



HAL
open science

Gestion d'une ressource en eau souterraine sujette aux sécheresses : analyse des stratégies d'adaptation

J. de Frutos Cachorro

► **To cite this version:**

J. de Frutos Cachorro. Gestion d'une ressource en eau souterraine sujette aux sécheresses : analyse des stratégies d'adaptation. Sciences de l'environnement. Doctorat Sciences économiques, Université Montpellier I, 2014. Français. NNT: . tel-02600726

HAL Id: tel-02600726

<https://hal.inrae.fr/tel-02600726>

Submitted on 16 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivrée par **Université Montpellier 1, Faculté des
Sciences Economiques**

Préparée au sein de l'école doctorale d'Economie et
Gestion de Montpellier (EDEG)

Et des unités de recherche : Laboratoire Montpelliérain
d'Economie Théorique et Appliquée (LAMETA) et Gestion
de l'Eau, Acteurs, Usages (G-EAU)

Spécialité : **Sciences Economiques**

Présentée par **Julia DE FRUTOS CACHORRO**

**GESTION D'UNE RESSOURCE EN EAU
SOUTERRAINE SUJETTE AUX SECHERESSES:
ANALYSE DES STRATEGIES D'ADAPTATION
GROUNDWATER RESOURCE MANAGEMENT
SUBJECT TO DROUGHTS: ANALYSIS OF
ADAPTATION STRATEGIES**

Sous la direction de :

Mabel Tidball, Directrice de recherche, INRA
Katrin Erdlenbruch, Chargée de recherche, IRSTEA

Soutenue le 8 juillet 2014 devant le jury composé de

Catarina ROSETA-PALMA, Professeure, ISCTE	Rapportrice
Hassan BENCHEKROUN, Professeur, Université McGill	Rapporteur
Alban THOMAS, Directeur de recherche, INRA	Examineur
Stefano FAROLFI, Directeur de recherche, CIRAD	Examineur
Francisco CABO, Professeur, Université de Valladolid	Examineur
Mabel TIDBALL, Directrice de recherche, INRA	Directrice de thèse
Katrin ERDLLENBRUCH, Chargée de recherche, IRSTEA	Co-directrice de thèse

« La faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur ».

GESTION D'UNE RESSOURCE EN EAUX SOUTERRAINES SUJETTE AUX SÉCHERESSES : ANALYSE DES STRATÉGIES D'ADAPTATION.

Résumé : La gestion d'une ressource en eau souterraine utilisée pour l'irrigation est un phénomène dépendant de plusieurs facteurs et concernant différents acteurs (utilisateurs et gestionnaire). En cas d'aléa climatique comme la sécheresse, gérer une ressource devient un problème plus complexe. Il est justement important de mieux comprendre et d'anticiper les sécheresses car ils peuvent avoir des impacts significatifs sur l'activité économique agricole et sur les niveaux de la ressource. Pour cela, le type d'information dont disposent les utilisateurs et/ou les gestionnaire est essentiel. Dans les chapitres 2 et 3, nous analysons l'impact d'une sécheresse « hydrologique » sur la gestion optimale de la ressource, avant et après son arrivée. Dans le chapitre 2, nous montrons comment le gestionnaire de la ressource peut s'adapter le mieux possible à cette sécheresse selon l'information dont il dispose. Dans le chapitre 3, nous montrons que la prise en compte des interactions stratégiques et dynamiques entre les utilisateurs de la ressource entraîne une exploitation moins efficace de la ressource. Nous appliquons les modèles des chapitres 2 et 3 à l'aquifère La Mancha Occidentale au Sud de l'Espagne. Dans le chapitre 4, nous analysons l'impact d'une sécheresse « agronomique » sur la gestion optimale d'une exploitation agricole située dans la zone de la Beauce centrale, en France. Nous prenons en compte des informations de caractère hydrologique, agronomique et économique. En particulier, nous étudions l'impact d'une année sèche sur la valeur ajoutée de l'exploitation et sur la ressource en eau utilisée. De plus, nous nous intéressons au comportement stratégique que les agriculteurs peuvent avoir en année sèche, que ce soit sans ou avec restrictions des usages de l'eau. Nous montrons qu'une politique de régulation est nécessaire pour éviter la surexploitation de la nappe en année sèche.

Mots clés : Ressource en eau souterraine, agriculture irriguée, gestion efficace, sécheresses, stratégies d'adaptation, comportement d'extraction, choix d'assolement.

GROUNDWATER RESOURCE MANAGEMENT SUBJECT TO DROUGHTS : ANALYSIS OF ADAPTATION STRATEGIES.

Abstract : The management of a groundwater resource used for irrigation is a phenomenon that depends on several factors and concerning various actors (users and manager). Moreover, the resource can be subject to droughts. In this case, the management of the resource becomes a more complex problem. Adaptation to droughts is important because they can have significant impacts on agricultural activity and on the water table of the resource. This adaptation hinges crucially on the information available to the manager and the resource users. In chapters 2 and 3, we analyze the impact of an hydrological drought on the optimal management of the resource, before and after its arrival. In particular, in chapter 2, we show how the manager can adapt as good as possible to this drought according to the nature of information he has. In chapter 3, we show that taking into account strategic and dynamic interactions between the users of the ressource leads to less efficient resource use. We apply models of chapters 2 and 3 to the aquifer Western La Mancha, in Spain. In chapter 4, we study the impact of an agronomic drought on the optimal management of a farm in the area of Central Beauce, in France. We take into account hydrological, agronomic and economic informations. In particular, we analyze the impact of a dry period on the annual benefits of the farm and on the groundwater resource level. Furthermore, we study optimal strategic behavior of farmers in a dry year, whether they are subject to water restrictions or not. We show that a regulation policy is necessary to avoid the overexploitation of the ressource in a dry year.

Key words : Groundwater resource management, irrigated agriculture, drought, adaptation strategies, pumping behavior, choice of land use.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directrices de thèse, Mabel et Katrin, pour m'avoir fait confiance malgré mes doutes (propres de mon jeune âge) en début de thèse. Je les remercie également pour sa patience, son temps accordé et son soutien. En particulier, je remercie Katrin pour m'encourager à faire toujours mieux, puis je remercie Mabel d'avoir réveiller en moi une passion perdue : les « maths ».

Je remercie également mes rapporteurs et membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail, ainsi qu'aux membres de mon comité de thèse Alban Thomas, Arnaud Reynaud, Eric Sauquet, Sylvie Morardet, Sami Bouarfa, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les remarques constructives qu'ils ont fait sur mon projet de thèse.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions : Nina Graveline, Farida Ouchiha, Fabien Prieur, Sebastien Loubier, Jean-Louis Fusillier et en particulier, Catarina Roseta-Palma.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans la participation financière du Projet ANR Jeune chercheurs RISECO, que je tiens dès lors à remercier vivement, en particulier à Katrin pour son engagement.

Merci à IRSTEa et à DIATAE pour la transmission des données de la Beauce, en particulier, merci à Laurent Brunel.

J'adresse aussi mes remerciements à Alain Jean-Marie, Laure Kuhfuss, Denis Claude, Nicolas Querou et en particulier à Mathieu Désolé pour ces nombreuses relectures et corrections. Sans eux cette thèse serait beaucoup moins lisible !!!

Je tiens également à remercier le LAMETA et G-EAU pour l'accueil et les conditions de travail privilégiées qui m'ont été offertes, ainsi qu'à tous les personnes du bâtiment 26.

Et surtout :

Merci à mes collègues et maintenant amis : A Laure, pour sa compagnie et son soutien 24h/24, à Léa, pour être mon « âme sœur » depuis la minute 0 de cette thèse, à Mathieu, pour son énorme patience, sa gentillesse et pour faire partie des rares personnes qui me supporte, à Sophie, pour ses conseils et sa capacité d'écouter, puis à Xavier, Philippe, bon bref ! à tous les jeunes ! Merci pour les bons moments passés !

Mes remerciements vont aussi à ma famille, tout simplement parce que « c'est la meilleure famille du monde », à mes amis en Espagne, merci d'être toujours aussi présents que lorsque je suis partie il y a 6 ans, à mes amis en France (hors collègues), merci pour les moments de déconnexion boulot, et merci à la personne avec laquelle j'ai partagé ma vie pendant les 3/4 de temps de cette aventure.

Je dédie cette thèse à mes grands parents parce que même s'ils ne sont plus là, ils seront toujours dans mes pensées quoi que je fasse.

Table des matières

1	Chapitre introductif	1
1.1	Définitions et contexte	1
1.1.1	La notion de sécheresse	1
1.1.2	Ressources en eaux souterraines utilisées pour l'irrigation	5
1.2	Revue de littérature	7
1.2.1	Stratégies d'adaptation des agriculteurs aux sécheresses	7
1.2.2	La gestion des ressources en eaux souterraines	11
1.3	Problématique	17
1.4	Méthodologie	18
1.4.1	Théorie du contrôle optimal	18
1.4.2	Théorie des jeux	26
2	Stratégies d'adaptation optimales face à des chocs sur la dynamique de la res- source en eau	29
2.1	Introduction	29
2.2	Le modèle	32
2.2.1	Le cas déterministe	34
2.2.2	Le cas stochastique	36
2.2.3	Cas déterministe vs. cas stochastique	38
2.3	Application numérique	39
2.3.1	Solutions optimales pour les cas déterministes	40
2.3.2	Solutions optimales pour les cas stochastiques	45
2.3.3	Cas déterministes vs. cas stochastiques	49
2.4	Conclusions et perspectives	53
3	Partager une ressource en eau souterraine dans un contexte de changement de régime	57
3.1	Introduction	57
3.2	Le modèle	59
3.3	Cas non-coopératifs	61
3.3.1	Résolution du cas « open-loop »	62
3.3.2	Résolution du cas « open-loop » par morceaux	62
3.3.3	Résolution du cas « feedback »	62
3.4	L'optimum social	63
3.4.1	Résolution du cas sans choc	63
3.4.2	Résolution du cas avec choc	63
3.5	Résultats	63
3.5.1	Résultats théoriques	63
3.5.2	Application numérique	65
3.6	Conclusions et perspectives	78

4	Modèle d'exploitation agricole avec une dynamique de la ressource en eau :	
	Application à la nappe de Beauce	81
4.1	Introduction	81
4.2	Le modèle	83
4.2.1	Paramètres du modèle	83
4.2.2	Formulation du modèle	85
4.2.3	Résolution du problème	85
4.2.4	Les solutions aux bords	88
4.2.5	Un cas statique particulier : $z = c = 0$	88
4.3	Application à la Beauce centrale	90
4.3.1	Contexte de la Beauce	90
4.3.2	Problématique de la gestion de l'eau	93
4.3.3	Recueil des données	95
4.3.4	Transformation des données	97
4.3.5	Application numérique : résultats	103
4.4	Conclusions	109
	Discussion et conclusion	113
A	Liste des sigles	123
B	Annexes correspondant au chapitre 2	125
B.1	Intégrale par parties	125
B.2	Résolution du problème simple	125
B.3	Résolution du problème déterministe	126
B.4	Résolution du problème stochastique	129
B.5	Démonstrations des propositions	130
C	Annexes correspondant au chapitre 3	135
C.1	Résolution de l'optimum social (OS)	135
C.2	Résolution de l'optimum social avec choc	136
C.3	Résolution du cas « open-loop »	139
C.4	Résolution du cas « open-loop » par morceaux	141
C.5	Résolution du cas « feedback »	143
C.6	Démonstration des propositions	145
D	Annexes correspondant au chapitre 4	147
D.1	Application numérique : Recueil et transformation des données	147
D.1.1	Classification des années par types de printemps/été climatique	147
D.1.2	Réalisation de la courbe de réponse à l'eau	147
D.2	Résultats scénarios augmentation du coût de pompage	156

Table des figures

2.1	Solutions optimales pour différentes valeurs du choc déterministe : Problème de référence vs. adaptation en $t = 0$	41
2.2	Solutions optimales pour différentes dates d'occurrence du choc déterministe : Problème de référence vs. adaptation en $t = 0$	42
2.3	Différence entre le taux d'extraction avec et sans choc déterministe	43
2.4	Solutions optimales du choc déterministe : Adaptation en $t = 0$ vs. adaptation en $t = t_a$	44
2.5	Solutions optimales pour différentes valeurs du choc stochastique : Problème de référence vs. adaptation en $t = 0$	46
2.6	Solutions optimales pour différentes probabilités du choc stochastique : Problème de référence vs. adaptation en $t = 0$	47
2.7	Solutions optimales du choc stochastique : Adaptation en $t = 0$ vs. adaptation en $t = t_a$	49
2.8	Solutions optimales du stock : Cas déterministes vs. cas stochastiques . . .	49
2.9	Solutions optimales du taux d'extraction : Cas déterministes vs. cas stochastiques	50
3.1	Solutions du cas « open-loop » : Variation de l'intensité du choc	66
3.2	Solutions du cas « open-loop » : Variation de la date d'occurrence du choc . .	66
3.3	Solutions du cas « feedback » : Variation de l'intensité du choc	67
3.4	Solutions du cas « feedback » : Variation de la date d'occurrence du choc . .	68
3.5	Comparaison des solutions de l'optimum social, du cas « open-loop » et du cas « feedback »	69
3.6	Comparaison des solutions de l'optimum social, du cas « open-loop » et du cas « feedback » : Variation de l'intensité du choc	71
3.7	Comparaison des solutions de l'optimum social, du cas « open-loop » et du cas « feedback » : Variation de la date du choc	73
3.8	Comparaison des solutions du cas « open-loop », du cas « open-loop » par morceaux et du cas « feedback » : Variation de l'intensité du choc	77
4.1	Cadre administratif de la Beauce. Source : [104]	90
4.2	Carte piézométrique de la nappe de Beauce, basses eaux 1994. Source : [105]	91
4.3	Coupe 1. Source : [105]	91
4.4	Coupe 2. Source : [105]	92
4.5	Répartition géographique des assolements [10]	93
4.6	Evolution du niveau piézométrique de la nappe de Beauce, en Beauce Centrale, entre 1975 et 2011. Source [51]	94
4.7	Zone d'étude : Beauce Centrale. Source : [51]	96
4.8	Typologie des exploitations agricoles	99
D.1	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) du blé tendre sur sol moyen/profond en type d'année sèche.	148
D.2	Tableau de sortie de la regression quadratique.	148
D.3	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) du blé tendre sur sol moyen/profond en type d'année normale.	149

D.4	Tableau de sortie de la regression quadratique.	149
D.5	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) du blé tendre sur sol moyen/profond en type d'année humide.	150
D.6	Tableau de sortie de la régression quadratique.	150
D.7	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de l'orge de printemps sur sol moyen/profond en type d'année sèche.	151
D.8	Tableau de sortie de la regression quadratique.	151
D.9	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de l'orge de printemps sur sol moyen/profond en type d'année normale.	152
D.10	Tableau de sortie de la regression quadratique.	152
D.11	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de l'orge de printemps sur sol moyen/profond en type d'année humide.	153
D.12	Tableau de sortie de la regression quadratique.	153
D.13	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de la betterave sur sol moyen/profond en type d'année sèche.	154
D.14	Tableau de sortie de la regression quadratique.	154
D.15	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de la betterave sur sol moyen/profond en type d'année normale.	155
D.16	Tableau de sortie de la regression quadratique.	155
D.17	Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de la betterave sur sol moyen/profond en type d'année humide.	156
D.18	Tableau de sortie de la regression quadratique.	156

Liste des tableaux

1.1	Types des principales sécheresses depuis 1976 en France. Source [1]	4
2.1	Types de chocs déterministes.	33
2.2	Types de chocs stochastiques.	34
2.3	Valeurs de paramètres de l'aquifère La Mancha Occidentale.	40
2.4	Bien-être social quand $t_a = 20$ ans en milliers d'Euros (valeurs arrondies) pour différentes valeurs de r_2 et dans différents intervalles de temps.	42
2.5	Bien-être social (en milliers d'Euros) pour différents valeurs de r_2 et t_a	43
2.6	Bien-être social en milliers d'Euros du problème avec adaptation en $t = t_a$ et avec adaptation en $t = 0$ pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an ayant lieu en $t_a = 20$ ans.	45
2.7	Bien-être social (en milliers d'Euros) pour différentes valeurs de r_2 et θ	47
2.8	Bien-être social en milliers d'Euros des cas stochastiques pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an ayant lieu en $t_a = 20$ ans, avec une probabilité d'occurrence immédiate de $\theta = 0.05$	48
2.9	Différence de bien-être social entre le cas déterministe et le cas stochastique avec adaptation en milliers d'Euros pour différentes valeurs de r_2 et (t_a, θ)	51
2.10	Différence de bien-être social entre le cas déterministe et le cas stochastique sans adaptation en milliers d'Euros pour différentes valeurs de r_2 et (t_a, θ)	53
3.1	Valeurs de paramètres de l'aquifère La Mancha Occidentale.	65
3.2	Écarts entre les solutions du stock en millions de m^3 à l'état stationnaire.	72
3.3	Écarts entre les solutions du stock en millions de m^3 à la date d'occurrence du choc $t_a = 20$	72
3.4	Bien-être des différentes solutions en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2$ varie et la date d'occurrence est fixe, $t_a = 20$	72
3.5	Écarts de bien-être en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2$ varie et la date d'occurrence est fixe, $t_a = 20$	73
3.6	Écarts entre les solutions du stock à l'instant t_a (G_{ta}) en millions de m^3 pour un choc de 70 Mm^3 /an, ayant lieu à différentes dates t_a	73
3.7	Bien-être des différentes solutions, en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2 = 70 Mm^3$ est fixe et la date d'occurrence varie.	74
3.8	Écarts des bien-être en milliers d'euros issus des différentes solutions lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2 = 70 Mm^3$ est fixe et la date d'occurrence varie.	74
3.9	Bien-être des différentes solutions en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc est de $r_1 - r_2 = 70 Mm^3$ et la date d'occurrence est $t_a = 20$ ans.	77
4.1	Valeurs des paramètres.	98
4.2	Valeurs des coefficients de la fonction de demande en eau selon le scénario réalisé.	98
4.3	Valeurs des volumes d'irrigations au printemps w_p^i et en été w_e^i des autres exploitations-type selon le scénario réalisé (année normale, sèche sans restrictions, sèche avec restrictions 0.6 et 0.3) (en millions de m^3).	99
4.4	Résultats scénario de référence année normale (2010).	103
4.5	Résultats scénario année sèche sans restriction.	103

LISTE DES TABLEAUX

4.6	Résultats scénario année sèche avec restriction 0.6.	105
4.7	Résultats scénario année sèche avec restriction 0.3.	105
4.8	Comparaison de modèles en cas de coefficients de réductions (CR) 0.6 et 0.3. Cultures : Betterave(B), blé tendre (BT), orge de brasserie (OB), orge d'hiver (OH).	106
4.9	Résultats scénario Orge d'hiver année sèche avec restriction 0.3.	107
4.10	Résultats scénario coût de pompage nul.	108
4.11	Résultats scénario augmentation coût de pompage.	109
4.12	Comparaisons des politiques de taxation et restriction.	109
D.1	Types de saison climatique.	147
D.2	Résultats scénario augmentation coût de pompage x5.	157
D.3	Résultats scénario augmentation coût de pompage x10.	157
D.4	Résultats scénario augmentation coût de pompage x20.	157

CHAPITRE 1

Chapitre introductif

Sommaire

1.1 Définitions et contexte	1
1.1.1 La notion de sécheresse	1
1.1.2 Ressources en eaux souterraines utilisées pour l'irrigation	5
1.2 Revue de littérature	7
1.2.1 Stratégies d'adaptation des agriculteurs aux sécheresses	7
1.2.2 La gestion des ressources en eaux souterraines	11
1.3 Problématique	17
1.4 Méthodologie	18
1.4.1 Théorie du contrôle optimal	18
1.4.2 Théorie des jeux	26

1.1 Définitions et contexte

1.1.1 La notion de sécheresse

Différentes définitions pour différentes disciplines

Qu'est ce que la sécheresse ? Nous pouvons retrouver la notion du terme « sécheresse » dans de nombreuses sources :

« *La sécheresse est l'absence ou l'insuffisance de pluie pendant une certaine période* », Dictionnaire Larousse ([99]),

« *La sécheresse (ou sècheresse) est l'état normal ou passager du sol et/ou d'un environnement, correspondant à un manque d'eau, sur une période significativement longue pour qu'elle ait des impacts sur la flore naturelle ou cultivée, la faune sauvage ou les animaux d'élevage.* », Wikipedia ([100]),

« *Une sécheresse est une longue période sans précipitations qui a lieu, en particulier, pendant la saison de plantation.* », Wilhite and Glantz (1985) ([87]),

« *Le terme général de sécheresse recouvre des notions différentes. En premier lieu, dans son acception générale, elle est bien sûr toujours liée à un déficit de la pluviométrie. Toutefois, lorsque ce déficit est systématique, on parle d'aridité. Hors de ces zones désertiques ou arides, la sécheresse est plutôt ressentie comme un épisode, et classée, par les climatologues, dans la catégorie des événements extrêmes. Elle se définira alors par l'intensité de sa déviation par rapport aux valeurs moyennes ou normales de pluviométrie, avec des éléments quantitatifs sur sa durée, sa période d'occurrence et son extension géographique.* », Amigues et al. (2006) ([1]).

En général, nous constatons que dans la littérature existante la notion de sécheresse est définie de plusieurs façons, selon la discipline concernée.

Plusieurs classements sont ainsi proposés. Dans le rapport d'expertise « Sécheresse et Agriculture » (voir [1]), Amigues et al. (2006) classent les sécheresses en deux grandes catégories : la sécheresse hydrologique, qui a lieu à cause d'une faible pluviométrie en automne et en hiver, et la sécheresse édaphique, qui se produit lorsque les pluies de printemps et d'été sont insuffisantes. La première a comme conséquence un remplissage peu abondant des ressources en eau pour l'irrigation, et donc affecte l'agriculture irriguée. La seconde amène à un remplissage peu abondant des réserves en eau du sol (ou réserve utile (RU¹), affecte surtout l'agriculture pluviale (ou non-irriguée), et dans une moindre mesure l'agriculture irriguée.

Dans le rapport CLIMSEC (voir [80]), Souveyroux et al. (2011) distinguent différents types de sécheresse identifiables au cours du cycle hydrologique : les sécheresses météorologiques, relatives aux variables atmosphériques et principalement aux précipitations ; les sécheresses agricoles, relatives au contenu en eau des sols ; les sécheresses hydrologiques, relatives notamment au débit des rivières.

Wilhite and Glantz (1985) [87] analysent 150 définitions du terme « sécheresse » et parviennent à les classer en 4 types : les sécheresses météorologiques, agricoles, hydrologiques ou socio-économiques. En premier lieu, les définitions de sécheresse **météorologique** font référence à la durée et l'intensité de la période sèche. Par exemple, Byun and Wilhite (1999) [9], définissent une période de sécheresse par :

- les jours consécutifs sans précipitation,
- les jours consécutifs avec un niveau bas de précipitation,
- un niveau faible de précipitation pendant une période de temps spécifique.

Ces définitions sont prises en compte différemment dans les études scientifiques. Quand on parle de « niveau bas de précipitation », on peut faire référence à des précipitations journalières inférieures à 2-5 millimètres (mm). Quand on définit le terme « sans précipitation », quelques scientifiques se réfèrent à des précipitations journalières inférieures à 2 mm. Ces seuils sont généralement fixés en fonction de la zone d'étude. Finalement, l'expression « jours consécutifs » peut faire référence à des périodes qui vont de 15 jours à quelques mois (voir Byun and Wilhite (1999) [9]). En général, la sécheresse est définie sur une période d'un mois ou d'une saison.

En comparaison, les définitions de sécheresse **agricole** font plutôt référence à l'impact des conditions météorologiques (comme le manque de précipitations) sur l'agriculture. En fait, la demande en eau d'une plante dépend non seulement des conditions météorologiques, mais des caractéristiques biologiques de la plante comme l'évapotranspiration², du stade de croissance de la plante, et des conditions d'humidité du sol. Par exemple, le rendement final de la plante n'est pas forcément affecté par un déficit d'humidité des sols si la plante est à un stade initial de croissance avec un faible besoin en eau, mais si le déficit est continu dans le temps, il peut causer une perte importante des rendements. En résumé, l'intensité d'une sécheresse agricole peut être représentée par la différence entre les besoins en eau de la plante et l'eau disponible dans le sol (voir Wilhite and Glantz (1985) [87]).

Les définitions de sécheresse **hydrologique** concernent plutôt les effets des périodes sèches sur les réservoirs en eaux de surface et/ou les ressources en eaux souterraines. Par exemple, une sécheresse hydrologique peut être définie comme une année pendant laquelle le flux du réservoir est inférieur à la moyenne, ou lorsque le niveau d'eau atteint un seuil de

1. L'eau du sol utilisable par les plantes constitue la réserve utile (RU), (voir Rieul et al. (2003) [70]).

2. L'ETP (Évapotranspiration potentielle) est définie comme la quantité d'eau évaporée par une culture dans l'atmosphère n'ayant pas subi des restrictions hydriques (voir Rieul et al. (2003) [70]).

risque déterminé par les gestionnaires (voir Wilhite and Glantz (1985) [87]).

Enfin, les définitions de sécheresse **socio-économique** sont associées à un problème de déséquilibre entre l'offre et la demande d'un bien économique (l'eau) (voir Wilhite and Glantz (1985) [87]). La plupart des définitions de sécheresses météorologique, agricole et hydrologique présentées précédemment font donc partie de ce groupe de définitions. Par exemple, on peut définir la sécheresse agricole comme une période de pénurie d'eau nocive pour les activités agricoles. Elle est présentée donc comme une interaction entre activité agricole (demande) et événements naturels (offre), interaction qui amène à un volume d'eau insuffisant par rapport aux besoins des cultures.

Avec ces classifications en tête, il est important de distinguer entre les phénomènes de sécheresse et les situations de manque d'eau ou d'aridité, événements qui sont parfois confondues. Si nous considérons la sécheresse juste comme un phénomène de manque d'eau, on oublie alors une de ses principales caractéristiques, son caractère « anormal », c'est à dire, le fait que cet événement ne soit pas habituel dans la région considérée. Par contre, si un manque d'eau est considéré comme normal dans une région, on parle alors de phénomène d'aridité. En effet, une situation de sécheresse extrême se produit dans un cadre caractérisé par un degré d'incertitude important (cf. [92]). De fait, la prise de décisions face à ce risque n'est pas évidente (voir détails section 1.2.2). Par exemple, une sécheresse peut apparaître et/ou disparaître de façon plus ou moins rapide. Une définition dans laquelle ce dernier aspect est pris en compte est la suivante : une sécheresse **hydrologique** est un « type de sécheresse qui survient lorsqu'une longue sécheresse météorologique provoque une brusque diminution du niveau des eaux souterraines, des rivières, des fleuves et des lacs » (définition dictionnaire Environnement [98]).

La définition adoptée dans cette thèse

Dans les chapitres 2 et 3, on considère justement cette notion de sécheresse hydrologique, en modélisant celle-ci comme un choc (ou changement de régime) sur la gestion de la ressource. On appelle changements de régimes (en anglais « regime shifts »), les changements importants, intervenant de manière soudaine à caractère persistant, modifiant la structure et la fonction des systèmes socio-écologiques, i.e. ayant une influence significative sur l'approvisionnement futur des services écosystémiques fournis par ces systèmes (voir [101]). Plus précisément, dans ces chapitres, le changement de régime correspond à une diminution du taux de recharge naturelle de la nappe, c'est à dire, une baisse de la disponibilité en eau provenant de la ressource. Il est justement important de mieux comprendre ce type de chocs car ils peuvent avoir des impacts significatifs sur les activités économiques, (en particulier, sur l'activité agricole) et sur la ressource en eau utilisée.

