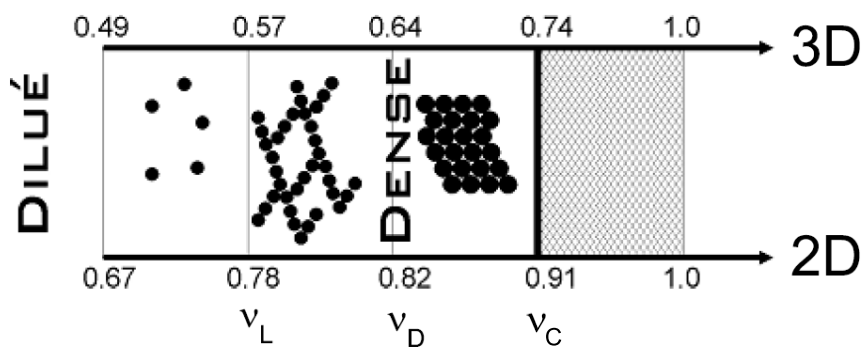


FIGURE 1.5 – Structure et compacité des milieux granulaires (2D et 3D).

Pour un milieu composé des particules mono-disperses, la compacité maximale est obtenue dans l'état cristallin (structure cubique à faces centrées) correspondant à $\nu_C = \pi/3\sqrt{2} = 0.74$ pour des sphères et $\nu_C = \pi/2\sqrt{3} = 0.91$ pour des disques. Partant d'une disposition aléatoire, le milieu se compacte jusqu'à une compacité maximale dite d'**empilement désordonné compact** correspondant à $\nu_D = 0.64$ pour des sphères et à $\nu_D = 0.82$ pour des disques. Des structures denses ont des valeurs de compacité plus faibles que ν_D . Dans le régime d'écoulement dense, il s'établit un réseau de contact entre particules dont la densité peut être mesurée par le nombre de coordination Z (cette grandeur sera détaillée au paragraphe § 1.3.2.2). La compacité ν_L (appelée l'empilement désordonné lâche) correspond à la limite où le réseau de contact s'étend dans tout l'échantillon. Cette valeur dépend du frottement entre les particules μ_b , de l'adhésion, de la résistance au roulement... Enfin, dans des systèmes à faible compacité, $\nu < \nu_L$ (milieux dilués), les particules sont séparées les unes des autres la plupart du temps, mais entrent en contact lors des collisions.

Dans la suite, nous traiterons des écoulements dilués $\nu < \nu_L$ et des écoulements denses caractérisés par une compacité inférieure à $\nu_D = 0.64$. Notons que [Azanza, 1998] a proposé une classification des régimes d'écoulement de disques mono-disperses (cinétique, collisionnel, dense, bloc) en fonction de leur compacité. Les écoulements bidimensionnels sont qualifiés de denses pour une compacité comprise entre $0.6 < \nu < 0.82$.

1.3.1.3 Dilatance

En 1885, Reynolds a mis en évidence qu'“un milieu granulaire fortement compacté placé dans un enveloppe flexible, voit invariablement son volume augmenter lorsque cette enveloppe est déformée” [Reynolds, 1885]. Reynolds a réalisé l'expérience suivante : il a rempli une poche de sable et d'eau surmontée d'un capillaire. Lorsque l'on appuie sur la poche, le niveau de l'eau dans le capillaire descend contrairement à l'intuition (Fig. 1.6).

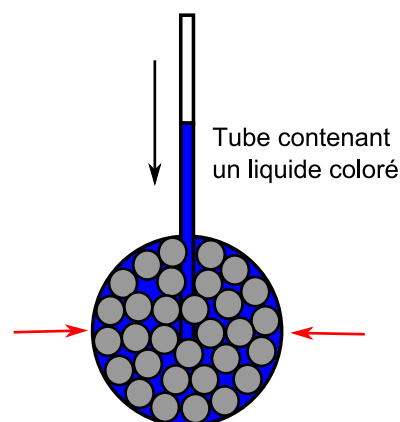


FIGURE 1.6 – Principe de dilatance de [Reynolds, 1885].

En appuyant sur la poche, on déforme le milieu granulaire, qui se dilate, et l'eau descend donc remplir les pores ainsi créés (Fig. 1.7). Ce phénomène caractéristique des milieux granulaires porte le nom de dilatance.

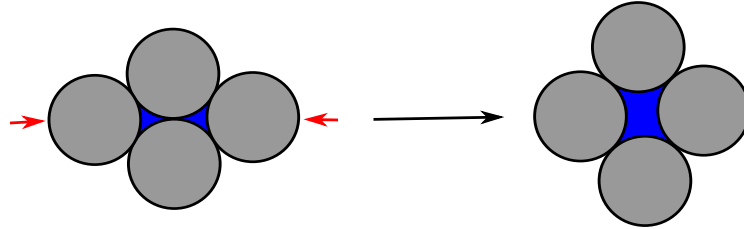


FIGURE 1.7 – Un empilement dense doit gonfler pour se déformer.

Le mouvement relatif des grains va donc induire une diminution de la compacité [Da Cruz, 2004]. Le phénomène de la dilatance de Reynolds dépend bien entendu des conditions initiales. Partant d'un empilement lâche, le matériau va plutôt se contracter lorsqu'il est soumis à une compression.

1.3.2 Caractérisation microscopique

Nous présentons quelques grandeurs caractéristiques microscopiques : le réseau de contact, la coordination, la mobilisation du frottement, la frustration des rotations et les différences dans les effets d'encombrements stériques liés aux particules anisotropes.

1.3.2.1 Réseau de contacts

Les empilements denses de grains sont caractérisés par un réseau de contacts qui transmet les forces [Radjaï and Roux, 2001]. La statistique de la répartition des forces a fait l'objet de nombreux travaux de recherche.

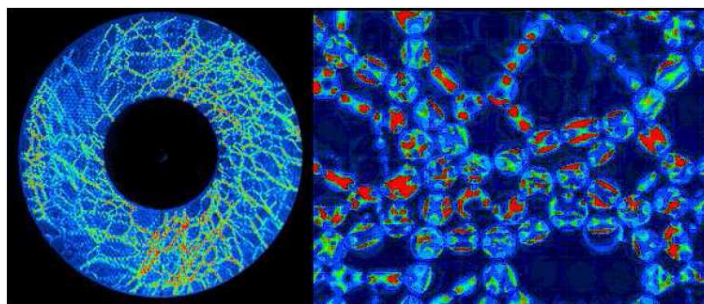


FIGURE 1.8 – Mise en évidence du réseau de contact par photoélasticimétrie [Howell et al., 1999].

Les premières expériences permettant de visualiser ce réseau de contact, ont été réalisées par [Dantu, 1968], sur des assemblées bidimensionnelles de cylindres.

Elles ont révélé que, dans un empilement, le moindre désordre (distribution de taille des grains en particulier) introduit une distribution très hétérogène des forces de contact. Les simulations numériques [Da Cruz et al., 2005], [Radjaï et al., 1996], et les expériences [Liu et al., 1995], [Mueth et al., 1998], [Howell et al., 1999] montrent clairement des fluctuations spatiales et temporelles du réseau des contacts (Fig. 1.8).

1.3.2.2 Nombre de coordination et mobilisation du frottement

Le nombre de coordination Z de contacts est défini comme le nombre moyen de contacts par grains [Combe and Roux, 2002]. Cette grandeur est très dépendante de la granulométrie et de la compacité du milieu. Dans les assemblages désordonnés, en régime quasi-statique, Z varie entre 3 et 4 pour les disques et entre 4 et 6 pour les sphères. Lorsque I augmente, la compacité diminue et aussi le nombre de coordination Z . Une distinction entre les contacts “glissants” pour lesquels le frottement est entièrement mobilisé et les autres contacts est introduite par [Da Cruz, 2004]. On définit donc, un “nombre de coordination glissante” Z_g , égal au nombre moyen de contacts glissants par grain [Staron et al., 2002]. Lorsque le système passe au régime inertiel, le nombre de contacts glissants diminue, vu que le nombre de contacts total diminue avec I . Pour prendre en compte la variation de Z , on définit la mobilisation du frottement $M = Z_g/Z$.

Les mesures expérimentales de coordination donnent des valeurs qui dépendent souvent de la méthode de mesure utilisée (peinture, acide, stéréologie...). En effet, cela vient du fait qu’il est difficile de différencier le proche voisinage du contact réel [Aïm and Goff, 1969]. Même dans le cas simple d’empilements modèles à deux dimensions, où l’on a accès à l’essentiel de l’information géométrique, la définition du contact géométrique est toujours plus ou moins subjective car elle est liée à la difficile appréciation de la distance entre les deux surfaces de grains voisins.

1.3.2.3 Propagation des rotations

Pour des grains sphériques, le frottement coulombien permet la mise en rotation sans glissement de particules en contact. Ce frottement est ainsi à l’origine de la propagation des rotations dans le milieu par l’intermédiaire d’un réseau de contacts non glissants. Les rotations constituent donc une source de corrélations à longue portée dans le milieu. Par ailleurs, les roulements étant très peu dissipatifs, on s’attend à ce que ces derniers soient un mécanisme de diminution du taux de dissipation dans les milieux granulaires.

Cette stratégie de minimisation de la dissipation est limitée par les frustrations de rotation, phénomène bien connu des empilements granulaires denses [Khidas, 2001] et illustré dans le cas particulier de grains identiques sur la figure 1.9.

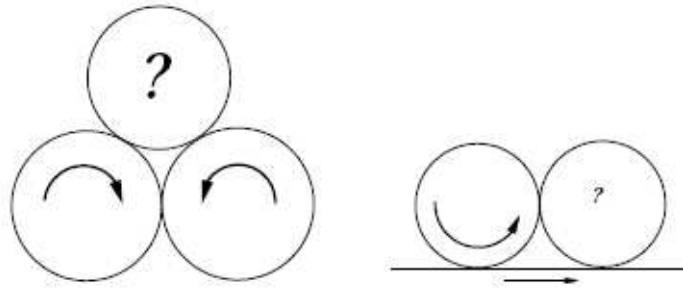


FIGURE 1.9 – Illustration du phénomène de frustration de rotation lorsqu’au moins un des contacts est glissant (Figure extraite de [Khidas, 2001]).

Des auteurs ont montré que les rotations des particules jouent un rôle important dans la diminution de la force de frottement globale au niveau de l’interface de cisaillement [Khidas, 2001], [Khidas et al., 2003]. En effet, si on supprime le degré de liberté rotationnel des particules, le système se comporte alors comme un bloc solide. Le coefficient de frottement global entre l’empilement et la paroi est alors directement le frottement particule/paroi.

1.3.2.4 Encombrement stérique

Pour des grains non sphériques, on s’attend à ce que le comportement soit différent des sphères à cause des courbures de la surface au niveau des contacts. Ainsi, le contact entre grains ne se fait plus au niveau de points mais au niveau de surface (Fig. 1.10).

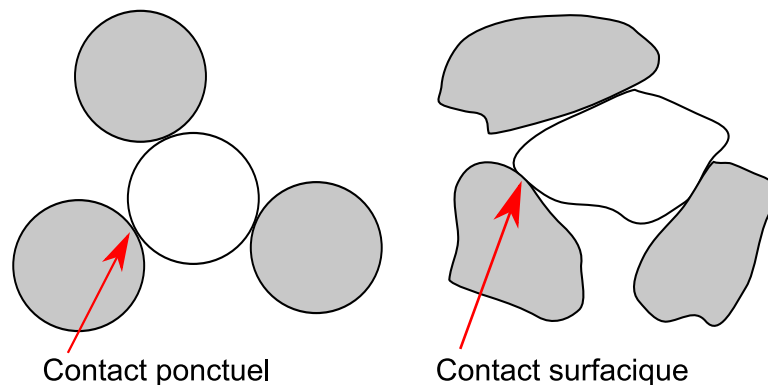


FIGURE 1.10 – Illustration de différents types de contact en fonction de la forme des grains.

Une particule de forme anisotrope dans un milieu extérieur va avoir plus de difficulté à tourner autour de son axe principal d’inertie, qu’une particule sphérique. En effet, dans une approche de type champ moyen, une particule anisotrope pour tourner doit déplacer une quantité de matière correspondant au volume exclu dans la sphère circonscrite à la particule. C’est pourquoi en raison de l’encombrement stérique, les particules d’excentricité grande devant 1 présentent une rotation très

limitée. De plus, les contacts surfaciques induisent du glissement et de la dissipation d'énergie. En effet, des déformations plastiques des surfaces en contact sont nécessaires avant la mise en rotation des grains.

1.4 Interactions entre particules

Le comportement du matériau en écoulement est intimement lié aux interactions entre particules. Dans le cas des grains secs, non cohésifs, ces interactions se résument à des contacts directs, qui constituent les mécanismes élémentaires de transfert de quantité de mouvement et de dissipation de l'énergie (voir [Azanza, 1998] pour une discussion des interactions grain/air). Au niveau microscopique, le contact a lieu entre deux surfaces rugueuses, qui vont se déformer de façon élastique, plastique ou visqueuse. Ce comportement est complexe et souvent mal connu. Cette section est une présentation des lois de contact relativement simplifiées et robustes, qui relèvent de la physique du contact (voir [Johnson, 1985] pour plus de détail). En pratique, certains ingrédients de ces lois sont assez bien connus, et d'autres beaucoup moins.

Au cours de cette présentation, nous aborderons les méthodes numériques, couramment utilisées, pour modéliser les interactions de contact. On peut distinguer trois grandes méthodes de simulation numérique : la dynamique moléculaire, la méthode collisionnelle (Event Driven) et la dynamique des contacts. La dynamique moléculaire, contrairement aux méthodes collisionnelles et dynamiques des contacts, prend en compte les déformations locales des particules à l'échelle microscopique. On parle de méthode de sphères molles par opposition aux méthodes de sphères dures. Nous allons présenter, tout d'abord très succinctement, les idées générales de la méthode de dynamique moléculaire, que nous avons utilisée.

1.4.1 La méthode de dynamique moléculaire

La méthode de dynamique moléculaire fut inventée dès l'apparition des premiers ordinateurs, pour simuler les liquides [Allen and Tildesley, 1987]. Les particules sont alors des atomes ou des molécules en interaction et en mouvement permanent. Elle a ensuite été adaptée aux assemblages de grains solides légèrement déformables [Cundall and Strack, 1979]. Elle demeure encore de nos jours la plus répandue.

L'algorithme consiste, à chaque pas de temps, à détecter les grains en contact, puis à calculer les forces de contact binaires. Les relations fondamentales de la dynamique sont intégrées pour tous les grains de façon à modifier leurs vitesses et leurs positions suivant un algorithme de type prédicteur-correcteur, leapfrog ou Verlet. Ceci nécessite une discrétisation en temps du système. Le pas de temps approprié doit être suffisamment petit devant la durée d'une collision ([Schäfer et al., 1996] recommande un pas de temps environ 100 fois plus petit). Cette méthode conduit en pratique à effectuer un très grand nombre d'itérations, chacune d'entre elles étant toutefois peu coûteuse en temps de calcul. Diverses techniques (listes de voisins,

découpage en cellules. . .) permettent d'éviter la recherche des contacts parmi toutes les paires possibles de grains.

La difficulté essentielle de la méthode consiste à déterminer la bonne loi de contact au niveau des interactions binaires pour reproduire le comportement des grains en contact. Nous allons présenter un état des lieux des connaissances sur les différents modes d'interaction entre grains secs.

1.4.2 Contact maintenu et impact élastique normal

Considérons deux sphères, de rayon R_1 et R_2 qui amenées en contact, ne se touchent qu'en un point. Sous l'action d'une très faible compression, les sphères se déforment et s'interpénètrent des longueurs δ_1 et δ_2 au voisinage de ce point. L'aire de contact est de dimension finie et petite par rapport aux dimensions des deux corps. Au niveau microscopique, la théorie du contact élastique [Landau and Lifshitz, 1986], [Love, 1944], [Johnson, 1985] prédit alors la forme de cette aire de contact et les distributions de déformations et de contraintes des deux corps au voisinage de la région de contact.

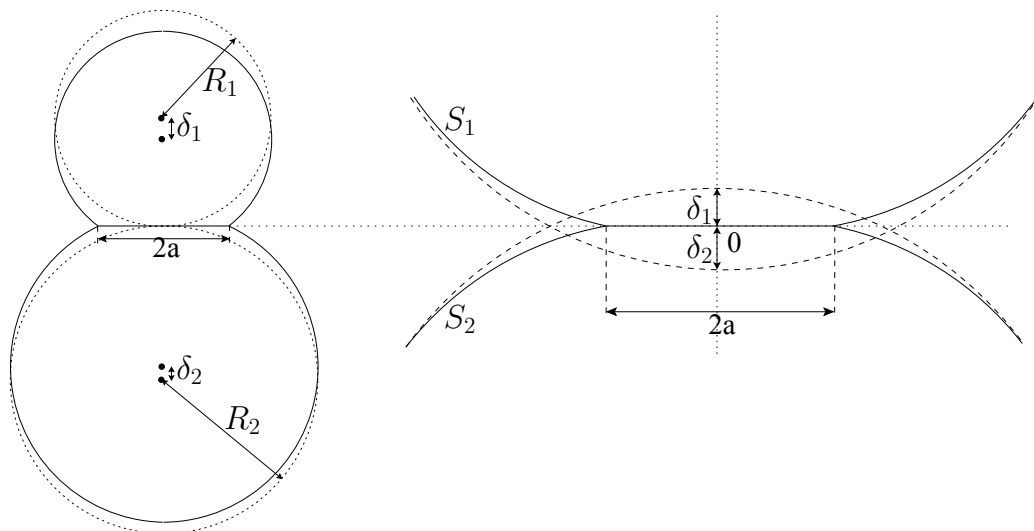


FIGURE 1.11 – Modèle de contact des sphères déformables.

Contact maintenu

Le modèle proposé par Hertz en 1880, décrit le contact normal entre deux sphères purement élastiques (voir [Hertz, 1896] pour une traduction anglaise des travaux). L'augmentation de l'aire de contact avec la force appliquée suit une loi non linéaire. Le modèle de Hertz, fournit une relation très simplifiée entre la force normale N au point de contact et la déformation (ou interpénétration) $\delta_n = \delta_1 + \delta_2$ du contact et s'écrit :

$$N = k_n \delta_n^{3/2} \quad (1.4)$$

où la raideur normale du contact k_n dépend uniquement du rayon effectif des sphères $R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ et des coefficients élastiques : le coefficient de Poisson $\nu_{1,2}$ et le module d'Young effectif $E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$:

$$k_n = \frac{4}{3} \sqrt{R^*} E^* \quad (1.5)$$

Le domaine de contact est un disque de rayon :

$$a = \sqrt{\delta_n R^*} = \left(\frac{N}{k_n} \right)^{1/3} \sqrt{R^*} \quad (1.6)$$

La forme générale de la loi (en puissance 3/2 de la déformation), est peu modifiée en prenant des hypothèses plus réalistes. La prise en compte des aspérités à l'échelle microscopique [Travers et al., 1986] ou d'une composante tangentielle [Mindlin and Deresiewicz, 1953] conduisent dans les deux cas à des exposants peu différents de celui de la loi de Hertz.

Pour déterminer un ordre de grandeur de l'interpénétration lors d'un contact, on considère une sphère en plastique PVC ($R=3\text{mm}$, $\rho=1800\text{kg/m}^3$, $E=2\text{GPa}$, $\nu=0.25$) posée sous l'effet de la gravité sur une surface plane possédant des propriétés élastiques similaires. On obtient $a \approx 0.01\text{mm}$ et $\delta_n \approx 0.08\mu\text{m}$. δ_n est par conséquent une quantité très inférieure à a et à R . Comme les interactions entre les grains sont localisées dans des régions de contact très petites devant leurs diamètres, cela signifie que l'on peut décrire la cinématique de l'ensemble des particules comme un ensemble de corps rigides, avec un nombre fini de degrés de liberté.

Impact élastique normal - Modèle de Hertz

La théorie de l'impact normal entre deux corps élastiques est une extension directe de la théorie statique du contact élastique. Cette théorie est dite quasi-statique dans le sens où les déformations sont limitées au voisinage de l'aire de contact et sont données par la théorie statique. Ainsi la collision binaire de Hertz est généralement décrite comme une collision entre deux corps parfaitement rigides, chacun équipé frontalement d'un ressort [Hertz, 1896]. La déformation est concentrée dans la partie déformable : les ressorts.

L'expression analytique d'une collision entre deux corps est formulée dans de nombreux ouvrages [Landau and Lifshitz, 1986], [Love, 1944], [Johnson, 1985]. Pour une vitesse d'approche des deux sphères $V_i = V_2 - V_1$, la force maximale N_m ayant lieu au cours de la collision est :

$$N_{max} = k_n \delta_{max}^{3/2} \quad (1.7)$$

En intégrant les équations fondamentales de la dynamique, on calcule ainsi la durée de la collision t_c en fonction de l'interpénétration maximale δ_{max} et de la vitesse d'impact V_i :

$$t_c = 2.94 \frac{\delta_{max}}{V_i} = 2.87 \left(\frac{m^{*2}}{R^* E^{*2} V_i} \right)^{1/5} \quad (1.8)$$

avec la masse effective définie par $m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Pour déterminer un ordre de grandeur de l'interpénétration lors d'un impact, on considère une sphère en plastique PVC ($R=3\text{mm}$, $\rho=1800\text{kg/m}^3$, $E=2\text{GPa}$, $\nu=0.25$) tombant d'une hauteur $h=1\text{m}$ sur une surface plane possédant des propriétés élastiques similaires. On obtient : $t_c \approx 50\mu\text{s}$ et $\delta_{max} \approx 0.07\text{mm}$

Il arrive aussi très souvent que l'on ne cherche pas à décrire précisément l'élasticité du contact. Dans un large nombre de cas, une loi linéaire peut suffire :

$$N = K_n \delta_n \quad (1.9)$$

La raideur normale est choisie pour respecter l'ordre de grandeur des déformations élastiques dans les contacts.

1.4.3 Dissipation lors des chocs

La théorie d'Hertz, issue de la théorie de l'élasticité, ne tient pas compte de l'énergie dissipée au cours d'un choc. En pratique, de l'énergie est toujours perdue lors d'une collision. Ces pertes d'énergie proviennent de phénomènes de différentes natures [Falcon, 1997] telles :

⇒ l'inélasticité des corps en contact (propriétés viscoélastiques, déformations plastiques),

⇒ la génération de vibrations (ondes de surface, vibration de la bille),

⇒ les pertes dues aux aspérités de surface (rugosité).

Ces pertes d'énergie sont souvent prises en compte par le coefficient de restitution normal r_n introduit par Newton en 1687. Il est le premier à observer que la vitesse normale de rebond V_r est proportionnelle à la vitesse normale d'approche V_i lors d'un impact sur une surface plane. La constante de proportionnalité étant le coefficient de restitution normal :

$$V_r = -r_n V_i \quad (1.10)$$

Ce coefficient est compris entre 0 pour des chocs parfaitement plastiques (choc mou) où toute l'énergie est dissipée et 1 pour des chocs parfaitement élastiques où il n'y a pas de dissipation. Si le coefficient de restitution est généralement considéré comme une constante empirique, en réalité il est fonction de la vitesse d'impact, des dimensions des corps en collision ainsi que de leurs propriétés viscoélastiques et plastiques.

Déformations plastiques des corps en contact

[Johnson, 1985] définit une vitesse d'impact critique V_y au-delà de laquelle toute l'énergie dissipée est due aux déformations plastiques. Il obtient une vitesse critique dans les métaux de l'ordre de 5m/s. Pour des vitesses d'impact supérieures à la vitesse critique V_y , les études expérimentales [Goldsmith, 1960], [Tabor, 1948] et théoriques [Johnson, 1985], [Tabor, 1948], [Thornton, 1997] montrent que le coefficient de restitution est proportionnel à la puissance $-1/4$ de la vitesse d'impact :

$$r_n \sim V_i^{-1/4} \quad (1.11)$$

Dissipation visqueuse

Pour des vitesses d'impact inférieures à la vitesse critique V_y , les déformations plastiques sont inexistantes et toute l'énergie est dissipée par viscoélasticité.

[Kuwabara and Kono, 1987] puis [Brilliantov et al., 1996] ont généralisé le calcul de Hertz à des matériaux viscoélastiques. Une expression du coefficient de restitution est alors obtenue :

$$(1 - r_n) \sim V_i^{1/5} \quad (1.12)$$

Cette dépendance du coefficient de restitution avec la vitesse d'impact a été vérifiée expérimentalement par [Kuwabara and Kono, 1987], [Brilliantov et al., 1996] et [Hertzsch et al., 1995].

La modélisation discrète s'est développée ces dernières années pour déterminer des modèles de forces réalistes d'impacts inélastiques et notamment, prendre en compte les dissipations visqueuses et plastiques [Falcon, 1997].

1.4.3.1 Modélisation DEM de la viscosité

⇒ **Modèle viscoélastique linéaire :**

La partie visqueuse de la force de contact est le plus souvent prise linéaire avec la vitesse relative [Cundall and Strack, 1979] où b_n est le coefficient d'amortissement newtonien :

$$N = b_n \dot{\delta}_n \quad (1.13)$$

Il s'agit d'une expression tout à fait phénoménologique qui décrit une dissipation de nature visqueuse. La modélisation d'un choc binaire frontal avec les relations 1.9 et 1.13 définit un problème d'oscillateur harmonique avec amortissement linéaire. Ce modèle de Cundall (aussi appelé Spring-Dashpot : un ressort et un amortisseur monté en parallèle Fig. 1.12) a l'avantage d'avoir une solution analytique avec les conditions initiales ($\delta_n(0) = 0$ et $\dot{\delta}_n(0) = V_i$). Le coefficient de restitution est donné par :

$$r_n = \exp\left(-\frac{b_n}{2m^*} t_c\right) \quad (1.14)$$

où t_c le temps de collision est donné par :

$$t_c^2 = m^* \left(\frac{\pi^2 + \ln(r_n)^2}{K_n} \right) \quad (1.15)$$

Avec ce modèle b_n est fonction de K_n et r_n . Il n'y a donc plus de paramètres ajustables à partir du moment où on mesure K_n et r_n . C'est pourquoi ce modèle est fréquemment utilisé dans les modélisations. Néanmoins il a deux inconvénients : d'une part, le coefficient de restitution [Pöschel and Schwager, 2005] :

$$r_n = \exp\left(\frac{-\pi b_n}{2m^*} / \sqrt{\frac{K_n}{m^*} - \left(\frac{b_n}{2m^*}\right)^2}\right) \quad (1.16)$$

est indépendant de la vitesse d'impact. D'autre part, dans ce modèle linéaire, la force normale est non nulle au début de l'impact cf. Fig. 1.12. Différents auteurs ont donc proposé des modèles viscoélastiques non linéaires.

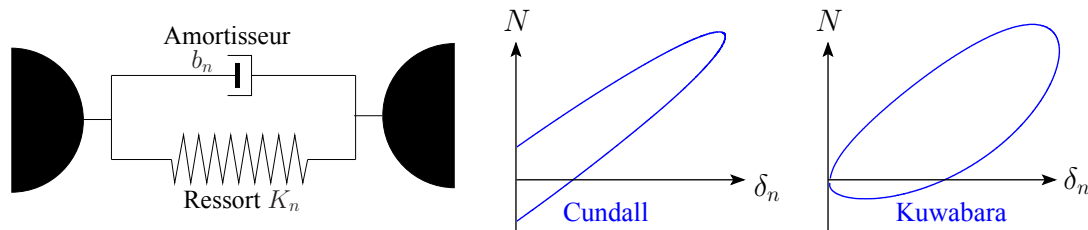


FIGURE 1.12 – Modèle de contact viscoélastique et relation force-déplacement pour le modèle linéaire de Cundall et non linéaire de Kuwabara.

⇒ Modèles viscoélastiques non linéaires :

Les modèles viscoélastiques non linéaires sont tous de la forme suivante où λ varie suivant les auteurs :

$$N = k_n \delta_n^{3/2} + b_n \delta_n^\lambda \dot{\delta}_n \quad (1.17)$$

On peut citer [Hunt and Crossley, 1975] ($\lambda = 3/2$) ou [Tsuji and T. Tanaka, 1992] ($\lambda = 1/4$) qui ont proposé des modèles phénoménologiques et donc peu réalistes. [Kuwabara and Kono, 1987] puis [Brilliantov et al., 1996] sont les premiers à généraliser le calcul de Hertz à des matériaux viscoélastiques ($\lambda = 1/2$).

[Schwager and Pöschel, 1998] ont montré qu'avec le modèle $\lambda = 1/2$, le coefficient de restitution ($1 - r_n$) est proportionnel à $V_i^{1/5}$. Ce modèle a toutefois l'inconvénient de ne pas avoir de relation simple pour le coefficient d'amortissement b_n .

1.4.3.2 Modélisation DEM de la plasticité

⇒ Modèle élastoplastique linéaire :

[Walton and Braun, 1986] ont établi un modèle élastoplastique linéaire. Il est basé sur deux ressorts de raideur constante différente : une raideur K_1 pour la compression (c) et une raideur K_2 pour la relaxation (r) (Fig. 1.13) :

$$N^c = K_1 \delta_n \quad (1.18)$$

$$N^r = K_2 (\delta_n - \delta_0) \quad (1.19)$$

La raideur de compression vaut $K_1 = K_n \frac{3a}{2\sqrt{R}}$, où a est le rayon de l'aire de contact et δ_0 la déformation résiduelle. Avec ce modèle, le coefficient de restitution $r_n = \sqrt{K_1/K_2}$ est indépendant de la vitesse d'impact. Walton propose alors de relier K_2 à la force maximale atteinte durant la compression N_{max} selon :

$$K_2 = K_1 + s N_{max} \quad (1.20)$$

où s est une constante empirique. Ainsi, il obtient un coefficient de restitution variant avec la vitesse d'impact :

$$r_n = \left(sV_i \sqrt{\frac{m^*}{K_1}} + 1 \right)^{-1/2} \quad (1.21)$$

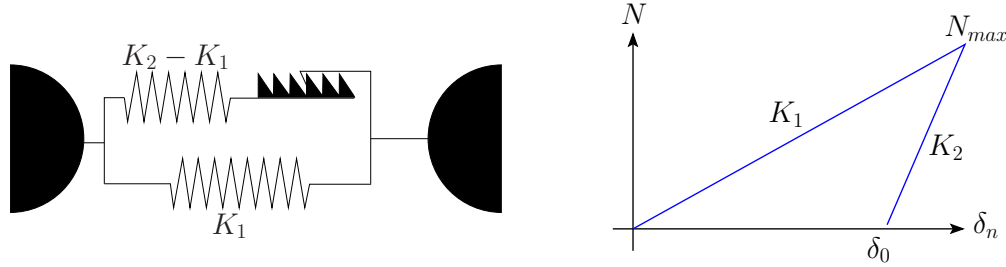


FIGURE 1.13 – Modèle de contact de Walton et relation force-déplacement.

⇒ **Modèle élastoplastique non linéaire :**

[Thornton and Ning, 1998] ont élaboré un modèle élastoplastique non linéaire qui se décompose en trois phases. Tout d'abord une phase de compression purement élastique de type Hertz (*ce*), puis soumis à une force critique N_y (i.e. pression critique p_y , overlap δ_y), ce modèle suppose une compression élastoplastique (*cp*) suivie d'une relaxation élastique (*r*) possédant une déformation résiduelle δ_0 (Fig. 1.14). On a respectivement :

$$N^{ce} = k_n \delta_n^{3/2} \quad (1.22)$$

$$N^{cp} = N_y + \pi p_y R^* (\delta_n - \delta_y) \quad (1.23)$$

$$N^r = k_n^r (\delta_n - \delta_0)^{3/2} \quad (1.24)$$

avec $k_n^r = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^r}$. Durant la décharge, le rayon de courbure est supposé égal à :

$$R^r = \frac{4E^*}{3N_{max}} \left(\frac{2N_{max} + N_y}{2\pi p_y} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (1.25)$$

[Thornton and Ning, 1998] ont prouvé que leur modèle possède un coefficient de restitution diminuant avec la vitesse d'impact :

$$r_n = \left(\frac{6\sqrt{3}}{5} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{V_y}{V_i} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\frac{\left(\frac{V_y}{V_i} \right)}{\left(\frac{V_y}{V_i} \right) + 2\sqrt{\frac{6}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{V_y}{V_i} \right)^2}} \right)^{1/4} \quad (1.26)$$

La vitesse d'impact critique V_y au-delà de laquelle il y a des déformations plastiques est donnée par :

$$V_y = 3.194 \left(\frac{p_y^5 R^{*3}}{E^{*4} m^*} \right)^{1/2} \quad (1.27)$$

[Johnson, 1985] a obtenu une équation équivalente avec un préfacteur différent (10.295). Dans le cas, d'une sphère de densité ρ impactant une surface plane ($R^* = R$, $m^* = m$), la vitesse d'impact critique devient :

$$V_y = 1.56 \left(\frac{p_y^5}{E^{*4} \rho} \right)^{1/2} \quad (1.28)$$

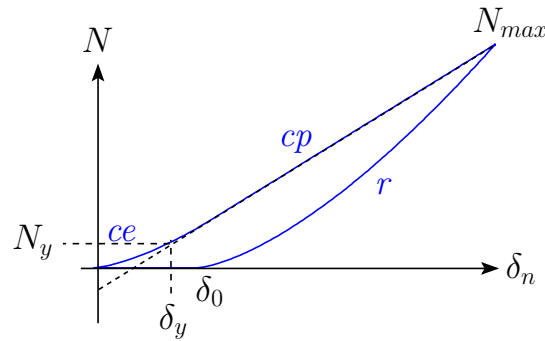


FIGURE 1.14 – Relation force-déplacement avec le modèle de Thornton.

1.4.4 Dissipation par frottement

On a vu que la dissipation de l'énergie s'effectue dans les collisions où ce critère dissipatif est mesuré par le coefficient de restitution. Mais la dissipation de l'énergie peut aussi s'effectuer par frottement entre grains et parois ou entre grains eux-mêmes. Le frottement sec est défini comme l'ensemble des phénomènes qui naissent dans l'interface de contact entre les deux corps, en l'absence de lubrification (c'est-à-dire sans influence du fluide interstitiel). Les mécanismes microscopiques produisant le frottement peuvent être de différentes natures selon les conditions du contact. L'interface est d'ailleurs parfois considérée comme un troisième matériau avec des propriétés mécaniques spécifiques (propriété du troisième corps : [Jordanoff, 2004]).

Les lois macroscopiques empiriques régissant la friction entre deux surfaces solides ont été établies à l'aide d'expériences d'un patin sur un plan incliné (Fig. 1.15).

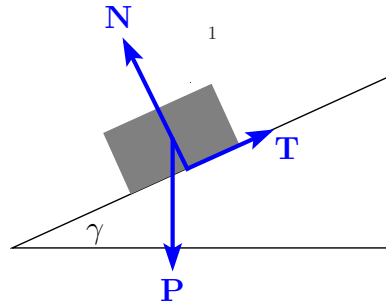


FIGURE 1.15 – Expérience de Coulomb d'un patin sur un plan incliné.

On peut déduire facilement le coefficient de frottement dynamique entre le patin et le plan, en mesurant pour une inclinaison donnée γ , l'accélération constante du patin \ddot{x} sous l'effet de la gravité g :

$$\mu_d = \tan \gamma - \frac{\ddot{x}}{g \cos \gamma} \quad (1.29)$$

Ces expériences ont été réalisées historiquement par Léonard De Vinci [De Vinci, 1495], Guillaume d'Amontons (1699) et Leonhard Euler [Euler, 1748] et ont conduit aux

observations suivantes :

⇒ Partant du repos, il faut une force tangentielle $|T| = \mu_s N$ pour mettre en mouvement le patin, μ_s étant le coefficient de frottement statique.

⇒ Une fois en mouvement, la norme de la force de friction est égale à $|T| = \mu_d N$, μ_d étant le coefficient de frottement dynamique.

⇒ Les coefficients de frottement ne dépendent que de la nature des matériaux en contact.

Ainsi μ_s décrit la résistance à vaincre pour la mise en mouvement du patin, et μ_d décrit la force qu'il faut appliquer pour maintenir une vitesse de glissement constante. On a généralement $\mu_d < \mu_s < 1$. [Coulomb, 1773] a généralisé ces observations aux matériaux granulaires, c'est pourquoi ces observations sont aujourd'hui nommées "lois de Coulomb" (voir le graphe de Coulomb Fig. 1.16). Ces lois sont généralement suffisantes pour décrire la plupart des phénomènes. Cependant elles ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des observations expérimentales, comme notamment :

⇒ Le vieillissement statique :

[Scholz, 1990] a observé que le coefficient de frottement statique augmente de façon logarithmique avec le temps de collage : $\mu_s(t) = c_1 + c_2 \ln(t)$. Cette loi exprime une maturation des contacts, liée à l'augmentation de l'aire de contact par fluage.

⇒ L'affaiblissement cinétique :

Des études ont montré que le coefficient de frottement dynamique diminue avec la vitesse de glissement. Face à cette insuffisance des lois de Coulomb, de nombreuses lois de frottement plus élaborées ont été développées (se référer notamment à [Rabinowicz, 1951]). L'absence de modèle universel montre bien la nature complexe du frottement solide. Précisons néanmoins que les simulations numériques, utilisant généralement des lois de frottement avec μ constant, reproduisent convenablement le comportement mécanique observé dans les expériences.

1.4.4.1 Modélisation DEM d'un impact frottant

Pour décrire le frottement entre deux grains, la simplification $\mu_s \approx \mu_d = \mu$ est souvent réalisée car elle n'introduit qu'un seul paramètre dans les simulations : le coefficient de frottement μ (voir l'approximation DEM Fig. 1.16).

De façon analogue aux forces normales (Eqs. 1.9 + 1.13), la force tangentielle peut être modélisée par un ressort (avec K_t constant, [Cundall and Strack, 1979]) et un amortisseur (avec b_t constant, [Li et al., 2001]) :

$$T = - \min (|K_t \delta_t + b_t \dot{\delta}_t|, \mu |N|) \quad (1.30)$$

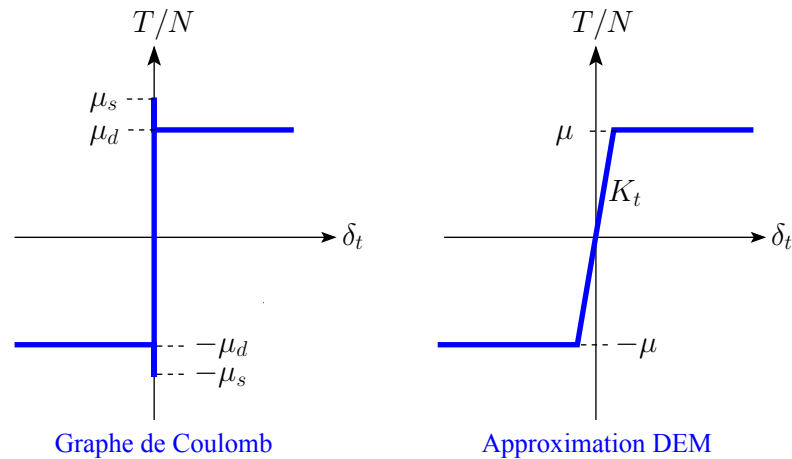


FIGURE 1.16 – Modèle pour la force tangentielle : graphe de Coulomb et simplification DEM.

Ce modèle a deux inconvénients : il ne s'applique que lorsque la force normale est constante (ce qui n'est jamais le cas dans les situations réelles) et il n'y a pas de lien physique pour K_t et b_t . Il n'y a donc pas de méthodes expérimentales pour déterminer ces paramètres. Récemment, [Vu-Quoc et al., 2000a] ont proposé une relation pour la raideur tangentielle K_t , fonction du coefficient de Poisson ν :

$$K_t = \frac{2(1 - \nu)}{2 - \nu} K_n \quad (1.31)$$

Des modèles plus sophistiqués existent. Pour des très faibles déplacements relatifs, les travaux de [Mindlin and Deresiewicz, 1953] permettent de relier macroscopiquement le déplacement relatif à la force tangentielle, pour des forces normales variables. Ce sont des modèles compliqués, basés sur des phénomènes de glissement et de collage au niveau de l'aire de contact entre les deux sphères. Même s'il a été prouvé numériquement que ces modèles sont plus précis, l'implémentation en DEM n'est pas justifiée car elle est trop coûteuse. Les modèles de [Walton and Braun, 1986] (où K_t est fonction de la force normale) et [Tsuji and T. Tanaka, 1992] (basé sur le calcul de Mindlin et Deresiewics) ont été révélés inexacts malgré leur complexité. [Di Renzo and Di Maio, 2004] ont en effet montré expérimentalement que les modèles de [Cundall and Strack, 1979] et [Li et al., 2001], autrement dit un simple ressort et un amortisseur, sont suffisamment précis et performants.

[Le Quiniou et al., 2007] ont montré la difficulté de reproduire le comportement d'une particule sous forces inertielles, en testant différents modèles de force.

1.4.5 Impact oblique

Une collision oblique peut être vue comme la superposition des composantes du mouvement dans la direction normale et tangentielle. Considérons l'impact oblique d'une sphère (de vitesse de translation V_i et de rotation $\dot{\theta}_{z1}$ et d'angle d'incidence

avec la normale θ_i) sur une surface plane (Fig. 1.17). La collision est supposée coplanaire (dans le plan (x', y')).

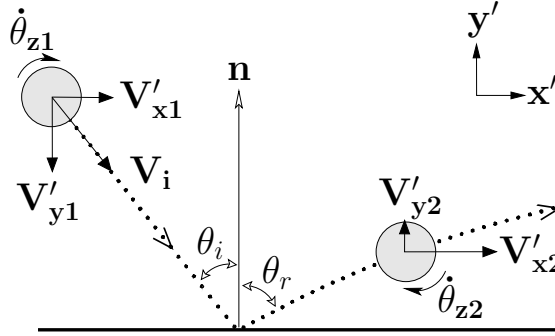


FIGURE 1.17 – Impact oblique d’une sphère sur une surface plane.

On caractérise le choc en indiquant 1 les valeurs avant choc et 2 les valeurs après choc. Les déformations des surfaces, lors de l’impact, sont données par la seconde loi de Newton :

$$\begin{cases} \frac{d^2\delta_x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(V'_{x1} - V'_{x2}) = \frac{T}{m} \\ \frac{d^2\delta_y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(V'_{y1} + V'_{y2}) = -\frac{N}{m} \end{cases} \quad (1.32)$$

Ces déformations des surfaces sont associées à des phénomènes de micro-glislements dans l’aire de contact. Ces phénomènes de micro-glislements ont été étudiés par [Mindlin and Deresiewicz, 1953].

1.4.5.1 Analyse corps rigides

Dans cette partie, on suppose que les déformations des surfaces sont négligeables (théorie des corps rigides). Dans ce cas, deux paramètres suffisent pour caractériser la collision : le coefficient de restitution normale de Newton $r_n = -V'_{y2}/V'_{y1}$ et le coefficient de frottement de Coulomb μ .

Durant la collision, la sphère exerce une impulsion $\mathbf{P} = m(\mathbf{V}'_2 - \mathbf{V}'_1)$ sur la surface. Les vitesses selon (Ox') peuvent être reliées aux vitesses angulaires avant et après choc par :

$$\begin{aligned} \frac{I}{R} \int_1^2 \ddot{\theta} dt &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{P} \\ R(\dot{\theta}_{z2} - \dot{\theta}_{z1}) &= \frac{5}{2}(V'_{x2} - V'_{x1}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $I = \frac{2}{5}mR^2$ est le moment d’inertie d’une sphère homogène.

Les valeurs des vitesses selon (Ox') et des vitesses angulaires après chocs, dépendent du caractère glissant ou roulant (pas de glissement) du contact. On définit la vitesse relative \mathbf{g} du point de contact qui est utile pour connaître la nature du contact :

$$\mathbf{g} = \mathbf{V}' - R\dot{\theta} \wedge \mathbf{y}' \quad (1.34)$$

autrement dit $g_{x1} = V'_{x1} - R\dot{\theta}_{z1}$, $g_{x2} = V'_{x2} - R\dot{\theta}_{z2}$, $g_{y1} = V'_{y1}$ et $g_{y2} = V'_{y2}$.

⇒ **Contact roulant**

Si l'angle d'incidence est inférieur à un angle critique $\theta_i < \theta_c = \arctan\left(\mu \frac{1+r_n}{1-r_t}\right)$, alors il n'y a pas de déplacement relatif du point de contact $g_{x2} = 0$, et le contact est roulant ($T \leq \mu_s N$) (r_t est le coefficient de restitution tangentiel au centre de masse).

Après choc, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} V'_{x2} &= \frac{5}{7}V'_{x1} + \frac{2}{7}R\dot{\theta}_{z1} \\ R\dot{\theta}_{z2} &= V'_{x2} \end{cases} \quad (1.35)$$

⇒ **Contact glissant**

Si l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique $\theta_i > \theta_c$, la force tangentielle suit la loi de Coulomb ($T/N = \mu$) i.e. le rapport des impulsions (impulse ratio) P_x/P_y est égal au frottement dynamique de Coulomb μ .

Ceci permet d'obtenir une relation pour le coefficient de restitution tangentiel au centre de masse $r_t = V'_{x2}/V'_{x1}$ [Sondergaard et al., 1990] :

$$r_t = 1 - \mu(1 - r_n)/\tan \theta_i \quad (1.36)$$

Après choc, on obtient :

$$\begin{cases} V'_{x2} &= V'_{x1} - \mu(1 + r_n)V'_{y1} \\ R\dot{\theta}_{z2} &= R\dot{\theta}_{z1} + \frac{5}{2}\mu(1 + r_n)V'_{y1} \end{cases} \quad (1.37)$$

1.4.5.2 Effet de la compliance tangentielle

La théorie des corps rigides à deux paramètres n'est pas suffisante pour décrire les observations de [Maw et al., 1976] et de [Johnson, 1982]. Lors d'un contact roulant (angle d'incidence proche de la normale), des angles de rebonds négatifs au niveau du point de contact ont été observés. Pour reproduire ce phénomène, des effets élastiques ont été introduits dans le contact tangentiel à travers le paramètre κ ($1/\kappa$ étant la compliance élastique) qui est défini comme le rapport entre les raideurs tangentielle et normale [Mindlin, 1949] :

$$\kappa = \frac{K_t}{K_n} = \frac{2(1 - \nu)}{2 - \nu} \quad (1.38)$$

La méthode de [Maw et al., 1976] permet d'identifier le mouvement du point de contact dans la direction (Ox'). Elle suppose des déformations de surfaces négligeables. Toutefois ce modèle semble être aussi valide lorsque des petites déformations élastiques ou plastiques sont présentes [Kharaz et al., 2001]. Les résultats sont décrits à partir de deux paramètres adimensionnés : χ (une modification du rayon de giration Λ ($\Lambda^2 = \frac{I}{mR^2}$)) et de $\psi_{1,2}$ (les angles de contact adimensionnés) :

$$\chi = \frac{\kappa}{2} \left(1 + \frac{1}{\Lambda^2}\right) \quad (1.39)$$

$$\psi_{1,2} = \frac{\kappa g_{x1,2}}{\mu g_{y1}} \quad (1.40)$$

Pour une sphère homogène $1 + \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{7}{2}$.

Le modèle, validé expérimentalement par Maw et al, est valable pour des impacts de matériaux identiques. Les études par différences finies de [Thornton and Yin, 1991] ont également confirmé le modèle.

Les résultats numériques obtenus par [Maw et al., 1981] pour deux matériaux identiques ($\nu = 0.3, \chi = 1.44$) sont représentés Fig. 1.18 et comparés à la théorie des corps rigides.

Les différentes régions correspondent à différentes natures du contact :

- Région I ($\psi_1 \leq 1$) : le contact est roulant mais des micro-glissements peuvent apparaître,
- Région II ($1 < \psi_1 < 4\chi - 1$) : le contact passe par des phases glissantes et roulantes,
- Région III ($\psi_1 \geq 4\chi - 1$) : le contact est glissant.

Lorsque ψ_2 est négatif, cela signifie que la vitesse selon (Ox') du point de contact a changé de signe (g_{x2} et g_{x1} ont des signes opposés). Des effets élastiques dans le contact tangentiel ont ramené la particule à sa position initiale.

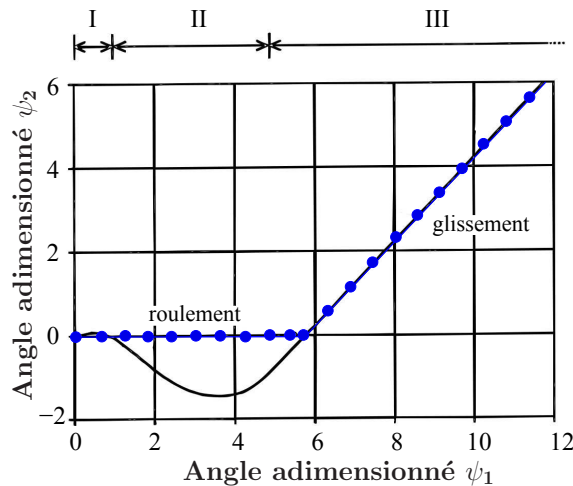


FIGURE 1.18 – Résultats numériques de [Maw et al., 1981] pour $\chi = 1.44$ (ligne continue) et approximation par la théorie des corps rigides (points).

La théorie des corps rigides est valide lorsque le contact est glissant ($\psi_1 \geq 4\chi$). [Gorham and Kharaz, 2000] estiment que les caractéristiques des rebonds sont correctement décrites par la théorie corps rigides, si l'angle d'incidence avec la normale est supérieur à 30° .

L'approche de Maw a été établie pour des impacts de matériaux identiques. [Johnson, 1985] a étendu cette théorie pour des matériaux différents en proposant une nouvelle définition du paramètre κ avec $G \equiv E/2(1 - \nu)$ le module de rigidité :

$$\kappa = \frac{\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2}}{\frac{1-\nu_1/2}{G_1} + \frac{1-\nu_2/2}{G_2}} \quad (1.41)$$

où les indices 1 et 2 correspondent respectivement aux deux matériaux.

1.4.5.3 Caractérisation des paramètres mécaniques

[Foerster et al., 1994] puis [Lorenz et al., 1997] ont simplifié le modèle de Maw, en se basant sur le modèle à trois paramètres de [Walton, 1988], afin de proposer une méthode de caractérisation expérimentale des paramètres mécaniques.

Le modèle de [Walton, 1988] est un modèle simplifié d'impact, basé sur trois paramètres constants :

- le coefficient de restitution normal de Newton : $r_n = \frac{V'_{y2}}{V'_{y1}}$,
- le coefficient de frottement de Coulomb : $\mu = \frac{P_x}{P_y}$ en présence de glissement,
- et le coefficient de restitution tangentielle au point de contact : $\beta = \frac{g_{x2}}{g_{x1}}$.

A la différence du modèle de [Maw et al., 1976], le modèle de Walton implique que le contact soit glissant ou roulant tout au long du choc.

Ainsi, [Foerster et al., 1994] ont enrichi la théorie des corps rigides, en intégrant la notion de coefficient de restitution tangentielle (Fig. 1.19). Ils proposent une nouvelle définition des angles adimensionnés :

$$\Psi_{1,2} \equiv \frac{g_{x1,2}}{g_{y1}} \quad (1.42)$$

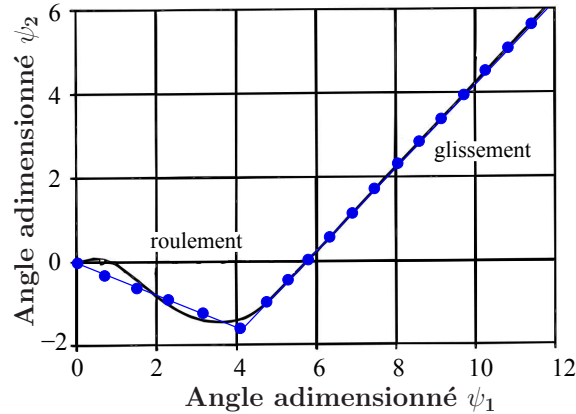


FIGURE 1.19 – Résultats numériques de [Maw et al., 1981] pour $\chi = 1.44$ (ligne continue) et approximation par le modèle de [Foerster et al., 1994] (points).

Comme les phases glissantes et roulantes ne peuvent pas coexister, la discontinuité de la courbe $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ permet de distinguer les deux types de collisions :

⇒ les contacts glissants. Les Eqs. 1.37 fournissent directement la relation suivante :

$$\Psi_2 = \Psi_1 - \frac{7}{2}(1 + r_n)\mu \cdot \text{sgn}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}') \quad (1.43)$$

⇒ les contacts roulants, modélisés par l'équation :

$$\Psi_2 = -\beta\Psi_1 \quad (1.44)$$

Ainsi, expérimentalement, en traçant $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ on peut mesurer une valeur de β et μ .

$$\begin{cases} \beta &= -\frac{\Psi_2}{\Psi_1} \\ \mu &= \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{7/2(1+r_n)} \end{cases} \quad (1.45)$$

L'équation sur β est valable quel que soit le régime de la particule :

- si $\beta = 0$, le contact est roulant $g_{x2} = 0$,
- si $\beta = -1$, la surface est non frottante $g_{x2} = g_{x1}$,
- si $\beta = 1$, la particule revient à son point de départ après impact $g_{x2} = -g_{x1}$,
- si $-1 < \beta < 1$ et $\beta \neq 0$, de l'énergie est dissipée, soit par frottement et/ou soit par inélasticité lors du choc.

L'impulsion évolue en deux phases :

- si le contact est roulant, l'impulsion augmente linéairement,
- si le contact est glissant, l'impulsion est sensiblement constante et égale au frottement μ :

$$\mu = \frac{2(1 + \beta)}{7(1 + r_n)} \Psi_1 \quad (1.46)$$

1.4.5.4 Effet de la vitesse angulaire des particules

La vitesse angulaire avant impact $R\dot{\theta}_{z1}$ est prise en compte dans les différents modèles [Maw et al., 1981] et [Foerster et al., 1994]. Toutefois les premières comparaisons expérimentales ont toutes été réalisées pour des vitesses angulaires $R\dot{\theta}_{z1}$ nulles. Les mesures des vitesses angulaires des particules ont pu être entreprises qu'après l'avènement de caméras suffisamment performantes. [Dong and Moys, 2006] sont les premiers à étudier les collisions d'une bille d'acier avec une vitesse angulaire initiale non nulle sur un mur d'acier chromé. Ils déduisent que la théorie de Maw ne s'applique pas aux impacts avec vitesse angulaire initiale : les angles de rebonds au point de contact ψ_2 ne sont pas forcément négatifs, lors du roulement, contrairement à ce qui avait été observé précédemment. Par ailleurs, le coefficient de restitution tangentiel au point de contact n'est pas constant comme prédit par [Walton, 1988].

Durant sa thèse, [Ning, 1995] a réalisé des simulations aux éléments discrets pour mesurer l'influence de la vitesse angulaire initiale sur les caractéristiques du rebond. [Thornton, 2009], a repris ces simulations, en introduisant le coefficient de Poisson ν et le paramètre Φ_1 , rapport entre la vitesse angulaire et la vitesse normale d'impact :

$$\Phi_1 = R\dot{\theta}_{z1}/g_{y1}$$

Pour obtenir une superposition des courbes, Thornton représente :

$$\psi_2 = f\left(\frac{V'_{x1}}{g_{y1}\nu} + \frac{\Phi_1}{\mu}\right)$$

Il souligne ainsi l'importance du rapport Φ_1 qui est toutefois déjà pris en compte dans le modèle de [Foerster et al., 1994].

1.4.6 Impact de particules non sphériques

Les collisions de particules non sphériques engendrent des phénomènes extrêmement compliqués qui modifient les paramètres mécaniques de contact.

1.4.6.1 Rugosité de surface

L'état de surface des sphères n'est jamais parfaitement lisse : une rugosité existe à l'échelle microscopique. Cette rugosité joue un rôle crucial dans le contact entre particules. Le premier effet de la rugosité est de favoriser une déformation plastique des particules, puisque le contact s'opère en un nombre limité d'aspérités sur lesquelles se concentrent les contraintes. La déformation plastique des aspérités donne alors lieu à une dissipation d'énergie.

Le deuxième effet de la rugosité est le développement de frottement entre les particules, créé d'une part, par des phénomènes d'adhérence et d'autre part, par le cisaillement des aspérités imbriquées.

[Lorenz et al., 1997] ont appliqué les Eqs. 1.43 et 1.44 pour des sphères irrégulières, quasi-sphériques. Leurs mesures ont montré de bons accords avec le modèle de Walton. Toutefois, ils soulignent que le coefficient de restitution de Newton, ne peut pas être considéré constant pour des particules non sphériques. Par ailleurs, comme le frottement dépend essentiellement de l'état et de l'histoire de la surface, ils recommandent de mesurer le frottement sur des particules ayant déjà séjournées un temps dans le flux granulaire.

Des sphères sont généralement utilisées dans la modélisation car le temps de calcul est minime en raison de leur symétrie. Cependant, des flux denses, modélisés par des sphères libres de rotation, ne décrivent pas correctement le comportement mécanique des géo-matériaux, à cause du roulement excessif et des dissipations sous estimées. Différentes alternatives ont été développées pour remédier à ce problème : soit la modélisation de formes complexes, soit le blocage des degrés de liberté de rotation.

1.4.6.2 Modélisation DEM de formes complexes

Pour modéliser des formes complexes, plusieurs possibilités existent :

- soit une représentation analytique de la forme du grain. Des algorithmes ont été développés pour des ellipsoïdes ([Ting et al., 1993], [Vu-Quoc et al., 2000b]) et des superquadriques [Williams and Pentland, 1992] Fig. 1.20.
- soit une représentation par des polyèdres convexes. Des modélisation DEM ont été proposées par [Cundall, 1988], [Pöschel and Buchholtz, 1995], [Azéma et al., 2007]. Les sommets des polyèdres posent toutefois des problèmes pour appliquer les forces de contacts.

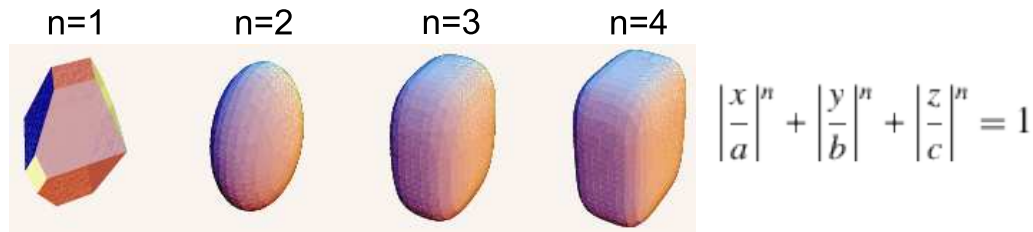


FIGURE 1.20 – Illustration d’ellipsoïdes de degré 2 et de superquadriques de degré supérieur à 2.

D’autres auteurs ont choisi de grouper plusieurs sphères entre elles (ou d’autres éléments comme des cylindres) pour former un cluster : par exemple [Chareyre, 2003], [Salot et al., 2009], [Tijskens, 2006] Fig. 1.21. Le cluster est considéré comme un corps rigide, c’est-à-dire que la distance entre les sphères n’est pas modifiée. Cette méthode permet également de prendre en compte la rugosité de surface des sphères. Par exemple, il est possible de grouper une sphère de diamètre important avec des sphères de faibles diamètres de façon à modéliser une sphère quasi-sphérique. Il faut noter que plus il y a aura de sphères dans un cluster et plus la recherche des contacts sera longue.

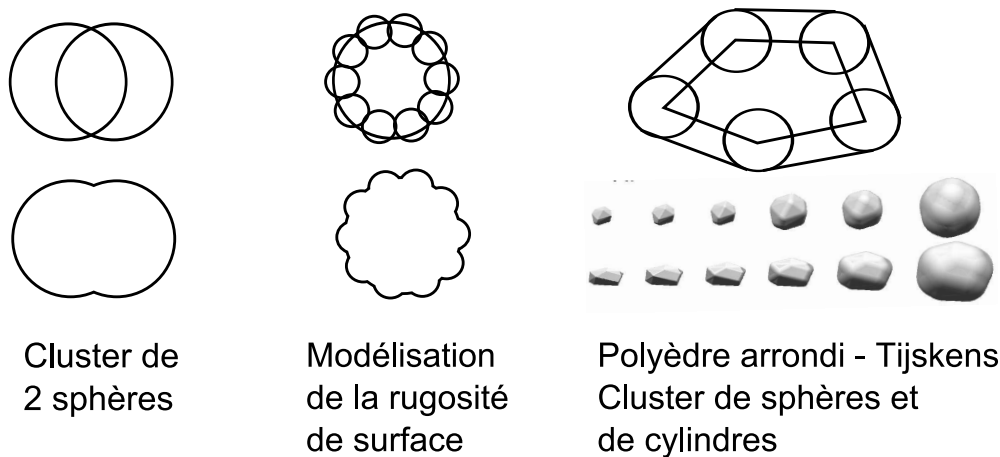


FIGURE 1.21 – Illustration de différents types de cluster. Le polyèdre arrondi de [Tijskens, 2006] (créé par des sphères au coin d’un polyèdre) permet de modéliser toutes sortes de formes en variant le polyèdre et le rayon des sphères.

Ces différentes méthodes ont l’inconvénient d’avoir un temps de calcul nettement plus important que pour des simples sphères et/ou une lourde mise en œuvre. C’est pourquoi pour garder la simplicité des sphères, des méthodes basées sur le blocage des degrés de liberté de rotation se sont développées.

1.4.6.3 Modélisation DEM par blocage des rotations

Dans le cas des modélisations DEM classiques, les sphères se touchent au niveau d’un point de contact. Ainsi chaque grain peut rouler et glisser à côté de son

voisin. Or, pour des particules réelles, le contact se fait au niveau de surfaces et non de points (Fig. 1.10). Ainsi des micro-déformations des surfaces en contact sont nécessaires avant la mise en rotation des grains, d'où un effet de résistance au roulement.

Pour modéliser ce phénomène à l'aide de sphères, [Iwashita and Oda, 1998], [Oda et al., 1997], [Ji et al., 2009] ont introduit un moment de roulement créé par la force normale et qui retarde la mise en rotation des grains. Dans un premier temps, le moment élastique est une fonction linéaire de la rotation relative θ entre deux éléments :

$$M_r = \min(K_r \theta, \mu_r RN) \quad (1.47)$$

où K_r est la raideur de roulement en [N.m] :

$$K_r = R^2 K_t \quad (1.48)$$

Dans un second temps, après la mise en rotation des deux éléments, le moment de roulement tend vers une valeur limite. Cette dernière est fonction du frottement de roulement μ_r et de la norme de la force normale appliquée aux deux éléments (Fig. 1.22). Ceci est l'analogue du critère de Coulomb (cf. Fig. 1.16). Cette méthode permet de retarder la mise en rotation des grains de façon analogue au critère de Coulomb qui retarde la mise en translation des grains. [Iwashita and Oda, 1998], [Oda et al., 1997] montrent l'importance de la résistance au roulement sur des tests triaxiaux.