Parmi les définitions utilisées dans la littérature existante sur les sécheresses, nous considérons donc la sécheresse comme un événement qui se produit de manière soudaine dans une zone géographique pendant une période déterminée, allant d'une à plusieurs saisons agricoles, à cause d'un manque de précipitations. Il est donc important de distinguer les effets des sécheresses à court terme (à l'échelle interannuelle) et à long terme (à l'échelle pluriannuelle). La sécheresse résulte d'un déficit d'eau de surface ou souterraine pour l'activité agricole. Ce déficit affecte en premier lieu l'humidité des sols (sécheresse agronomique). Si la sécheresse persiste, elle peut causer des problèmes structurels comme un manque d'eau dans les réservoirs ou ressources en eaux souterraine (sécheresse hydrologique). Si nous reprenons donc le dernier classement réalisé par Wilhite and Glantz (1985) [87], on parlerait

de sécheresse agronomique à court terme et de sécheresse hydrologique à long terme. Nous utiliserons cette définition tout au long de cette thèse, en étudiant les conséquences d'une sécheresse hydrologique sur la gestion optimale d'une nappe souterraine dans le chapitre 2 et 3, puis les conséquences d'une sécheresse agronomique au niveau d'une exploitation agricole dans le chapitre 4.

Dans ces chapitres, nous nous concentrons sur deux zones d'études liées à deux aquifères : L'aquifère de la Mancha Occidentale situé dans le sud de l'Espagne, et l'aquifère de la Beauce située dans le centre de la France. Les deux aquifères se situent dans des zones climatiques contrastées avec des sécheresses fréquentes. Une typologie des différentes sécheresses ayant eu lieu en France (1976-2005) est présentée dans le tableau 1.1 ci-dessous. A partir de ce tableau (et du travail réalisé dans le chapitre 4), on peut noter que la zone de la Beauce a dû faire face à des sécheresses importantes les dernières décennies (entre autres exemples, 1976, 1985, 1986, 1992, 1995, 1996, 2003, 2005, 2006, 2009 et 2011) de différente nature : agronomique ou hydrologique. En Espagne, la situation est plus sévère : toutes les régions subissent régulièrement des épisodes de sécheresse (avec une intensité plus ou moins forte). En particulier, la zone de l'aquifère Ouest de la Mancha se caractérise par une pluviométrie faible (400-500 mm en moyenne par an) et irrégulière, et par une évapotranspiration élevée (700-850 mm en moyenne par an) due au nombre important de jours ensoleillés (cf. López Sanz (1993) [54]), ce qui donne lieu à une recharge efficace très faible de l'aquifère (autour de 20 % des précipitations). Cela implique des épisodes de sécheresse durables, comme par exemple les périodes 1980-1985 et 1990-1996 (cf. Olcina Cantos (2001) [63]).

Type	1976	1979	1985	1986	1989	1990	1991	1992	1996	2003	2004	2005
hydrologique								X				
édaphique		X Méditerr.	X Centre & Sud	X Centre & Sud		X Ouest & Sud	X Nord			X 2/3 du territoire		
succession hydrologique/ édaphique	X Nord				X Ouest				X Nord & Ouest		X Sud	X 2/3 du territoire

Tableau 1.1 – Types des principales sécheresses depuis 1976 en France. Source [1]

Après avoir établi la définition de sécheresse que nous allons utiliser dans ce travail, nous nous intéressons en particulier à l'impact des sécheresses sur l'activité agricole. Dans ce contexte, l'irrigation constitue un moyen fréquemment utilisé par le secteur agricole pour se prémunir contre les sécheresses. Il est donc nécessaire de bien connaître les caractéristiques et les enjeux du type de ressource utilisée pour l'irrigation : Nappe d'eau souterraine, rivières (ou cours d'eau) ou réservoirs artificiels, (cf. Itier (2008) [44]). Dans notre étude, nous nous intéressons avant tout au cas des nappes ou ressources en eau souterraines. Cela motive la section suivante.

1.1.2 Ressources en eaux souterraines utilisées pour l'irrigation

Quelques faits

Quelques chiffres pour donner une idée de l'utilisation actuelle de ce type de ressource dans le monde :

- *Prélèvement d'eaux souterraines 900-1000 km³/an (Shah (2005) [79]);*
- *Consommation mondiale d'eaux d'irrigations 1277 km³/an, dont 43 % représentent des eaux souterraines (Madramootoo (2012) [57]);*
- *39% des surfaces équipées pour l'irrigation utilisent des ressources souterraines (Madramootoo (2012) [57]).*

En particulier, quelques chiffres pour préciser la situation en France et en Espagne :

- *En 2010, 28.3 milliards de m³ d'eau douce sont prélevés en France métropolitaine, dont 11% pour l'irrigation. 22% de ces prélèvements sont effectués dans les eaux souterraines (cf. [108]);*
- *En 2000, en Espagne, l'utilisation en eau souterraine est estimée à environ 6500 millions de m³/an, volume avec lequel 1 million d'hectares sont irrigués (le 30 % de surfaces irrigables) [76].*

Depuis 1950, l'utilisation de l'eau souterraine a connu une croissance très rapide, croissance due en grande partie aux innovations liées aux technologies de pompage. Par exemple, aux États-Unis, la consommation en eau souterraine pour l'irrigation a augmenté de 23 % en 1950 à 42 % en 2000 (Shah (2005) [79]). En parallèle à cette croissance, des changements dans les systèmes d'irrigation ont eu lieu pendant ces dernières décennies. Conçus initialement pour l'exploitation des eaux de surfaces, ces systèmes sont remplacés progressivement par des systèmes de forages individuels (ou collectifs) pour l'exploitation des eaux souterraines (Bouarfa et al. (2012) [5]).

Les enjeux de l'utilisation pour l'agriculture des ressources en eaux souterraines sont nombreux (voir Madramootoo (2012) [57]). Nous pouvons décrire certains d'entre eux :

- *Autonomie de l'irrigant (ou du groupe d'irrigants) : L'accès à l'eau souterraine se fait essentiellement à partir de forages individuels. Cependant, des arrangements au sein de collectifs d'agriculteurs peuvent avoir lieu, on parle alors d'investissement partagé (forage de puits, pompe, moteur).*
- *Fiabilité de l'eau souterraine : L'agriculture irriguée expérimente un manque de fiabilité des traditionnels réseaux de canalisation. L'eau est fournie à des taux et à des dates parfois inappropriés aux besoins des cultures et des agriculteurs. L'eau souterraine est souvent plus fiable car elle peut être extraite selon les besoins, et permet donc aux agriculteurs de gérer leurs propres irrigations.*
- *Flexibilité dans les choix d'assolement : Assumer une fourniture fiable de en eau permet une flexibilité des choix d'assolements. Les agriculteurs peuvent alors choisir parmi un plus grand nombre de cultures, ce qui favorise la diversification.*
- *Dispositif de protection contre la sécheresse : Quand une sécheresse a lieu et que les réseaux de distribution sont limités, l'eau souterraine peut être utilisée comme un supplément d'eau pour l'irrigation afin d'assurer la régularité interannuelle des rendements dans les sols superficiels et peu profonds, et comme un complément d'eau dans le cas des sols profonds où les réserves en eau sont insuffisantes (Foudi et Erdlenbruch (2011) en [32]).*

- *Efficacité* : Plusieurs travaux (LLamas et Martínez-Santos (2005) [55]) soulignent que les systèmes en eaux souterraines sont économiquement plus efficaces que les systèmes de surface. En effet, de manière générale, l'usage de l'eau souterraine en agriculture irriguée est souvent considérée comme un facteur d'augmentation de la productivité.

En revanche, une des conséquences de ce remplacement progressif des eaux de surface par les eaux souterraines est la baisse du niveau des nappes qui était initialement, abondantes en eau (voir Bouarfa et Kuper (2012) [5]). De plus, nous verrons dans la section suivante 1.2.2, que le régime d'exploitation souvent utilisé pour ce type de ressource (nommé régime de propriété commune) fait apparaître des problèmes concernant sa gestion durable³ Le manque de contrôle des prélèvements individuels, le manque de données sur les caractéristiques de l'aquifère, ainsi que sur les recharges ou sur les niveaux de stock (Madramootoo (2012) [57]) rendent la tâche des gestionnaires de la ressource de plus en plus complexe.

En effet, une gestion efficace de la ressource passe aussi par la connaissance des caractéristiques de l'aquifère. Un aquifère est une formation hydrogéologique perméable, constituées de roches poreuses déposées en vastes couches, avec une surface supérieure contenant de l'eau, la nappe⁴(cf. [110], [109]). En général, les nappes peuvent se distinguer :

- selon leur taille ou capacité, qui dépend entre autre de la surface occupée, de la profondeur et du coefficient de stockage...
- selon la perméabilité des formations géologiques : On dit qu'elles sont « libres » si la surface d'eau supérieure fluctue sans contrainte, et « captives » quand la partie supérieure de la nappe est limitée par une couche imperméable qui confine l'eau (voir [109]). Cette notion est importante dans la mesure où, si l'on crée un puits dans une nappe libre, le niveau de l'eau reste inchangé. Par contre, la création d'un forage dans une nappe captive entraîne une variation du niveau de l'eau.

Les types de nappes étudiées dans cette thèse

Les deux nappes que nous étudierons dans cette thèse sont des nappes dans leur majorité « libres », ce qui facilite l'accès à l'eau. En revanche, ils se différencient par la taille (5000 km² pour la Mancha Occidentale et 9700 km² pour la nappe de Beauce) et surtout par la problématique de gestion. Dans la Mancha Occidentale, l'augmentation des extractions en eaux souterraines pour l'irrigation (liée à l'absence de réglementation sur cet usage) a entraîné une baisse importante des niveaux piézométriques de la nappe, et donc une augmentation importante des coûts de pompage pour les utilisateurs de la nappe. En revanche, la Nappe de Beauce possède un système de régulation depuis la sécheresse de 1999, la gestion volumétrique ou par quotas. Ce système se base sur l'attribution d'un volume d'eau annuel à chaque exploitation en fonction de ses caractéristiques, volume qui peut être réduit par un coefficient de restriction en fonction des niveaux observés de la nappe en début de période d'irrigation. Néanmoins, depuis 1999, la forte variabilité des niveaux piézométriques observés peut créer un doute sur l'efficacité du système.

En résumé, gérer de façon efficace une ressource en eau souterraine sujette à des sécheresses, est un problème complexe, dépendant de nombreux facteurs (type d'accès, type

3. On entend par gestion durable des ressources, « une gestion écologiquement viable afin de répondre aux besoins sociaux, économiques, écologiques, culturels et spirituels des générations futures » (Conférence CNUED « Sommet de la Terre », Rio, Juin 1992).

4. Par simplicité, dans la suite du texte, les termes nappe et aquifère sont utilisés de façon équivalente

de nappe, type d'informations sur les caractéristiques de l'aquifère...) et des comportements d'adaptation des différents acteurs, utilisateurs et gestionnaires de la ressource. Les idées que nous avons résumées précédemment motivent donc la suite de notre travail. Dans la section suivante, nous effectuons une revue de la littérature sur les stratégies d'adaptation des agriculteurs aux sécheresses et sur la gestion d'une ressource en eau souterraine.

1.2 Revue de littérature

1.2.1 Stratégies d'adaptation des agriculteurs aux sécheresses

Dans cette partie, nous allons distinguer différents types de stratégies d'adaptation des agriculteurs : les stratégies individuelles et les stratégies collectives (pour un réseau d'agriculteurs). Nous allons commencer par considérer les stratégies individuelles de nature purement hydrologiques, agronomiques et économiques, puis nous allons expliquer comment ces stratégies sont étudiées dans la littérature économique sur les stratégies d'adaptation aux sécheresses. Nous concluons en décrivant des exemples de stratégies collectives contre le risque sécheresse. On note ici que, lorsqu'on parle de stratégie collective, on fait référence aux arrangements possibles entre agriculteurs pour lutter contre le risque de la sécheresse. Il faut différencier cette notion de la définition de politique publique, c'est à dire, de l'ensemble d'actions mises en œuvre par les institutions ou administrations publiques pour faire face à la sécheresse, que nous décrirons dans la section 1.2.2 pour les cas de la France et de l'Espagne.

Stratégies individuelles

La stratégie individuelle de l'agriculteur est basé dans la maximisation de son profit. Pour cela, il dispose d'information de différentes natures : hydrologiques, agronomiques et économiques. Nous parlons donc de stratégies purement hydrologiques lorsque les agriculteurs disposent d'une structure d'information liée à l'utilisation d'une ressource commune en eau pour l'irrigation. En revanche, l'agriculteur peut aussi appliquer des stratégies agronomiques, liées par exemple au choix des calendriers d'irrigation, ou d'assolement, ou des stratégies liées au système économique de son exploitation. Nous décrivons de façon détaillée ces différents types de stratégies ci-dessous.

Stratégies purement hydrologiques

Dans cette section, nous définissons différents types d'équilibres correspondant à différentes structures d'informations et donc à différentes stratégies d'extractions des agriculteurs. En premier lieu, il est nécessaire de définir le concept suivant d'équilibre de Nash.

Un **Équilibre de Nash** est un ensemble de M stratégies ou plans d'extractions correspondant à M agriculteurs, dans lequel chaque agriculteur j maximise son profit compte-tenu des stratégies des autres $M-1$ utilisateurs de la ressource (cf. Dockner et al. (2000) [21]).

Ils existent différents types d'équilibres de Nash en fonction de la structure d'information retenue. En d'autres mots, la nature de l'équilibre dépend de l'inclinaison des agriculteurs à suivre une stratégie de « sentier » (équilibre en « open-loop ») ou une stratégie qui est une règle de décision (équilibre en « feedback », aussi appelé équilibre de Markov).

- **Équilibre en « open-loop » (OL)** : Les utilisateurs de ressource s'engagent à la date initiale à suivre une stratégie d'extraction sur l'intégralité de l'horizon de planification.

Ainsi, chaque utilisateur maximise son profit en supposant que les stratégies utilisées par le reste des utilisateurs dépendent du temps.

Le problème de cette solution est la difficulté pour la mettre en place car elle exige un haut niveau d'engagement entre les utilisateurs de la ressource tout au long de l'horizon de planification. En pratique, les agriculteurs observent le niveau de la ressource, ils examinent le comportement de leurs rivaux et ils agissent de façon à maximiser leur propre bénéfice individuel (cf. Negri (1989) [61]).

- **Équilibre en « feedback » (FB)** : L'agriculteur maximise son profit en supposant que les stratégies utilisées par les autres agriculteurs dépendent non seulement du temps, mais du niveau de la ressource en eau.

En résumé, la différence principale entre la structure d'information en « open-loop » et la structure d'information en « feedback » est que, les solutions en « open-loop » sont considérés « statiques » dans le sens où les décisions sont prises à la date initiale sans prendre en compte l'évolution de la variable d'état dans le temps. En revanche, les stratégies d'équilibre en « feedback », à tout moment t , sont des fonctions qui dépendent des valeurs de la variable d'état à cet instant t , (cf. He et al. (2007) [40]).

Dans ce contexte, dans le chapitre 3, nous analyserons différents comportements individuelles d'adaptation aux sécheresses selon la structure d'information dont disposent les agriculteurs : « open-loop » et « feedback ».

Stratégies purement agronomiques

Les stratégies agronomiques sont liées à la réserve utile de sols et à l'accès à l'irrigation. Dans des systèmes de cultures non-irrigués, la gestion efficace d'une exploitation agricole passe par la diversification des cycles culturaux et des espèces. Une typologie des systèmes de cultures envisageables peut être réalisée en fonction de la réserve utile du sol (sols superficiels, moyennement profonds et profonds). Dans les systèmes de cultures irriguées, cas d'étude de notre travail, l'irrigation est justifiée dans les sols profonds où les réserves en eau sont insuffisantes, ainsi que dans les sols superficiels et peu profonds pour assurer la régularité interannuelle des rendements (voir Amigues et al. (2006) [1]).

Dans le chapitre 4, nous étudierons les stratégies d'adaptation aux sécheresses d'une exploitation agricole de la zone de la Beauce. Un point important sera donc de savoir si l'agriculteur a accès à l'irrigation. Quand l'accès n'est pas un problème, les cultures à fort besoin en eau (maïs, soja) et à forts rendements sont utilisées, il s'agit alors d'optimiser les **calendriers d'irrigation** via les différents **choix des techniques d'irrigation**. Quand la ressource en eau est limitée, il s'agit plutôt de trouver les bons **choix d'assolement** entre les cultures. On peut dire que l'adaptation des calendriers d'irrigation et l'assolement des cultures sont les stratégies agronomiques couramment utilisés face à un risque climatique comme la sécheresse. Nous les retrouvons de plus sur la littérature économique de l'adaptation des agriculteurs aux sécheresses (cf. Reynaud (2009) [69]).

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons surtout à comment la problématique de l'adaptation des agriculteurs aux sécheresses est traitée dans la littérature de l'économie de la production agricole et de l'économie des ressources. Nous retrouvons toujours deux catégories pour déterminer le comportement optimal des agriculteurs face à ce risque climatique : les stratégies à court terme (pendant la campagne agricole) et celles à long terme (à une échelle pluriannuelle). Nous retrouvons cette approche dans Reynaud (2009) [69]. Dans cet article, un modèle dynamique stochastique (dépendant de l'aléa climatique) est utilisé pour analyser les capacités techniques d'adaptation de l'agriculteur au risque de sécheresse via des

décisions individuelles. Une distinction est faite entre les capacités de court terme (choix d'eau, d'engrais, de pesticides) et celles de long terme (choix d'assolement des cultures et des technologies d'irrigations).

A court terme, c'est à dire lors de la campagne agricole annuelle, le choix des cultures et des techniques d'irrigation est déjà effectué donc les seuls variables d'ajustements face au risque sont l'eau, l'engrais et les pesticides. Nous nous intéressons, en particulier, à la littérature sur l'adaptation via des décisions d'irrigations (voir Bontemps et Couture (1999) [3], Bryant et al. (1993) [7], Dudley (1972) [22], Rao et Sarma (1990) [68], Yaron et Dinar (1982) [89], entre autres références). Par exemple, Bontemps et Couture [3] développent un modèle économique de programmation dynamique dans lequel les variables de contrôle sont les différentes étapes de décision d'irrigations lors d'une campagne agricole. L'agriculteur prend la décision d'irriguer ou de ne pas irriguer à chaque étape. De plus, s'il décide d'irriguer, il doit choisir la quantité d'eau utilisée. Le modèle permet donc des possibilités d'adaptation au risque tout au long de la campagne. Yaron et Dinar (1982) [89] construisent un modèle de programmation dynamique (PD) qui calcule l'allocation optimale de l'eau lorsque sa disponibilité est limitée. L'originalité de l'approche est la construction de différents calendriers d'irrigation en fonction de différents prix implicites⁵ de l'eau, obtenus à partir d'un modèle économique de programmation linéaire. En résumé, les différentes études montrent que, en conditions de ressource en eau limitées, la gestion optimale de l'eau d'irrigation permet d'obtenir non seulement des profits élevés pour les agriculteurs mais également des économies d'eau vis à vis de la ressource.

A long-terme, i.e. à une échelle pluriannuelle, l'agriculteur a un plus grand nombre de possibilités d'adaptation au risque de la sécheresse, surtout en ce qui concerne les choix des cultures et des techniques d'irrigation (voir Stoecker et al. (1985) [81], Zilberman et Dinar (2003) [91]). Par exemple, en ce qui concerne les technique d'irrigations, Zilberman et al. (2003) [91] analysent l'impact de la sécheresse de 1987-1991 en Californie. Les auteurs expliquent que pendant les trois premières années de la sécheresse, les agriculteurs ont été peu affecté par celle-ci grâce aux réservoirs d'eau. Par contre, les deux dernières années voient une augmentation des extractions souterraines et l'utilisation de technologies LVI (en anglais « Level volume irrigation ») comme le goutte à goutte et le micro-arrosage pour économiser l'eau. Quant aux choix d'assolements, il faut noter qu'il existe des cultures plus ou moins sensibles à la sécheresse. Le colza et le tournesol sont par exemple peu sensibles, en comparaison avec le blé qui est moyennement sensible, ou avec le sorgho et le maïs qui sont assez sensibles. Un exemple du type d'adaptation concernant les choix d'assolements est la baisse de surfaces en maïs et leur reconversion en fourrages ayant lieu en France pendant la sécheresse de 2003 en comparaison des années précédentes, (voir Amigues et al. (2006) [1]).

Stratégies purement économiques

Si on s'intéresse aux stratégies d'adaptation purement économiques, d'autres modes d'action contre la sécheresse sont à l'ordre du jour : les indemnités de pertes et les assurances. Par exemple, en France, deux types de compensation de pertes existent : le régime des calamités agricoles (compensation publique) et l'assurance privée multirisque. Dans le cas du régime des calamités agricoles, le ratio correspondant aux dommages payés en fonction des pertes totales est assez bas, d'environ 30 % en moyenne. Quant à l'assurance privée multirisque, elle s'est beaucoup développée ces dernières années et remplace de façon progressive

5. Le prix implicite de l'eau (ou « shadow price » en anglais) représente le prix que l'on est prêt à payer pour une unité d'eau supplémentaire.

le régime des calamités agricole (voir Erdlenbruch et al. (2009) [25]). Cette assurance privée est une assurance sur les rendements d'une culture spécifique, c'est à dire une assurance sur la récolte. En effet, **l'assurance récolte** permet aux agriculteurs de bénéficier d'une meilleure couverture de risques que le dispositif des calamités agricoles et que les contrats d'assurance contre la grêle, grâce aux subventions inscrites dans le cadre de la Politique Agricole Commune (PAC). L'aide consiste en une prise en charge par l'État de 65% des primes d'assurance pour ces contrats. L'assurance récolte concernait ainsi, en 2010, près de 27 % de la surface agricole utile⁶ (SAU), voir [103]. Des travaux comme Foudi et Erdlenbruch (2011) [32], ont été réalisés dans ce contexte. Les auteurs démontrent dans un modèle théorique (avec prise en compte du risque climatique) que l'adoption d'une assurance-récolte diminue la probabilité d'adopter l'irrigation de la part de l'agriculteur. Cela implique que l'assurance récolte et l'irrigation peuvent être des éléments substituables. En revanche, en Espagne, comme c'est le cas aux États Unis et au Canada, les systèmes d'assurances sont beaucoup plus développés qu'en France. Par exemple, le système espagnol est basé sur un modèle en partie public, et en partie privé, dans lequel les associations d'agriculteurs jouent aussi un rôle important. Les agriculteurs profite d'un plus grand nombre de choix d'assurance spécifiques à chaque culture, et de primes d'assurance bénéficiant de subventions publiques dans un pourcentage allant de 20 à 45%. Les dernières années le système a évolué, en proposant des assurances récoltes individuelles par zone géographique pour une grande variété de cultures. Un exemple d'une assurance ayant eu beaucoup de succès auprès des agriculteurs, est l'assurance « sécheresse » (cf. Garrido et Zilberman (2008) [33] pour une description générale).

Stratégies ou actions collectives

Les stratégies collectives ne font pas l'objet de notre étude. Néanmoins, nous voulons citer quelques exemples afin de clarifier le concept. Si nous nous situons dans un cas où les sécheresses sont fréquentes, les mesures à mettre en place seraient plutôt de nature collective, i.e. des arrangements entre groupes ou associations d'agriculteurs au sein d'un territoire. Nous verrons dans la sous-section 1.2.2 que des actions collectives entre agriculteurs permettant de gérer collectivement une ressource en eau commune sont possibles, (Ostrom (1990) [64]). D'autres mesures peuvent consister en la construction de nouveaux réservoirs (ou barrages), mais ceux-ci sont très coûteux pour la société. Une option alternative est la construction de **retenues collinaires**, petits réservoirs privés subventionnés en grande partie par l'État, dont la taille et le coût sont moins importants. Ces retenues sont remplies par les eaux de surface et les eaux de ruissellement, en période hivernale. Elles améliorent la situation des utilisateurs de la ressource (agriculteur ou du groupe d'agriculteurs) dans la période sensible (période estivale), du fait que ce type de ressource n'est pas sujette aux arrêts de sécheresses (Erdlenbruch et Montginoul (2009) [24]).

Dans les chapitre 3 et 4, nous nous concentrons sur des stratégies individuelles d'adaptation aux sécheresses. Nous avons vu précédemment que les extractions en eaux souterraines peuvent constituer une stratégie de long terme face à la sécheresse. Dans le chapitre 3, nous analysons justement ce type de stratégie face à une sécheresse « hydrologique » (de long terme). Quand au chapitre 4, nous étudions non seulement les choix d'irrigation mais aussi le choix d'assolement face à une sécheresse « agronomique » à court terme. En cas de risque climatique, nous avons vu qu'à long terme l'agriculteur a un plus grand nombre de possi-

6. La surface agricole utile (SAU) est un concept statistique destiné à évaluer le territoire consacré à la production agricole (Dictionnaire Environnement [98])

bilités d'adaptation, il est donc plus facile de s'adapter à long terme qu'à court terme (lors de la campagne agricole). Cela justifie la nécessité d'une étude approfondie sur les possibilités d'adaptation lors de la campagne agricole. Nous verrons que la prise en compte de l'état de la ressource utilisée est nécessaire à court terme dans la réalisation des modèles éco-agronomiques, surtout dans le cas d'une ressource commune en eau souterraine. Dans la littérature existante, cette notion n'est pas toujours prise en compte. Cela motive le travail réalisé dans le chapitre 4.

En effet, dans le chapitre 3 et 4, nous nous intéresserons au problème de l'adaptation à la sécheresse en adoptant le point de vue de l'agriculteur individuelle. Dans le chapitre 2, nous analyserons le comportement d'adaptation du point de vue du gestionnaire de la ressource. Pour réaliser ce travail, il est donc nécessaire d'étudier les travaux de la littérature existante sur la gestion des ressources en eaux souterraines. De plus, nous avons déjà annoncé différents types de stratégies individuelles liés à la ressource en eau utilisée. Dans ce qui suit, nous verrons aussi comment ces interactions stratégiques sont introduites dans la revue sur la gestion des ressources en eaux souterraines.

1.2.2 La gestion des ressources en eaux souterraines

Le débat concernant la nécessité d'une intervention pour gérer la ressource

Le problème d'allocation d'une ressource commune en eau souterraine est étudié dans des nombreux travaux relativement récents (Gisser et Mercado (1973) [34], Gisser et Sánchez (1980) [35], Provencher et Burt (1993) [67]...). Ces travaux traitent de l'inefficacité d'exploiter la ressource en absence de contrôle centralisé. En effet, l'exploitation d'une ressource en eau souterraine se fait souvent sous un régime de propriété commune (« Common property regime »). Il se différencie d'un régime « Accès libre » par l'exclusivité de l'usage de l'eau. Plus précisément, sous un régime de propriété commune, l'accès est limité aux propriétaires des terres sus-jacentes à l'aquifère.

L'inefficacité issue de l'exploitation sous un régime de propriété commune provient essentiellement de deux externalités (voir détails en Provencher et Burt (1993) [67]) : l'externalité « coût de pompage » et l'externalité « stock » (aussi appelé externalité stratégique). La première provient du fait que les actions de pompage réalisés par un utilisateur de la ressource, vont faire descendre le niveau de la nappe, ce qui va entraîné une augmentation du coût de pompage pour le reste des utilisateurs. La deuxième s'explique par la contrainte d'une disponibilité limitée du stock de la ressource. De ce fait, la compétition (nommé « loi de capture » dans la littérature) va apparaître entre les utilisateurs de la ressource pour s'approprier de l'eau à travers des pompages dans la nappe.

Dans ce contexte, des travaux ont montré que, en cas d'absence de contrôle centralisé, les agriculteurs vont exploiter la ressource jusqu'au moment où l'aquifère atteint un niveau de stock inacceptable⁷ (Gisser et Mercado (1973) [34]). A ce stade du problème, les irrigants n'ont plus que deux choix : importer de l'eau depuis l'extérieur de l'aquifère ou être restreints à utiliser des quantités inférieurs d'eau via des attributions des droits d'usage de l'eau. En supposant que la surexploitation peut se répéter dans le futur, pourquoi ne pas anticiper le problème et contrôler les extractions dès maintenant ? (Koundouri (2004) [46])

Gisser et Sánchez (1980) [35] vont partir de cette idée pour modéliser ce problème de

7. Quand on parle de niveau de stock inacceptable, nous faisons référence à un niveau où la ressource est en situation de surexploitation, i.e., les extractions dépassent la recharge naturelle de la ressource.

gestion d'un aquifère. Le travail consiste à comparer la solution concurrentielle (aussi appelé solution privée), et la solution de contrôle centralisé. Le problème de gestion centralisée consiste à caractériser la politique d'extraction qui maximise le bien-être social, défini comme la valeur actualisée de la somme des revenus futurs des irrigants. En revanche, la solution concurrentielle consiste à caractériser le taux d'extraction maximisant le profit individuel de l'irrigant (de façon à équilibrer bénéfice et coût marginal d'usage). La question principale est la suivante : la différence entre solution centralisée et solution concurrentielle est-elle si importante qu'elle justifie la gestion centralisée de l'aquifère ?