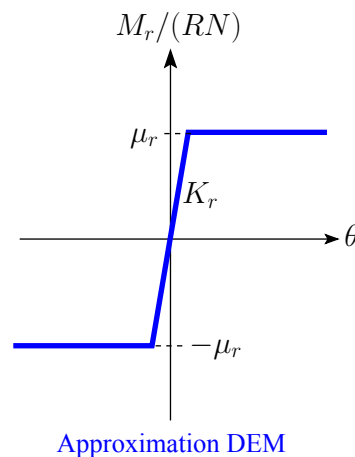


FIGURE 1.22 – Modèle DEM du roulement de contact, analogue au critère de Coulomb (cf. Fig. 1.16).

Le mouvement angulaire du grain est alors déterminé d'une part, par les forces tangentielles appliquées $T < 0$, et d'autre part, par le moment de roulement. L'accélération angulaire est obtenue à partir de l'équation d'Euler où on ajoute le moment de roulement :

$$I\ddot{\theta} = \sum RT + \sum M_r \quad (1.49)$$

Phénoménologiquement, en modifiant la valeur de μ_r , on peut modifier la forme de la particule :

⇒ Lorsque $\mu_r = 0$, le grain est en roulement libre, on modélise ainsi des *sphères*.

⇒ Si $0 < \mu_r < \mu$, la rotation de la particule n'est pas immédiate. On modélise des *particules de forme proche de sphères* qui, dans un premier temps, ne peuvent pas rouler à cause de l'encombrement stérique dû aux voisins (§1.3.2.4). Puis dans un deuxième temps, une fois les surfaces des corps en contact déformées, les particules atteignent un régime de roulement.

⇒ Si μ_r est égal au frottement de Coulomb μ , la rotation du grain est bloquée ($\sum R|T| = \sum M_r$ et donc $I\ddot{\theta} = 0$). Avec ce frottement de roulement, on modélise des *particules de formes éloignées de sphères* qui ne peuvent pas rouler. En effet, on a vu précédemment, que les particules ayant une excentricité grande devant 1 présentent une rotation très limitée. Lorsque $\mu_r = \mu$, on retrouve la méthode extrême de [Calvetti et al., 2003] qui consiste à bloquer les rotations de sphères.

1.4.6.4 Caractérisation des paramètres mécaniques

[Sommerfeld and Huber, 1999] ont proposé une méthode pour mesurer les paramètres mécaniques de particules non sphériques. Cette méthode est une extension de la méthode de [Maw et al., 1981].

Sommerfeld introduit la notion de surface virtuelle. Il suppose que le rebond d'une particule non sphérique sur une surface plane peut être approximé par le rebond d'une sphère sur une surface inclinée d'un angle ϕ (cf. Fig. 1.23).

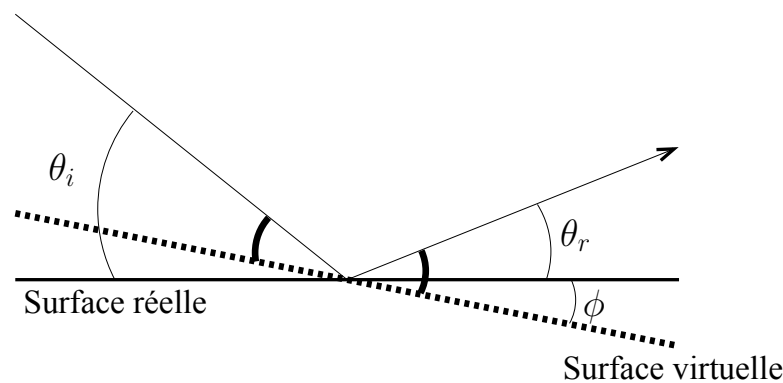


FIGURE 1.23 – Schématisation du modèle de surface virtuelle de [Sommerfeld and Huber, 1999]. La surface réelle est ici inclinée négativement de ϕ .

L'angle d'impact θ_i est alors corrigé par $\theta_i \pm \phi$. Pour un échantillon de particules de même matériau, l'angle ϕ suit une loi de distribution stochastique de moyenne nulle et d'écart type fixé. En observant la figure 1.23, il est évident qu'il faut avoir

$\theta_i > \phi$ pour que la collision ait lieu avec la surface virtuelle. Par ailleurs, pour des faibles inclinaisons ($\theta_i < 10^\circ$), l'angle ϕ tend vers des inclinaisons positives, ce phénomène est appelé "Shadow effect". Sommerfeld a testé sa méthode pour des collisions de particules de quartz sur des plaques d'acier.

Les valeurs des paramètres mécaniques mesurées sur la surface réelle (r_m et μ_m) doivent ensuite être corrigées (r_n et μ), vis-à-vis de la surface virtuelle inclinée de ϕ à partir des relations suivantes [Li et al., 2000] :

$$r_n = r_m \frac{\sin(\theta_r - \phi) / \sin \theta_r}{\sin(\theta_i + \phi) / \sin \theta_i} \quad (1.50)$$

$$\mu = \frac{\mu_m + \tan \phi}{1 - \mu_m \tan \phi} \quad (1.51)$$

1.5 Conclusions

Notre description des milieux granulaires nous a amené à distinguer trois états différents en fonction de la sollicitation : le régime quasi-statique, le régime dense et le régime collisionnel. Les transitions entre régimes restent encore floues et font l'objet de recherches actives. La communauté scientifique s'est fortement investie sur la problématique des écoulements denses de grains secs, ces dernières années. Ainsi, plusieurs géométries d'écoulement ont fait l'objet d'études expérimentales et d'études par simulations numériques. Les écoulements granulaires étudiés sont généralement stationnaires et les contraintes imposées sont généralement limitées à la gravité.

Par ailleurs, pour un écoulement de grains secs, les contacts entre grains constituent les mécanismes élémentaires de transferts de quantité de mouvement, et de dissipation d'énergie au sein de l'écoulement. Nous avons ainsi présenté quelques lois de contact simplifiées et robustes. Sur le front de la modélisation, de nombreuses pistes très intéressantes ont été proposées par la communauté scientifique, pour prendre en compte les différentes sources de dissipations d'énergie (frottement, viscosité, plasticité...) et les formes variées des particules. Notre revue bibliographique a permis également d'aborder quelques méthodes expérimentales qui nous serviront à mesurer les paramètres mécaniques de nos particules (coefficients de restitution, coefficient de frottement).

L'originalité de l'étude appliquée à l'épandeur centrifuge est due aux champs de forces extérieures imposés, qui sont liés à des contraintes inertielles et non seulement à la gravité. Le comportement rhéologique d'un matériau sous force centrifuge demeure largement méconnu et constitue un domaine de recherche relativement vierge. Les caractéristiques définies dans le régime dense, tant à l'échelle macroscopique (frottement effectif, compacité, dilatance) que microscopique (réseau de contact, coordination, mobilisation du frottement, propagation des rotations) vont nous servir à discuter de la loi de comportement de notre écoulement. Les premiers travaux de modélisation analytique ont été réalisés dans les années

60, par [Patterson and Reece, 1962]. [Inns and Reece, 1962] ont étendu le modèle au cas où le point de chute est éloigné de l'axe de rotation. Ils ont montré que leur modèle est performant dans le cas de particules sphériques mais qu'il est moins performant pour des particules de formes géométriques irrégulières. Dans la suite, les travaux de [Griffis et al., 1983], montrent également de grosses différences entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés pour des particules de formes irrégulières. [Colin, 1997] a réalisé un travail expérimental conséquent montrant des différences d'écoulement entre un flux d'engrais sphérique et un flux d'engrais de forme irrégulière. Les études récentes par modélisations discrètes de [Van Liedekerke, 2007], mettent en évidence que les valeurs numériques pour des engrais de forme irrégulière sont généralement supérieures aux valeurs expérimentales. Ils attribuent cette différence à une surestimation du frottement et introduisent des dépendances en vitesse du frottement.

Par ailleurs, sur l'épandeur centrifuge, on remarque que les grains passent d'un régime dense à un régime dilué (cf. Fig. 1.24). Ces observations vont motiver les modèles rhéologiques et les analyses micromécaniques des chapitres suivants. Nous souhaitons tout d'abord caractériser un écoulement dilué puis un écoulement dense. Dans chaque régime, nous commencerons par étudier le cas de particules sphériques avant de se consacrer aux particules de formes irrégulières.

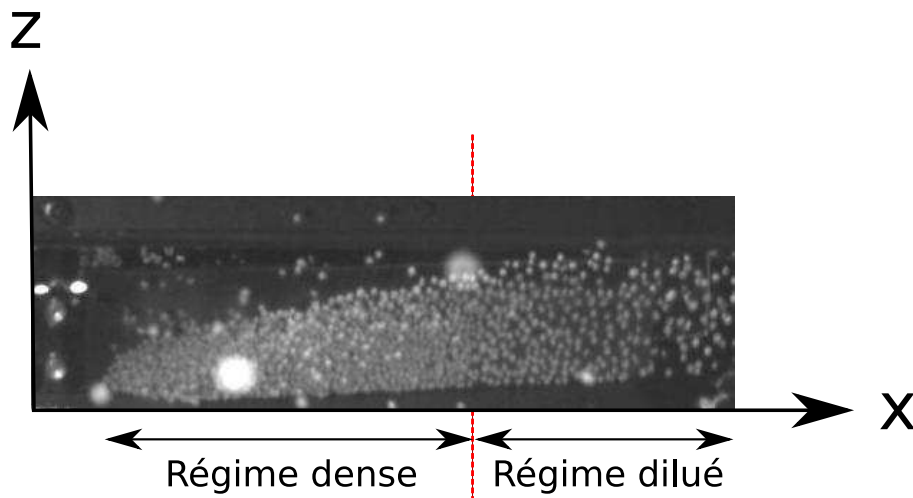


FIGURE 1.24 – Photographie d'un écoulement d'Ammonitrates mettant en évidence deux régimes distincts : un régime d'écoulement dense puis un régime d'écoulement dilué.

Chapitre 2

Configurations expérimentales

Ce chapitre présente tout d'abord les *trois matériaux granulaires* utilisés dans nos expérimentations : des particules modèles parfaitement sphériques, des particules d'engrais d'Ammonitrate quasi-sphériques et des particules de chlorure de potassium (KCl) de formes irrégulières. Pour ces trois matériaux, nous avons mesuré leurs paramètres géométriques (rayon, masse et coefficient de raideur normale). Par ailleurs, pour quantifier l'influence des paramètres mécaniques dans les expérimentations, nous avons fait varier la surface de contact entre les particules et la paroi en modifiant le revêtement de la paroi. Pour tous les couples matériau/paroi, nous avons mesuré expérimentalement les paramètres mécaniques correspondant (coefficients de restitution et coefficient de frottement). Nous utilisons les différentes techniques expérimentales présentées dans le chapitre 1 : méthode de Coulomb, méthode de Foerster et méthode de Sommerfeld.

La seconde partie du chapitre présente les *deux configurations expérimentales* développées sur le site de Montoldre pour caractériser un écoulement centrifuge. Pour filmer avec précision les trajectoires des particules, le CEMAGREF s'est doté d'une caméra rapide. Le premier dispositif enregistre la trajectoire en 2 dimensions d'une particule le long de la paroi. Le deuxième dispositif est innovant et permet d'accéder à des informations en trois dimensions sur l'écoulement le long de la pale. On explicite les deux protocoles expérimentaux et les techniques de mesure utilisées pour caractériser des écoulements sous contraintes inertielles.

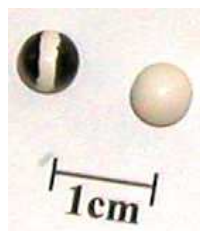
2.1 Matériaux utilisés

2.1.1 Particules modèles en plastique

Les particules utilisées sont des billes plastiques PVC pour pistolets à billes que l'on trouve dans les armureries (de type Cybergun). Ces billes blanches ont pour caractéristiques : un diamètre $2R = 5.93 \pm 0.02\text{mm}$, une densité $\rho = 1768\text{kg/m}^3$ et une masse $m = 0.2\text{g}$ (Fig. 2.1(b)). Ces particules sont peintes partiellement en noir, de manière à laisser une bande centrale blanche pour indiquer leurs orientations pour l'étude à flux dilué (Fig. 2.1(a)). On suppose que la peinture ne modifie pas

les caractéristiques du choc avec la paroi.

Une étude similaire a été explorée par [Bourrier, 2008] pour indiquer l'orientation d'objets en mouvement. Il a utilisé une méthode à base de trois points colorés pour repérer l'orientation de blocs de pierre. Cette méthode n'est applicable que si l'objet à détecter à une faible vitesse de rotation.



(a)

| Caractéristiques | Billes plastiques |
|---|-------------------|
| diamètre moyen $2R$ (mm) | 5.93 ± 0.02 |
| densité ρ (kg/m^3) | 1768 ± 10 |
| masse m (g) | 0.2 |

(b)

FIGURE 2.1 – Photographie (avec et sans peinture) et caractéristiques des billes modèles en plastique.

2.1.2 Engrais minéraux

Nous avons utilisé des engrais minéraux solides. Selon la législation (AFNOR, NF U42-041, 2000), tout produit dont une des teneurs en azote N, phosphore P ou potassium K dépasse 3% sur le produit brut, doit être considéré comme un engrais. Les engrais utilisés dans cette étude ont été fournis par la Coopérative Agricole Céréales Approvisionnement (Coopaca) à Tréteau en Allier.

2.1.2.1 Particules d'engrais d'Ammonitrate

Les fertilisants minéraux azotés sont issus de l'industrie chimique. Ils sont pour la plupart produits à partir de l'Ammoniac (NH_3) obtenu par synthèse de l'azote de l'air et de l'hydrogène du gaz naturel. Les fertilisants azotés les plus utilisés en France sont les **Ammonitrates** (Fig. 2.2) en raison de leur teneur élevée en azote, de leur bonne conservation, de leur souplesse d'emploi, et de leur efficacité agronomique due à leur composition mi-nitrique (50% d'azote issu de l'acide nitrique, immédiatement disponible pour la plante) et mi-ammoniacale (50% d'azote issu de l'ammoniac, disponible à plus long terme). Les Ammonitrates existent à moyen dosage, contenant de 26 à 27,5% d'azote, ou à haut dosage titrant de 33 à 34,5% d'azote. Les particules d'Ammonitrate sont obtenues par solidification du produit fondu après sa pulvérisation dans un courant d'air ou dans un fluide. Ces particules ont une **forme quasi-sphérique**.

Les caractéristiques des particules sont répertoriées Fig. 2.3(b). La granulométrie a été mesurée par un système de tamis.



FIGURE 2.2 – Photographie d'un échantillon d'Ammonitrate 33.5% N (NH_4NO_3) (Coopaca).

De la même façon, l'engrais initialement blanc est peint en noir de façon à laisser une bande blanche pour indiquer son orientation (Fig. 2.3(a)). Pour faciliter la détection des particules dans les expérimentations à flux dilué, celles-ci ont été sélectionnées : on a choisi les particules les plus grosses et les plus sphériques, d'où un écart-type relativement faible sur le diamètre cf. Fig. 2.3(b). Ces particules sont caractérisées par une rugosité de surface i.e. on observe sur la figure 2.3(a), des bosselures et des cratères au niveau de la surface de la particule.



(a)

| Caractéristiques | Grains d'Ammonitrate |
|------------------------------------|----------------------|
| diamètre des grains 2R (mm) | 3.55 ± 1.83 |
| diamètre des grains choisis (mm) | 4.6 ± 0.4 |
| densité (g/cm^3) | 0.92 ± 0.02 |
| masse m (g) | 0.021 |

(b)

FIGURE 2.3 – Photographie (avec et sans peinture) et caractéristiques d'une particule d'Ammonitrate.

2.1.2.2 Particules d'engrais de KCl

Les fertilisants minéraux potassiques sont issus de gisements naturels de mélanges de sels. Les sels bruts les plus courants à l'état naturel sont la sylvinite (chlorure de potassium et chlorure de sodium), la carnallite (chlorure de potassium et chlorure de magnésium) et la kaïnite (chlorure de potassium et sulfate de magnésium). C'est à partir de ces sels que sont préparés les engrais potassiques. La fabrication des engrais potassiques est effectuée par compactage sous forte pression. L'engrais, formé de petits fragments de 1 à 5 mm, est qualifié d'**engrais facetté**.

On utilise le Chlorure de Potassium à 60% (KCl) (Fig. 2.4). Les caractéristiques des grains sont répertoriées Fig. 2.5(b). La granulométrie a été mesurée par un système de tamis. Comme pour les Ammonitrates, les particules les plus grosses ont

été sélectionnées, d'où un écart-type plus faible sur le diamètre cf. Fig. 2.5(b).

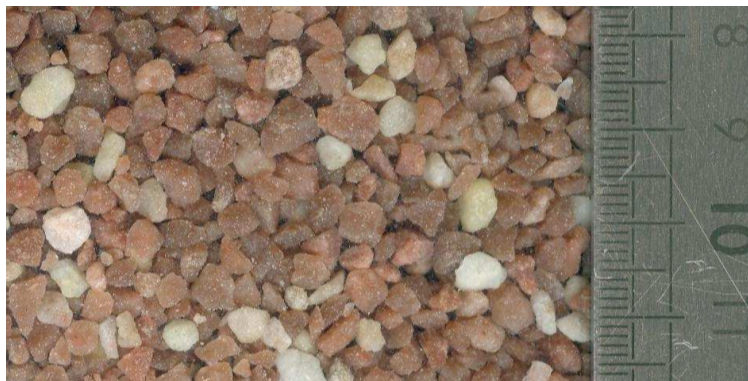


FIGURE 2.4 – Photographie d'un échantillon de KCl à 60% (Coopaca).

Un grain de KCl (Fig. 2.5(a)) peut être caractérisé par un polyèdre dont le nombre et la dimension des côtés est variable et l'épaisseur (la hauteur du polyèdre) est relativement faible.



(a)

| Caractéristiques | Grains de KCl |
|------------------------------------|------------------|
| diamètre moyen $2R$ (mm) | 2.92 ± 2.21 |
| diamètre des grains choisis (mm) | 4.5 ± 1.0 |
| densité (g/cm^3) | 1.074 ± 0.01 |
| masse m (g) | 0.014 |

(b)

FIGURE 2.5 – Photographie et caractéristiques d'une particule de KCl.

2.1.3 Comportement élastique des matériaux

Pour caractériser nos trois particules, on a mesuré leur réaction sous compression. A partir d'un texturomètre (LLOYD instruments TA500), on a appliqué une compression sur nos particules dans un régime quasi-statique ($\approx 1\text{mm}/\text{min}$), pour une force F allant jusqu'à $250\text{N} \pm 2\text{N}$. Les expériences sont répétées 10 fois. A cette force maximale, on a observé des déformations irréversibles de la particule plastique. La force maximale appliquée sur les engrais est plus faible $F < 90\text{N}$, car les grains d'engrais atteignent rapidement leur seuil de rupture. On a observé la rupture des Ammonitrates pour une force d'environ 60N . Le seuil de rupture des KCl est difficilement estimable étant donnée leur grande variabilité de forme. La figure 2.6 représente la courbe typique, de la force appliquée en fonction de la compression δ . La partie zoomée du graphe correspond aux compressions inférieures à 10% du rayon de la particule.

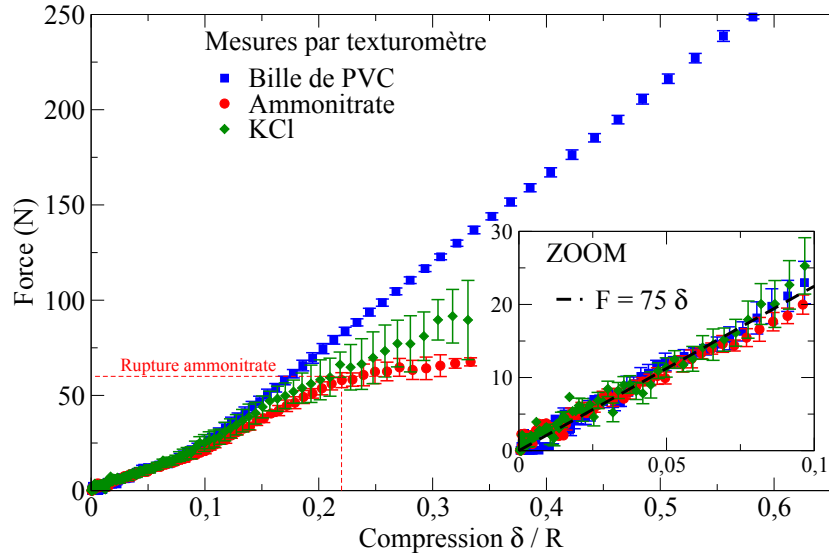


FIGURE 2.6 – Force appliquée en fonction de la compression résultante. Comparaison des particules plastiques, d’Ammonitrate et de KCl. Zoom sur les faibles déformations ($\delta < 0.1R$, $R=3\text{mm}$) et interpolation par une loi linéaire.

(i) On remarque que la variation de la compression ne tend pas vers la loi de [Hertz, 1896] en puissance $3/2$ de la compression. La variation de la compression s’approche d’une loi linéaire comme souvent décrite dans les modélisations d’éléments discrets [Cundall and Strack, 1979]. Ceci est probablement causé par les fractures dans les matériaux. La courbe $F = f(\delta)$ peut être interprétée comme deux droites. En dessous d’une compression critique ($\delta^* \approx 0.1R$), les déformations sont réversibles et au-dessus de δ^* , les déformations sont irréversibles. Ceci est probablement dû aux caractéristiques intrinsèques des matériaux. Au-delà de la compression critique, pour une force donnée, les grains d’engrais se déforment d’une quantité plus importante que les billes plastiques.

(ii) En se limitant aux déformations réversibles, on observe que les trois particules ont le même comportement élastique. On peut déduire une loi de variation de la compression en fonction de la force appliquée :

$$F = K_n \delta$$

avec K_n le coefficient de raideur de l’ordre de $K_n = 75 \cdot 10^3 \text{N/m}$.

2.1.4 Les pales utilisées

Les pales d’épandeur, d’épaisseur 2mm, sont en acier inoxydable pour les protéger des engrais très corrosifs et abrasifs.

On a choisi d’utiliser des pales en acier, avec des revêtements différents (peinture, sablage, vernis, caoutchouc), pour modifier les caractéristiques d’interaction

bille/pale sans changer la forme des particules. Voici les différentes pales :

- ⇒ P1 : pale en acier peinte (peinture technique Julien noir),
- ⇒ P2 : pale en acier sablée (sablage réalisé par l'entreprise Dourdouille Rodolphe, Montoldre),
- ⇒ P3 : pale en acier vernie (vernis bateau astral bois, brillant incolore),
- ⇒ P4 : pale en acier inoxydable poncée (ponceuse orbitale Ingersoll Rand et papier de verre P100),
- ⇒ P5 : pale en acier recouverte d'un caoutchouc de 5mm d'épaisseur.

La pale P4 est une pale sans revêtement.

La pale P2 possède une rugosité de surface. C'est aussi la seule pale sans revêtement anti-corrosion. La pale P2 n'a donc pas pu être utilisée dans toutes les expérimentations car elle s'est en partie oxydée.

Les pales P1 à P4 sont de dimensions : 6x30x0.5cm (Fig. 2.7). La pale P5 est plus épaisse : 6x30x1cm. Avec ces différents revêtements, on modifie les caractéristiques d'interaction : variation du coefficient de frottement dynamique, des coefficients de restitution normal et tangentiel et de la rugosité de la surface. L'objectif dans la suite, est de déterminer ces coefficients à partir des techniques exposées dans le chapitre 1.

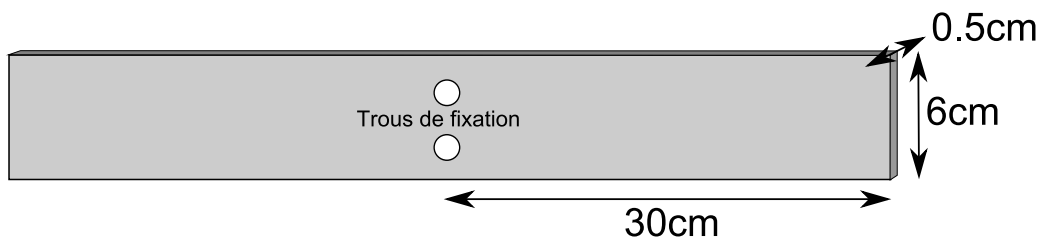


FIGURE 2.7 – Schéma d'une pale. Les deux trous servent à fixer la pale dans les dispositifs expérimentaux sur pale rotative.

2.1.5 Caractérisation des paramètres mécaniques

2.1.5.1 Méthode de Coulomb

Le coefficient de frottement dynamique μ_{CFD} (frottement de Coulomb) est mesuré en laissant glisser un radeau de particules reliées entre elles, sur un plan incliné d'un angle γ selon la méthode de Coulomb (voir Fig. 1.15). Le radeau est soumis uniquement à son poids, à la réaction du plan et aux frottements. Après avoir vérifié que l'accélération \ddot{x} est constante, le frottement de Coulomb est obtenu par l'équation 1.29. On s'assure que le coefficient de frottement ne varie pas avec l'angle d'inclinaison pour des inclinaisons comprises entre $30^\circ < \gamma < 55^\circ$. Le tableau 2.1 regroupe les valeurs obtenues entre les trois particules et les cinq pales traitées sur une statistique de 10 mesures. La vitesse du radeau de particules, en fin de plan incliné, est approximativement de 1m/s. Ces coefficients de frottement correspondent à des mesures de surface.

| Matériau | Bille plastique | Ammonitrate | KCl |
|----------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| P1 | $\mu_{CFD} = 0.38 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.40 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.39 \pm 0.02$ |
| P2 | $\mu_{CFD} = 0.58 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.65 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.69 \pm 0.02$ |
| P3 | $\mu_{CFD} = 0.27 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.31 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.32 \pm 0.02$ |
| P4 | $\mu_{CFD} = 0.31 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.31 \pm 0.02$ | $\mu_{CFD} = 0.28 \pm 0.02$ |
| P5 | $\mu_{CFD} = 0.48 \pm 0.03$ | $\mu_{CFD} = 0.50 \pm 0.03$ | $\mu_{CFD} = 0.46 \pm 0.02$ |

TABLE 2.1 – CFD entre les trois particules et les cinq pales traitées différemment.

On remarque que les valeurs de frottement des trois particules sont proches pour une pale donnée (écart-type inférieur à 3%). Seule sur la pale P2, les frottements des engrais sont légèrement différents au frottement des billes plastiques. C’est la combinaison de la rugosité de surface de la pale P2 et de la rugosité des grains, qui provoque des phénomènes d’adhérence et donc le développement de frottement. C’est pourquoi la valeur du coefficient de frottement des engrais sur la pale P2 est supérieure à celle des billes plastiques. A l’exception de la pale P2, il est intéressant de noter que les trois particules possèdent quasiment le même coefficient de frottement dynamique.

2.1.5.2 Expériences de choc avec les billes plastiques

Impact normal

On projette des billes à différentes vitesses sur la pale P1. La figure 2.8 mesure les variations du coefficient de restitution en fonction de la vitesse d’impact pour des impacts normaux. La même expérience a été réalisée pour des pales d’épaisseurs différentes (1, 3 et 5mm) de même matériau et de même revêtement.

(i) On peut interpoler les courbes expérimentales avec la loi de [Johnson, 1985] : en puissance $-1/4$ de la vitesse d’impact.

(ii) Pour des épaisseurs allant de 1 à 3mm, on observe une augmentation du coefficient de restitution d’environ 0.2. Pour des épaisseurs supérieures à 3mm, cette variation est négligeable. A de très faibles épaisseurs de pale (1mm), les impacts à haute vitesse génèrent des vibrations de la surface de la pale, augmentant la dissipation élastique et diminuant le coefficient de restitution normal. [Sondergaard et al., 1990] ont montré que le coefficient de restitution diminue avec le rapport du diamètre de la sphère sur l’épaisseur de la pale en accord avec la théorie de [Zener, 1941]. Pour s’affranchir de cet effet de l’épaisseur, on utilisera dans nos expérimentations des pales d’épaisseur 5mm. Toutefois il faut savoir que sur l’épandeur, les pales ont une épaisseur de 2mm. Le coefficient de restitution sera donc plus faible sur les épandeurs que dans les expérimentations sur maquette.

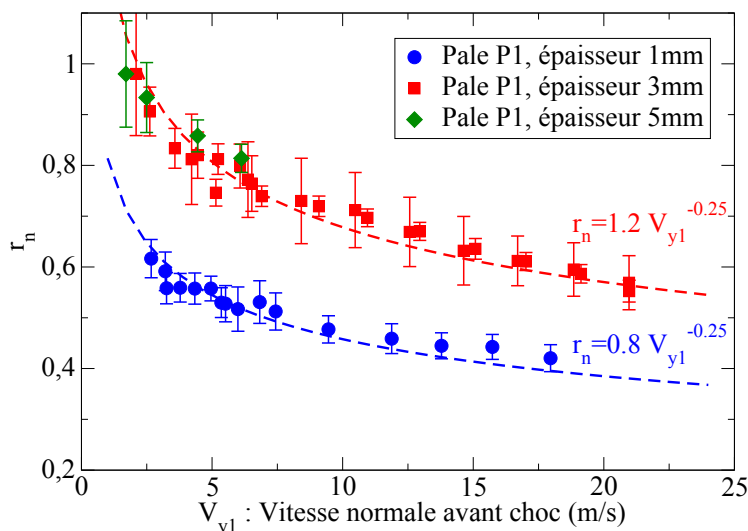


FIGURE 2.8 – Variation du coefficient de restitution r_n avec la vitesse d’impact pour des impacts normaux sur des pales de différentes épaisseurs. Interpolation suivant la loi de [Johnson, 1985] en puissance $-1/4$ de la vitesse d’impact.

Méthode de [Foerster et al., 1994]

On réalise l’expérience de Foerster où la bille est lâchée sans vitesse angulaire initiale ($R\dot{\theta}_{z1} = 0$), d’une hauteur constante ($h=25\text{cm}$, $V_i = \sqrt{2gh} = 2.21\text{m/s}$), sur une pale inclinée de $\gamma = 0^\circ$ à 80° avec l’horizontal (angle mesuré avec précision par un inclinomètre numérique). Une caméra numérique (Photron Fastcam APX RS) enregistre la trajectoire (cf. Fig. 2.9) et l’orientation (cf. Fig. 2.10) de la particule, à une fréquence de 500 images par seconde et une résolution de 1024×1024 pixels. Chaque mesure est reproduite 10 fois. La pale est maintenue par les extrémités. On utilise les définitions de [Foerster et al., 1994] pour définir les angles d’impact et de rebond adimensionnés $\Psi_{1,2}$ (Eq. 1.42). Comme la bille est lâchée sans vitesse initiale, elle doit tomber verticalement, et donc $|\Psi_1| = |\tan \gamma|$. Si tel n’est pas le cas, cela est dû à une légère inclinaison de la caméra, qui est corrigée par une rotation des coordonnées de la bille.

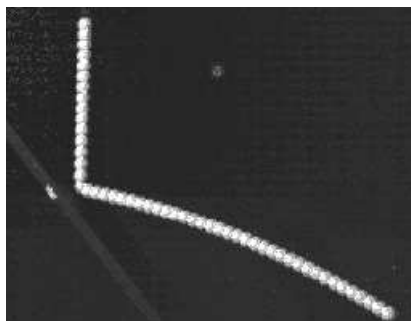


FIGURE 2.9 – Particule lâchée sur une pale inclinée de 50° .

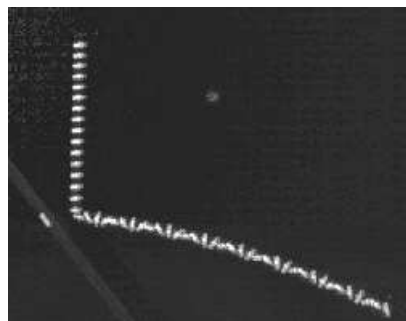


FIGURE 2.10 – Particule peinte lâchée sur une pale inclinée de 50° .

Un effort particulier a été apporté à la mesure de la vitesse angulaire après choc ($R\dot{\theta}_{z2}$), même s'il est redondant de mesurer cette valeur. En effet en l'absence de vitesse angulaire initiale, la vitesse angulaire après choc est donnée par la théorie des corps rigides (cf. Eq. 1.33) :

$$R\dot{\theta}_{z2} = \frac{5}{2}(V'_{x2} - V'_{x1}) \quad (2.1)$$

(i) La Fig. 2.11 compare, pour les pales P2 et P4, la vitesse angulaire mesurée après choc et la vitesse angulaire calculée avec l'Eq. 2.1.

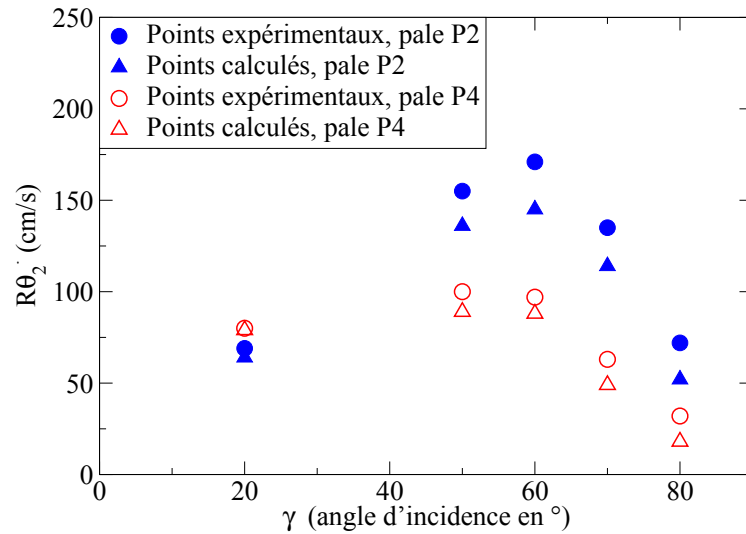


FIGURE 2.11 – Comparaison des vitesses angulaires de la bille après choc (pale P2 et P4) mesurées et calculées avec l'Eq. 2.1 pour les billes plastiques.

On observe une vitesse angulaire mesurée très proche de la vitesse angulaire théorique pour les faibles γ ($\gamma \leq 20^\circ$, équivalent aux impacts roulants) mais supérieure de 10% à 40% pour les γ élevés (c'est-à-dire les impacts glissants). Cet écart peut être dû aux déformations plastiques lors du choc. En effet, l'Eq. 2.1 est basée sur l'hypothèse corps rigides i.e. les déformations de l'aire de contact sont faibles. [Gorham and Kharaz, 2000] ont fait les mêmes observations lors de collisions avec déformations plastiques (collisions de particules d'oxyde d'aluminium sur une pale d'aluminium). Ainsi ils font l'hypothèse, qu'en présence de plasticité, la vitesse angulaire ne dépend pas seulement de la vitesse tangentielle, mais est aussi influencée par la composante normale de la vitesse. Si on applique les valeurs de vitesses angulaires mesurées à la théorie de Foerster, on va déduire un coefficient de frottement effectif qui tient compte des déformations plastiques lors du choc.

(ii) La figure 2.12 caractérise les variations du coefficient de restitution normal avec l'angle d'impact adimensionné de Foerster Ψ_1 . Le coefficient de restitution normal semble varier avec Ψ_1 et cette variation diffère du traitement de la pale, mais cette hypothèse est difficile à affirmer vu les erreurs expérimentales sur r_n notamment pour les Ψ_1 élevés. Cette variation peut provenir d'un problème

d'épaisseur finie de pales [Zener, 1941]. En effet, [Foerster et al., 1994] ont réalisé la même expérience et ont utilisé des pales d'épaisseur 64mm pour se prémunir contre ce problème (contre 5mm dans notre cas). [Wu et al., 2009] ont montré par la méthode des éléments finis, que pour des impacts obliques de particules plastiques, le coefficient de restitution n'est pas seulement fonction de la vitesse d'impact mais est aussi fonction de l'angle d'impact. Ces hypothèses sont confirmées par les résultats expérimentaux de [Brauer, 1980]. Cette dépendance avec l'angle d'impact, s'explique par le changement de géométrie de l'aire de contact lors des déformations plastiques des corps impactants.

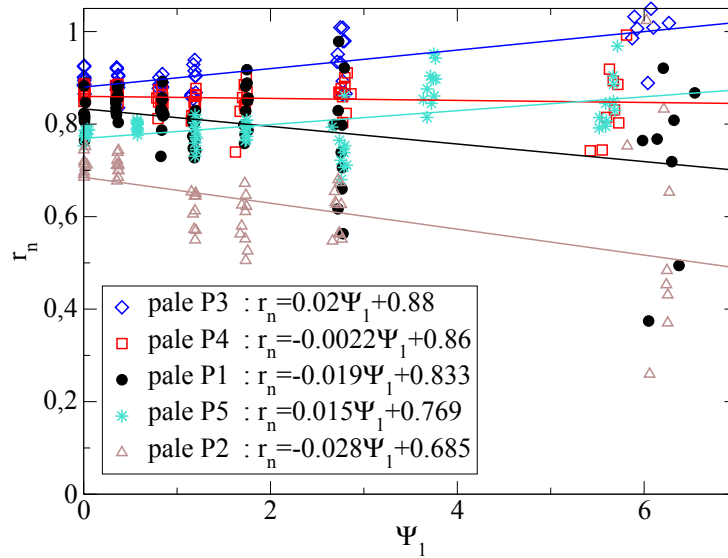


FIGURE 2.12 – Variation du coefficient de restitution normal avec l'angle d'impact adimensionné de Foerster Ψ_1 pour les différentes pales et les billes plastiques.

On remarque sur la pale P3 que le coefficient de restitution devient supérieur à 1 pour les Ψ_1 élevés. Ce phénomène a déjà été observé par [Louge and Adams, 2002]. Cette augmentation de r_n peut s'expliquer par une légère rotation de la normale à cause des déformations locales de la surface.

(iii) La figure 2.13 représente $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ pour les collisions entre les particules plastiques et les différentes pales.

On retrouve les deux régimes prédits par Foerster :

- des chocs roulants, pour des faibles inclinaisons de la pale,
- et des chocs glissants, pour des inclinaisons élevées.

On peut donc mesurer β et μ à partir des Eqs. 1.43,1.44 (cf. Tab. 2.2). On utilise les valeurs de r_n lors de l'impact normal, issues de la Fig. 2.12 (ce sont les valeurs sur lesquelles on a le plus de précision pour une vitesse d'impact de 2.21m/s). On suppose que la variation de $r_n = f(\Psi_1)$ est négligeable. On a de fortes incertitudes sur les valeurs de β car il y a peu d'angles d'impact où le choc a un caractère roulant.

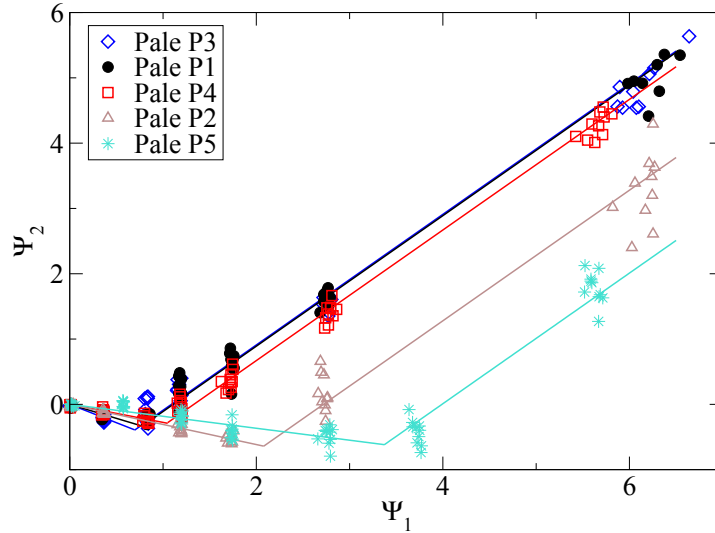


FIGURE 2.13 – $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ défini selon Foerster pour les collisions entre les billes plastiques et les différentes pales en acier.

On propose une loi d'échelle sur la figure 2.14 en $\frac{2}{\mu(1+r_n)}$. Quelle que soit la pale, les chocs glissants sont ainsi sur une même droite de pente 1 :

$$\frac{2\Psi_2}{\mu(1+r_n)} = \frac{2\Psi_1}{\mu(1+r_n)} - 7 \quad (2.2)$$

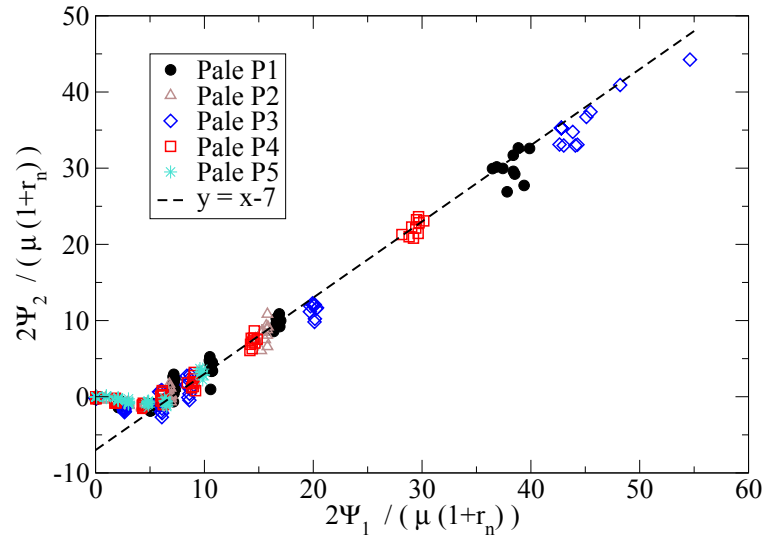


FIGURE 2.14 – Loi d'échelle proposée en $\frac{2}{\mu(1+r_n)}$, pour regrouper les valeurs de la Fig. 2.13 en une seule droite.

| Revêtement | $r_n (\psi_1 = 0)$ | β | μ |
|------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| P1 | $r_n = 0.82 \pm 0.03$ | $\beta \approx 0.43$ | $\mu = 0.175 \pm 0.005$ |
| P2 | $r_n = 0.71 \pm 0.02$ | $\beta \approx 0.31$ | $\mu = 0.45 \pm 0.01$ |
| P3 | $r_n = 0.90 \pm 0.02$ | $\beta \approx 0.56$ | $\mu = 0.164 \pm 0.005$ |
| P4 | $r_n = 0.87 \pm 0.01$ | $\beta \approx 0.27$ | $\mu = 0.205 \pm 0.003$ |
| P5 | $r_n = 0.78 \pm 0.01$ | $\beta \approx 0.188$ | $\mu = 0.64 \pm 0.01$ |

TABLE 2.2 – Billes plastiques. Coefficient de restitution normal lorsque $\Psi_1 = 0$, coefficient de restitution tangentiel et coefficient de frottement mesurés lors des chocs selon la méthode de [Foerster et al., 1994].

Des valeurs différentes de frottement ?

Les coefficients de frottement mesurés par la méthode de Foerster (Tab. 2.2) sont inférieurs de 20% à 50% par rapport aux coefficients de frottement dynamique mesurés sur plan incliné (Tab. 2.1) (sauf sur la pale P5 où le frottement de Foerster est supérieur). Dans la littérature, peu d'étude compare les deux frottements : [Maw et al., 1976] a retrouvé des coefficients de frottement équivalents entre deux matériaux en acier identiques (2% d'écart). Mais lorsqu'il compare les valeurs entre deux matériaux en caoutchouc identiques, malgré les fortes erreurs expérimentales ($\approx 25\%$), il observe des valeurs de Ψ_2 plus faibles que les valeurs prévues. Il obtient ainsi une valeur de frottement 20% plus élevée que la valeur du frottement de Coulomb.

Nous avons testé plusieurs hypothèses qui pourraient expliquer cette différence :

⇒ Lorsque que l'on mesure le CFD, on mesure un frottement de surface alors que la mesure du frottement de Foerster est une mesure de volume. Cependant, si les différences de frottement venaient du revêtement, on devrait avoir les mêmes valeurs de frottements avec la pale P4 qui ne possède aucun revêtement.

⇒ La prise en compte de la variation du coefficient de restitution avec Ψ_1 ($r_n = a + b\Psi_1$) fournit une nouvelle relation pour les chocs glissants :

$$\Psi_2 = \Psi_1 \left(1 - \frac{7\mu b}{2} \text{sgn}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}') \right) - \frac{7(1+a)\mu}{2} \text{sgn}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}') \quad (2.3)$$

A partir de cette Eq. 2.3, on trouve des valeurs de frottement, 1% à 8% supérieures, comparées aux valeurs avec un coefficient de restitution constant. La variation du coefficient de restitution n'explique donc pas les différences de frottement.

⇒ On a vu que les vitesses angulaires mesurées après choc, sont supérieures aux valeurs prévues par la théorie des corps rigides. On doit donc avoir un angle Ψ_2 plus faible et donc un frottement μ supérieur par rapport à la prédiction de la théorie des corps rigides. Cependant, en utilisant les valeurs de vitesses angulaires données par la théorie corps rigides, on ne retrouve pas les valeurs du frottement CFD. D'autres

phénomènes doivent entrer en jeu.

⇒ Les mesures du CFD sont faites à environ 1m/s alors que les mesures par choc sont réalisées à 2.21m/s. Les différences de vitesses sont faibles. D'après [Rabinowicz, 1951], le coefficient de frottement diminue avec la vitesse. Cette hypothèse est envisageable dans notre cas, cela signifierait que le frottement diminue fortement avec la vitesse.

Malgré cette liste d'hypothèses, nous n'avons pas réussi à expliquer clairement les différences entre les frottements mesurés par les deux méthodes. En effet, les phénomènes microscopiques au niveau du contact sont extrêmement compliqués, d'autant plus que l'on a utilisé des matériaux avec des revêtements aux caractéristiques inconnues.

2.1.5.3 Expériences de choc avec les Ammonitrates

Cette étude n'a pas été effectuée sur la pale P2, car l'oxydation de la pale aurait perturbée la mesure des paramètres mécaniques.

Méthode de [Foerster et al., 1994]

[Lorenz et al., 1997] ont montré que le modèle de Walton donnaient de bons accords dans le cas de grains à la surface irrégulière. On utilise donc la même méthode qu'avec les particules modèles plastiques, pour mesurer les paramètres mécaniques (r_n , β , μ) pour les grains d'Ammonitrate quasi-sphériques.

(i) On vérifie tout d'abord (Fig. 2.15) que la théorie corps rigides s'applique pour les grains d'Ammonitrate en comparant la vitesse angulaire mesurée après choc $R\dot{\theta}_{z2}$ et celle calculée par l'Eq. 2.1. On observe une vitesse angulaire mesurée très proche de vitesse angulaire théorique pour les faibles γ i.e. pour les chocs roulants ($\gamma \leq 20^\circ$ pour P1 et $\gamma \leq 70^\circ$ pour P5). Mais la vitesse angulaire mesurée est nettement différente pour les γ élevés. Dans certains cas, la valeur mesurée est le double de la valeur calculée. Cette différence peut être attribuée aux déformations plastiques lors du choc.

(ii) La figure 2.16 représente les variations du coefficient de restitution normal avec l'angle d'impact adimensionné de Foerster Ψ_1 . Comme pour les billes modèles plastiques, le coefficient de restitution normal varie avec Ψ_1 et la variation diffère en fonction du revêtement de la pale. Les incertitudes sur la mesure du coefficient de restitution sont importantes. On utilise dans la suite les valeurs de r_n pour $\Psi_1 = 0$ où on a le plus de précision.

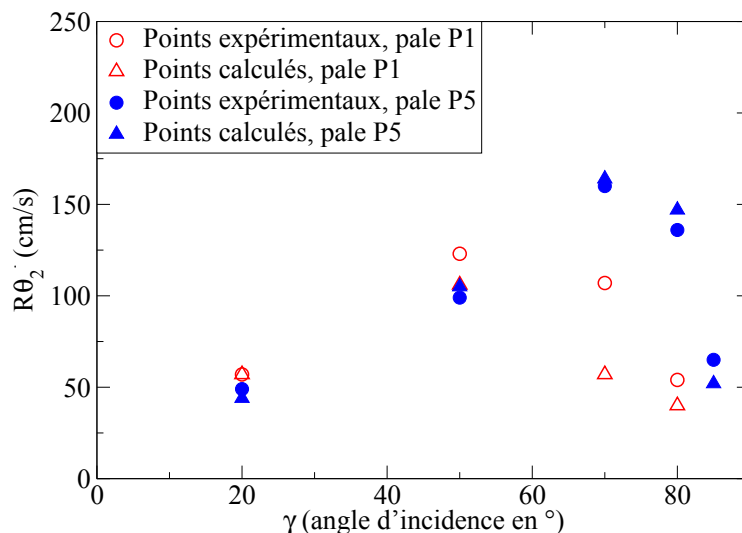


FIGURE 2.15 – Comparaison des vitesses angulaires du grain d’Ammonitrate après choc (pale P1 et P5) mesurées et calculées avec l’Eq. 2.1.

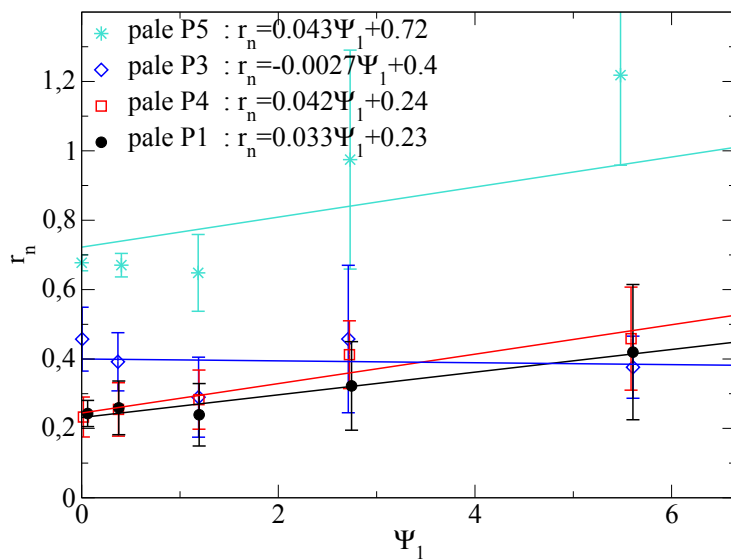


FIGURE 2.16 – Variation du coefficient de restitution normal avec l’angle d’impact adimensionné de Foerster Ψ_1 pour les différentes pales et les grains d’Ammonitrate.

(iii) On trace le graphe $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ en utilisant la loi d’échelle en $\frac{2}{\mu(1+r_n)}$ sur la figure 2.17. Comme pour les billes plastiques, les chocs glissants se retrouvent sur la même droite de pente 1 quel que soit le revêtement de la pale.

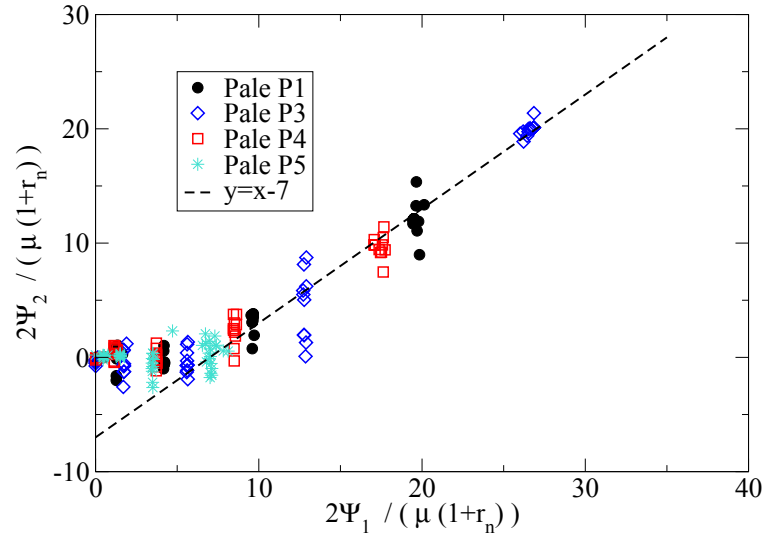


FIGURE 2.17 – $\frac{2\Psi_2}{\mu(1+r_n)} = f\left(\frac{2\Psi_1}{\mu(1+r_n)}\right)$ pour les collisions entre les grains d'Ammonitrate et les différentes pales en acier.

Les paramètres mécaniques r_n et μ sont déterminés à partir des chocs glissants (cf. Tab. 2.3). Il est difficile de donner un ordre de grandeur des coefficients de restitution tangential pour les chocs roulants.

| Revêtement | r_n ($\Psi_1 = 0$) | μ |
|------------|------------------------|-----------------------|
| P1 | $r_n = 0.24 \pm 0.04$ | $\mu = 0.46 \pm 0.03$ |
| P3 | $r_n = 0.46 \pm 0.09$ | $\mu = 0.29 \pm 0.03$ |
| P4 | $r_n = 0.23 \pm 0.06$ | $\mu = 0.52 \pm 0.06$ |
| P5 | $r_n = 0.68 \pm 0.03$ | $\mu = 0.93 \pm 0.07$ |

TABLE 2.3 – Particules d'Ammonitrate. Coefficient de restitution normal lorsque $\Psi_1 = 0$ et coefficient de frottement mesurés lors des chocs selon la méthode de [Foerster et al., 1994].

Pour les billes plastiques, les valeurs de frottement mesurées par la méthode de Foerster étaient (pour la majorité) inférieures aux valeurs du frottement de Coulomb. Avec les grains d'Ammonitrate, les valeurs de frottement de Foerster sont supérieures de 5% à 90% aux valeurs mesurées sur plan incliné.

2.1.5.4 Expériences de choc avec les particules de KCl

Méthode de [Sommerfeld and Huber, 1999]

On utilise la méthode de [Sommerfeld and Huber, 1999] qui est une extension de la méthode de Foerster à des grains de formes irrégulières. Ainsi les particules de KCl sont considérées comme des sphères rebondissant sur une surface inclinée

virtuellement d'un angle ϕ .

Il faut tout d'abord estimer l'angle d'inclinaison avant de calculer r_n et μ . On utilise le même dispositif expérimental qu'avec les billes plastiques. Nous avons réalisé une statistique de 20 expériences pour chaque angle d'inclinaison. La difficulté de la mesure de la collision d'une particule anguleuse de KCl, vient du fait que l'éjection est un phénomène 3D : l'angle de rebond ne se situe pas dans le même plan que l'angle d'incidence. Il a donc été nécessaire de répéter chaque série d'expériences en plaçant la caméra d'abord dans le plan (x', y') puis dans le plan perpendiculaire (x', z') . La figure 2.18 schématise la collision d'une particule de KCl sur une pale inclinée d'un angle $(\pi - \theta_i)$. Nous avons seulement étudié les collisions avec deux pales : la pale P1 et la pale P5.

- La mesure avec la caméra en position 1, permet de repérer les vitesses avant choc V'_{xy1} ($V'_{z1} = 0$), l'angle d'incidence θ_i , la vitesse normale après choc V'_{y2} et la projection de l'angle de rebond θ_r^p dans le plan (x', y') .
- La mesure avec la caméra en position 2, permet d'acquérir les vitesses après choc V'_{xz2} et l'angle polaire φ_r .

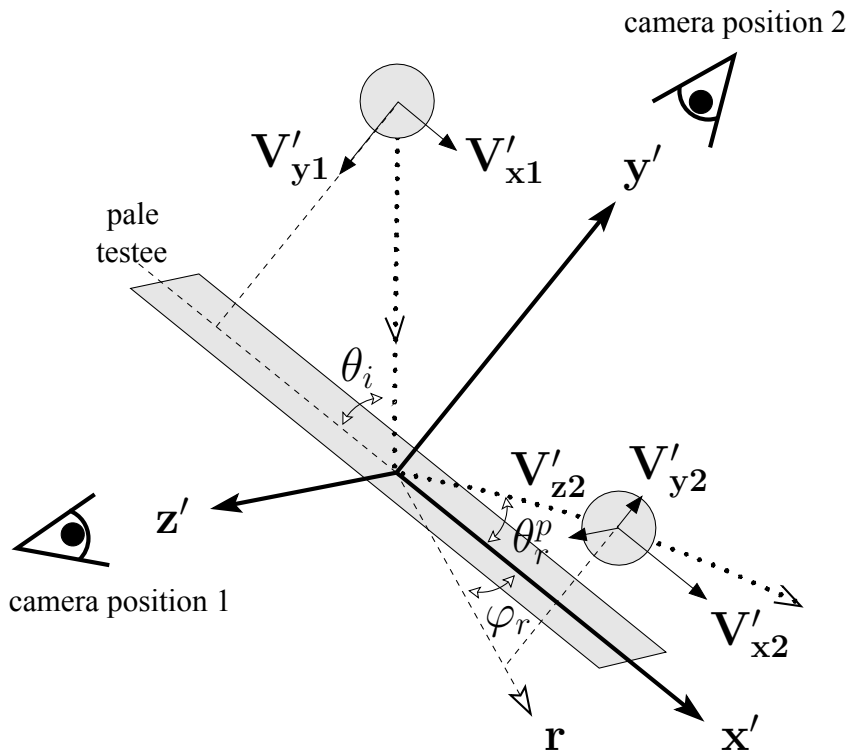


FIGURE 2.18 – Schématisation du modèle de Sommerfeld où la particule anguleuse est considérée comme une sphère. Le rebond est un phénomène 3D, il faut donc le filmer sous deux angles différents.

L'angle de rebond de la particule est alors calculé ainsi :

$$\tan \theta_r = \tan \theta_r^p \cos \varphi_r \quad (2.4)$$

On en déduit les paramètres mécaniques vis-à-vis de la surface réelle : le coefficient de restitution normal $r_m = V'_{y2}/V'_{y1}$ et le coefficient de frottement (i.e. l'impulsion lors d'un contact glissant) calculé suivant la direction (Or) :

$$\mu_m = (\sqrt{(V'_{x2})^2 + (V'_{z2})^2} - V'_{x1}) / (V'_{y2} - V'_{y1}).$$

Ces deux paramètres mécaniques doivent ensuite être corrigés pour obtenir les paramètres d'impact vis-à-vis de la surface virtuelle à partir des Eqs. 1.50 et 1.51.

Estimation de l'inclinaison de la surface virtuelle ϕ :

On mesure l'angle de rebond selon l'équation 2.4 pour les particules de KCl. L'écart entre θ_r et θ_r^p est insignifiant quand l'angle d'impact θ_i est inférieur à 40° ($\theta_r^p - \theta_r < 1^\circ$) et augmente sensiblement pour des angles d'impact supérieurs ($\theta_r^p - \theta_r < 15^\circ$).

La figure 2.19 compare l'angle de rebond en fonction de l'angle d'incidence pour les particules de KCl et les billes plastiques sur les pales P1 et P5.

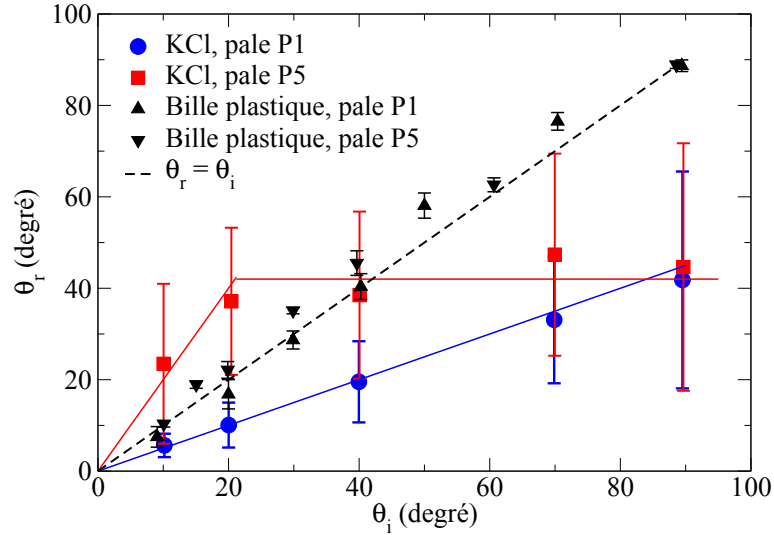


FIGURE 2.19 – Angle de rebond θ_r en fonction de l'angle d'incidence θ_i pour les grains de KCl et les billes plastiques sur les pales P1 et P5.

(i) La collision des billes plastiques peut être considérée comme spéculaire : les angles d'incidence et de rebond sont égaux et dans le même plan ($\theta_r \approx \theta_i$). On observe que pour les chocs glissants : $\theta_r = \theta_i$ et que pour les chocs roulants : θ_r est légèrement supérieur à θ_i .

(ii) Pour les collisions du KCl sur la pale P1, la moyenne de l'angle de rebond est toujours deux fois plus faible que l'angle d'incidence avec un écart-type quatre fois plus faible :

$$\theta_r^{P1} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \right) \theta_i \quad (2.5)$$

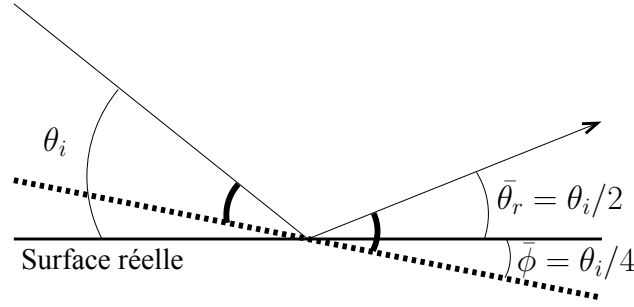


FIGURE 2.20 – Schématisation du rebond d’une particule de KCl sur la pale P1 $\bar{\theta}_r^{P1} = \bar{\theta}_i/2$. Pour obtenir une collision spéculaire, la surface virtuelle doit être inclinée négativement de $\bar{\phi}^{P1} = -\bar{\theta}_i/4$.

Pour obtenir une collision spéculaire avec le KCl, il faut “incliner virtuellement” la pale d’un angle ϕ^{P1} (voir Fig. 2.20).

$$\phi^{P1} = - \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \right) \theta_i \quad (2.6)$$

Contrairement à ce qu’a prévu Sommerfeld, la moyenne de l’angle $\bar{\phi}^{P1}$ n’est pas centrée sur zéro.

(iii) Pour les collisions du KCl sur la pale P5, les écart-types sont nettement plus élevés. L’angle de rebond θ_r^{P5} est défini par :

$$\theta_r^{P5} = \begin{cases} 2\theta_i \pm 15^\circ & \text{si } \theta_i \leq 20^\circ \\ 42 \pm 20^\circ & \text{si } \theta_i > 20^\circ \end{cases} \quad (2.7)$$

de la même façon, pour obtenir une collision spéculaire avec la pale P5, il faut “incliner virtuellement” la pale d’un angle ϕ^{P5} :

$$\phi^{P5} = \begin{cases} \theta_i/2 \pm 15/2^\circ & \text{si } \theta_i \leq 20^\circ \\ 20 - \theta_i/2 \pm 10^\circ & \text{si } \theta_i > 20^\circ \end{cases} \quad (2.8)$$

On observe que pour des faibles angles d’incidence ($\theta_i < 40^\circ$), l’inclinaison de la surface virtuelle est positive et pour des angles supérieurs, l’inclinaison devient négative comme pour la pale P1.

Estimation du coefficient de restitution r_n :

On compare le coefficient de restitution mesuré r_m vis-à-vis de la surface réelle à partir des collisions filmées en position 1 (cf. Fig. 2.21). On utilise l’Eq. 1.50, pour obtenir le coefficient de restitution r_n , vis-à-vis de la surface virtuelle (Fig. 2.22). On utilise la valeur moyenne de l’inclinaison virtuelle $\bar{\phi}$.

(i) Le coefficient de restitution mesuré r_m , vis-à-vis de la surface réelle, décroît avec l’angle d’impact. Mais la loi de décroissance est différente selon la pale : linéaire pour la pale P1 et en puissance pour la pale P5. Les écarts-types pour la pale P5

sont 2 à 4 fois supérieurs.

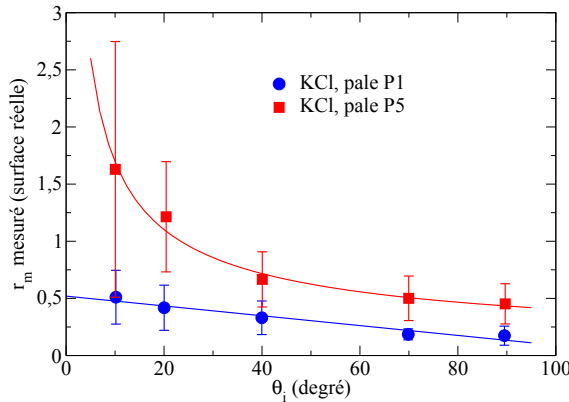


FIGURE 2.21 – Coefficient de restitution mesuré r_m vis-à-vis de la surface réelle pour les impacts des particules de KCl sur les pales P1 et P5.

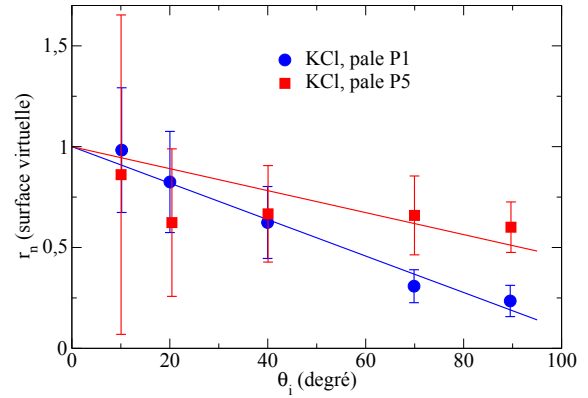


FIGURE 2.22 – Coefficient de restitution r_n déduit des Eqs. 1.50,1.51 vis-à-vis de la surface virtuelle pour les impacts des particules de KCl sur les pales P1 et P5.

(ii) Avec la pale P5, le coefficient de restitution mesuré r_m , vis-à-vis de la surface réelle, est supérieur à 1 pour les faibles angles d'incidence ($\theta_i < 20^\circ$). En effet, comme l'angle de rebond est supérieur à l'angle d'incidence pour $\theta_i < 20^\circ$ (Eq. 2.7), on obtient une vitesse V'_{y2} après choc supérieure à la vitesse V'_{y1} avant choc, ce qui est cohérent avec $r_m > 1$.

(iii) On retrouve la variation linéaire $r_n = 1 - \alpha\theta_i$ que Sommerfeld a obtenu pour ses collisions de grains de quartz sur une surface en acier. On peut déduire le coefficient de restitution r_n vis-à-vis de la surface virtuelle pour les pales P1 et P5 (θ_i est exprimé en degré) :

$$r_n = \begin{cases} 1 - 0.00904\theta_i & \text{pale P1} \\ 1 - 0.00545\theta_i & \text{pale P5} \end{cases} \quad (2.9)$$

Evaluation du coefficient de frottement μ :

On utilise l'Eq. 1.51, pour obtenir le coefficient de frottement vis-à-vis de la surface virtuelle. La figure Fig. 2.23 représente le coefficient de frottement en fonction de l'angle θ_i . On observe de fortes variations sur cette valeur de frottement. Pour la suite, on donne une valeur moyenne du coefficient de frottement avec l'angle d'incidence pour les particules de KCl :

$$\mu = \begin{cases} 0.36 \pm 0.05 & \text{pale P1} \\ 0.4 \pm 0.2 & \text{pale P5} \end{cases} \quad (2.10)$$

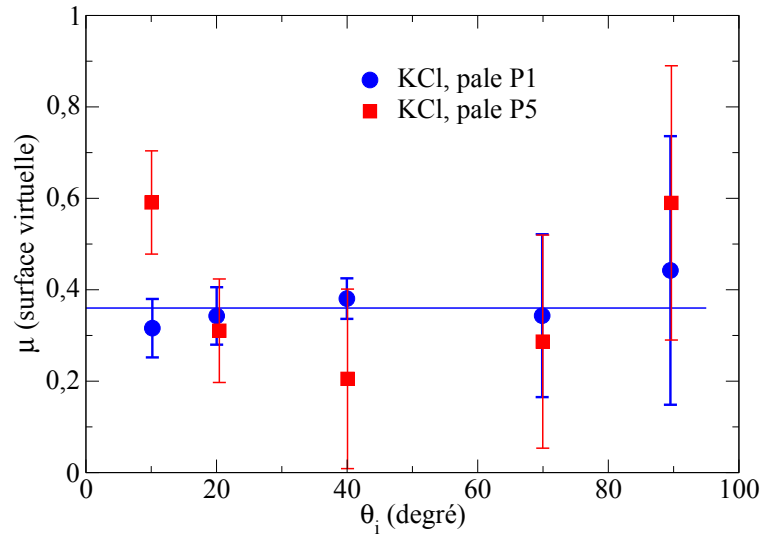


FIGURE 2.23 – Coefficient de frottement mesuré r_m vis-à-vis de la surface virtuelle pour les impacts des particules de KCl sur les pales P1 et P5.

2.2 Les dispositifs expérimentaux

2.2.1 Dispositif expérimental numéro 1 en 2D

2.2.1.1 Protocole expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé Fig. 2.24.

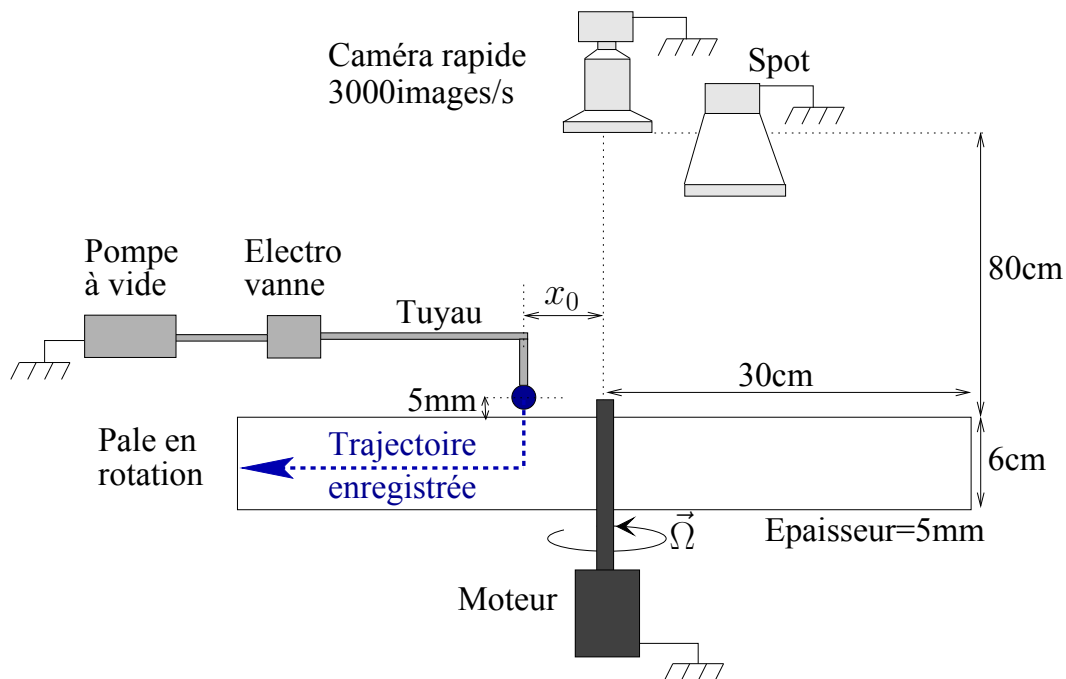


FIGURE 2.24 – Schéma du dispositif expérimental numéro 1.

La particule est maintenue au bout d'un tuyau dans lequel on a fait le vide ; l'électrovanne est en position ouverte. Un dispositif électronique (non représenté sur la figure) envoie une séquence d'impulsions pour synchroniser le déclenchement de la caméra et la fermeture de l'électrovanne. La particule tombe alors sous l'effet de la gravité, sans vitesse angulaire, vers la pale rotative. La particule est lâchée d'une hauteur constante ($\approx 5\text{mm}$) pour s'affranchir de l'influence de la hauteur de chute [Rioual et al., 2008]. Le moment de la fermeture de l'électrovanne est réglé pour que la particule chute d'environ 1cm avant d'être frappée par la pale (un capteur laser détermine la position de la pale). La longueur du tuyau est réglable pour modifier la position de lâché x_0 . Un moteur couplé à un variateur permet d'atteindre, avec précision, des vitesses de pale $\Omega \leq 1000 \pm 1$ tours/min. Le réglage de l'homogénéité de l'éclairage est une étape importante pour des mesures de qualité.

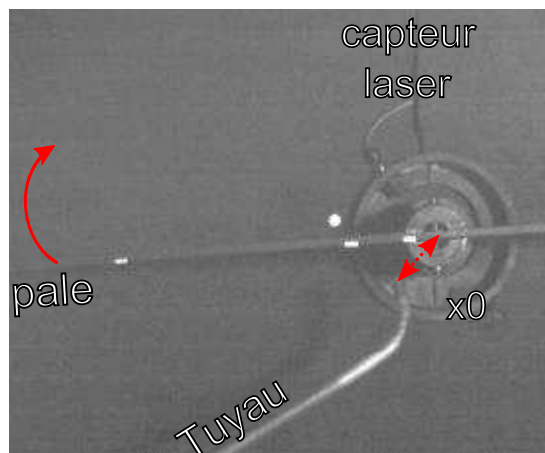


FIGURE 2.25 – Photographie d'une expérience. Un capteur laser permet de connaître avec précision la position de la pale lors du déclenchement simultané de la caméra et de la fermeture de l'électrovanne.

Une caméra numérique (Photron Fastcam APX RS) enregistre la trajectoire de la particule, dans le plan perpendiculaire à la pale, à une fréquence de 3000 images par seconde et une résolution de 1024x1024 pixels cf. Fig. 2.25.

Un intérêt particulier a été apporté à la mesure de la vitesse angulaire de la particule grâce à des particules peintes cf. Fig. 2.1. Voici le genre de séquences obtenues par caméra rapide avec une particule non peinte Fig. 2.26(a) et une particule peinte Fig. 2.26(b). On aurait pu se servir des expériences avec les particules peintes pour déduire simultanément : la position du centre de gravité et l'orientation de la particule. Cependant, pour avoir plus de précision sur la position du centre de gravité, on a préféré réaliser ces mesures sur des particules blanches. Ainsi pour chaque configuration expérimentale, les essais ont été répétés deux fois : une fois avec la bille blanche et une fois avec la bille peinte. Par ailleurs, comme l'étude est réalisée en 2D, l'orientation initiale de la particule est importante pour pouvoir mesurer une vitesse angulaire exploitable, i.e. il faut que l'axe de rotation de la particule et l'axe de rotation de la pale soient confondus. Si ce n'est pas le cas, l'expérience est répétée.

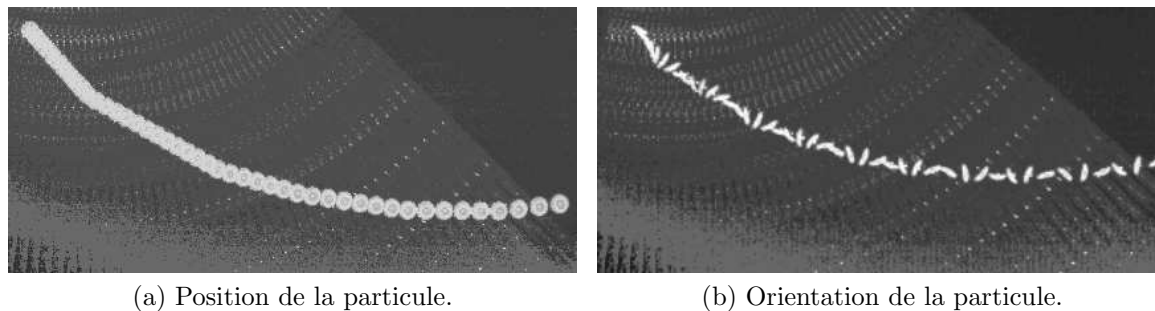


FIGURE 2.26 – Séquences typiques acquises par caméra rapide pour une particule modèle.

A partir de ces séquences, les images sont traitées avec le logiciel libre ImageJ qui repère avec précision les centres de gravité de disques et l'orientation du grand axe d'ellipses (la bande blanche sur la particule peinte est assimilée à une ellipse). On déduit de la position et de l'orientation de la particule, la vitesse radiale et la vitesse angulaire à chaque instant. Les erreurs expérimentales sur la position de la particule sont estimées à $\delta x = \pm 2\text{mm}$ et les erreurs sur l'orientation à $\delta\theta = \pm 5^\circ$.

On fait varier la position initiale de la bille x_0 et la vitesse de la pale Ω . Ces valeurs sont regroupées dans le Tab. 2.4 en fonction du type de revêtement de la pale.

| Revêtement | Position initiale x_0 | Vitesse de rotation Ω |
|------------|---|--------------------------------|
| P1 | $1.6 \pm 0.1\text{cm}$ | $[500 - 1000] \pm 1\text{rpm}$ |
| | $2.7 \pm 0.1\text{cm}$ | $500 \pm 1\text{rpm}$ |
| | $[2.3; 3.4; 6.1; 8.4] \pm 0.1\text{cm}$ | $700 \pm 1\text{rpm}$ |
| P2 | $1.6 \pm 0.1\text{cm}$ | $[500 - 800] \pm 1\text{rpm}$ |
| | $2.7 \pm 0.1\text{cm}$ | $500 \pm 1\text{rpm}$ |
| | $[1.8; 2.5; 3.8] \pm 0.1\text{cm}$ | $700 \pm 1\text{rpm}$ |
| P3 | $[1.4; 2.4] \pm 0.1\text{cm}$ | $700 \pm 1\text{rpm}$ |
| P4 | $1.6 \pm 0.1\text{cm}$ | $500 \pm 1\text{rpm}$ |
| | $2.4 \pm 0.1\text{cm}$ | $700 \pm 1\text{rpm}$ |
| P5 | $2.5 \pm 0.1\text{cm}$ | $700 \pm 1\text{rpm}$ |

TABLE 2.4 – Plage de données des paramètres modifiés pour chaque revêtement.

2.2.1.2 Normalité des distributions expérimentales

Pour chaque configuration expérimentale (Tab. 2.4), les statistiques sont effectuées sur 15 expériences afin d'avoir une variation des paramètres mesurés proche d'une gaussienne (15 expériences sur une particule non peinte + 15 expériences sur une particule peinte).

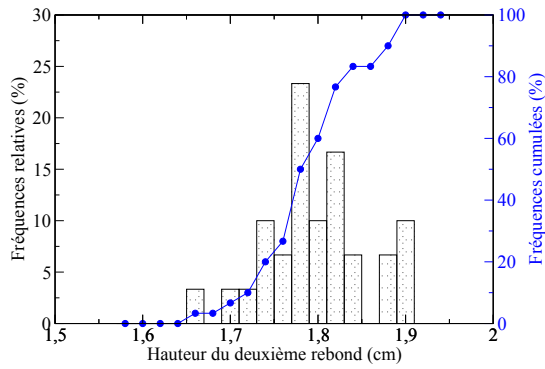


FIGURE 2.27 – Histogramme de la hauteur du deuxième rebond en fréquences cumulées et non cumulées.

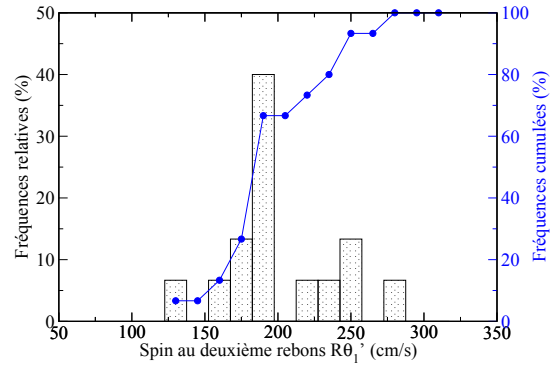


FIGURE 2.28 – Histogramme du spin de la particule au deuxième rebond en fréquences cumulées et non cumulées.

La figure 2.27 est un exemple d’histogramme obtenu avec une bille non peinte (hauteur du deuxième rebond dans le repère de la pale) et la figure 2.28 est un exemple d’histogramme obtenu avec une bille peinte (spin de la particule au deuxième rebond) en fréquences cumulées et non cumulées.

La normalité des distributions expérimentales a été vérifiée avec la droite de Henry (cf. Fig. 2.29). Le test consiste à tracer les fréquences cumulées en fonction des valeurs réduites centrées. Compte tenu des erreurs expérimentales, les courbes peuvent être assimilées à des droites, les répartitions sont donc proches d’une loi normale.

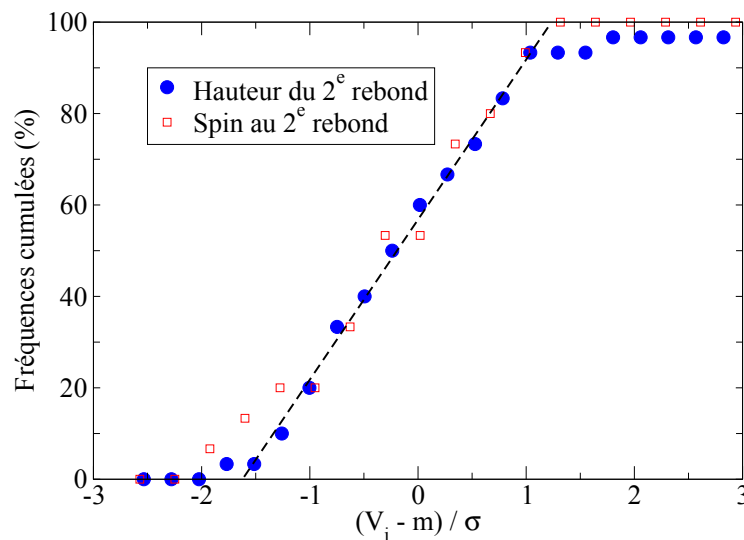


FIGURE 2.29 – Droite de Henry : distribution des fréquences cumulées en fonction de valeurs V_i centrées réduites pour la hauteur et le spin au deuxième rebond (m la moyenne et σ l’écart type).

2.2.2 Dispositif expérimental numéro 2 en 3D

2.2.2.1 Protocole expérimental

La maquette (voir figure 2.30) se compose d'un plateau rotatif sur lequel est fixée une pale. Une caméra située au-dessus de la maquette permet de réaliser des films du processus d'épandage.

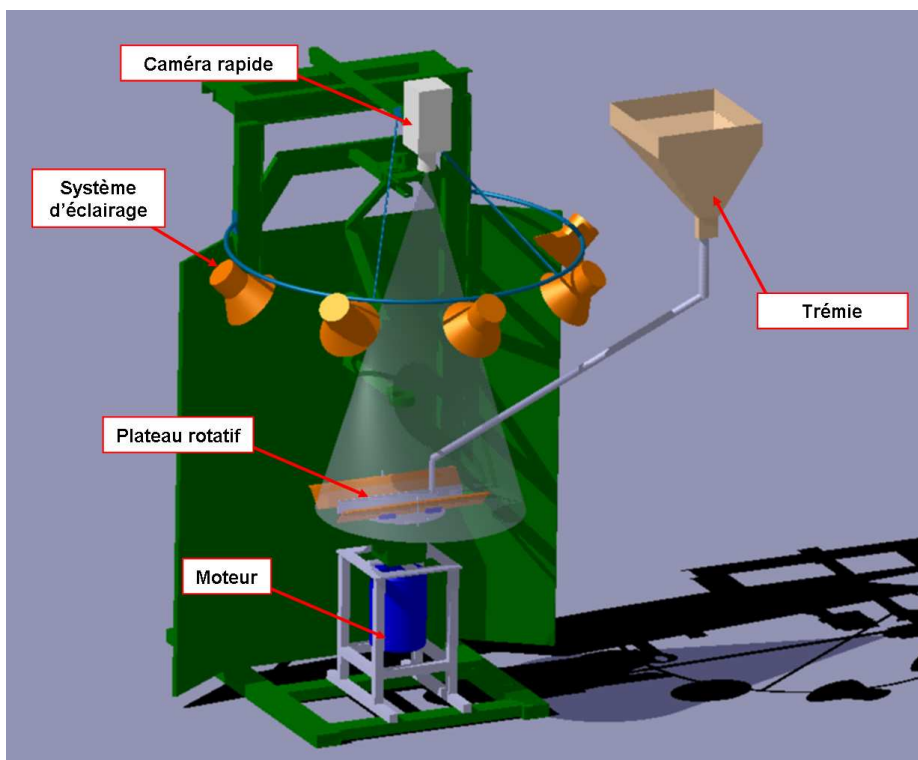


FIGURE 2.30 – Schéma du dispositif expérimental numéro 2.

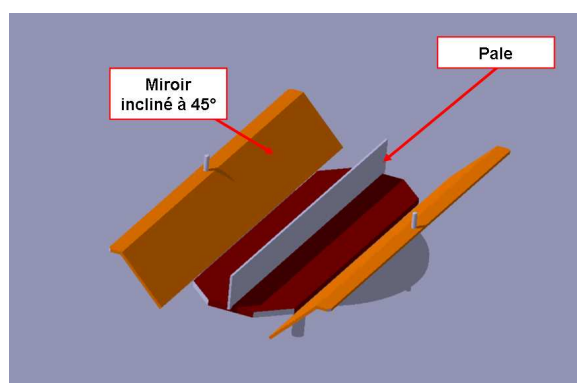


FIGURE 2.31 – Zoom sur le plateau rotatif avec un système de miroirs

A la fréquence utilisée lors des essais, soit 3000 images/seconde, la durée maximale d'enregistrement est de 0.68 seconde. Les miroirs, positionnés de part et d'autre de la pale renvoient à la caméra une vue du côté de la pale (voir la vue du plateau

rotatif, figure 2.31). Ces miroirs en matière plastique (achetés chez *VT Plastics*), sont très légers, et ne constituent donc pas un balourd qui viendrait déséquilibrer le plateau. Les particules sont stockées dans une trémie. Cette dernière ne peut pas être positionnée juste au-dessus du plateau rotatif, pour ne pas occulter l'angle de vue de la caméra. Un système de goulotte a été mis au point pour diriger les particules de la trémie au plateau.

Afin de minimiser les perturbations lumineuses, la maquette a été peinte entièrement en noir. De plus, elle est recouverte d'une grande bâche noire pour empêcher les rayons lumineux de se refléter dans les miroirs.

2.2.2.2 Traitements d'images

L'étude des films nécessite certains traitements d'image pour palier aux déformations dues à la caméra (effet tonneau) ainsi que celles induites par les miroirs. Une pale de calibration a donc été utilisée afin de pouvoir obtenir un étalonnage des mesures pour chaque essai. La pale étalon est recouverte d'un motif formant une grille de 28x6 points, dont la distance entre chaque point est connue (Fig. 2.32). La détection de points blancs sur fond noir est aisée en traitements d'images.

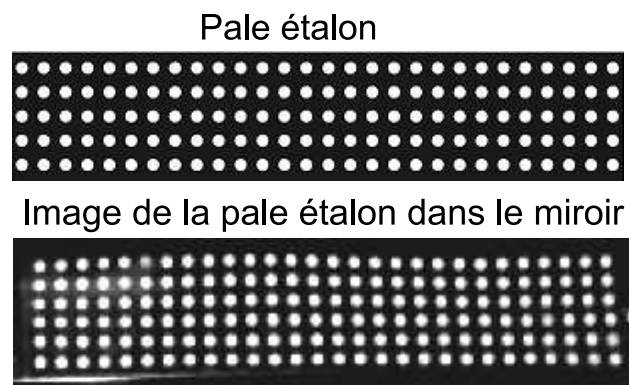
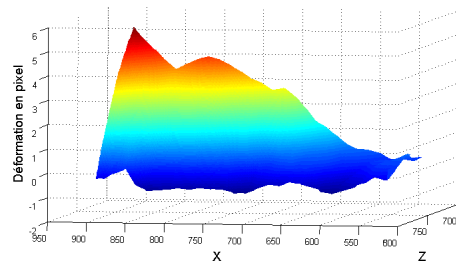
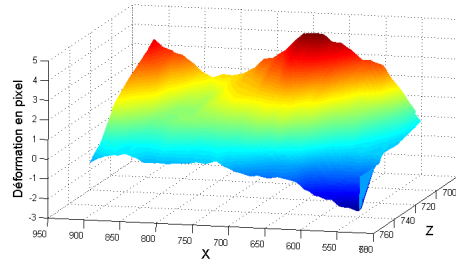


FIGURE 2.32 – Photographie de la pale étalon et photographie de l'image dans le miroir de cette pale étalon.

La pale étalon est placée dans le dispositif expérimental. Pour différentes vitesses de rotation, on enregistre les coordonnées des points dans le miroir (Fig. 2.32). On compare ces coordonnées avec celles des points de la pale étalon de référence. Une déformation pour chaque point est alors déterminée suivant les deux directions. Les résultats obtenus, sont ensuite interpolés le long de la pale entre chaque point de la pale étalon. Les résultats indiquent un écart maximal d'environ 6mm (voir figure 2.33), soit la taille de la particule.



(a) Déformation suivant la direction X



(b) Déformation suivant la direction Z

FIGURE 2.33 – Résultats de la calibration pour l'un des miroirs.

L'erreur des mesures dans la vue du miroir, sans traitements d'images, est d'environ 10% à 500 tours/min (voir Fig. 2.34).

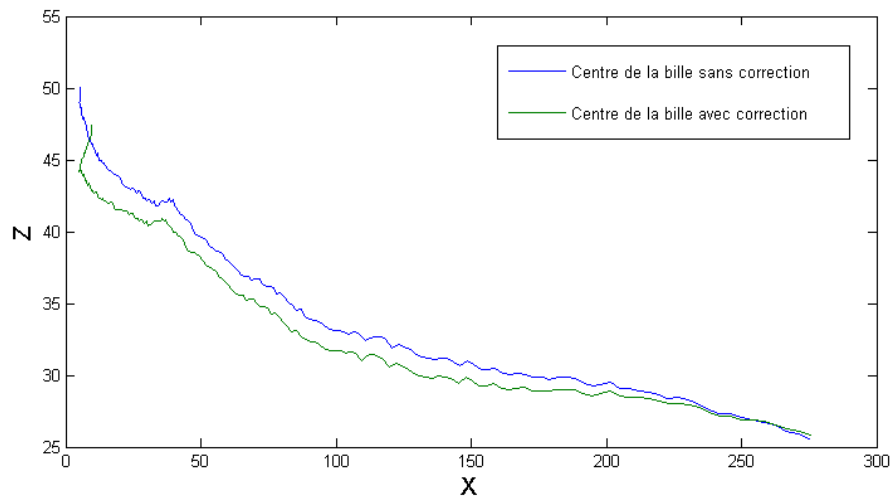


FIGURE 2.34 – Comparaison de la position d'une bille plastique avec et sans traitements d'images.

2.3 Conclusions

Au terme de ce chapitre, nous avons étudié, à faible vitesse, l'interaction entre trois matériaux différents en contact avec cinq pales différentes. Nous disposons ainsi des paramètres mécaniques pour tous nos couples particule pale :

- Le coefficient de restitution normal a été mesuré lors d'impacts normaux (voir Tab. 2.2 pour les billes plastiques, Tab. 2.3 pour les particules d'Ammonitrate et Eq. 2.9 pour les particules de KCl).

Ce coefficient de restitution normal est mesuré pour une vitesse d'impact d'environ 2m/s. Or, nous avons mis en évidence sur les particules plastiques, une diminution du coefficient de restitution selon la loi de Johnson en puissance $-1/4$ de la vitesse d'impact. Par ailleurs, ce coefficient de restitution varie également avec l'angle d'impact. Nous verrons dans la suite comment prendre en compte ces variations.

- Le coefficient de restitution tangentiel n'a pas été mesuré avec suffisamment de précision, pour donner des valeurs correctes.

- Le coefficient de frottement a été mesuré par deux méthodes différentes : le plan incliné, décrit par Coulomb, et la méthode de chocs de Foerster. Une différence sur le coefficient de frottement apparaît entre les deux méthodes. Avec les billes plastiques, le frottement de Coulomb est supérieur. Mais, avec les particules d'Ammonitrate, c'est l'inverse, le frottement de Coulomb est inférieur aux valeurs mesurées par la méthode de choc de Foerster. Nous avons ainsi mis en évidence à partir de ces deux dispositifs, la difficulté pour mesurer un coefficient de frottement unique pour une particule en contact avec une paroi.

A partir des deux dispositifs expérimentaux sur pale centrifuge, exposés dans ce chapitre, on va maintenant présenter les résultats expérimentaux obtenus, dans un premier temps, pour un écoulement dilué de particules puis, dans un second temps, pour un écoulement dense. Nous traiterons tout d'abord le cas des particules modèles sphériques avant de mesurer l'influence de la forme des particules avec l'étude des granulats d'engrais.

Première partie
Ecoulement dilué de particules.

Chapitre 3

Trajectoire expérimentale le long d'une pale rotative

Les interactions au niveau des contacts mettent en jeu des phénomènes extrêmement compliqués : difficultés pour mesurer des coefficients de frottement, variation du coefficient de restitution avec l'angle d'impact, variation des paramètres mécaniques avec la vitesse,...

Nous avons donc choisi dans ce chapitre, de présenter l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus dans un cas simple :

- pour un écoulement dilué de particules,
- et pour un écoulement de particules sphériques : utilisation des billes plastiques.

Nous nous sommes attardés au cas limite d'une seule bille en écoulement le long de la pale. Les deux dispositifs expérimentaux ont été détaillés dans le chapitre 2. Les différentes conditions expérimentales testées sont répertoriées dans le tableau 2.4.

Les paramètres mécaniques (r_n et μ) entre les particules plastiques et les cinq pales différentes, ont été déterminés dans le chapitre 2, à faibles vitesses (1 à 2 m/s). Or, sur l'épandeur centrifuge, les vitesses des particules peuvent atteindre 10 à 30 m/s. Dans un premier temps, nous avons souhaité re-mesurer les paramètres mécaniques, à hautes vitesses, afin de quantifier les effets inertiels. De plus, nous nous sommes attachés à quantifier l'influence de la gravité et l'influence des effets aérodynamiques sur la trajectoire de la particule. Dans un second temps, nous représentons les différentes grandeurs caractéristiques de la trajectoire.

3.1 Caractérisation de la trajectoire

3.1.1 Influence de la gravité

On souhaite mesurer l'influence de la gravité. Des mesures de hauteurs de chute ont été réalisées sur le dispositif numéro 2, permettant de voir la trajectoire en 3 dimensions. La figure 3.1 représente, selon la direction verticale (Oz), la chute de la bille plastique pour trois vitesses de rotation typiques utilisées dans la suite sur le dispositif numéro 1.

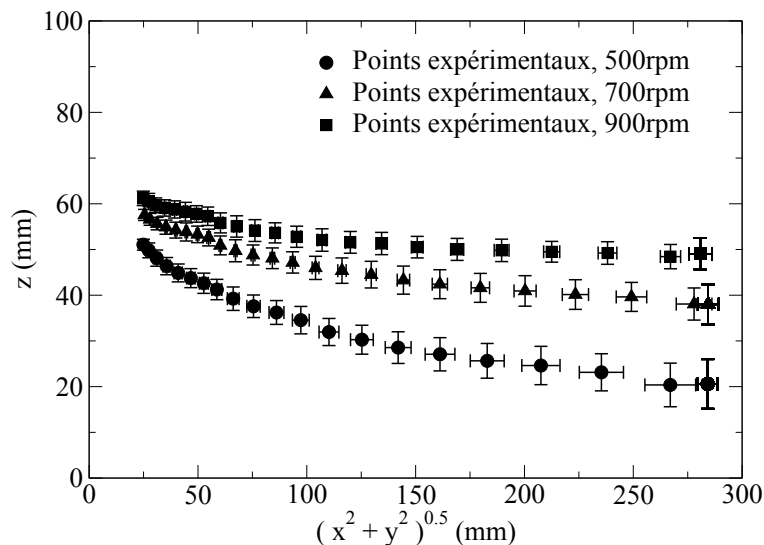


FIGURE 3.1 – Trajectoire expérimentale d’une bille plastique sur la pale P1 dans le plan vertical ($x_0 = 2.5\text{cm}$ et $\Omega = 500 - 700 - 900\text{tours/min}$).

Dans le cas le plus défavorable ($\Omega = 500\text{tours/min}$), la bille chute de 3cm dans la direction (Oz). A hautes vitesses de rotation ($\Omega \geq 700\text{tours/min}$ et $x_0 \geq 2\text{cm}$), la gravité g est au minimum dix fois plus faible que la force centrifuge : on a $\frac{x_0\Omega^2}{g} > 10$.

En utilisant le dispositif numéro 1 en 2D, on mesure une projection des quantités réelles dans le plan horizontal, i.e. on néglige les variations suivant (Oz). Cette projection correspond, dans le cas le plus défavorable ($\Omega = 500\text{tours/min}$), à un angle de 6° (c’est-à-dire une chute de $z = 3\text{cm}$ sur une longueur $x = 30\text{cm}$). Ceci revient à faire une erreur de l’ordre de 1% de la quantité réelle. Ainsi au vue de la complexité du dispositif expérimental numéro 2 (traitements d’images lourds), et des faibles erreurs commises avec le dispositif numéro 1, on s’est limité à une étude expérimentale en 2D, pour les écoulements dilués de particules.

3.1.2 Deux phases d’écoulement distinctes

Dans un premier temps, on caractérise la trajectoire de la particule le long de la pale. Celle-ci est schématisée Fig. 3.2.

La trajectoire se compose de deux phases distinctes :

- ⇒ une phase de rebonds où les sauts ont une hauteur décroissante,
- ⇒ une phase de contact permanent.

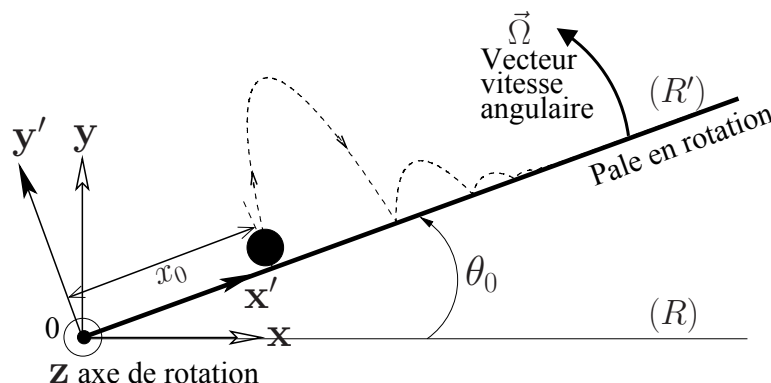


FIGURE 3.2 – Schématisation de la trajectoire de la particule dans le repère de la pale.

On observe que les angles d'incidence avec la normale avant les quatre premiers rebonds sont constants (Tab. 3.1). Ceci a été vérifié quelle que soit la pale et quelles que soient les conditions initiales détaillées dans le Tab. 2.4. Les rebonds suivants, s'ils existent, ont généralement une hauteur de rebond inférieure aux erreurs expérimentales, et ils ne sont donc pas exploités.

| Numéro du rebond | Angle d'incidence |
|------------------|-------------------|
| 1 | 0° |
| 2 | 51 ± 2° |
| 3 | 64 ± 2° |
| 4 | 71 ± 2° |

TABLE 3.1 – Angles d'incidence avec la normale avant les quatre premiers rebonds.

3.1.3 Effets aérodynamiques¹

On souhaite mesurer l'influence de l'air sur la trajectoire de la particule.

On établit le bilan des forces agissant sur la particule, de centre de gravité (x, y) , dans le repère de la pale $(R') = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$. On recense la force centrifuge, la force de Coriolis, la réaction normale et les frottements supposés soumis à la loi de Coulomb. L'exposant ' correspond aux valeurs dans le repère de la pale.

$$\vec{F}_{centrifuge} = m\Omega^2(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}) \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\Omega(y'\vec{e}_{x'} + x'\vec{e}_{y'}) \quad (3.2)$$

$$\vec{N} = N\vec{e}_{y'} \quad (3.3)$$

$$T = \mu N \quad (3.4)$$

On introduit les équations paramétriques du rebond i sans prendre en compte le flux d'air. On suppose que les vitesses de la particule $(\dot{x}_i$ et $\dot{y}_i)$ sont constantes durant un rebond, dans le repère du laboratoire (R) :

$$x'_i(t) = X_M \cos(\omega) - Y_M \sin(\omega) \quad (3.5)$$

$$y'_i(t) = -X_M \sin(\omega) - Y_M \cos(\omega) \quad (3.6)$$

où ω est la position de la pale en fonction du temps : $\omega = \Omega(t - t_i) + \theta_i$ avec θ_i et t_i , les conditions initiales du rebond : l'orientation de la pale avec l'axe des (Ox) et le temps. Sans effet de l'air, la trajectoire de la particule dans le repère du laboratoire est linéaire entre deux impacts :

$$X_M = x_i(t_i) + \dot{x}_i(t - t_i) \quad (3.7)$$

$$Y_M = y_i(t_i) + \dot{y}_i(t - t_i) \quad (3.8)$$

On souhaite vérifier expérimentalement ces équations.

Dans un premier temps, la figure 3.3 représente la trajectoire de la particule dans le repère du laboratoire (R). Cette figure permet de vérifier que la trajectoire de la particule est linéaire entre deux impacts. Ceci laisse supposer que l'air a un effet minime.

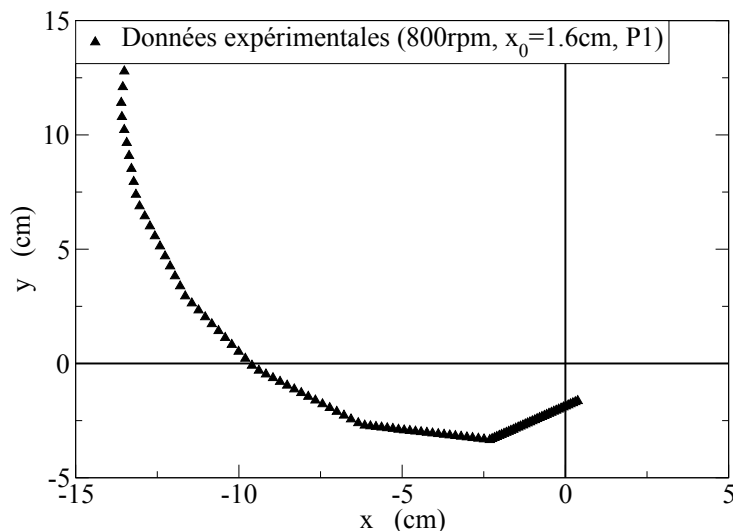


FIGURE 3.3 – Trajectoire d'une bille plastique sur la pale P1 dans le repère du laboratoire (R) ($x_0 = 1.6\text{cm}$ et $\Omega = 800\text{tours/min}$).

Dans un second temps, on détecte expérimentalement :

- les conditions initiales avant chaque impact i : $x_i(t_i)$, $y_i(t_i)$, θ_i et t_i ,
- et les positions de la particule à chaque pas de temps t durant le rebond : $x'_i(t)$ et $y'_i(t)$.

On ajuste les vitesses (\dot{x}_i et \dot{y}_i) des équations Eqs. 3.5,3.6,3.7,3.8 avec les données expérimentales. La figure 3.4 compare les points expérimentaux et les équations théoriques ajustées. On observe au maximum 3% d'erreurs entre les vitesses expérimentales et celles issues de l'ajustement des équations théoriques, quelles que soient les conditions expérimentales (3 à 6 rebonds ont été exploités en fonction de la longueur de la phase de rebonds). Le modèle sans prendre en compte le flux d'air montre donc de bons accords avec les données expérimentales. On peut donc supposer que l'air n'influe pas de manière significative sur la trajectoire de la particule.

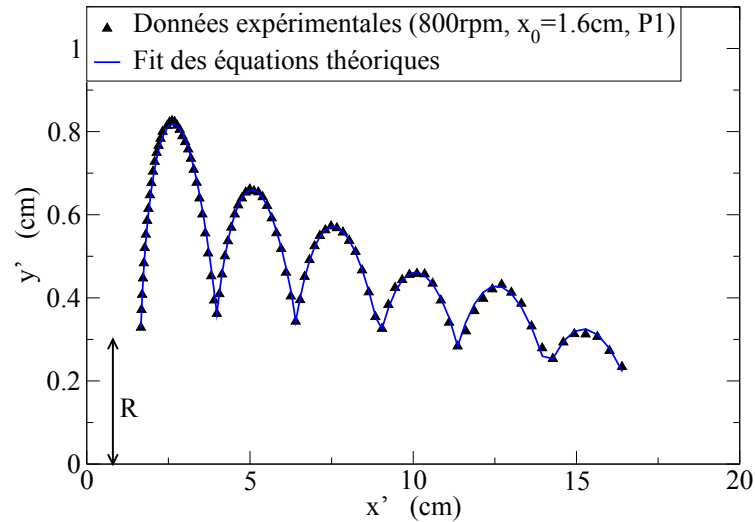


FIGURE 3.4 – Trajectoire expérimentale d’une bille plastique sur la pale P1 dans le repère de la pale (R') ($x_0 = 1.6$ cm et $\Omega = 800$ tours/min) et ajustement des Eqs. 3.5,3.6 avec les données expérimentales.

3.1.4 Vitesse du centre de masse et vitesse angulaire

On représente la vitesse \dot{x} selon (Ox') et la vitesse angulaire $R\dot{\theta}_z$ de la particule le long de la pale (Fig. 3.5).

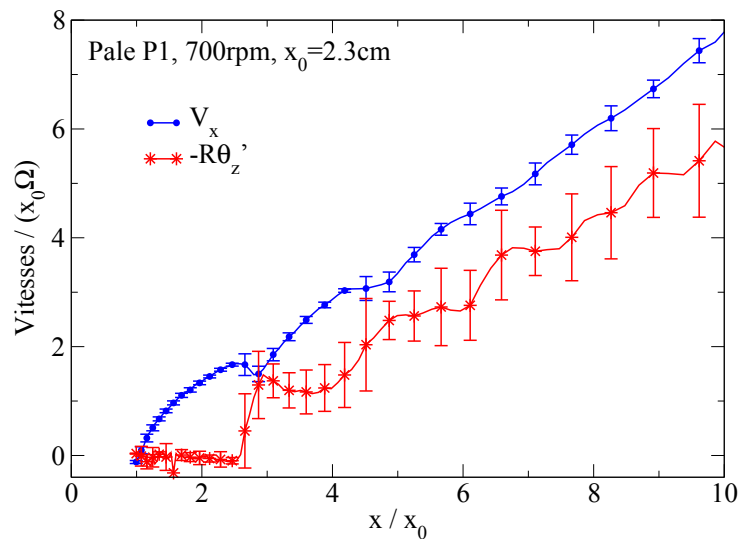


FIGURE 3.5 – Vitesse \dot{x} selon (Ox') et vitesse angulaire $R\dot{\theta}_z$ adimensionnées par $x_0\Omega$ le long de la pale (P1, 700tours/min, $x_0 = 2.3$ cm).

La vitesse selon (Ox') diminue sensiblement lors des rebonds à cause de la dissipation par frottement le long de la pale, puis pour des positions ($x/x_0 > 6$), la vitesse augmente linéairement le long de la pale. Les écarts-types sur la vitesse angulaire sont 3 à 4 fois plus importants que les écarts-types sur la vitesse selon (Ox'). On observe tout de même que la vitesse angulaire est quasiment constante entre

deux impacts. Puis pour des positions ($x/x_0 > 6$), elle augmente approximativement linéairement.

3.2 Etude des chocs à hautes vitesses

Sur l'épandeur centrifuge, les vitesses des particules peuvent atteindre 10 à 30 m/s en fonction de la vitesse de rotation de la pale Ω . Or, les paramètres mécaniques (r_n et μ) entre les particules plastiques et les cinq pales différentes, ont été déterminés dans le chapitre 2, à faibles vitesses (1 à 2 m/s). On souhaite donc re-mesurer ces paramètres mécaniques à hautes vitesses à partir de la méthode de [Foerster et al., 1994]. Pour la lisibilité de la section, on ne représente que les valeurs mesurées sur la pale P1.

3.2.1 Coefficient de restitution

Dans un premier temps, on fait varier la vitesse d'impact. La figure 3.6 compare les coefficients de restitution mesurés à faibles vitesses au chapitre 2, et les coefficients de restitution lors du premier choc sur la pale en rotation. On ne fait pas varier l'angle d'impact (le premier choc sur la pale en rotation est toujours normal). La vitesse d'impact est définie dans ce cas par $x_0\Omega$.

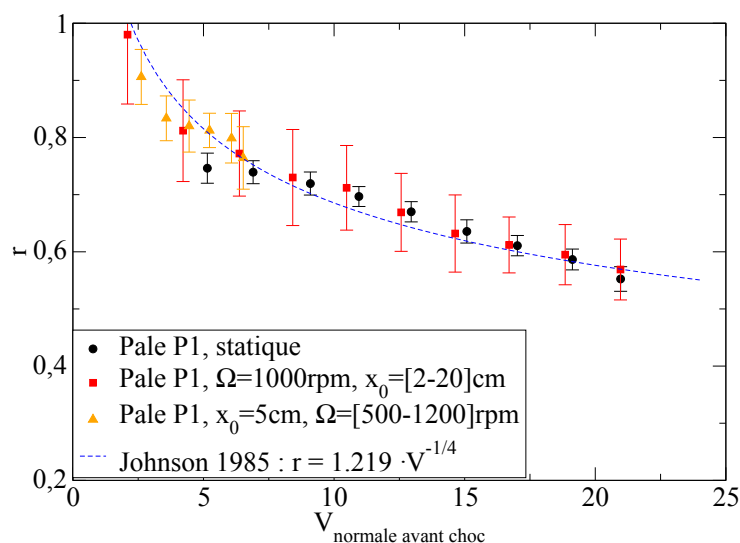


FIGURE 3.6 – Coefficient de restitution en fonction de la vitesse d'impact pour le premier choc sur la pale rotative. Comparaison avec les valeurs du coefficient de restitution à faibles vitesses (pale P1).

On observe que faire varier x_0 est équivalent à faire varier Ω . De plus, les variations de r_n sont équivalentes sur la pale statique et sur la pale en rotation. Les effets d'inertie n'influent pas de manière significative sur le coefficient de restitution normal.

Dans nos conditions expérimentales (Tab. 2.4), la vitesse d'impact lors du premier rebond, définie par $V_{y0} = x_0\Omega$, sera toujours inférieure à 6m/s. Les vitesses d'impact des n rebonds suivants seront toujours inférieures à la vitesse du premier impact car $r_n < 1$. Dans cette plage de vitesse ($V_{yn} < 6\text{m/s}$), le coefficient de restitution r_n varie légèrement avec la vitesse d'impact.

Dans un second temps, on fait varier l'angle d'incidence. La figure 3.7 représente les coefficients de restitution mesurés sur la pale en rotation pour les quatre premiers chocs. On a vu précédemment que les angles d'incidence sont constants à chaque impact (voir Tab. 3.1). On observe que le coefficient de restitution varie peu avec l'angle d'impact, les écarts-types sont toutefois importants.

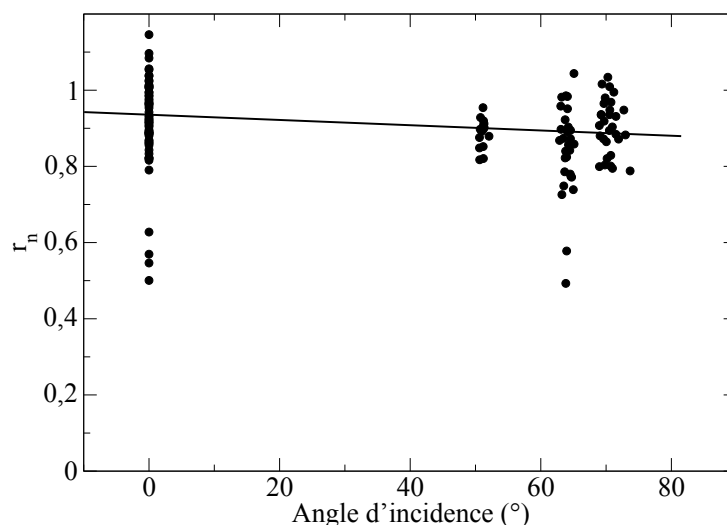


FIGURE 3.7 – Coefficient de restitution en fonction de l'angle d'incidence. Les vitesses d'impact sont constantes à 2m/s (pale P1).

On a défini un coefficient de restitution moyen sur les quatre premiers rebonds pour les 5 pales (cf. Tab. 3.2). Les valeurs mesurées sur pale rotative sont peu différentes de celles mesurées lors d'un impact normal sur pale statique (Tab. 2.2) : de +1 à +7%, excepté pour la pale P3 : -25%. Ceci peut provenir des propriétés intrinsèques du revêtement (le verni).

| Pale | r_n |
|------|------------------------|
| P1 | $r_n = 0.875 \pm 0.02$ |
| P2 | $r_n = 0.76 \pm 0.06$ |
| P3 | $r_n = 0.68 \pm 0.06$ |
| P4 | $r_n = 0.88 \pm 0.05$ |
| P5 | $r_n = 0.80 \pm 0.06$ |

TABLE 3.2 – Coefficient de restitution normal moyen pour les quatre premiers rebonds.

3.2.2 Coefficient de frottement

L'étude du coefficient de frottement par la méthode de Foerster est compliquée à mettre en œuvre car, d'une part la vitesse de choc n'est pas constante pour chaque impact, mais d'autre part la vitesse angulaire varie d'un impact à l'autre. On a comparé les courbes $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ pour la pale P1 en distinguant les valeurs de chaque impact, i.e. ce classement est équivalent à celui de [Thornton, 2009] basé sur le paramètre : $\Phi_1 = R\dot{\theta}_{z1}/g_{y1}$.

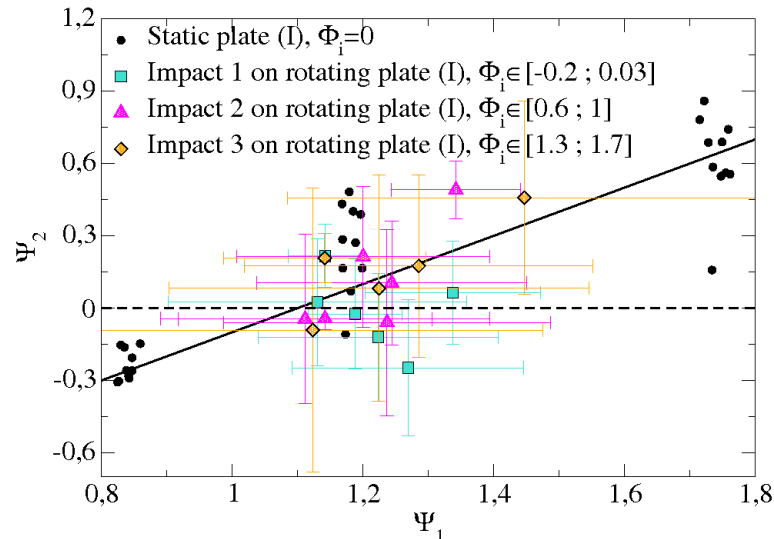


FIGURE 3.8 – $\Psi_2 = f(\Psi_1)$ pour les collisions entre les particules et la pale P1 en statique et en dynamique. Ces dernières ont été classifiées selon le Φ_1 de Thornton.

(i) On observe que les valeurs de l'angle d'impact adimensionnés Ψ_1 varient peu : $1.1 < \Psi_1 < 1.5$. On se trouve toujours dans le cas d'un choc glissant. Il est ainsi impossible de déterminer le coefficient de restitution tangentiel β .

(ii) L'interpolation de la courbe en statique donnait $\Psi_2 = \Psi_1 - 1.1$. On a fait de même pour les impacts sur pale en rotation :

- $\Psi_2 = \Psi_1 - 1.1$ pour l'impact 2,
- $\Psi_2 = \Psi_1 - 1.08$ pour l'impact 3.

La vitesse angulaire après l'impact 1, est très faible, c'est pourquoi on a de fortes erreurs expérimentales sur la mesure des angles adimensionnés Ψ_1 . Pour les deux autres chocs, la vitesse d'impact relative est comprise entre 2 et 7m/s ce qui correspond à une variation du coefficient de restitution compris entre 0.9 et 0.75. En appliquant la méthode de Foerster, le coefficient de frottement varie seulement de 5% par rapport à la valeur en statique (cf. Tab. 2.2). On peut donc supposer que les effets d'inertie n'ont également pas d'influence significative sur le coefficient de frottement. Dans la suite, on utilisera les valeurs du frottement mesurées avec précision en statique.

3.3 La phase de rebonds

Suite à cette étude microscopique des chocs, on va comparer les paramètres caractéristiques de la trajectoire (longueur des sauts, vitesses, temps d'accélération) pour les différentes pales. On utilise les valeurs de r_n Tab. 3.2 et les valeurs de μ Tab. 2.2.

3.3.1 Paramètres de scaling

Les équations de la trajectoire dans le repère de la pale Eqs. 3.5 et 3.6 peuvent être réécrites en fonction de la position et de la vitesse dans le repère de la pale, en utilisant les relations trigonométriques. Les vitesses $x'_i(t_i)$ et $y'_i(t_i)$ sont mesurées juste après le choc i :

$$x'_i(t) = X_M \cos(\Omega(t - t_i)) - Y_M \sin(\Omega(t - t_i)) \quad (3.9)$$

$$y'_i(t) = -X_M \sin(\Omega(t - t_i)) - Y_M \cos(\Omega(t - t_i)) \quad (3.10)$$

et

$$X_M = x'_i(t_i) + \tilde{x}'_i(t - t_i) \quad (3.11)$$

$$Y_M = y'_i(t_i) + \tilde{y}'_i(t - t_i) \quad (3.12)$$

Pour adimensionner ces équations, on pose $\tilde{t} = \Omega(t - t_i)$, $\tilde{x}' = \frac{1}{x'_i(t_i)}(x'_i(t) - x'_i(t_i))$ et $\tilde{y}' = \frac{\Omega}{\tilde{y}'_i(t_i)}(y'_i(t) - y'_i(t_i))$.

Les figures 3.9 et 3.10 représentent les équations paramétriques $\tilde{x}' = f(\tilde{t})$ et $\tilde{y}' = f(\tilde{t})$ pour la pale P1 en faisant varier les paramètres du système (Tab. 2.4).

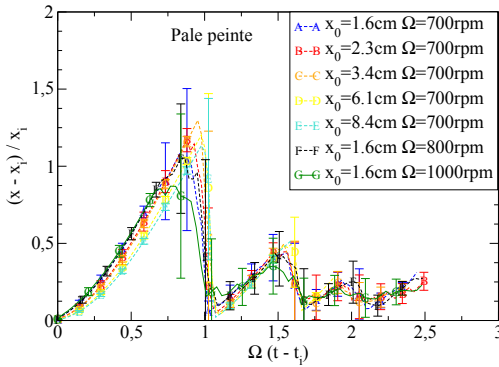


FIGURE 3.9 - $\tilde{x}_i = f(\tilde{t})$ Equation paramétrique en x pour la pale peinte.

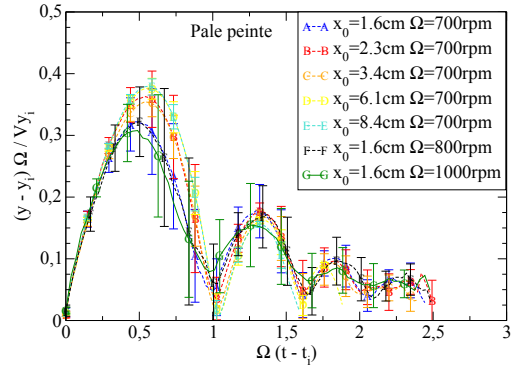


FIGURE 3.10 - $\tilde{y}_i = f(\tilde{t})$ Equation paramétrique en y pour la pale peinte.

3.3.2 Position de collage

On estime que la particule est en phase de collage si les fluctuations sur la coordonnée selon (Oy') de la particule, sont inférieures à $R + \delta y'$, c'est-à-dire inférieures

au rayon de la bille plus les erreurs expérimentales.

La Fig. 3.11 représente la position de collage x_s en fonction de la position initiale x_0 de la bille pour deux pales différentes.

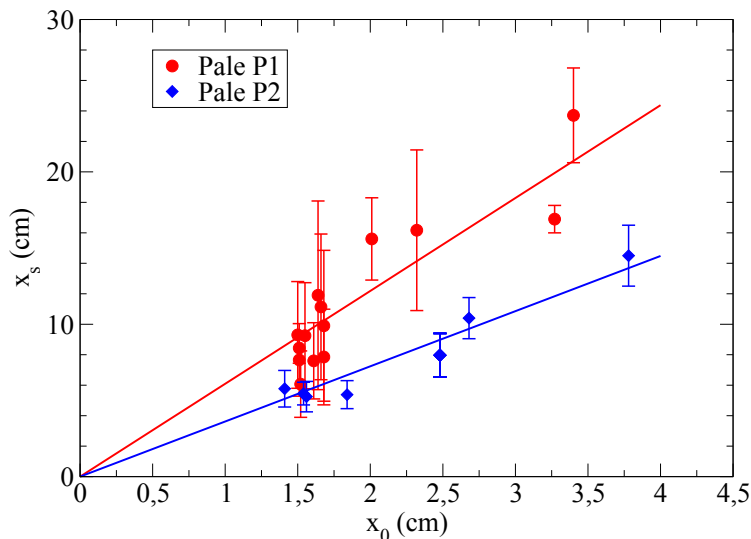


FIGURE 3.11 – Position du collage en fonction de la position initiale pour deux pales différentes.

La longueur de saut varie linéairement avec x_0 et dépend de la pale. On a mesuré cette longueur de saut pour toutes les pales. La position de collage x_s est résumée dans le tableau 3.3.

| Pale | x_s |
|------|----------------------|
| P1 | $x_s \approx 6.0x_0$ |
| P2 | $x_s \approx 3.6x_0$ |
| P3 | $x_s \approx 2.7x_0$ |
| P4 | $x_s \approx 8.7x_0$ |
| P5 | $x_s \approx 4.0x_0$ |

TABLE 3.3 – Positions de collage des particules plastiques estimées expérimentalement.

3.4 La phase de collage

3.4.1 Vitesse de glissement

On a vu dans le chapitre 1 que la vitesse du point de contact entre la bille et la pale (ou vitesse de glissement V_g), permet de déterminer le régime de la particule. Par définition si $V_g > 0$ la bille roule et glisse simultanément (R+G) et si $V_g = 0$ la bille roule sans glisser (R-G). Les précédentes investigations sur pale rotative ([Patterson and Reece, 1962] suivies par [Colin, 1997]) ont montré théoriquement

qu'une particule ne peut pas atteindre ou rester dans un régime de roulement sans glissement.

On souhaite mesurer expérimentalement ces vitesses de glissement. Dans les expérimentations, on suppose que la particule atteint le régime de roulement sans glissement, si la vitesse de glissement est inférieure aux erreurs expérimentales. Il faut tout d'abord évaluer l'erreur expérimentale sur la vitesse de glissement. L'erreur sur la position de la bille est de l'ordre de $\delta x = 2\text{mm}$. On en déduit l'erreur sur la vitesse selon (Ox') de la bille en fin de pale, c'est-à-dire à une position $x=25\text{cm}$: $\delta \dot{x} = \frac{\delta x}{x_{t+1}-x_t} = 0.1\text{m/s}$ et l'erreur sur la vitesse angulaire $R\delta\dot{\theta} = 0.4\text{m/s}$. On a ainsi à 700tours/min : $\delta V_g/(R\Omega) = 2.5$

La Fig. 3.12 représente la vitesse de glissement de la particule avec les pales P1 et P2 ($x_0 = 1.6\text{cm}$, $\Omega \in [500 - 800]\text{tours/min}$). Un lissage a été effectué pour supprimer le bruit expérimental présent sur les courbes (type Smoothing, moyenne des 5 points adjacents). La longueur de la phase de rebonds vaut $x_s = 10\text{cm}$ pour la pale P1 et $x_s = 6\text{cm}$ pour la pale P2.

Deux régimes différents semblent apparaître :

⇒ avec la pale P1, la vitesse de glissement est légèrement croissante dans la phase de collage quelle que soit Ω ,

⇒ avec la pale P2, la vitesse de glissement est inférieure aux erreurs expérimentales quelle que soit Ω . Les oscillations autour de 0, laissant apparaître $V_g < 0$, sont dues aux imprécisions sur la mesure de la vitesse angulaire.

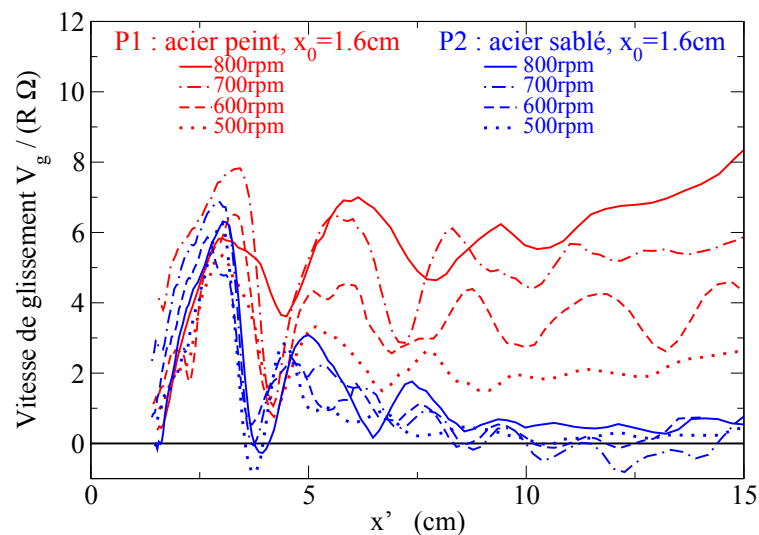


FIGURE 3.12 – Vitesse de glissement adimensionnée de la particule en fonction de la position selon (Ox') . Pales P1 et P2, $x_0 = 1.6\text{cm}$, $\Omega \in (500-800)$ tours/min.