Pour répondre à cette question, Gisser et Sánchez analysent un modèle d'exploitation se caractérisant par une fonction de demande d'eau d'irrigation linéaire (voir Gisser et Mercado (1973) [34]), une fonction de coût marginal de pompage linéaire dépendant de la hauteur d'eau dans l'aquifère, et une dynamique de la ressource en eau.

La principale conclusion de cet analyse est que la solution concurrentielle est inefficace par rapport à la solution centralisée. Des simulations faites pour le cas du bassin Pecos au Mexique confirment les résultats trouvés. De plus, ils caractérisent les solutions analytiques entre les deux modes de gestion et concluent que la différence est négligeable si la capacité de l'aquifère est grande. Ce résultat est souvent dénommé l'effet Gisser et Sánchez (GSE) ou la règle de Gisser et Sánchez (cf. Koundouri (2004) [46]). Ainsi, si la différence de bien-être issue des exploitations privée et optimale n'est pas suffisamment importante, aucune intervention ne serait justifié.

A la suite de cette analyse, plusieurs études se concentrent sur le GSE (par exemple Feinerman and Knapp (1983) [31], Worthington et al. (1985) [88], Nieswiadomy (1988) [62]). Feinerman et Knapp (1983) [31] réalisent une étude sur le cas d'un aquifère californien et estiment les bénéfices d'une gestion centralisée à moins de 10 %. Une analyse de sensibilité de la valeur actualisée des profits issues de la gestion centralisée de la ressource est faite par Nieswiadomy (1988) [62] sur l'aquifère Texas High Plains, en utilisant différentes valeurs pour les coefficients de la fonction de demande d'eau. La conclusion est encore que la gestion de la ressource semble peu justifiée. Par comparaison, Worthington et al. (1985) [88] présentent un cas empirique dans lequel la différence entre les deux types de régime est potentiellement importante (voir Koundouri (2004) [46] pour une revue détaillé).

La limite du travail de Gisser et Sánchez (1980) [35] est justement qu'ils ne prennent pas en compte l'externalité stock dans le calcul de la solution concurrentielle, en considérant que les utilisateurs de la ressource sont « myopes ». Dans les années 80, l'hypothèse du comportement myope avait déjà été substitué par l'hypothèse du comportement rationnel des joueurs dans la littérature sur l'exploitation des ressources souterraines (voir Koundouri (2004) [46]). Des nombreux papiers (Negri (1989) [61], Provencher and Burt (1993) [67] entre autres) vont prendre en compte cette hypothèse de rationalité dans leurs travaux, et vont se servir de l'outil de la théorie des jeux dynamiques, pour tester la robustesse de l'effet GSE.

La prise en compte des interactions stratégiques et dynamiques entre utilisateurs

La théorie des jeux dynamiques va permettre de modéliser les interactions stratégiques et dynamiques (dépendant du temps) qui apparaissent dans un problème de gestion d'un aquifère (voir Koundouri (2004) [46]). La prise en compte de ces interactions est spécialement intéressante lorsque le nombre d'utilisateurs de la ressource est petit, le poids de chaque stratégie individuelle étant plus important dans le système exploitation de la ressource. Dans les

différents travaux (Negri (1989) [61], Provencher and Burt (1993) [67] entre autres), les auteurs étudient différents types de solutions correspondant à différents stratégies d'extractions sous un régime de propriété commune, les stratégies ou équilibres de Nash : équilibre en « open-loop » et équilibre en « feedback » (voir section 1.2.1 pour les définitions détaillées). Les différents papiers vont montrer l'inefficacité des solution « open-loop » et « feedback » par rapport à l'optimum social (la solution efficace). En particulier, Negri (1989) [61] caractérise analytiquement les différentes externalités qui apparaissent dans un régime de propriété commune (déjà expliquées dans la section 1.2.2) : l'externalité coût de pompage et l'externalité stratégique (ou externalité « stock »). Il compare la hauteur d'eau de la nappe (H) atteint pour différentes solutions à l'état stationnaire : la solution « open-loop » (H_{OL}^*), la solution « feedback » (H_F^*) et l'optimum social correspondant (H_{OS}^*). Il conclut que :

1. la différence $H_{SO}^* - H_{OL}^*$ est positive et représente l'effet de l'externalité « coût de pompage »,
2. la différence $H_{OL}^* - H_F^*$ est positive et représente l'effet de l'externalité « stratégique »,
3. la différence $H_{SO}^* - H_F^*$ est aussi positive et représente l'inefficacité de la solution privée.

Dans ce contexte, dans le chapitre 3, nous réalisons justement cette type d'analyse. En particulier, nous introduisons un changement de régime (ou choc) qui perturbe le système dynamique de la ressource. Nous analysons ensuite les différents comportements d'adaptation selon la structure d'information dont disposent les utilisateurs. Finalement, nous évaluons (à court et à long terme) l'inefficacité des différents équilibres « open-loop » et « feedback » (en termes de stock et de bien-être) par rapport à l'optimum social sur un cas particulier, l'aquifère la Mancha Occidentale.

En résumé, nous avons vu que les différentes comportements d'extraction sous un régime de propriété commune vont entraîner des situations de surexploitation de la nappe par rapport à la solution centralisée. Afin d'étudier la possibilité d'intervenir dans la gestion de l'aquifère, il est nécessaire de calculer le bien-être associé à chaque type de comportement. L'ampleur de cette différence va nous permettre de savoir si l'intervention est justifiée ou pas dans les différentes situations. Si l'intervention est nécessaire, nous verrons dans la section suivante que les différents travaux proposent différentes solutions à l'inefficacité des solution sous un régime de propriété commune : intervention étatique, privatisation, « arrangements institutionnels » collectifs. Nous les décrivons juste de façon générale, car nous nous sommes pas concentrés sur ce type d'analyse dans cette thèse.

Solutions à l'inefficacité de l'exploitation sous un régime de propriété commune

Dans la littérature existante, les différents auteurs justifient le contrôle de l'État ou la privatisation comme solution au problème des communs (cf. Ostrom (1990) [64]).

En premier lieu, de nombreux papiers ont montré que l'intervention étatique est justifiée dans l'exploitation d'une ressource commune en eau, à cause des externalités liées non seulement à la quantité (Provencher et Burt (1993) [67]) mais aussi à la qualité de l'eau, (cf. Roseta-Palma (2003) [73], Esteban et Albiac (2011) [27], Erdlenbruch et al. [26]). Dans ces cas, les politiques recommandées consistent à définir des charges (ou taxes) sur la quantité d'eau pompée ou à attribuer des quotas d'eau aux utilisateurs de la ressource, tout cela ayant pour but de « corriger » l'effet des différentes externalités, et donc de rejoindre la solution de contrôle centralisé (cf. Feinermann and Knapp (1983) [31], Roseta-Palma (2002, 2003) [72], [73]).

En second lieu, une autre solution au problème des communs serait la privatisation. Un exemple de ce type de régime est l'attribution (de la part des différentes firmes) de permis sur le stock d'eau aux utilisateurs de l'aquifère (Provencher et Burt (1993) [67]). Le paquet de permis de chaque firme représenterait son stock privée d'eau souterraine (Koundouri (2004) [46]).

En revanche, Ostrom (1990) [64] montre qu'il existe des situations dans lesquelles la solution ne correspond ni à l'intervention de l'État, ni à la privatisation, mais à des « arrangements institutionnels » qui permettent aux utilisateurs de gérer collectivement la ressource. Parmi les situations de gestion alternative étudiées par Ostrom, on trouve des exemples comme les systèmes de « la huerta » en Espagne et de « la zanjera » aux Philippines, exemples concernant des problèmes de gestion de ressource commune en eau utilisées pour l'irrigation. La similarité entre ces deux systèmes est le rôle central donné à des petites communautés d'irrigants qui déterminent leurs propres règles, qui choisissent les responsables qui vont assurer le respect de ces règles, qui protègent leur propre système et qui maintiennent leurs propres canaux de distributions, (Ostrom (1990) [64]). Il semble pourtant que ces « arrangements institutionnels » n'existent pas dans des systèmes qui sont ouverts vers l'extérieur, i.e. soumis à des changements importants des caractéristiques du système : par exemple l'afflux de population, la modernisation de technologies...

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré uniquement des modèles déterministes. Nous verrons dans la section suivante, que le gestionnaire de la ressource doit faire face à de nombreuses incertitudes qui doivent être prises en compte pour assurer une gestion efficace de la ressource.

Les types d'incertitudes présentes dans la gestion de la ressource

Tsur et Zemel (2014) reprennent en [85] les types d'incertitudes affectant un problème de gestion d'une ressource commune. Les auteurs expliquent comment modéliser ces différents types d'incertitudes, puis caractérisent les différentes solutions du problème selon la nature et le type d'incertitude incorporé. En pratique, ces incertitudes sont diverses : l'horizon de planification, le bénéfice instantané, le taux d'actualisation, la valeur postérieure de planification (ou « scrap value »), le processus de recharge, la réserve initiale, ou la spécification des différentes contraintes du système.

Deux types d'incertitudes émergent : « incertitude due à l'ignorance » (ou incertitude endogène) et « incertitude exogène ». La première est due à une connaissance limitée des participants (propriétaires de la ressource, utilisateurs, régulateurs...) des caractéristiques et généralement, du système économique lié à la ressource. Par exemple, la recharge ou le bénéfice instantané peuvent subir un « choc » (appelé aussi « shift », ou changement abrupt dans la littérature), lorsque le stock dépasse un seuil déterminé. La deuxième est due aux phénomènes liés à la nature. Par exemple, le choc peut dépendre d'un facteur exogène environnemental comme la variabilité météorologique.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons justement à une incertitude exogène concernant l'horizon de planification. En particulier, à l'arrivée d'une certaine date (qui est une variable aléatoire), un événement peut se déclencher. Cet événement consiste en un choc sur la recharge de la nappe qui représente une diminution de la recharge de l'aquifère ou en d'autres mots, un épisode de sécheresse. Comment le gestionnaire de la ressource doit-il agir pour s'adapter le mieux possible à ce dernier phénomène ?

Tsur et Zemel (2014) [85] expliquent que l'introduction de ce type d'incertitude im-

plique une politique d'extraction plus conservatrice, qui est due à un « effet d'impatience » : « si le monde arrive à sa fin demain, et que nous ne pouvons rien faire pour l'éviter, nous exploitons la ressource le mieux possible aujourd'hui, tant que nous le pouvons ». De plus, ils confirment l'intérêt d'étudier les implications économiques de ce type de choc dans la gestion de la ressource. Cela motive le travail réalisé dans le chapitre 2.

Une fois expliqué comment incorporer le risque, en particulier le risque climatique, dans un modèle de gestion d'une ressource, il est pertinent de rappeler que dans ce travail nous étudierons deux aquifères appartenant à deux zones d'études, en Espagne et en France, sujettes à des épisodes de sécheresses. Une description des systèmes de gestion des sécheresses existant dans les deux pays est donc nécessaire.

Des cas concrets de gestion de ressources en eau : la gestion des sécheresses en France et en Espagne.

En France, la gestion de l'eau est essentiellement « quantitative », i.e., elle mise sur la régulation des quantités. De plus, elle fait une distinction entre les politiques structurelles concernant la gestion de la demande du secteur agricole, et les politiques conjoncturelles comme les restrictions d'usage.

Les politiques à caractère structurel.

Les autorisations de prélèvements données par les pouvoirs publics, les quotas d'irrigations mis en place dans certaines régions et la mise en place des volumes prélevables sont par exemple des politiques à caractère structurel (et sont en cours de réforme). Les autorisations de prélèvements sont demandées par les irrigants en début de campagne (octobre). Ces autorisations se traduisent par des droits d'utilisations (ou quotas d'eau) individuels ou collectifs (pour les agriculteurs appartenant à une structure collective⁸). De plus, depuis la loi de 2006, la somme des autorisations de prélèvements dans une zone ne doit pas dépasser un volume prélevable défini. Dans ce contexte, le rôle de l'État se réduit à revoir les activités de prélèvements de manière à ce qu'elles soient adaptées aux ressources disponibles, et à vérifier le respect de ces mesures.

Les politiques à caractère conjoncturelles.

Les politiques de restriction ou de suspension d'usages sont des exemples de politiques conjoncturelles. Ce type de politique est prise par le préfet de chaque département, via des arrêtés de sécheresse fixant des seuils en début d'année, à partir desquels les restrictions doivent s'appliquer. Lorsque un seuil critique est atteint, des comités de sécheresse se réunissent par département, pour étudier la pertinence de la mise en place des restrictions.

Dans le chapitre 4, nous analyserons dans l'étude de la Nappe de Beauce, un dispositif de gestion volumétrique, dans lequel politiques structurelles et conjoncturelles sont appliquées de manière coordonnée, la gestion volumétrique. Pour conclure, d'autres types de gestions (comme par exemple, la gestion par le prix, comprenant les politiques de tarification ou les politiques fiscales (taxes et redevances) sont peu utilisés en France (Erdlenbruch et al. (2013) [23])).

8. Au sein d'une structure collective, le quota d'eau est reparti souvent avec des systèmes de débits, i.e., le droit à une certaine quantité par unité de temps.

En Espagne, depuis 2005, la mise en place du Plan Hydrologique National assure une gestion mieux planifiée en cas de sécheresse. Ce plan est basé sur l'utilisation de trois instruments principaux par les Organismes des différents bassins (Estrela (2006) [29]) :

- un système d'indicateurs de l'état hydrologique des bassins ; Le système sont formé par des points de contrôle tout au long du bassin, dans lesquels des informations, entre autres, sur le niveau piézométrique des aquifères, la pluviométrie, les volumes d'eau stockés dans les réservoirs,... sont disponibles. A partir de ces données, l'Organisme du bassin calcule des valeurs moyennes pour chaque indicateur, comprises entre 0 et 1 (avec 0 : bas risque de sécheresse et 1 : haut risque de sécheresse).
- des plans spéciaux en cas de sécheresse ; Ces plans comprennent trois types de mesures : les mesures stratégiques, à caractère réglementaire, offrant des réponses à moyen et long terme comme la définition de nouvelles règles d'utilisation ou la construction de nouveaux barrages ; les mesures tactiques, offrant des réponses à court terme, i.e. les mesures à appliquer pendant la sécheresse ; finalement, les mesures d'urgence, en cas de sécheresses durables ou plus sévères comme la construction de puits pour l'utilisation d'eau souterraine, des restrictions d'usages etc... En effet, en cas de sécheresse importante, la sur-utilisation de certaines ressources souterraines est permise, comme c'est le cas de l'aquifère de la Mancha qu'on étudiera dans les chapitre 2 et 3.
- des plans pour les agglomérations urbaines de plus de 20 000 habitants, visant à fournir la population en eau en fonction des valeurs des indicateurs, de l'offre et de la demande en eau.

Avant de poser la problématique générale de cette thèse, nous reprenons les **motivations** principales qui nous ont amenées à la réalisation de cette thèse :

- La gestion d'une ressource en eau souterraine est un phénomène dépendant de plusieurs facteurs (type d'accès, type de nappe, connaissance des caractéristiques de l'aquifère) et concernant différents acteurs (utilisateurs et gestionnaire). L'évolution naturelle du système d'exploitation de la ressource peut être soumise à des changements brusques dus aux phénomènes liés à la nature, comme les sécheresses. Dans ce cas, gérer de façon efficace la ressource devient un problème plus complexe. Il est justement important de mieux comprendre et d'anticiper ce type de changements car ils peuvent avoir des impacts significatifs sur les activités économiques (en particulier, sur l'activité agricole) et sur les niveaux de la ressource. En particulier, le type d'information dont disposent les utilisateurs et/ou le gestionnaire sur les caractéristiques hydrologiques de l'aquifère est essentiel dans le sens où différents types d'informations peuvent entraîner différents comportements d'extractions. Cela motive le travail réalisé dans le chapitre 2 et 3.
- En effet, dans un problème de gestion d'une ressource en eau souterraine sujette au risque climatique de la sécheresse, il est important de considérer le type d'information dont disposent les utilisateurs. Cette information peut être de caractère hydrologique, mais aussi de caractère agronomique et/ou économique. Le but de l'utilisateur étant de maximiser son profit, les possibilités d'adaptation individuelles aux sécheresses ne sont pas restreintes aux caractéristiques de l'aquifère, mais aussi à d'autres choix comme l'assolement. L'intégration de stratégies de différentes natures hydrologique et agronomique est nécessaire pour assurer non seulement la gestion efficace de la ressource, mais aussi des exploitations agricoles. Cela motive le travail réalisé dans le chapitre 4.

1.3 Problématique

Après avoir situé la motivation de notre travail, nous pouvons poser les questions générales de notre étude :

Comment incorporer le risque climatique (en particulier, la sécheresse) dans un modèle d'exploitation d'une ressource en eau souterraine utilisée pour la production agricole ?

Quelles stratégies peuvent être employées pour limiter les effets économiques et hydrologiques d'une sécheresse à court terme (lors de la campagne agricole) et à long terme (à l'échelle pluri-annuelle) ?

Comment le type d'information dont disposent le gestionnaire et/ou les utilisateurs de la ressource influence-t-il ces stratégies ?

En effet, la sécheresse résulte d'un déficit d'eau de surface ou souterraine pour l'activité agricole. Nous rappelons que ce déficit affecte en premier lieu l'humidité des sols (sécheresse agronomique). Si la sécheresse persiste, elle peut causer des problèmes structurels comme un manque d'eau dans les réservoirs ou ressources en eaux souterraines (sécheresse hydrologique). En particulier, dans les chapitres 2 et 3, on s'interroge à l'impact d'une sécheresse « hydrologique » sur la gestion optimale d'une ressource en eau souterraine, avant et après son arrivée. On modélise la sécheresse comme un choc (ou changement de régime) sur la dynamique de la ressource. Ce choc correspond à une diminution du taux de recharge naturelle de la nappe, c'est à dire, une baisse de la disponibilité en eau de la ressource.

Plus précisément, dans le chapitre 2 on va étudier comment le gestionnaire de la ressource peut s'adapter le mieux possible à cette sécheresse (ou choc) selon l'information dont il dispose. Pour répondre à cette question, nous utiliserons la théorie du contrôle optimal. De plus, nous introduisons deux types de chocs dans le modèle : un choc déterministe qui a lieu à une date donnée et un choc aléatoire qui peut arriver avec une certaine probabilité. Ceci va nous permettre de discuter l'impact de l'incertitude sur le comportement d'extraction et sur l'efficacité, en termes de bien-être, de la gestion. Nous appliquons notre modèle à l'aquifère La Mancha Occidentale au Sud de l'Espagne. Le fait que l'aquifère se situe dans une zone semi-aride et donc subissant des nombreux épisodes de sécheresses, fait de cet aquifère un endroit propice pour l'application de notre modèle. Nous analyserons l'impact de ces épisodes de sécheresse (nommé « chocs »), considérant des variations du taux de recharge de la même ampleur que les variations passées. Finalement, nous montrerons que l'acquisition de l'information exacte sur l'occurrence du choc avant son arrivée n'est pas toujours intéressante pour le gestionnaire de la ressource (l'agence de l'eau).

Dans le chapitre 3, nous allons étudier quel est l'impact économique et hydrologique de la sécheresse en prenant en compte les interactions stratégiques dynamiques entre les utilisateurs de la ressource. Pour cela, on va se servir de la théorie des jeux dynamiques. Ainsi, en premier lieu, nous allons introduire dans notre jeu le choc déterministe du chapitre 2. En second lieu, nous analyserons différents types de solutions correspondant à différents types d'informations dont disposent les joueurs (ou utilisateurs de la ressource) : la solution « open-loop », la solution « feedback », et une structure d'information particulière, la solution « open-loop » par morceaux. En troisième lieu, nous comparerons l'efficacité des différentes solutions avec la solution centralisée calculée dans le chapitre 2. Une fois de plus, nous appliquons ce jeu dynamique à l'aquifère La Mancha Occidentale. L'aquifère a souffert non seulement des nombreux épisodes de sécheresses, mais de différents régimes inefficaces de

gestion les dernières décennies. Nous prouvons qu'une régulation de l'aquifère à travers d'une gestion centralisée est d'autant plus justifié en cas de sécheresses.

Dans le chapitre 4, on s'interroge à l'impact d'une sécheresse « agronomique » sur la gestion optimale d'une exploitation agricole. La sécheresse, sera représentée dans ce chapitre par une baisse du rendement agricole de l'exploitant. En particulier, nous nous posons plusieurs questions : quel est l'impact d'une année sèche sur la production, et donc, sur la valeur ajoutée de l'exploitation ? Quel est l'impact d'une année sèche sur la ressource en eau utilisée ? Quel comportement stratégique les agriculteurs peuvent avoir en année sèche, que ce soit sans ou avec restrictions des usages de l'eau ? Pour répondre à ces questions, nous allons construire un modèle agro-hydro-économique d'un exploitant-type. En particulier, le problème pour l'agriculteur est de maximiser son revenu annuel à partir des choix d'eau d'irrigation et d'assolement, en prenant en compte l'évolution de la ressource en eau. Nous verrons qu'il est important de considérer la dimension dynamique du problème pour caractériser les décisions à court-terme et à long-terme. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser des méthodes qui prennent en compte le temps (optimisation dynamique). Ensuite, nous appliquerons le modèle à la nappe de Beauce, dans le centre de la France. Le type de climat dans cette zone fait que l'irrigation soit nécessaire pour assurer la production agricole. L'irrigation se fait essentiellement à travers des pompes individuels sur la nappe. Pour ces raisons, la zone de la Beauce constitue un endroit propice à l'application de notre modèle théorique. Nous comparerons les solutions optimales obtenues selon différents scénarios climatiques et en cas de sécheresse, selon différents scénarios de restrictions d'usage de la ressource. Nous verrons aussi que d'autres types de mesures, comme la taxation sur le prix de l'eau, sont moins préférables qu'une politique de restriction pour garantir les niveaux de la ressource.

Finalement nous allons décrire, dans la section 1.4, la méthodologie utilisée pour réaliser ce travail. Elle consiste principalement en l'utilisation de différents types de modèles d'optimisation dynamique résolus de façon analytique avec les méthodes du principe du maximum et de la programmation dynamique. Ces méthodes sont inscrites dans la théorie du contrôle optimal et dans la théorie des jeux.

1.4 Méthodologie

1.4.1 Théorie du contrôle optimal

Dans cette partie, nous allons rappeler de façon générale (voir Seierstad et Sydsæter (1987) [77], Kamien et Schwartz (1991) [45], Léonard et Long (1992) [52], Dockner et al. (2000) [21], Sethi et Thompson (2000) [78], Caputo (2005) [11]) comment résoudre différents types de problèmes de contrôle optimal :

- en temps continu ou discret,
- en temps fini ou infini,
- avec contraintes d'égalités et d'inégalités,
- avec un taux d'actualisation,
- avec une fonction « scrap value ».

Pour cela, nous considérons un système dynamique, caractérisée par :

- une variable d'état, x , qui décrit l'état du système,
- une (ou plusieurs) variable(s) de contrôle(s), qui sont choisies par l'opérateur du système, afin de contrôler la variation de l'état dans le temps.

L'objectif est de résoudre un problème dynamique d'optimisation (maximisation ou minimisation). Pour simplifier, nous prenons ici un exemple du type de problème de maximisation que nous allons résoudre dans cette thèse. Le problème à résoudre est :

$$\max_{u(\cdot)} \int_0^T v(x(t), u(t), t) dt \quad (1.1)$$

contraint par la dynamique du système

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (1.2)$$

et les conditions aux bords

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = \begin{cases} x_T & \text{libre,} \\ x_T = x(T) & \text{connue,} \\ x_T \geq x(T) & \text{connue.} \end{cases} \quad (1.3)$$

La valeur du contrôle dans le temps est définie par $u(t)$ avec $u : [0, T] \rightarrow R_+$. L'expression $v(x(t), u(t), t)$ représente la fonction de gain instantané. Les valeurs T et x_0 sont connues.⁹ On appellera l'intervalle $[0, T]$ l'horizon de planification.

En supposant qu'il existe une solution intérieure unique et différentiable, deux types de résolutions sont possibles : le principe du maximum¹⁰ et le principe de la programmation dynamique (voir Léonard et Long (1992) [52]).

Le principe du maximum

Pour résoudre le problème grâce au principe du maximum, il faut d'abord définir une fonction appelée le Hamiltonien. Le Hamiltonien du problème décrit précédemment (équations (1.1), (1.2) et (1.3)) est

$$H(x, u, \pi, t) = v(x, u, t) + \pi f(x, u, t), \quad (1.4)$$

où $\pi(t)$ représente la variable adjointe (ou variable auxiliaire), associée à la variable d'état, $x(t)$. On peut interpréter $\pi(t)$ (aussi appelée prix implicite ou « shadow price ») comme la valeur d'une augmentation d'une unité de la variable d'état $x(t)$ à l'instant t .

Le théorème du principe du maximum nous donne les conditions nécessaires pour trouver la solution optimale du problème. Les conditions sont :

1. pour chaque t , $u(t)$ doit maximiser $H(x(t), u(t), \pi(t), t)$, i.e.,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (1.5)$$

2. la variable d'état $x(t)$ et la variable adjointe $\pi(t)$ doivent satisfaire le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad (1.6)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1.7)$$

avec les conditions aux bords décrites en (1.3).

9. Le principe de résolution lorsque T est une variable aléatoire est expliqué dans la section 1.4.1

10. Pontryagin et al. (1962) développent le principe du maximum.

En appliquant ces conditions nécessaires (équations (1.5), (1.6), (1.7)) sur le Hamiltonien de notre problème, on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial u} + \pi \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

équation appelée condition de premier-ordre, et le système d'équation différentielles

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \pi \frac{\partial f}{\partial x},$$

avec les conditions aux bords décrites en (1.3), i.e., avec $x(0) = x_0$ et $x(T)$ selon les 3 cas possibles :

- Si $x(T)$ libre, il faut ajouter la condition transversale $\pi(T) = 0$.
- si $x(T) = x_T$, on l'ajoute directement comme une condition au bord.
- si $x(T) \geq x_T$, il faut ajouter les conditions suivantes : $\pi(T) \geq 0$, $x(T) - x_T \geq 0$ et $\pi(T)(x(T) - x_T) = 0$.

La solution optimale notée $(x^*(t), u^*(t), \pi^*(t))$ est la solution qui vérifie les conditions définies précédemment. En substituant les solutions dans la fonction (1.1), on trouve la fonction valeur optimale $V^*(x(0), 0)$. Pendant cette thèse, nous sommes confronté au problème où la condition au bord $x(T)$ est libre. Dans la suite nous détaillons donc les différentes résolutions, puis les cas particuliers, uniquement pour ce type de condition finale.

Nous décrivons ci-dessous les conditions à modifier lorsque nous sommes confrontés à certains **cas particuliers**, puis lorsque le problème est contraint par des **conditions d'égalités, d'inégalités** et lorsque il contient une fonction « **scrap value** ».

Cas particuliers

- Si $T = \infty$, la condition transversale $\pi(T) = 0$ est substituée par la condition,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \pi(t)x(t) = 0.$$

- Si le problème est actualisé au taux ρ , le fonction à maximiser devient

$$\max_{u(t)} \int_0^T e^{-\rho t} v(x(t), u(t)).$$

La condition (1.7) se réécrit :

$$\dot{\pi} = \rho\pi - \frac{\partial H}{\partial x},$$

Avec contraintes en forme d'égalités

Nous ajoutons maintenant une (ou plusieurs) contrainte(s) en forme d'égalité à notre problème initial ¹¹.

¹¹. Dans la suite nous décrivons la résolution du problème d'optimisation contraint par une seule équation d'égalité ou inégalité par simplicité.