Avec la pale P1, la particule semble être en roulement avec glissement (R+G) alors qu'avec la pale P2, elle semble être en roulement sans glissement (R-G). La vitesse de glissement dépend de Ω , mais elle ne change pas le régime de la particule.

3.4.2 Temps d'accélération sur la pale

On mesure le temps t_e que met la bille pour parcourir la distance $x_e - x_0$, où x_e est la position en fin de pale prise à 25cm. On en déduit l'angle $\theta_e = \Omega t_e$ que parcourt la pale pendant la phase d'accélération de la bille. On représente sur la figure 3.13, l'angle parcouru par la pale Ωt_e , durant l'accélération de la bille, en fonction de $\ln(x_0/R)$. On a remarqué expérimentalement que cet angle diminue exponentiellement avec x_0/R .

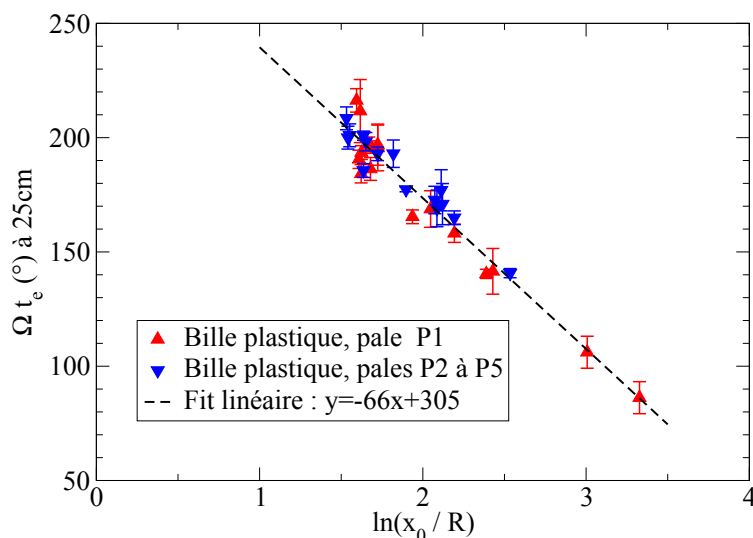


FIGURE 3.13 – Angle de sortie de pale Ωt_e en fonction de $\ln(x_0/R)$ pour les billes plastiques.

Le changement de pale n'induit pas de différence significative sur l'angle de sortie. Cela signifie que dans la plage de variations de r_n et μ , correspondant aux différents couples particule/pale, ces deux paramètres ont peu d'influence sur l'angle de sortie.

3.4.3 Vitesse du centre de masse et vitesse angulaire

On représente la vitesse V_{x_e} selon (Ox') et la vitesse angulaire $R\dot{\theta}_e$ de la particule en fonction de $x_0\Omega$ en fin de pale, c'est-à-dire pour une position $x = 25\text{cm}$ (Figs. 3.14(a), 3.14(b)). La pale P1 est traitée séparément car le nombre d'expériences réalisées est plus important.

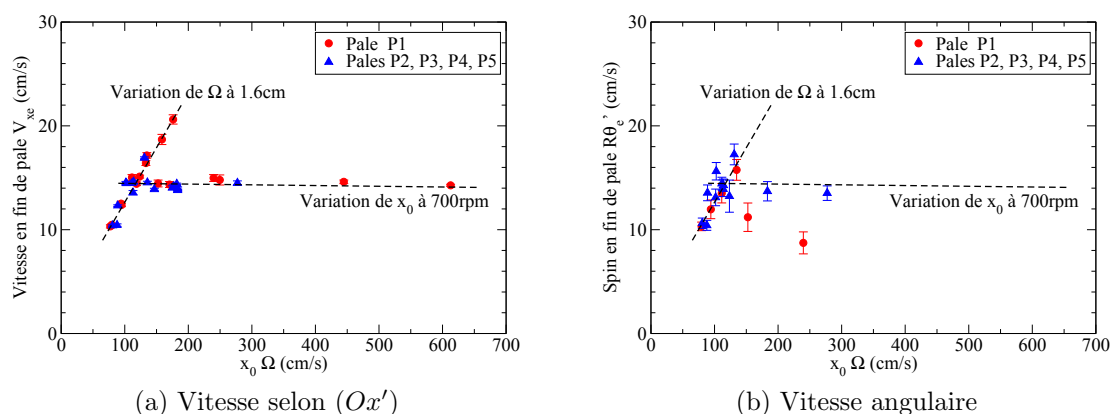


FIGURE 3.14 – Vitesses de la particule en fin de pale ($x = 25\text{cm}$) en fonction de $x_0\Omega$ pour les différentes pales.

(i) Les vitesses augmentent linéairement avec Ω . La vitesse selon (Ox') semble indépendante de x_0 . En revanche, la variation de la vitesse angulaire avec x_0 dépend du type de pale.

(ii) Dans la plage de variations de r_n et μ , correspondant aux différents couples particule/pale, ces deux paramètres ont peu d'influence sur la vitesse selon (Ox') en fin de pale. Ces deux paramètres semblent avoir une influence sur la vitesse angulaire de la particule mais cette influence est difficilement estimable étant données les erreurs expérimentales.

3.5 Conclusions

Ce chapitre donne un aperçu de l'ensemble des expérimentations réalisées en lâchant une particule sphérique le long d'une pale en rotation. Le dispositif mécanique et électronique a été conçu spécialement pour cette étude. L'ensemble des expériences a été filmé par caméra rapide à 3000images/seconde.

Dans un premier temps, une étude approfondie des chocs à vitesses élevées à été réalisée. On a utilisé la méthode de [Foerster et al., 1994] pour mesurer les valeurs des paramètres mécaniques (r_n et μ) sur la pale en rotation. On a comparé ces valeurs à celles obtenues sur pale statique. On retrouve les mêmes variations du coefficient de restitution normal avec la vitesse d'impact (l'angle d'impact a peu d'influence sur le coefficient de restitution normal). En revanche, le coefficient de frottement est difficilement mesurable sur la pale en rotation. En effet, les valeurs des angles adimensionnés de Foerster Ψ_{12} , sont quasiment identiques pour les premiers rebonds. Les valeurs de frottement obtenues sont proches de celles obtenues sur pale statique.

Dans un second temps, une étude complète de la trajectoire des particules a été proposée. Celle-ci se compose d'une phase de rebonds puis d'un régime de roulement

CHAPITRE 3. TRAJECTOIRE EXPÉRIMENTALE LE LONG D'UNE PALE ROTATIVE

avec/sans glissement. Une attention particulière a été apportée à la mesure des vitesses angulaires des particules. Ces expériences ont permis d'obtenir les grandeurs caractéristiques suivantes : la longueur de la phase de saut, la vitesse selon (Ox') et la vitesse angulaire en fin de phase de saut et en fin de pale, et le temps d'accélération des particules. Les effets aérodynamiques ont une influence non significative sur la trajectoire de la particule.

Chapitre 4

Modélisation analytique/dynamique moléculaire de la trajectoire

Suite à cette importante campagne de mesures expérimentales, nous avons mis en évidence certains phénomènes inattendus. Par exemple, l'effet de l'air est négligeable sur la trajectoire de la particule, les effets inertiels n'ont pas d'influence sur les paramètres mécaniques d'interaction bille/pale, ou encore l'apparition d'un coefficient de frottement critique au-delà duquel la particule roule sans glisser.

Ce chapitre a pour but de proposer une modélisation analytique de la trajectoire d'une particule le long d'une pale rotative. Des modélisations ont déjà été proposées auparavant : [Patterson and Reece, 1962] puis [Colin, 1997]. L'originalité de notre modélisation repose sur la prise en compte de la phase de rebonds contrairement aux modèles précédents. Un modèle numérique, basé sur la dynamique moléculaire, a été utilisé en parallèle. On utilise une loi viscoélastique linéaire de type Spring-Dashpot. Les forces normales et tangentielles sont issues du modèle de [Cundall and Strack, 1979] : Eqs. 1.9,1.13,1.30,1.31. On suppose qu'il n'y a pas d'amortissement visqueux tangentiel. On a choisi d'utiliser une valeur phénoménologique pour le coefficient de frottement qu'on a prise égale au frottement de Foerster (Tab. 2.2).

Ces deux modèles (analytique et DEM) sont sensiblement équivalents dans le cas mono particule. Ce chapitre a notamment pour rôle de vérifier leur bon accord.

Dans ce chapitre, on va décrire de façon détaillée la trajectoire d'une particule en négligeant l'effet de l'air. Dans un premier temps, la définition des nombres caractéristiques va permettre d'estimer pour quels matériaux cette théorie est valide. Ensuite, en explicitant les simplifications effectuées dans le modèle analytique, on détaillera les équations de la phase de rebonds puis de la phase de roulement avec/sans glissement. On s'attardera sur l'influence de la vitesse angulaire et des rebonds sur la trajectoire de la particule. Enfin, on testera ce modèle analytique à partir des expérimentations exposées dans le chapitre 3.

4.1 Définition de nombres caractéristiques

A partir des équations des forces s'appliquant sur la particule, Eqs. 3.1à3.4, on applique le principe fondamental de la dynamique :

- dans la direction $\vec{e}_{x'}$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\Omega^2 x - \mu N + 2m\Omega \frac{dy}{dt} \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = \underbrace{(\Omega t_c)^2}_{N_t} \tilde{x} - \mu \tilde{N} + 2 \underbrace{(\Omega t_c)}_{N_t} \frac{R}{L} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} \quad (4.2)$$

Avec $x = L\tilde{x}$, $y = R\tilde{y}$, $t = t_c\tilde{t}$, $N = \frac{mL}{t_c^2}\tilde{N}$.

L'équation adimensionnée selon $\vec{e}_{x'}$ (Eq. 4.2), laisse apparaître un nombre temporel sans dimension :

$$N_t = \Omega t_c \quad (4.3)$$

où t_c est le temps de collision entre deux matériaux. Pour une collision entre une particule et un mur, t_c s'exprime en fonction des paramètres mécaniques $t_c^2 = m \left(\frac{\pi^2 + (\ln r_n)^2}{K_n} \right)$.

Si le nombre temporel $N_t \ll 1$, cela signifie que le temps de collision est suffisamment court pour que la collision puisse être considérée comme instantanée. Les forces d'inertie n'ont donc pas d'effet sur la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$.

- dans la direction $\vec{e}_{y'}$ (on néglige la force centrifuge) :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - 2m\Omega \frac{dx}{dt} \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{d\tilde{t}^2} = \tilde{N} - 2 \underbrace{\left(\frac{x_0 \Omega}{R/t_c} \right)}_{N_c} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \quad (4.5)$$

Avec $y = R\tilde{y}$, $x = x_0\tilde{x}$, $t = t_c\tilde{t}$, $N = \frac{mR}{t_c^2}\tilde{N}$.

L'équation adimensionnée selon $\vec{e}_{y'}$ (Eq. 4.5), laisse apparaître un nombre centrifuge sans dimension :

$$N_c = \frac{x_0 \Omega}{R/t_c} \quad (4.6)$$

Pour comprendre le nombre centrifuge, il faut le décomposer :

D'une part, la vitesse de la pale à la position x_0 vaut $x_0\Omega$. D'autre part, la vitesse typique d'une particule qui rebondit sur un mur statique d'une hauteur égale à son rayon R peut être écrite $\dot{x} \sim R/t_c$. Le nombre centrifuge correspond donc au rapport de ces deux vitesses.

- Si $N_c \gg 1$, la vitesse de la pale est bien supérieure à celle de la bille, la particule n'est pas capable de rebondir, on est en régime de collage.

- Au contraire si $N_c \ll 1$, l'effet de la pale est négligeable sur les caractéristiques de l'impact, la particule rebondit.

Si on utilise des particules pour lesquelles $N_c \ll 1$ et $N_t \ll 1$, chaque collision peut être considérée comme instantanée et équivalente à une collision sur pale statique, autrement dit les effets inertiels seront négligeables.

On mesure ces deux paramètres pour nos particules plastiques ($K_n = 75 \cdot 10^3$ N/m, $m = 0.2g$, $R = 3mm$, $r_n = 0.8$), on obtient avec $x_0 = 2cm$, $\Omega = 80rad/s$:

$$N_c = 0.09 \quad (4.7)$$

$$N_t = 0.01 \quad (4.8)$$

pour un temps de collision de $t_c = 0.2ms$. Ces deux nombres centrifuges sont relativement faibles pour que l'on puisse considérer les collisions instantanées et équivalentes à une collision sur pale statique. Ceci explique que dans le chapitre 3 en mesurant les valeurs des paramètres mécaniques sur pale rotative, on ait retrouvé les mêmes valeurs que sur la pale statique.

On introduit un autre nombre caractéristique N_{air} qui caractérise l'importance de l'air (de masse volumique $\rho_{air} = 1kg/m^3$) par rapport à la force centrifuge :

$$N_{air} = C_d \frac{\rho_{air}}{\rho_{bille}} \left(\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\Omega^2 x R} \right) \quad (4.9)$$

On mesure ce nombre pour nos particules plastiques ($\rho_{bille} = 1768kg/m^3$, $R = 3mm$, $\frac{dx}{dt} = 13m/s$), pour une vitesse de rotation $\Omega = 500tours/min$, à l'extrémité de la pale $x = 0.3m$. L'effet de l'air est plus important en bout de pale, car la vitesse de la bille est plus importante. On obtient $N_{air} = 2\%$. L'air a donc peu d'effet sur la trajectoire des particules plastiques.

4.2 La phase de rebonds

On va traiter, dans un premier temps, la phase de rebonds. Les positions selon \vec{x} des rebonds, notées x_0, x_1, \dots, x_s , ont une hauteur de H_0, H_1, \dots, H_s (cf. Fig. 4.1). On suppose que la particule ne rebondit plus lorsque $\frac{H_s}{R} \leq \frac{1}{100}$.

Chaque collision particule-pale peut être caractérisée par le modèle de [Walton, 1988] à trois paramètres supposés constants r_n , μ et β . Si [Maw et al., 1981] et [Johnson, 1982] ont démontré l'importance de considérer β due à la compliance tangentielle élastique, [Gorham and Kharaz, 2000] estiment que les caractéristiques des rebonds sont correctement décrites par seulement deux paramètres (r_n et μ), si l'angle d'incidence avec la normale est supérieur à 30° .

Dans notre étude, sur la pale rotative, les angles d'incidence sont toujours supérieurs à 30° au-delà du second impact, quelles que soient les conditions expérimenta-

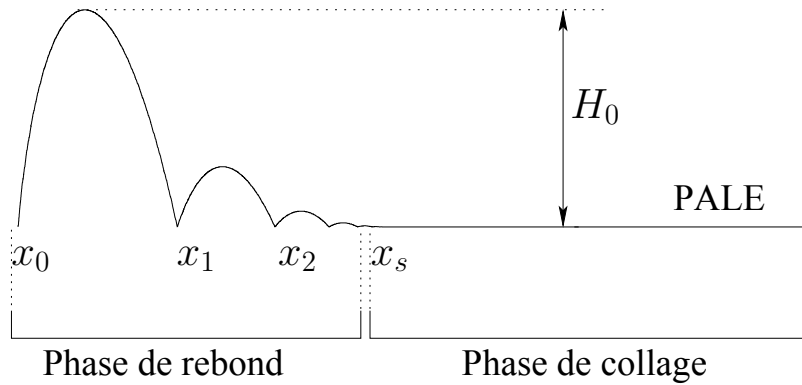


FIGURE 4.1 – Schématisation de la trajectoire de la particule dans le repère de la pale.

les (Tab. 2.4). On a donc choisi de représenter chaque collision par le modèle simplifié à deux paramètres dans le modèle analytique et dans le modèle de dynamique moléculaire.

On décompose le problème en étudiant tout d'abord la trajectoire de la particule entre deux impacts i.e. durant le vol balistique (l'air est supposé sans effet). Puis on étudie les variations de vitesses pendant un impact. On définit enfin les paramètres mesurés dans les expérimentations : la position, la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ et la vitesse angulaire en fin de phase de saut.

4.2.1 Vol balistique entre deux impacts

4.2.1.1 Cas particulier : le premier rebond

Dans la phase de saut, comme on néglige l'effet de l'air, la trajectoire de la particule est linéaire entre deux impacts (cf. Fig. 4.2). On traite le premier impact séparément car l'approximation sur le temps de vol ($t_{flight1} \ll \Omega^{-1}$) n'est pas valide.

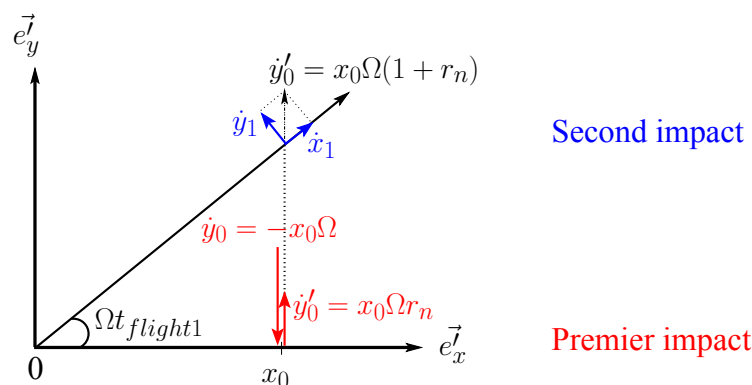


FIGURE 4.2 – Schématisation de la trajectoire de la particule dans le repère du laboratoire entre les deux premiers impacts.

La position selon $\vec{e}_{x'}$ au second impact x_1 s'écrit :

$$x_1 = \frac{x_0}{\cos(\Omega t_{flight_1})} \quad (4.10)$$

où t_{flight_1} est le temps de vol entre les deux premiers impacts. Le temps de vol est solution de

$$\tan(\Omega t_{flight_1}) = \frac{\dot{y}_0 t_{flight_1}}{x_0} = \Omega(1 + r_n)t_{flight_1} \quad (4.11)$$

En utilisant un développement de Taylor au troisième ordre de la fonction tangente, on en déduit le temps de vol :

$$t_{flight_1} = \frac{\sqrt{5}}{2\Omega} \sqrt{-1 + \left(1 + \frac{24}{5}r_n\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.12)$$

Les vitesses avant l'impact 1 s'écrivent :

$$\dot{x}_1 = x_0\Omega(1 + r_n)\sin(\Omega t_{flight_1}) \quad (4.13)$$

$$\dot{y}_1 = x_0\Omega(1 + r_n)\cos(\Omega t_{flight_1}) - x_1\Omega \quad (4.14)$$

$$= x_0\Omega \left[(1 + r_n)\cos(\Omega t_{flight_1}) - \frac{1}{\cos(\Omega t_{flight_1})} \right] \quad (4.15)$$

4.2.1.2 Cas général : les autres rebonds

La trajectoire de la particule peut être écrite ainsi :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i t_{flight} + \mathbf{x}_i \quad (4.16)$$

où t_{flight} est le temps de vol entre les impacts numérotés i et $i + 1$. L'équation de la pale rotative est :

$$y_i = \tan(\Omega t_{flight})x_i \quad (4.17)$$

On fait l'hypothèse que $\tan(\Omega t_{flight}) \approx \Omega t_{flight}$ bien que cette hypothèse ne soit pas valide pour les premiers impacts. Le temps de vol s'exprime alors par :

$$t_{flight} = -\frac{r_n \dot{y}_i}{\Omega \dot{x}_i} \quad (4.18)$$

On calcule la vitesse selon $\vec{e}_{y'}$ avant un impact (repère pale) :

$$\dot{y}_{i+1} = \frac{y_i - y_{i+1}}{t_{flight}} = \frac{\tan(\Omega t_{flight})}{t_{flight}}(x_i - x_{i+1}) = \Omega(x_i - x_{i+1}) < 0 \quad (4.19)$$

sachant qu'avec les Eqs. 4.16 et 4.18, on a :

$$x_i - x_{i+1} = -\dot{x}_i t_{flight} = \frac{r_n \dot{y}_i}{\Omega} \quad (4.20)$$

On déduit la relation de récurrence sur \dot{y}_{i+1} (Eq. 4.21). En intégrant cette suite géométrique, on obtient une équation de la vitesse selon $\vec{e}_{y'}$ de la particule avant un impact. L'Eq. 4.23 à la différence de l'Eq. 4.22 traite le premier impact séparément.

$$\dot{y}_{i+1} = r_n \dot{y}_i \quad (4.21)$$

$$\dot{y}_i = r_n^i \dot{y}_0 \quad (4.22)$$

$$\dot{y}_{i-\text{impact}1} = r_n^{i-1} \dot{y}_1 \quad (4.23)$$

De la même façon, on déduit l'équation de récurrence de la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ avant impact :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{x_i \Omega (-r_n \dot{y}_i)}{\dot{x}_i} \quad (4.24)$$

4.2.2 Impact de la particule avec la pale

On suppose que le choc est glissant. L'équation d'Euler sur le moment des forces s'écrit :

$$I \ddot{\theta}_i = RT = R\mu N \quad (4.25)$$

avec I le moment d'inertie d'une sphère homogène $I = 2/5 m R^2$.

On reprend l'équation du mouvement (Eq. 4.1) sur $\vec{e}_{x'}$ où on néglige la force de Coriolis et on définit la force normale $N = \frac{2mR}{5\mu} \ddot{\theta}_i$. On obtient la variation de la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ durant un impact i :

$$\Delta \dot{x}_i = -\frac{2R}{5} \Delta \dot{\theta}_i + \Omega^2 x_i t_c \quad (4.26)$$

où t_c est le temps de collision entre la particule et la pale. On a $t_c \ll t_{flight}$ tant que la hauteur des rebonds H_i est suffisamment grande, comparée à la taille de la particule R .

De la même façon, on reprend l'équation du mouvement (Eq. 4.4) sur $\vec{e}_{y'}$ où on néglige la force centrifuge. En supposant la collision ponctuelle (si le nombre temporel N_t est très inférieur à 1, la position après impact est sensiblement équivalente à la position avant impact $\Delta x \approx 0$), la variation de la force normale durant l'impact s'écrit :

$$\Delta N = m \Delta \ddot{y} = -m \dot{y}_i (1 + r_n) / t_c \quad (4.27)$$

En utilisant l'équation d'Euler (Eq. 4.25), on obtient la variation de la vitesse angulaire durant un impact i :

$$R \Delta \dot{\theta}_i = -\frac{5\mu}{2} (1 + r_n) \dot{y}_i \quad (4.28)$$

Avec l'équation de récurrence sur \dot{y}_i (Eq. 4.23) et $\dot{y}_i < 0$ on a :

$$R \Delta \dot{\theta}_{i-\text{impact}1} = \frac{5\mu}{2} (1 + r_n) r_n^{i-1} \dot{y}_1 \quad (4.29)$$

La quantité de vitesse angulaire (Eq. 4.29), gagnée durant un impact, augmente avec le frottement. De la même façon, la quantité de vitesse du centre de masse (Eq. 4.26), perdue durant un impact, augmente avec le frottement. L'évolution des vitesses, calculées avec le modèle de dynamique moléculaire, est représentée Fig. 4.3.

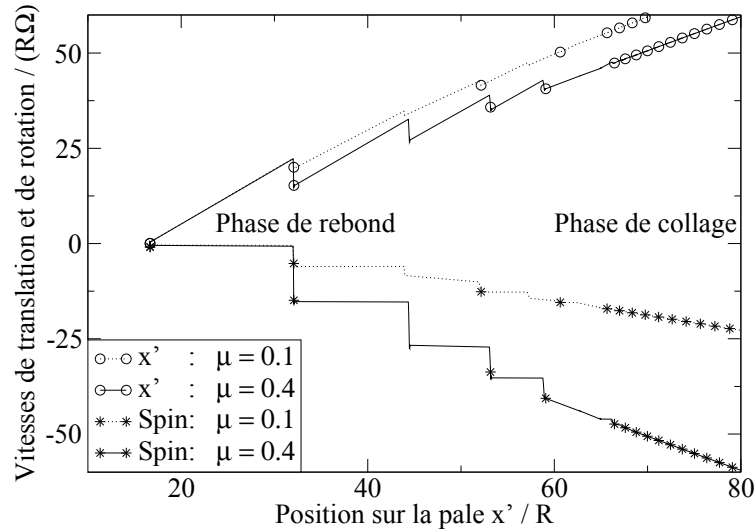


FIGURE 4.3 – Variation des vitesses le long de la pale, à partir du modèle de dynamique moléculaire, en fonction de la distance selon $\vec{e}_{x'}$ de la particule, pour deux frottements donnés.

4.2.3 Position de collage

Si on suppose que la principale variation de la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ de la particule a lieu durant le vol, la position de collage x_s peut être définie à partir de l'Eq. 4.20. On obtient une suite géométrique de raison r_n qui est intégrée pour obtenir la position de collage x_s :

$$x_s = x_0 - \frac{r_n}{\Omega} \sum_{i=0}^{s-1} \dot{y}_i = x_0 + r_n x_0 \sum_{i=0}^{s-1} r_n^i = \frac{x_0}{1 - r_n} \quad (4.30)$$

Le même raisonnement peut être mené en traitant le premier impact séparément, dans ce cas, on obtient :

$$x_{s-impact1} = x_1 + \frac{|\dot{y}_1|}{\Omega} \frac{r_n}{1 - r_n} \quad (4.31)$$

On représente avec le modèle de dynamique moléculaire, l'évolution de la position de collage (Eq. 4.30) sur la Fig. 4.4. Le modèle de dynamique moléculaire prédit que la position de collage dépend légèrement du coefficient de frottement : en effet la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ décroît légèrement durant les impacts. Cependant la position de collage est principalement contrôlée par le coefficient de restitution. x_s tend vers l'infini lorsque le coefficient de restitution r_n tend vers 1. La différence entre le modèle analytique et le modèle de dynamique moléculaire pour les grandes valeurs

de r_n vient de l'approximation $t_{flight} \ll \Omega^{-1}$ qui n'est pas valide quand le temps de vol est élevé i.e. pour les grandes valeurs de r_n .

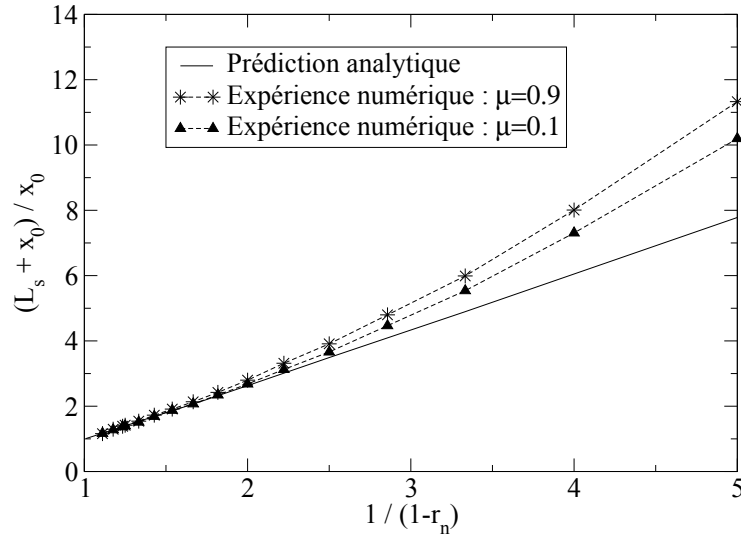


FIGURE 4.4 – Prédiction analytique et dynamique moléculaire de la position de collage en fonction du coefficient de restitution (1000tours/min).

4.2.4 Vitesses en fin de phase de saut

4.2.4.1 Vitesse du centre de masse

Pour simplifier la démonstration, on ne détaille pas le cas où le premier impact est traité séparément. On donnera simplement sa valeur en fin de démonstration. La vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ peut s'écrire en sommant la vitesse acquise durant le vol balistique (Eq. 4.24) et la vitesse perdue lors de l'impact (Eqs. 4.26,4.28) (le temps de contact est supposé faible devant le temps de vol) :

$$\dot{x}_{i+1}\dot{x}_i = \underbrace{\dot{x}_i^2 + x_i x_0 \Omega^2 r_n^{i+1}}_{\text{Vol balistique}} - \underbrace{\mu(1 + r_n)x_0 \Omega r_n^i \dot{x}_i}_{\text{Impact}} \quad (4.32)$$

On fait l'hypothèse que $\dot{x}_i \dot{x}_{i+1} \approx \dot{x}_{i+1}^2$ et on pose $U_i = \dot{x}_i^2$:

$$U_{i+1} = \underbrace{U_i + x_i x_0 \Omega^2 r_n^{i+1}}_{\text{Vol balistique}} - \underbrace{\mu(1 + r_n)x_0 \Omega r_n^i \sqrt{U_i}}_{\text{Impact}} \quad (4.33)$$

L'équation de la vitesse créée par le vol balistique est résolue à la position $x_i = x_s$ (Eq. 4.30) :

$$U_{flight} = U_0 + \frac{x_0^2 \Omega^2}{1 - r_n} \sum_{i=0}^s r_n^{i+1} \quad (4.34)$$

$$= \frac{x_0^2 \Omega^2 r_n}{(1 - r_n)^2} \quad (4.35)$$

La partie de la vitesse perdue lors de l'impact (en $\sqrt{U_i}$) est considérée comme une perturbation de la vitesse créée par le vol balistique (nous vérifierons cette hypothèse dans la suite au §4.4.2.2) :

$$U_{impact} = -\mu(1+r_n)x_0\Omega\sqrt{U_{flight}}\sum_{i=0}^s r_n^i \quad (4.36)$$

$$= -\frac{x_0^2\Omega^2\sqrt{r_n}}{(1-r_n)^2}\mu(1+r_n) \quad (4.37)$$

On peut en déduire la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ de la particule en fin de phase de saut $\dot{x}_s = \sqrt{U_{flight} + U_{impact}}$:

$$\dot{x}_s = \frac{x_0\Omega\sqrt{r_n}}{1-r_n}\sqrt{1-\mu\frac{1+r_n}{\sqrt{r_n}}} \quad (4.38)$$

L'équation suivante néglige la perte de vitesse lors des impacts :

$$\dot{x}_{s-flight} = \frac{x_0\Omega\sqrt{r_n}}{1-r_n} \quad (4.39)$$

Le même développement a été suivi en traitant le premier impact séparément. On obtient :

$$\dot{x}_{s-impact1}^2 = \dot{x}_1^2 - \frac{x_s\Omega\dot{y}_1}{1-r_n} + \sqrt{\dot{x}_1^2 - \frac{x_s\Omega\dot{y}_1}{1-r_n}}\mu\dot{y}_1\frac{1+r_n}{r_n(1-r_n)} \quad (4.40)$$

4.2.4.2 Vitesse angulaire

La vitesse angulaire de la particule étant constante entre deux impacts, seul le gain de vitesse angulaire lors des impacts (Eq. 4.28), est pris en compte pour le calcul de la vitesse en fin de phase de rebonds :

$$R\dot{\theta}_s = R\dot{\theta}_0 - \frac{5\mu}{2}(1+r)x_0\Omega\sum_{i=0}^{n-1} r^i \quad (4.41)$$

$$= -\frac{5\mu}{2}\frac{1+r_n}{1-r_n}x_0\Omega \quad (4.42)$$

Le même calcul est effectué en traitant séparément le premier impact :

$$R\dot{\theta}_{s-impact1} = \frac{5\mu}{2}\frac{1+r_n}{1-r_n}(\dot{y}_0(1-r_n) + \dot{y}_1) \quad (4.43)$$

4.3 La phase de collage

L'étude de la phase de rebonds, est importante car elle a permis la détermination des conditions initiales de la phase de collage. Pour des positions $x > x_s$, la particule reste en contact avec la pale. Elle peut rouler et/ou glisser le long de la pale. Dans cette partie, on souhaite poursuivre l'étude en caractérisant les vitesses selon $\vec{e}_{x'}$ et

les vitesses angulaires de la particule dans la phase de collage. Dans un deuxième temps, on qualifie le régime d'une particule sphérique. Nous avons vu dans le chapitre 1, que le blocage des rotations est une méthode rudimentaire pour modéliser des particules de formes irrégulières. On compare donc la trajectoire de particules avec et sans degré de liberté de rotation. Enfin, on estime l'influence des rebonds sur la trajectoire.

4.3.1 Evolution des vitesses

On reprend les équations du mouvement Eqs. 4.1 et 4.4. Comme la particule est en contact avec la pale, on a $m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$. On en déduit la force normale qui s'applique sur la particule :

$$N = 2m\Omega\dot{x} - mR\Omega^2 \quad (4.44)$$

La position de la particule vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + 2\mu\Omega\dot{x} - \Omega^2x = \Omega^2R\mu \quad (4.45)$$

et admet pour solution

$$x = -\mu R + C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t) \quad (4.46)$$

avec $r_1 = \Omega(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})$ et $r_2 = -\Omega(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})$. Pour les conditions initiales ($t = 0$, $x = x_s$ et $\dot{x} = \dot{x}_s$), on a $C_1 + C_2 = x_s + \mu R$ et $C_1 r_1 + C_2 r_2 = \dot{x}_s$.

On déduit la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ de la particule dans la phase de collage :

$$\dot{x} = C_1 r_1 \exp(r_1 t) + C_2 r_2 \exp(r_2 t) \quad (4.47)$$

L'intégration de l'équation d'Euler (Eq. 4.25) et l'équation 4.44 fournissent la vitesse angulaire dans la phase de collage :

$$R\dot{\theta} = 5\mu\Omega(x - x_s) - \frac{5}{2}R\Omega^2\mu t + R\dot{\theta}_s \quad (4.48)$$

En bout de pale, à la position $x = x_e$, en supposant que t est "grand", l'exponentielle $\exp(r_2 t)$ est négligeable (où $r_2 < 0$). On peut approximer le temps dans la phase de collage par :

$$t = \frac{1}{r_1} \ln \left(\frac{x_e + \mu R}{C_1} \right) \quad (4.49)$$

On en déduit la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ et la vitesse angulaire de la bille à x_e :

$$\dot{x}_e = r_1(x_e + \mu R) + (\dot{x}_s - C_1 r_1) \left(\frac{x_e + \mu R}{C_1} \right)^{r_2/r_1} \quad (4.50)$$

$$R\dot{\theta}_e = 5\mu\Omega(x_e - x_s) - \frac{5}{2}\Omega^2 R\mu \frac{1}{r_1} \ln \left(\frac{x_e + \mu R}{C_1} \right) + R\dot{\theta}_s \quad (4.51)$$

4.3.2 Observation avec le modèle de dynamique moléculaire

On représente l'évolution de la vitesse de glissement V_g définie au point de contact entre la particule et la pale par $V_g = \dot{x} - R|\dot{\theta}|$. Durant la phase de rebonds, $V_g \geq 0$ et du frottement apparaît à chaque choc. La figure 4.5 montre l'influence du frottement entre la particule et la pale dans la phase de collage.

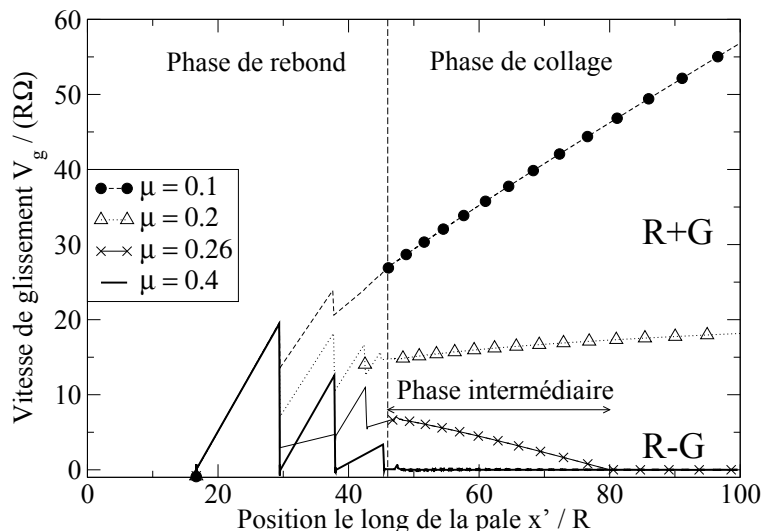


FIGURE 4.5 – Vitesse de glissement avec le modèle de dynamique moléculaire le long de la pale pour différents coefficients de frottement.

Deux régimes dynamiques distincts apparaissent :
 \Rightarrow Si le coefficient de frottement est plus faible qu'une valeur critique μ^* , la vitesse de glissement augmente après la phase de saut : la particule roule et glisse (R+G).
 \Rightarrow Mais si le coefficient de frottement est plus élevé que la valeur critique μ^* , la vitesse de glissement décroît durant une phase intermédiaire puis s'annule : la particule roule sans glisser (R-G).

Ainsi, il existe un coefficient de frottement critique au-delà duquel la particule est capable de rouler sans glisser dans la phase de collage.

4.3.3 Estimation du frottement critique

\Rightarrow Valeur de [Patterson and Reece, 1962] :

Un régime de roulement sans glissement apparaît si $\dot{x} = R\dot{\theta}$ et $\mu \in [0, 1]$. Il est possible de résoudre analytiquement l'équation $\dot{x} = R\dot{\theta}$, si on se place dans l'hypothèse $t \gg \Omega^{-1}$ (où $\exp(r_2 t)$ et $\exp(-r_1 t)$ sont négligeables). Dans ce cas, on retrouve la valeur calculée par [Patterson and Reece, 1962] :

$$\mu_0^* = \frac{1}{\sqrt{35}} \approx 0.1690 \quad (4.52)$$

Cette simplification n'est pas justifiée dans notre cas, car $\exp(-r_1 t)$ n'est pas négligeable. Il faut donc résoudre numériquement l'équation $\dot{x} = R\dot{\theta}$.

⇒ Valeur calculée numériquement :

Le coefficient de frottement critique obtenu numériquement (par la dynamique moléculaire et par la théorie i.e. résolution numérique de $\dot{x} = R\dot{\theta}$), dépend principalement du coefficient de restitution et pas de x_0 (cf. Fig. 4.6). Les rebonds initiaux sont responsables de la légère diminution de μ^* avec le coefficient de restitution. On observe :

- si $\mu < \mu^*$, on a $\dot{x} > R|\dot{\theta}|$, la vitesse de glissement augmente, la particule est en régime de (R+G).
- si $\mu > \mu^*$, on a $\dot{x} < R|\dot{\theta}|$ d'où $V_g < 0$. Au début de la phase de collage, la vitesse de glissement était positive. Cela signifie que la condition $V_g = 0$ a été atteinte le long de la trajectoire, la particule est en régime de (R-G).

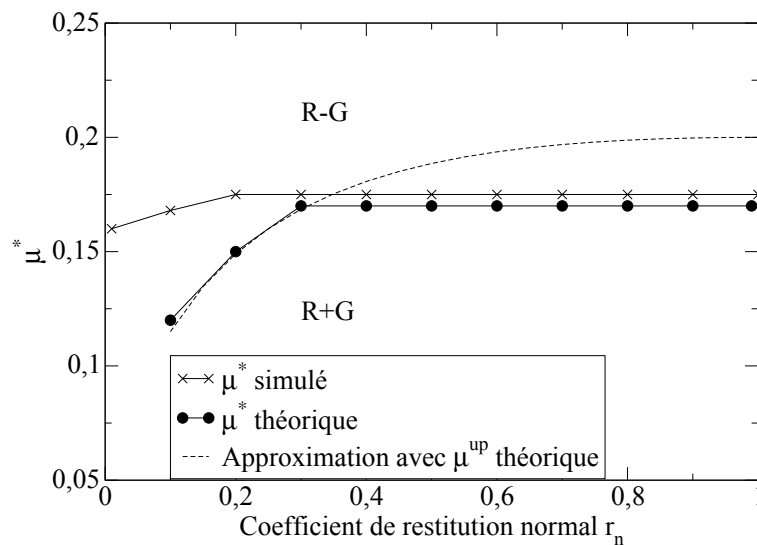


FIGURE 4.6 – Coefficient de restitution obtenu par la dynamique moléculaire et par la résolution numérique de $\dot{x} = R\dot{\theta}$ en fonction du coefficient de restitution.

Pour des valeurs de $r_n > 0,3$, on observe que le coefficient de frottement critique est égal à μ_0^* . En revanche pour les faibles r_n , la vitesse de glissement est faible et la particule atteint rapidement le régime (R-G) (l'hypothèse $t \gg \Omega^{-1}$).

On note également la légère différence entre le modèle de dynamique moléculaire et le modèle théorique qui peut provenir de l'équation de la force normale ($N = K_n \delta_n - b_n \dot{\delta}_n$). Lors de la relaxation, la force normale a une valeur qui devient négative alors qu'il y a toujours une interpénétration $\delta_n \neq 0$. Des forces attractives apparaissent à la fin de la collision [Schwager and Pöschel, 2007]. On trouve, en fin de phase de rebonds, que la valeur DEM de la vitesse angulaire est plus faible que la valeur obtenue théoriquement. Ceci induit une vitesse de glissement DEM plus importante que la valeur obtenue théoriquement en fin de phase de rebonds. On a donc un coefficient de frottement critique qui est plus élevé qu'avec le modèle théorique.

⇒ **Valeur analytique approchée :**

Pour obtenir une valeur approchée (mais supérieure) du coefficient de frottement critique, on peut imposer à la vitesse de glissement de s'annuler juste après la phase de rebonds (la phase intermédiaire est négligée). En égalisant les Eqs. 4.38 et 4.42 (et en négligeant la perte de vitesse lors des impacts), on obtient :

$$\mu^{up} = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{r}}{1+r} \quad (4.53)$$

4.3.4 Cas particulier : particule sans rotation

[Rioual et al., 2007] ont montré que des particules de formes allongées (telles les ellipsoïdes) peuvent avoir un régime de glissement pur (elles glissent sans rouler).

On souhaite comparer les vitesses selon $\vec{e}_{x'}$ pour des particules avec et sans rotation :

- Si $\mu < \mu^*$, la particule sans rotation aura la même vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ qu'une particule qui roule. En effet dans ce cas, la vitesse angulaire n'a pas d'influence sur la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ car il n'y a pas de couplage entre les équations : Eqs. 4.47 et 4.48.
- Si $\mu > \mu^*$, la particule sans rotation évolue suivant :

$$\exp(\Omega(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})t) \quad (4.54)$$

En revanche une particule qui roule (qui roule sans glisser $\mu = \frac{1}{\sqrt{35}}$) évolue suivant :

$$\exp\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\Omega t\right) \quad (4.55)$$

Pour des valeurs $\mu \geq \mu_0^*$, on a $-\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} \leq \sqrt{\frac{5}{7}}$. Ainsi une particule en régime (R-G) ira toujours plus vite qu'une particule sans rotation.

4.3.5 Influence des rebonds sur la trajectoire

Pour des valeurs du coefficient de frottement supérieures à une valeur critique, la vitesse de glissement s'annule et la particule atteint un régime de roulement sans glissement. Dans ce régime particulier, le frottement ne contrôle plus la trajectoire de la particule. On peut donc mesurer l'influence du coefficient de restitution et donc des rebonds sur la trajectoire.

La vitesse de la particule en fin de phase de saut (Eq. 4.39) est très sensible au coefficient de restitution. La figure 4.7 représente la vitesse du centre de masse en fonction du coefficient de restitution pour des valeurs de frottement comprises entre 0.1 et 0.4. On observe que l'influence du coefficient de restitution est environ trois fois plus importante que l'influence du coefficient de frottement.

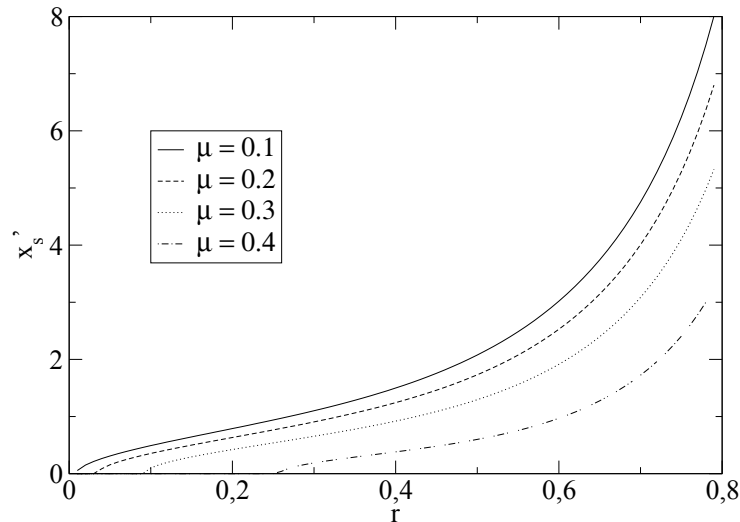


FIGURE 4.7 – Vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ de la particule en fin de phase de saut (Eq. 4.39) en fonction du coefficient de restitution pour $0.1 < \mu < 0.4$.

La forte influence du coefficient de restitution est liée à la présence des rebonds de la particule sur la pale. On compare (Fig. 4.8) la distance parcourue par une particule qui rebondit sur la pale avec une particule toujours en contact avec la pale (modèle de dynamique moléculaire). La particule qui rebondit se déplace plus vite qu'une particule en contact permanent. Ceci est dû à un simple effet géométrique car la distance parcourue par une particule qui rebondit est plus faible que la distance parcourue lors d'un contact permanent.

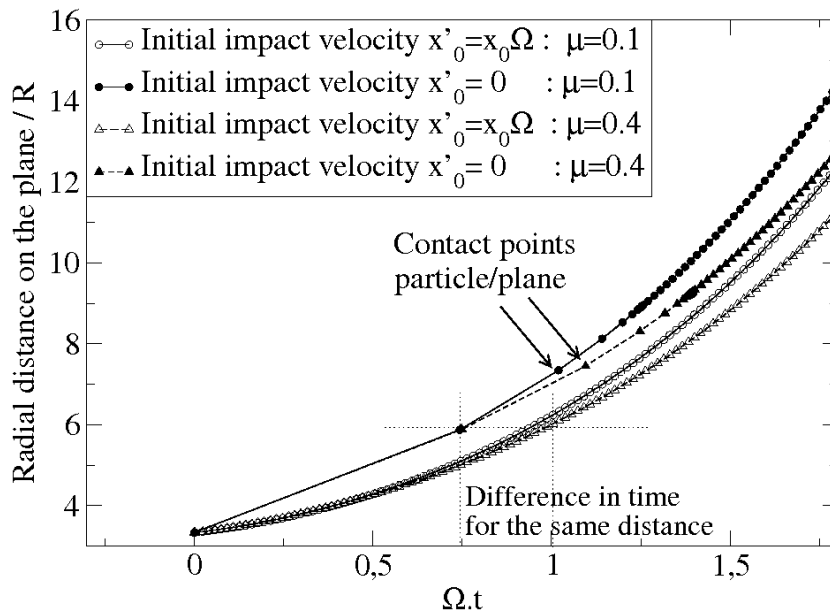


FIGURE 4.8 – Comparaison de la distance selon $\vec{e}_{x'}$ d'une particule qui rebondit et d'une particule en contact permanent en fonction de Ωt pour des frottements de 0.1 et 0.4 (modèle de dynamique moléculaire).

Cependant la vitesse peut être très différente selon les valeurs respectives de r_n et μ .

- La vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ de la particule en fin de phase de saut (on néglige la perte de vitesse durant les impacts) varie selon (Eq. 4.38) :

$$\dot{x}_s^{bounce} = \frac{\Omega x_0 \sqrt{r_n}}{1 - r_n} \quad (4.56)$$

- La vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ d'une particule toujours en contact est calculée à partir de Eq. 4.47, à la distance ($x = x_s$) :

$$\dot{x}_s^{stuck} = \frac{\Omega x_0}{1 - r_n} (1 - \mu) \left(1 + \underbrace{\frac{1 - r_n}{x_0} \mu R}_{<< 1} \right) \approx \frac{\Omega x_0}{1 - r_n} (1 - \mu) \quad (4.57)$$

Pour des faibles coefficients de frottement et des valeurs moyennes des coefficients de restitution, la particule en contact permanent avec la pale a une vitesse supérieure. La vitesse d'une particule qui rebondit peut néanmoins être plus élevée pour des forts coefficients de restitution (dépendance en $\sqrt{r_n}$).

4.4 Comparaison avec les expérimentations

La modélisation analytique a permis d'estimer les grandeurs x_s , \dot{x}_s , $R\dot{\theta}_s$, \dot{x}_e et $R\dot{\theta}_e$ que l'on a mesurées expérimentalement dans le chapitre 3. Cette section a pour but de confronter les équations analytiques obtenues (ou le modèle de dynamique moléculaire) et les expérimentations. Le modèle de dynamique moléculaire utilise une loi viscoélastique linéaire de type Spring-Dashpot. Les forces normales et tangentielles sont issues du modèle de [Cundall and Strack, 1979] : Eqs. 1.9,1.13,1.30,1.31. On suppose qu'il n'y a pas d'amortissement visqueux tangentiel ($b_t = 0$). On a choisi d'utiliser une valeur phénoménologique pour le coefficient de frottement qu'on a prise égale au frottement de Foerster (Tab. 2.2).

Nous avons déjà vérifié que les nombres N_c et N_t sont petits devant 1 (cf. section 4.1). Par ailleurs, les équations sur les grandeurs \dot{x}_s , $R\dot{\theta}_s$, \dot{x}_e et $R\dot{\theta}_e$ ne sont valides que si les particules glissent le long de la pale (on a fait l'hypothèse $T = \mu N$). Il faut donc dans un premier temps, mesurer les vitesses de glissement des particules sur chacune des pales, afin de déterminer si des particules peuvent atteindre le régime particulier de R-G, mis en évidence par la modélisation.

4.4.1 Coefficient de frottement critique

La figure 4.9 représente la vitesse de glissement le long des 5 pales différentes.

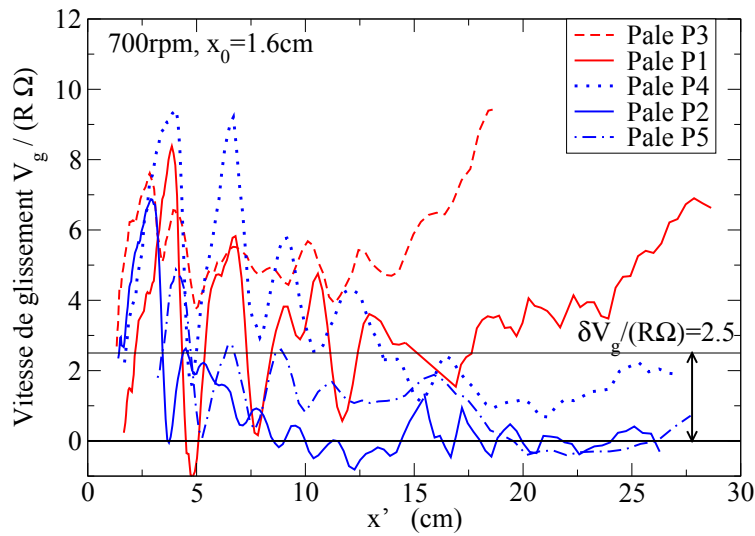


FIGURE 4.9 – Vitesse de glissement adimensionnée de la bille plastique en fonction de la position selon $\vec{e}_{x'}$ pour les différentes pales, $x_0 = 1.6\text{cm}$, $\Omega = 700\text{rpm}$.

On estime qu'on a atteint la phase de collage avec toutes les pales pour $x_s = 14\text{cm}$. Un lissage a été effectué pour supprimer le bruit expérimental présent sur les courbes (type Smoothing, moyenne des 5 points adjacents).

Lorsqu'on compare les valeurs des vitesses de glissement dans la phase de collage, on obtient :

$$V_{g-P3} > V_{g-P1} > V_{g-P4} > V_{g-P2} > V_{g-P5}$$

Cet ordre correspond à l'ordre des coefficients de frottement mesurés par la méthode de Foerster (cf. Tab. 2.2) :

$$\mu_{P3} > \mu_{P1} > \mu_{P4} > \mu_{P2} > \mu_{P5}$$

On observe qu'avec les pales P4, P2, P5, la vitesse de glissement est inférieure aux erreurs expérimentales et qu'elle est approximativement constante. Par ailleurs, avec les pales P3 et P1, la vitesse de glissement augmente le long de la pale, dans la phase de collage. On suppose donc qu'il y a un frottement critique entre la valeur du frottement sur la pale P1 et la valeur du frottement sur la pale P4, c'est-à-dire entre :

$$0.175 \pm 0.005 \leq \mu_{exp}^* \leq 0.205 \pm 0.003 \quad (4.58)$$

Le modèle analytique prévoit pour les coefficients de restitution supérieurs à 0.3, un coefficient de frottement critique constant et égal à :

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{35}} \approx 0.1690$$

Les particules plastiques utilisées ont un coefficient de restitution relativement élevé ($r_n \approx 0.8$). On peut donc en déduire que le frottement critique théorique est inclus dans les bornes de μ_{exp}^* .

4.4.2 Valeurs en fin de phase de rebonds

4.4.2.1 Position de collage

La Fig. 4.10 représente la position de collage expérimentale x_s , adimensionnée par la position initiale x_0 , en fonction du coefficient de restitution. Les points expérimentaux sont comparés à l'équation 4.30 issue du modèle analytique :

$$x_s = \frac{x_0}{1 - r_n}$$

Il apparaît conformément à la théorie que x_s augmente linéairement avec x_0 et $1/(1 - r)$. L'influence de μ et Ω est négligeable. On trouve toutefois des valeurs expérimentales légèrement plus faibles que la théorie. Ceci vient du cut off ($R + \delta y$) pour déterminer la fin supposée des rebonds. On n'a pas observé de meilleure concordance en comparant les expériences avec la théorie développée au deuxième ordre (Eq. 4.31).

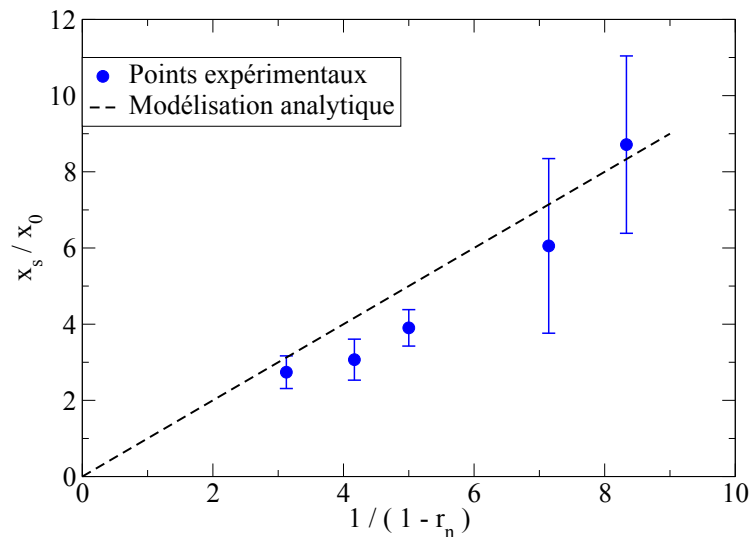


FIGURE 4.10 – Position du collage adimensionnée par la position initiale en fonction du coefficient de restitution pour les billes plastiques.

4.4.2.2 Vitesse du centre de masse

La Fig. 4.11 représente la vitesse expérimentale \dot{x}_s selon $\vec{e}_{x'}$, à la position x_s , en fonction de $\frac{\sqrt{r_n}}{1 - r_n}$.

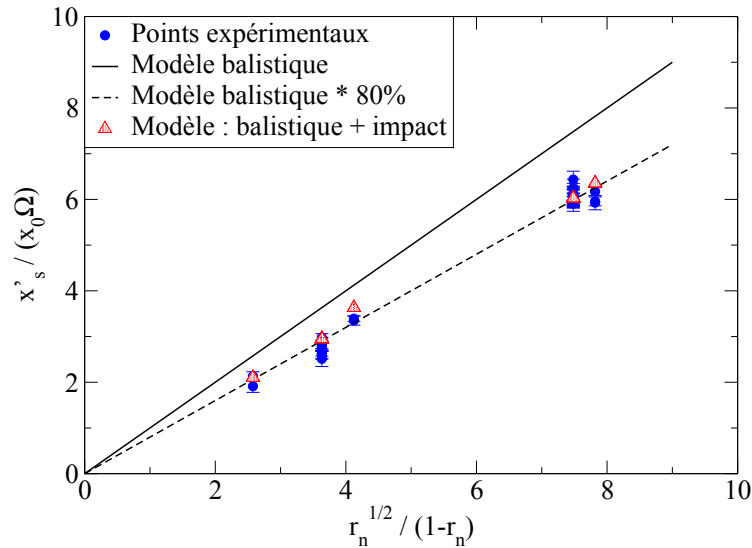


FIGURE 4.11 – Vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ en fin de phase de rebonds en fonction du coefficient de restitution pour les billes plastiques.

On compare les valeurs obtenues, d'une part avec l'équation 4.38 qui prend en compte le gain de vitesse lors du vol balistique et la perte de vitesse lors des impacts, et d'autre part avec l'équation 4.39, qui néglige la perte de vitesse lors des impacts :

$$\dot{x}_s = \frac{x_0 \Omega \sqrt{r_n}}{1 - r_n} \sqrt{1 - \underbrace{\mu \frac{1 + r_n}{\sqrt{r_n}}}_{\text{impact}}}$$

Pour les particules sur les pales P2, P4 et P5, on utilise la valeur μ^* car dans ce cas, les particules ont atteint le régime de roulement sans glissement.

Conformément à la théorie, la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ augmente linéairement avec $x_0 \Omega$ et $\sqrt{r_n} / (1 - r_n)$. Avec l'équation 4.38 (impact + balistique), on trouve des valeurs proches de l'expérience : moins de 5% d'erreur.

En revanche, avec l'équation 4.39 (balistique), on trouve des valeurs 20% plus élevées que l'expérience. On peut donc considérer que les pertes de vitesses lors des impacts représentent 20% de la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$. L'hypothèse faite dans le paragraphe §4.2.4.1, de considérer la perte de vitesse lors des impacts comme une perturbation, est donc justifiée.

4.4.2.3 Vitesse angulaire avant collage

La Fig. 4.12 représente la vitesse angulaire expérimentale $R\dot{\theta}_s$, à la position x_s , en fonction de $\frac{\mu(1+r_n)}{1-r_n}$. On compare les points obtenus par l'équation 4.42 :

$$R\dot{\theta}_s = -\frac{5\mu}{2} \frac{1 + r_n}{1 - r_n} x_0 \Omega$$

Pour les particules sur les pales P2, P4 et P5, on utilise la valeur μ^* car dans ce cas, les particules ont atteint le régime de roulement sans glissement.

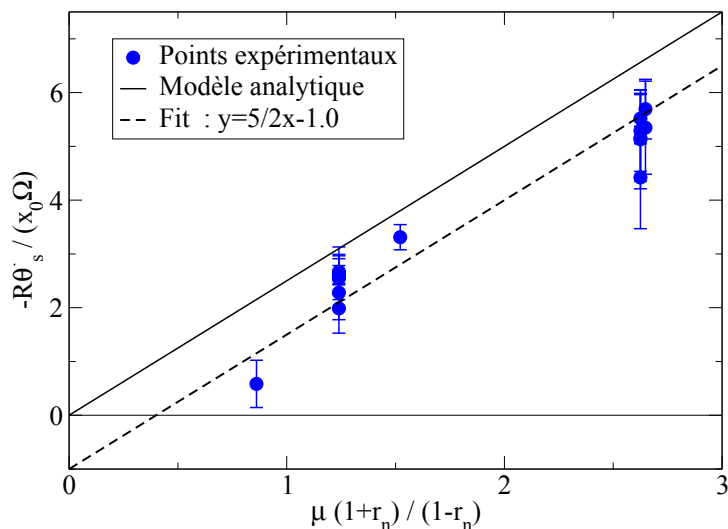


FIGURE 4.12 – Vitesse angulaire en fin de phase de rebonds en fonction du coefficient de restitution et du frottement pour les billes plastiques.

On retrouve la variation linéaire de la vitesse angulaire avec $x_0\Omega$ et $5/2\mu(1+r_n)/(1-r_n)$ pour les pales P1 et P3 (et une variation linéaire avec $5/2\mu^*(1+r_n)/(1-r_n)$ pour les autres pales). Mais contrairement à ce que prévoit le modèle analytique, les valeurs expérimentales sont inférieures de $1.0x_0\Omega$. L'équation interpolée s'écrit :

$$R\dot{\theta}_{s-EXP} = x_0\Omega - \frac{5}{2}x_0\Omega\mu\frac{1+r}{1-r} \quad (4.59)$$

Il est possible que cet écart soit dû à un effet de la vitesse angulaire après le premier impact, supposée nulle dans le modèle analytique : $R\dot{\theta}_0 = 0$. En effet, sur la figure 3.5, on observe, après le premier impact, d'une part que la vitesse angulaire n'est pas nulle, mais d'autre part qu'elle est négative ($-R\dot{\theta}_0 < 0$) : autrement dit la particule tournerait "à l'envers". Ceci peut s'expliquer par un effet de la compliance tangentielle lors d'un contact roulant. En effet, pour des angles d'incidence avec la normale inférieurs à 30° , l'effet de la compliance tangentielle n'est plus négligeable [Gorham and Kharaz, 2000]. Or, lors du premier impact, l'angle d'incidence est de 0° ; les angles d'incidence des impacts suivants sont toujours supérieurs à 30° (cf. Tab. 3.1).

Notre modèle analytique est valide pour les contacts glissants. Pour les contacts roulants, il faudrait prendre en compte la compliance tangentielle, en intégrant le troisième paramètre β dans les modélisations. Cependant, on souhaite garder la simplicité du modèle à deux paramètres (r_n et μ). Une manière simplifiée de prendre en compte la compliance tangentielle au premier impact, est d'utiliser dans la suite, l'équation 4.59.

4.4.3 Vitesses en fin de pale

Dans cette partie, on utilise le frottement de Coulomb (Tab. 2.1) car dans la phase de collage, les chocs sont inexistantes. Le frottement de Coulomb est donc plus

approprié pour reproduire la dynamique d'une particule en contact avec la pale. A partir des Eqs. 4.50 et 4.51, on approxime les vitesses en sortie de pale à la position x_e :

$$\dot{x}_e = \Omega(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})(x_e + \mu R) \quad (4.60)$$

$$R\dot{\theta}_e = 5\mu\Omega(x_e - x_s) + R\dot{\theta}_s \quad (4.61)$$

On observe que l'équation de la vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ (Eq. 4.60) est indépendante de la position initiale x_0 et du coefficient de restitution r_n .

La Fig. 4.13 représente les vitesses \dot{x}_e selon $\vec{e}_{x'}$ et les vitesses angulaires $R\dot{\theta}_e$ expérimentales, à la position x_e , en fonction de μ . On compare les points obtenus avec le modèle de dynamique moléculaire (en trait plein sur la figure).

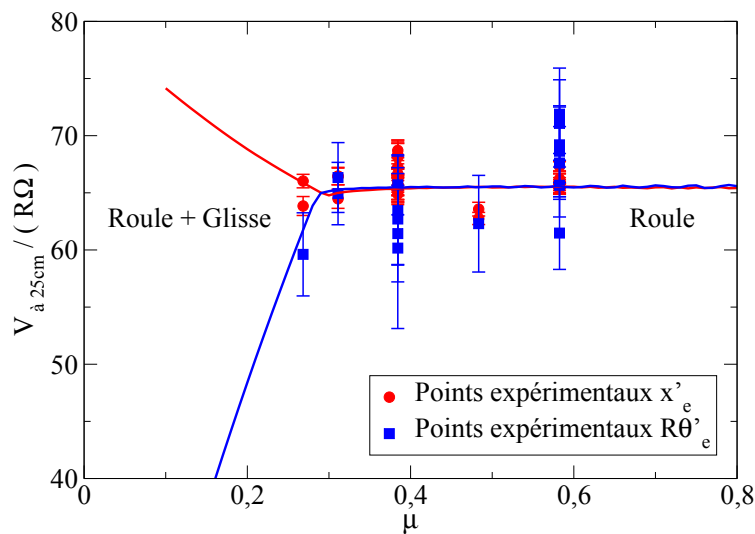


FIGURE 4.13 – Vitesse selon $\vec{e}_{x'}$ et vitesse angulaire en fin de pale en fonction du coefficient de frottement pour les billes plastiques. Les courbes en trait plein sont issues du modèle de dynamique moléculaire.

Les fluctuations sur les vitesses angulaires, à frottement donné, sont dues aux variations de position initiale x_0 . Comme prévu par le modèle analytique, au-delà d'un frottement critique, les vitesses \dot{x}_e et les vitesses angulaires $R\dot{\theta}_e$ s'égalisent à une valeur constante. On observe que le modèle de dynamique moléculaire reproduit raisonnablement bien les points expérimentaux (au maximum 10% d'erreur).

4.5 Conclusions

Ce chapitre modélise la trajectoire d'une particule le long d'une pale rotative. On s'est attardé à décrire méthodiquement la trajectoire complète, c'est-à-dire la phase de saut puis le contact permanent. La nouveauté de l'étude vient du fait que les précédentes modélisations négligeaient la phase de rebonds. Or, cette phase est importante car elle fournit les conditions initiales de la phase de collage, qui elle-même fournit les conditions initiales du vol balistique. Notre étude est valable dans la limite où les collisions glissantes peuvent être considérées comme instantanées, et où le nombre centrifuge est petit devant 1. Le modèle analytique est basé sur la théorie des corps rigides à deux paramètres mécaniques r_n et μ . On observe toutefois, un effet de la compliance tangentielle, lors du premier impact (impact normal), sur la vitesse angulaire.

Dans le chapitre 2, nous avons mis en évidence la difficulté de définir un coefficient de frottement. Or, la modélisation met en évidence l'importance du frottement dans la dynamique d'écoulement : la valeur du frottement permet de distinguer différents régimes de la particule le long de la pale. Pour des valeurs du coefficient de frottement inférieures à une valeur critique, la particule roule et glisse simultanément (R+G). Pour des valeurs supérieures à une valeur critique, la particule atteint un régime de roulement sans glissement (R-G). Ce coefficient de frottement critique a été observé expérimentalement et sa valeur a été validée sur les particules modèles plastiques. Par ailleurs, ce coefficient critique est relativement faible ($\mu^* \approx 0.17$). Cela signifie que le régime de (R-G) sera certainement souvent atteint dans les situations réelles. Dans ce régime, le frottement n'influence plus sur la trajectoire après la phase de rebonds, qui est donc contrôlée essentiellement par le coefficient de restitution.

On a établi analytiquement les valeurs de la position de collage, les vitesses selon $\vec{e}_{x'}$ et les vitesses angulaires, d'une part en fin de phase de rebonds, et d'autre part en fin de pale. Les valeurs expérimentales sont relativement bien reproduites en fin de phase de rebonds (en utilisant les valeurs du frottement de choc de Foerster) et en fin de pale (en utilisant les valeurs du frottement de glissement de Coulomb) : on observe au maximum 10% d'erreur. Cette modélisation simplifiée à partir de deux paramètres mécaniques r_n et μ , permet de reproduire le comportement d'une particule sphérique le long d'une pale rotative. Cependant les échantillons réels de granulats, ne sont jamais parfaitement sphériques.

Chapitre 5

Prise en compte de la forme de la particule

Les deux chapitres précédents ont permis de comparer analytiquement et expérimentalement, la trajectoire d'une particule parfaitement sphérique le long de la pale en rotation, d'abord dans la phase de rebonds puis dans la phase de collage. La modélisation reproduit raisonnablement bien les valeurs expérimentales, en utilisant les valeurs du frottement de choc de Foerster dans la phase de rebonds, et en utilisant les valeurs du frottement de glissement de Coulomb dans la phase de collage. Toutefois, cette étude a mis en évidence la difficulté pour mesurer une valeur du frottement unique. On souhaite désormais rajouter de la complexité au problème, en étudiant des granulats de formes irrégulières. On utilise, les deux engrais (Ammonitrate et KCl) caractérisés géométriquement et mécaniquement dans le chapitre 2.

Dans un premier temps, on présente les résultats expérimentaux obtenus avec le dispositif expérimental numéro 1, présenté dans le chapitre 2, pour des particules quasi-sphériques. Ces résultats sont mis en parallèles avec les résultats des billes plastiques. On souhaite vérifier si la théorie sphérique, développée dans le chapitre 4, est applicable pour ces particules à la surface rugueuse.

Dans un second temps, on présente les résultats expérimentaux obtenus avec le dispositif expérimental numéro 1, pour des particules de formes irrégulières. Ces résultats sont également mis en parallèles avec les résultats expérimentaux des deux autres matériaux. On propose une modélisation pour reproduire la trajectoire de ces particules de formes irrégulières.

5.1 Modélisation de particules quasi-sphériques

On présente les résultats expérimentaux pour les particules d'Ammonitrate, obtenus avec le dispositif expérimental présenté dans le chapitre 2. Ces résultats expérimentaux sont comparés qualitativement avec ceux des billes plastiques.

5.1.1 Effets aérodynamiques

On souhaite vérifier si l'air a un effet sur la trajectoire des particules d'Ammonitrate qui sont dix fois plus légères que les billes plastiques. On calcule la valeur du nombre N_{air} défini par l'Eq.4.9. Pour des particules d'Ammonitrate ($\rho_{bille} = 920\text{kg/m}^3$, $R = 2.3\text{mm}$, $\frac{dx}{dt} = 13\text{m/s}$), pour une vitesse de rotation $\Omega = 500\text{tours/min}$, à l'extrémité de la pale $x = 0.3\text{m}$. On obtient $N_{air} = 4\%$. L'air a donc peu d'effet sur la trajectoire des particules plastiques.

La figure 5.1 compare les données expérimentales avec l'ajustement des équations balistiques de la trajectoire (Eqs. 3.5-3.6) qui négligent les effets aérodynamiques. Ces équations balistiques sont ajustées en modifiant les vitesses : \dot{x}_i et \dot{y}_i . Etant données les faibles hauteurs de rebonds (dues aux faibles coefficients de restitution), on a comparé uniquement un à trois rebonds. Quelles que soient les conditions expérimentales, on retrouve au maximum 3% d'erreurs entre les vitesses expérimentales et celles issues de l'ajustement des équations théoriques. On peut donc conclure que l'effet de l'air est faible sur la dynamique des particules d'Ammonitrate.

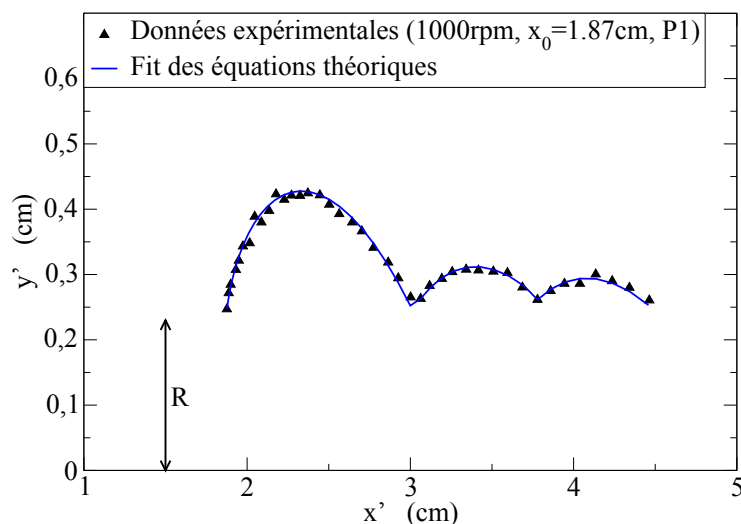


FIGURE 5.1 – Trajectoire expérimentale d'une particule d'Ammonitrate sur la pale P1 dans le repère de la pale (R') ($x_0 = 1.87\text{cm}$ et $\Omega = 1000\text{tours/min}$) et ajustement des Eqs. 3.5-3.6 avec les données expérimentales.

5.1.2 Effets inertiels

On mesure les deux nombres sans dimension pour nos particules d'Ammonitrate ($K_n = 75 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $m = 0.02\text{g}$, $R = 2.3\text{mm}$, $r = 0.3$). On obtient avec $x_0 = 2\text{cm}$, $\Omega = 80\text{rad/s}$, des valeurs égales à :

$$N_c = 0.04 \quad (5.1)$$

$$N_t = 0.004 \quad (5.2)$$

pour un temps de collision $t_c = 0.05\text{ms}$. Ces deux nombres sont relativement faibles devant 1 pour que les effets inertiels soient considérés comme négligeables : les col-

lisions peuvent être considérées comme instantanées et équivalentes à des collisions sur pale statique. Dans la suite, on utilisera donc les valeurs mesurées avec précision sur pale statique, du coefficient de restitution r_n , répertorié dans le Tab. 2.3, et du coefficient de frottement μ de Coulomb (Tab. 2.1).

5.1.3 La phase de rebonds

Les faibles coefficients de restitution des Ammonitrates engendrent une courte phase de rebonds. Les valeurs mesurées en fin de phase de rebonds seront donc faibles. On souhaite tout de même vérifier si la théorie, établie pour les billes sphériques dans le chapitre 4, s'applique à ces particules.

5.1.3.1 Position de collage

La figure 5.2 compare la position de collage en fonction du coefficient de restitution $1/(1 - r_n)$, pour les billes plastiques et les particules d'Ammonirate. On observe que les points expérimentaux des Ammonitrates sont bien reproduits par la théorie sphérique. Les écarts-types augmentant avec le coefficient de restitution comme pour les billes plastiques.

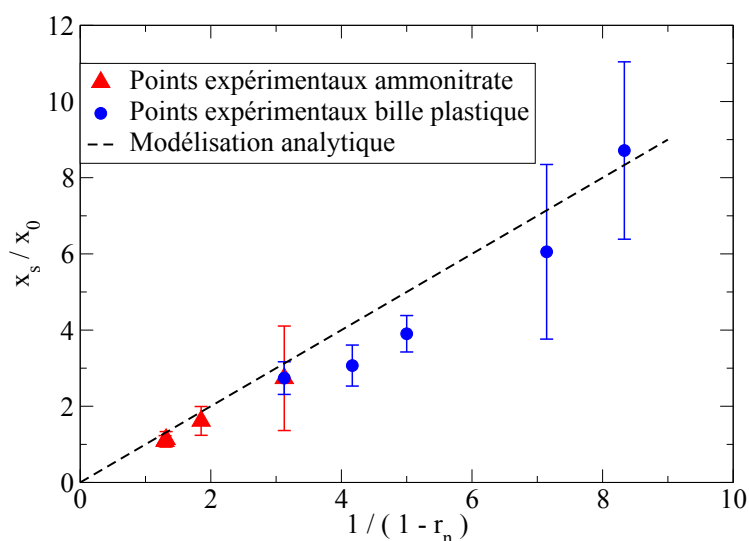


FIGURE 5.2 – Position du collage adimensionnée par la position initiale en fonction du coefficient de restitution pour les particules d'Ammonirate comparée aux billes plastiques (pales P1, P3, P4 et P5).

5.1.3.2 Vitesse du centre de masse

Vitesse \dot{x}_s selon (Ox') en fin de phase de rebonds

La Fig. 5.3 représente la vitesse expérimentale selon (Ox') , à la position $x_s = 25\text{cm}$, en fonction du coefficient de restitution $\frac{\sqrt{r_n}}{1 - r_n}$. On compare les points obtenus avec le modèle balistique (Eq. 4.39) qui néglige la perte de vitesse lors des impacts.

On observe, sur la pale P5 ($r_n = 0.68$, $\frac{\sqrt{r_n}}{1-r_n} = 2.6$), que la vitesse selon (Ox') d'une particule d'Ammonitrate est équivalente à la vitesse selon (Ox') d'une bille plastique sur la pale P3 ($r_n = 0.68$). Les coefficients de restitution sont équivalents. On retrouve ainsi que la perte de vitesse selon (Ox') lors des impacts est une perturbation de 20% de la vitesse selon (Ox'). Sur les autres pales avec l'Ammonitrate (P1, P3, P4) où le coefficient de restitution est faible, les points expérimentaux sont proches du modèle balistique. En effet, comme la particule n'effectue qu'un à deux rebonds avant la phase de collage, elle perd donc peu de vitesse lors des impacts.

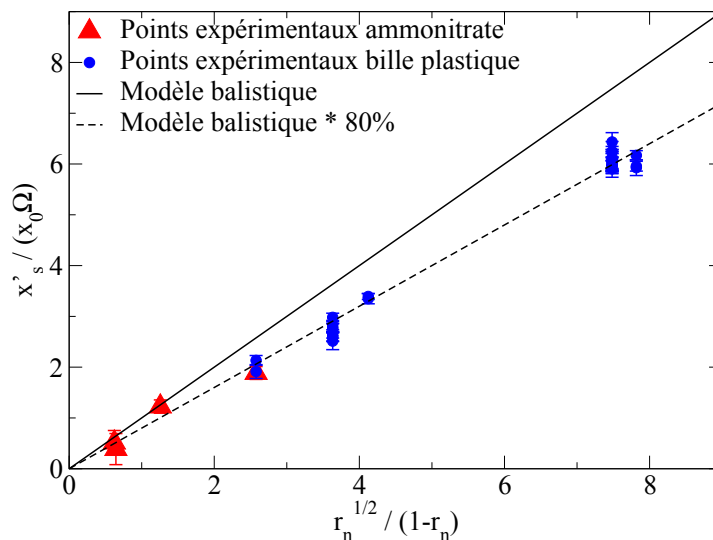


FIGURE 5.3 – Vitesse selon (Ox') en fin de phase de rebonds en fonction du coefficient de restitution pour les particules d'Ammonitrate comparée aux billes plastiques (pales P1, P3, P4 et P5).

⇒ La théorie sphérique reproduit raisonnablement bien la position de collage et la vitesse selon (Ox') des Ammonitrates en fin de phase de rebonds. Cependant au vue des faibles valeurs mesurées, cette étude n'est pas suffisante pour confirmer l'application de la théorie sphérique au cas des particules d'Ammonitrate.

5.1.4 La phase de collage

Dans cette partie, on compare les résultats expérimentaux des particules d'Ammonitrate, d'une part avec les résultats expérimentaux des billes plastiques, et d'autre part avec la modélisation.

On utilise le modèle de contact de [Cundall and Strack, 1979] déjà testé dans le chapitre 4.

5.1.4.1 Vitesse de glissement

Dans cette partie, on mesure la vitesse de glissement V_g des particules d'Ammonitrate. On souhaite savoir si le régime de roulement sans glissement est possible

avec ces particules ayant une rugosité de surface. La théorie sphérique du chapitre 4 prédit que les Ammonitrates doivent rouler sans glisser sur toutes les pales car leur coefficient de frottement est supérieur au frottement critique $\mu^* = 0.17$.

Tout d'abord, on calcule l'erreur sur la vitesse de glissement. Les mesures ont été faites à $\Omega = 700$ tours/min. En fin de pale, l'incertitude sur la vitesse selon (Ox') est de $\delta\dot{x} = 0.2$ m/s ($\dot{x} = 10$ m/s), l'erreur sur la position angulaire est de $\delta\theta = 10^\circ$ soit $\delta\dot{\theta} = 525$ rad/s et l'incertitude sur le rayon de $\delta R = 0.2$ mm ($R = 2.3$ mm). Ce qui nous donne à 700 tours/min :

$$\delta \left(\frac{V_g}{R\Omega} \right) = \delta \left(\frac{\dot{x}}{R\Omega} - \frac{\dot{\theta}}{\Omega} \right) = \frac{1}{R\Omega} \left(|\delta\dot{x}| + \frac{\dot{x}}{R} |\delta R| \right) + \frac{|\delta\dot{\theta}|}{\Omega} \approx 14$$

On remarque que cette erreur sur la vitesse de glissement est nettement plus élevée qu'avec les billes modèles (6 fois plus élevée). Ceci est essentiellement dû à l'erreur sur le rayon des particules (erreur inexistante avec les billes modèles) et à l'imprécision sur la mesure de la vitesse angulaire.

On représente la vitesse de glissement le long de la pale (Fig. 5.4), pour trois des pales traitées différemment. On estime qu'on a atteint la phase de collage avec toutes les pales pour $x'/x_0 = 3$ (voir Fig. 5.2). Le même lissage qu'avec les billes modèles a été effectué pour supprimer le bruit expérimental présent sur les courbes (type Smoothing, moyenne des 5 points adjacents).

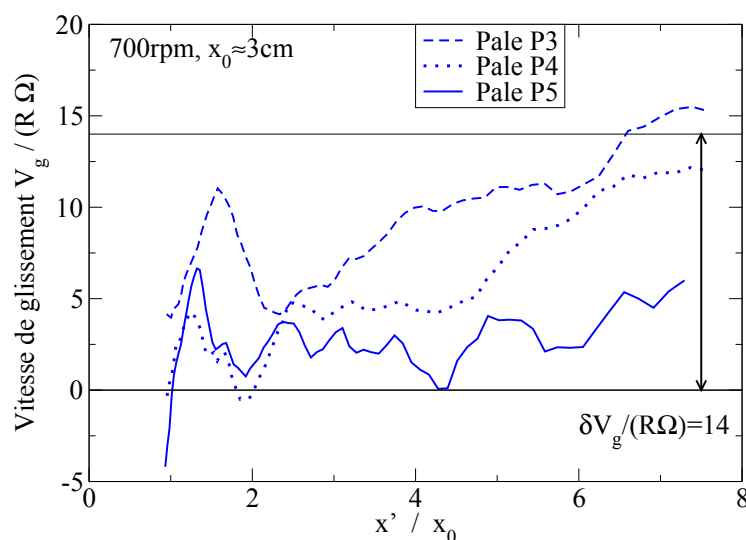


FIGURE 5.4 – Vitesse de glissement adimensionnée de la particule d'Ammonitrate en fonction de la position selon (Ox') pour les pales P3, P4 et P5, $x_0 \approx 3$ cm, $\Omega = 700$ tours/min.

La comparaison des valeurs des vitesses de glissement dans la phase de collage permet de déduire :

$$V_{g-P3} > V_{g-P4} > V_{g-P5}$$

ceci correspond à l'ordre des coefficients de frottement de Foerster (Tab. 2.3) :

$$\mu_{P3} > \mu_{P4} > \mu_{P5}$$

On observe que les vitesses de glissement, sur les pales P3 et P4 sont fortement croissantes dans la phase de collage. La vitesse de glissement, sur la pale P5 augmente légèrement. Toutefois avec les trois pales, les vitesses de glissement sont toujours inférieures aux erreurs expérimentales. L'augmentation des vitesses de glissement laisse supposer que les particules d'Ammonitrate roulent et glissent. La rugosité de surface semble ne pas permettre le roulement sans glissement.

5.1.4.2 Vitesses en fin de pale

Vitesse \dot{x}_e en fin de pale

La Fig. 5.5 compare les vitesses expérimentales \dot{x}_e selon (Ox') des particules d'Ammonitrate et des billes plastiques, à la position x_e , en fonction de μ . Dans la phase de collage, on utilise le frottement de Coulomb (Tab. 2.1) car les chocs sont inexistants. On compare les points obtenus avec le modèle de dynamique moléculaire ($r_n = 0.3$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.02\text{g}$, $R = 2.3\text{mm}$). Le coefficient de restitution moyen vaut $r_n = 0.3$ pour les Ammonitrates.

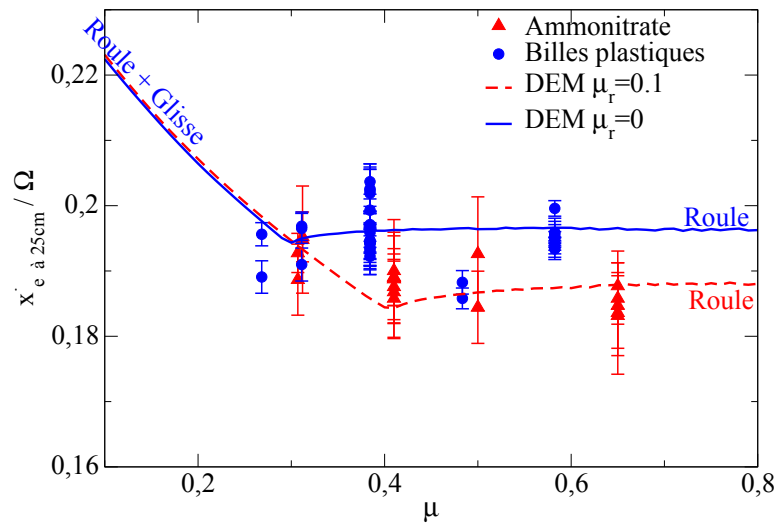


FIGURE 5.5 – Vitesse selon (Ox') en fin de pale en fonction du coefficient de frottement pour les Ammonitrates comparée aux billes plastiques (Pales P1 à P5). Les courbes sont issues du modèle de dynamique moléculaire ($r_n = 0.3$). Un frottement de roulement a été introduit pour reproduire les vitesses des Ammonitrates.

(i) Les vitesses selon (Ox') des Ammonitrates en fin de pale sont 5% plus faibles que les vitesses des billes plastiques, pour des frottements $\mu \geq 0.4$. Nous ne pouvons pas déterminer d'où proviennent ces variations car plusieurs paramètres varient simultanément entre les deux matériaux : notamment R , m , r_n .

Pour une valeur de $\mu = 0.3$, les vitesses selon (Ox') de l'Ammonitrate et celles des billes plastiques semblent identiques.

(ii) Le modèle de dynamique moléculaire classique (courbe bleue en trait plein avec $r_n = 0.3$) ne reproduit pas exactement le comportement des particules d'Ammonitrate.

En faisant l'hypothèse que les déformations de surface de l'Ammonitrate ralentissent le mouvement des particules, on a choisi d'introduire dans la modélisation un effet de résistance au roulement selon l'Eq. 1.47. La valeur du frottement de roulement μ_r a été ajustée numériquement. Ainsi l'ajout d'un frottement de roulement de valeur $\mu_r = 0.1$ permet de reproduire les vitesses selon (Ox') en fin de pale des particules d'Ammonitrate.

(iii) Le modèle de dynamique moléculaire modifié ($\mu_r = 0.1$) permet toujours d'obtenir au-delà d'un frottement critique, un régime de roulement sans glissement. En revanche, la valeur du coefficient de frottement critique μ^* augmente avec la valeur du frottement de roulement μ_r . Cette modélisation modifiée ($\mu_r = 0.1$) prédit que les particules d'Ammonitrate sur les pales P1, P2 et P5 atteignent le régime de roulement sans glissement.

Vitesse angulaire d'éjection $R\dot{\theta}_e$

La Fig. 5.6 représente les vitesses angulaires $R\dot{\theta}_e$ expérimentales, des particules d'Ammonitrate et des billes plastiques, à la position x_e , en fonction de μ .

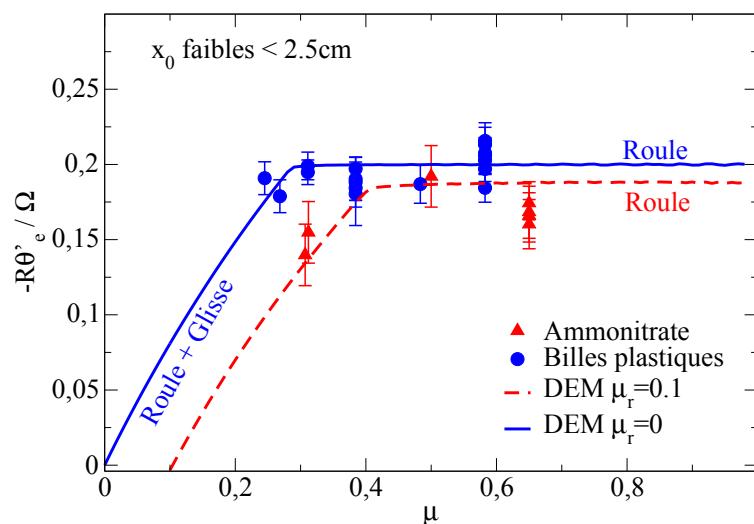


FIGURE 5.6 – Vitesse angulaire en fin de pale en fonction du coefficient de frottement pour les Ammonitrates comparée aux billes plastiques (Pales P1 à P5). Les courbes sont issues du modèle de dynamique moléculaire ($r_n = 0.3$). Un frottement de roulement a été introduit pour reproduire les vitesses des Ammonitrates.

On a choisi de représenter les vitesses angulaires pour des positions initiales faibles $x_0 < 2.5\text{cm}$. On compare les points obtenus avec le modèle de dynamique

moléculaire classique ($r_n = 0.3$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.02\text{g}$, $R = 2.3\text{mm}$, $\mu_r = 0$) et le modèle modifié avec un frottement de roulement ($\mu_r = 0.1$).

Comme pour les vitesses selon (Ox'), les vitesses angulaires de l'Ammonitrate en fin de pale sont globalement plus faibles (d'environ 15%) que les vitesses angulaires des billes plastiques. La modélisation modifiée ($\mu_r = 0.1$) permet de reproduire les vitesses angulaires en fin de pale des particules d'Ammonitrate.

5.1.4.3 Temps d'accélération sur la pale

La figure 5.7 compare l'angle $\theta_e = \Omega t_e$ que parcourt la pale pendant la phase d'accélération de la particule pour les particules d'Ammonitrate et les billes plastiques en fonction de $\ln(x_0/R)$. On compare les points obtenus avec le modèle de dynamique moléculaire classique pour les billes plastiques ($r_n = 0.8$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.2\text{g}$, $R = 3\text{mm}$, $\mu = 0.5$, $\mu_r = 0$) et le modèle modifié par frottement de roulement pour les Ammonitrates ($r_n = 0.3$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.02\text{g}$, $R = 2.3\text{mm}$, $\mu = 0.5$, $\mu_r = 0.1$).

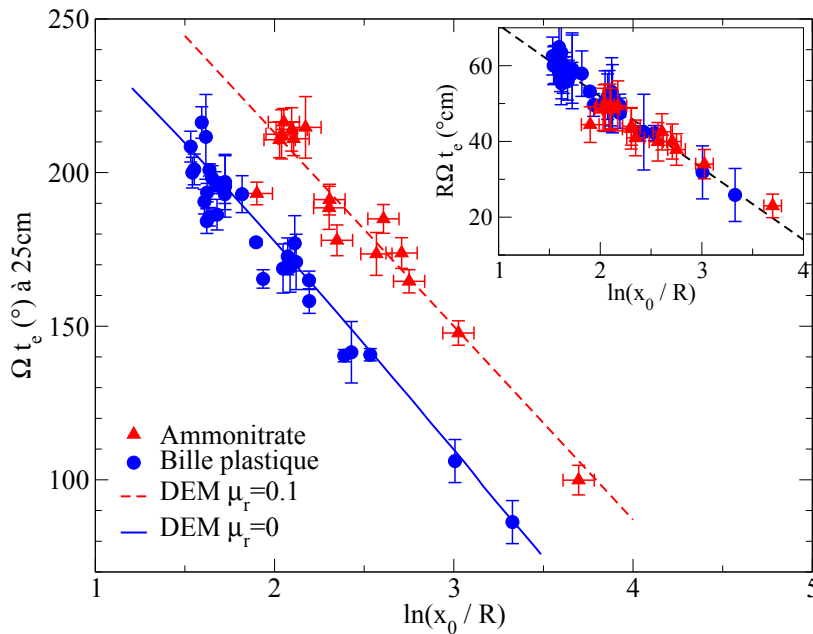


FIGURE 5.7 – Angle de sortie de pale Ωt_e en fonction de $\ln(x_0/R)$ pour les Ammonitrates comparé aux billes plastiques (Pales P1 à P5). Puis adimensionnement par $R\Omega t_e$.

(i) Le temps d'accélération de la particule diminue linéairement avec $\ln(x_0/R)$. Dans les gammes de variations testées de r_n et μ , ces deux paramètres modifient peu la décroissance linéaire du temps d'accélération avec $\ln(x_0/R)$. Pour la modélisation, on a donc utilisé un coefficient de frottement et un coefficient de restitution moyen pour chaque interaction Ammonitrate/pale : $\mu = 0.5$ et $r_n = 0.3$. Avec ces valeurs

moyennes, le modèle numérique modifié ($\mu_r = 0.1$) reproduit raisonnablement bien les expérimentations avec les particules d'ammonitrate.

(ii) Pour un même $\ln(x_0/R)$, l'Ammonitrate sort avec un angle d'environ 35° supérieur à celui d'une bille plastique. Nous ne pouvons pas déterminer d'où proviennent ces variations car plusieurs paramètres varient simultanément entre les deux matériaux : notamment R , m , r_n . On peut faire l'hypothèse que ces différences proviennent du coefficient de restitution, qui modifie de manière significative la trajectoire. En effet, les billes plastiques ont une longueur de phase de rebonds nettement supérieure à celle des particules d'Ammonitrate (voir Fig. 5.2). Ainsi plus la longueur de la phase de rebonds est importante, plus la distance parcourue sur la pale est faible et donc plus le temps d'éjection est court (trajectoire exponentielle lors du roulement contre une trajectoire linéaire lors d'un rebond, voir §4.3.5).

(iii) On note qu'en divisant l'angle de sortie par le rayon de la particule ($R=3\text{mm}$ pour une bille plastique et $R=2.3\text{mm}$ pour une particule d'Ammonitrate), les points expérimentaux se retrouvent confondus sur une même droite.

5.2 Modélisation de trajectoire de particules de formes irrégulières

Pour rendre compte de certains résultats expérimentaux avec des particules quasi-sphérique d'Ammonitrate, on a introduit dans la modélisation, un faible frottement de roulement μ_r dans l'équation des moments. Dans cette section, on souhaite savoir quelles modifications du modèle sont à apporter pour représenter des grains non-sphériques comme le KCl.

5.2.1 Deux comportements différents

On a observé deux comportements différents pour les particules de KCl en fonction du type de pale qui ne dépendent pas des conditions expérimentales : soit un comportement de glissement, soit un comportement de rebonds.

Comportement principal de glissement

Sur les pales P1, P3 et P4, on remarque que la phase de rebonds se compose d'un seul rebond pour lequel l'angle d'impact est normal (cf. Fig. 5.8). Comme la hauteur des rebonds est inférieure aux erreurs expérimentales ($\delta y' = 2\text{mm}$), il n'est pas possible de déterminer la vitesse et le temps en fin de phase de rebonds. La phase de collage est ensuite constituée d'un mouvement de glissement le long de la pale. On a vérifié à l'aide d'une "bande blanche" que les particules de KCl avaient un mouvement de glissement sans roulement (utilisation de la même méthode que pour les particules sphériques pour mesurer la vitesse angulaire). Le coefficient de restitution, déduit de l'Eq. 2.9 vaut $r_n = 0.18$ sur la pale P1.

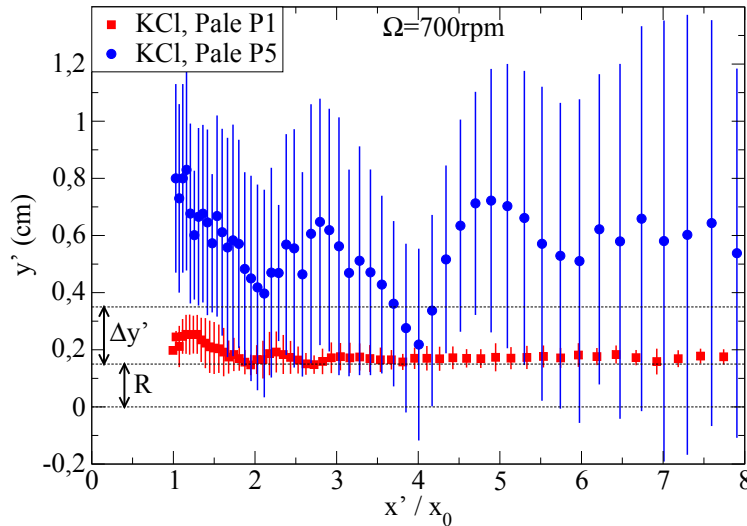


FIGURE 5.8 – Comparaison des trajectoires pour une particule de KCl sur les pales P1 et P5 à $\Omega = 700$ tours/min.

Comportement principal de rebonds

Sur les pales P2 et P5, la particule de KCl rebondit sur toute la longueur de la pale (cf. Fig. 5.8). On a observé qu'avec certaines particules la hauteur des rebonds augmente le long de la pale, alors qu'avec d'autres particules la hauteur des rebonds diminue le long de la pale. Ceci explique les écarts-types relativement élevés sur la Fig. 5.8. Si la hauteur des rebonds augmente, on peut supposer un coefficient de restitution supérieur à 1. L'étude statique sur la pale P5 a déjà mis en évidence des coefficients de restitution supérieurs à 1, pour des angles d'impact $\theta_i < 20^\circ$ (cf. Fig. 2.21). Les écarts-types sur la Fig. 2.21 sont extrêmement importants $r_n = 1.6 \pm 1$. Ces écarts-types proviennent de la diversité des formes des particules de KCl.

On remarque par ailleurs, que ce comportement principal de rebonds se produit sur les pales P2 et P5 c'est-à-dire sur les pales où le frottement particule/pale est le plus important.

5.2.2 La phase de collage

5.2.2.1 Vitesses en fin de pale

La Fig. 5.9 compare les vitesses expérimentales \dot{x}_e selon (Ox') des particules de KCl, des particules d'Ammonitrate et des billes plastiques, à la position x_e , en fonction de μ . On ne représente ici que les écoulements de KCl qui ont un comportement de glissement. Dans la phase de collage, on utilise le frottement de Coulomb (Tab. 2.1) car les chocs sont inexistantes. On compare les points obtenus avec le modèle de dynamique moléculaire ($r_n = 0.2$, $K_n = 75$ kN/m, $m = 0.02$ g, $R = 2.3$ mm).

(i) Avec la pale P1 ($\mu = 0.39$), les vitesses selon (Ox') des particules de KCl sont proches des vitesses selon (Ox') des particules d'Ammonitrate (la pale P1 est la pale où on a réalisé le plus d'expérimentations). Avec les pales P3 et P4, on observe une

différence de 5% à 10% entre les vitesses des deux particules.

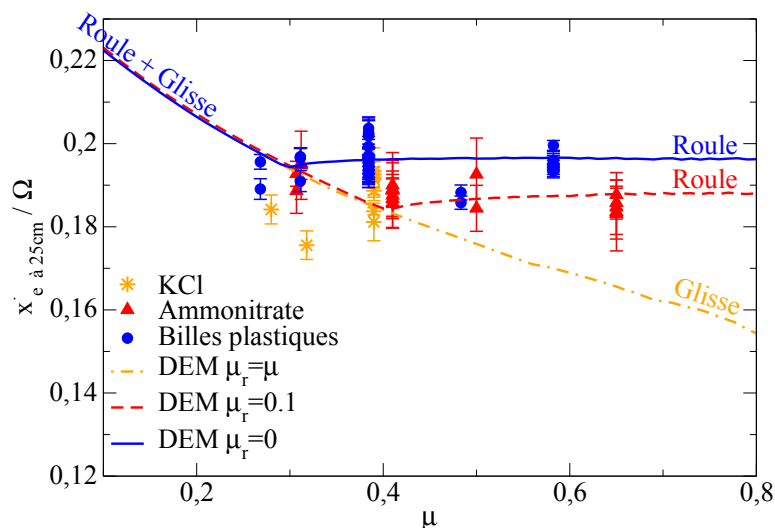


FIGURE 5.9 – Vitesse angulaire en fin de pale en fonction du coefficient de frottement pour les grains de KCl comparée aux Ammonitrates et aux billes plastiques. Les courbes sont issues du modèle de dynamique moléculaire ($r_n = 0.2$). Un frottement de roulement a été introduit pour reproduire les vitesses des KCl.

(ii) Comme les particules de KCl, glissent sans rouler le long de la pale, on a choisi d'introduire un frottement de roulement $\mu_r = \mu$ dans le modèle de dynamique moléculaire pour reproduire la trajectoire des particules. Cette méthode revient à bloquer les degrés de liberté de rotation de la particule sphérique [Calvetti et al., 2003]. On observe que seules les vitesses avec la pale P1 sont reproduites par ce modèle. Les valeurs avec les pales P3 et P4 sont plus faibles (de 5% à 10%)

5.2.2.2 Temps d'accélération sur la pale

On compare Fig. 5.10, l'angle $\theta_e = \Omega t_e$ que parcourt la pale pendant la phase d'accélération de la particule pour les particules de KCl, pour les particules d'Ammonitrate et pour les billes plastiques en fonction de $\ln(x_0/R)$.

On compare les points obtenus avec le modèle de dynamique moléculaire :

- pour les billes plastiques ($r_n = 0.8$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.2\text{g}$, $R = 3\text{mm}$, $\mu = 0.5$, $\mu_r = 0$),
- pour les particules d'Ammonitrate ($r_n = 0.3$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.02\text{g}$, $R = 2.3\text{mm}$, $\mu = 0.5$, $\mu_r = 0.1$),
- pour les particules de KCl ($r_n = 0.2$, $K_n = 75\text{kN/m}$, $m = 0.01\text{g}$, $R = 2.3\text{mm}$, $\mu = 0.5$, $\mu_r = \mu$),

(i) On retrouve avec les particules de KCl, une diminution linéaire du temps d'accélération avec $\ln(x_0/R)$. Par ailleurs, ce temps d'accélération du KCl est du même ordre de grandeur que celui des Ammonitrates. Or, ces deux matériaux ont des comportements différents : les particules de KCl glissent sans rouler le long de la pale

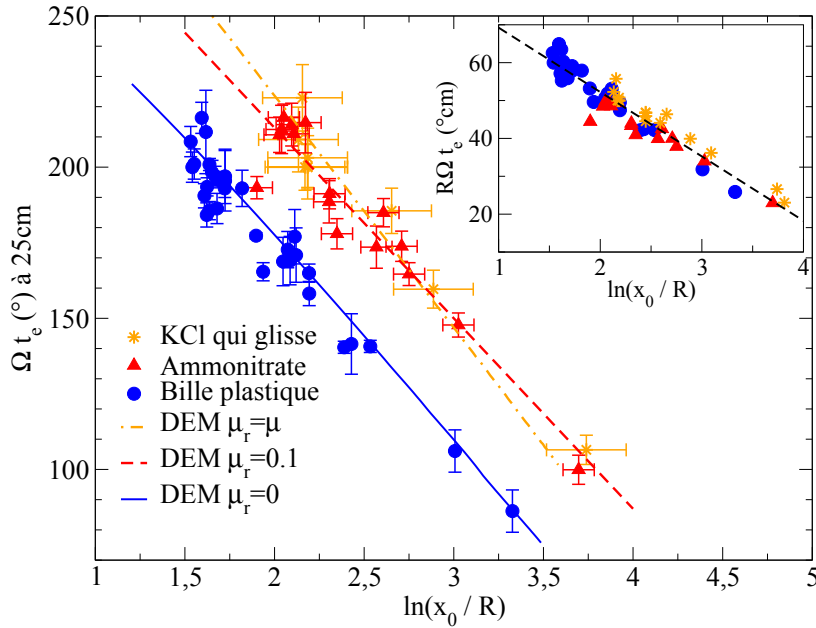


FIGURE 5.10 – Angle de sortie de pale Ω_e en fonction de $\ln(x_0/R)$ pour les grains de KCl comparé aux Ammonitrates et aux billes plastiques. Puis adimensionnement par $R\Omega_e$.

et les particules d'Ammonitrate roulent et glissent. Cela semble indiquer que le degré de liberté de rotation n'a pas d'influence sur le temps d'accélération. La modélisation par blocage des rotations reproduit raisonnablement le temps d'accélération.

(ii) Comme précédemment, en divisant l'angle de sortie par le rayon de la particule ($R=3\text{mm}$ pour une bille plastique et $R=2.3\text{mm}$ pour les particules d'Ammonitrate et de KCl), les points expérimentaux se retrouvent confondus sur une même droite.

5.3 Conclusions

Ce chapitre donne un aperçu des expérimentations réalisées sur des particules de formes irrégulières. On a testé deux types de granulats : des particules quasi-sphériques d'Ammonitrate et des particules de formes irrégulières de KCl. Dans la majorité des cas, on retrouve le même type de trajectoire que pour des particules sphériques : une phase de rebonds puis une phase de collage. Cependant, dans certains cas, les KCl rebondissent sur toute la longueur de la pale malgré leur faible coefficient de restitution. Ce phénomène peut être dû à la forme facettée des particules.

L'utilisation d'un frottement de roulement dans la modélisation a permis de rendre compte de certains résultats expérimentaux : une valeur de frottement de roulement $\mu_r = 0.1$ pour les particules d'Ammonitrate et une valeur de frottement

de roulement $\mu_r = \mu$ pour les particules de KCl.

On a observé que les valeurs expérimentales en fin de pale (vitesse selon (Ox') et temps d'accélération) sont quasiment identiques pour des particules de KCl qui glissent et des particules d'Ammonitrate qui roulent et glissent pour des valeurs de frottement $0.3 < \mu < 0.4$. Ceci laisse supposer que le degré de liberté de rotation a peu d'influence sur la trajectoire.

Ce résultat est inattendu car les précédentes investigations expérimentales telles que [Colin, 1997] et [Van Liedekerke, 2007], ont montré des différences nettes pour des flux denses de particules sur des pales de type P4. On observe dans un régime dilué que les différences ne sont pas significatives pour des valeurs de frottement $0.3 < \mu < 0.4$. On souhaite donc poursuivre l'étude en étudiant un flux dense de particules.

Deuxième partie

Écoulement dense de particules.

Chapitre 6

Etude de l'écoulement de particules

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'écoulement dense de particules le long d'une paroi rotative, dans une configuration modèle. L'essentiel du chapitre décrit une étude par simulation numérique discrète, en trois dimensions, par la méthode des éléments discrets.

Cette étude va nous permettre de tester les lois d'écoulement du matériau dans une configuration inédite par rapport aux connaissances actuelles. En effet, les forces d'inertie induisent sur le matériau en écoulement des efforts de traction-compression. Par ailleurs, dans le régime mono-particule, on a vu que la forme des particules est un facteur qui peut être important. Notre ambition n'est pas d'aborder la problématique de l'écoulement pour toutes les formes de particules. Nous ne traiterons pas dans le cadre de cet exposé des effets de différence de tailles de particules qui pourraient générer des phénomènes de ségrégation divers au sein de l'écoulement de particules. Ces phénomènes ont été étudiés dans d'autres situations ([Cantelaube, 1995], [Félix and Thomas, 2004] et [Goujon et al., 2007]) et font encore l'objet de nombreuses investigations. Nous n'étudierons pas de manière générale non plus, l'influence des dimensions initiales de l'amas de particules sur l'écoulement. En pratique, pour un système d'épandage classique, deux parois latérales sont présentes. Elles servent à confiner l'écoulement le long de l'axe vertical et surtout à empêcher à l'instant initial la chute de l'amas granulaire sous l'effet de la gravité. Nous ne traiterons pas l'influence de cet aspect dans le cadre de cette thèse.

Notre objectif est de savoir si une modélisation minimale de la forme d'une particule peut permettre d'interpréter certains mécanismes observés dans la réalité. La forme de la particule n'est ici prise en compte qu'à travers les degrés de liberté de rotation de la particule. Nous traitons tout d'abord le cas des particules de forme sphériques possédant la capacité de rouler au contact (trois degrés de liberté de rotation). Nous décrivons tout d'abord qualitativement les caractéristiques du système granulaire avant d'aborder son étude à partir des lois de conservation et d'une approche microscopique. Nous étudions enfin le cas des particules sans rotation.

6.1 Description de l'écoulement simulé

On considère un écoulement le long d'une paroi rotative verticale, sans paroi latérale cf. Fig. 6.1. Les simulations sont réalisées sur des pales de longueur $L_p = 1\text{m}$.

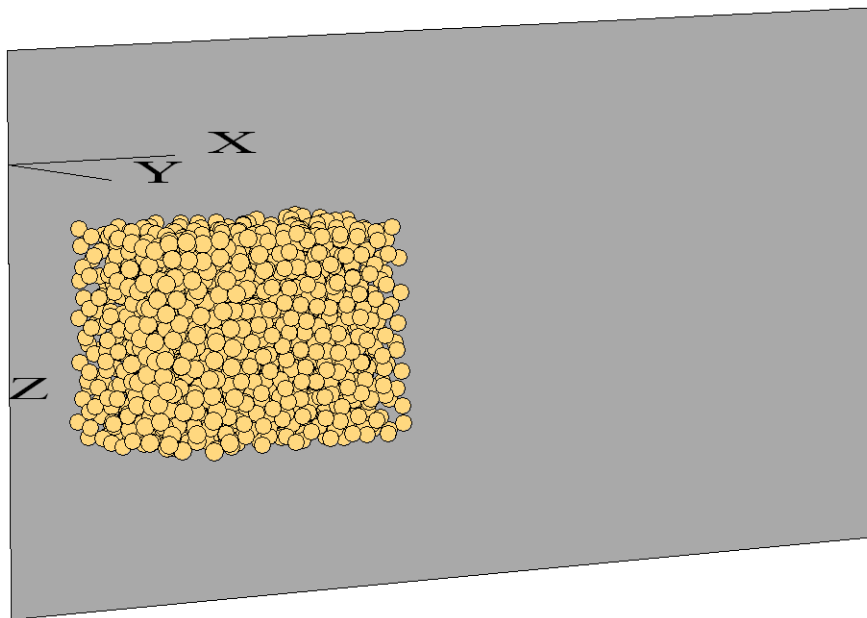


FIGURE 6.1 – Système simulé à l'instant initial où les 1500 particules sont placées aléatoirement dans un parallélépipède de dimension $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$ et $L_z = 8\text{cm}$.

L'écoulement granulaire est constitué d'une assemblée de N particules de masse volumique $\rho = 1768\text{kg/m}^3$, de rayon $R = 3\text{mm}$, de masse $m = 0.2\text{g}$ et de coefficient de raideur normal $K_n = 75\text{kN/m}$. Nous considérons le cas d'un matériau très dissipatif, en prenant des coefficients de restitution normal $r_n = 0.2$. Ceci correspond à la valeur mesurée expérimentalement lors du choc d'une particule d'Ammonitrate sur une pale en acier. Ces paramètres seront fixés dans le cadre de l'étude. Les valeurs du frottement entre deux particules μ_b et entre une particule et la pale μ sont les paramètres du problème. Dans la suite de l'exposé, on se placera dans le référentiel tournant lié à la pale R' d'axes (Ox, Oy) .

Deux configurations initiales d'empilement ont été testées : la première où les particules sont disposées sans contact de manière aléatoire dans un parallélépipède (Fig. 6.1) et la deuxième où les particules sont régulièrement rangées dans un parallélépipède (Fig. 6.2). Pour une assemblée de 1500 particules disposées dans un parallélépipède de dimension $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$ et $L_z = 8\text{cm}$, la compacité initiale est alors de 0.3. Le centre de la masse granulaire est placé à une distance faible de l'axe de rotation $x_0 = 23R = 7\text{cm}$.

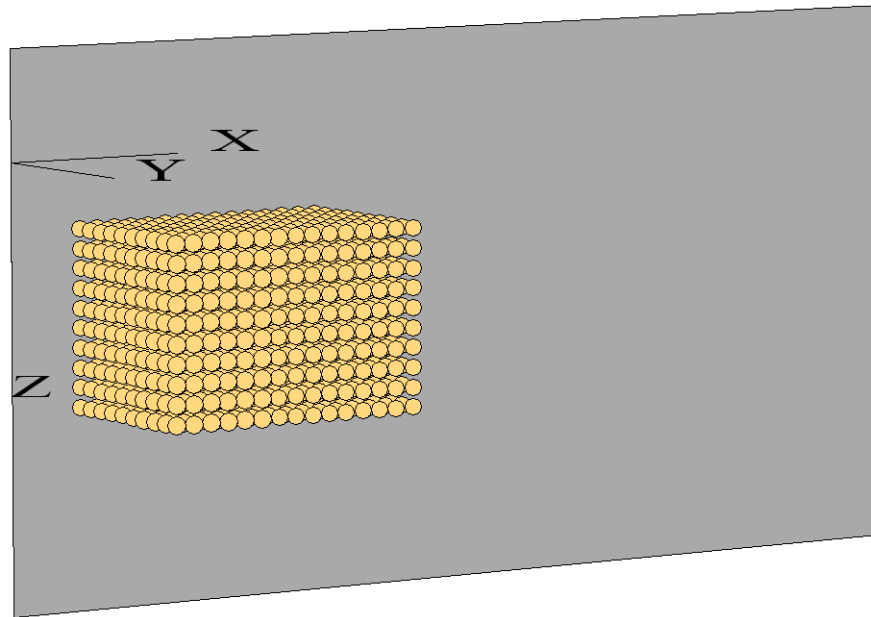


FIGURE 6.2 – Système simulé à l’instant initial où les 1500 particules sont rangées régulièrement dans un parallélépipède de dimension $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$ et $L_z = 8\text{cm}$.

Mécanisme de mise en mouvement de l’amas

Dans notre système modèle, les forces extérieures appliquées se réduisent aux forces d’inertie (Coriolis et centrifuge) et à la gravité. Les forces centrifuge et de Coriolis ne sont pas, par définition, des champs de forces constants le long de la pale : globalement elles augmentent avec la distance à l’axe de rotation. Toutefois, il est à noter que la force de Coriolis n’apparaît que si la masse granulaire est déjà mise en mouvement.

Au regard des simulations et des profils de hauteur correspondant (Figs. 6.3,6.4), on peut distinguer trois phases lors de l’écoulement des particules :

- tout d’abord une phase de compression de l’amas granulaire dilué, à la suite du choc avec la pale. Dans cette phase, la compacité de la masse granulaire augmente brusquement. Initialement égale à 0.3, elle est quasiment multipliée par 2.
- Puis une déformation de l’amas le long de la paroi ainsi que la mise en mouvement progressive du front de l’amas.
- Enfin une phase d’étirement global de l’amas, accompagnée d’une diminution de sa hauteur jusqu’au régime mono-particule.

Nous définissons un amas comme un ensemble de particules connectées par un réseau de contacts. Un amas est ainsi constitué de toutes les particules en contact. L’idée d’un amas peut paraître ambiguë car en fin de désagrégation, on peut observer certains amas transitoires de particules en écoulement. Notre intérêt se porte ici sur la dynamique de désagrégation transitoire de cet amas de particules avant d’arriver à ce régime final.

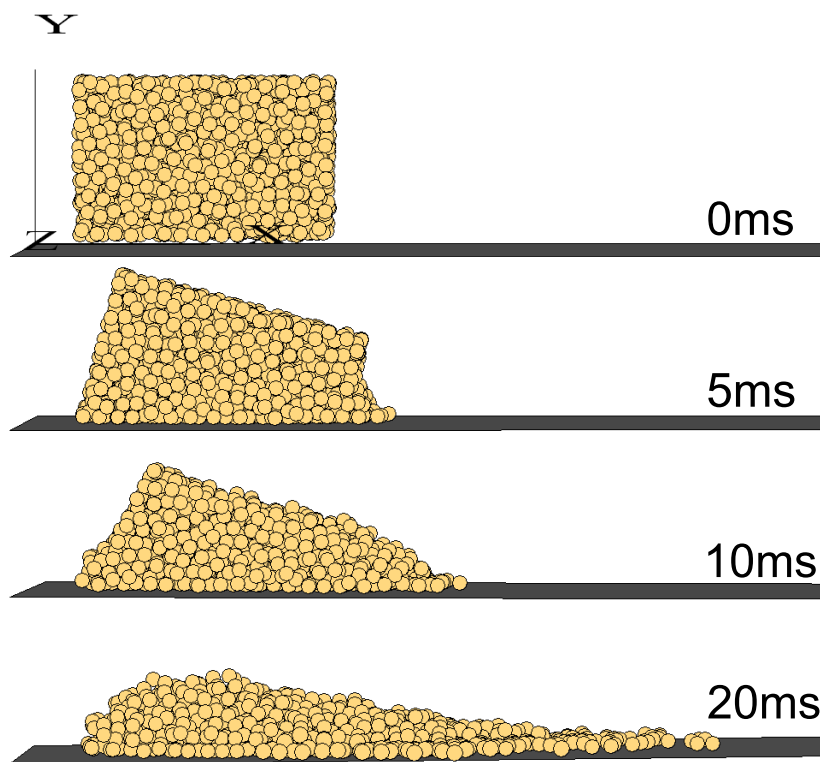


FIGURE 6.3 – Ecoulement de l'amas granulaire à différents temps (500tours/min, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

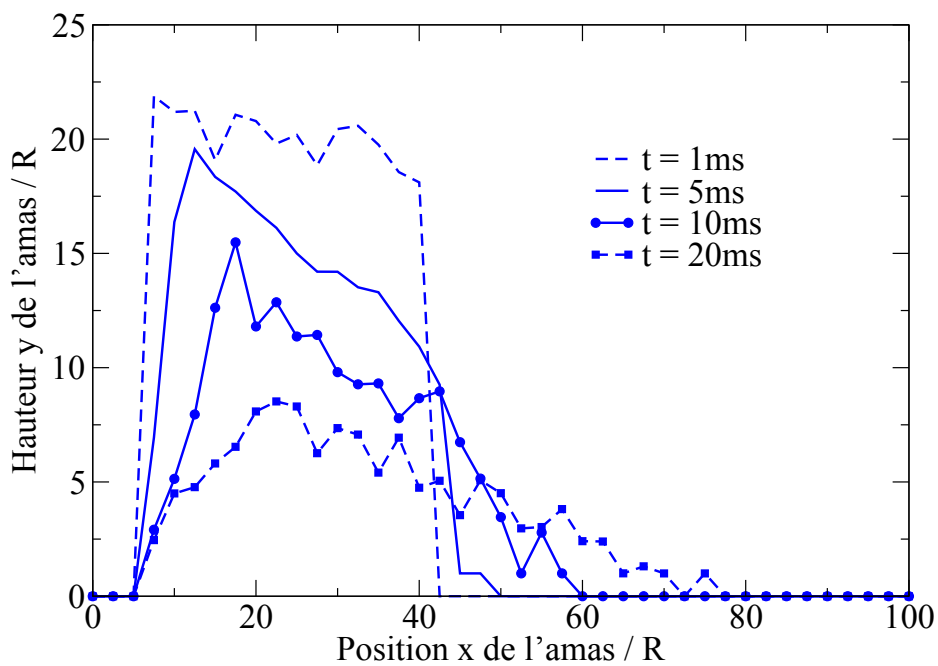


FIGURE 6.4 – Profil des hauteurs de l'amas granulaire à différents temps (500tours/min, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

6.2 Caractérisation macroscopique de l'amas

On étudie l'écoulement de l'amas principal c'est-à-dire celui qui compte le plus de particules.

6.2.1 Temps de désagrégation de l'amas

On souhaite connaître le temps au bout duquel l'amas atteint un régime mono-particule en fonction des paramètres du système tels que la position initiale x_0 , le frottement particule/pale μ , le débit et la vitesse de rotation Ω . Cette dynamique a été étudiée pour trois frottements particule/pale différents : $\mu = 0.1$, $\mu = 0.4$ et $\mu = 0.6$. On modifie le débit en changeant les dimensions du parallélépipède initial (L_x, L_y) tout en gardant une compacité initiale constante pour tous les débits (compacité initiale de 0.3). On conserve également le rapport L_y/L_x constant.

On représente sur les figures suivantes, la proportion de particules comptabilisées dans l'amas principal en fonction de l'angle de la pale Ωt . Par défaut, à l'instant initial, les particules considérées possèdent la capacité de rouler. De plus, elles sont placées de manière aléatoire.

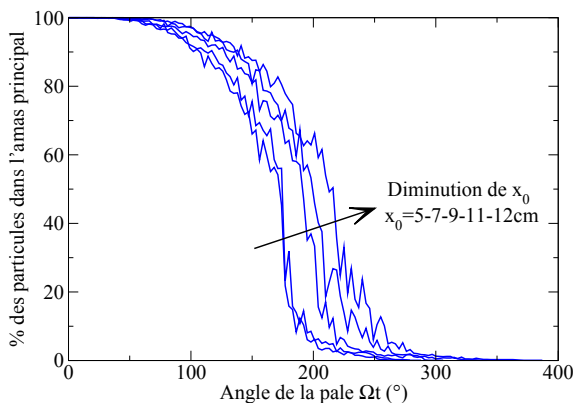


FIGURE 6.5 – Proportion de particules dans l'amas pour $x_0 \in [5 - 12]$ cm ($L_x = 10$ cm, $L_y = 7$ cm, $L_z = 8$ cm, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$).

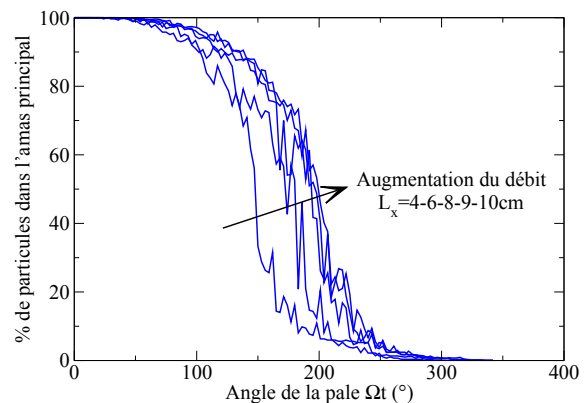


FIGURE 6.6 – Proportion de particules dans l'amas pour $L_x \in [4 - 10]$ cm ($x_0 = 7$ cm, $L_y/L_x = 0.7$, $L_z = 8$ cm, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$).

Les fluctuations sur les courbes sont dues aux fluctuations du réseau de contacts entre les particules. Les figures 6.5 et 6.6 montrent qu'en diminuant x_0 ou en augmentant le débit, l'amas de particules met plus de temps à se décomposer. Des débits plus faibles ($L_x < 4$ cm) n'ont pas été représentés car les particules sont quasiment en régime mono-particule dès les premiers chocs avec la pale. L'arrangement initial des particules a peu d'effet sur la décomposition de l'amas (Fig. 6.7). De la même façon, on remarque que le frottement particule/pale influe légèrement sur la décomposition de l'amas. Enfin, on constate qu'il n'y a aucune différence dans la dynamique de désagrégation de l'amas pour des particules avec et sans possibilité de

rotation pour de faibles valeurs du frottement $\mu = 0.1$ (Fig. 6.8). En revanche, pour de fortes valeurs du frottement $\mu = 0.6$, la décomposition de l'amas de particules sans rotation est fortement ralentie.

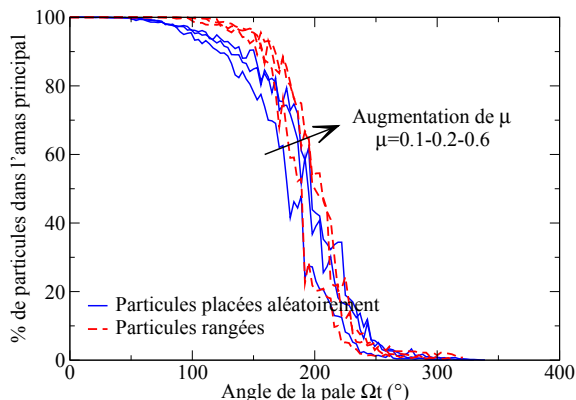


FIGURE 6.7 – Proportion de particules dans l'amas pour deux arrangements initiaux différents et pour des frottements $\mu=0.1-0.2-0.6$ ($x_0 = 7\text{cm}$, $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu_b = 0.2$).

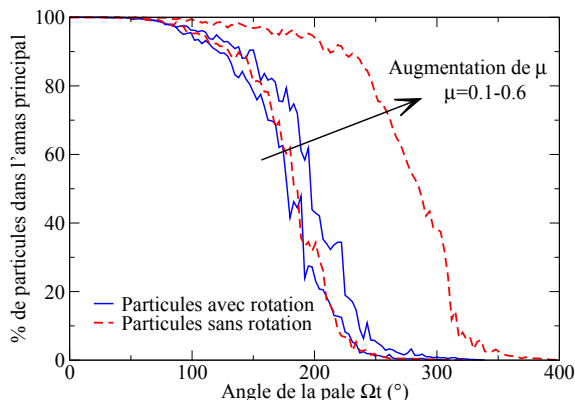


FIGURE 6.8 – Proportion de particules dans l'amas pour des particules avec et sans possibilité de rotation et pour $\mu=0.1-0.6$ ($x_0 = 7\text{cm}$, $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu_b = 0.2$).

On propose une loi d'échelle pour le temps de désagrégation sur la figure 6.9 pour une valeur de frottement donnée ($\mu = 0.4$). On observe qu'au bout d'un temps de l'ordre de $t \approx \frac{a(\mu)}{\Omega} \left(\frac{L_x}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}$ (où $a(\mu) \approx 200^\circ$), l'amas s'est quasiment désagrégé pour des particules avec degrés de liberté de rotation. Dans la suite, on souhaite poursuivre l'étude de la désagrégation de l'amas.

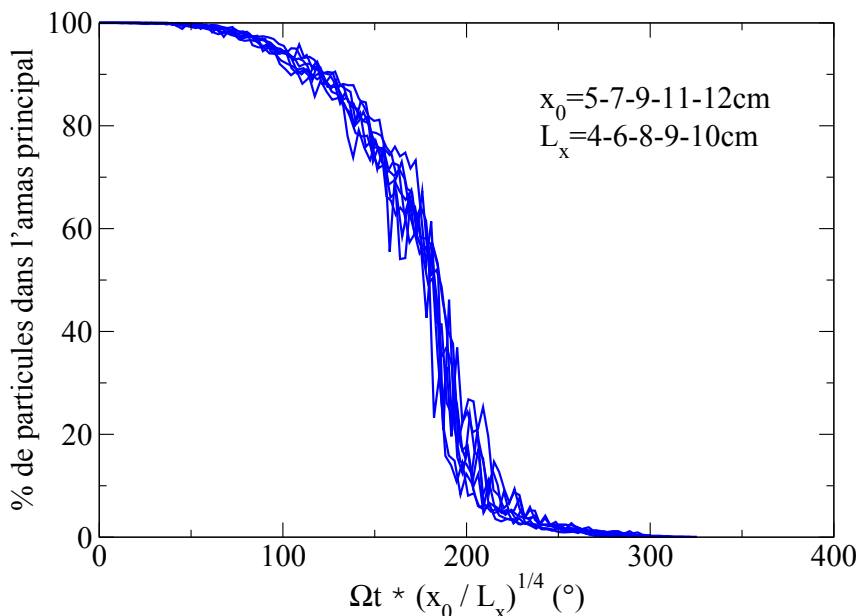


FIGURE 6.9 – Loi d'échelle proposée en $(x_0/L_x)^{\frac{1}{4}}$, pour l'évolution de la proportion de particules comptabilisées dans l'amas ($L_y/L_x = 0.7$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$).