L'objectif est de choisir le contrôle $u(t)$, qui maximise la fonction (équation (1.1)), contraint par la dynamique du système (équation(1.2)), la contrainte d'égalité

$$g(x(t), u(t), t) = 0, \quad (1.8)$$

et les conditions aux bords ($x(0) = x_0$ et x_T libre). Pour résoudre ce problème il faut introduire une nouvelle fonction, le Lagrangien, défini par l'équation

$$L = H(x, u, \pi, t) + \lambda g(x, u, t),$$

avec H , le hamiltonien du problème sans contrainte d'égalité défini dans l'équation (1.4), et $\lambda(t)$, la variable appelée multiplicateur de Lagrange, représentant le poids ou la « valeur » de la contrainte.

A partir du principe du maximum, nous dérivons les conditions nécessaires d'optimalités :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial u} + \pi \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \pi \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x},$$

et la contrainte d'égalité (1.8).

Avec contraintes en forme d'inégalités

Lorsque nous ajoutons une contrainte d'inégalité

$$g(x(t), u(t), t) \geq 0, \quad (1.9)$$

les conditions nécessaires d'optimalité sont les mêmes que lorsque on ajoute une contrainte d'égalité, en substituant la condition (1.8) par les conditions supplémentaires

$$\lambda \geq 0, \quad g(x(t), u(t), t) \geq 0, \text{ et } \lambda g(x(t), u(t), t) = 0. \quad (1.10)$$

Avec une fonction « scrap value »

Si le problème a une fonction « scrap value »¹² $\phi(x_T, T)$, l'objectif est de résoudre le problème

$$\max_{u(\cdot)} \int_0^T v(x(t), u(t), t) dt + \phi(x_T, T)$$

contraint par la dynamique du système

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

12. La fonction « scrap value » représente la valeur du problème à partir d'une certaine date T (ou valeur postérieure à la réalisation de T).

et les conditions aux bords ($x(0) = x_0$ et x_T libre).

Il faut alors ajouter aux conditions nécessaires (équations (1.5), (1.6), (1.7)) la condition de transversalité, $\pi(T) = \frac{\partial \phi(x_T, T)}{\partial x_T}$ au lieu de $\pi(T) = 0$.

La version discrète du principe du maximum

Dans cette thèse, nous n'utilisons pas ce type de résolution lorsqu'on est confronté à un problème en temps discret. Cependant, quant on parle d'optimisation dynamique, il est important de rappeler de façon générale la version discrète du principe du maximum. Tout d'abord, il faut réécrire notre problème (équations (1.1), (1.2), (1.3)) en temps discret, dans le cas où le point final est libre. Il faut alors choisir les valeurs de $u(t)$ ($t = 0..T$) qui maximisent la fonction

$$\sum_{t=0}^T v(x(t), u(t), t) \quad (1.11)$$

contrainte par la dynamique du système

$$x(t+1) - x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t = 0..T, \quad (1.12)$$

et les conditions aux bords

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x(T) \quad \text{libre.} \quad (1.13)$$

Ensuite, nous réécrivons le Hamiltonien du problème discret :

$$H(x, u, \pi, t) = v(x, u, t) + \pi f(x, u, t),$$

et dérivons les conditions nécessaires de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad t = 0..T,$$

$$x(t+1) - x(t) = f(x(t), u(t)), \quad t = 0..T - 1,$$

$$\pi(t+1) - \pi(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad t = 0..T - 1.$$

La solution optimale du problème est alors donnée par les conditions nécessaires précédentes, la condition initiale $x(0) = x_0$ et la condition de transversalité $\pi(T) = 0$ (voir Léonard et Long (1992) [52] pour les détails).

Le principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique a été développé par Bellman à la fin des années 50. Ce principe, nommé aussi principe d'optimalité, a été conçu dans un premier temps pour résoudre des problèmes en temps discret, puis il a été généralisé pour des problèmes en temps continu sous l'équation dénommée « Hamilton-Jacobi-Bellman » (voir Léonard et Long (1992) [52]).

Dans un premier temps, nous reprenons donc le problème d'optimisation de la section précédente en temps discret (équations (1.11), (1.12), (1.13)) et nous rappelons les conditions nécessaires pour résoudre ce type de problème par le principe de la programmation dynamique. Le problème à résoudre est :

$$\max_{\{u(t)\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T v(t, x(t), u(t))$$

contraint par l'équation

$$x(t+1) = h(t, x(t), u(t)), \quad t = 0..T-1,$$

avec

$$h(t, x(t), u(t)) = x(t) + f(t, x(t), u(t)), \quad t = 0..T-1,$$

et les conditions aux bords

$$x(0) = x_0 \quad \text{donnée et} \quad x(T) \quad \text{libre.} \quad (1.14)$$

Dans ce type de résolution de problèmes dynamiques on appelle $v(t, x(t), u(t))$ le bénéfice net en t , et $h(t, x(t), u(t))$ la fonction de transition en t .

Une fois que l'on a posé le problème, nous pouvons reprendre le principe d'optimalité énoncé par Bellman en 1957 : $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(T)$ est une solution optimale du problème décrit précédemment si et seulement si $u^*(t), u^*(t+1), \dots, u^*(T)$ est solution du problème suivant :

$$\max_{\{u(\tau)\}_{\tau=t}^T} \sum_{\tau=t}^T v(\tau, x(\tau), u(\tau)) \quad (1.15)$$

contraint par

$$x(\tau+1) = h(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad \tau = t, t+1, \dots, T-1, \quad (1.16)$$

et les conditions

$$x(t) = x^*(t) \quad \text{donné et} \quad x(T) \quad \text{libre.} \quad (1.17)$$

Ce principe implique que pour trouver les solutions optimales $u^*(t), u^*(t+1), \dots, u^*(T)$, il suffit de connaître $x^*(t)$, la valeur optimale de la variable d'état en t . C'est justement l'avantage du principe de la programmation dynamique. Pour trouver la solution du problème à partir de l'instant t , il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de la variable d'état et/ou de la variable de contrôle dans le passé (avant l'instant t).

A partir de ce principe, Bellman énonce une équation nécessaire à la résolution du problème, l'équation de récurrence fonctionnelle :

$$V(t, x) = \max_u [v(t, x, u) + V(t+1, x)] \quad (1.18)$$

contraint par la fonction

$$x(t+1) = x(t) + f(t, x(t), u(t)), \quad (1.19)$$

et les conditions aux bords décrites par l'équation (1.17).

En combinant les équations (1.18) et (1.19), on obtient :

$$V(t, x) = \max_u [v(t, x, u) + V(t + 1, h(t, x, u))]. \quad (1.20)$$

Le problème est donc de trouver la fonction valeur $V(t, x(t))$ vérifiant l'équation de récurrence fonctionnelle (1.20), avec la condition finale

$$V(T, x(T)) = 0.$$

On appelle ce type de méthode de résolution, récurrence à rebours (ou « backward induction »). Si le problème possède un facteur d'actualisation β , à savoir la fonction à maximiser devient

$$\sum_{t=0}^T \beta^t v(x(t), u(t)), \quad (1.21)$$

l'équation de récurrence fonctionnelle à résoudre est :

$$V(t, x) = \max_u [v(x, u) + \beta V(t + 1, h(t, x, u))].$$

Pour résumer, on détaillera la résolution des autres cas particuliers (temps infini, problèmes avec une fonction « scrap value » etc...) seulement dans la version continue du principe de la programmation dynamique, comme on a fait dans le cas du principe du maximum.

Version du principe de programmation dynamique en temps continu

De façon équivalente, en temps continu, le problème d'optimisation décrit par les équations (1.15), (1.16) et (1.17) est :

$$\max_{u(\cdot)} \int_t^T v(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (1.22)$$

contraint par

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)),$$

avec

$$x(t) \text{ donné et } x(T) \text{ libre.} \quad (1.23)$$

A partir du principe d'optimalité, on peut dériver l'équation fonctionnelle de récurrence (voir Léonard et Long (1992) [52]), que l'on appelle équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) en temps continu :

$$-V_t(t, x) = \max_u [v(t, x, u) + V_x(t, x) f(t, x, u)]. \quad (1.24)$$

Le problème à résoudre est donc de trouver la fonction valeur $V(t, x)$ qui vérifie l'équation HJB (équation 1.24) avec la condition $V(T, x(T)) = 0$. On note ici que la partie droite de l'équation (1.24) ressemble au Hamiltonien (équation (1.4)) correspondant au même problème de maximisation, à l'exception de $V_x(t, x(t))$ qui joue ici le rôle de la variable adjointe $\pi(t)$. Cependant, on rappelle que l'on avait interprété la variable $\pi(t)$ comme la valeur marginale de l'état $x(t)$, et en effet $\pi(t) = V_x(t, x(t))$.

Dans un problème de contrôle optimal les deux types de résolution, principe du maximum et programmation dynamique, sont donc équivalents si la fonction valeur $V(t, x(t))$ est deux fois différentiable par rapport à t et à x , (voir la démonstration fournie dans Kamien et Schwartz (1991) [45]).

Cas particuliers :

Pour le problème actualisé à un taux ρ (voir Dockner et al. (2000) [21] pour les détails complets), l'équation HJB à résoudre est :

$$\rho V(t, x) - V_t(t, x) = \max_u [v(x, u) + V_x f(t, x, u)]. \quad (1.25)$$

De plus, si le problème est en horizon infini (i.e. $T = \infty$, cf. Kamien et Schwartz (1991) [45]), l'équation HJB est simplifiée et devient :

$$\rho V(x) = \max_u [v(x, u) + V_x f(t, x, u)]. \quad (1.26)$$

Enfin, pour le problème avec une fonction « scrap value » (voir Kamien et Schwartz (1991) [45] pour les détails complets), la fonction à maximiser devient :

$$\int_t^T v(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \phi(T, x(T)) \quad (1.27)$$

contraint par

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)),$$

avec les conditions aux bords décrites en équation (1.23), il suffit de résoudre l'équation HJB en temps fini (1.24) avec la condition finale

$$V(T, x(T)) = \phi(T, x(T)).$$

Contrôle optimal stochastique

Nous considérons maintenant que l'horizon de planification T est incertain pour le gestionnaire du système : T est une variable aléatoire dans le problème initial (section 1.4.1). Cette méthodologie sera utilisé dans le chapitre 2. Dans ce cas, l'objectif est de choisir la valeur du contrôle dans le temps, $u(t)$, qui maximise

$$E_T \left(\int_0^T v(x(t), u(t), t) dt \right) \quad (1.28)$$

contraint par la dynamique du système (équation 1.2) et les conditions de bords $x(0) = x_0$ et x_T libre, alors l'équation (1.28) est égale à

$$\int_0^T f_T(t) v(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.29)$$

dans laquelle la fonction $f_T(t)$ représente la fonction de densité de la variable aléatoire T . Avec cette reformulation du problème, nous pouvons résoudre le problème comme indiqué dans la section 1.4.1.

1.4.2 Théorie des jeux

Dans le chapitre 3, nous allons introduire dans notre modèle les interactions stratégiques entre les joueurs. Pour cela, nous allons nous servir de la théorie des jeux. En particulier, nous réalisons différents types de jeux dynamiques correspond à différents structures d'information dont disposent les joueurs. Ainsi, dans cette section, nous rappelons de façon générale le cadre méthodologique et les principes de résolutions. Nous considérons de nouveau un système dynamique, caractérisé par :

- une variable d'état, $x(t)$, qui décrit l'état d'un système contrôlé par un nombre fini N de joueurs ;
- un vecteur $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \in \mathbb{R}_+^N$, où $u_i(t)$ représente la variable de contrôle du joueur i à l'instant t , ($i=1..N$).

L'objectif du joueur i est alors de choisir la valeur du contrôle dans le temps $u_i(t)$ qui maximise la fonction

$$\int_0^T v_i(x(t), u(t), t) dt \quad (1.30)$$

contraint par la dynamique du système

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad (1.31)$$

et les conditions aux bords

$$x(0) = x_0, \quad x_T \text{ libre.} \quad (1.32)$$

Dans l'expression (1.30), $v_i(x(t), u_i(t))$ représente la fonction de gain instantané du joueur i . Les valeurs des paramètres T et x_0 sont connues.

Dans la suite, nous décrivons la résolution du problème selon différentes structures d'informations dont disposent les joueurs : « open-loop » et « feedback ».

Structure d'information « open-loop »

Dans le cas d'une structure d'information « open-loop », chaque joueur i choisit son plan d'extraction $u_i(t)$ qui maximise son gain en supposant que les stratégies utilisées par les autres agents dépendent du temps. Il s'agit alors de maximiser l'expression (1.30) par rapport à $u_i(t)$, en prenant en compte la dynamique du système (1.31) et les conditions aux bords (1.32). Le problème du joueur i est donc ici un problème de contrôle optimal.

En utilisant le principe du maximum et en supposant qu'il existe une solution intérieure unique et différentiable, le Hamiltonien du problème du joueur i H_i s'écrit :

$$\begin{aligned} H_i(x, u_i, \pi, t) &= v_i(x, u_1(t), \dots, u_{i-1}(t), u_i, u_{i+1}(t), \dots, u_N(t), t) \\ &+ \pi_i f(x, u_1(t), \dots, u_{i-1}(t), u_i, u_{i+1}(t), \dots, u_N(t), t). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Dans l'expression (1.33), $\pi_i(t)$ représente la variable adjointe du joueur i , associée à la variable d'état, $x(t)$. Nous ne décrivons pas à nouveau la résolution de ce type de problème. En effet, les conditions nécessaires pour caractériser la solution optimale sont détaillés dans la section 1.4.1.

Structure d'information « feedback »

Dans le cas d'une structure d'information « feedback », chaque joueur i choisit son plan d'extraction $u_i(t)$ qui maximise son gain en supposant que les stratégies utilisées par les autres agents dépendent non seulement du temps, mais aussi de l'état du système, i.e. des stratégies de la forme

$$\varphi_j = \varphi_j(t, x(t)), \quad j = 1..N,$$

Il s'agit donc ici de maximiser (1.30) par rapport à $u_i(t)$, contraint par la dynamique du système :

$$\dot{x} = f(x(t), \varphi_1(t, x(t)), \dots, u_i(t), \dots, \varphi_N(t, x(t)), t) \quad (1.34)$$

et les conditions aux bords (1.32).

En utilisant le principe de la programmation dynamique, la fonction valeur du joueur i $V^i(t, x)$ doit vérifier l'équation HJB :

$$-V_t^i(t, x) = \max_{u_i} [v_i(t, x, \varphi_1, \dots, u_i, \dots, \varphi_N) + V_x^i(t, x) f(t, x, \varphi_1, \dots, u_i, \dots, \varphi_N)]. \quad (1.35)$$

En résumé, dans ce chapitre introductif, nous avons défini le contexte et les notions nécessaires pour la suite de ce travail. Ensuite, nous avons décrit les différentes revues de la littérature dont nous avons eu besoin, puis les motivations qui nous ont amené à la réalisation de ce travail. Nous avons aussi posé la problématique étudiée et nous avons résumé les principaux résultats de l'ensemble des chapitres. Finalement, nous avons décrit la méthodologie utilisée. Dans ce qui suit (chapitres 2, 3 et 4), nous allons décrire le travail réalisé dans cette thèse, puis nous conclurons et proposerons des possibles extensions de cette étude.

Stratégies d'adaptation optimales face à des chocs sur la dynamique de la ressource en eau ¹

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Le modèle	32
2.2.1	Le cas déterministe	34
2.2.2	Le cas stochastique	36
2.2.3	Cas déterministe vs. cas stochastique	38
2.3	Application numérique	39
2.3.1	Solutions optimales pour les cas déterministes	40
2.3.2	Solutions optimales pour les cas stochastiques	45
2.3.3	Cas déterministes vs. cas stochastiques	49
2.4	Conclusions et perspectives	53

2.1 Introduction

Les périodes de basses précipitations mènent souvent au remplissage insuffisant de ressources en eaux souterraines et posent des difficultés à l'heure d'établir les règles de gestion de ce type de ressource (voir Amigues (2006) [1], Zilberman et al. (2003) [91]). Ce problème peut s'aggraver dans le futur à cause du phénomène du réchauffement climatique. De plus, l'évolution du système naturel peut être soumise à des changements brusques, nommés des « changements de régime », (en anglais, « regime shifts »). L'adaptation à ce type de changements dépend énormément des informations disponibles sur la nature du changement, comme sa date d'occurrence et son intensité. Dans ce chapitre, nous abordons le problème posé par les changements de régimes et les adaptations que cela exige pour la gestion d'une ressource en eau souterraine, puis nous identifions les situations dans lesquelles l'information sur la date ou l'intensité du choc est particulièrement importante pour le gestionnaire de la ressource.

Nous analysons le cas d'une ressource commune en eau souterraine, utilisée par des agriculteurs pour l'irrigation et sujette à des périodes de sécheresses. Nous utilisons un modèle simplifié d'exploitation de ce type de ressource, le modèle de Gisser et Sánchez (1990) [35] (pour des modèles similaires, voir par exemple Cummings (1971) [15] ou Roseta-Palma (2003, 2002) [73], [72]), dans lequel nous introduisons un changement soudain affectant la dynamique de la ressource. Ce choc peut avoir lieu à cause d'une diminution des précipitations moyennes menant à une diminution de la recharge de l'aquifère, ou peut correspondre

1. Ce chapitre est une version modifiée et complétée de l'article : de Frutos Cachorro et al. (2014) [17].

à l'extraction d'une certaine quantité d'eau, pour desservir d'autres usages de l'eau dans une situation de sécheresse, comme le remplissage de réservoirs en eau potable.² L'aquifère est géré par un planificateur social, l'agence de l'eau, qui souhaite s'adapter le mieux possible à ce type de chocs. Nous caractérisons non seulement les conséquences hydrologiques, mais aussi les conséquences économiques du choc en comparant les niveaux de stock de la ressource et le bien-être social, à court et à long terme.

En particulier, nous sommes intéressés par l'effet de l'acquisition d'information sur la gestion optimale de la ressource en eau. Pour cela, nous introduisons deux types de chocs dans notre modèle : un choc déterministe qui a lieu à une date donnée et un choc aléatoire qui peut arriver avec une certaine probabilité. Ceci va nous permettre de discuter l'impact de l'incertitude sur le comportement d'extraction et sur l'efficacité de la gestion.

Dans un premier temps, si la date du choc est connue, on peut penser que l'agence de l'eau va se préparer à l'événement en appliquant une stratégie d'extraction conservatrice pour la ressource. Cependant, nos résultats contredisent notre intuition initiale, et une plus grande quantité d'eau sera extraite à court terme. Nous pouvons retrouver ce résultat dans la littérature existante (cf. Di Maria et al. (2012) [19]), dans le contexte des ressources polluantes, sous le nom « d'effet d'annonce » (ou encore, « effet d'abondance »). Cependant, nous montrons en utilisant des exemples numériques, que le comportement d'extraction peut être non monotone à court terme dans certaines situations, i.e., quand l'intensité du choc est importante et quand celui-ci arrive tardivement. Dans un deuxième temps, quand la date d'occurrence du choc est une variable aléatoire, nous pouvons appréhender les solutions possibles du problème en étudiant la littérature existante sur les événements catastrophiques, dans un contexte de gestion d'une ressource en eau souterraine (voir Tsur et Zemel (2012, 2004, 1995) [85], [84], [82]) et de contrôle de la pollution (voir Brozovic et Schlenker (2011) [6], Clarke et Reed (1994) [13], de Zeeuw et Zemel (2012) [18], Tsur et Zemel (1996) [83] et Zemel (2012) [90]).

Dans [85], Tsur et Zemel (2014) font une revue de la littérature sur les différentes formes sous lesquelles l'incertitude peut apparaître dans un problème de gestion d'une ressource. Ils distinguent deux types d'incertitudes : l'incertitude due à l'ignorance, i.e., à une connaissance limitée de certains paramètres de la ressource (par exemple, la recharge ou le bénéfice instantané peut subir un changement brusque quand le stock de la ressource atteint un certain seuil inconnu) et l'incertitude exogène, due à des éléments environnementaux aléatoires (par exemple, la variabilité météorologique).³ Selon le type d'incertitude considéré, la relation entre comportement de précaution et accroissement de l'incertitude peut varier. Quelques études montrent qu'une augmentation de l'incertitude mène à des changements non monotones dans le comportement de précaution (voir Brozovic et Schlenker (2011) [6], Clarke et Reed (1994) [13], Zemel (2012) [90]), pendant que d'autres montrent qu'une augmentation de l'incertitude implique une diminution du comportement de précaution (voir Tsur et Zemel (2004, 1995) [84], [82]). D'autres travaux concluent qu'une augmentation de l'incertitude mène à une augmentation du comportement de précaution (voir de Zeeuw et Zemel (2012) [18], Tsur et Zemel (2004) [84]). Par exemple, Brozovic et Schlenker (2011) dans [6] et Zemel (2012) dans [90] prouvent qu'une relation non monotone est possible quand plusieurs sources d'incertitudes sont combinées. Tsur et Zemel (2004) [84] montrent qu'une augmen-

2. En réalité, ces changements n'arriveraient pas à une date précise, mais plutôt au cours d'une certaine période. De plus, un certain temps est nécessaire pour avoir un impact réel d'une diminution du taux de recharge sur l'aquifère. Par simplicité, nous considérons ici que l'effet du choc est immédiat.

3. Nous retrouvons des concepts similaires, où l'on distingue les événements endogènes ou exogènes, dans Tsur et Zemel (1995) [82].

tation de l'incertitude entraîne des extractions plus intensives, lorsqu'il s'agit d'événements irréversibles exogènes.⁴ Au contraire, ils prouvent qu'un comportement plus prudent est appliqué à long terme dans le cas d'événements exogènes réversibles ou dans le cas d'événements endogènes. De plus, dans [18], de Zeeuw et Zemel (2012) montrent que l'introduction d'un saut aléatoire dans la fonction de dommage d'un modèle de contrôle de la pollution mène à un comportement plus prudent d'extraction, à la fois dans le cas d'événements endogènes et dans le cas d'événements exogènes irréversibles.

Dans ce chapitre, nous étudions des événements exogènes réversibles, puis nous analysons la relation entre les caractéristiques du choc et le comportement d'adaptation à court et à long terme. Nous sommes particulièrement intéressés par l'étude de l'incertitude exogène du paramètre T (l'horizon de planification), quand T est une variable aléatoire dont la réalisation déclenche l'occurrence d'un événement. Dans ce cas, Tsur et Zemel soutiennent que la politique d'extraction optimale sous incertitude est plus agressive à court terme et plus conservatrice après l'occurrence de l'événement, en comparaison avec la situation sans risque.⁵ Bien que nos résultats correspondent aux solutions trouvées par Tsur et Zemel (2012) dans [85], notre étude diffère en plusieurs aspects : d'abord, Tsur et Zemel analysent des événements catastrophiques (comme l'intrusion d'eau salée) qui rend impossible l'utilisation de la ressource après l'événement (sauf si une restauration a lieu). Nous étudions un événement qui ne rend pas la ressource inutilisable. Deuxièmement, nous ajoutons à l'incertitude exogène de l'horizon de planification, un changement brusque dans la dynamique de la ressource, et non pas dans la fonction objective.⁶ Troisièmement, nous comparons le comportement d'adaptation optimal pour différents scénarios d'incertitude et nous ne comparons pas seulement le cas sans risque avec la situation d'incertitude. Finalement, nous décrivons les implications économiques du choc avec un exemple numérique.

Nous appliquons notre modèle à l'aquifère La Mancha Occidentale au Sud de l'Espagne. Dans cette zone, l'état des ressources en eaux souterraines a une influence significative sur l'approvisionnement futur d'importants services écosystémiques (voir détails dans Esteban et Albiac (2012) [28]). Le taux de recharge moyen de l'aquifère est de 360 millions de mètres cubes par an. Lors des dernières décennies, l'aquifère a du subir de nombreux épisodes de sécheresse. Depuis 1999, le taux de recharge moyen a diminué d'approximativement 100 millions de mètres cubes par an. Ce fait lié à l'absence de réglementation a mené à une augmentation des extractions en eaux souterraines pour l'irrigation d'environ 3000 millions de mètres cubes pendant les trois dernières décennies (cf. López-Gunn (2012) [53]). A partir des simulations numériques, nous analysons l'impact de ces épisodes de sécheresse (nommés « chocs »), considérant des variations du taux de recharge de la même ampleur que les variations passées (et pas des futures variations possibles dans un contexte de changement climatique). Bien que nous supposons que l'agence de l'eau fait de son mieux pour s'adapter à ces chocs, nous montrons que les coûts pour la société sont importants, pouvant atteindre plusieurs millions d'euros. De plus, nous voulons savoir si l'agence de l'eau devrait ou ne devrait pas essayer de prédire la date du choc. Nous montrons que c'est toujours avantageux pour l'agence d'eau d'acquérir des informations supplémentaires sur la date du choc. De plus, ces informations sont plus utiles quand le choc est plus intense et quand il a lieu dans le moyen terme. Finalement, nous confirmons que c'est toujours intéressant pour l'agence de

4. En [84], Tsur et Zemel (2004) définissent qu'un événement est irréversible lorsque son occurrence rend la ressource obsolète et réversible quand sa restauration est possible à un certain coût.

5. La situation sans risque correspond à notre problème simple initial sans choc.

6. Dans les articles de Tsur et Zemel, pour l'étude des événements réversibles, une fonction de pénalité est ajoutée pour prendre en compte des coûts de restaurations.

l'eau d'être préparée pour l'adaptation, avec ou sans connaissance de la date du choc, que de ne pas se préparer pour le choc du tout.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous faisons une brève description du modèle de Gisser et Sánchez. Ensuite, nous introduisons un choc exogène dans le taux de recharge et nous dérivons quelques résultats théoriques sur les stratégies d'adaptation optimales possibles face à ce type de choc. Dans la section 3, nous illustrons les résultats obtenus et nous analysons le comportement d'adaptation optimal et l'impact du choc sur le bien-être à court et à long terme. Finalement, dans la section 4, nous concluons et décrivons quelques perspectives de recherche future.

2.2 Le modèle

Nous basons notre analyse sur le modèle d'exploitation d'une ressource en eau souterraine de Gisser et Sánchez (1980), (voir [35]), où $G(t)$ et $g(t)$ sont respectivement le stock (en volume)⁷ et le taux d'extraction d'eau de l'aquifère, en fonction du temps.⁸ Supposons une fonction linéaire,

$$g = a - bp, \quad (2.1)$$

représentant la fonction de demande d'eau pour l'irrigation, où p est le prix de l'eau, et a, b sont les coefficients de la fonction de demande, avec $a, b > 0$.

Considérons une fonction de coût linéaire pour représenter le coût marginal d'extraction (ou coût marginal de pompage) :

$$\bar{C} = z - cG, \quad (2.2)$$

où z, c sont les coefficients de la fonction de coût ($z > 0, c > 0$) : z comprend les coûts (marginaux) fixe et maximum de pompage et c représente la pente de cette fonction.⁹

La dynamique de l'aquifère,

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r \quad (2.3)$$

dépend des caractéristiques hydrologiques de l'aquifère, où r est le taux de recharge et α est le coefficient de retour d'eau dans l'aquifère, avec $\alpha \in [0, 1)$.

Le revenu total des agriculteurs, utilisant la surface agricole caractérisée par la fonction de demande d'eau, équation (2.1), est alors :

$$\int_g p(x)dx = \int_g \frac{a - x}{b} dx = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2.$$

Le problème pour le planificateur social est de maximiser le bien-être social, i.e. la valeur présente des revenus privés des agriculteurs, avec ρ , le taux d'actualisation, prenant en compte la dynamique de l'aquifère (voir équation (2.3)) et contraint par les conditions initiales et de positivité :

7. G correspond au volume d'eau stocké et il est calculé en multipliant H , la hauteur d'eau de l'aquifère, par $A * S$, où A est la surface occupée par l'aquifère et S est le coefficient de stockage (ou coefficient d'emmagasinement).

8. Nous allons omettre l'indice du temps, t , dans les équations qui suivent, dans le but de rendre les équations plus faciles à lire.

9. Le coût marginal maximum de pompage est le coût nécessaire pour pomper à la distance maximale i.e., de la surface au point le plus profond de l'aquifère.

$$\max_{g(\cdot)} \int_0^{\infty} F(G, g) e^{-\rho t} dt,$$

où

$$F(G, g) = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g,$$

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r,$$

$$G(0) = G_0 \quad \text{donnée,}$$

$$g \geq 0 \quad G \geq 0.$$

La résolution complète de ce problème est donnée dans l'Annexe (B.2). Ce problème constituera pour la suite notre problème de référence.

Maintenant, nous allons introduire un choc exogène à notre problème de référence initial. Ce choc (ou changement de régime) consiste en une diminution du taux de recharge de l'aquifère à la date t_a . D'abord, nous allons résoudre le cas déterministe où la date d'occurrence du choc t_a est connue. Ensuite, nous allons résoudre le cas stochastique où t_a est une variable aléatoire, suivant une distribution exponentielle. Parmi ces deux types de chocs (déterministe ou stochastique), nous allons étudier différentes situations selon le type d'information dont dispose le régulateur au début de l'horizon de planification ($t = 0$). Les différents problèmes déterministes et stochastiques que nous allons étudier, sont décrits dans les tableaux 2.1 et 2.2, respectivement. Dans un premier temps, nous allons retenir le cas déterministe avec adaptation en $t = 0$ et le cas stochastique avec adaptation en $t = 0$. Nous allons résoudre, puis comparer analytiquement ces deux problèmes dans les sections qui suivent. Ensuite, tous les cas des tableaux 2.1 et 2.2 seront comparés à partir des simulations numériques dans la section 2.3.

Problème de référence (r_1)		
Cas déterministes		
Type d'adaptation au choc	Indice du problème	Type d'information en $t = 0$
Adaptation à partir de $t = 0$	r_2	Connaissance de la date d'occurrence, $t = t_a < \infty$
Adaptation à partir de $t = t_a$	r_2^{AD}	Aucune information sur date d'occurrence, puis acquisition de l'information dès son arrivée en $t = t_a < \infty$

Tableau 2.1 – Types de chocs déterministes.

Problème de référence (r_1)		
Cas stochastiques		
Type d'adaptation au choc	Indice du problème	Type d'information en $t = 0$
Adaptation à partir de $t = 0$	r_2^S	Information « statistique » sur date d'occurrence
Adaptation à partir de $t = t_a$	r_2^{SAD}	Information « statistique » sur date d'occurrence, puis acquisition de l'information dès son arrivée en $t = t_a < \infty$

Tableau 2.2 – Types de chocs stochastiques.

2.2.1 Le cas déterministe

Nous supposons que le taux de recharge de l'aquifère diminue de r_1 à r_2 à une date connue $t_a < \infty$. Nous sommes intéressés par le chemin optimal d'extraction lorsque cette « période sèche » a lieu. Maintenant, le problème du planificateur social est :

$$\max_{g(\cdot)} \int_0^{\infty} F(G, g) e^{-\rho t} dt, \quad (2.4)$$

où,

$$F(G, g) = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g, \quad (2.5)$$

$$\dot{G} = \begin{cases} -(1 - \alpha)g + r_1 & \text{si } t \leq t_a \\ -(1 - \alpha)g + r_2 & \text{si } t > t_a, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$G(0) = G_0, t_a \text{ données, } r_1 > r_2,$$

$$g \geq 0 \quad G \geq 0.$$

En effet, le problème principal est de modéliser le fait que la disponibilité d'eau pour l'irrigation diminue à partir de la date t_a . Ceci peut arriver en raison d'une diminution des précipitations moyennes ou à cause d'un prélèvement d'eau exceptionnel pour d'autres usages, à partir de t_a . Théoriquement, ces idées sont équivalentes et nous pouvons les décrire à travers une diminution du taux de recharge.¹⁰

Maintenant, nous passons à la résolution du problème. Nous pouvons le résoudre en deux étapes. En premier, nous trouvons $\phi(t_a, G_{t_a})$, la fonction « scrap value », représentant la maximisation entre t_a et ∞ , i.e. la solution du problème « post-événement » :

$$\max_{g(\cdot)} \int_{t_a}^{\infty} \left(\frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g \right) e^{-\rho(t-t_a)} dt, \quad (2.7)$$

10. Considérons par exemple, une extraction spécifique de valeur A , à partir de la date t_a , causée par un besoin autre que l'irrigation (consommation en eau potable, utilisation industrielle, etc ...). Supposons que le coefficient de retour d'eau correspondant à cette extraction spécifique est β ($0 \leq \beta \neq \alpha$), ainsi ce problème sera équivalent au problème principal de diminution du taux de recharge si $r_2 = r - (1 - \beta)A = r_1 - (1 - \beta)A \implies r_1 - r_2 = (1 - \beta)A$.

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r_2,$$

$$G(t_a) = G_{t_a} \quad \text{inconnue.}$$

Ensuite, la deuxième étape est de résoudre le problème « pré-événement », i.e. de trouver g qui maximise,

$$\int_0^{t_a} \left(\frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g \right) e^{-\rho t} dt + e^{-\rho t_a} \phi(t_a, G_{t_a}),$$

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r_1, \tag{2.8}$$

$$G(0) = G_0 \quad \text{donnée.}$$

La résolution complète du problème modifié est donnée dans l'annexe (B.3).

Maintenant, nous présentons quelques résultats théoriques obtenus à partir des solutions analytiques du problème précédent.

Soit $g_r^*(t)$ (et $G_r^*(t)$) le chemin d'extraction et le stock optimaux pour un choc déterministe représentant une diminution du taux de recharge de r_1 à r en t_a , avec $r_1 \geq r \geq 0$; ¹¹

Proposition 2.2.1 $G_r^*(\infty)$ et $g_r^*(\infty)$ sont des fonctions monotones croissantes en r .

Démonstration :

Comme on peut voir dans l'annexe B.3, l'état stationnaire du stock et du taux d'extraction du problème déterministe sont donnés respectivement dans les équations (B.15) et (B.13), quand $r = r_2$. Nous observons que les dérivés de $G_r^*(\infty)$ et $g_r^*(\infty)$ par rapport à r sont positifs. \square

Selon la proposition 2.2.1, plus la valeur du choc déterministe est élevée (i.e. plus petite est la valeur de r), plus les niveaux optimaux de stock et du taux d'extraction sont faibles à l'état stationnaire. En effet, lorsqu'un choc a lieu (i.e. $r = r_2 < r_1$), le niveau optimal de la ressource chute à long terme et la ressource est exploitée de façon plus intensive.

Proposition 2.2.2 $G_r^*(t_a)$ est une fonction monotone croissante en r .

Proposition 2.2.3 $g_r^*(0)$ est une fonction monotone décroissante en r .

Proposition 2.2.4 $g_r^*(t_a)$ est une fonction monotone décroissante en r .

Les démonstrations sont disponibles dans les annexes B.5, B.5, et B.5 respectivement.

Proposition 2.2.5 $G_r^*(\infty)$ et $g_r^*(\infty)$ sont des fonctions constantes par rapport à t_a .

11. Logiquement, quand $r = r_1$, $g_r^*(t)$ représente le problème de référence de la section 2.2.

Démonstration Nous voulons prouver que $\frac{\partial G_r^*(\infty)}{\partial t_a} = 0$ et $\frac{\partial g_r^*(\infty)}{\partial t_a} = 0$. Ceci est immédiat à partir des équations (B.15) et (B.13). \square

Les propositions 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 montrent que plus la valeur du choc est élevée (i.e. plus petite la valeur de r), plus bas est le niveau de stock de la ressource en t_a et plus important le taux d'extraction en $t = 0$ et $t = t_a$. Cependant, la proposition 2.2.5 montre qu'à long terme (à l'état stationnaire), le niveau de stock et le comportement d'extraction ne dépendent pas de la date d'occurrence du choc.

2.2.2 Le cas stochastique

Maintenant, la date d'occurrence du choc (t_a) est une variable aléatoire.¹² Soit $f_T(t)$ la fonction de densité, $\psi_T(t) = \int_0^t f_T(x)dx$, la fonction de répartition, et $\Omega_T(t) = 1 - \psi_T(t)$, la fonction de survie de T .

Le problème du planificateur social est ainsi de maximiser l'espérance du bien-être, c'est à dire la valeur espérée des revenus totaux des agriculteurs,

$$\max_{g(\cdot)} E_T \left(\int_0^\infty e^{-\rho t} F(G, g) dt \right) \quad (2.9)$$

$$\dot{G} = \begin{cases} -(1 - \alpha)g + r_1 & \text{si } t \leq T \\ -(1 - \alpha)g + r_2 & \text{si } t > T \end{cases}$$

$$G(0) = G_0 \quad \text{donnée,}$$

$$g \geq 0 \quad G \geq 0.$$

avec $F(G, g)$ la fonction de profit instantané, comme dans le problème précédent,

$$F(G, g) = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g. \quad (2.10)$$

D'après la procédure utilisée dans Dasgupta et Heal (1974) (voir [16]), soit $\phi(G(t))$ la fonction « scrap value » qui s'écrit :

$$\phi(G(T)) = \max_{g(t)} \int_T^\infty e^{-\rho(t-T)} F(G(t), g(t)) dt,$$

représentant la maximisation du bien-être total obtenue lorsque le problème est contraint par la dynamique de l'aquifère :

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r_2.$$

Le fonction à maximiser (2.9) est égale à

$$\int_0^\infty f_T(T) \left[\int_0^T e^{-\rho t} F(G(t), g(t)) dt + e^{-\rho T} \phi(G(T)) \right] dT, \quad (2.11)$$

12. Dans ce qui suit, on note $t_a = T$ par simplicité.

ainsi :

$$\int_0^\infty f_T(T) \left[\int_0^T e^{-\rho t} F(G(t), g(t)) dt \right] dT + \int_0^\infty e^{-\rho T} f_T(T) \phi(G(T)) dT. \quad (2.12)$$

En intégrant par parties la première intégrale de la fonction précédente (2.12) (voir l'intégration détaillée en annexe B.1), on trouve :

$$\int_0^\infty f_T(T) \left[\int_0^T e^{-\rho t} F(G(t), g(t)) dt \right] dT = \int_0^\infty e^{-\rho T} \Omega_T(T) F(G(T), g(T)) dT.$$

La fonction (2.12) et donc, le problème (2.9) peut s'écrire :

$$\max_{g(\cdot)} \int_0^\infty e^{-\rho t} [\Omega_T(t) F(G(t), g(t)) + f_T(t) \phi(G(t))] dt, \quad (2.13)$$

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r_1.$$

Ensuite, nous cherchons à spécifier la distribution du choc aléatoire. Nous choisissons une distribution exponentielle pour estimer la date d'occurrence du choc en raison de sa correspondance avec un cas de « aléa constant », i.e., la densité conditionnelle d'occurrence immédiate du choc est constante en tout t .

T suit maintenant une loi exponentielle, où $f_T(t)$, est la fonction de densité :

$$f_T(t) = \theta e^{-\theta t},$$

$\Omega_T(t)$ est la fonction de survie,

$$\Omega_T(t) = e^{-\theta t},$$

et $h(t)$, la densité conditionnelle d'occurrence immédiate,

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{\Omega_T(t)} = \theta.$$

Le problème du planificateur social devient :¹³

$$\max_{g(\cdot)} \int_0^\infty e^{-(\rho+\theta)t} [F(G, g) + \theta \phi(G)] dt \quad (2.14)$$

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r_1 \quad (2.15)$$

$$G(0) = G_0 \quad \text{donné}, \quad (2.16)$$

$$g \geq 0 \quad G \geq 0. \quad (2.17)$$

La résolution complète du problème modifié est donnée dans l'annexe B.4.

Soit $G_{r,s}^*(t)$ (et $g_{r,s}^*(t)$) le chemin d'extraction et le stock optimaux pour un choc stochastique représentant une diminution du taux de recharge de r_1 à r en t_a , avec $r_1 \geq r \geq 0$;

13. Nous rappelons ici que la valeur du taux de recharge après le choc, r_2 , est présente dans le problème stochastique via la fonction « scrap value » $\phi(G)$.

Proposition 2.2.6 $G_{r,S}^*(\infty)$ (et $g_{r,S}^*(\infty)$) sont respectivement une fonction monotone croissante (et une fonction constante) en r .

Proposition 2.2.7 $G_{r,S}^*(\infty)$ (et $g_{r,S}^*(\infty)$) sont respectivement une fonction monotone décroissante (et une fonction constante) en θ .

Les démonstrations sont disponibles dans les annexes B.5 et B.5 respectivement.

En effet, les propositions 2.2.6 et 2.2.7 montrent que plus la valeur du choc est élevée (i.e. plus la valeur de r est petite), et respectivement, plus la valeur de θ est petite, plus le niveau de stock de la ressource est bas à l'état stationnaire, pendant que le taux d'extraction reste constant.

2.2.3 Cas déterministe vs. cas stochastique

Un des objectifs de ce chapitre est de comparer le comportement d'adaptation optimal quand l'incertitude sur la date d'occurrence du choc augmente. Précédemment, nous avons obtenu les solutions analytiques pour le problème déterministe (dans la section 2.2.1) et pour le problème stochastique (dans la section 2.2.2). Ces deux situations (t_a connue ou T variable aléatoire) sont comparables uniquement dans le cas où la date connue (t_a) est égale à la valeur espérée du temps incertain (T), i.e.,

$$t_a = E_T(t) = \int_0^{\infty} t\theta e^{-\theta t} dt. \quad (2.18)$$

En intégrant par partie l'intégrale de l'équation (2.18), on obtient,

$$t_a = \frac{1}{\theta}.$$

Maintenant, nous allons présenter quelques résultats théoriques issus des solutions analytiques des problèmes précédents.

- Nous supposons qu'une diminution du taux de recharge de r_1 à r_2 en t_a , a lieu. Ainsi,
- $G_{r_2}^*(t)$ (et $g_{r_2}^*(t)$) représente la solution optimale du stock (et du taux d'extraction) du problème déterministe, quand $r = r_2$;
 - $G_{r_2,S}^*(t)$ (et $g_{r_2,S}^*(t)$) représente la solutions optimale du stock (et du taux d'extraction) du problème stochastique, quand $r = r_2$;

Proposition 2.2.8 $G_{r_2}^*(\infty) < G_{r_2,S}^*(\infty)$ et $g_{r_2}^*(\infty) < g_{r_2,S}^*(\infty)$.

Démonstration Comme nous montrons dans l'équation (B.15),

$$G_{r_2}^*(\infty) = \frac{r_2}{(1-\alpha)cb} + \frac{r_2}{\rho} - \frac{a}{bc} + \frac{z}{c}.$$

D'après (B.37), on sait que

$$G_{r_2,S}^*(\infty) = \frac{(a-zb)(1-\alpha)(\rho+\theta) - r_1(\rho+\theta) - cb(1-\alpha)r_1 - b(1-\alpha)^2\theta\tau}{b(1-\alpha)(-c\rho - c\theta + 2\theta v(1-\alpha))}.$$

Ainsi, en substituant les valeurs de τ et v (équations (B.20), (B.21)), on prouve que

$$G_{r_2}^*(\infty) - G_{r_2^S}^*(\infty) = \frac{(r_2 - r_1)E1}{E2},$$

avec,

$$E1 = (\rho + \eta + 4cb(1 - \alpha))(cb(1 - \alpha + \rho + \theta)), \quad \text{et}$$

$$E2 = cb(1 - \alpha)(\rho\eta + \rho^2 + 4cb(1 - \alpha)\rho + 2\theta\eta),$$

avec $\eta > 0$ (voir équation (B.22)).

Par hypothèse, $(r_2 - r_1) < 0$, tous les paramètres du problème sont positifs et $(1 - \alpha) > 0$. Ainsi, $E1, E2 > 0$, et, $G_{r_2}^*(\infty) - G_{r_2^S}^*(\infty) < 0$, comme on voulait démontrer.

Il reste à prouver que $g_{r_2}^*(\infty) < g_{r_2^S}^*(\infty)$. D'après les équations (B.13) et (B.35),

$$g_{r_2^S}^*(\infty) = \frac{r_1}{(1 - \alpha)} > \frac{r_2}{(1 - \alpha)} = g_{r_2}^*(\infty)$$

car $r_1 > r_2$. \square

La proposition 2.2.8 montre qu'à long terme, la ressource chute à un niveau inférieur (et respectivement, les extractions sont plus conservatrices), dans le cas de certitude sur la date du choc que dans le cas d'incertitude. Dans le problème stochastique, l'état stationnaire du stock de la ressource et du taux d'extraction dépendent de la valeur initiale du taux de recharge r_1 , qui est plus grande que la valeur du taux de recharge après le choc, r_2 . Par conséquent, l'état stationnaire du stock de la ressource et du taux d'extraction sont plus grands dans le cas stochastique que dans le cas déterministe.

2.3 Application numérique

Dans cette section, nous appliquons notre problème à l'aquifère La Mancha Occidentale. Nous utilisons des valeurs réelles de paramètres issues de plusieurs sources (Esteban et Albiac (2011) [27], Esteban et Dinar (2012) [28]). Notons que nous analysons le problème en fonction du niveau de stock de l'aquifère (en volume), i.e., en multipliant la hauteur d'eau, H , par la surface occupée par l'aquifère, A et par le coefficient de stockage, S . Les valeurs des différents paramètres utilisés sont données dans la Tableau 2.3.¹⁴

L'aquifère La Mancha Occidentale se situe au Sud de l'Espagne, sous un climat semi-aride où les périodes de sécheresses sont fréquents. L'irrigation est donc indispensable pour maintenir l'agriculture. L'augmentation des extractions en eaux souterraines pour l'irrigation des dernières décennies a entraîné une baisse importante des niveaux piézométriques de la nappe, et donc une importante augmentation des coûts de pompages pour les utilisateurs de

14. Plus précisément, le stock d'eau souterraine est calculé en multipliant la hauteur d'eau de l'aquifère par la surface de l'aquifère et le coefficient de stockage : $G_0 = H_0 * A * S = 640 * 5500 * 0.023$. Les coefficients de la fonction de coût de pompage marginal sont définis comme suit : z est égal au coût maximal marginal de pompage, i.e. le coût de pomper au niveau le plus profond de l'aquifère et il est calculé en multipliant l'élévation de la surface, par le coût unitaire marginal de pompage soit, $S_L * c'$ (avec c' égal à 400 Euros/Mm³.m) ; c est converti en Euros/Mm³*Mm³ en divisant c' par $A * S$.

Paramètres	Description	Unités	Valeur
a	Ordonnée à l'origine fonction de demande	Millions Mètres cubes/An	4403.3
b	Pente fonction de demande	(Millions Mètres cubes/An) ² Euros ⁻¹	0.097
z	Ordonnée à l'origine fonction de coût	Euros/Million Mètre cube	266 000
c	Pente fonction de coût	Euros/(Million Mètre cube) ²	3.162
r	Recharge naturelle	Millions Mètres cubes/An	360
G_0	Niveau de stock (en volume)	Millions Mètres cubes	80960
H_0	Hauteur d'eau de la nappe	Mètres	640
S_L	Niveau de la surface	Mètres	665
A	Surface de l'aquifère	Kilomètres carrés	5500
S	Coefficient de stockage	<i>sans unité</i>	0.023
ρ	Taux d'actualisation	An ⁻¹	0.05
α	Coefficient de retour d'eau	<i>sans unité</i>	0.2

Tableau 2.3 – Valeurs de paramètres de l'aquifère La Mancha Occidentale.

la nappe. De plus, l'aquifère a aussi souffert de régimes inefficaces de gestion, (pour des détails voir Esteban et Albiac (2011) [27]). Le volume extrait pendant les trois décennies passées est estimé environ à 3000 millions de mètres cubes (e.g. López-Gunn (2012) [53]). Ce problème a causé d'importants dégâts aux écosystèmes aquatiques et affecte aussi les usages de l'eau en aval.

2.3.1 Solutions optimales pour les cas déterministes

Problème de référence vs. adaptation en $t = 0$

En premier, nous allons fournir un exemple numérique du cas déterministe avec adaptation en $t = 0$. La Figure 2.1 nous montre les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux de pompage $g^*(t)$ (à droite), pour le problème de référence décrit dans la section 2.2 (en vert) et pour différentes valeurs du choc déterministe (avec adaptation en $t = 0$) ayant lieu dans la 20ème année d'utilisation de la ressource, i.e. $t_a = 20$. Plus précisément, nous simulons une diminution du taux de recharge de la nappe qui passe d'un niveau initial $r_1 = 360$ aux niveaux $r_2 = 330$ (en rouge), 300 (en bleu) et 290 (en noir) millions de mètres cubes par an (Mm³/an).¹⁵

Dans le cas déterministe avec un taux de recharge constant, le problème de référence, l'état stationnaire de la ressource, $G^*(\infty)$, est égal à 78397 Mm³ et l'état stationnaire du taux d'extraction, $g^*(\infty)$, est égal à 450 Mm³/an.¹⁶ Nous observons que, lorsque r_2 décroît, l'état stationnaire du stock passe à un niveau inférieur et les extractions sont plus conservatrices dans le long terme. Par exemple, pour un choc de 70 Mm³/an le niveau de la ressource diminue de 1685 Mm³ et le taux d'extraction diminue de 87 Mm³/an. Ceci illustre la proposition 2.2.1, prouvée dans la section 2.2.1. Deuxièmement, au moment où le choc a lieu, plus

15. On choisit $t_a = 20$ ans et les différentes valeurs du choc, en fonction des observations réalisées dans la zone d'étude dans les années 90 (voir Esteban et Dinar (2012) [28] pour les détails).

16. Selon López-Gunn (2012) [53], le taux d'extraction renouvelable est estimé à 300 Mm³/an.

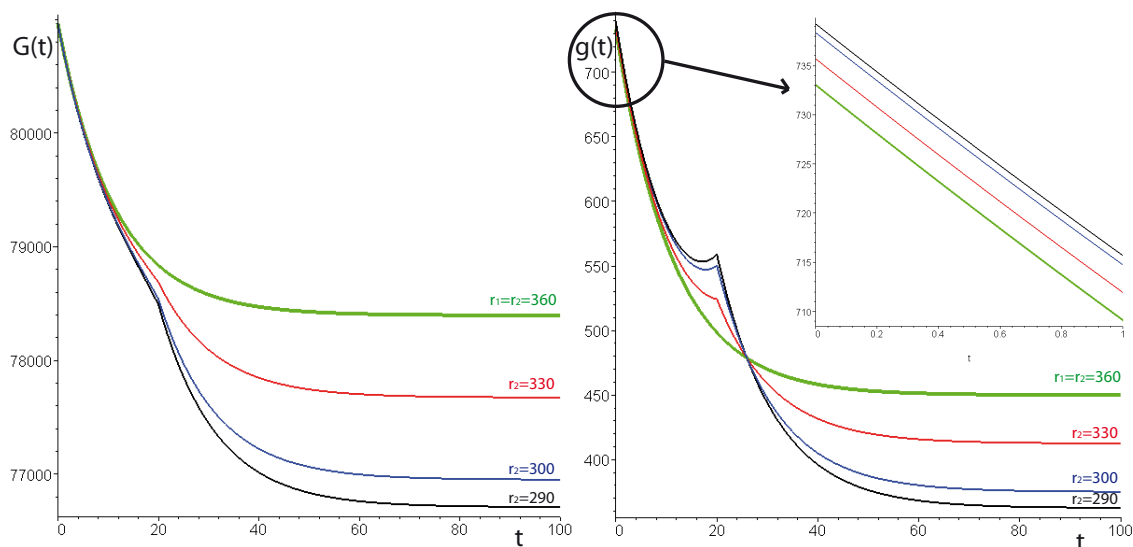


FIGURE 2.1 – $G^*(t)$ en million de mètres cubes (à gauche) et $g^*(t)$ (à droite) en million de mètres cubes par an pour différentes valeurs de r_2 et $t_a = 20$ ans. Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 0$ et $t = 1$ ans.

le choc est important, plus la ressource est exploitée et plus les extractions sont intensives, i.e. $G^*(t_a)$ décroît et $g^*(t_a)$ croît avec une augmentation en r_2 . Par exemple, pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, le taux d'extraction augmente de $61 \text{ Mm}^3/\text{an}$. Ceci illustre les propositions 2.2.2 et 2.2.4. Nous pouvons aussi confirmer que la ressource est plus exploitée au début de l'exercice quand la valeur du choc est plus grande : $g^*(0)$ augmente de 733 à $739 \text{ Mm}^3/\text{an}$, quand r_2 décroît de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$. Ce résultat est prouvé dans la proposition 2.2.3.¹⁷

Ensuite, nous étudions l'impact de la date d'occurrence du choc (t_a) sur le comportement optimal. La Figure 2.2 montre les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux de pompage $g^*(t)$ (à droite), pour le problème de référence décrit dans la section 2.2 (en vert) et pour le problème modifié avec un choc déterministe de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$ ayant lieu à différentes dates t_a . Premièrement, nous remarquons que dans le long terme (état stationnaire) le stock et le taux de pompage restent constants. Ainsi, la date d'occurrence du choc n'a aucun impact sur les valeurs à l'état stationnaire de $G^*(t)$ et $g^*(t)$. Ceci a déjà été prouvé théoriquement dans la proposition 2.2.5. Cependant, à court terme, la valeur de $g^*(t)$ (en $t = 0$ et $t = t_a$) décroît avec un accroissement de t_a . Par exemple, $g^*(0)$ diminue de $43 \text{ Mm}^3/\text{an}$ quand t_a augmente de $t_a = 5$ à $t_a = 20$. De même, $g^*(t_a)$ diminue d'environ $146 \text{ Mm}^3/\text{an}$ quand t_a augmente de $t_a = 5$ à $t_a = 20$. Ensuite, nous calculons le niveau d'extraction total avant t_a et nous obtenons que les extractions augmentent de $8398 \text{ Mm}^3/\text{an}$, quand t_a croît de $t_a = 5$ à $t_a = 20$, et par conséquent, nous pouvons voir que la ressource atteint un niveau plus bas en t_a plus le choc est tardif. En résumé, nous pouvons dire que la date d'arrivée du choc a un impact sur les valeurs de $G^*(t)$ et $g^*(t)$ dans le court terme.

Dans les Figures 2.1 et 2.2, on observe aussi un comportement surprenant concernant le taux d'extraction optimal. En effet, la fonction représentant les extractions optimales est

17. Nous pouvons comparer la baisse du stock de la nappe des 30 dernières années estimée à 3000 Mm^3 (rapporté par López-Gunn) aux résultats trouvés pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, ayant lieu en $t_a = 20$ où $G(0) = 80960 \text{ Mm}^3$ et $G(30)$ est égal à 77608 Mm^3 .

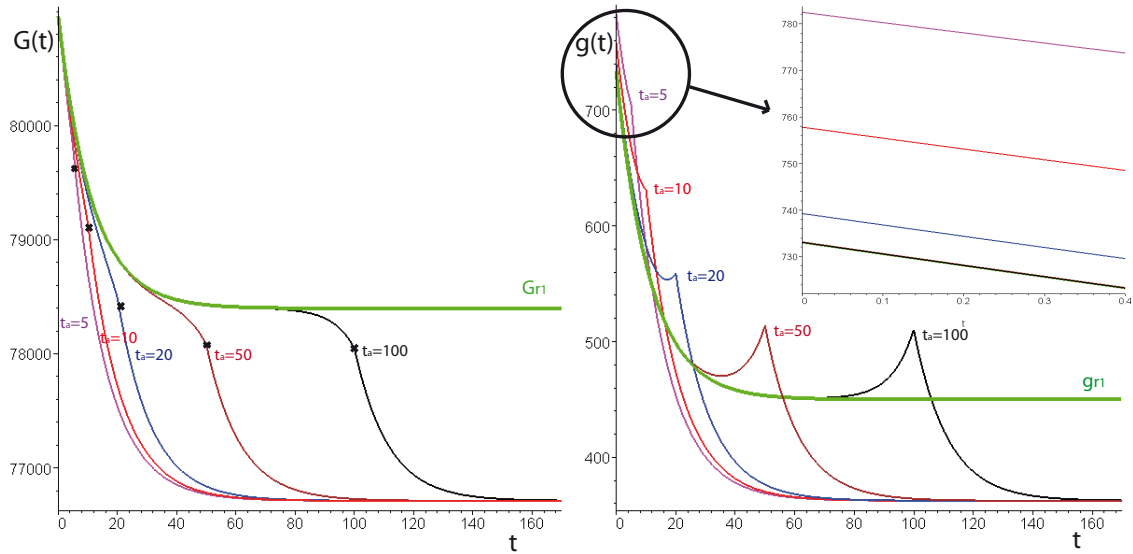


FIGURE 2.2 – $G^*(t)$ en million de mètres cubes (à gauche) et $g^*(t)$ (à droite) en million de mètres cubes par an pour différentes valeurs de t_a et $r_2 = 290$ million de mètres cubes par an. Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 0$ et $t = 0.4$ ans.

non-monotone dans le court terme : on voit que la fonction décroît, pour ensuite croître juste avant l'arrivée du choc. Plus le choc est important ou plus il est tardif, plus ce comportement est accentué (voir Figures 2.1 et 2.2). Pour mieux comprendre ce résultat, nous déterminons la différence entre le choc déterministe et le problème simple, comme l'illustre la Figure 2.3, pour différentes valeurs de r_2 (à gauche) et t_a (à droite). En premier, plus la valeur du choc est grande, plus importante est la quantité d'eau pompée et plus rapide est l'accroissement des extractions entre $t = 0$ et $t = t_a$ (comme on peut voir dans le côté gauche de la figure). Ce résultat peut s'expliquer par le fait que l'agence de l'eau va augmenter d'autant plus ses extractions à court terme que le choc est important, afin d'accumuler des gains et de compenser les possibles pertes futures. Ensuite, plus le choc a lieu tard, plus le niveau d'extractions totales sera important et plus l'accroissement des extractions sera lent avant l'arrivée du choc (comme illustré sur le côté droit). Le dernier résultat traduit le fait que l'agence de l'eau a plus de temps pour mieux s'adapter au choc.