6.2.2 Dynamique de l'amas granulaire

On représente sur les figures suivantes, l'évolution de la longueur de l'amas dans la direction (Ox) et de l'épaisseur maximale de l'amas dans la direction (Oy), en fonction des paramètres du système. On utilise la loi d'échelle déterminée précédemment. On observe sur la figure 6.10 que l'amas atteint un régime mono couche pour un temps de l'ordre de $t \approx \frac{b}{\Omega} \left(\frac{L_x}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}$ (où $b \approx 150^\circ$). On remarque également que la longueur de l'amas augmente jusqu'au temps $t \approx \frac{a}{\Omega} \left(\frac{L_x}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}$ (où $a \approx 200^\circ$), puis décroît très rapidement (Fig. 6.12).

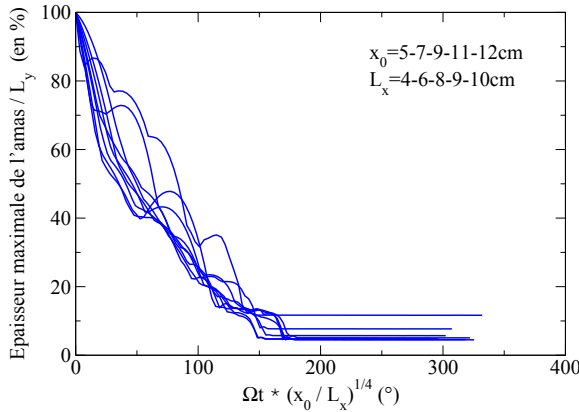


FIGURE 6.10 – Epaisseur de l'amas pour différentes valeurs de x_0 et L_x (loi d'échelle en $(x_0/L_x)^{\frac{1}{4}}$) ($L_y/L_x = 0.7$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$, particules avec rotation).

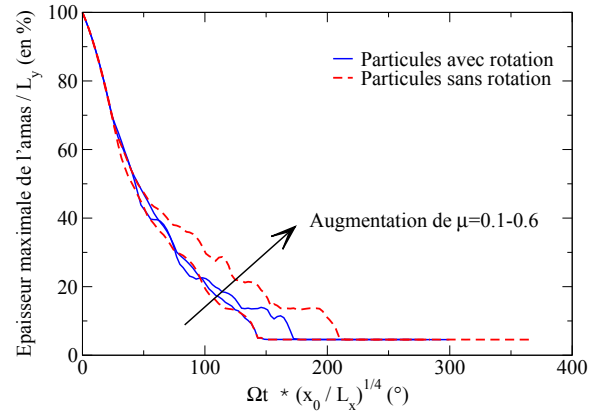


FIGURE 6.11 – Epaisseur de l'amas pour des particules avec et sans rotation et pour des frottements $\mu=0.1-0.6$ ($x_0 = 7\text{cm}$, $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu_b = 0.2$).

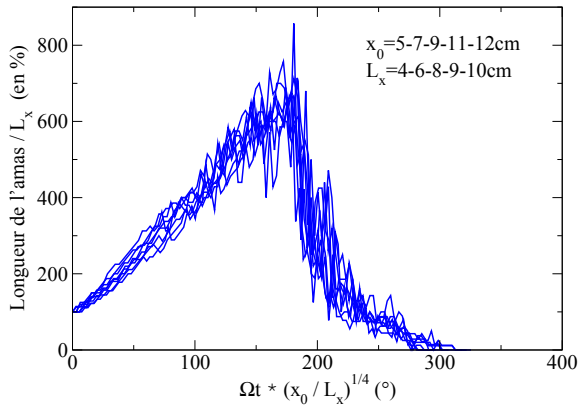


FIGURE 6.12 – Longueur de l'amas pour différentes valeurs de x_0 et L_x (loi d'échelle en $(x_0/L_x)^{\frac{1}{4}}$) ($L_y/L_x = 0.7$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$, particules avec rotation).

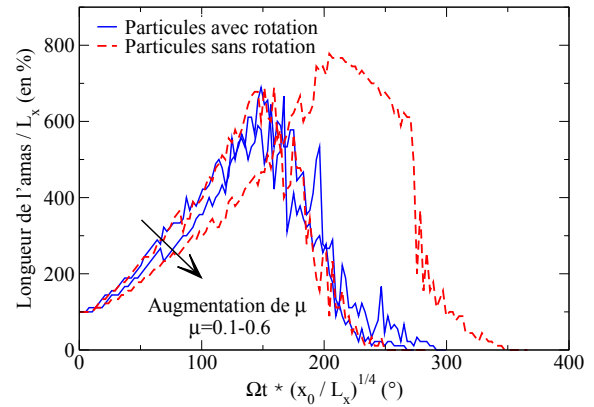


FIGURE 6.13 – Longueur de l'amas pour des particules avec et sans rotation et pour des frottements $\mu=0.1-0.6$ ($x_0 = 7\text{cm}$, $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu_b = 0.2$).

Les figures 6.11 et 6.13 montrent qu'à faible frottement ($\mu = 0.1$), la dynamique

de désagrégation de l'amas est identique pour des particules avec et sans possibilité de rotation. Pour une valeur de frottement plus élevée ($\mu = 0.6$), l'amas de particules sans rotation met environ $\Omega t \approx 50^\circ$ de plus pour se décomposer.

6.2.3 Centre de masse de l'amas

On représente sur les figures suivantes, l'évolution de la position du centre de masse de l'amas dans la direction (Ox), en fonction des paramètres du système. La figure 6.14 montre qu'il n'y a aucune influence du débit et de la position initiale pour des temps $\Omega t \leq 175^\circ$ ($\mu = 0.4$). On n'a donc pas utilisé la loi d'échelle pour l'angle de la pale. On observe de fortes fluctuations pour des temps $\Omega t > 175^\circ$, dues aux fluctuations du réseau de contacts entre les particules. Comme précédemment, on retrouve à faible frottement ($\mu = 0.1$), le même comportement du centre de masse pour des particules avec et sans rotation. Pour une valeur de frottement plus élevée ($\mu = 0.6$), le centre de masse des particules sans rotation est ralenti d'environ 10% pour un temps $\Omega t = 175^\circ$.

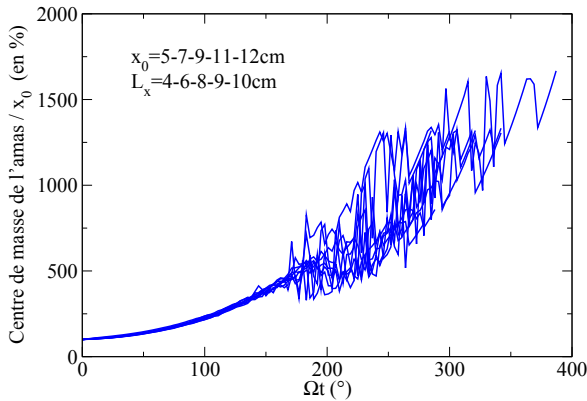


FIGURE 6.14 – Centre de masse de l'amas pour différents x_0 et L_x ($L_y/L_x = 0.7$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$, particules avec rotation).

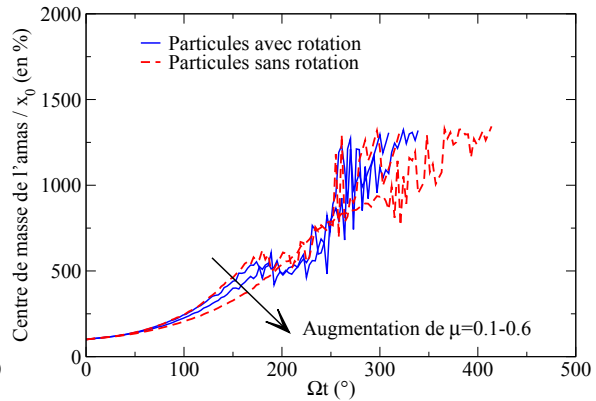


FIGURE 6.15 – Centre de masse de l'amas pour des particules avec et sans rotation et pour $\mu=0.1-0.6$ ($x_0 = 7\text{cm}$, $L_x = 10\text{cm}$, $L_y = 7\text{cm}$, $L_z = 8\text{cm}$, $\mu_b = 0.2$).

6.2.4 Conclusions

Pour des particules avec rotation, l'étude macroscopique a permis de mettre en évidence un temps caractéristique de désagrégation de l'amas. Nous n'avons pas fait varier toutes les valeurs du frottement à la paroi. Pour des faibles valeurs de frottement ($\mu = 0.1$), la rotation des particules n'a pas d'influence sur la désintégration de l'amas (étude du nombre de particules, des dimensions de l'amas et de la position du centre de masse de l'amas). En revanche, pour des valeurs de frottements plus élevées ($\mu = 0.6$), l'amas de particules sans rotation met plus de temps à se décomposer. Ces observations vont motiver l'étude

de l'écoulement de l'amas par une approche plus microscopique.

6.3 Grandeurs caractéristiques du problème

Avant de présenter la dynamique de l'écoulement à l'échelle microscopique, on souhaite discuter au préalable des mécanismes dynamiques mis en jeu au sein de l'écoulement granulaire et des nombres sans dimension pertinents. Les lois d'écoulement sont contrôlées par différents facteurs couplés :

- la géométrie de l'écoulement, c'est-à-dire les parois (statiques ou dynamiques) qui imposent les conditions aux limites,
- les champs de forces extérieurs imposés. Ici, les forces imposées sont les forces d'inertie (Coriolis, centrifuge) en plus de la gravité,
- La réponse mécanique du matériau granulaire à ces contraintes externes. Elle fait intervenir les propriétés mécaniques microscopiques des particules qui régissent la transmission des forces et de l'impulsion, au niveau des contacts inter-particules. Notons qu'un matériau granulaire est un milieu discret pour lequel les forces se transmettent au niveau des contacts entre les particules. Ainsi, un matériau granulaire répond à une sollicitation de compression ou de cisaillement, mais ne répond pas à la traction (allongement longitudinal) dès qu'il y a perte de contacts. Cette propriété originale les distingue entre autres des milieux élastiques classiques.

Temps et nombres caractéristiques dans l'écoulement :

⇒ L'échelle naturel de temps dans le système correspond à la rotation de la pale $t_\Omega = \frac{1}{\Omega}$.

⇒ Le temps de choc élastique t_c :

A l'échelle des contacts (particule/paroi et particule/particule), on peut définir deux temps de choc élastique : un temps de choc lié au contact bille/bille $t_c(bb)$ et un temps de choc lié au contact bille/paroi $t_c(bp)$. La valeur du temps de choc, présentée dans le chapitre 1, est donnée par l'équation 1.15. Elle dépend des propriétés mécaniques au niveau du contact. On a vu que selon la valeur de t_c et de celle de la vitesse de rotation Ω , une particule peut rebondir ou rester collée le long de la paroi (nombre centrifuge $N_c \ll 1$ ou $N_c \gg 1$). On se place ici dans des conditions pour lesquelles $t_c(bb) = t_c(bp) = t_c = 0.2\text{ms}$.

⇒ Le temps de dissipation des ondes élastiques t_e :

L'énergie dissipée au niveau des contacts fait intervenir un temps caractéristique correspondant à la dissipation des ondes élastiques. Pour des écoulements denses de particules, le réseau des contacts permet une propagation de ces ondes élastiques à travers l'échantillon et donc une dissipation non locale de l'énergie. Le temps caractéristique associé est de l'ordre de $t_e = \frac{Ht_c}{2R} \approx 10t_c$ ou H représente la dimension caractéristique de l'écoulement.

⇒ Les temps caractéristiques de l'écoulement :

Dans le problème considéré, le champ de force extérieur imposé à l'écoulement se compose d'une part d'une composante de compression selon (Oy) et d'autre part d'une composante de traction selon (Ox) . Ces sollicitations mécaniques induisent des gradients $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_y}{\partial y}$ dans l'écoulement. L'écoulement étant essentiellement dans la direction (Ox) , les gradients de vitesses dans la direction (Oz) seront moins importants. On définit les temps caractéristiques suivants :

- Le temps caractéristique de confinement par la contrainte de Coriolis (pression de Coriolis P exercée sur les particules) :

$$T_p = \sqrt{\frac{m}{2RP}} = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho}{6P}} \quad (6.1)$$

- Le temps caractéristique d'élongation lié à la contrainte centrifuge (contrainte centrifuge P' exercée sur les particules) :

$$T_c = \sqrt{\frac{m}{2RP'}} = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho}{6P'}} \quad (6.2)$$

- Le temps caractéristique lié à la traction T_x dans la direction (Ox) :

$$T_x = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^{-1} \quad (6.3)$$

- Le temps caractéristique associé à la compression T_y dans la direction (Oy) :

$$T_y = \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^{-1} \quad (6.4)$$

Dans le problème considéré, le mouvement des particules le long de la paroi peut induire des gradients de vitesses de cisaillement dans l'écoulement $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial V_y}{\partial x}$. On peut introduire le temps caractéristique de cisaillement entre couches T_{γ_y} où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement :

$$T_{\gamma_y} = \frac{1}{\dot{\gamma}} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^{-1} \quad (6.5)$$

et le temps caractéristique de cisaillement T_{γ_x} dans la direction (Ox) :

$$T_{\gamma_x} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^{-1} \quad (6.6)$$

Ces considérations nous amènent tout naturellement à nous intéresser aux nombres sans dimension I , J et J' suivants :

- I , appelé nombre inertiel, est le rapport entre le temps caractéristique de confinement par la contrainte de Coriolis et le temps de cisaillement [G.D.R. Midi, 2004] (Fig. 6.16) :

$$I = \frac{T_p}{T_{\gamma_y}} = 2R\frac{\partial V_x}{\partial y}\sqrt{\frac{\pi\rho}{6P}} \quad (6.7)$$

Ce nombre peut être vu comme la racine carrée du rapport entre l'inertie des particules ma (où l'accélération a est estimée par $2R\dot{\gamma}^2$) et la force moyenne subie par les particules $F = (2R)^2P$.

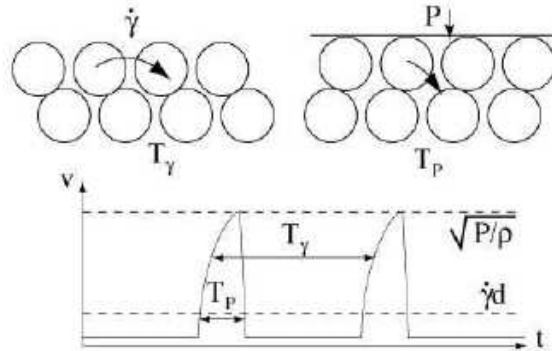


FIGURE 6.16 – Schéma illustrant le temps caractéristique de cisaillement T_γ et le temps de confinement T_p dans un milieu granulaire cisailé (Figure extraite de [G.D.R. Midi, 2004]).

- J est le rapport entre le temps caractéristique de confinement par la contrainte de Coriolis et le temps lié à la traction dans la direction (Ox) :

$$J = \frac{T_p}{T_x} = 2R \frac{\partial V_x}{\partial x} \sqrt{\frac{\pi\rho}{6P}} \quad (6.8)$$

- J' est le rapport entre le temps caractéristique d'élongation par la contrainte centrifuge et le temps lié à la compression dans la direction (Oy) :

$$J' = \frac{T_c}{T_y} = 2R \frac{\partial V_y}{\partial y} \sqrt{\frac{\pi\rho}{6P'}} \quad (6.9)$$

Nous utiliserons l'étude numérique et notamment l'étude des champs de vitesses eulériennes (§ 6.6.4) pour évaluer l'importance relative de chacun de ces nombres inertiels.

6.4 Structure de l'écoulement dense de particules

L'étude microscopique est réalisée à partir d'un arrangement aléatoirement de particules à l'instant initial. Ces conditions initiales sont en effet plus proches des conditions réelles que la situation de particules rangées régulièrement.

6.4.1 Compacité

La compacité est un indicateur structurel de l'amas granulaire puisqu'elle nous renseigne indirectement sur la densité de contacts transmettant les forces. C'est aussi un indicateur structurel de la durée du choc dans l'écoulement. Pour mesurer la compacité, nous considérons un volume élémentaire sphérique, de rayon $2R = 6\text{mm}$,

placé au sein de l'écoulement en une position donnée ($x_v = 33R, y_v, z_v = \bar{z}$). \bar{z} correspond, à l'instant initial, à la moyenne des positions z de toutes les particules dans l'amas. Nous avons vérifié que les résultats sont équivalents pour un volume élémentaire de rayon $3R$. Nous utilisons un frottement particule/paroi $\mu = 0.1$.

On mesure, dans un premier temps, la compacité près de la paroi. Le volume élémentaire est donc placé en contact avec la paroi ($y_v=2R$). La figure 6.17 représente la compacité en fonction du temps pour différentes vitesses de rotation. L'évolution de la compacité met en évidence un temps caractéristique de choc ($\Omega t \approx 10^\circ$ pour $\mu = 0.1$). On ne s'attardera pas sur l'étude de cette phase de choc dans la suite de l'étude. On observe qu'après cette phase de choc, la compacité est sensiblement constante en fonction du temps. La compacité moyenne, proche de la paroi, est de l'ordre de 0.5-0.6, ce qui correspond à une compacité proche de celle de l'empilement désordonné compact de particules mono-disperses ($\nu_D = 0.64$, cf. Fig. 1.5).

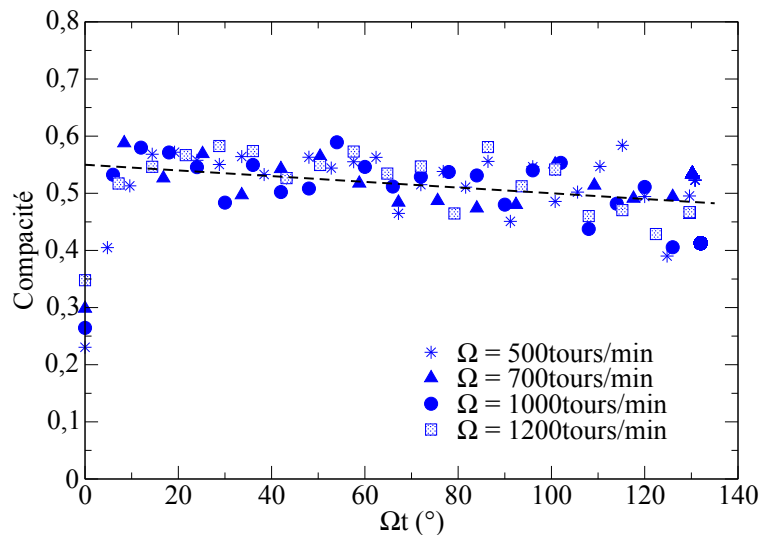


FIGURE 6.17 – Compacité en fonction du temps pour différentes vitesses de rotation de la pale, mesurée dans le volume élémentaire ($x_v = 33R, y_v = 2R, \bar{z}$) ($\mu = 0.1, \mu_b = 0.2$).

Dans un second temps, on déplace le volume élémentaire dans la direction (Oy), orthogonale à la paroi. La figure 6.18 représente le profil de compacité pour différents temps et donc pour différents hauteurs de couche granulaire. On retrouve à une distance proche de la paroi, $y_v=2R$, une compacité quasiment constante avec le temps. Cependant, on observe une diminution de la compacité selon (Oy). De plus, cette diminution de la compacité selon (Oy) augmente avec le temps. Les fortes fluctuations de la compacité, n'ont pas permis d'interpoler, de manière précise, l'évolution de la compacité en fonction de y et de t .

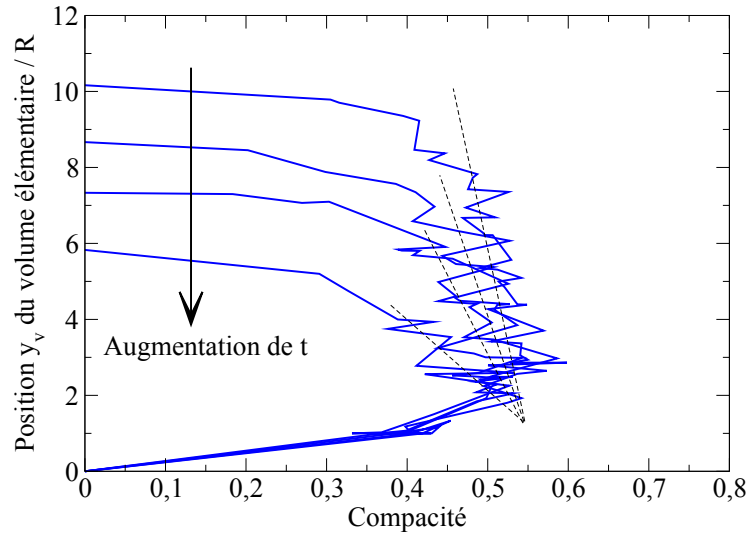


FIGURE 6.18 – Profil de compacité pour différents temps ($\Omega t = 30-45-60-90^\circ$), mesuré dans le volume élémentaire ($x_v = 33R$, y_v, \bar{z}) ($\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

6.4.2 Suivi de particules se déplaçant dans l'amas granulaire

6.4.2.1 Trajectoire des particules

La figure 6.19 montre l'évolution de la trajectoire de particules placées à différentes hauteurs de l'écoulement : on représente la hauteur des particules selon (Oy) en fonction de leur position selon (Ox) le long de la pale. Les trajectoires des particules, pour différentes positions initiales, sont quasiment parallèles jusqu'à une hauteur critique de l'ordre de 2-3 particules superposées, soit 4-6R. On observe une absence de fluctuations sur les trajectoires pour des hauteurs supérieures à 6R. Pour des hauteurs inférieures, la trajectoire montre une décroissance plus discontinue.

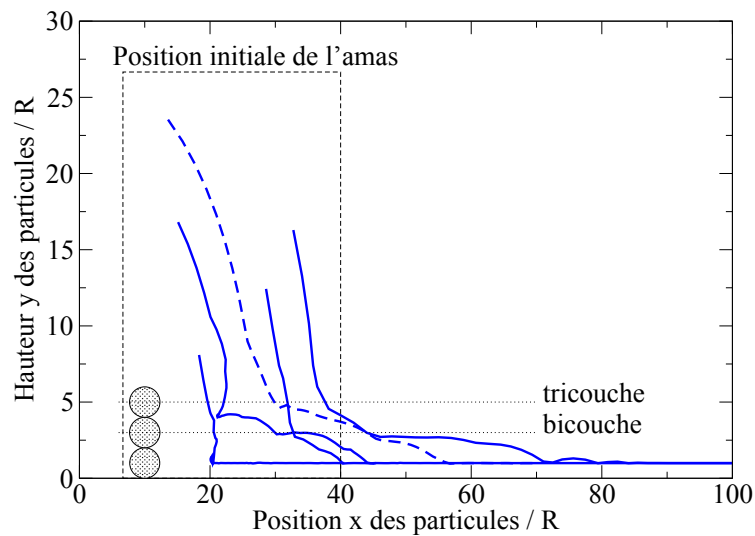


FIGURE 6.19 – Trajectoire de différentes particules ($\Omega = 500$ tours/min, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

6.4.2.2 Vitesses des particules

Pour des écoulements denses de particules sous cisaillement, il apparaît souvent nécessaire de tenir compte du transfert impulsif de quantité de mouvement entre les particules (choc). Les transferts d'impulsion par choc sont associés à l'échelle de la particule à une discontinuité de la quantité de mouvement. Ainsi l'étude des fluctuations de ces quantités de mouvement dans le système peut permettre d'avoir accès à des informations sur la présence de chocs dans l'écoulement. On souhaite étudier les vitesses de la particule dont la trajectoire est représentée en pointillés sur la figure 6.19.

⇒ Vitesse de translation :

La vitesse selon (Oy) est du même ordre de grandeur que la vitesse selon (Ox) juste après la phase de choc (Fig. 6.20). Puis dans l'écoulement, la vitesse selon (Ox) devient supérieure à la vitesse selon (Oy). On observe un rapport 3 en début d'écoulement et ce rapport augmente avec le temps. Le mouvement des particules se fait donc essentiellement dans la direction (Ox) après la phase de choc. Avant le contact avec la pale, on note que les fluctuations sur la vitesse selon (Oy) en fonction du temps, sont environ 2 à 3 fois plus importantes que les fluctuations sur la vitesse selon (Ox).

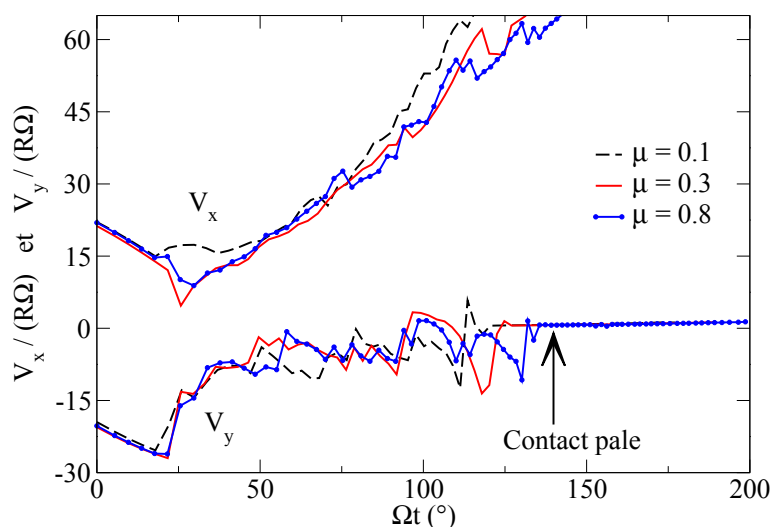


FIGURE 6.20 – Vitesse selon (Ox) et vitesse selon (Oy) d'une particule en fonction du temps pour différents frottements (500tours/min, $\mu=0.1-0.3-0.8$, $\mu_b = 0.2$).

Lorsque la particule entre en contact avec la pale, la vitesse selon (Ox) augmente avec le temps de manière exponentielle et la vitesse selon (Oy) tend vers 0 (Figs. 6.20,6.21,6.22). Par ailleurs, on observe l'apparition du roulement sans glissement lorsque le frottement est supérieur à une valeur seuil μ^* (Fig. 6.22). Nous reviendrons par la suite sur l'apparition de ce régime de roulement sans glissement dans l'amas granulaire en écoulement.

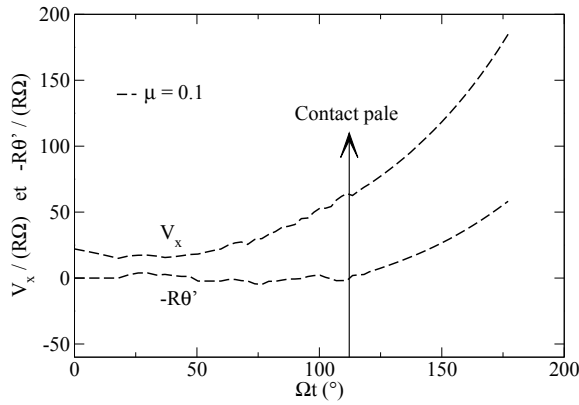


FIGURE 6.21 – Vitesse selon (Ox) et vitesse angulaire d'une particule en fonction du temps pour $\mu=0.1$ (500tours/min, $\mu_b = 0.2$).

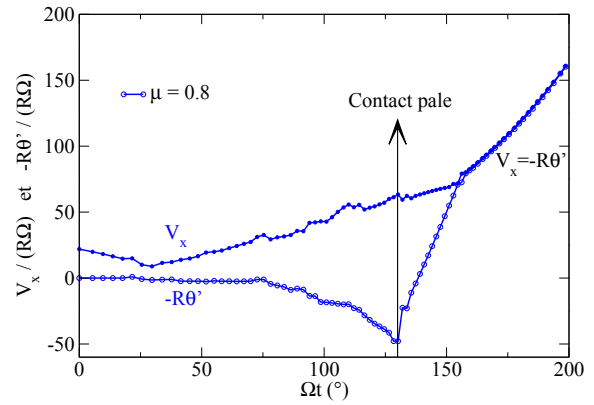


FIGURE 6.22 – Vitesse selon (Ox) et vitesse angulaire d'une particule en fonction du temps pour $\mu=0.8$ (500tours/min, $\mu_b = 0.2$).

⇒ Vitesse angulaire :

Pour une faible valeur du frottement particule/pale ($\mu = 0.1$), la vitesse angulaire de la particule est quasiment nulle avant le contact avec la pale (Figs. 6.21,6.23). Pour des valeurs de frottement plus élevées, la particule a toujours une vitesse angulaire quasiment nulle jusqu'à une hauteur équivalente à 2-3 diamètres. Mais pour des hauteurs inférieures à 2-3 diamètres, la particule acquière une vitesse angulaire dans le sens opposé (sens positif) à la vitesse angulaire d'une particule qui serait en contact avec la pale (Figs. 6.22,6.23).

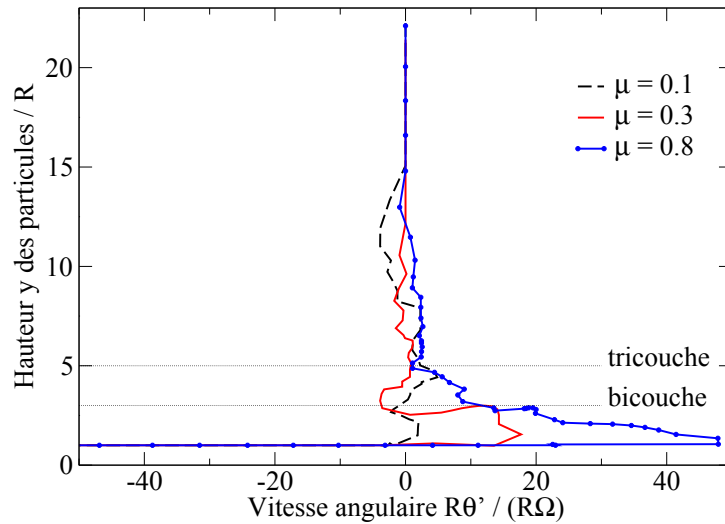


FIGURE 6.23 – Profil de la vitesse angulaire d'une particule pour différents frottements (500tours/min, $\mu=0.1-0.3-0.8$, $\mu_b = 0.2$).

Lorsque la particule entre en contact avec la pale, sa vitesse angulaire change brutalement de sens. On remarque alors que la vitesse selon (Ox) (pour des valeurs de frottement élevées), augmente d'abord linéairement puis exponentiellement

après un certain temps caractéristique (Fig. 6.22). On met ainsi en évidence une accélération plus faible de la particule lors de son contact avec la pale, comparée à une particule ayant un frottement $\mu = 0.1$. En effet, dans ce cas, les vitesses des particules ayant un frottement $\mu = 0.1$ augmentent exponentiellement dès le contact avec la pale. Ceci est corrélé avec le changement de sens de rotation de la particule et peut s'expliquer par un effet de frustrations des rotations bien connu des empilements granulaires denses [Khidas, 2001]. Ce phénomène se produit à proximité de la paroi, lorsque les particules changent de couches.

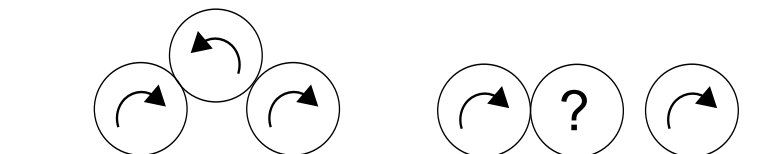


FIGURE 6.24 – Illustration d'un scénario où la frustration des rotations à la paroi est provoquée par le changement de couche d'une particule.

Les figures 6.24,6.25 illustrent les changements de couches au sein de l'écoulement (la hauteur de l'amas diminuant dans le temps). On observe, pour les particules proches de la paroi, que deux particules, initialement en contact, s'écartent pour laisser descendre une particule située sur la couche supérieure, pouvant créer des frustrations des rotations. Ce phénomène est essentiellement localisé à la base de l'écoulement.

Pour résumer, quelle que soit la valeur du frottement, la décroissance des vitesses angulaires des particules en fonction de la hauteur est très rapide (Fig. 6.23). Les vitesses angulaires sont essentiellement localisées près de la paroi et deviennent quasiment nulles au-delà d'une hauteur équivalente à 3 diamètres de particule. Ce phénomène peut s'expliquer soit par des frustrations de rotation dans l'empilement, soit par une absence de force de cisaillement pour des hauteurs éloignées de la paroi. Or, ce sont les forces de cisaillement qui provoquent la rotation des particules. Nous allons donc étudier dans la suite, les forces de contacts au sein de l'empilement.

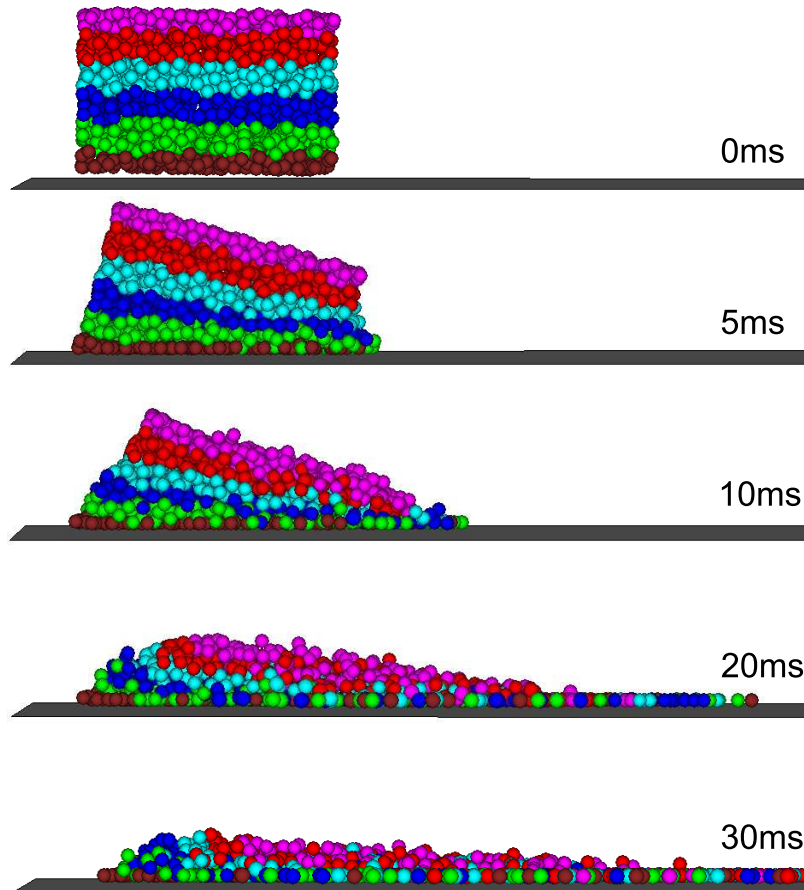


FIGURE 6.25 – Ecoulement de l’amas granulaire à différents temps (500tours/min, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

6.4.3 Forces de contact

La figure 6.26 représente le réseau des forces de contact à un instant t . Chaque force au niveau d’un contact peut se décomposer en deux parties, une composante normale N , au plan tangent au contact, et une composante tangentielle T . L’intensité de la force est représentée par l’épaisseur du trait.

On observe un réseau de “chaînes de forces tangentielles” localisées sur des hauteurs inférieures à 3 diamètres.

Ceci confirme l’hypothèse selon laquelle l’absence de rotations des particules à des hauteurs supérieures à 3 diamètres (Fig. 6.23) est due à l’absence de contraintes de cisaillement.

De plus, on observe un réseau de “chaînes de forces normales” hétérogène spatialement et très fluctuant temporellement. Les forces normales sont essentiellement verticales. En effet, elles sont quasiment inexistantes dans la direction de l’écoulement. Le confinement des particules dans la direction (Oy) est lié à la présence de la paroi rotative et du champ de contraintes de Coriolis. Ces deux

paramètres favorisent l'existence de fortes chaînes de forces verticales. Les contacts maintenus dans la direction (Oy) sont mis en évidence par le réseau de forces normales verticales dans l'empilement.

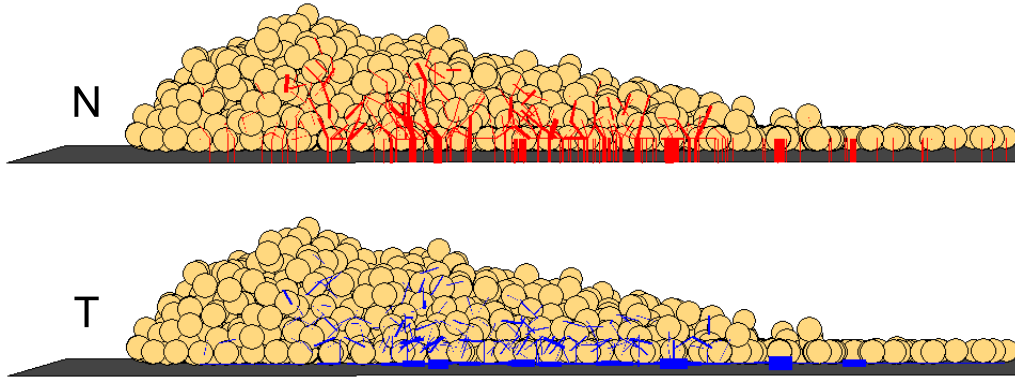


FIGURE 6.26 – Image instantanée du réseau de forces normales et tangentielles ($t=17\text{ms}$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $\mu = 0.2$, $\mu_b = 0.1$).

Pour mesurer le profil des forces normales, nous considérons des volumes élémentaires parallélépipédiques, placés au sein de l'écoulement à différentes positions ($x_v = 33R, y_v, z_v = \bar{z}$), de dimensions connues ($\delta x_v = \delta z_v = 3R, \delta y_v = R$). La figure 6.27 représente le profil de force normale pour différents temps et donc pour différentes hauteurs de couche granulaire. On observe une diminution de la force normale selon (Oy), la force normale étant nulle au niveau de la surface libre. Le profil de force normale varie également avec le temps. Les fortes fluctuations de la force normale, n'ont pas permis d'interpoler précisément l'évolution de la force normale en fonction de y et de t .

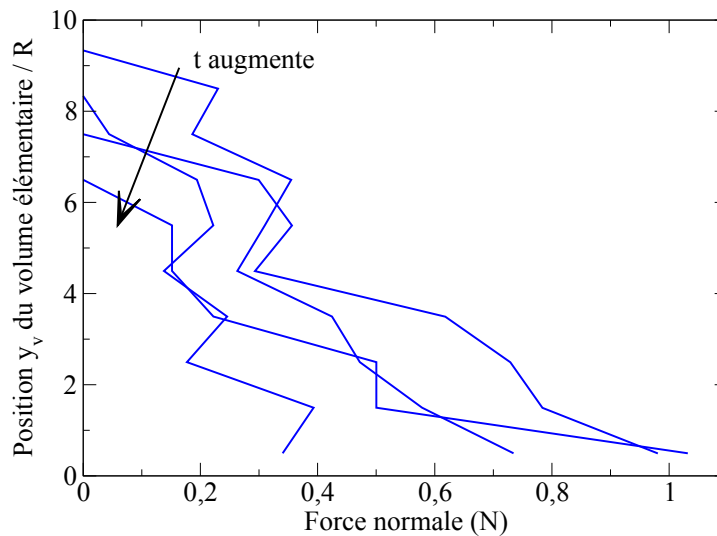


FIGURE 6.27 – Profil de force normale pour différents temps ($\Omega t = 25-30-50-60^\circ$), mesuré dans le volume élémentaire ($x_v = 33R, y_v, \bar{z}$) ($\mu = 0.4, \mu_b = 0.2$).

6.4.4 Mobilisation du frottement

La mobilisation du frottement peut jouer un rôle non négligeable dans les écoulements granulaires denses puisqu'elle contrôle une part de la dissipation d'énergie et qu'elle participe en même temps à la propagation des rotations des particules en roulement sans glissement. Rappelons que le contact est glissant si $T = \mu N$ pour une interaction particule/pale, et qu'il est glissant si $T = \mu_b N$ pour une interaction entre deux particules. La figure 6.28 représente les deux cônes de Coulomb pour l'ensemble des couples force normale/force tangentielle au sein d'un écoulement. On observe des contacts où la force de frottement est complètement mobilisée (points sur les frontières des cônes de Coulomb).

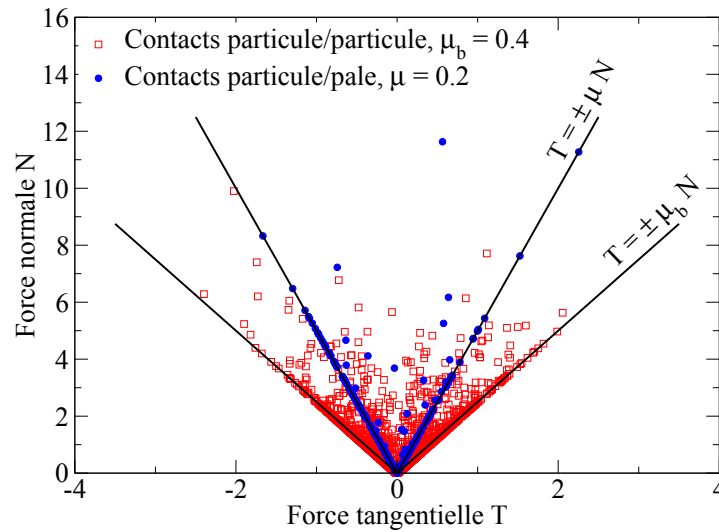


FIGURE 6.28 – Cônes de Coulomb des forces de contacts ($\Omega = 500$ tours/min, $\mu = 0.2$, $\mu_b = 0.4$).

La proportion de contacts glissants, cumulée dans le temps, est représentée sur la figure 6.29 pour différentes positions dans la direction (Ox) . Cette proportion de contacts glissants décroît fortement avec le coefficient de frottement : par exemple pour $x = 66R = 20$ cm, elle décroît de 95% pour un frottement $\mu = 0.1$ à 30% pour un frottement $\mu = 0.8$. Cette proportion de contacts glissants dépend également de la position considérée dans l'écoulement. Les particules mettent en effet un certain temps avant d'atteindre le roulement sans glissement.

La décroissance de la proportion de contacts glissants ne débute qu'à partir d'une valeur seuil du frottement à la paroi.

- Pour une valeur du frottement $\mu < 0.2$, tous les contacts particule/pale sont glissants. Quelques contacts roulants apparaissent néanmoins dans l'écoulement à faible distance dus aux contacts particule/particule ($\mu_b = 0.4$ est supérieur à la valeur seuil de 0.2). On constate que cette valeur seuil $\mu \approx 0.2$, est proche du frottement critique $\mu^* \approx 0.17$ définie dans le cas mono-particule pour l'apparition du régime de roulement sans glissement.
- Pour $\mu > 0.2$, tous les contacts finissent par atteindre le régime de roulement sans

glissement à grande distance.

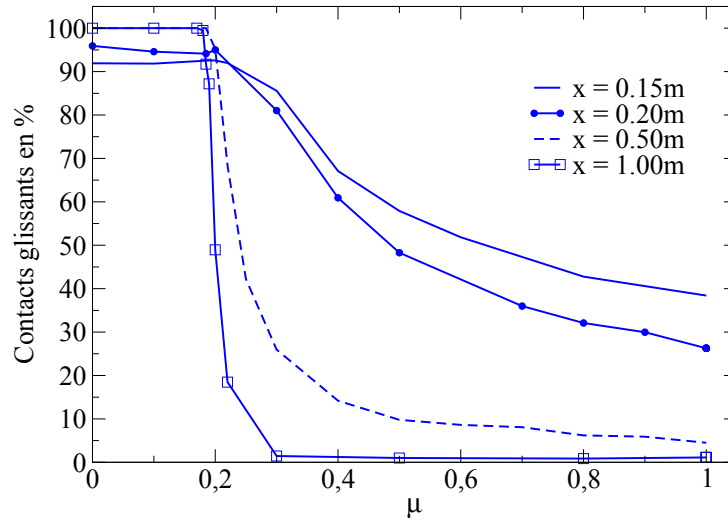


FIGURE 6.29 – Proportion de contacts glissants, cumulée dans le temps, en fonction du coefficient de frottement (500tours/min, $\mu_b = 0.4$).

6.5 Bilan énergétique

On souhaite avoir une connaissance de la redistribution de l'énergie dans l'écoulement. L'énergie fournie par la pale est transmise d'une part en énergie cinétique de translation et de rotation des particules et est dissipée d'autre part sous la forme de frottement au contact ainsi que de viscosité lors des chocs. Enfin, une certaine quantité d'énergie de déformation élastique est stockée au niveau des contacts.

Dans cette partie, nous nous plaçons à une longueur de pale fixe $L_p = 167R = 0.5\text{m}$ pour deux vitesses de rotation $\Omega = 500$ et 1000tours/min . Toutes les énergies sont adimensionnées par $1/2M(L_p\Omega)^2$.

6.5.1 Energie fournie par la pale en rotation

Dans un premier temps, on mesure l'énergie E_{mur} fournie par la pale à l'ensemble des particules de masse totale M . Cette énergie est sommée à chaque temps t de la façon suivante :

$$E_{mur} = \sum_t (F^t \Delta U^t + \mathcal{M}^t \Delta \theta^t) \quad (6.10)$$

où F^t et \mathcal{M}^t sont les résultantes des forces et des moments s'exerçant sur la pale au début du temps considéré, et ΔU^t et $\Delta \theta^t$ sont les incréments des déplacements et des rotations de la pale durant le pas de temps considéré. On fait l'hypothèse que F^t et \mathcal{M}^t sont constants durant le pas de temps considéré.

6.5.2 Energie cinétique des particules dans l'écoulement

L'énergie cinétique (E_c) comprend d'une part l'énergie cinétique de translation des particules (E_t) et d'autre part, l'énergie cinétique de rotation des particules (E_r). Elle est calculée à chaque pas de temps, pour les N particules de vitesse de translation \dot{x}_i et de vitesse de rotation $\dot{\theta}_i$, par l'équation suivante :

$$E_c = E_t + E_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(m \dot{x}_i^2 + I \dot{\theta}_i^2 \right) \quad (6.11)$$

La figure 6.30 représente la part d'énergie transmise en énergie cinétique de translation et en énergie cinétique de rotation en fonction du frottement. On observe qu'à partir d'une valeur du frottement $\mu = 0.3$, la valeur des énergies cinétiques de translation et de rotation sature. On mesure alors un rapport entre ces deux énergies de l'ordre de $E_r/E_t = 0.40$. **Pour une valeur de frottement $\mu \geq 0.3$, l'énergie cinétique cumulée représente 84% de l'énergie transmise par la pale, répartie pour 60% en énergie cinétique de translation et pour 24% en énergie cinétique de rotation.** On a vu précédemment que pour $\mu > 0.3$, à une abscisse de $x=0.5\text{m}$, moins de 25% des contacts sont glissants (cf. Fig. 6.29 pour $x=0.5\text{m}$). Dans cette configuration, la majorité des particules a atteint le roulement sans glissement.

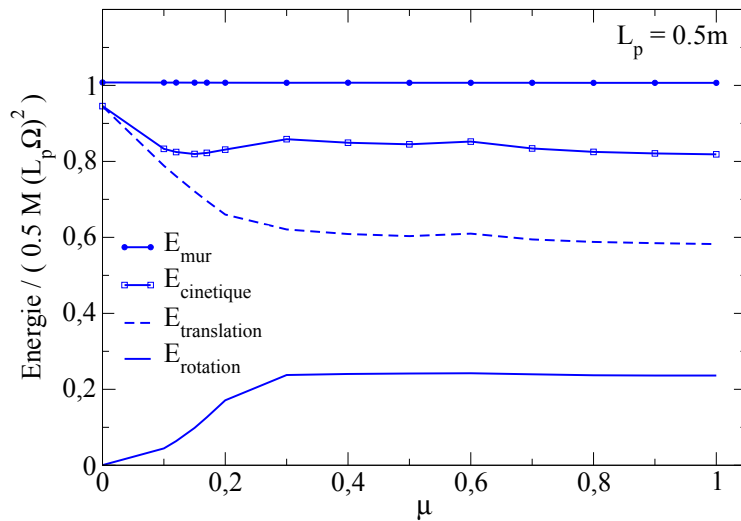


FIGURE 6.30 – Energie cinétique et ses deux composantes (translation + rotation) en fonction du frottement particule/pale à une distance x de 0.5m ($\mu_b = 0.4$).

6.5.3 Dissipation par frottement

On souhaite mesurer l'importance de la dissipation de l'énergie par frottement. L'énergie cumulée dissipée par frottement E_f est calculée pour les c contacts dans l'écoulement et est sommée à chaque pas de temps t à partir de l'équation suivante :

$$E_f = \sum_t \left(\sum_{i=1}^c T_i^t \Delta U_i^t \right) \quad (6.12)$$

où T_i^t est la force de frottement au contact et au pas de temps considéré, et ΔU_i^t est l'incrément du déplacement tangentiel durant le pas de temps. L'évolution de l'énergie dissipée par frottement est représentée sur la figure Fig. 6.31. En moyenne pour une valeur de frottement $\mu \geq 0.1$, **l'énergie cumulée, dissipée par frottement représente 12% de l'énergie transmise par la pale**. Lorsque la force de frottement est complètement mobilisée au niveau d'un contact (c'est-à-dire pour $\mu \leq 0.2$), la dissipation de l'énergie par frottement augmente avec le coefficient de frottement à la paroi. Au-delà de la valeur critique $\mu = 0.2$, on observe une décroissance de la dissipation de l'énergie jusqu'à $\mu = 0.3$ suivie d'une nouvelle augmentation de cette dissipation.

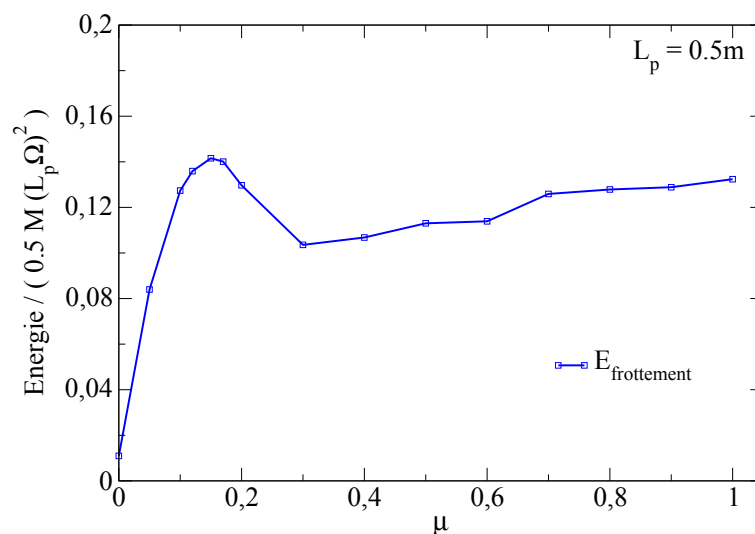


FIGURE 6.31 – Energie dissipée par friction (cumulée dans le temps) en fonction du frottement particule/pale à une distance x de 0.5m ($\mu_b = 0.4$).

L'évolution de la proportion de contacts roulants dans l'écoulement nous permet d'identifier deux mécanismes en action :

- D'une part, l'absence de dissipation d'énergie par frottement au niveau des contacts non glissants. Ceci conduit à une diminution de l'énergie dissipée par frottement.
- D'autre part, l'augmentation avec le frottement à la paroi de la dissipation de l'énergie au niveau des contacts glissants particule/pale.

Pour $0.2 < \mu < 0.3$, la diminution de l'énergie est bien observée et est corrélée à une augmentation de la proportion de contacts non glissants (Fig. 6.29). En revanche, à partir de $\mu = 0.3$, l'énergie dissipée par frottement réaugmente. Les frustrations des rotations, lors des changements de couches à la paroi, peuvent également contribuer à une part de la dissipation de l'énergie par frottement. Toutefois nous n'avons pu quantifier l'énergie dissipée associée à chacun de ces évènements.

6.5.4 Energie élastique de déformation des particules

Les contacts entre particules conduisent à une déformation locale au niveau des interfaces, associée à l'accumulation d'une certaine quantité d'énergie élastique E_d .

Cette énergie élastique E_d est calculée pour les c contacts dans l'écoulement, à chaque pas de temps à partir de l'équation suivante :

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^c \left(\frac{N_i^2}{K_n} + \frac{T_i^2}{K_t} \right) \quad (6.13)$$

où N_i et T_i sont les forces normales et tangentielles au contact considéré. Cette énergie apparaît significative seulement lors de la phase de choc de l'amas granulaire avec la pale cf. Fig. 6.32. On remarque que cette dissipation de l'énergie est négligeable devant l'énergie cinétique des particules ainsi que devant l'énergie dissipée par friction. En effet, **l'énergie élastique cumulée, stockée au niveau des contacts représente seulement $10^{-6}\%$ de l'énergie transmise par la pale.**

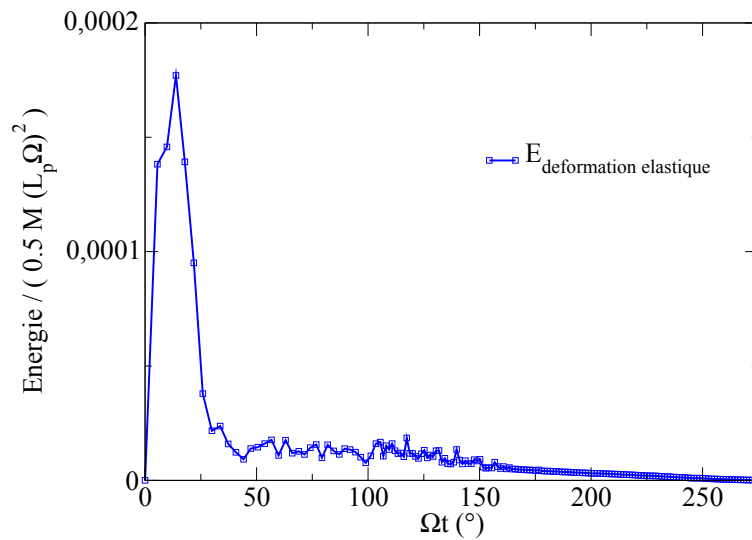


FIGURE 6.32 – Énergie accumulée lors des chocs, due à la déformation des particules, en fonction du temps ($\mu = 0.2$, $\mu_b = 0.4$).

6.5.5 Dissipation d'énergie par inélasticité des chocs

La dissipation d'énergie lors des chocs est modélisée dans la simulation par un terme visqueux. Lors d'un choc, de l'énergie est dissipée si le coefficient de restitution normal r_n est inférieur à 1. A chaque collision binaire, la perte d'énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}m^*(r_n^2 - 1)\dot{\mathbf{x}}_1^2$, où m^* est la masse réduite et $\dot{\mathbf{x}}_1$ est la vitesse avant la collision. Toutefois dans les systèmes granulaires denses, les collisions ne sont pas forcément binaires mais peuvent être plus proches d'impacts multi-corps. Dans ces conditions, le coefficient de restitution effectif peut être nul car l'énergie lors du choc peut se disperser à travers le réseau des contacts au sein de l'empilement [Rajchenbach, 2003]. On mesure ici la dissipation de l'énergie par transfert de quantité de mouvement.

L'énergie cumulée, dissipée par l'inélasticité des contacts E_i peut être obtenue simplement à chaque pas de temps, à partir des autres expressions de l'énergie par

l'équation suivante :

$$E_i = E_{mur} - E_c - E_f - E_d \quad (6.14)$$

Cette dissipation apparaît essentiellement lors de la phase initiale de choc avec la paroi. Le temps de la phase de choc dépend du coefficient de restitution. On compare Fig. 6.33, l'énergie non cumulée dans le temps (mesurée tous les $2\Omega t$) et dissipée par inélasticité et frottement. Au début du processus, l'énergie dissipée par l'inélasticité des contacts est supérieure à l'énergie dissipée par frottement. Puis le rapport s'inverse dans la phase d'écoulement : l'énergie dissipée par l'inélasticité des contacts devient nettement plus faible que l'énergie dissipée par friction (10 fois plus faible à partir de $\Omega t = 100^\circ$).

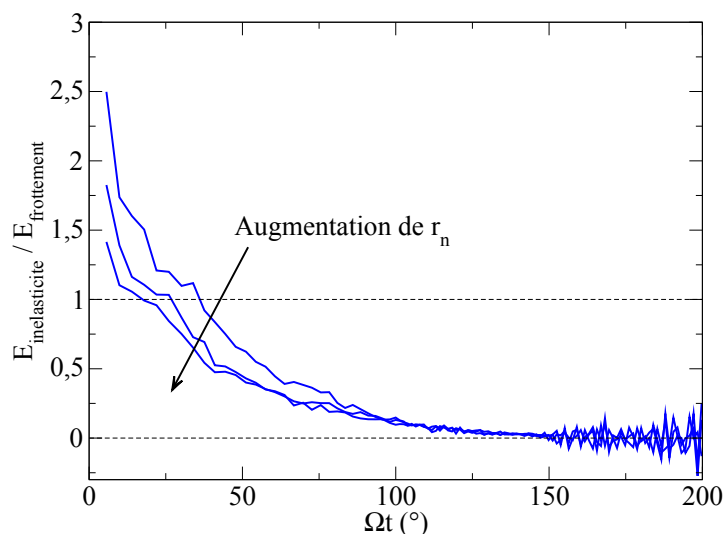


FIGURE 6.33 – Rapport entre l'énergie non cumulée dissipée par l'inélasticité des contacts et par friction, en fonction du temps pour $r_n = 0 - 0.2 - 0.5$ ($\mu = 0.2$, $\mu_b = 0.4$).

La dissipation par inélasticité cumulée varie peu avec le coefficient de restitution normal, ce qui semble confirmer les considérations précédentes, excepté pour $r_n \geq 0.7$ (cf. Fig. 6.34). La figure 6.37 montre que **l'énergie cumulée, dissipée par l'inélasticité des chocs représente 4% de l'énergie transmise par la pale, quel que soit le coefficient de frottement.**

Une étude théorique où une colonne de N particules de masses identiques, est poussée par un mur à vitesse constante a été réalisée par [Bernu and Mazighi, 1990]. Ils démontrent analytiquement qu'en dessous d'un coefficient de restitution critique r_n^* , les rebonds des particules sont négligeables (collapse inélastique) i.e. les particules restent collées à la pale. Ce coefficient de restitution critique vaut :

$$r_n^* = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right) \quad (6.15)$$

Dans notre cas, pour $N=10$, on a $r_n^* = 0.72$. Ce résultat semble cohérent avec la saturation de l'énergie dissipée par inélasticité en dessous de r_n^* , même si nos

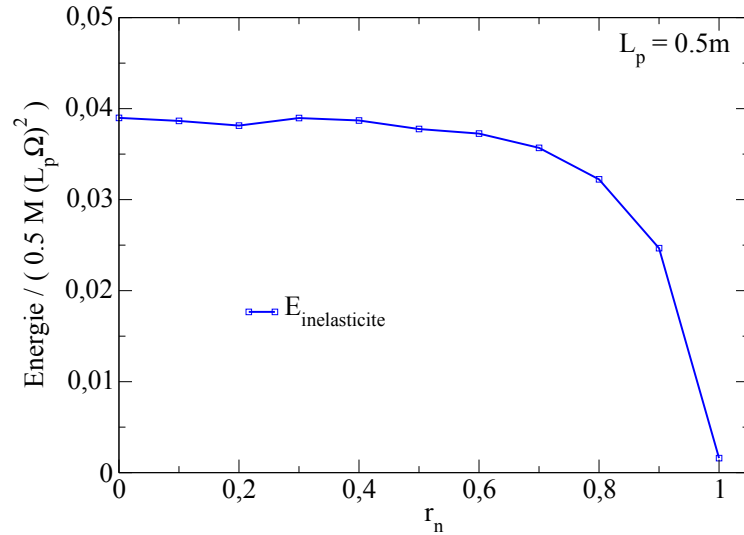


FIGURE 6.34 – Énergie dissipée lors des chocs, due à l'inélasticité des contacts (cumulée dans le temps), en fonction du coefficient de restitution normal ($\mu = 0.2$, $\mu_b = 0.4$).

particules ne sont pas “ordonnées parfaitement en colonne” comme dans l’expérience de Bernu. Une hypothèse est que les rebonds des particules ne se manifestent que pour des coefficients supérieurs à r_n^* . Toutefois elle n’a pas été testée.

6.5.6 Coefficient de gain énergétique

On définit un coefficient de gain énergétique G comme le rapport entre l’énergie cinétique gagnée par les particules et l’énergie fournie par le mur :

$$G = \frac{E_c}{E_{mur}} \quad (6.16)$$

Ce coefficient est mesuré en bout de pale, à la position $x = L_p$ (Fig. 6.35). Ce coefficient caractérise l’importance de l’énergie dissipée par friction et dans l’inélasticité des contacts. Notons que ce coefficient de gain varie avec la longueur de la pale (Fig. 6.36). En effet, le nombre de contacts non glissants augmente avec la position considérée dans l’écoulement (Fig. 6.29). Par exemple, pour une longueur de pale typique $L_p = 167R = 0.5\text{m}$, on mesure **un coefficient de gain moyen $G=0.84$** pour des frottements $\mu \geq 0.1$.

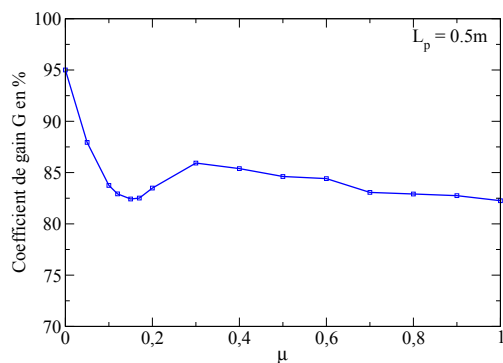


FIGURE 6.35 – Coefficient de gain énergétique G en % en fonction du frottement particule/pale mesuré à une distance x de 0.5m ($\mu_b = 0.4$).

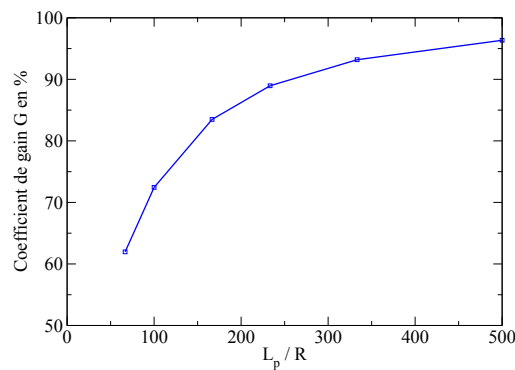


FIGURE 6.36 – Coefficient de gain énergétique G en % en fonction de la longueur de la pale ($\mu = 0.2$ et $\mu_b = 0.4$).