	(1)	(2)	(3)	$\frac{(1)}{(3)}$	$\frac{(2)}{(3)}$
	$[0, t_a]$	$[t_a, \infty]$	$[0, \infty]$	(en %)	(en %)
$r_1 = r_2 = 360$	219 311	87 757	307 068	71	29
$r_2 = 330$	220 893	80 009	300 902	73	27
$r_2 = 300$	222 424	72 720	295 144	75	25
$r_2 = 290$	222 924	70 391	293 315	76	24

Tableau 2.4 – Bien-être social quand $t_a = 20$ ans en milliers d'Euros (valeurs arrondies) pour différentes valeurs de r_2 et dans différents intervalles de temps.

Maintenant, dans les Tableaux 2.4 et 2.5, nous calculons le bien-être social, comme défini dans l'équation (2.4), correspondant aux simulations réalisées dans les Figures précédentes 2.1 et 2.2. Dans le Tableau 2.4 on montre que le bien-être social augmente dans la première période (avant t_a , colonne 1) puis diminue dans la deuxième période (après t_a , colonne 2)

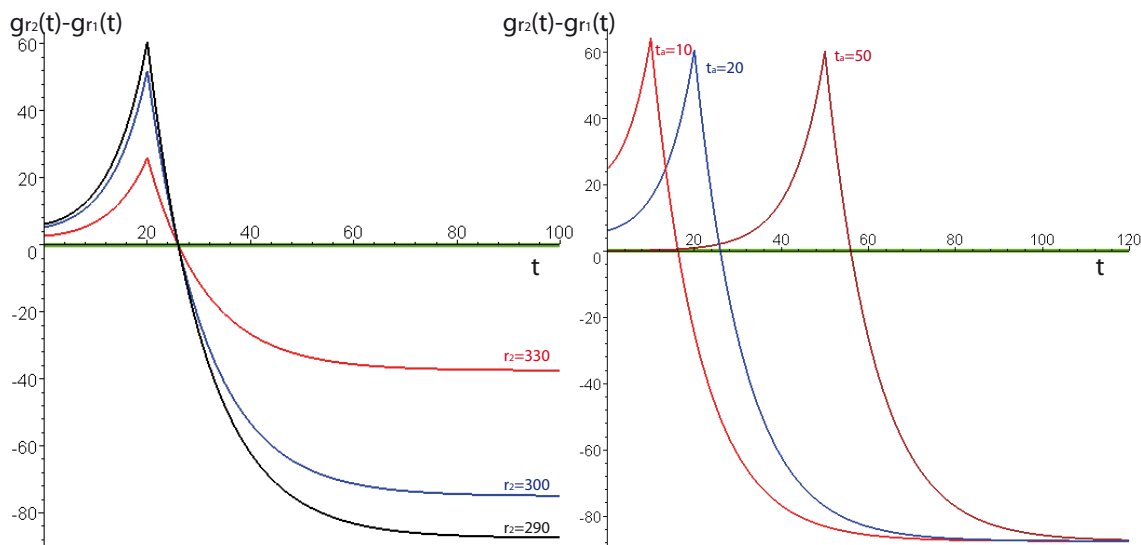


FIGURE 2.3 – Différence entre le taux d'extraction avec et sans choc en $t_a = 20$ ans pour différentes valeurs de r_2 (côté gauche) et lorsque $r_2 = 290$ million de mètres cubes par an, à différentes dates d'occurrence (côté droit).

quand la valeur du choc augmente. Logiquement, le bien-être social total (colonne 3) décroît lorsque la valeur du choc augmente. Par exemple, quand la valeur du choc croît de 70 Mm³/an, le bien-être total diminue d'environ 14 millions d'Euros. Le pourcentage de gain dans la première période (colonne 4) est d'autant plus élevé que l'intensité du choc est grande, dû au comportement de compensation du dommage décrit précédemment. Logiquement, le pourcentage de gain de la deuxième période (colonne 5) diminue lorsque l'intensité du choc augmente. Ensuite, dans le Tableau 2.5, nous montrons que le bien-être social augmente, quand le choc a lieu plus tard. On peut distinguer deux phénomènes : en premier, le dommage ayant lieu plus tard est réduit dû à l'actualisation. En deuxième, éliminant l'effet de l'actualisation, la perte de bien-être social est supérieure quand le choc a lieu dans les premières années de planification que dans les années postérieures.¹⁸ Ce dernier résultat peut être dû au fait que l'agence de l'eau a le temps de mieux s'adapter au choc déterministe, comme décrit dans le paragraphe précédent.

	$t_a = 5$	$t_a = 10$	$t_a = 20$	$t_a = 50$	$t_a = 100$	$t_a = 150$	$t_a = 200$
$r_2 = 359$	306 602	306 711	306 856	307 021	307 064	307 067	307 068
$r_2 = 330$	293 489	296 694	300 902	305 710	306 957	307 059	307 067
$r_2 = 300$	280 754	286 987	295 144	304 444	306 853	307 050	307 066
$r_2 = 290$	276 696	283 900	293 315	304 042	306 820	307 047	307 066
$r_2 = 150$	229 727	248 467	272 469	299 478	306 446	307 017	307 064

Tableau 2.5 – Bien-être social (en milliers d'Euros) pour différents valeurs de r_2 et t_a .

18. En effet, la valeur d'un choc correspondant à la différence entre $r_2 = 359$ et $r_2 = 150$ est égale à 4000 Euros en $t = 200$. La valeur du même choc en $t = 5$ mais évaluée en $t = 200$ est égal à 4481 Euros.

En **conclusion**, les solutions théoriques et numériques nous montrent clairement que lorsque l'intensité du choc augmente, les extractions et le bien-être social augmentent dans la première période (avant l'occurrence du choc). L'agence de l'eau va accumuler des gains pour compenser les pertes encourues pendant la deuxième période. Dans la deuxième période, la quantité d'eau extraite et le bien-être se réduisent. En conséquence, à long terme, les extractions et le bien-être diminuent quand l'intensité du choc augmente. De plus, plus le choc est grand, plus le niveau du stock de la ressource atteint un niveau inférieur à long terme, en raison de la diminution du taux de recharge. Le bien-être social total diminue lorsque la valeur du choc augmente, ce qui devrait motiver l'agence de l'eau à s'adapter au choc déterministe à partir de $t = 0$. Les solutions numériques suggèrent aussi que lorsque le choc arrive plus tard, la vitesse d'adaptation à travers le comportement d'extraction diminue, mais le bien-être total augmente. Cela veut dire que l'agence de l'eau a plus le temps de mieux s'adapter au choc déterministe.

Adaptation en $t = 0$ vs. adaptation en $t = t_a$

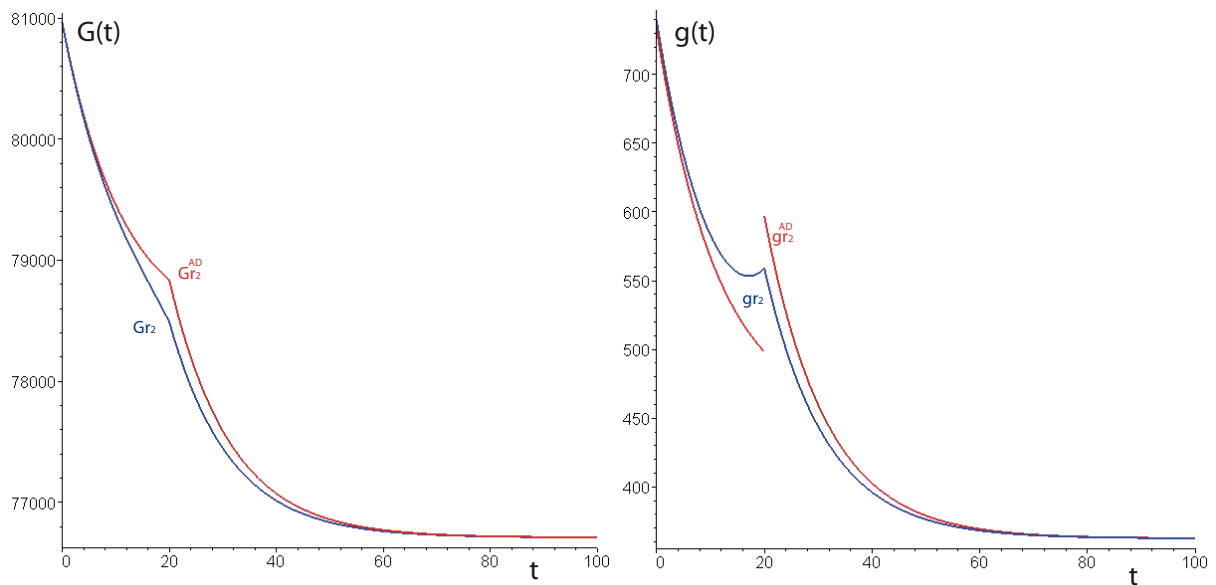


FIGURE 2.4 – $G^*(t)$ en millions de mètres cubes $g^*(t)$ en millions de mètres cubes par an pour le problème avec adaptation en $t = t_a$ (en rouge) et avec adaptation en $t = 0$ (en bleu) en $t_a = 20$ ans (côté gauche) pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an.

Nous avons aussi calculé les solutions optimales de notre problème lorsque l'agence de l'eau n'a aucune information sur la date d'occurrence du choc en $t = 0$, i.e., le cas déterministe avec adaptation à partir de $t = t_a$. Il n'est pas nécessaire de fournir la résolution analytique de ce cas. Il suffit de savoir que la résolution du problème consiste à considérer deux problèmes de référence en horizon infini pendant les deux différentes périodes du problème. En effet, quand l'agence de l'eau n'a aucune information sur la date du choc en $t = 0$, le comportement optimal correspond aux solutions optimales du problème de référence (annexe B.2) avec $r = r_1$, avant l'arrivée du choc. Au contraire, à partir du moment où le choc a lieu (t_a), le comportement optimal correspond aux solutions optimales du problème

de référence, mais maintenant en prenant en compte la valeur du choc (i.e. $r = r_2$).¹⁹

Dans la suite, nous comparons la situation avec adaptation en $t = t_a$ et la situation avec adaptation en $t = 0$, i.e., nous comparons un cas dans lequel l'agence de l'eau réagit seulement une fois que le choc est arrivé à un cas dans lequel l'agence de l'eau s'adapte d'une façon optimale au choc à partir de l'instant initial de planification (i.e., le choc déterministe de la section 2.2.1). Dans la Figure 2.4, nous comparons les solutions optimales du stock $G^*(t)$ et du taux d'extraction $g^*(t)$ pour le cas avec adaptation en $t = 0$ (en bleu) et pour le cas avec adaptation en $t = t_a$ (en rouge), lorsque la valeur du choc ($r_2 = 290 \text{ Mm}^3/\text{an}$) et la date du choc ($t_a = 20$ ans) sont fixées. Nous observons sur le côté droit de la Figure, que la ressource est plus intensivement exploitée quand on prévoit le choc (en bleu) que quand on ne le prévoit pas jusqu'à son arrivée. Par exemple, dans le cas « sans information » en $t = 0$, le niveau du stock en t_a excède le niveau du stock du cas avec information complète (cas déterministe avec adaptation en $t = 0$) d'environ 345 Mm^3 . Cependant, à long terme, le niveau du stock est le même dans les deux cas. De plus, nous observons (côté gauche de la figure) que les extractions sont inférieures dans le cas sans information avant l'arrivée du choc, mais supérieures à long terme, par rapport au cas avec information complète.

Finalement, nous calculons le bien-être social des deux problèmes déterministes pour les valeurs correspondantes à la simulation numérique de la Figure 2.4. Nous observons, dans le Tableau 2.6, que les pertes du fait de l'adaptation tardive sont plus grandes à court et à long terme. Par exemple, nous voyons que les pertes de bien-être totales dues au manque d'information sont d'environ 47 millions d'Euros. En particulier, les pertes sont d'environ 4 millions d'Euros à court terme et de 43 millions d'Euros à long terme.

En **conclusion**, c'est avantageux pour l'agence de l'eau de prendre en compte les informations sur l'occurrence d'un choc déterministe le plus tôt possible. En effet, l'agence de l'eau fait toujours mieux si elle prévoit le choc que si elle réagit une fois qu'il est arrivé : le bien-être social total, à court terme et à long terme est inférieur dans le cas avec adaptation en t_a que dans le cas avec adaptation en 0.

	$[0, t_a)$	$[t_a, \infty)$	TOTAL
adaptation en $t = t_a$	219 311	27 195	246 506
adaptation en $t = 0$	222 924	70 392	293 316

Tableau 2.6 – Bien-être social en milliers d'Euros du problème avec adaptation en $t = t_a$ et avec adaptation en $t = 0$ pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an ayant lieu en $t_a = 20$ ans.

2.3.2 Solutions optimales pour les cas stochastiques

Problème de référence vs. adaptation en $t = 0$

Dans cette section, nous allons construire un exemple numérique du cas stochastique avec adaptation en $t = 0 : t_a$, la date d'arrivée du choc, est une variable aléatoire qui suit une distribution exponentielle de paramètre θ connu (voir section 2.2.2). En effet, la probabilité

19. Nous considérons aussi $G_2(t_a) = G_1(t_a)$ avec $G_1(t)$, la solution optimale du stock du problème avant t_a , et $G_2(t)$, la solution optimale du stock du problème, après t_a .

conditionnelle d'occurrence immédiate (ou la probabilité d'occurrence en t sachant que le choc n'a pas eu encore lieu) est une fonction constante (égal à θ).

Dans la Figure 2.5, nous observons les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux de pompage $g^*(t)$ (à droite), pour le problème initial décrit dans la section 2.2 (en vert) et pour différentes valeurs du choc stochastique avec adaptation en $t = 0$, lorsque $r_2=330$ (en rouge), 290 (en bleu) et 150 (en noir) Mm^3/an , avec $\theta = 0.05$. Pour donner un exemple, la probabilité qu'un choc ait lieu avant la cinquième année est de 22 %. Dans le côté droit supérieur de la Figure, le zoom montre le taux d'extraction optimal entre $t = 0$ et $t = 2$ ans.

Premièrement, on remarque le même résultat que dans le cas déterministe, i.e., l'état stationnaire du choc stochastique diminue quand l'intensité du choc augmente. Par exemple quand r_2 décroît de 70 Mm^3/an , le stock diminue d'environ 237 Mm^3 . Cependant, le taux d'extraction reste le même dans le long terme. Ceci est prouvé théoriquement dans la proposition 2.2.6. De plus, en $t = 0$, la quantité d'eau pompée est d'autant supérieure, que le choc est grand. Ceci est illustré dans le côté supérieur droit de la figure.

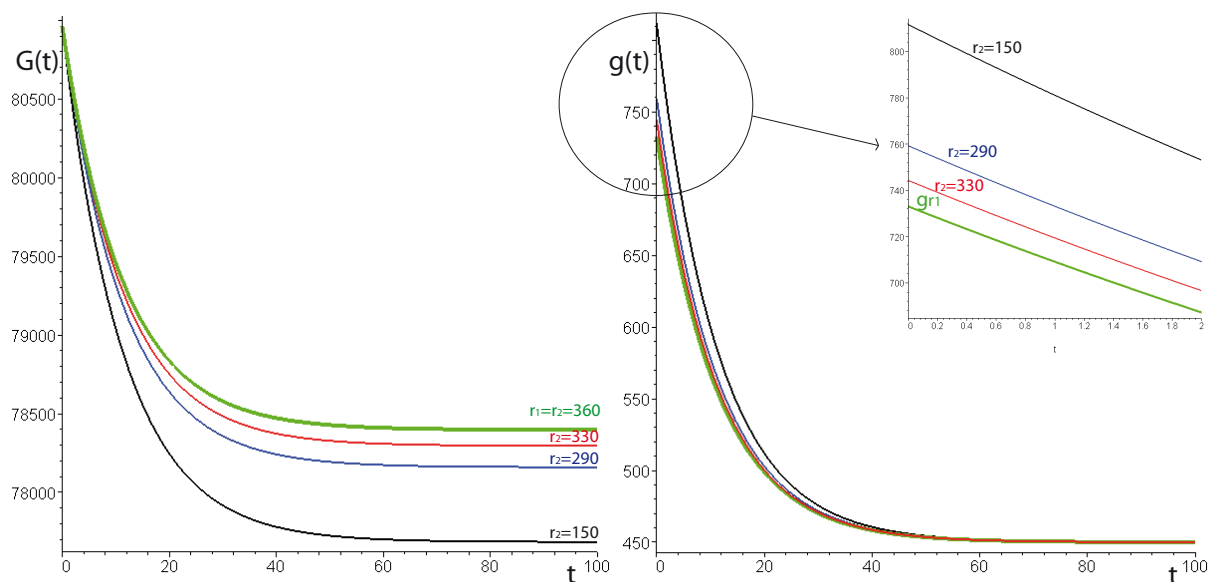


FIGURE 2.5 – $G^*(t)$ en million de mètres cubes (à gauche) et $g^*(t)$ (à droite) en million de mètres cubes par an pour différentes valeurs de r_2 et $\theta = 0.05$. Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 0$ et $t = 2$ ans.

En second lieu, la Figure 2.6 illustre les solutions optimales pour différentes valeurs de θ , la probabilité d'occurrence immédiate, pour un choc de 70 Mm^3/an . Quand θ croît, le taux d'extraction augmente en $t = 0$. Par exemple, quand θ augmente de $\theta = 0.05$ à $\theta = 0.2$, $g^*(t)$ croît d'environ 32 Mm^3/an en $t = 0$. En effet, θ mesure le risque présent dans le problème, et quand ce risque augmente, le comportement d'extraction optimal est plus intensif dans le très court terme. Ceci est montré dans le côté supérieur droit de la Figure 2.6. Logiquement, le cas sans risque ($\theta = 0$) correspond à notre problème de référence. Finalement, cette utilisation de la ressource moins prudente à court terme, quand θ augmente, va faire que le niveau de la ressource chute à long terme. Ceci illustre la proposition 2.2.7.

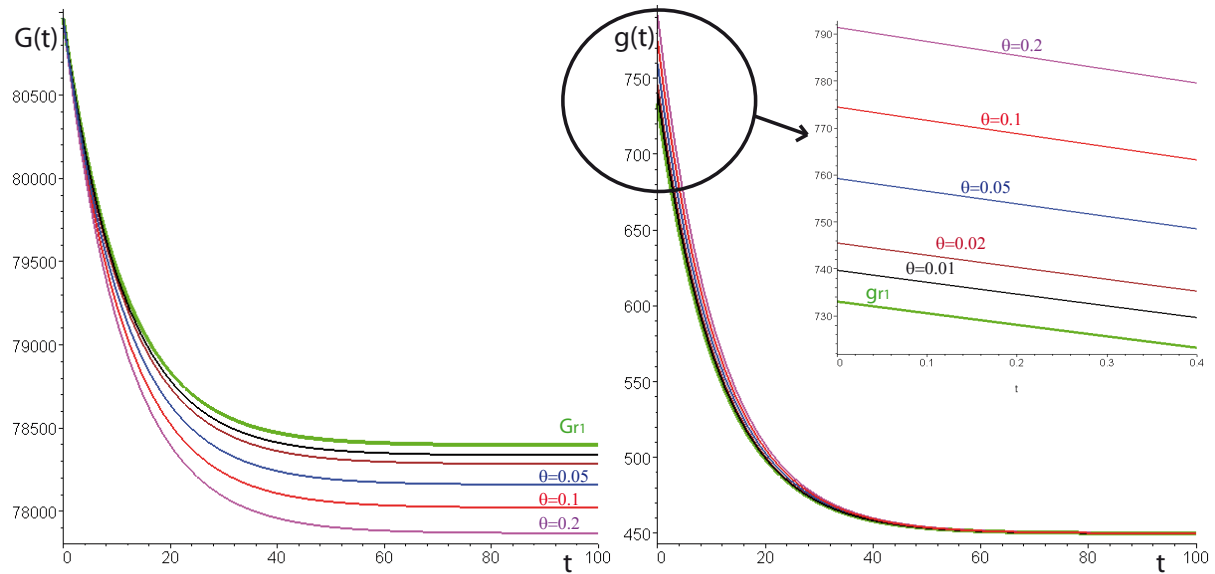


FIGURE 2.6 – $G^*(t)$ en millions de mètres cubes (à gauche) et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par an pour différentes valeurs de θ et $r_2 = 290$ millions de mètres cubes par an. Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 0$ et $t = 0.4$ ans.

Ensuite, nous calculons le bien-être social, comme défini dans l'équation (2.9), pour différentes valeurs de la probabilité d'occurrence immédiate (θ) et du choc (r_2). Les résultats sont décrits dans le Tableau 2.7. Quand θ est fixé, le bien-être décroît avec une augmentation de la valeur du choc (i.e. quand r_2 diminue). Par exemple, pour un choc de 70 Mm^3/an et $\theta = 0.05$, le bien-être décroît d'environ 19 millions d'Euros. De plus, quand la valeur du choc (r_2) est fixée, le bien-être social décroît quand le risque augmente.

	$\theta = 0.2$	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.05$	$\theta = 0.02$	$\theta = 0.01$	$\theta = 0.007$	$\theta = 0.005$
$r_2 = 359$	306 585	306 669	306 771	306 890	306 970	306 999	307 015
$r_2 = 330$	293 003	295 450	298 422	302 161	304 214	305 055	305 514
$r_2 = 300$	279 786	284 538	290 302	297 552	301 532	303 164	304 053
$r_2 = 290$	275 568	281 058	287 712	296 082	300 677	302 561	303 587
$r_2 = 150$	226 416	240 579	257 605	278 973	290 715	295 533	298 158

Tableau 2.7 – Bien-être social (en milliers d'Euros) pour différentes valeurs de r_2 et θ .

En **résumé**, les solutions numériques montrent que plus la valeur du choc stochastique est importante, plus le bien-être social est petit, bien qu'il y ait une augmentation des extractions à court terme. Comme décrit dans la section précédente, ce résultat est logique car l'agence de l'eau doit faire un plus grand effort pour s'adapter au choc stochastique. De plus, un risque supérieur d'occurrence (une augmentation de θ) implique un comportement d'extraction moins prudent, qui entraîne un niveau inférieur de la ressource à long terme et une diminution du bien-être social total.

Adaptation en $t = 0$ vs. adaptation en $t = t_a$

Finalement, un cas stochastique plus réaliste consisterait à introduire la possibilité de s'adapter à partir de l'arrivée du choc, t_a . En effet, si nous supposons la réalisation du choc stochastique en $T = t_a < \infty$ dans l'horizon de planification, nous nous demandons quel serait le chemin d'extraction optimal du problème si l'on prend en compte cette l'information à l'arrivée du choc. Dans cette section, nous comparons donc deux types de chocs stochastique : avec adaptation en $t = 0$ et avec adaptation à partir de t_a . Dans le premier, le cas avec adaptation en $t = 0$, le choc n'arrive jamais, i.e. la date d'occurrence du choc stochastique est $T = \infty$. Ce problème peut aussi correspondre à un cas où le gestionnaire de la ressource, l'agence de l'eau, agit de façon à ignorer l'arrivée du choc, ou autrement dit, l'agence n'obtient pas l'information de l'occurrence du choc au moment où il a lieu. Dans le deuxième, le cas avec adaptation en t_a , le choc a lieu en t_a , i.e. la date d'occurrence du choc stochastique est $T = t_a$. Ainsi, intuitivement, le chemin d'extraction optimal consisterait à suivre le chemin du cas stochastique « sans information en $t = t_a$ » avant l'arrivée du choc, puis à partir de t_a , l'agence prendrait en compte l'information de l'arrivée du choc et donc va agir comme dans un problème de référence où le taux de recharge est $r = r_2$.

Nous confirmons notre intuition en réalisant un exemple numérique. Dans la Figure 2.7, nous observons les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite), pour le choc stochastique « sans information en $t = t_a$ » (en rouge), pour le choc stochastique avec adaptation à partir de $t_a = 20$ (en pointillé noir) et pour le problème de référence avec un taux de recharge constant de $r = r_2 = 290$ millions de mètres cubes par an (en noir) lorsque un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$ a lieu avec une probabilité d'occurrence immédiate de $\theta = 0.05$. A court terme, avant l'occurrence du choc, la ressource est exploitée de la même façon dans les deux cas stochastiques. En revanche, à long terme, en cas d'adaptation à partir de t_a , le niveau optimal de la ressource tombe pour atteindre un état stationnaire d'un problème déterministe avec une recharge constante de valeur $r = r_2 = 290$ millions de mètres cubes par an. Logiquement, les extractions sont donc supérieures après l'arrivée du choc dans le cas avec adaptation que dans le cas « sans information en $t = t_a$ » (voir côté droit de la Figure). Ce comportement moins prudent d'extraction à partir de t_a va entraîner des niveaux de bien-être supérieurs totaux d'environ 13 Millions d'Euros (voir Tableau 2.8), dans le cas d'adaptation à partir de t_a .

En résumé, L'agence de l'eau ferait bien de prendre en compte l'information de l'arrivée du choc et de s'adapter à ce moment là, au lieu de l'ignorer.

	TOTAL
adaptation en $t = 0$	287 712
adaptation en $t = t_a$	330 616

Tableau 2.8 – Bien-être social en milliers d'Euros des cas stochastiques pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an ayant lieu en $t_a = 20$ ans, avec une probabilité d'occurrence immédiate de $\theta = 0.05$.