Pour résumer, on représente dans l'histogramme Fig. 6.37, la répartition de l'énergie cumulée en fonction du frottement particule/pale.

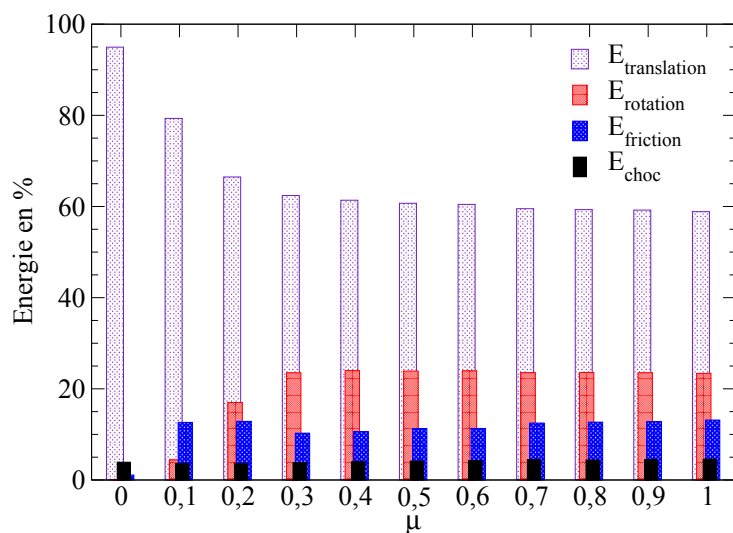


FIGURE 6.37 – Répartition de la dissipation d'énergie cumulée dans le temps et mesurée à une distance x de 0.5m ($\mu_b = 0.4$).

6.6 Bilan de quantité de mouvement

Dans cette partie, on souhaite préciser les équations de la dynamique pour l'empilement de particules.

Le champ de vitesse instantané est représenté sur la figure 6.38. On constate que la composante de la vitesse orthogonale à la paroi n'apparaît pas négligeable en tout début d'écoulement.

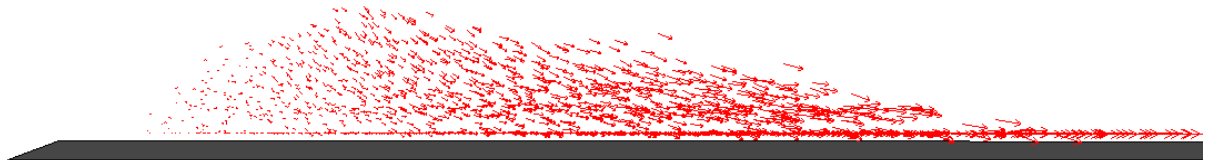


FIGURE 6.38 – Champ de vitesse instantané dans le référentiel de la pale ($t=18\text{ms}$, 500tours/min , $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

L'écoulement granulaire est à surface libre et de faible épaisseur. De plus, l'étude énergétique a montré que la dissipation par frottement joue un rôle important devant la dissipation par choc. Dans ces conditions, on peut songer à décrire les transferts de quantité de mouvement dans l'écoulement par une approche de type "Saint-Venant" ou moyennée dans l'épaisseur. Le formalisme des équations de Saint-Venant est le modèle de base de l'hydraulique à surface libre. Le but est d'obtenir les lois d'évolutions pour le profil de l'amas, car c'est une grandeur accessible expérimentalement.

6.6.1 Hypothèses de l'approche de Saint-Venant

Ce type d'approche, proposé initialement par [Savage and Hutter, 1989] dans le cas des écoulements granulaires, s'est avéré extrêmement utile pour la description des écoulements gravitaires de surface [Naaïm et al., 1997] (avalanches, écoulement de débris). La méconnaissance de la loi de comportement dans la dynamique des écoulements granulaires peut être problématique dans ce type de domaine. Toutefois, sous certaines conditions que l'on va expliciter ci-dessous, il est possible de s'affranchir de cette information sous des hypothèses raisonnables portant notamment sur le frottement effectif du matériau granulaire à la paroi. L'aspect granulaire du matériau est alors encodé essentiellement à travers une force de friction effective à la paroi et la prise en compte de la redirection latérale des contraintes normales dans le milieu.

Nous rappelons ci-dessous les hypothèses des équations de Saint-Venant :

- **La densité est constante.**

Cette hypothèse de fluide incompressible, est généralement bien validée pour des écoulements granulaires denses sous gravité. Dans le cas contraire, l'expression de la conservation de la masse permet de coupler les variations de

masse volumique avec le champ des vitesses.

- **L'épaisseur de la couche granulaire est faible devant ses dimensions transverses.**

On tire partie de cette information pour moyenner toutes les quantités sur l'épaisseur de la couche. Cette hypothèse est essentielle car elle permet de négliger les termes d'accélération orthogonaux à la paroi dans le bilan de quantité de mouvement. Il en résulte un champ de pression orthogonal de type hydrostatique c'est-à-dire contrôlé par le champ de force extérieur appliqué.

Notons que dans certains problèmes d'effondrement de colonne granulaire, cette hypothèse est trop restrictive [Staron and Hinch, 2005]. En effet, l'accélération orthogonale au début de la phase d'effondrement de la colonne peut ne pas être négligeable. Une stratégie consiste alors à prendre en compte la masse de la colonne qui s'effondre par l'intermédiaire d'un terme source dans le bilan de masse au niveau de la couche qui s'étale [Larrieu et al., 2006].

- **La pression horizontale dans l'épaisseur est proportionnelle à la pression verticale en tout point : $\sigma_{xx} = K\sigma_{yy}$**

On postule une relation linéaire entre les termes diagonaux du tenseur des contraintes.

Il apparaît en général, pour des écoulements gravitaires le long de plan inclinés, que la valeur $K = 1$ donne les meilleurs résultats [Pouliquen and Forterre, 2002]. Ce choix est aussi confirmé par les résultats des simulations numériques de type éléments discrets ([Chevoir et al., 2006], [Ertas et al., 2001]). On note au passage qu'elle correspond à l'isotropie des champs de pression comme en hydrodynamique des fluides newtoniens. Le coefficient K est appelé coefficient de pression de terre dans le domaine des écoulements géophysiques ("earth pressure coefficient"). Il semble que des valeurs différentes doivent être choisies dans les zones de convergence et de divergence de l'écoulement, certaines bien inférieures à 1 ([Mangeney et al., 2006]). En pratique, ce paramètre phénoménologique est calé à partir des expériences. De manière plus microscopique, sa détermination rejoint celle des équations constitutives pour les écoulements granulaires et la forme du tenseur des contraintes qui a fait l'objet d'investigations récentes ([Jop et al., 2006]).

- **La contrainte tangentielle à la paroi suit une loi de frottement de coulomb : $\sigma_{xy} = \mu_{eff}\sigma_{yy}$**

En intégrant dans l'épaisseur, on fait apparaître les valeurs des contraintes à la paroi. On suppose que cette contrainte tangentielle à la paroi est reliée à la contrainte normale (pression verticale hydrostatique) ou le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de frottement effectif (masse granulaire/paroi). [Savage and Hutter, 1989] choisissent un frottement effectif constant. Il s'agit en général d'une quantité complexe qui n'a pas de raison d'être égale au coefficient de frottement (particule/paroi). Dans le cadre du modèle de Saint-Venant, toute la dissipation d'énergie au sein de l'écoulement est incluse

dans le terme de frottement. Dans les expériences, il semble en effet que la dynamique interne des réarrangements au sein du milieu granulaire puisse jouer un rôle déterminant dans sa valeur. Dans le cas des écoulements denses sur plan incliné, [Pouliquen and Forterre, 2002] a montré qu'une valeur constante de ce frottement est incompatible avec l'existence d'écoulements gravitaires stationnaires.

La thèse de [Khidas, 2001] a mis en évidence sur un système modèle d'empilement dense les mécanismes qui limitent la friction effective à la paroi, dans un régime quasi-statique à cause de la rotation des particules. Il a montré l'influence de la propagation des rotations dans l'empilement, sur cette réduction du frottement subi. Plus récemment, les travaux de [Métayer, 2008] sur des écoulements granulaires denses, confinés, ont confirmé la sensibilité des valeurs de ce frottement aux réarrangements quasi-statiques des particules de l'empilement. La loi de frottement à la paroi reste donc une inconnue du problème qui est intégrée encore une fois de manière phénoménologique [Métayer, 2008].

L'approche moyennée dans l'épaisseur a été à l'origine dérivée à partir des équations de l'hydrodynamique. On peut s'interroger sur l'applicabilité de cette approche de Saint-Venant dans l'écoulement et en particulier sur l'influence de la microstructure.

6.6.2 Application des équations de Saint-Venant à l'épandage centrifuge

6.6.2.1 Equations moyennées dans l'épaisseur à 2 dimensions

On peut écrire les équations de Saint-Venant dans le cadre de l'épandage centrifuge d'un matériau de densité constante ρ ayant une vitesse $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$. On suppose qu'il n'y a pas de déplacement suivant z . La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (6.17)$$

Les équations de la quantité de mouvement s'écrivent en introduisant le tenseur des contraintes : $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$. On adimensionne les équations en utilisant les paramètres caractéristiques suivants : $t = 1/\Omega$, $x = L$ la longueur de l'amas, $y = H$ la hauteur de l'amas, $V_x = \Omega L$, $V_y = \Omega H$ et $\sigma = \rho \Omega^2 LH$:

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \epsilon \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = x + 2\epsilon V_y \quad (6.18)$$

$$\epsilon \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \epsilon \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -2V_x \quad (6.19)$$

où la quantité $\epsilon = H/L$ est supposée faible dans le cadre de ce calcul.

On appelle $h(x, t)$ la hauteur de l'amas. Les conditions aux limites au niveau de la paroi ($y = 0$) sont :

$$\begin{cases} V_y &= 0 \\ \sigma_{xy} &= -\mu_{eff}\sigma_{yy}sgn(V_x) \end{cases} \quad (6.20)$$

et les conditions aux limites au niveau de la surface libre ($y = h(x, t)$) sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + V_x \frac{\partial h}{\partial x} &= V_y \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yy} &= 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

On utilise la proportionnalité sur les contraintes normales $\sigma_{xx} = K\sigma_{yy}$ pour résoudre le système. En intégrant sur la hauteur l'Eq. 6.18, on aboutit aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennées dans l'épaisseur :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{V}_x}{\partial x} = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial h\bar{V}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{V}_x^2 + \epsilon K h^2 \bar{V}_x \right) = xh - 2\mu_{eff}h\bar{V}_x \quad (6.23)$$

Il faut garder à l'esprit les hypothèses utilisées pour résoudre ces équations : l'hypothèse de conservation de la masse, l'écriture de la contrainte de cisaillement à la base de l'écoulement comme une loi de Coulomb ($\sigma_{xy} = -\mu_{eff}\sigma_{yy}sgn(V_x)$) et l'hypothèse de proportionnalité entre les contraintes normales reliées par le paramètre K ($\sigma_{xx} = K\sigma_{yy}$). On a déjà montré que la densité n'est pas constante dans l'écoulement : la compacité varie légèrement en fonction du temps et en fonction de la hauteur (cf. Figs. 6.17,6.18). On souhaite maintenant avoir plus d'informations sur le lien possible entre cette approche hydrodynamique et la microstructure.

6.6.2.2 Etude de la friction effective à la paroi

On souhaite tout d'abord connaître la friction effective qui est ressentie à la paroi pour notre amas granulaire.

⇒ **Evolution de l'amas granulaire en écoulement :**

Dans un premier temps, on cherche à mesurer la friction effective sur la globalité de l'amas. Les limites extrêmes de l'amas selon (Ox) sont définies par $x1(t)$ et $x2(t)$. En considérant la position moyenne de l'amas \bar{x} et la vitesse moyenne de l'amas \bar{V}_x définit par :

$$\begin{cases} \bar{x} &= \left(\int_{x1}^{x2} xh(x)dx \right) / \left(\int_{x1}^{x2} h(x)dx \right) \\ \bar{V}_x &= \left(\int_{x1}^{x2} V_x h(x)dx \right) / \left(\int_{x1}^{x2} h(x)dx \right) \end{cases} \quad (6.24)$$

et en considérant les équations de Saint-Venant (Eqs. 6.22,6.23), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{V}_x \\ \frac{d\bar{V}_x}{dt} &= \bar{x} - 2\mu_{eff}\Omega\bar{V}_x \end{cases} \quad (6.25)$$

avec $\mu_{eff} = \mu$ le frottement particule/pale. A partir des deux équations précédentes, il en résulte l'équation suivante :

$$\ddot{\bar{x}} + 2\mu_{eff}\Omega\dot{\bar{x}} - \bar{x} = 0 \quad (6.26)$$

On retrouve l'équation du mouvement d'une particule le long d'une paroi en rotation : Eq. 4.45. La figure 6.39 représente l'évolution de l'accélération du centre de masse de l'amas de particules. On observe que pour $\mu \leq 0.2$, le frottement effectif est égal au frottement particule/pale. Mais au-delà de $\mu = 0.3$, le frottement effectif est inférieur au frottement particule/pale. On peut donc s'interroger sur l'influence des contacts non glissants sur l'évolution de cette friction effective.

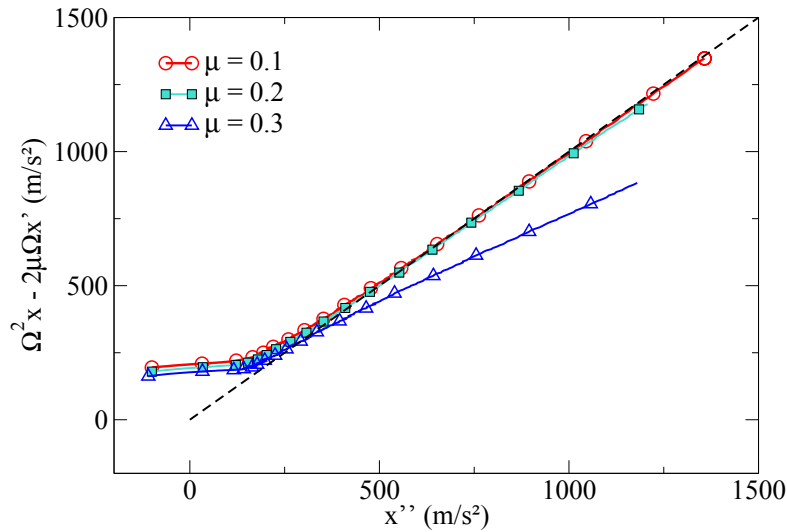


FIGURE 6.39 – Suivi du centre de masse de l'amas de particules pour différents coefficients de frottements particule/pale ($\mu_b = 0.8$, $\Omega = 500$ tours/min).

⇒ Frottement effectif à la paroi :

Dans un deuxième temps, on souhaite analyser plus en détail le frottement subi au niveau de l'interface avec la paroi. On considère donc, un volume élémentaire (parallélépipède), en contact avec la paroi, placé au sein de l'écoulement à la position ($x_v = 0.15\text{m}$, $y_v = 0$, $z_v = \bar{z}$), de dimensions connues ($\delta x_v = \delta z_v = 3\text{cm}$, $\delta y_v = 3\text{mm}$). Le coefficient de frottement effectif à la paroi est défini comme le rapport entre la force de cisaillement moyenne et la force normale moyenne, au niveau du contact avec la paroi $\mu_{eff} = \frac{T}{N}$ dans le volume élémentaire.

On observe des fluctuations sur la valeur du frottement effectif qui augmentent fortement au-dessus de la valeur du frottement critique cf. Fig. 6.40. Une hypothèse est que les fluctuations sur le frottement effectif à la paroi sont dues à des particules qui entrent en contact avec la pale après avoir changé de couche. On a vu précédemment que pour des frottements importants, une particule en deuxième couche, acquiert une vitesse angulaire avec un sens opposé à la vitesse angulaire

d'une particule, qui serait en contact avec la pale (Figs. 6.22,6.23). Il est ainsi possible que le changement brusque de sens de rotation de la particule lors du contact avec la paroi, provoque une fluctuation du frottement effectif. Toutefois, nous n'avons pas associé directement cette fluctuation à l'arrivée d'une particule avec une vitesse angulaire opposée.

Nous pouvons calculer un coefficient de frottement effectif moyen sur la durée de l'écoulement. La figure 6.41 représente son évolution en fonction du frottement particule/pale.

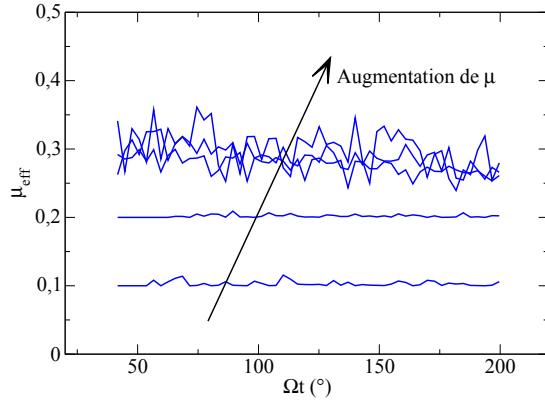


FIGURE 6.40 – Frottement effectif à la paroi en fonction du temps pour différents coefficients de frottements particule/pale mesurés dans le volume élémentaire ($\mu_b = 0.2$, μ allant de 0.1 à 0.5).

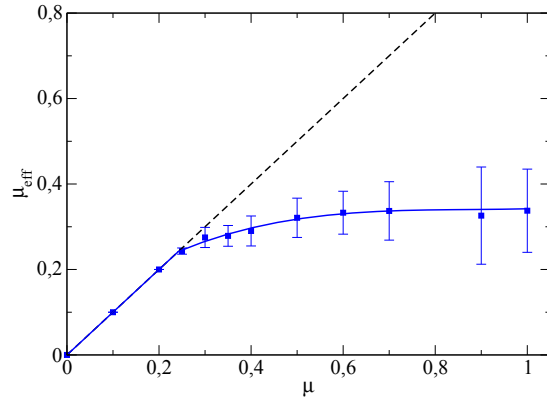


FIGURE 6.41 – Frottement effectif moyen à la paroi en fonction du coefficient de frottement particule/pale ($\mu_b = 0.2$).

On retrouve pour une valeur de frottement $\mu \leq 0.2$, un frottement effectif égal au frottement particule/pale. Mais, au-delà de $\mu = 0.2$, le frottement effectif sature. Cette valeur seuil correspond à l'apparition des contacts non glissants cf. Fig. 6.29. Afin de savoir s'il existe effectivement un lien entre le changement de comportement du frottement effectif et les rotations des particules, nous avons souhaité définir une grandeur capable de quantifier le glissement de la couche de particules en contact avec la pale. Cette grandeur, appelée taux de glissement, se définit ainsi pour les N_i particules en contact avec la pale dans le volume élémentaire :

$$T_G = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \left(\frac{\dot{x}_i - R|\dot{\theta}_i|}{\dot{x}_i} \right) \quad (6.27)$$

Le taux de glissement est nul si les particules roulent sans glisser et il vaut 1 si les particules glissent sans rouler (particules sans degrés de liberté de rotation). On remarque que le taux de glissement est relativement constant en fonction du temps (Fig. 6.42) même si on observe la présence de fluctuations. On représente donc sur la figure 6.43, l'évolution du frottement effectif moyen en fonction du taux de glissement moyen sur la durée de l'écoulement.

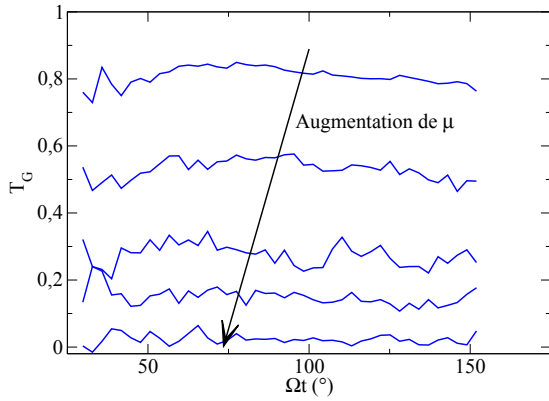


FIGURE 6.42 – Taux de glissement en fonction du temps pour différents coefficients de frottements particule/pale ($\mu_b = 0.2$, μ allant de 0.1 à 0.9).

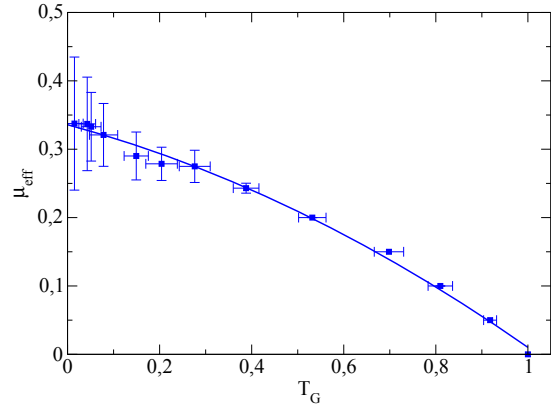


FIGURE 6.43 – Frottement effectif moyen à la paroi en fonction du taux de glissement ($\mu_b = 0.2$).

On constate alors une corrélation entre les deux quantités. Lorsque les particules roulent sans glisser ($T_G = 0$), la valeur du frottement effectif est de l'ordre de 0.33. C'est donc effectivement **l'apparition du roulement sans glissement qui provoque la saturation du frottement effectif à la paroi**.

On peut par ailleurs s'interroger sur cette valeur du frottement effectif ici égale à 0.33. En effet, si les particules roulent sans glisser, la dissipation de nature frictionnelle doit disparaître (i.e. μ_{eff} doit tendre vers 0). Cependant, en pratique, il peut toutefois rester une dissipation résiduelle de nature élastique au niveau des contacts. Ainsi dans la modélisation, on observe que le frottement effectif est alors fixé par la valeur de K_t , c'est-à-dire la composante élastique dans la loi de contact tangentiel (si $K_t = 0$ alors $\mu_{eff} = 0$), cf. Fig. 6.44.

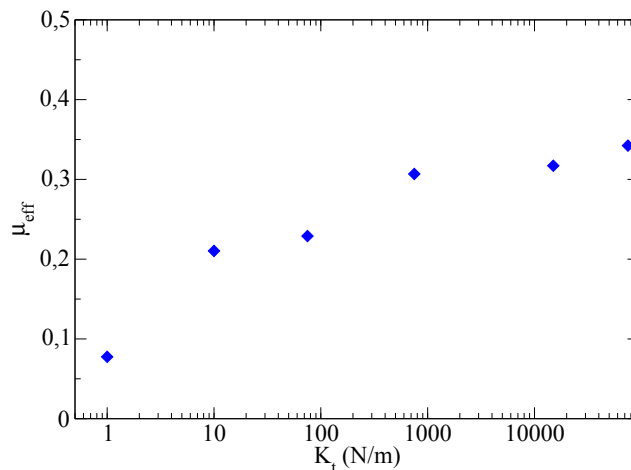


FIGURE 6.44 – Frottement effectif à la paroi en fonction du coefficient de raideur élastique tangentielle en échelle logarithmique ($\Omega t = 100^\circ$, $\mu = 0.4$, $\mu_b = 0.2$).

Nous en déduisons que le frottement effectif à la paroi dépend, dans ce régime, de mécanismes de dissipation microscopique complexes.

6.6.2.3 Contraintes normales

En mécanique des milieux continus, le tenseur des contraintes mesure les forces surfaciques sur un milieu déformé. Dans un milieu granulaire, une définition a été proposée :

$$\sigma = \sigma^c + \sigma^f + \sigma^r \quad (6.28)$$

Le premier terme (“contact”) est le terme usuel en statique, associé aux efforts de contact entre particules. Le deuxième terme (“fluctuations”) est le tenseur de Reynolds utilisé en mécanique des fluides, associé aux fluctuations des vitesses des particules. Le troisième terme (“rotation”) est lié à la rotation propre des particules. Nous n’avons quantifié les termes “fluctuations” et “rotation”. Nous avons observé que les fluctuations de vitesses sont plus importantes dans la direction (Oy). Le tenseur de Reynolds est toutefois généralement faible dans les écoulements denses. Par ailleurs, le terme de “rotation” pourrait quant à lui intervenir pour des hauteurs inférieures à 3 diamètres où les particules ont une vitesse angulaire non nulle. Nous nous intéressons ici seulement au tenseur des contraintes de “contact”.

A chaque instant, pour chaque particule i de l’amas, nous repérons sa position x_i ainsi que les positions x_j de toutes les particules en contacts avec elle. Le terme de contact des contraintes normales se définit ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} &= \frac{1}{V_i} \sum_{j \neq i} 0.5(x_j - x_i) T_{ji} \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{V_i} \sum_{j \neq i} 0.5(y_j - y_i) N_{ji} \end{cases} \quad (6.29)$$

où (N_{ji}, T_{ji}) sont les forces de contact dans la direction (Oy) et (Ox) entre i et j , et V_i est le volume de Voronoï associé à chaque particule i .

Il est généralement admis qu’il est difficile de mesurer les contraintes, lorsque l’épaisseur de l’amas est inférieure à dix couches de particules. Or, c’est le cas dans notre écoulement. Nous calculons néanmoins ce tenseur.

On choisit de moyenner les contraintes sur un pas de temps $\delta t = 2\text{ms}$. On s’assure que la prise de moyenne δt est inférieure au temps de restructuration typique du système t^* ($t^* < 1/\Omega$, $\Omega \delta t = 0.1$ à $\Omega = 500\text{tours/min}$). Le rapport des contraintes normales σ_{xx}/σ_{yy} est mesuré sur la figure 6.45, dans des volumes élémentaires (parallélépipède), placés au sein de l’écoulement aux positions $(x_v, y_v, z_v = \bar{z})$, de dimensions $(\delta x_v = \delta z_v = 3\text{cm}, \delta y_v = 3\text{mm})$. On mesure un rapport de contraintes K inférieur à 1, de l’ordre de 0.3, indépendant des positions selon (Ox) et des positions selon (Oy).

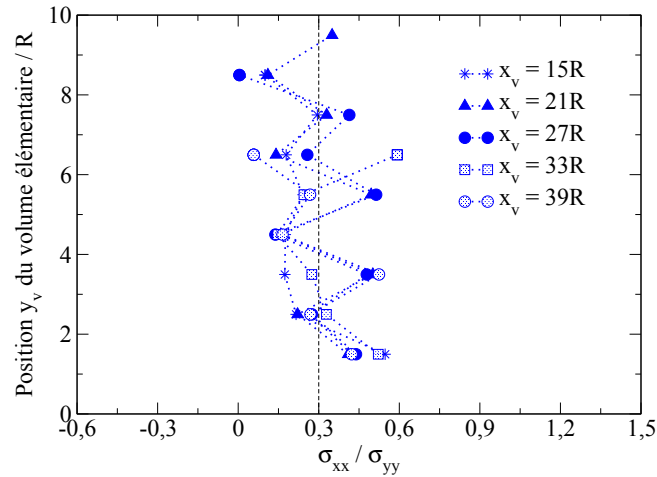


FIGURE 6.45 – Profil du rapport des contraintes normales σ_{xx}/σ_{yy} pour différentes positions du volume élémentaire (x_v, y_v, \bar{z}) et moyenné sur un temps $\Omega t = 6^\circ$ ($\overline{\Omega t} = 60^\circ$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

On observe un rapport de contraintes normales K faible devant 1. Ce résultat semble cohérent avec l'image intuitive que l'on avait d'un écoulement de type traction-compression. En effet, un écoulement granulaire a une réponse mécanique nulle par rapport à la traction, dès qu'il y a perte de contact.

La connaissance des champs de vitesses dans l'écoulement est également une inconnue du problème. Des gradients de vitesses $\frac{\partial V_x}{\partial x}$, $\frac{\partial V_y}{\partial y}$, $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ peuvent apparaître dans l'écoulement. De plus, la gravité induit des gradients de vitesses suivant (Oz) mais nous ne les traiterons pas dans la suite. Nous allons chercher à en savoir plus sur ces grandeurs.

6.6.3 Profil de vitesses eulériennes dans l'écoulement

Nous nous plaçons à une position fixe au niveau de la pale et nous étudions le champ des vitesses à cette position donnée. Le mouvement de l'amas s'effectuant principalement dans les directions (Ox, Oy) , nous avons choisi de ne pas étudier la dépendance en z . La détermination numérique des profils de vitesses va nous permettre d'établir l'importance relative de chacun des gradients de vitesses dans notre écoulement.

On discrétise l'écoulement par des parallélépipèdes de largeurs $(\delta x_v = 6R, \delta y_v = R, \delta z_v = 12R)$ positionnés au sein de l'écoulement à différentes positions (x_v, y_v, \bar{z}) . Les profils de vitesses selon (Ox) et selon (Oy) sont réalisés en faisant la moyenne des vitesses des particules présentes dans chaque parallélépipède (pas de moyenne temporelle). Les distances selon (Ox) sont choisies entre $15R$ et $51R$ de sorte que l'épaisseur du flux soit supérieure à $6R$ (Fig. 6.46). Il est ainsi possible de comparer des profils proches de la paroi ($y=R$) et éloignés de la paroi. Nous avons étudié par simulation numérique l'influence des différents paramètres du problème, c'est-à-dire

μ , μ_b , la vitesse de rotation Ω et le temps t .

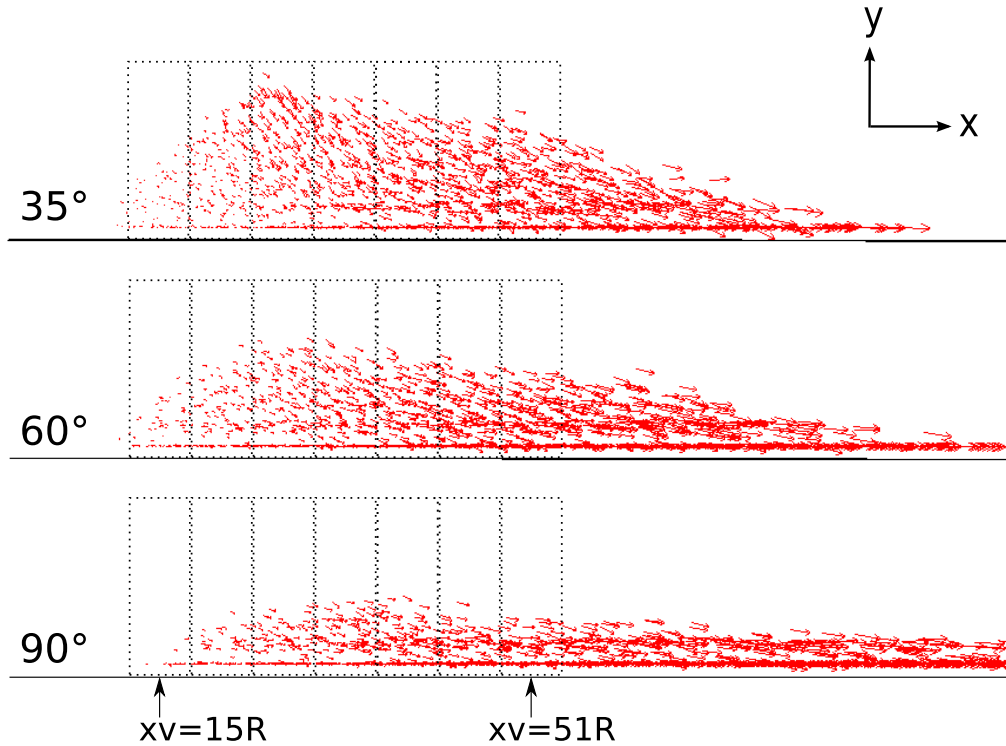


FIGURE 6.46 – Champ de vitesses dans le référentiel de la pale ($t=12-20-30\text{ms}$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$). Les profils de vitesses sont réalisées dans ces sept boîtes de largeur $\delta x_v = 6R$. Chaque boîte est ensuite redivisée dans la direction (Oy) en une dizaine de boîtes de hauteur $\delta y_v = R$.

La simulation va nous permettre d'étudier les différents gradients de vitesses suivants :

$$\alpha_x(t) = \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad (6.30)$$

$$\beta_x(t) = \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (6.31)$$

$$\alpha_y(t) = \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (6.32)$$

$$\beta_y(t) = \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (6.33)$$

On a observé deux régimes sur les figures 6.56,6.58 :

- une phase de choc pour $\Omega t \leq 30^\circ$, correspondant à la mise en mouvement de l'amas granulaire,
- et une phase d'écoulement pour $\Omega t > 30^\circ$,

Dans l'étude des vitesses eulériennes, on s'intéresse aux profils de vitesses dans la phase d'écoulement. On se place donc à des angles $\Omega t \geq 35^\circ$, pour s'affranchir des effets complexes liés au choc initial avec la pale. Précisons que tous les profils de

vitesse sont mesurés dans le repère de la pale, c'est-à-dire $V_x = V_x^{absolu} + y\Omega$ et $V_y = V_y^{absolu} - x\Omega$. Nous allons mesurer dans cette partie, l'influence des différents paramètres du système sur les profils. C'est la raison pour laquelle les vitesses sont présentées sous forme dimensionnée.

On fixe les paramètres du problème (Ω, t, μ, μ_b) et on établit les dépendances des gradients de vitesses avec les coordonnées x et y . On observe que le terme $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ ne varie pas dans la direction (Ox) (les pentes sont quasiment identiques sur la Fig. 6.47), et que le terme $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ ne varie pas dans la direction (Oy) (les droites sont quasiment superposées sur la Fig. 6.48).

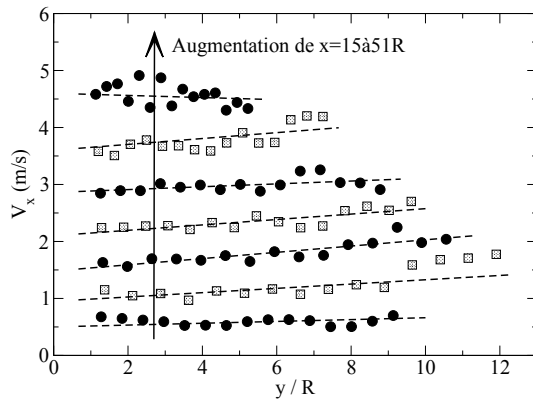


FIGURE 6.47 – Vitesse selon (Ox) relative en fonction de l'épaisseur y pour différents x ($\Omega = 500$ tours/min, $t = 0.015$ s, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

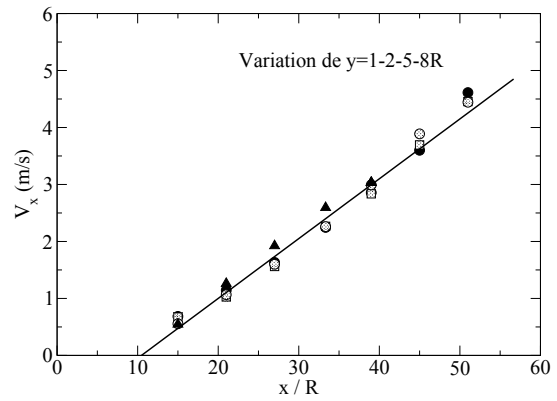


FIGURE 6.48 – Vitesse selon (Ox) relative en fonction de la position x pour différents y ($\Omega = 500$ tours/min, $t = 0.015$ s, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

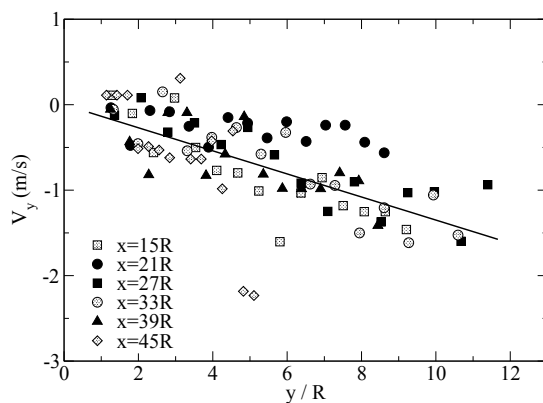


FIGURE 6.49 – Vitesse selon (Oy) relative en fonction de l'épaisseur y pour différents x ($\Omega = 500$ tours/min, $t = 0.015$ s, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

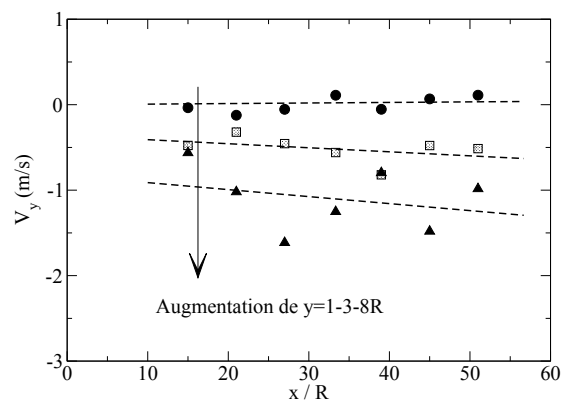


FIGURE 6.50 – Vitesse selon (Oy) relative en fonction de la position x pour différents y ($\Omega = 500$ tours/min, $t = 0.015$ s, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

Les profils de vitesses selon (Oy) sont en revanche plus compliqués à étudier étant données les fortes fluctuations. On a mis en évidence précédemment que les fluctuations sur les vitesses dans la direction (Oy) sont près de trois fois plus importantes que les fluctuations sur les vitesses dans la direction (Ox) pour des frottements $0.1 < \mu < 0.8$. La courbe Fig. 6.49 ne permet pas de déterminer si $\frac{\partial V_y}{\partial y}$ varie selon (Ox). En revanche, nous observons une légère variation du terme $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ selon (Oy) (Fig. 6.50).

6.6.3.1 Etude numérique de la vitesse selon (Ox)

Les frottements μ et μ_b n'ont pas d'influence significative sur la vitesse selon (Ox) des particules (cf. Figs. 6.51,6.52). L'influence du frottement à la paroi μ est essentiellement ressentie par les particules proches de la paroi ($y = R = 3\text{mm}$). La vitesse V_x des particules à la paroi décroît avec l'augmentation de μ jusqu'au coefficient de frottement critique où la vitesse sature.

Pour des valeurs de frottements faibles ($\mu \leq 0.2$), le gradient de vitesse $\beta_x = \frac{\partial V_x}{\partial y}$ est plus faible que pour des valeurs de frottement supérieures à 0.3 (Fig. 6.51). Dans la suite de l'étude, on se placera à μ faible ($\mu = 0.1$). En effet dans la réalité, les pales d'épandeur, en acier inoxydable, sont relativement lisses et donc peu frottantes.

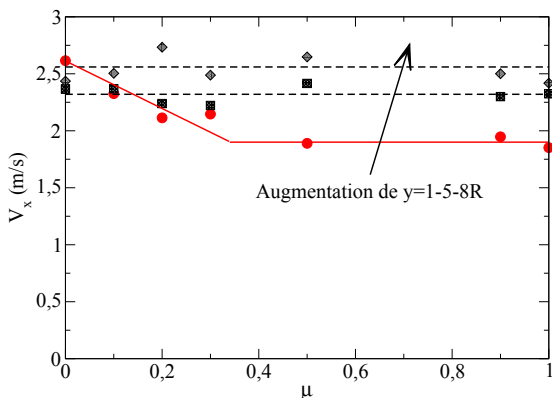


FIGURE 6.51 – Vitesse selon (Ox) relative en fonction du frottement particule/pale ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours}/\text{min}$, $t = 0.015\text{s}$, $\mu_b = 0.2$, $y = 1-5-8R$).

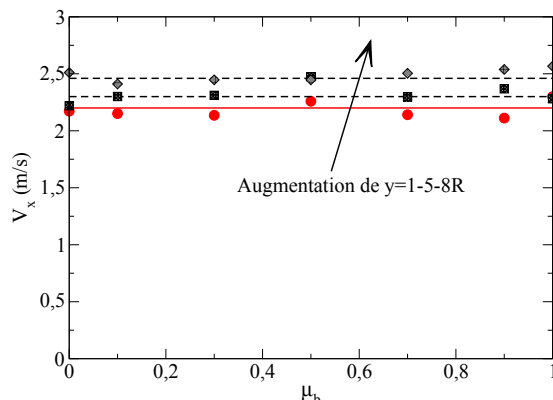


FIGURE 6.52 – Vitesse selon (Ox) relative en fonction du frottement particule/particule ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours}/\text{min}$, $t = 0.015\text{s}$, $\mu = 0.2$, $y = 1-5-8R$).

On se place dans la suite, à des valeurs de frottement faibles $\mu = 0.1$ et des temps $\Omega t \geq 35^\circ$ (soit $t \geq 0.015\text{s}$ à $\Omega = 500\text{tours}/\text{min}$) :

- On étudie tout d'abord le gradient de vitesse $\beta_x = \frac{\partial V_x}{\partial y}$.

La vitesse de rotation de la pale Ω n'a pas d'influence significative sur β_x (les pentes des droites sont quasiment identiques sur la Fig. 6.55). De la même manière, le

temps a peu d'influence sur β_x (les pentes des droites sont quasiment identiques sur la Fig. 6.57 pour $t \geq 0.015s$). On mesure un gradient de vitesse moyen $\beta_x = \frac{\partial V_x}{\partial y}$ de l'ordre de $8s^{-1}$ sur ces deux figures.

- On étudie ensuite le gradient de vitesse $\alpha_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$.
 A faibles vitesses de rotation ($\Omega = 200\text{tours/min}$, soit $\Omega t \leq 35^\circ$), $\alpha_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$ augmente exponentiellement avec Ω (Fig. 6.56). En revanche, pour des vitesses de rotation élevées ($400 \leq \Omega \leq 900\text{tours/min}$), la variation de α_x peut être supposée linéaire avec Ω (Figs. 6.56,6.59). On obtient l'équation suivante $\alpha_x = \Omega - 17.9$. Avec cette interpolation, il faut noter que la constante (17.9) n'a pas de sens physique. En effet sans vitesse de rotation, V_x devrait tendre vers 0. Cette équation est donc uniquement valable, hors phase de choc, pour $\Omega t \geq 35^\circ$. Enfin, le temps a peu d'influence sur α_x (les pentes des droites sont quasiment identiques sur la Fig. 6.58 pour $t \geq 0.015s$).

⇒ En se plaçant dans un écoulement ($\Omega t \geq 35^\circ$) où la valeur du frottement particule/pale est faible ($\mu = 0.1$), les gradients de vitesses de cisaillement $\beta_x = 8s^{-1}$ sont peu importants devant les gradients de vitesses de traction $\alpha_x = \Omega - 17.9$. **A partir de 600tours/min, il y a un rapport supérieur à 5 entre les deux gradients : $\alpha_x/\beta_x > 5$. Le cisaillement $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ est donc faible devant la traction, pour des faibles valeurs de frottements.**

6.6.3.2 Etude numérique de la vitesse selon (Oy)

On a déjà mis en évidence les fortes fluctuations de la vitesse selon (Oy) par rapport à la vitesse selon (Ox). Malgré ces fluctuations, on a relevé les tendances suivantes pour les profils de vitesses selon (Oy) :

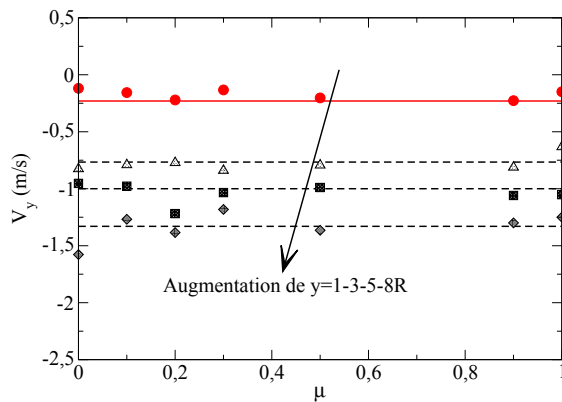


FIGURE 6.53 – Vitesse selon (Oy) relative en fonction du frottement particule/pale ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $t = 0.015s$, $\mu_b = 0.2$, $y = 1-3-5-8R$).

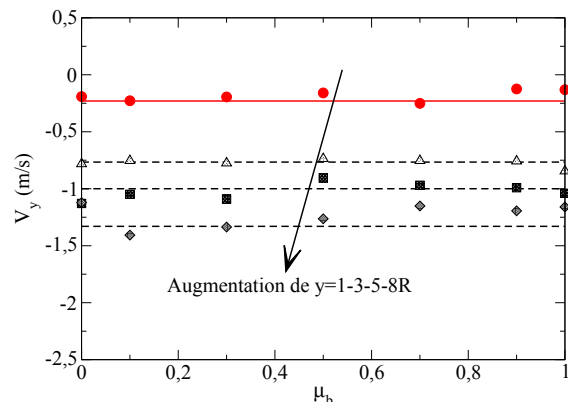


FIGURE 6.54 – Vitesse selon (Oy) relative en fonction du frottement particule/particule ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.2$, $y = 1-3-5-8R$).

Profil de vitesses V_x de particules avec rotation :

Les courbes en bleu sur les Figs. 6.56,6.57,6.58 correspondent à $\Omega t \leq 35^\circ$.

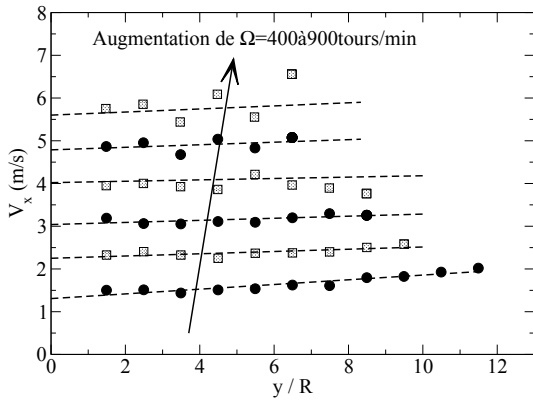


FIGURE 6.55 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la hauteur ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

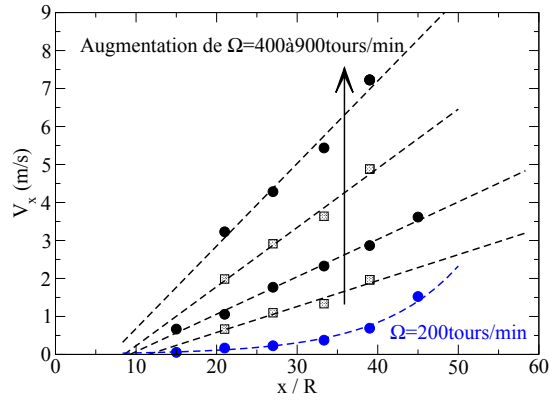


FIGURE 6.56 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la position ($y = R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

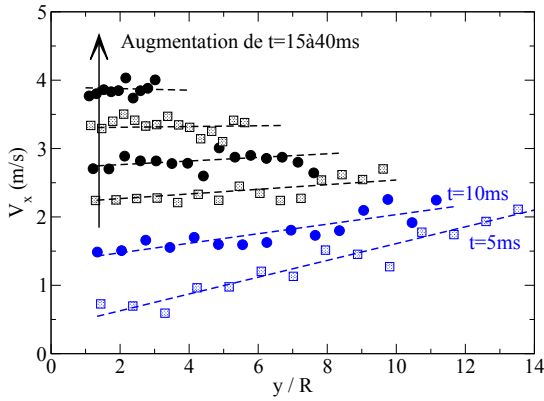


FIGURE 6.57 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la hauteur ($x = 33R$, $\Omega = 500$ tours/min, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

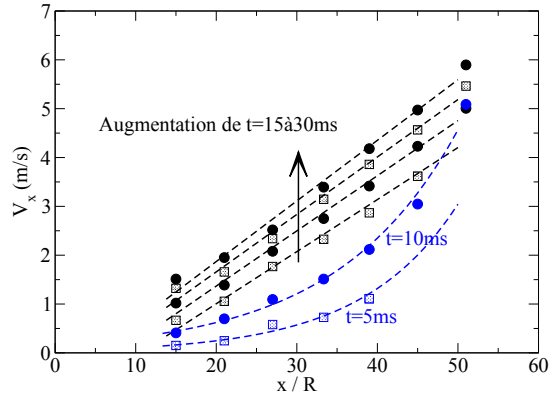


FIGURE 6.58 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la position ($y = R$, $\Omega = 500$ tours/min, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

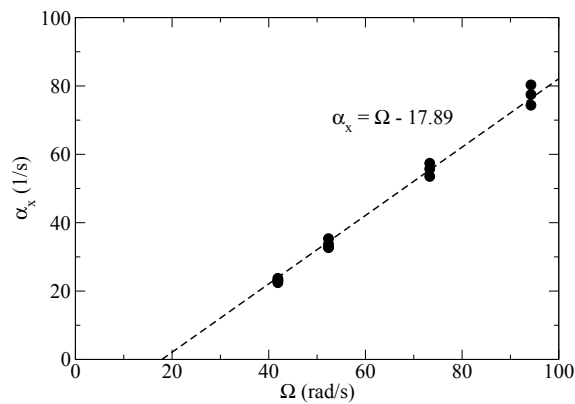


FIGURE 6.59 – $\alpha_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$ en fonction de Ω ($\Omega \geq 400$ tours/min, $y = 1-3-5-8R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

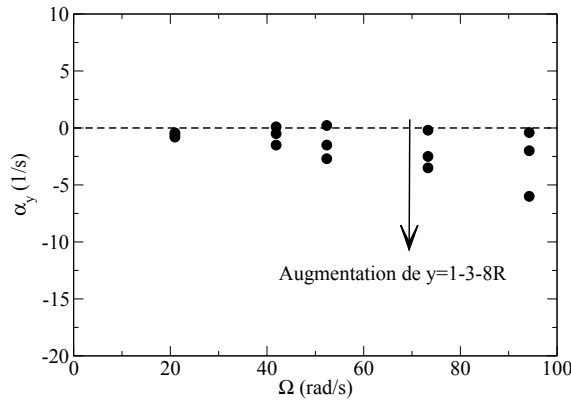
Profil de vitesses V_y de particules avec rotation :


FIGURE 6.60 – $\alpha_y = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ en fonction de Ω ($y = 1-3-8R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

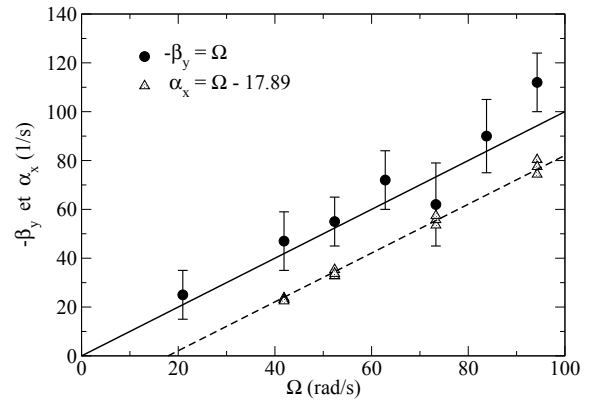


FIGURE 6.61 – $\beta_y = \frac{\partial V_y}{\partial y}$ en fonction de Ω ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

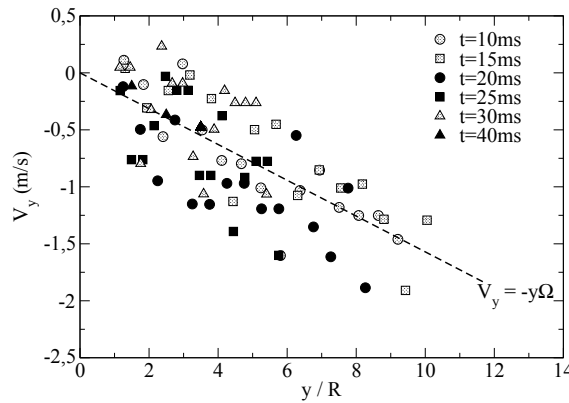


FIGURE 6.62 – Profil de vitesses selon (Oy) ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

Les valeurs de frottement μ et μ_b n'influencent ni la vitesse V_y des particules dans l'écoulement ni la vitesse V_y des particules à la paroi (cf. Figs. 6.53,6.54).

Le gradient de vitesses $\alpha_y = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ augmente dans la direction (Oy) et avec Ω (Fig. 6.60). A la paroi, il est nul.

Le gradient β_y en une position x donnée, est linéaire en Ω sur la Fig. 6.61. Le temps ne semble pas avoir d'influence sur les profils de vitesses selon (Oy) (Fig. 6.62).

⇒ En se plaçant dans un écoulement ($\Omega t \geq 35^\circ$) où la valeur du frottement particule/pale est faible ($\mu \leq 0.2$), **les gradients de vitesses $\alpha_y = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ sont faibles** : α_y est dix fois plus faible que β_y . Dans ce cas, la simple équation $V_y = -y\Omega$ semble correctement interpoler l'ensemble des profils de vitesses selon (Oy).

6.6.4 Evaluation des nombres sans dimension

Notre écoulement peut subir des contraintes de traction, compression et cisaillement. Nous allons évaluer les nombres I , J et J' définis précédemment (§6.3). Le nombre inertiel local I , défini par l'Eq. 6.7, est le rapport entre le temps caractéristique de confinement par la contrainte de Coriolis P et le temps de cisaillement. Le champ de force de Coriolis P dépend de la hauteur $(h - y)$ considérée dans l'empilement $P = \sigma_{yy} = 2\rho\Omega\bar{V}_x(h - y)$ (σ_{yy} est issue de l'Eq. 6.19 en négligeant les termes en ϵ).

$$I = \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{R\sqrt{\pi}}{\sqrt{3\Omega\bar{V}_x(h - y)}} \quad (6.34)$$

La figure 6.63 représente le nombre inertiel I pour différents temps. Ce nombre inertiel I diminue en fonction du temps et tend vers une valeur $I \approx 0.01$.

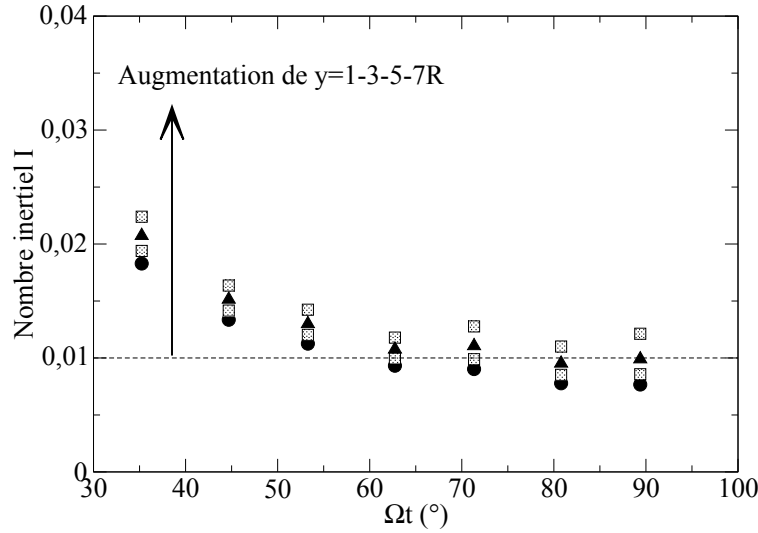


FIGURE 6.63 – Nombre inertiel I en fonction de l'angle de la pale ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$, $y=1-3-5-7R$).

Cependant pour des valeurs de frottement $\mu = 0.1$ ($600 \leq \Omega \leq 900$ tours/min), notre écoulement est original car le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \frac{\partial V_x}{\partial y}$ est cinq fois plus faible que le taux de traction. De la même façon, le taux de cisaillement $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ est plus de dix fois plus faible que le taux de compression. C'est pourquoi I n'est pas le seul paramètre caractéristique de notre écoulement. On a proposé deux autres nombres inertiels J et J' , défini par les Eqs. 6.8, 6.9. J est le rapport entre le temps caractéristique de confinement et le temps lié à la traction par la contrainte centrifuge. J' est le rapport entre le temps caractéristique d'élongation et le temps lié à la compression par la contrainte de Coriolis.

$$J = \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{R\sqrt{\pi}}{\sqrt{3\Omega\bar{V}_x(h - y)}} \quad (6.35)$$

$$J' = \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{R\sqrt{\pi}}{\sqrt{3\Omega^2\bar{x}(h - y)}} \quad (6.36)$$

On représente les nombres inertiels J et J' sur les figures 6.64,6.65. On trouve un nombre inertiel J , 3 à 11 fois plus important que le nombre inertiel I pour des temps Ωt tels que $35^\circ \leq \Omega t \leq 90^\circ$. Le rapport entre les deux nombres inertiels J/I ne varie pas dans la direction (Oy) . Par ailleurs, on observe que les deux nombres inertiels J et J' sont quasiment équivalents, le nombre J' est 1% à 5% plus faible que le nombre J .

Ce résultat confirme le fait que le cisaillement n'est pas le mécanisme dominant dans l'écoulement par rapport à la traction dans la direction (Ox) .

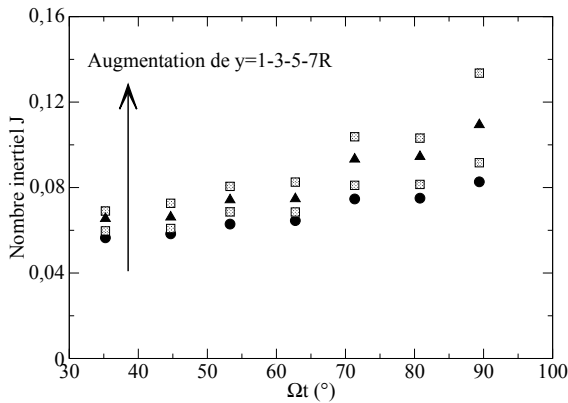


FIGURE 6.64 – Nombre inertiel J en fonction de l'angle de la pale ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$, $y=1-3-5-7R$).

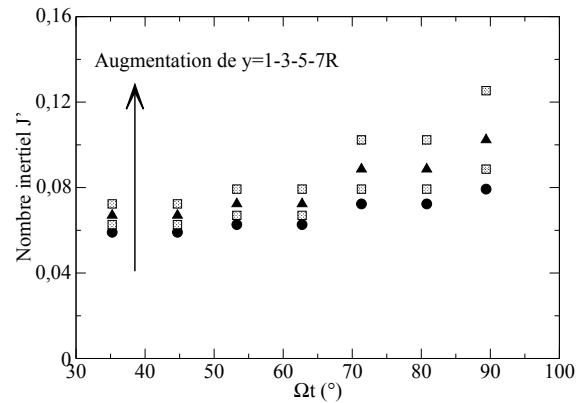


FIGURE 6.65 – Nombre inertiel J' en fonction de l'angle de la pale ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$, $y=1-3-5-7R$).

6.6.5 Conclusions

Pour des faibles frottements ($\mu \leq 0.2$), l'analyse des champs de vitesses confirme la mise en évidence d'un nouveau mode d'écoulement granulaire. Il s'agit d'un écoulement où les contraintes de traction-compression se superposent aux contraintes de cisaillements :

- Le taux de cisaillement $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ est cinq fois plus faible que le taux de traction $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ ($600 < \Omega < 900$ tours/min).
- Le taux de cisaillement $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ est plus de dix fois plus faible que le taux de compression $\frac{\partial V_y}{\partial y}$.

En revanche, pour des valeurs de frottements supérieures ($\mu > 0.2$), la contribution du taux de cisaillement par rapport au taux de traction augmente, mais nous n'avons pas étudié ce régime.

6.7 Écoulement de particules sans rotation

On choisit de modéliser la non sphéricité des particules de l'écoulement par une approche simple, c'est-à-dire en bloquant les degrés de rotation. On propose de reprendre le bilan énergétique et les profils de vitesses eulériennes pour ce type de particule.

6.7.1 Blocage des rotations

Une particule de forme anisotrope dans un milieu extérieur va avoir plus de difficulté à tourner autour de son axe principal d'inertie, qu'une particule sphérique. En effet, dans une approche de type champ moyen, une particule anisotrope pour tourner doit déplacer une quantité de matière correspondant au volume exclu dans la sphère circonscrite à la particule. On peut penser traduire cette observation par un moment de roulement dépendant directement de l'excentricité de la particule comme pour le cas mono-particule. Plus simplement, l'effet de forme non sphérique de la particule sera pris en compte en bloquant complètement les rotations des particules. Il s'agit d'une hypothèse rudimentaire qui oublie les aspects stériques liés à la forme précise de la particule et ne considère que le blocage des degrés de liberté de rotation.

6.7.2 Friction effective à la paroi

On cherche à mesurer la friction effective sur la globalité de l'amas de particules sans rotation. Nous procédons de la même façon qu'avec les particules avec rotation et nous testons l'équation de l'accélération issue des équations de Saint-Venant (Eq. 6.26). La figure 6.66 représente l'évolution de l'accélération du centre de masse de l'amas de particules. On observe cette fois-ci, quel que soit le frottement particule/pale, que la valeur du frottement effectif est égale à celle du frottement particule/pale.

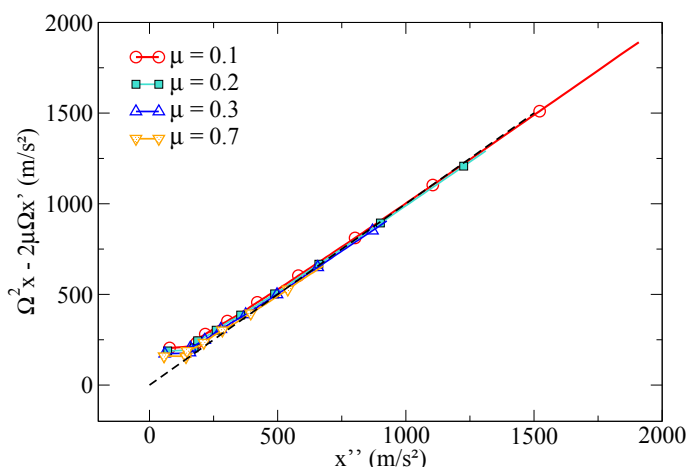


FIGURE 6.66 – Suivi du centre de masse de l'amas de particules sans rotation pour différents coefficients de frottements particule/pale ($\mu_b = 0.8$, $\Omega = 500$ tours/min).

6.7.3 Bilan énergétique

On souhaite mesurer la répartition de la dissipation de l'énergie pour des particules sans degrés de liberté de rotation. On souhaite savoir comment l'énergie est redistribuée dans le système sachant que dans ce cas, l'énergie cinétique de rotation des particules est nulle. L'énergie fournie par la pale E_{mur} est identique, de même que la dissipation d'énergie par viscosité lors des chocs E_i . On utilise en effet, la même loi de contact qui est découplée de la loi d'Euler pour le mouvement de rotation des particules. Par ailleurs, l'énergie élastique stockée au niveau des contacts est négligeable (E_d est de l'ordre de $10^{-6}\%$). Dans cette partie, nous utilisons une longueur de pale fixe $L_p = 0.5\text{m}$ et deux vitesses de rotation $\Omega = 500$ et 1000tours/min . Toutes les énergies sont adimensionnées par $1/2M(L_p\Omega)^2$.