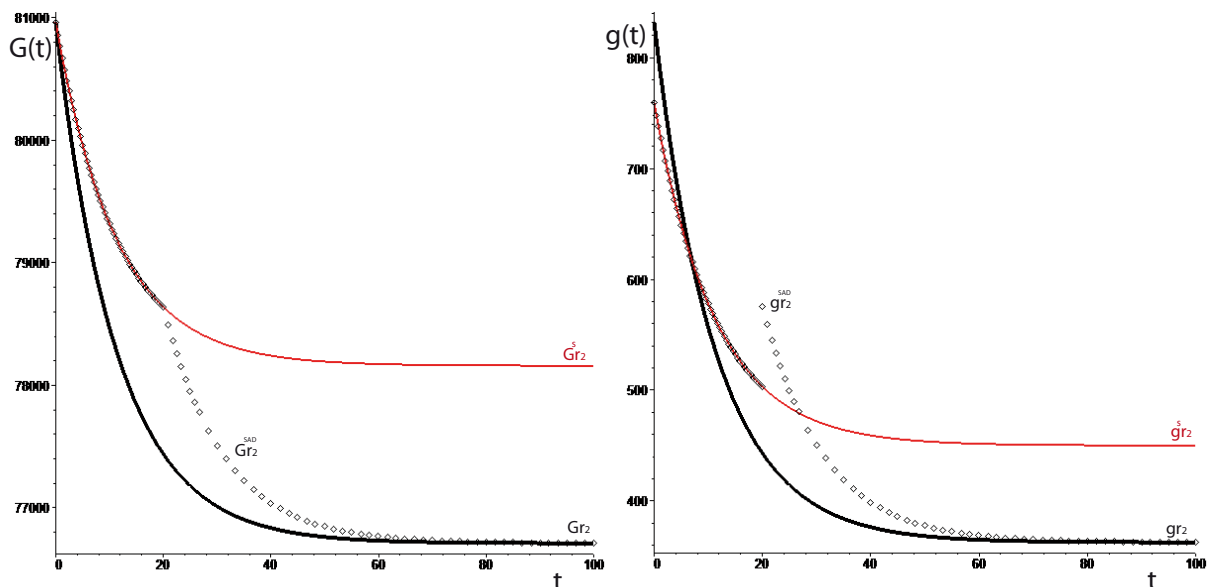


FIGURE 2.7 – $G^*(t)$ (côté gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (côté droit) en millions de mètres cubes par an pour le choc stochastique « sans information en $t = t_a$ » (en rouge), pour le choc stochastique avec adaptation à partir de $t_a = 20$ (en pointillé noir) et pour le problème de référence avec $r = r_2$ (en noir) pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an et de probabilité d'occurrence immédiate $\theta = 0.05$.

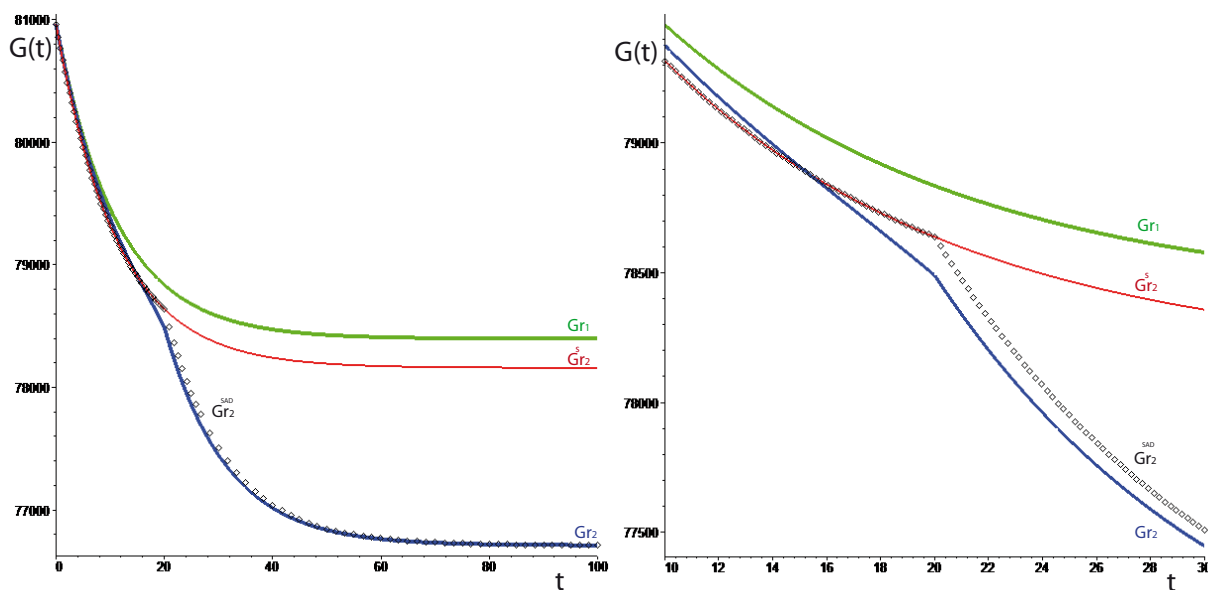


FIGURE 2.8 – $G^*(t)$ en millions de mètres cubes pour le problème simple (en vert), le choc déterministe (en bleu) et le choc stochastique sans adaptation (en rouge) et avec adaptation à partir de t_a (en pointillé noir), quand $r_2 = 290$ millions de mètres cubes par an, $t_a = 20$ ans et $\theta = 0.05$. Côté droit : zoom de $G^*(t)$ entre $t = 10$ et $t = 30$ ans.

2.3.3 Cas déterministes vs. cas stochastiques

Dans cette section, nous analysons l'effet de l'augmentation de l'incertitude (concernant la date d'occurrence du choc), i.e., les cas d'information complète ou « statistique », sur le comportement d'extraction et sur le bien-être social, en utilisant des simulations numériques.

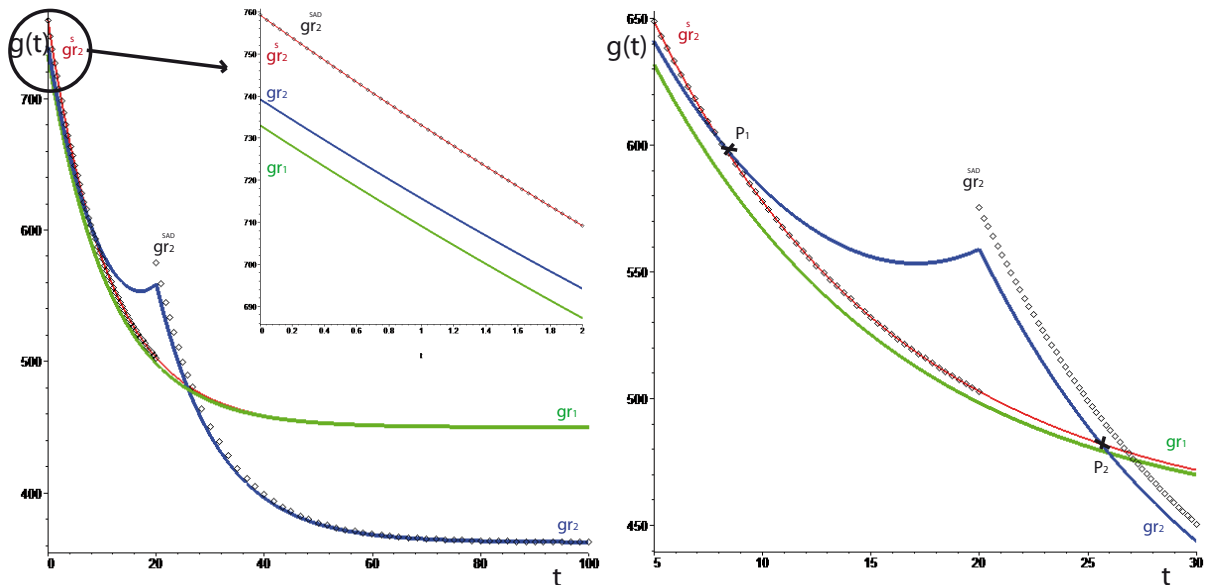


FIGURE 2.9 – $g^*(t)$ en millions de mètres cubes par an pour le problème simple (en vert), le choc déterministe (en bleu) et le choc stochastique sans adaptation (en rouge) et avec adaptation à partir de t_a (en pointillé noir), quand $r_2 = 290$ millions de mètres cubes par an, $t_a=20$ ans et $\theta=0.05$. Côté droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 5$ et $t = 30$ ans. Coin supérieur gauche : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 0$ et $t = 2$ ans.

Dans les Figures 2.8 et 2.9, nous comparons les solutions optimales du stock $G^*(t)$ et du taux de pompage $g^*(t)$, pour le problème initial de référence décrit dans la section 2.2 (en vert), pour le choc déterministe avec adaptation en $t = 0$ (en bleu), pour le choc stochastique « sans information en t_a » (en rouge) et pour le choc stochastique « avec information en t_a » (en pointillé noir), lorsque $r_2=290$ Mm³/an, la date d'occurrence du choc déterministe ($t_a = 20$ years), et la probabilité conditionnelle du choc stochastique ($\theta = 0.05$) sont fixés. Dans la suite, nous analysons dans un premier temps, les différences dans le comportement d'extraction et dans le bien-être social, entre le choc déterministe et le choc stochastique « avec information en t_a » et dans un deuxième temps, le choc déterministe et le choc stochastique « sans information en t_a ». Nous rappelons ici qu'il faut comparer un cas déterministe et un cas stochastique de façon que la date du cas certain t_a est égal à l'espérance de la date du cas incertain, $\frac{1}{\theta}$, (voir section 2.2.3 pour les détails).

Cas déterministe (avec adaptation en $t = 0$) vs. cas stochastique (avec adaptation en $t = t_a$)

À l'état stationnaire, on observe que le niveau de la ressource (cf. Figure 2.8) et le taux d'extraction (cf. Figure 2.9) dans le cas déterministe (en bleu) et dans le cas stochastique « avec information en $t=t_a$ » (en pointillé noir) sont les mêmes. Ce résultat est logique car, à partir de t_a , le problème déterministe et stochastique avec adaptation sont des problèmes déterministes sous contrainte de différents niveaux de stock initiales. En revanche à court terme, avant l'arrivée du choc, les extractions sont inférieures dans le cas stochastique. Cela veut dire que le comportement d'extraction est plus prudent à court terme, lorsque le choc est stochastique que dans le cas déterministe. Cela implique un niveau supérieur de la nappe à l'arrivée du choc dans le cas stochastique (voir Figure 2.8). Après l'occurrence de choc,

les extractions sont supérieures dans le cas stochastique.

Maintenant, nous calculons la différence (D_1) du bien-être social entre le cas déterministe et le cas stochastique « avec information en $t = t_a$ » (voir Tableau 2.9), avant ($[0, t_a]$), après l'arrivée du choc ($[t_a, \infty]$) et de façon globale ($[0, \infty]$) dans l'horizon de planification. La différence D_1 est presque toujours négative, sauf dans les cas extrêmes, chocs tardifs de hautes intensités, où la différence peut être positive. L'agence de l'eau n'a donc pas intérêt à acquérir de l'information exacte sur le choc au début de l'horizon de planification, si elle est sûre d'avoir l'information du choc à son arrivée, (et donc de pouvoir s'adapter au choc dès son arrivée),²⁰ sauf si le choc est particulièrement intense et tardif (de façon équivalente peu risqué). Analysons maintenant les résultats plus en détails, i.e., à court et à long terme. Quand t_a est fixe, la différence D_1 augmente dans la deuxième période, plus le choc est intense. Au contraire, $D_1(r_2)$ est une fonction non-monotone dans la première période. Par exemple en $t_a = 50$, $D_1(r_2)$ décroît, pour après croître et atteindre une différence positive d'environ 17 Millions d'Euros. Cela est dû au comportement d'extraction réalisé dans la première période, qui est plus prudent dans le cas stochastique. De ce fait, globalement, $D_1(r_2)$ est une fonction non-monotone. Maintenant, quand r_2 est fixe, la différence $D_1(t_a)$ est non-monotone à court, à long terme et globalement. Cela est dû à l'effet combiné d'une augmentation de la valeur de l'information au fil du temps et d'une diminution de la différence entre les valeurs de l'information due à l'actualisation.

	$(t_a = 5, \theta = 0.2)$			$(t_a = 20, \theta = 0.05)$			$(t_a = 50, \theta = 0.02)$		
	$[0, t_a]$	$[t_a, \infty]$	TOTAL	$[0, t_a]$	$[t_a, \infty]$	TOTAL	$[0, t_a]$	$[t_a, \infty]$	TOTAL
$r_2 = 330$	-124 037	-505	-124 542	-46 707	-770	-47 477	-6 697	-280	-6 977
$r_2 = 290$	-109 160	-1 141	-110 301	-35 798	-1 501	-37 299	-408	-519	-927
$r_2 = 150$	-66 167	-3 020	-69 187	-4 612	-3 865	-8 477	17 411	-1 339	16 072

Tableau 2.9 – Différence de bien-être social entre le cas déterministe et le cas stochastique avec adaptation en milliers d'Euros pour différentes valeurs de r_2 et (t_a, θ) .

En **conclusion**, la différence de bien-être entre le cas déterministe et le cas aléatoire « avec information en t_a » est toujours négative, sauf dans les cas d'un choc extrême : haute intensité/tardif (équivalent à peu risqué). L'agence de l'eau n'a donc pas intérêt à acquérir de l'information exacte sur le choc au début de l'horizon de planification, si elle est sûre d'avoir l'information du choc à son arrivée, (et donc de pouvoir s'adapter au choc dès son arrivée). Par exemple, pour un cas extrême d'un choc à haute intensité, très peu risqué, l'agence de l'eau a intérêt à acquérir de l'information exacte sur le choc au début de l'horizon de planification, même s'il est sûre d'avoir l'information du choc à son arrivée. Logiquement, l'agence de l'eau a suffisamment de temps pour s'adapter à un tel choc avant son arrivée. En revanche, pour un cas extrême d'un choc à haute intensité, précoce dans le temps (ou de façon équivalente très risqué), l'agence de l'eau n'a pas intérêt à acquérir de l'information exacte sur le choc au début de l'horizon de planification, même s'il est sûre d'avoir l'information du choc à son arrivée. Cela peut être dû au fait que l'agence de l'eau n'a pas le temps de s'adapter à un tel choc avant son arrivée.

20. Nous considérons seulement des cas où le choc a lieu.

Ces résultats indiquent que le choc stochastique peut être moins coûteux que le choc déterministe pour la société. Cela motive, la comparaison de deux cas d'informations extrêmes : le cas déterministe (avec adaptation en $t = 0$) et cas stochastique (avec adaptation en $t = 0$), i.e., le cas d'information complète et le cas d'information « statistique » tout au long de l'horizon de planification.

Cas déterministe (avec adaptation en $t = 0$) vs. cas stochastique (avec adaptation en $t = 0$)

On peut noter que le niveau de la ressource (cf. Figure 2.8) à l'état stationnaire est plus petit d'environ 1449 Mm^3 dans le cas du choc déterministe que dans le cas stochastique avec adaptation en $t = 0$, bien que les extractions (cf. Figure 2.9) à l'état stationnaire soient moins intensives (d'environ 87 Mm^3 par an). Ce résultat illustre la proposition 2.2.8. A court terme, on observe le comportement inverse : le niveau de la ressource est inférieur dans le cas stochastique que dans le cas déterministe, comme on montre dans la Figure 2.8. De plus, on note un comportement intéressant dans la Figure 2.9 : le taux d'extraction optimal dans le cas déterministe (en bleu) et dans le cas stochastique sans adaptation (en rouge) se croisent en deux points P_1 (avant t_a) et P_2 (après t_a). Dans une première période $[0, P_1)$, les extractions sont plus intensives dans le cas du choc stochastique sans adaptation (pour avoir des détails, voir le zoom entre $t = 0$ et $t = 2$ dans le coin supérieur de la Figure 2.9). En revanche, dans une deuxième période $[P_1, P_2)$, les extractions sont plus intensives dans le cas déterministe.

Ensuite, nous calculons la différence (D_2) du bien-être social entre le cas déterministe et le cas stochastique avec adaptation en $t = 0$ (voir Tableau 2.10). En premier lieu, nous observons que D_2 est toujours positive. Cela veut dire que le choc déterministe est moins coûteux pour la société que le choc stochastique « sans information en t_a ». Il est donc plus intéressant pour l'agence de l'eau d'acquérir de l'information exacte sur le choc au début de l'horizon de planification, si elle n'est pas sûre d'avoir l'information du choc à son arrivée (si elle ne peut pas s'adapter au choc dès son arrivée). Deuxièmement, nous observons que plus la valeur du choc est grande (i.e., plus r_2 est petit), plus la valeur de D_2 est grande. De ce fait, le plus avantageux pour l'agence de l'eau est d'acquérir plus d'information sur le choc en $t = 0$. Ce type de résultat est logique et correspond aux résultats trouvés lorsque nous analysons les deux problèmes (le problème déterministe et le problème stochastique « sans information en t_a ») séparément. Finalement, nous pouvons voir une relation non-monotone entre t_a et D_2 . En effet, la fonction $D_2(t_a)$ croît dans un premier temps, puis décroît à partir d'un point situé entre $t_a = 50$ et $t_a = 100$ années. En retardant le choc déterministe, ou de façon équivalente, en diminuant la probabilité conditionnelle d'occurrence immédiate du choc stochastique, nous observons que dans un premier temps, il est de plus en plus utile pour l'agence d'eau d'acquérir de l'information sur la date du choc mais à partir d'une certaine date, l'inverse peut se voir, i.e., l'acquisition de l'information est de moins en moins utile. Ce résultat est dû à un effet combiné de l'augmentation de la valeur de l'information au fil du temps et la diminution de la différence entre les valeurs de l'information due à l'actualisation. Le dernier effet devient plus fort que le premier à partir de $t_a = 50$.

	$t_a = 5$ $\theta = 0.2$	$t_a = 10$ $\theta = 0.1$	$t_a = 20$ $\theta = 0.05$	$t_a = 50$ $\theta = 0.02$	$t_a = 100$ $\theta = 0.01$	$t_a = 150$ $\theta = 0.007$	$t_a = 200$ $\theta = 0.005$
$r_2 = 359$	17	42	85	131	94	68	53
$r_2 = 330$	486	1 244	2 480	3 549	2 743	2 004	1 553
$r_2 = 300$	968	2 449	4 842	6 892	5 321	3 886	3 013
$r_2 = 290$	1 128	2 842	5 603	7 960	6 143	4 486	3 479
$r_2 = 150$	3 311	7 888	14 864	20 505	15 731	11 484	8 906

Tableau 2.10 – Différence de bien-être social entre le cas déterministe et le cas stochastique sans adaptation en milliers d’Euros pour différentes valeurs de r_2 et (t_a, θ) .

Pour une agence de l’eau située dans le bassin de la Mancha, ces **résultats** indiquent qu’il est plus intéressant d’acquérir de l’information exacte sur le choc au début de l’horizon de planification, si elle n’est pas sûre d’avoir l’information du choc à son arrivée (si elle ne peut pas s’adapter au choc dès son arrivée). Ces informations sont plus avantageuses pour des chocs à haute intensité, mais aussi pour des chocs avec « un risque intermédiaire » d’occurrence immédiate. Si un choc important arrive avec probabilité conditionnelle d’occurrence immédiate très basse, il y a encore du temps pour s’adapter au choc, donc il n’est pas intéressant d’acquérir des informations exactes sur la date du choc. D’autre part, si un choc important arrive avec une probabilité conditionnelle très élevée d’occurrence immédiate, il n’y a pas suffisamment de temps pour s’adapter au choc et donc, il n’est pas intéressant non plus de connaître la date exacte du choc. Ceci peut expliquer la relation non monotone entre t_a et (D_1, D_2) .

2.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons démontré qu’un choc déterministe sur le taux de recharge de la nappe induit, à court terme (avant l’occurrence du choc), une augmentation des extractions et du bien-être social et au contraire, à long terme (à l’état stationnaire), une diminution des extractions et du bien-être social. De plus, nous avons vu que plus la valeur du choc est élevée, moins le stock de la ressource sera important à l’état stationnaire, ce qui réduit les possibilités d’extraction à long terme. L’agence de l’eau s’adapte pour anticiper les pertes qui auront lieu dans le long terme en accumulant des gains à court terme. Ce comportement d’adaptation de court terme est d’autant plus important que le choc est intensif ou tardif. Ainsi, de manière générale, plus le choc est intense plus le bien-être social total sera faible mais, plus le choc est tardif, plus le bien-être social total sera important. Il est intéressant de noter aussi que l’agence de l’eau a intérêt à anticiper le choc plutôt que de réagir une fois que le choc a eu lieu dans le cas déterministe.

Ensuite, nous avons étendu notre analyse au cas d’un choc stochastique. Les résultats obtenus sont proches de ceux du cas déterministe et montrent de la même manière que, suite à un choc stochastique, les extractions et le bien-être social augmentent à court terme, et diminuent à long terme. De nouveau, à long terme, l’introduction d’un choc réduit le stock de la ressource à l’état stationnaire. Ainsi, l’agence de l’eau s’adapte de manière similaire que le choc soit déterministe ou stochastique (lorsque l’on compare le cas déterministe et stochastique de façon que la date d’occurrence du choc déterministe, connue, est égale à la valeur espérée de la date d’occurrence incertaine du choc stochastique).

Cependant, ces deux problèmes sont sensiblement différents. La réduction de l’état sta-

tionnaire du stock est en effet plus faible dans le cas stochastique que dans le cas déterministe. Le comportement d'adaptation à court terme diffère également : les extractions dans le cas stochastique sont plus importantes à très court terme, puis tombent au dessus des extractions du cas déterministe, avant d'augmenter à nouveau à moyen et long terme.

Nous pouvons donc conclure qu'un accroissement de l'incertitude conduit à un comportement d'extraction plus prudent sur le long terme mais à des stratégies d'extractions plus intenses sur le très court terme. De plus, plus le choc a une probabilité conditionnelle d'occurrence immédiate importante, plus ce comportement d'adaptation est prononcé. Cependant, l'augmentation de l'incertitude conduit également à une gestion moins efficace de l'eau : le bien-être social est moins élevé dans le cas stochastique que dans le cas déterministe. Pour l'agence de l'eau du bassin versant de la Mancha, cela signifie qu'elle a plus intérêt à acquérir des informations sur la date du changement de régime qu'à s'adapter sur la base d'un changement de régime ayant lieu à une date aléatoire. Plus spécifiquement, l'acquisition d'information sur la date d'occurrence est plus intéressante si les chocs futurs sont potentiellement importants. En effet, plus la valeur du choc est importante, plus les gains liés au passage du cas stochastique au cas déterministe sont élevés. De plus, pour des chocs d'intensité donnée, l'importance d'acquérir des informations est maximale pour des niveaux de « risque » moyens : pour des probabilités conditionnelles d'occurrence immédiates très basses, il reste suffisamment de temps à l'agence pour s'adapter au choc, et il n'est pas intéressant d'acquérir une information précise sur la date du choc ; de même que pour des probabilités conditionnelles d'occurrence immédiate très élevées, le temps restant pour s'adapter correctement étant insuffisant, il est inutile de connaître la date exacte du choc. En revanche, ces résultats sont seulement vrais si l'agence n'est pas sûre de pouvoir observer l'occurrence du choc. Si l'agence est sûre d'obtenir cette information, elle n'a plus intérêt à acquérir des informations exactes sur la date du changement de régime avant son arrivée à l'exception de chocs extrêmes (hautes intensité et tardifs) où l'acquisition d'information est toujours intéressante.

Nos résultats confirment ceux de la littérature, qui affirment qu'un choc exogène réversible induit un « effet d'annonce » (voir Di Maria et al. (2012) [19]) quand le choc est déterministe. De plus, nous montrons qu'un comportement d'extraction non-monotone est optimal. Nous confirmons également qu'un choc exogène en condition d'incertitude induit un comportement d'extraction plus prudent sur le long terme et moins prudent à court terme (voir Tsur et Zemel (2014) [85]), en comparaison à une situation sans risque. Finalement, nous étendons ces résultats en considérant un événement réversible ayant lieu à une date « aléatoire » et en comparant différents cas d'incertitudes selon l'information dont dispose l'agence de l'eau.

Afin de poursuivre ce travail, nous pourrions analyser l'impact de plusieurs changements successifs des taux de recharge. Plus particulièrement, le problème consisterait à analyser une suite de chocs $\{t_i, r_i\}_{i=1}^N$, de dates et intensités différentes. Par exemple, la recharge pourrait diminuer du fait d'une réduction des précipitations ou d'un usage plus intensif des ressources par les autres utilisateurs, comme nous l'avons discuté précédemment. Mais elle pourrait ensuite augmenter, par exemple sous l'effet d'un investissement dans des ressources alternatives, comme des usines de désalinisation d'eau. Nous pourrions également envisager d'autres types de fonctions de distributions dans le cas du choc stochastique, ou un cas où la probabilité conditionnelle d'occurrence du choc dépendrait d'un des éléments du système dynamique, comme l'évolution passée du taux de recharge. Ensuite, nous pourrions étudier le cas où le taux de recharge est stochastique et non la date d'occurrence du choc. Finalement, dans ce chapitre, nous nous sommes situés dans un cas de gestion centralisée. Cependant,

l'exploitation de ce type de ressource se fait souvent en régime de propriété commune. Dans le chapitre qui suit, nous analyserons l'impact d'un changement de régime sur la ressource en prenant en compte les externalités qui apparaissent en raison du partage de la ressource.

Partager une ressource en eau souterraine dans un contexte de changement de régime

Sommaire

3.1 Introduction	57
3.2 Le modèle	59
3.3 Cas non-coopératifs	61
3.3.1 Résolution du cas « open-loop »	62
3.3.2 Résolution du cas « open-loop » par morceaux	62
3.3.3 Résolution du cas « feedback »	62
3.4 L'optimum social	63
3.4.1 Résolution du cas sans choc	63
3.4.2 Résolution du cas avec choc	63
3.5 Résultats	63
3.5.1 Résultats théoriques	63
3.5.2 Application numérique	65
3.6 Conclusions et perspectives	78

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'exploitation d'une ressource en eau souterraine comme un jeu différentiel afin de prendre en compte les interactions stratégiques et dynamiques entre les utilisateurs de la ressource. En effet, ce type de ressource est souvent exploité sous un régime de propriété commune où l'accès est limité aux propriétaires des terrains situés sur l'aquifère. Ce type d'exploitation est nommé exploitation privée (ou solution concurrentielle). Des nombreux auteurs ont étudié le problème de l'exploitation d'une ressource commune en eau souterraine (par exemple Gisser et Sánchez (1980) [35], Negri (1989) [61], Provencher et Burt (1993) [67], Rubio et Casino (2001) [74]) et concluent que l'exploitation privée est inefficace (en termes de stock et de bien-être) par rapport à l'exploitation optimale (ou solution efficace).

Cette inefficacité est due aux différentes externalités qui apparaissent en raison du partage de ce type de ressource, à savoir l'externalité « coût de pompage » qui caractérise le fait que les extractions réalisées par un utilisateur font baisser la hauteur d'eau de la nappe, ce qui implique une augmentation des coûts de pompage pour les autres utilisateurs de la ressource. D'autre part, l'externalité « stock » (ou stratégique) qui représente l'apparition d'un esprit compétitif entre les agriculteurs en raison de la disponibilité limitée en eau (le stock) (voir revue détaillée dans Provencher et Burt (1993) [67]).

Gisser et Sánchez (1980) [35] montrent cette inefficacité de l'exploitation privée par rapport à l'exploitation optimale dans le Bassin « Pecos », au Mexique. De plus, ils caractérisent la différence analytique entre les deux modes de gestion et concluent que la différence est négligeable si la capacité de l'aquifère est grande. Nieswiadomy (1988) [62] appelle ce résultat la règle de Gisser et Sánchez. L'implication politique la plus importante de cette étude est que la régulation à travers une gestion centralisée de ce type ressource n'est pas justifiée si la différence de bien-être issue des exploitations privée et optimale est insuffisamment importante.

Dans l'étude de la solution concurrentielle réalisée par Gisser et Sánchez, les agriculteurs sont considérés « myopes » dans le sens où ils ne prennent pas en compte l'impact des autres utilisateurs de la ressource sur le stock disponible, i.e. ils ne prennent pas en compte l'externalité stock dans le calcul de la solution concurrentielle. Parallèlement au travail de Gisser et Sánchez, différents travaux se sont servis de la théorie des jeux afin de prendre en compte les interactions stratégiques et dynamiques entre les utilisateurs de la ressource. Le papier de Negri (1989) [61] réalise justement ce type d'analyse. Negri compare deux types d'équilibres de Nash : « open-loop » et « feedback » (cf. définitions détaillées au chapitre 1) et conclut que l'introduction d'un comportement stratégique (solution « feedback ») génère des stratégies de pompage plus conservatrices que la solution « open-loop ». De plus, il caractérise analytiquement les différentes solutions de la hauteur d'eau de la nappe à l'état stationnaire. Il montre d'une part que la différence entre l'optimum social et la solution « open-loop » est positive et capture l'externalité « coût de pompage ». D'autre part, il montre que la différence entre la solution « open-loop » et « feedback » est aussi positive et capture l'externalité « stratégique ». Finalement, la différence entre l'optimum social et la solution « feedback » est donc aussi positive et montre l'inefficacité de l'exploitation privée. A partir des idées de Negri, Provencher et Burt (1993) [67] prouvent, de façon générale, que si la fonction objectif du problème est concave, la solution « feedback » est inefficace, en comparaison avec l'optimum social.