6.7.3.1 Energie cinétique de translation

L'énergie cinétique de translation des particules E_t^G , est calculée à chaque pas de temps à partir de l'Eq. 6.11. La figure 6.67 compare l'énergie cinétique de translation pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation. Pour une valeur du frottement $\mu \leq 0.2$, l'énergie cinétique de translation est identique pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation : $E_t^G = E_t$. Cette valeur correspond à l'apparition des contacts non glissants pour des particules avec rotation (Fig. 6.29). Au-delà de la valeur seuil, $\mu = 0.2$, l'énergie cinétique de translation des particules sans degrés de liberté est de plus en plus faible (diminution de 50% entre $\mu = 0.2$ à $\mu = 0.5$); la vitesse des particules diminuant avec le frottement particule/pale.

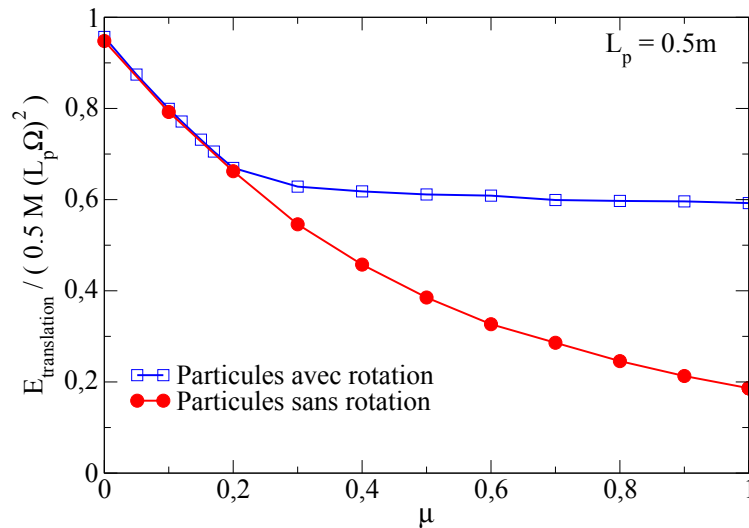


FIGURE 6.67 – Comparaison de l'énergie cinétique de translation à une distance x de 0.5m pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation ($\mu_b = 0.4$).

6.7.3.2 Dissipation par frottement

L'énergie cumulée dissipée par frottement E_f^G , est calculée à partir de l'Eq.6.12. La figure 6.68 compare la somme de l'énergie dissipée par frottement et de l'énergie cinétique de rotation pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation.

En dessous de la valeur seuil du frottement $\mu = 0.2$, l'énergie cinétique de rotation est entièrement dissipée par frottement pour des particules qui ne roulent pas. En effet, comme les énergies cinétiques de translation sont identiques, on a $E_f^G = E_f + E_r$. Au-delà de la valeur seuil $\mu = 0.2$, l'énergie dissipée par frottement des particules sans degrés de liberté de rotation, augmente continûment avec le frottement car tous les contacts sont glissants.

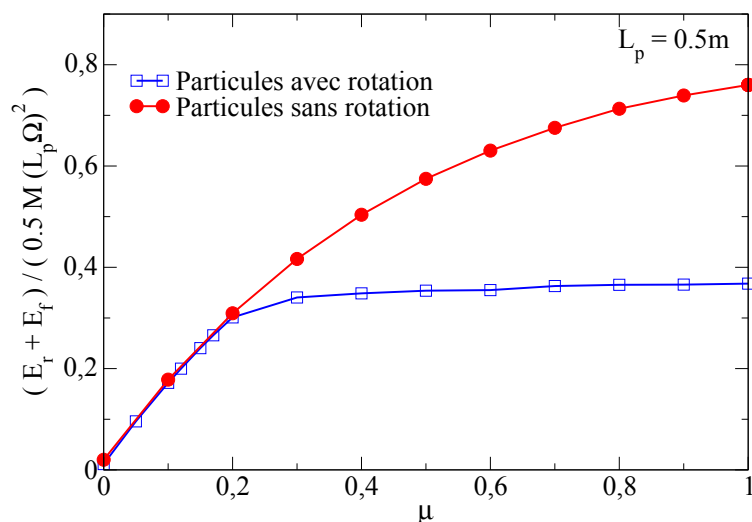


FIGURE 6.68 – Comparaison de la somme de l'énergie dissipée par frottement et de l'énergie cinétique de rotation à une distance x de 0.5m pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation ($\mu_b = 0.4$).

6.7.3.3 Coefficient de gain énergétique

Le coefficient de gain énergétique, défini par l'Eq. 6.16, diminue avec le coefficient de frottement (Fig. 6.69). **A partir d'une valeur $\mu = 0.35$, plus de la moitié de l'énergie fournie par la pale est dissipée par frottement ou par l'inélasticité des chocs.** On remarque que le coefficient de gain varie peu avec la longueur de la pale (Fig. 6.70) à la différence des particules avec trois degrés de liberté de rotation. En effet, les forces de frottement sont mobilisées quelle que soit la longueur de la pale.

On mesure un coefficient de gain $G = 0.66$, c'est-à-dire près de 30% de moins que le coefficient de gain des particules avec rotation pour un frottement $\mu = 0.2$ et une longueur de pale donnée $L_p = 0.5m$. Ce rapport augmente avec le coefficient de frottement μ .

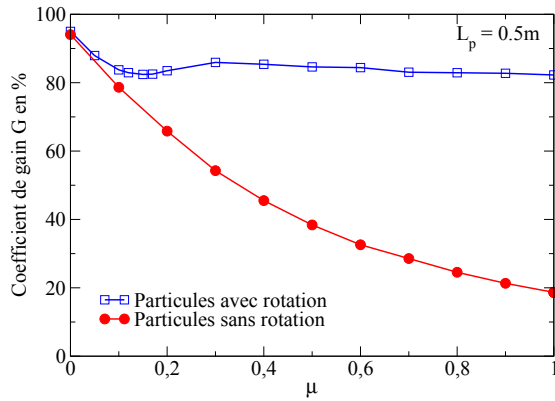


FIGURE 6.69 – Comparaison du coefficient de gain énergétique G en % à une distance x de 0.5m pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation ($\mu_b = 0.4$).

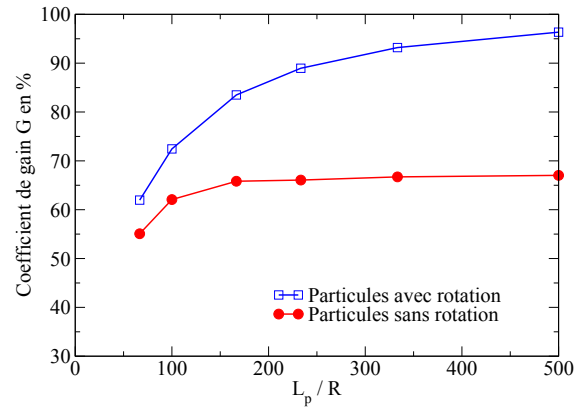


FIGURE 6.70 – Coefficient de gain énergétique G en % en fonction de la longueur de la pale pour des particules avec et sans degrés de liberté de rotation ($\mu = 0.2$ et $\mu_b = 0.4$).

La figure 6.71 représente l'histogramme de la répartition de l'énergie en fonction du frottement particule/pale pour des particules sans degrés de liberté de rotation. Cet histogramme laisse ainsi apparaître l'importance du frottement à la paroi pour des particules sans rotation. **A partir d'une valeur de frottement $\mu = 0.35$, l'énergie dissipée par frottement est supérieure à l'énergie cinétique de translation.**

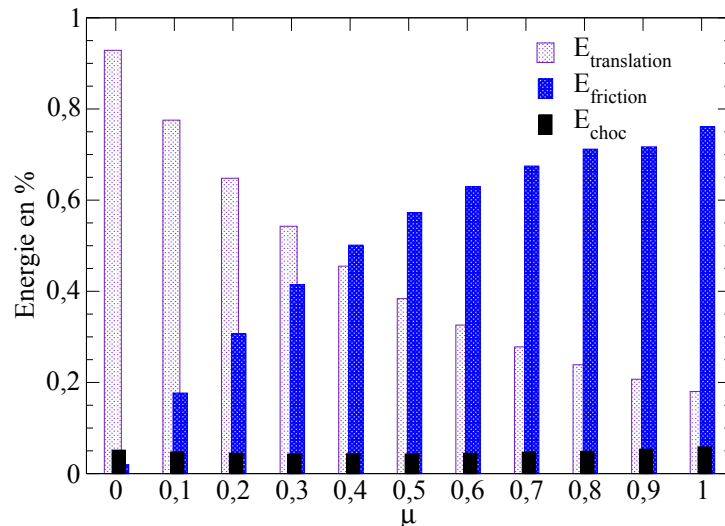


FIGURE 6.71 – Répartition de la dissipation d'énergie, cumulée dans le temps et mesurée à une distance x de 0.5m, pour des particules sans degrés de liberté de rotation ($\mu_b = 0.4$).

6.7.4 Profil de vitesses eulériennes dans l'écoulement

Nous souhaitons à nouveau étudier l'expression du champ des vitesses pour des particules sans rotation. Les profils sont calculés de la même façon que précédemment.

6.7.4.1 Etude numérique de la vitesse selon (Ox)

Le frottement particule/paie μ induit un gradient de vitesse selon (Ox) dans l'épaisseur $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ (Fig. 6.72). Ce gradient de vitesse est plus important que celui des particules avec degré de liberté de rotation au-delà de $\mu = 0.3$, car tous les contacts restent glissants. De plus, on note qu'en plus des particules en contact à la paie, d'autres couches ressentent aussi l'influence du frottement à la paie μ ($y=3-5R$). Par ailleurs, en augmentant le frottement μ_b particule/paie, la vitesse selon (Ox) des particules augmente sur la Fig. 6.73. Le frottement μ_b induit peu de différence du gradient $\frac{\partial V_x}{\partial y}$.

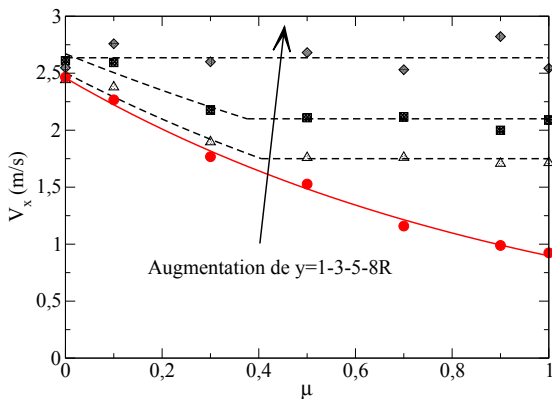


FIGURE 6.72 – Vitesse selon (Ox) relative en fonction du frottement particule/paie ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $t = 0.015\text{s}$, $\mu_b = 0.2$, $y = 1-3-5-8R$).

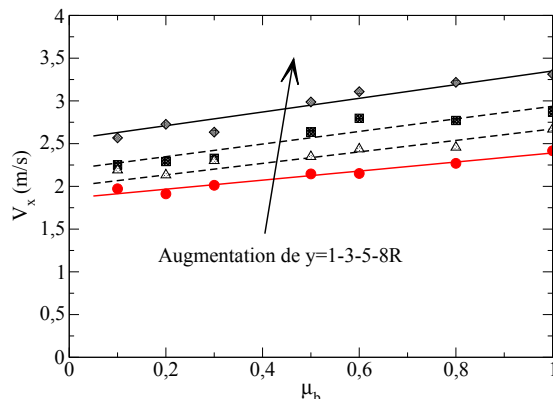


FIGURE 6.73 – Vitesse selon (Ox) relative en fonction du frottement particule/particule ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $t = 0.015\text{s}$, $\mu = 0.2$, $y = 1-3-5-8R$).

Comme précédemment, on se place à des valeurs de frottement faibles $\mu = 0.1$ et des temps $\Omega t \geq 35^\circ$ (soit $t \geq 0.015\text{s}$ à $\Omega = 500\text{tours/min}$). Dans ces conditions, on retrouve des tendances identiques au cas des particules ayant trois degrés de liberté de rotation :

- On étudie tout d'abord le gradient de vitesse $\beta_x = \frac{\partial V_x}{\partial y}$.

La vitesse de rotation de la paie Ω n'a pas d'influence significative sur β_x (Fig. 6.76). De la même façon, le temps a peu d'influence sur β_x (Fig. 6.78). Ainsi, le gradient de vitesses moyen β_x est 2 à 3 fois plus important que dans le cas des particules avec rotation : $\bar{\beta}_x = 21\text{s}^{-1}$.

- On étudie ensuite le gradient de vitesse $\alpha_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$.
 Pour des vitesses de rotation élevées ($\Omega \geq 400$ tours/min), α_x varie linéairement avec Ω . On trouve approximativement l'interpolation suivante : $\alpha_x \approx \Omega - 19.7$ (Figs. 6.77,6.80). Le temps a peu d'influence sur α_y (Fig. 6.79).

⇒ Pour un écoulement ($\Omega t \geq 35^\circ$) avec une valeur faible du frottement particule/pale ($\mu \leq 0.2$), les gradients de vitesses $\beta_x = 21s^{-1}$ sont peu importants devant les gradients de vitesses $\alpha_x \approx \Omega - 19.7$, à vitesses de rotation élevées. Si à faibles vitesses de rotation (400tours/min), β_x est du même ordre de grandeur que α_x , à 1000tours/min, il y a un rapport 5 entre les deux gradients. **La contribution du cisaillement $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ par rapport au taux de traction diminue avec la vitesse de rotation.**

6.7.4.2 Etude numérique de la vitesse selon (Oy)

Comme pour la vitesse selon (Ox), on retrouve des tendances identiques au cas des particules ayant trois degrés de liberté de rotation :

Le frottement μ n'influence ni la vitesse selon (Oy) des particules dans l'écoulement, ni la vitesse selon (Oy) des particules à la paroi (cf. Fig. 6.74). On note toutefois la présence de fortes fluctuations de la vitesse V_y dans l'écoulement. On retrouve le phénomène surprenant : la vitesse selon (Oy) des particules augmente sur la Fig. 6.75 lorsqu'on augmente le frottement μ_b .

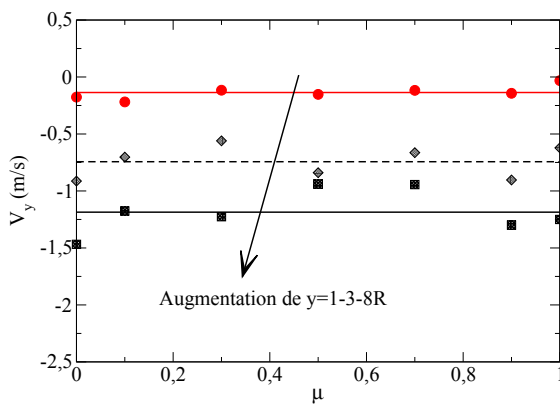


FIGURE 6.74 – Vitesse selon (Oy) relative en fonction du frottement particule/pale ($x = 33R$, $\Omega = 500$ tours/min, $t = 0.015s$, $\mu_b = 0.2$, $y = 1-3-8R$).

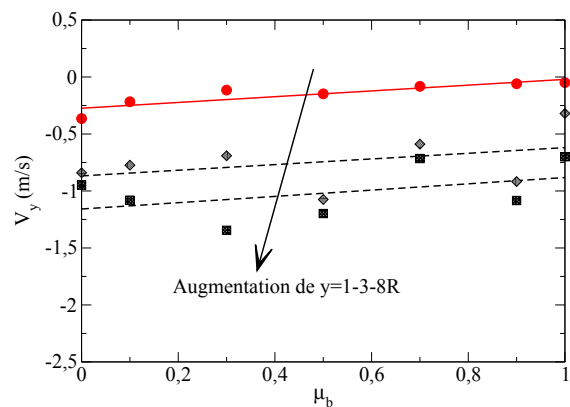


FIGURE 6.75 – Vitesse selon (Oy) relative en fonction du frottement particule/particule ($x = 33R$, $\Omega = 500$ tours/min, $t = 0.015s$, $\mu = 0.2$, $y = 1-3-8R$).

Profil de vitesses V_x de particules sans rotation :

Les courbes en bleu sur les Figs. 6.77,6.78,6.79 correspondent à $\Omega t \leq 35^\circ$.

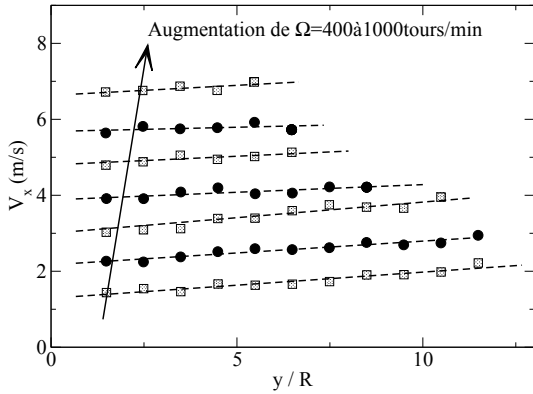


FIGURE 6.76 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la hauteur ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

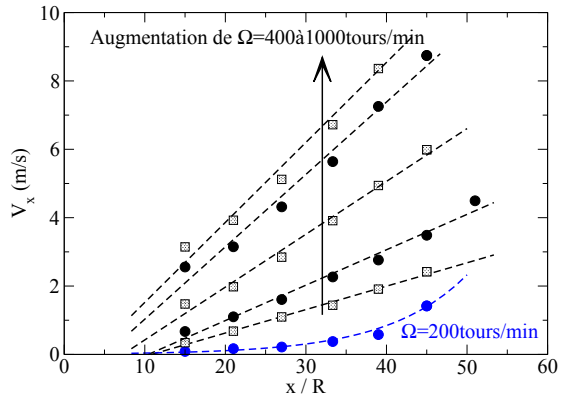


FIGURE 6.77 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la position ($y = R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

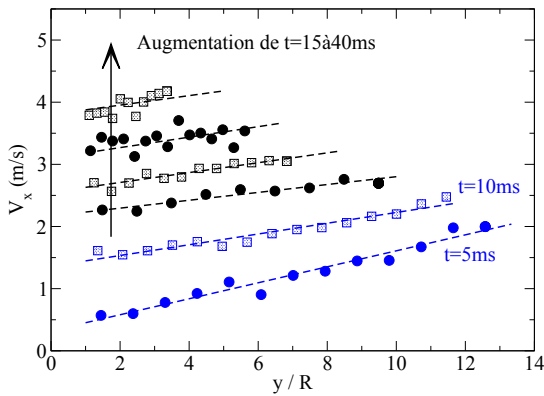


FIGURE 6.78 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la hauteur ($x = 33R$, $\Omega = 500tours/min$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

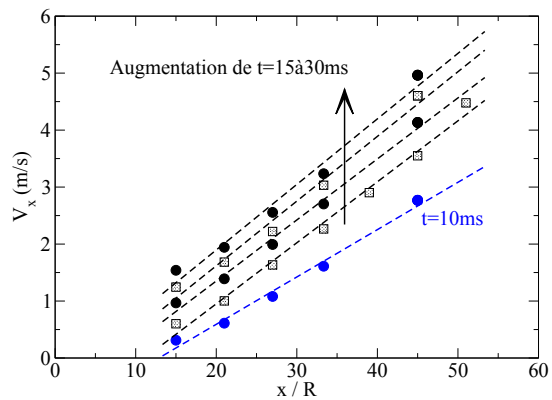


FIGURE 6.79 – Profil de vitesses selon (Ox) en fonction de la position ($y = R$, $\Omega = 500tours/min$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

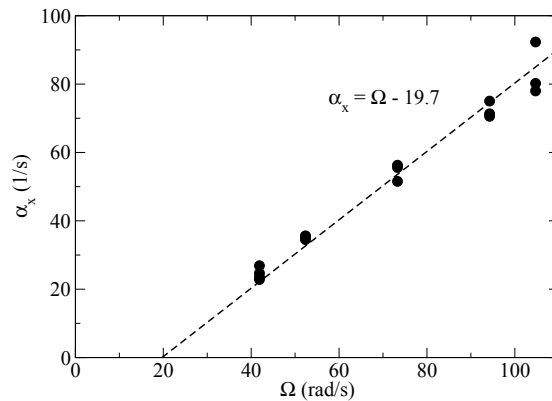


FIGURE 6.80 – $\alpha_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$ en fonction de Ω ($\Omega \geq 400tours/min$, $y = 1-3-5R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

- Le gradient de vitesses $\alpha_y = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ varie dans la direction (Oy) et avec Ω (Fig. 6.81). Malgré les fortes fluctuations, on mesure un gradient β_y du même ordre de grandeur que la vitesse de rotation Ω (Fig. 6.82). Comme pour les particules avec rotation, le gradient α_y est approximativement dix fois plus faible que le gradient β_y .

- La vitesse selon (Oy) ne semble pas dépendre pas du temps dans la phase d'écoulement (Fig. 6.83).

Profil de vitesses V_y de particules sans rotation :

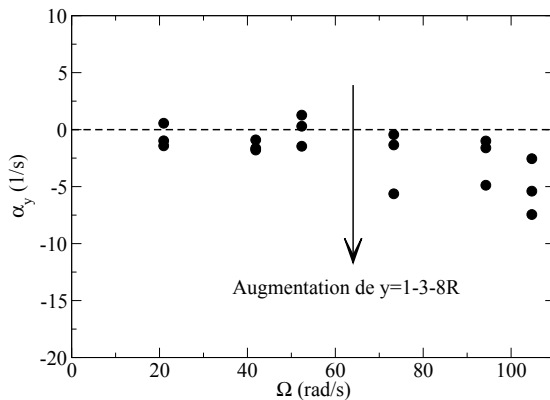


FIGURE 6.81 – $\alpha_y = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ en fonction de Ω ($y = 1-3-5-8R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

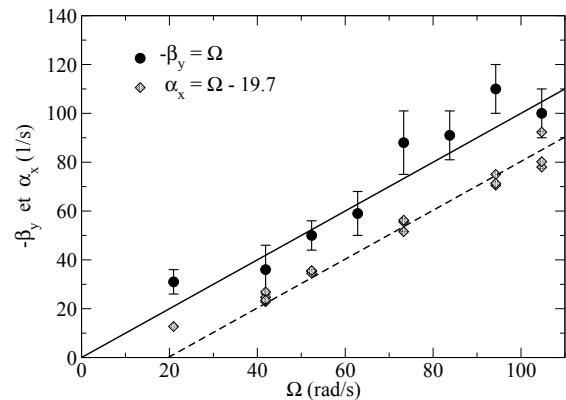


FIGURE 6.82 – $\beta_y = \frac{\partial V_y}{\partial y}$ en fonction de Ω ($x = 33R$, $t = 0.015s$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

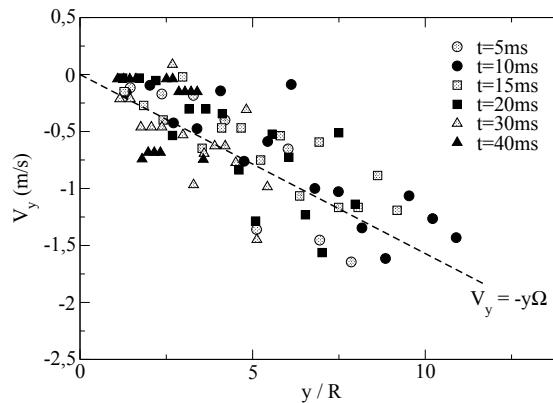


FIGURE 6.83 – Profil de vitesses selon (Oy) ($x = 33R$, $\Omega = 500\text{tours/min}$, $\mu = 0.1$, $\mu_b = 0.2$).

⇒ En se plaçant dans un écoulement ($\Omega t \geq 35^\circ$) où la valeur du frottement particule/pale est faible ($\mu \leq 0.2$), le **taux de cisaillement selon (Oy)** $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ est **dix fois plus faible que le taux de compression** $\frac{\partial V_y}{\partial y}$. On retrouve la même interpolation pour la vitesse selon (Oy) : $V_y = -y\Omega$ pour les particules sans possi-

bilité de rotation. Cette équation permet également de bien reproduire les profils de vitesses.

6.8 Conclusions

Ce chapitre a présenté une étude par éléments discrets d'un écoulement dense de particules le long d'une paroi rotative. Ici, les champs de forces extérieurs imposés ne sont pas limités à la gravité comme pour les écoulements stationnaires sur plan incliné. L'amas de particules est ainsi soumis à des contraintes de traction-compression en plus du cisaillement. Dans la direction (Oy) , l'amas est fortement comprimé due à la force de Coriolis. Dans la direction (Ox) , l'amas est étiré due à la force centrifuge. Le nombre inertiel I , valable pour des flux denses cisailés, ne peut pas caractériser à lui seul notre écoulement. Nous avons ainsi défini deux nouveaux nombres inertiel, d'une part J qui est le rapport entre le temps caractéristique de confinement et le temps lié à la traction dans la direction (Ox) , et d'autre part J' qui est le rapport entre le temps caractéristique d'élongation par la contrainte centrifuge et le temps lié à la compression dans la direction (Oy) . A faible frottement, J est dix fois plus important que I . J et J' sont du même ordre de grandeur.

Nous avons essayé de dégager l'influence de la forme dans l'écoulement. L'étude numérique a permis d'étudier certaines propriétés de l'écoulement à l'échelle de la microstructure. L'étude de la répartition de l'énergie dans le système, l'étude des champs de vitesses et l'étude du frottement effectif, ont permis de mettre en évidence deux régimes différents en fonction du frottement à la paroi :

Pour des faibles valeurs de frottement $\mu \leq 0.2$:

- A l'échelle macroscopique (section 6.2, $\mu = 0.1$), on a observé une décomposition de l'amas identique pour des particules avec et sans rotation.
- A l'échelle microscopique, l'écoulement de particules avec et sans degrés de liberté de rotation est également identique. L'énergie cinétique de translation est la même pour les deux types de particules. Par ailleurs, la part d'énergie cinétique de rotation utilisée par les particules avec rotation est dissipée sous forme de frottement pour des particules sans rotation. De plus, les profils de vitesses selon (Ox) et selon (Oy) sont quasiment identiques pour des particules avec et sans rotation. Le taux de cisaillement est environ dix fois plus faible que le taux de compression selon (Oy) et environ cinq fois plus faible que le taux de traction selon (Ox) ($\Omega > 1000$ tours/min). Notons que dans une configuration d'écoulement proche, la faible influence du cisaillement a été mise en évidence dans le cas de boues [Tabuteau, 2005]. Enfin, le frottement effectif à la paroi est égal au frottement particule/pale pour des particules avec et sans rotation.

Nous pouvons donc déduire que **les degrés de liberté de rotation n'ont donc pas d'influence pour des faibles valeurs du frottement à la paroi ($\mu \leq 0.2$)**.

Pour des valeurs de frottement élevées $\mu > 0.2$:

- A l'échelle macroscopique ($\mu = 0.6$), on a observé une décomposition de l'amas

plus rapide pour des particules avec rotation que dans le cas des particules sans rotation.

- A l'échelle microscopique, la proportion de contacts non glissants augmente pour des particules avec rotation. Il apparaît cette fois-ci une différence d'énergie cinétique de translation entre des particules avec et sans degrés de liberté de rotation. Par un effet de roulement sans glissement, l'énergie dissipée par frottement est plus faible pour les particules avec rotation. Dans le cas de particules avec rotation, un phénomène de frustration de rotation peut apparaître. Par ailleurs, la contribution du taux de cisaillement par rapport au taux de traction augmente. Enfin, le frottement effectif à la paroi décroît pour les particules avec rotation mais reste égal au frottement particule/pale pour des particules sans rotation.

Nous sommes conscients que cette modélisation est très rudimentaire par rapport à la complexité des formes réelles. Les granulats utilisés dans la pratique sont polydisperses et de formes très variées. Ainsi avec ce genre de granulat, il est possible que des phénomènes de ségrégation apparaissent dans l'écoulement. Or, les phénomènes de ségrégation possibles dans ce type d'écoulement granulaire complexe (traction, compression, cisaillement) n'ont jamais été étudiés. A l'heure actuelle, nous ne sommes pas en mesure de comparer quantitativement cette modélisation aux données expérimentales.

6.8.1 Vers l'épandabilité de granulats...

Quelques expérimentations ont été réalisées sur le dispositif expérimental numéro 2, qui a déjà été mis à profit dans le cas mono-particule. Il s'agit d'un système de miroirs inclinés le long de la pale et asservis à la rotation du disque. Ce système permet d'accéder à des informations en trois dimensions sur l'écoulement le long de la pale. La figure 6.84 compare, à un instant donné, l'écoulement d'un flux d'Ammonitrates et l'écoulement d'un flux de KCl. Sur le premier miroir, dans le cas de l'Ammonitrate, on observe nettement le régime mono-particule pour des positions élevées ($x > 2/3L_p$). En comparant les deux engrais, on observe que le front du flux d'Ammonitrate a déjà atteint l'extrémité de la pale ($x_{max} > L_p$) alors que le front du flux de KCl est environ au 2/3 de la pale ($x_{max} \approx 2/3L_p$). L'Ammonitrate semble donc s'écouler plus rapidement le long de la pale que le KCl.

Cependant, l'étude expérimentale n'en est qu'à ses débuts. Nous n'avons pas pu exploiter les résultats avec ce dispositif. Le manque de maîtrise des conditions initiales (comme le temps initial t_0), provoque de fortes incertitudes sur les grandeurs mesurées. Ce problème est lié au tube d'alimentation en particules qui masque une partie des informations nécessaires. Les expérimentations nécessiteraient d'être reproduites en modifiant l'alimentation en particules. Une fois le dispositif mis au point, il devra être utilisé de manière systématique en parallèle à la modélisation. De plus, celle-ci devra notamment intégrer les différences granulométriques des engrais et les parois latérales.

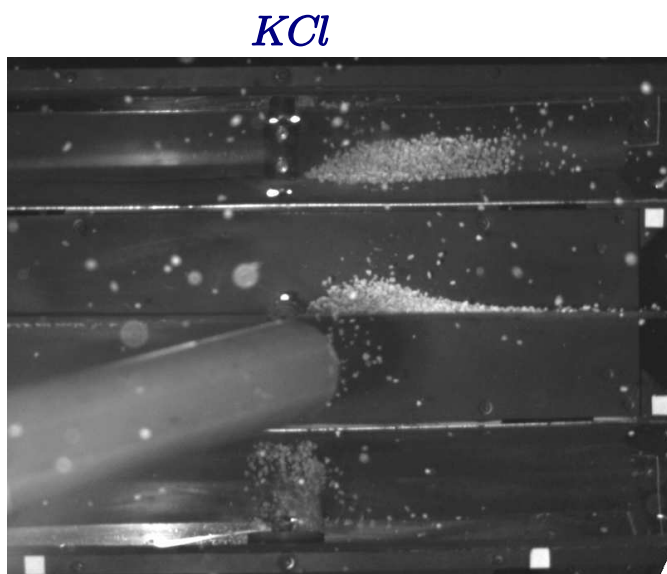
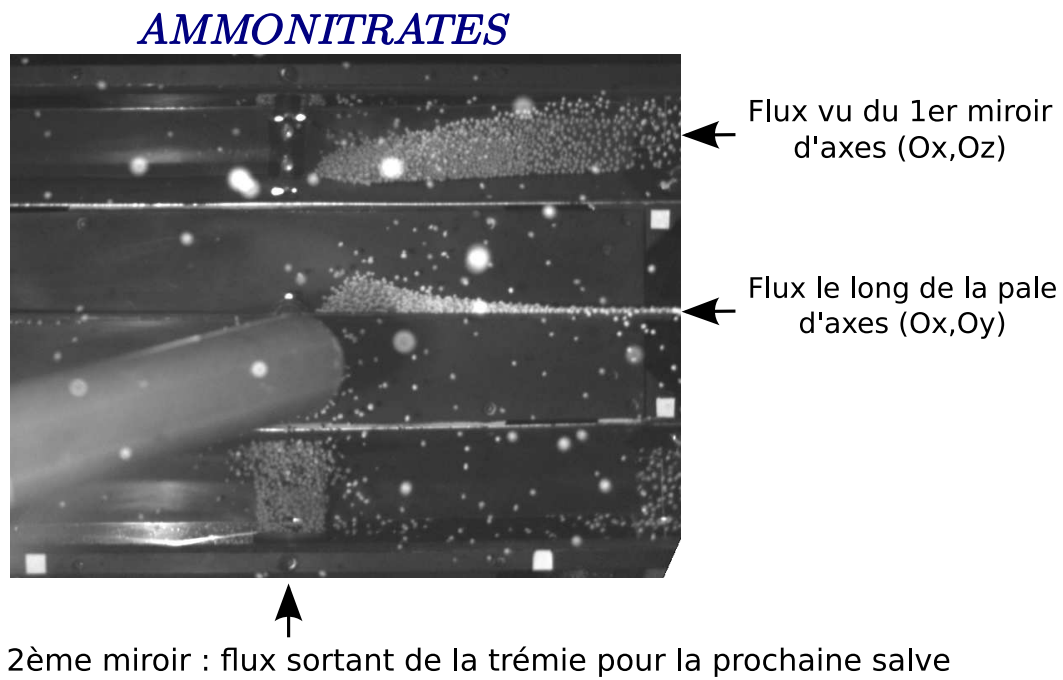


FIGURE 6.84 – Comparaison de l'écoulement des particules d'Ammonitrate et des particules de KCl, pour un temps donné ($\Omega = 500$ tours/min, débit du tube d'alimentation de l'ordre de 90kg/min, position initiale moyenne de l'ordre de $x_0 \approx 7$ cm).

Conclusions - Perspectives

Ce travail de thèse a été initié dans la perspective de comprendre certains mécanismes physiques mis en jeu lors de l'écoulement de particules en épandage centrifuge. Il s'agit du problème de l'interaction d'un matériau granulaire avec une paroi en rotation. Le problème a donc été abordé dans sa complexité. A cet effet, deux approches complémentaires ont été utilisées pour étudier le comportement des particules en pale : une étude expérimentale d'une part, complétée par la modélisation numérique discrète, d'autre part.

La modélisation a permis d'identifier les différentes étapes de l'écoulement en pale : le choc du flux granulaire le long de la pale et l'étirement de ce flux le long de la pale suivi d'un régime d'écoulement mono-particule. Notre étude est originale puisqu'elle a permis de mettre en évidence par la modélisation un écoulement dense de particules, dans un régime instationnaire, soumis à une sollicitation complexe qui semble associer à la fois des taux de déformation de type traction, compression et cisaillement. Ce mode d'écoulement est donc différent des écoulements denses sous cisaillement qui peuvent être observés dans un contexte naturel (écoulements gravitaires par exemple).

La complexité de l'étude porte également sur la diversité des formes et des propriétés mécaniques des matériaux granulaires mis en jeu dans l'écoulement. L'objet de la thèse a permis de faire un premier pas vers l'analyse de l'influence de la forme des particules sur l'écoulement. Dans une approche de modélisation minimale, nous avons considéré que la forme d'une particule influe sur la mécanique de l'écoulement, uniquement à travers les degrés de liberté de rotation de la particule. Ainsi, pour l'écoulement dense, nous avons considéré deux types de particules : avec et sans rotation. Nous sommes conscients de l'aspect très réducteur de cette modélisation par rapport à la réalité des formes observées. En particulier, la stéricité des particules est négligée dans cette première approche et la distribution des contacts n'est évidemment pas respectée. Par ailleurs, différents facteurs externes peuvent également intervenir dans la réalité selon le type de matériau tels l'humidité, la température, . . . Ces facteurs n'ont évidemment pas été pris en compte dans le cadre de cette modélisation minimale.

Nous espérons néanmoins avoir apporté une contribution importante sur les écoulements en épandage centrifuge. Nous souhaiterions à présent détailler certaines avancées auxquelles ce travail a contribué.

La première étape de ce travail de recherche, a consisté à étudier un *flux dilué* de particules le long d'une paroi rotative. A partir de deux dispositifs expérimentaux différents, il a été mis en évidence la difficulté de définir un coefficient de frottement unique pour une particule le long d'une paroi. En effet, le frottement mesuré par les expériences d'impact (méthode de Foerster) apparaît différent du frottement mesuré à partir d'une expérience simple de glissement le long d'une paroi (méthode de Coulomb).

Nous avons établi, de façon analytique, la dynamique du comportement d'une particule seule en prenant en compte la phase de rebonds de la particule puis la phase de collage. Nous avons choisi d'utiliser dans le calcul le frottement de Foerster lors du régime de rebond de la particule le long de la pale, et le frottement de Coulomb lors du régime de collage de la particule. Nous avons montré que l'air a un effet négligeable sur la trajectoire des particules en pale. Les équations du mouvement obtenues sont valides sous certaines hypothèses (nombre centrifuge N_c et nombre temporel N_t petits devant 1). Ce calcul a permis de mettre en évidence l'existence d'une valeur critique du frottement à la paroi ($\mu^* = 0.17$) à partir de laquelle la particule roule sans aucun glissement. Ce régime particulier a également été reproduit expérimentalement en utilisant des particules sphériques modèles.

L'étude expérimentale à partir de particules réelles quasi-sphériques (engrais Ammonitrate), n'a pas permis d'observer ce régime de roulement sans glissement à cause de la difficulté de mesurer la vitesse angulaire des particules. Toutefois, en utilisant un terme de frottement de roulement dans la modélisation afin de tenir compte de la forme de la particule, on a pu rendre compte des vitesses et des temps mesurés expérimentalement en sortie de pale. Par ailleurs, l'étude expérimentale n'a pas montré de différences majeures entre la trajectoire d'une particule qui roule (engrais Ammonitrate) et la trajectoire d'une particule qui glisse (engrais facetté KCl) (pour un même coefficient de restitution et des valeurs de frottement comprises entre $0.3 < \mu < 0.4$). Le degré de liberté de rotation ne semble pas avoir d'influence sur l'écoulement pour ces deux particules dans le cas de frottement compris entre $0.3 < \mu < 0.4$. En revanche, l'augmentation du coefficient de restitution a un effet important puisqu'il contrôle la hauteur des rebonds et diminue donc le temps de présence de la particule le long de la pale.

La seconde étape du travail de recherche a consisté à étudier par la modélisation de type éléments discrets un *flux dense* de particules le long d'une paroi rotative. La modélisation proposée a permis de faire le lien entre certaines propriétés microscopiques des particules dans l'écoulement et certaines grandeurs caractéristiques à l'échelle macroscopique.

La modélisation a montré l'influence du frottement dans la dynamique de l'écoulement granulaire. A faibles frottements, la modélisation fait apparaître un écoulement où le cisaillement est négligeable devant les contraintes de traction et d'élongation. Cette observation n'est plus valable pour des valeurs plus élevées du frottement. En dessous d'un certain frottement critique (de l'ordre de 0.2 d'après la modélisation), le frottement effectif à la base de l'écoulement est égal au frottement particule/paroi.

Pour des valeurs de frottement supérieures à ce frottement critique, la contribution du taux de cisaillement augmente par rapport au taux de traction et de compression et le frottement effectif décroît fortement. On observe que cette diminution du frottement à la paroi est corrélée avec l'apparition des contacts non glissants le long de la pale. La modélisation a ainsi mis en évidence l'importance des rotations dans l'écoulement à travers d'une part, les phénomènes de roulement sans glissement et d'autre part, la présence de frustration des rotations au niveau de la paroi.

Nous avons également plusieurs indications qui semblent montrer qu'une approche de type Saint-Venant (moyennée dans l'épaisseur) est applicable dans notre configuration d'écoulement, du moins pour les hauteurs initiales d'empilement considérées. Le phénomène de frustration des rotations lié à la dynamique orthoradiale de l'écoulement ne semble pas jouer un rôle crucial dans notre cas particulier ($H_0 \approx 10R$). Cette conclusion serait peut-être à reconsidérer pour des empilements initiaux de hauteurs plus grandes.

Toutefois, nous avons à l'heure actuelle une vision encore partielle des mécanismes mis en jeu dans l'écoulement depuis la phase de choc jusqu'au régime mono-particule. Il serait souhaitable qu'une étude paramétrique plus complète soit entreprise afin de caractériser les différentes étapes de l'écoulement.

Il est apparu intéressant de notre point de vue de voir si une modélisation aussi basique de la forme en bloquant les rotations peut être capable de rendre compte des résultats expérimentaux. Nous ne disposons pas à l'heure actuelle d'un corpus de résultats expérimentaux sur l'écoulement pour pouvoir y répondre. Cependant, l'étude expérimentale n'en est qu'à ses débuts. Le dispositif innovant à base de miroirs réfléchissants qui a été mis au point devra être amélioré afin notamment de mieux maîtriser les conditions initiales de l'écoulement. Par ailleurs, un soin devra être apporté au contrôle des particules éjectées hors de la pale afin d'éviter qu'elles reviennent dans le plan de la caméra, et qu'elles gênent le traitement des images.

Enfin, nous n'avons pas du tout étudié l'influence de la polydispersité sur l'écoulement des particules en pale : cet aspect du problème peut être significatif au vue des échantillons de granulats réels. Or, dans le cas des écoulements gravitaires, la polydispersité peut provoquer des phénomènes de ségrégation dans l'écoulement. Quelles seraient alors les modifications vis-à-vis de l'écoulement mono-disperse étudié dans cette thèse ? C'est sur cette perspective ouverte que nous concluons ce document.

Publications

Revue à comité de lecture

1. *Flow of a particle along a rotating wall.*
A. Le Quiniou, F. Rioual.
Europhysics Letters, 82(3), art. n ° 34001, 2008.
2. *Impact of a bead on a rotating wall.*
F. Rioual, **A. Le Quiniou**, Y. Lapusta.
Comptes Rendus - Mécanique, 336(8), pp. 664-669, 2008.
3. *Experimental study of the bouncing trajectory of a particle along a rotating wall.*
A. Le Quiniou, F. Rioual, P. Héritier, Y. Lapusta.
Physics Of Fluids.
Accepté

Colloques

1. *Écoulement granulaire sous entraînement centrifuge.*
A. Le Quiniou, F. Rioual, L. Oger.
18^e Congrès Français de Mécanique, CD Rom, Grenoble (2007).
2. *Granular flow under the action of centrifugal force : A critical dynamic friction coefficient.*
A. Le Quiniou, F. Rioual, Y. Lapusta.
Traffic and Granular Flow '07, pp. 615-620, Editeurs Cécile Appert-Rolland, François Chevoir, Philippe Gondret, Sylvain Lassarre, Jean-Patrick Lebacque and Michael Schreckenberg, Paris (2007).
3. *Flow of a particle along a rotating wall.*
A. Le Quiniou, F. Rioual, Y. Lapusta.
7th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Manchester (2008).
4. *Modélisation d'un flux de particules sous entraînement centrifuge.*
A. Le Quiniou, P. Héritier, F. Rioual.
19^e Congrès Français de Mécanique, CD Rom, Marseille (2009).

Bibliographie

- [Allen and Tildesley, 1987] Allen, M. P. and Tildesley, D. J. (1987). *Computer simulation of liquids*. Oxford University Press.
- [Aïm and Goff, 1969] Aïm, R. B. and Goff, P. L. (1969). La coordinance des empilements désordonnés de sphères. application aux mélanges binaires de sphères. *Powder Technology*, 2 :1–12.
- [Azanza, 1998] Azanza, E. (1998). *Ecoulements granulaires bidimensionnels sur plan incliné*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Azéma et al., 2007] Azéma, E., Radjaï, F., and Peyroux, R. (2007). Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Phys. Rev. E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 76(1) :011301.
- [Bagnold, 1954] Bagnold, R. A. (1954). Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 225 :49–63.
- [Bernu and Mazighi, 1990] Bernu, B. and Mazighi, R. (1990). One-dimensional bounce of inelastically colliding marbles on a wall. *Journal of physics. A, mathematical and general*, 23(24) :5745–5754.
- [Bourrier, 2008] Bourrier, F. (2008). *Modélisation de l'impact d'un bloc rocheux sur un terrain naturel, application à la trajectographie des chutes de blocs*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble.
- [Brauer, 1980] Brauer, H. (1980). Report on investigations on particle movement in straight horizontal tubes, particle/wall collision and erosion of tubes and tube bends. *J. Powder Bulk Solids Technol.*, 4 :3–12.
- [Brilliantov et al., 1996] Brilliantov, N., Spahn, F., Hertzsch, J., and Pöschel, T. (1996). Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 53(5) :5382–5392.
- [Calvetti et al., 2003] Calvetti, F., Viggiani, G., and Tamagnini, C. (2003). A numerical investigation of the incremental non-linearity of granular soils. *Italian geotechnical journal, Special Issue on Mechanics and Physics of Granular Materials*, 37 :11–29.
- [Campbell, 1990] Campbell, C. S. (1990). Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22 :57–90.
- [Cantelaube, 1995] Cantelaube, F. (1995). *Ecoulement granulaire dans un tambour à deux dimensions, Ségrégation = Granular flow in a two dimension drum, Segregation*. PhD thesis, Université de Rennes 1.

- [Chareyre, 2003] Chareyre, B. (2003). *Modélisation du comportement d'ouvrages composites sol-géosynthétique par éléments discrets - application aux ancrages en tranchées en tête de talus*. PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble I.
- [Chevoir et al., 2006] Chevoir, F., Azanza, E., Da Cruz, F., Koval Junior, G., Prochnow, M., Rognon, P., Coussot, P., Moucheron, P., Roux, J.-N., and Tocquer, L. (2006). *Ecoulements granulaires : physique et applications*. Rhéologie des pâtes et des matériaux granulaires, Roux JN., Cazacliu B. éditeurs.
- [Colin, 1997] Colin, A. (1997). *Etude du procédé d'épandage centrifuge d'engrais minéraux (Study of the process of centrifugal spreading for mineral fertilizers)*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, France.
- [Combe and Roux, 2002] Combe, G. and Roux, J.-N. (2002). Quasi-static rheology and the origin of strain. *Comptes Rendus Physique*, 3 :131–140.
- [Coulomb, 1773] Coulomb, C. A. (1773). Essai sur une application de règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Académie Royale des Sciences. Mémoires de mathématiques et de physique par Divers Savants*, 7 :343.
- [Coussot, 2005] Coussot, P. (2005). *Rheometry of Pastes, Suspensions, and Granular Materials*. Wiley, New-York.
- [Cundall, 1988] Cundall, P. (1988). Formulation of a three-dimensionnal distinct element model-part i : a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & geomech. Abstr*, 25 :107–116.
- [Cundall and Strack, 1979] Cundall, P. and Strack, O. (1979). A distinct element model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29 :47–69.
- [Da Cruz, 2004] Da Cruz, F. (2004). *Ecoulement de grains secs : Frottement et blocage*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Da Cruz et al., 2005] Da Cruz, F., Emam, S., Prochnow, M., Roux, J.-N., and Chevoir, F. (2005). Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2) :021309.
- [Dantu, 1968] Dantu, P. (1968). Etude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent. *Géotech.*, 18 :50–55.
- [De Vinci, 1495] De Vinci, L. (environ 1495). *Codex Atlanticus, Codex Madrid, Codex d'Arundel*.
- [Di Renzo and Di Maio, 2004] Di Renzo, A. and Di Maio, F. P. (2004). Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in dem-based granular flow codes. *Chemical Engineering Science*, 59 :525–541.
- [Dong and Moys, 2006] Dong, H. and Moys, M. (2006). Experimental study of oblique impacts with initial spin. *Powder Technology*, 161(1) :22–31.
- [Duran, 2000] Duran, J. (2000). *Sand, powders and grains : An introduction to the physics of granular materials*. Springer.
- [Ertas et al., 2001] Ertas, D., Grest, G. S., Halsey, T., Levine, D., and Silbert, L. E. (2001). Gravity-driven dense granular flows. *Europhysics letters*, 56(2) :214–220.

- [Euler, 1748] Euler, L. (1748). Histoire de l'académie royale à berlin. IV :313.
- [Falcon, 1997] Falcon, E. (1997). *Comportements dynamiques associés au contact de Hertz : processus collectifs de collision et propagation d'ondes solitaires dans les milieux granulaires*. PhD thesis, Université de Lyon, France.
- [Félix and Thomas, 2004] Félix, G. and Thomas, N. (2004). Evidence of two effects in the size segregation process in dry granular media. *Phys. Rev. E*, 70 :051307.
- [Foerster et al., 1994] Foerster, S. F., Louge, M. Y., Chang, H., and Allia, K. (1994). Measurements of the collision properties of small spheres. *Phys. Fluids*, 6(3) :1108–1115.
- [G.D.R. Midi, 2004] G.D.R. Midi (2004). On dense granular flows. *European Physical Journal E*, 14 :341–365.
- [Goldhirsch, 2003] Goldhirsch, I. (2003). Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35 :267–293.
- [Goldsmith, 1960] Goldsmith, W. (1960). *Impact*. London, Arnold.
- [Gorham and Kharaz, 2000] Gorham, D. A. and Kharaz, A. H. (2000). The measurement of particle rebound characteristics. *Powder Technology*, 112 :193–202.
- [Goujon et al., 2007] Goujon, C., Daloz-dubrujeaud, B., and Thomas, N. (2007). Bidisperse granular avalanches on inclined planes : A rich variety of behaviors. *The European physical journal. E, Soft matter*, 23(2) :199–215.
- [Griffis et al., 1983] Griffis, C., Riter, D., and Matthews, E. (1983). Simulation of rotary spreader distribution patterns. *Transactions of the ASAE*, 26(1) :33–37.
- [Hertz, 1896] Hertz, H. (1896). *On the contact of elastic solids*. Miscellaneous Papers, London, Macmillan.
- [Hertzsch et al., 1995] Hertzsch, J.-M., Spahn, F., and Brilliantov, N. V. (1995). On low-velocity collisions of viscoelastic particles. *J. de Phys. II France*, 5(11) :1725–1738.
- [Howell et al., 1999] Howell, D., Behringer, R., , and Veje, C. (1999). Stress fluctuations in a 2d granular couette experiment : a continuum transition. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :5241–5244.
- [Hunt and Crossley, 1975] Hunt, K. H. and Crossley, F. (1975). Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of applied mechanics*, 7 :440–445.
- [Inns and Reece, 1962] Inns, F. and Reece, A. (1962). The theory of the centrifugal distributor II : Motion on the disc, off-centre feed. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 7(4) :345–353.
- [Iordanoff, 2004] Iordanoff, I. (2004). Habilitation à diriger des recherches.
- [Iwashita and Oda, 1998] Iwashita, K. and Oda, M. (1998). Rolling resistance at contacts in the simulation of shear band development by dem. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(3) :285–292.
- [Jaeger et al., 1996] Jaeger, H. M., Nagel, S. R., and Behringer, R. P. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, 68(4) :1259–1273.

- [Jenkins and Savage, 1983] Jenkins, J. T. and Savage, S. B. (1983). A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 130 :187–202.
- [Ji et al., 2009] Ji, S., Hanes, D. M., and Shen, H. H. (2009). Comparisons of physical experiment and discrete element simulations of sheared granular materials in an annular shear cell. *Mechanics of materials*, 41(6) :764–776.
- [Johnson, 1985] Johnson, K. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- [Johnson, 1982] Johnson, K. L. (1982). One hundred years of hertz contact. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 196 :363–378.
- [Jop et al., 2006] Jop, P., Forterre, Y., and Pouliquen, O. (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441 :727–730.
- [Kharaz et al., 2001] Kharaz, A., Gorham, D., and Salman, A. (2001). An experimental study of the elastic rebound of spheres. *Powder Technol.*, 120 :281–291.
- [Khidias, 2001] Khidas, Y. (2001). Etude expérimentale du frottement et des rotations dans des milieux granulaires modèles. Master’s thesis, Université de Rennes1.
- [Khidias et al., 2003] Khidas, Y., Ammi, M., Delannay, R., and Oger, L. (2003). Friction and rotation modes in a packing of cylinders under shear stress. *Eur. Phys. J. E*, 10 :387–391.
- [Koval Junior, 2008] Koval Junior, G. (2008). *Comportement d’interface des matériaux granulaires*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Kuwabara and Kono, 1987] Kuwabara, G. and Kono, K. (1987). Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese journal of applied physics*, 26(8) part1 :1230–1233.
- [Landau and Lifshitz, 1986] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1986). *Theory Of Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 3e Ed.
- [Larrieu et al., 2006] Larrieu, E., Staron, L., and Hinch, E. J. (2006). Raining into shallow water as a description of the collapse of a column of grains. *J. Fluid Mech.*, 554 :259–270.
- [Le Quiniou et al., 2007] Le Quiniou, A., Rioual, F., and Oger, L. (2007). Écoulement granulaire sous entraînement centrifuge. In *18^e Congrès Français de Mécanique, CD Rom, Grenoble*.
- [Li et al., 2001] Li, G., Rudolph, V., Wang, F., Kajikawa, S.-I., and Horio, M. (2001). *Axial porosity distribution in a packed bed of deformable particles - a numerical study based on DEM*. Levy, A., Kalman, H. Handbook of conveying and handling of particulate solids, Elsevier Science, the Netherlands.
- [Li et al., 2000] Li, X., Dunn, P., and Brach, R. (2000). Monte carlo analysis of polydisperse microparticle impacts with surfaces. *Aerosol science and technology*, 33(4) :376–385.
- [Liu et al., 1995] Liu, C., Nagel, S., Schecter, D., Coppersmith, S., Majumdar, S., Narayan, O., and Witten, T. (1995). Force fluctuations in bead packs. *Science*, 269 :513.

- [Lorenz et al., 1997] Lorenz, A., Tuozzolo, C., and Louge, M. Y. (1997). Measurements of impact properties of small, nearly spherical particles. *Exp. Mech*, 37 :292–298.
- [Louge and Adams, 2002] Louge, M. Y. and Adams, M. E. (2002). Anomalous behavior of normal kinematic restitution in the oblique impacts of a hard sphere on an elastoplastic plate. *Physical review. E*, 65(1) :021303.1–021303.6.
- [Love, 1944] Love, A. E. H. (1944). *A treatise of the mathematical theory of elasticity*. Cambridge Univ. Press, 4e Ed.
- [Mangeney et al., 2006] Mangeney, A., Staron, L., Volfson, D., and Tsimring, L. (2006). Comparison between discrete and continuum modeling of granular spreading. In *MATH'06 : Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on APPLIED MATHEMATICS*, pages 63–70, Stevens Point, Wisconsin, USA. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS).
- [Maw et al., 1976] Maw, N., Barber, J., and Fawcett, J. (1976). The oblique impact of elastic spheres. *Wear*, 38 :101–114.
- [Maw et al., 1981] Maw, N., Barber, J. R., and Fawcett, J. N. (1981). The role of elastic tangential compliance in oblique impact. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 103 :74–80.
- [Mindlin, 1949] Mindlin, R. (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 71 :259–268.
- [Mindlin and Deresiewicz, 1953] Mindlin, R. and Deresiewicz, H. (1953). Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 20 :327–344.
- [Métayer, 2008] Métayer, J.-F. (2008). *Stabilité et propriétés rhéologiques d'empilements granulaires confinés*. PhD thesis, Université de Rennes1.
- [Mueth et al., 1998] Mueth, D., Jaeger, H., and Nagel, S. (1998). Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, 57 :3164–3169.
- [Naaim et al., 1997] Naaim, M., Vial, S., and Couture, R. (1997). Saint venant approach for rock avalanches modelling in multiple scale analysis and coupled physical systems. In *Saint Venant Symposium, Paris, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*.
- [Nedderman, 1992] Nedderman, R. M. (1992). *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press.
- [Ning, 1995] Ning, Z. (1995). *Elasto-plastic impact of fine particles and fragmentation of small agglomerates*. PhD thesis, University of Aston, Birmingham.
- [Oda et al., 1997] Oda, M., Iwashita, K., and Kakiuchi, T. (1997). *Importance of particle rotation in the mechanics of granular materials*. Behringer et Jenkins, Balkema, Rotterdam.
- [Patterson and Reece, 1962] Patterson, D. and Reece, A. (1962). The theory of the centrifugal distributor I : motion on the disc, near-centre feed. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 7(3) :232–240.
- [Pouliquen, 1999] Pouliquen, O. (1999). Scaling laws in granular flows down a rough inclined plane. *Phys. Fluids*, 11 :542–548.

- [Pouliquen, 2001] Pouliquen, O. (2001). *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*. Cours écoulements denses, Ecole d'été Milieux Divisés, Porquerolles.
- [Pouliquen and Chevoir, 2002] Pouliquen, O. and Chevoir, F. (2002). Dense flows of dry granular materials. *Comptes Rendus Physique*, 3 :163–175.
- [Pouliquen and Forterre, 2002] Pouliquen, O. and Forterre, Y. (2002). Friction law for dense granular flow : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid. Mech.*, 453 :133–151.
- [Prochnow, 2002] Prochnow, M. (2002). *Écoulements denses de grains secs*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Pöschel and Buchholtz, 1995] Pöschel, T. and Buchholtz, V. (1995). Molecular dynamics of arbitrarily shaped granular particles. *Journal de physique I*, 5(11) :1431–1455.
- [Pöschel and Schwager, 2005] Pöschel, T. and Schwager, T. (2005). *Granular dynamics : Models and Algorithms*. Springer, Berlin.
- [Rabinowicz, 1951] Rabinowicz, E. (1951). The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *Journal of Applied Physics*, 22 :1373–1379.
- [Radjaï et al., 1996] Radjaï, F., Jean, M., Moreau, J., and Roux, S. (1996). Force distributions in dense twodimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2) :274–277.
- [Radjaï and Roux, 2001] Radjaï, F. and Roux, S. (2001). *Features of the granular texture*. In Y. Kishino, editor, *Powders and grains*, 21–24, Sendai, Japan.
- [Rajchenbach, 2003] Rajchenbach, J. (2003). Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity. *Physical review letters*, 90(14) :144302.
- [Reynolds, 1885] Reynolds, O. (1885). On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Phil. Mag. Ser.*, 5(20) :469–481.
- [Rioual et al., 2008] Rioual, F., Le Quiniou, A., and Lapusta, Y. (2008). Impact of a bead on a rotating wall. *C. R. Mécanique*, 336(8) :664–669.
- [Rioual et al., 2007] Rioual, F., Piron, E., and Tijssens, E. (2007). Rolling and sliding granular dynamics driven by centrifugal forcing. *Applied Physics Letters*, 90 :021918.
- [Roux and Chevoir, 2005] Roux, J.-N. and Chevoir, F. (2005). Simulation numérique discrète et comportement mécanique des matériaux granulaires. *Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées*, 254 :109–138.
- [Salot et al., 2009] Salot, C., Gotteland, P., and Villard, P. (2009). Influence of relative density on granular materials behavior : Dem simulations of triaxial tests. *Granular Matter*, 11(4) :221–236.
- [Savage and Hutter, 1989] Savage, S. B. and Hutter, K. (1989). The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of Fluid Mechanics*, 199 :177–215.
- [Schäfer et al., 1996] Schäfer, J., Dippel, S., and D.E.Wolf (1996). Force schemes in simulations of granular materials. *Journal de physique I*, 6(1) :5–20.

- [Scholz, 1990] Scholz, C. (1990). *The mechanics of earthquakes and faulting*. Cambridge University Press.
- [Schwager and Pöschel, 2007] Schwager, T. and Pöschel, T. (2007). Coefficient of restitution and linear dashpot model revisited. *Condensed Matter : cond-mat/0701278*.
- [Schwager and Pöschel, 1998] Schwager, T. and Pöschel, T. (1998). Coefficient of normal restitution of viscous particles and cooling rate of granular gases. *Physical review E*, 57(1) :650–654.
- [Sommerfeld and Huber, 1999] Sommerfeld, M. and Huber, N. (1999). Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 :1457–1489.
- [Sondergaard et al., 1990] Sondergaard, R., Chaney, K., and Brennen, C. (1990). Measurements of solid spheres bouncing off flat plates. *Journal of Applied Mechanics*, 112(3) :694–699.
- [Staron and Hinch, 2005] Staron, L. and Hinch, E. (2005). Study of the collapse of granular columns using two-dimensional discrete-grains simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 545 :1–27.
- [Staron et al., 2002] Staron, L., Vilotte, J.-P., and Radjai, F. (2002). Pre-avalanche instabilities in a tilted granular pile. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :204302.
- [Tabor, 1948] Tabor, D. (1948). A simple theory of static and dynamic hardness. *Proc. Roy. Society Series A*, 192 :247–274.
- [Tabuteau, 2005] Tabuteau, H. (2005). *Etude du comportement de fluides viscoélastiques sur un disque en rotation. Application à l'épandage des boues résiduelles*. PhD thesis, ENGREF - Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, Paris.
- [Thornton, 1997] Thornton, C. (1997). Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres. *Journal of Applied Mechanics*, 64 :383–386.
- [Thornton, 2009] Thornton, C. (2009). A note on the effects of initial particle spin on the rebound behaviour of oblique particle impacts. *Powder Technology*, 192 :152–156.
- [Thornton and Ning, 1998] Thornton, C. and Ning, Z. (1998). A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres. *Powder Technology*, 99(2) :154–162.
- [Thornton and Yin, 1991] Thornton, C. and Yin, K. (1991). . *Powder Technology*, 65 :153–166.
- [Tijskens, 2006] Tijskens, E. (2006). Modelling particle shape in dem simulations. In *2nd International Symposium on Centrifugal Fertiliser Spreading, Montoldre, France*.
- [Ting et al., 1993] Ting, J. M., Khwaja, M., Meachum, L. R., and Rowell, J. D. (1993). An ellipse-based discrete element model for granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 17 :603–623.

- [Travers et al., 1986] Travers, T., Bideau, D. E., Gervois, A., Troadec, J. P., and Messenger, J. C. (1986). Uniaxial compression effects on 2d mixtures of "hard" and "soft" cylinders. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 19 :L1033–L1038.
- [Tsuji and T. Tanaka, 1992] Tsuji, Y. and T. Tanaka, T. I. (1992). Langrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder technology*, 71 :239–250.
- [Van Liedekerke, 2007] Van Liedekerke, P. (2007). *Study of the granular fertilizers and the centrifugal spreader using Discrete Element Method (DEM) simulations*. PhD thesis, University of Leuven, Belgium.
- [Vu-Quoc et al., 2000a] Vu-Quoc, L., Zhang, X., and Lesburg, L. (2000a). A normal force displacement model for contacting spheres accounting for plastic deformation : force-driven formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 67(2) :363–371.
- [Vu-Quoc et al., 2000b] Vu-Quoc, L., Zhang, X., and Walton, O. (2000b). A 3-d discrete-element method for dry granular flows of ellipsoidal particles. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 187 :483–528.
- [Walton and Braun, 1986] Walton, O. and Braun, R. (1986). Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. *Journal of Rheology*, 30(5) :949–980.
- [Walton, 1988] Walton, O. R. (1988). Granular solid flow project, quarterly report ucid-20297-88-1. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory.
- [Williams and Pentland, 1992] Williams, J. and Pentland, A. (1992). Superquadrics and modal dynamics for discrete elements in interactive design. *Eng. Comput.*, 9 :115–127.
- [Wood, 1999] Wood, D. (1999). *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press.
- [Wu et al., 2009] Wu, C.-Y., Thornton, C., and Li, L.-Y. (2009). A semi-analytical model for oblique impacts of elastoplastic spheres. *Proceedings of the Royal Society. Mathematical, physical and engineering sciences*, 465(2103) :937–960.
- [Zener, 1941] Zener, C. (1941). The intrinsic inelasticity of large plates. *Physical Review*, 59(8) :669–673.