Nous avons vu qu'une façon de comparer les différentes solutions d'exploitation d'une ressource commune est de comparer l'état stationnaire du stock de la ressource (ou de façon équivalente le niveau d'eau) dans les différents problèmes. Negri (1989) [61] réalise ce type d'analyse. Dans [74], Rubio et Casino (2001) adaptent le modèle de Gisser et Sánchez pour étudier comme dans Negri (1989) [61] l'effet de la prise en compte des différentes externalités et donc l'inefficacité de l'exploitation privée. Leurs contributions consistent à dériver les solutions analytiques de l'optimum social, des équilibres en « open-loop » et en « feedback » tout au long de l'horizon de planification. Ils confirment aussi le résultat de Negri, un comportement stratégique entraîne une exploitation encore plus inefficace de la ressource, par rapport à la solution « open-loop ». Néanmoins, ils confirment aussi la règle de Gisser et Sánchez en montrant que l'externalité stratégique est négligeable si l'aquifère est relativement grand.

Dans ce chapitre, nous utilisons l'adaptation du modèle de Gisser et Sánchez réalisé par Rubio et Casino. Nous introduisons ensuite un changement de régime sur la dynamique de la ressource, plus précisément, une diminution du taux de recharge de la nappe. Ce type de choc peut survenir en raison d'une diminution de la précipitation moyenne qui mène à une diminution de la recharge de l'aquifère. Il peut également correspondre à l'extraction d'une certaine quantité d'eau pour la consacrer à un usage alternatif comme le remplissage de réservoirs en eau potable en cas de sécheresse. En tout cas, il s'agit de modéliser une diminution abrupte de la disponibilité en eau pour les utilisateurs de la ressource. Dans le chapitre 2, nous avons étudié l'effet de l'acquisition d'information, concernant ce type de choc dans un

cas de gestion centralisée. Dans le cas déterministe, lorsque la date d'occurrence du choc est connue, nous montrons que le régulateur se prépare à l'arrivée de l'événement en appliquant une stratégie d'extraction plus conservatrice (i.e plus respectueuse de la ressource) par rapport au cas « sans choc ». Un tel résultat a déjà été trouvé dans la littérature (voir Di Maria et d'autres. (2012) [19]), dans le contexte de ressources polluantes, on parle d'effet d'annonce ou effet d'abondance. En outre, utilisant une application numérique à l'aquifère La Mancha Occidentale, en Espagne, nous montrons qu'un comportement d'extraction non monotone est possible à court terme, lorsque la valeur du choc est importante et quand celui-ci est tardif. Dans ce chapitre, nous analysons le même type de choc en considérant les interactions stratégiques et dynamiques entre les différents utilisateurs de la ressource.

En effet, la contribution de ce chapitre consiste à comparer l'effet du changement de régime sur l'exploitation de l'aquifère selon la structure d'information dont disposent les utilisateurs de la ressource (de façon équivalente, prenant en compte l'externalité coût de pompage et l'externalité stratégique). En particulier, nous comparons l'optimum social avec les équilibres en « open-loop » et « feedback », en considérant pour ce dernier, des stratégies linéaires comme Rubio et Casino (2001) dans [74]. De plus, nous proposons une structure d'information alternative à l'équilibre en « open-loop » que l'on appelle « open-loop » par morceaux.

D'abord, nous montrons que lorsque ce type de choc a lieu, l'introduction d'un comportement stratégique implique une surexploitation de la ressource à court et à long terme. Deuxièmement, nous étudions l'effet de la prise en compte des différentes externalités en fonction de l'intensité et de la date d'occurrence du choc. Nous verrons que ces effets sont particulièrement présents pour des chocs de basses intensités ou des chocs ayant lieu à moyen terme. Finalement, nous évaluons en termes de bien-être, l'effet de la prise en compte des différentes externalités sur l'exploitation d'un cas particulier, l'aquifère La Mancha Occidentale. Cet aquifère est situé au Sud de l'Espagne, sous un climat sémi-aride où les périodes de sécheresses sont fréquentes. Il a souffert de différents régimes d'exploitation inefficaces les dernières décennies. Nous prouvons qu'une régulation de l'aquifère à travers une gestion centralisée est d'autant plus justifiée dans un contexte de rareté de l'eau à long terme, procurant des gains de bien-être social qui peuvent atteindre environ les 40 millions d'euros. Est-ce que nous pouvons émettre la même affirmation à court terme, i.e. à la date d'occurrence du choc ?

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 3.2, nous présentons le modèle réalisé par Rubio et Casino. Ensuite, nous introduisons un choc exogène et déterministe dans le modèle initial. Dans la section 3.3, nous décrivons les résolutions analytiques du problème « sans et avec choc » selon la structure d'information retenue par les joueurs. Dans la section 3.4, nous décrivons la résolution analytique de l'optimum social correspondant « sans et avec choc ». Dans la section 3.5, nous comparons analytiquement les différentes solutions à l'état stationnaire, puis nous réalisons des simulations numériques en utilisant des données de l'aquifère La Mancha Occidentale. Finalement, dans la section 3.6, nous concluons et proposons quelques extensions du travail réalisé.

3.2 Le modèle

Dans ce papier, nous reprenons l'adaptation du modèle de Gisser et Sánchez (1980) ([35], réalisée par Rubio et Casino (2001, 2003) ([74], [75]) afin d'exprimer le modèle comme un jeu différentiel et ainsi de prendre en compte les interactions stratégiques entre les différents utilisateurs de la ressource.

Dans [35], la demande en eau pour l'irrigation est représentée par une fonction linéaire,

$$g = a - bp, \quad a, b > 0, \quad (3.1)$$

où g représente le taux d'extraction et p , le prix de l'eau.

Quelques hypothèses sont posées dans [74] :

- Les agriculteurs vendent leur production sur des marchés de sorte que le prix de l'eau est égal à la valeur marginale de l'eau,
- la fonction de production agricole possède des rendements d'échelle constants,
- les facteurs, autres que l'eau et la terre, sont optimisés, conditionnés au taux d'extraction de l'eau,
- l'accès à l'aquifère est restreint aux propriétaires des terres qui se trouvent sur l'aquifère, et donc, le nombre d'agriculteurs est un nombre fixe et fini, M .

La fonction de demande individuelle de l'agriculteur i peut être exprimée comme une fonction linéaire

$$g_i = \theta_i(a - bp), \quad i = 1..M, \quad (3.2)$$

où $0 < \theta_i < 1$ et $\sum_{i=1}^M \theta_i = 1$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^M g_i = \sum_{i=1}^M \theta_i(a - bp) = a - bp = g. \quad (3.3)$$

g_i représente le taux d'extraction de l'agriculteur i .

De plus, le revenu net de l'agriculteur i est

$$\int_{g_i} p(x) dx = \int_{g_i} \frac{a - \frac{g_i}{\theta_i}}{b} dx = \frac{a}{b} g_i - \frac{1}{2b\theta_i} g_i^2.$$

On considère une fonction de coût linéaire pour représenter le coût marginal d'extraction, qui dépend de G , le stock d'eau de la nappe. Le coût total d'extraction est donc

$$\bar{C} = (z - cG)g, \quad z, c > 0, \quad (3.4)$$

où z représente la somme des coûts fixes et du coût marginal maximal de pompage et c , la pente de la fonction du coût marginal de pompage. Comme z et c ne dépendent pas du taux d'extraction, le coût individuel d'extraction de l'agriculteur i est,

$$\bar{C}_i = (z - cG)g_i, \quad z, c > 0. \quad (3.5)$$

La dynamique de l'aquifère est décrite par l'équation différentielle,

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)g + r = -(1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r, \quad (3.6)$$

où r représente le taux de recharge et α le coefficient de retour de l'eau de l'aquifère, ($\alpha \in [0, 1)$).

En supposant que les interactions entre les agriculteurs sont rationnelles et non-coopératives, le problème de l'agriculteur i est de maximiser son bien-être, défini comme la valeur présente de la somme de ses revenus futurs, où ρ représente le taux d'actualisation, en prenant en

compte la dynamique de l'aquifère (équation 3.6) et sous contraintes des conditions initiales et de positivité :

$$\max_{g_i(\cdot)} \int_0^{\infty} F_i(G, g_i) e^{-\rho t} dt, \quad (3.7)$$

où,

$$F_i(G, g_i) = \frac{a}{b}g_i - \frac{1}{2b\theta_i}g_i^2 - (z - cG)g_i, \quad (3.8)$$

$$\dot{G} = -(1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r, \quad (3.9)$$

$$G(0) = G_0 \quad \text{donné}, \quad (3.10)$$

$$g_i \geq 0 \quad G \geq 0. \quad (3.11)$$

3.3 Cas non-coopératifs

Dans cette section, nous rappelons en premier lieu comment résoudre le jeu défini précédemment dans la section 3.2 lorsque les joueurs disposent de différentes structures d'informations : « open-loop » et « feedback ». On note que ce problème est déjà résolu dans Rubio et Casino (2001, 2003) ([74], [75]), donc dans ce chapitre nous n'allons pas détailler les résolutions des différents problèmes.

Dans le cas « open-loop », chaque agriculteur i choisit au début de la période de planification le chemin d'extraction qui maximise la valeur actualisée de la somme de ses revenus sur l'horizon de planification (ici $t \in [0, \infty)$), en supposant que les stratégies choisies par les autres agriculteurs dépendent du temps et qu'ils connaissent l'état initial de la ressource. En particulier, nous considérons que les stratégies sont linéaire par rapport à l'état de la ressource. Le problème à résoudre est donc (3.7) contraint par les équations (3.9), (3.10) et (3.11).

Dans le cas « feedback », le problème de l'agriculteur i est le même que dans le cas « open-loop » mais en supposant que les stratégies choisies par les autres joueurs dépendent non seulement du temps mais de l'état de la ressource. Le problème à résoudre est (3.7), sous contrainte de la dynamique :

$$\dot{G} = -(1 - \alpha)(g_i + \sum_{j \neq i} a_j G + b_j) + r, \quad (3.12)$$

et des conditions (3.10) et (3.11).

Dans un deuxième temps, nous allons introduire une perturbation dans le système de la ressource. Cette perturbation est un choc exogène sur la dynamique de l'aquifère qui représente une brusque diminution du taux de recharge de l'aquifère, r , à l'instant t_a connu. Ainsi, à partir de l'instant t_a , le taux de recharge passe de $r = r_1$ à $r = r_2$, avec $r_1 > r_2$. Le problème de l'agriculteur i devient donc (3.7), sous contrainte de la dynamique :

$$\dot{G} = \begin{cases} -(1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r_1 & \text{si } t \leq t_a \\ -(1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r_2 & \text{si } t > t_a, \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $r_1 > r_2$ et des conditions (3.10) et (3.11).

Dans la suite, nous décrivons la résolution analytique de ce problème « perturbé » selon les différentes structures d'information retenues. Dans tous les cas, il va falloir procéder en deux étapes pour résoudre ce problème : entre t_a et ∞ et ensuite entre 0 et t_a . On anticipe que l'équilibre du problème sera différent selon la structure d'information utilisée : OL (« open-loop »), OLM (« open-loop » par morceaux) et FB (« feedback »).

3.3.1 Résolution du cas « open-loop »

Si les agriculteurs disposent d'une structure d'information en « open-loop », le Hamiltonien du problème de l'agriculteur i est :

$$H_i = \begin{cases} F_i(G, g_i) + \pi_i(t)(r_1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i) & \text{si } t \leq t_a \\ F_i(G, g_i) + \pi_i(t)(r_2 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i) & \text{si } t > t_a, \end{cases} \quad (3.14)$$

avec $F_i(G, g_i)$ issu de l'équation (3.8) et $\pi_i(t)$ qui représente la variable adjointe. Les fonctions $G(t)$ et $\pi_i(t)$ doivent être des fonctions continues dans l'horizon de planification $[0, \infty)$. Nous pouvons voir la résolution analytique du jeu en « open-loop » dans l'annexe C.3.

3.3.2 Résolution du cas « open-loop » par morceaux

Nous proposons une structure d'information alternative à la structure « open-loop », le cas « open-loop » par morceaux. Ce cas est plus réaliste que le cas « open-loop » pour notre problème perturbé, dans le sens où les agriculteurs peuvent rectifier leurs stratégies d'extraction quand le changement de régime a lieu. En effet, nous supposons que les agriculteurs s'engagent de nouveau en t_a à suivre une stratégie « open-loop » en connaissant l'état de la ressource à l'arrivée du choc (en $t=t_a$). Le problème consiste alors à résoudre un jeu en open-loop par morceaux ou en deux étapes, entre t_a et ∞ , puis entre 0 et t_a (voir résolution analytique dans l'annexe C.4).

3.3.3 Résolution du cas « feedback »

Ensuite, un cas plus réaliste que les cas définis précédemment est le cas « feedback ». En effet, en réalité, les agriculteurs « observent » le niveau de la ressource pendant la période de planification, i.e. possèdent des informations sur l'état (ou le niveau d'eau) de la ressource dans le temps. Il est donc plus crédible pour les agriculteurs de maximiser leur profit en supposant que les stratégies réalisées par les autres agriculteurs dépendent non seulement du temps mais de l'état de la ressource en eau. Pour simplifier la résolution analytique de ce type d'équilibre, nous allons résoudre le problème à partir du principe de la programmation dynamique (voir la description détaillée de la méthode dans le chapitre introductif), contrairement aux sections précédentes où nous utilisons le principe du maximum. Une fois de plus, nous allons résoudre le problème en deux étapes, entre t_a et ∞ , puis entre 0 et t_a . La résolution complète du problème est détaillée dans l'annexe C.5.

Un des buts du chapitre étant d'évaluer l'efficacité des différents équilibres définis précédemment, dans la suite, nous résolvons la solution efficace du problème (sans et avec choc) : l'optimum social.

3.4 L'optimum social

3.4.1 Résolution du cas sans choc

Nous supposons qu'un planificateur social décide le programme de gestion la ressource. Le problème pour le régulateur est de maximiser le bien-être social, défini comme la valeur présente de la somme des revenus futurs des M utilisateurs de la ressource.

Le problème du planificateur social est :

$$\max_{\{g_i\}_{i=1}^M} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^M F_i(G, g_i) e^{-\rho t} dt \quad (3.15)$$

avec $F_i(G, g_i)$ décrit par l'équation (3.8), sous contraintes de la dynamique de la ressource (3.9), des conditions initiales et de positivité (3.10), (3.11). La résolution complète de ce problème est décrite dans l'Annexe (C.1).

3.4.2 Résolution du cas avec choc

Maintenant, si un choc se produit à l'instant t_a connu, le problème à résoudre par le planificateur social est le problème (3.15), sous contrainte de la dynamique (équation (3.13)), où r_1 (respectivement r_2) représente la valeur du taux de recharge avant (respectivement à partir de) t_a , et des conditions initiales et de positivité (3.10), (3.11). La résolution complète du problème modifié est décrite dans l'Annexe (C.2). Dans la suite, nous comparerons les solutions de l'optimum social et des différents équilibres (« open-loop », « open-loop » par morceaux et « feedback ») obtenues lorsque un choc se produit en t_a .

3.5 Résultats

3.5.1 Résultats théoriques

Dans cette section, nous comparons l'efficacité des différentes solutions trouvées précédemment à l'état stationnaire. A partir de (C.9), (C.40), (C.70), nous obtenons les solutions (à l'état stationnaire) du stock d'eau pour l'optimum social (OS), pour les cas « open-loop » et « open-loop » par morceaux et respectivement pour le cas « feedback », avec M agriculteurs symétriques ($M > 1$). Ainsi,

$$G_{\infty}^{OS} = \frac{r_2}{cb(1-\alpha)} + \frac{r_2}{\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}, \quad (3.16)$$

$$G_{\infty}^{OL} = G_{\infty}^{OLM} = \frac{r_2}{cb(1-\alpha)} + \frac{r_2}{M\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}, \quad (3.17)$$

et

$$G_{\infty}^{FB} = \frac{r_2}{2(1-\alpha)a_1^*} - \frac{b_1^*}{a_1^*} \quad (3.18)$$

avec les expressions $b_1^* < 0$ et $a_1^* > 0$ définies dans les équations (C.66) et (C.67) en annexe C.5. De plus, à l'état stationnaire, le taux d'extraction est le même quelle que soit la structure d'information dont disposent les joueurs :

$$g_{\infty}^{FB} = g_{\infty}^{OL} = g_{\infty}^{OLM} = g_{\infty}^{OS} = \frac{r_2}{(1-\alpha)M}. \quad (3.19)$$

Nous rappelons que nous avons choisi des paramètres tel que les différentes solutions du stock et du taux d'extraction à l'état stationnaires sont positives.

Proposition 3.5.1 *Lorsque l'intensité du choc (r_1-r_2) augmente, ou de façon équivalente lorsque la valeur de r_2 diminue, l'état stationnaire du stock et du taux d'extraction des différentes solutions OS, OL, OLM et FB diminue.*

Démonstration Ceci est immédiat à partir des équations (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19). Il suffit de prouver que la dérivée par rapport à r_2 des expressions décrites dans ces équations est supérieure à 0. \square

La proposition 3.5.1 montre que plus le choc est important, i.e. plus la recharge de la ressource est soudainement et significativement réduite, plus le niveau optimal du stock de la ressource chute à long terme. De plus, la ressource est exploitée de manière moins intensive à l'état stationnaire quand la valeur du choc augmente. Nous pouvons voir facilement dans les équations précédentes que les différentes solutions ne dépendent pas de t_a , la date d'occurrence du choc, à l'état stationnaire. D'après le travail réalisé dans le chapitre 2, ce résultat n'est pas surprenant car le choc est déterministe.

Ensuite, nous étudions la différence entre les solutions du stock afin d'évaluer l'impact du choc sur les différentes externalités liées à l'exploitation de ce type de ressource. Negri (1989) [61] montre (à l'état stationnaire) d'une part que la différence entre les solutions OS et OL est positive et capture l'externalité coût. De plus, il montre que la différence entre les solutions OL et FB est positive et capture l'externalité stratégique. Finalement, la différence entre les solutions OS et FB est positive, elle capture les deux externalités et montre l'inefficacité de l'exploitation privée. Ainsi, nous calculons les différences pour notre problème avec choc :

$$G_{\infty}^{OS} - G_{\infty}^{OL} = \frac{r_2}{\rho} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \quad (3.20)$$

et

$$G_{\infty}^{OL} - G_{\infty}^{FB} = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{M\rho} + \frac{1}{(1-\alpha)cb} - \frac{1}{2(1-\alpha)a_1^*} \right) - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c} + \frac{b_1^*}{a_1^*}, \quad (3.21)$$

avec b_1^* , a_1^* définis dans les équations (C.66) et (C.67). Nous observons dans l'équation (3.20) que l'effet coût reste positif lorsqu'un choc a lieu. Le même résultat est obtenu à partir de l'équation (3.21) pour l'effet stratégique (voir démonstration dans l'annexe C.6). Nous confirmons donc l'inefficacité de l'exploitation privée, évaluée comme la différence entre l'optimum social et la solution « feedback » à l'état stationnaire pour notre problème. Finalement, il est intéressant d'analyser la valeur des différents effets en fonction de l'intensité du choc.

Proposition 3.5.2 *Lorsque l'intensité du choc (r_1-r_2) augmente, ou de façon équivalente lorsque la valeur de r_2 diminue, les effets coûts et externalité diminuent.*

Démonstration Ceci est de nouveau immédiat à partir des équations (3.20) et (3.21). Il suffit de prouver que la dérivée par rapport à r_2 des expressions décrites dans ces équations est supérieure à 0. \square

La proposition 3.5.2 montre alors que les différents effets diminuent à l'état stationnaire d'autant plus que la valeur du choc est importante. Ce résultat est intéressant dans le sens où lorsque la disponibilité en eau est réduite, la prise en compte des différentes interactions dynamiques et stratégiques entre les utilisateurs est moins intéressante. En effet, les stratégies de pompages issues des différentes structures d'informations et de l'optimum social deviennent de plus en plus proches. L'inefficacité issue de l'exploitation privée est donc moins importante quand l'intensité du choc augmente. Suivant donc le raisonnement de Gisser et Sánchez (1980) [35], dans ce contexte de manque d'eau, il est intéressant de calculer la différence de bien-être issue des exploitations privée et optimale pour savoir si une régulation à travers une gestion centralisée serait plus ou moins justifiée. Dans la suite de ce chapitre, nous faisons cette analyse non seulement à long terme, mais à court terme (à l'instant d'arrivée du choc) pour un aquifère particulier : la Mancha Occidentale.

3.5.2 Application numérique

Paramètres	Description	Unités	Valeur
a	Ordonnée à l'origine fonction de demande	Millions Mètres cubes/An	4403.3
b	Pente fonction de demande	(Millions Mètres cubes/An) ² Euros ⁻¹	0.097
z	Ordonnée à l'origine fonction de coût	Euros/Million Mètre cube	266 000
c	Pente fonction de coût	Euros/(Million Mètre cube) ²	3.162
r	Recharge naturelle	Millions Mètres cubes/An	360
G_0	Niveau de stock (en volume)	Millions Mètres cubes	80960
H_0	Hauteur d'eau de la nappe	Mètres	640
S_L	Niveau de la surface	Mètres	665
A	Surface de l'aquifère	Kilomètres carrés	5500
S	Coefficient de stockage	<i>sans unité</i>	0.023
ρ	Taux d'actualisation	An ⁻¹	0.05
α	Coefficient de retour d'eau	<i>sans unité</i>	0.2
M	Nombre de joueurs	<i>sans unité</i>	2

Tableau 3.1 – Valeurs de paramètres de l'aquifère La Mancha Occidentale.

Dans cette section, nous réalisons une application numérique de notre modèle à l'aquifère La Mancha Occidentale. Dans le tableau 3.1, nous observons les valeurs utilisées. Ces valeurs sont les mêmes décrites dans le tableau 2.3 du chapitre 2. Dans le chapitre 2, on est dans un cas de gestion centralisée donc on considère $M = 1$. Maintenant, nous considérons $M = 2$ joueurs, ou pour un contexte plus réaliste $M = 2$ groupes d'irrigants symétriques.

Les différentes structures d'information : « open-loop » et « feedback »

Dans un premier temps, nous réalisons des simulations numériques sur le cas « open-loop ». Dans la figure 3.1, nous pouvons observer les solutions optimales du stock $G^*(t)$

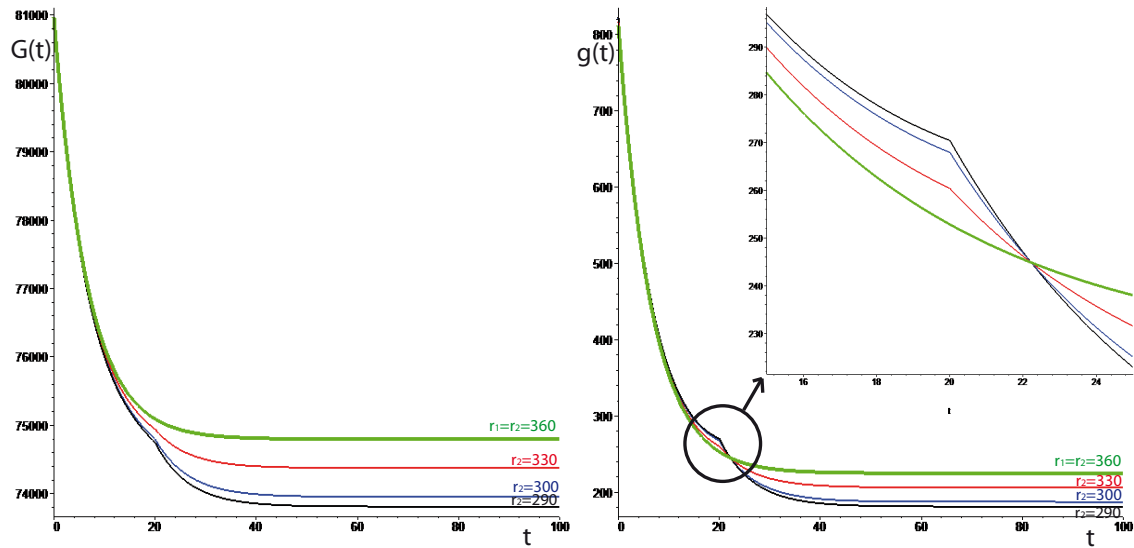


FIGURE 3.1 – Cas « open-loop » : $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par année pour différentes valeurs de r_2 et $t_a = 20$ années. Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 15$ et $t = 25$ ans.

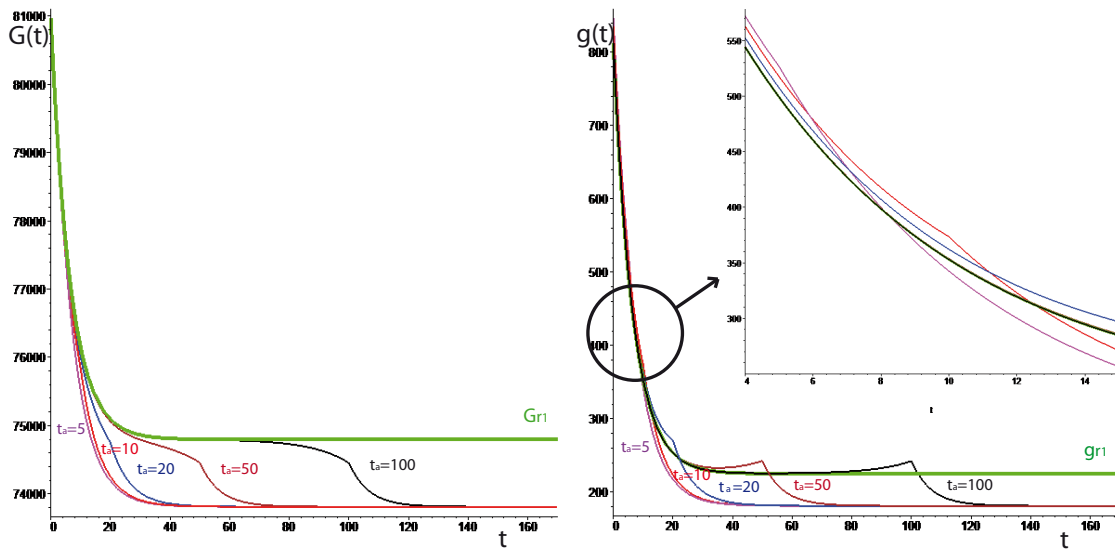


FIGURE 3.2 – Cas « open-loop » : $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par année pour différentes valeurs de t_a et $r_2 = 290$. Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 4$ et $t = 15$ ans.

(à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite) pour différents valeurs de $r_2 = 330$ (en rouge), 300 (en bleu) et 290 (en noir) en millions de mètres cubes par an (Mm^3/an). Quand la recharge est constante, l'état stationnaire du stock, $G^*(\infty)$, est égal à $74\,797 \text{ Mm}^3$ et celui du taux d'extraction $g^*(\infty)$, est égal à $225 \text{ Mm}^3/\text{an}$. Lorsque r_2 diminue, i.e. lorsque l'intensité du choc augmente, l'état stationnaire de la ressource et du taux d'extraction vont atteindre un niveau de plus en plus bas. Ceci est illustré dans la proposition 3.5.1. On observe par exemple, pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, une diminution du niveau de la ressource et du taux d'extraction de 986 Mm^3 et $44 \text{ Mm}^3/\text{an}$ respectivement à long terme. En revanche, le taux d'extraction augmente à l'instant initial et à l'instant où le choc a lieu, t_a . Ainsi, le volume de

la ressource en t_a diminue lorsque l'intensité du choc augmente, i.e. les extractions globales qui ont lieu avant l'arrivée du choc augmentent d'autant plus que le choc est important, on parle d'effet d'abondance¹. Par exemple, pour le même choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, les extractions augmentent d'environ 10 et $18 \text{ Mm}^3/\text{an}$ en $t = 0$ et $t = t_a$ respectivement et le stock diminue de 342 Mm^3 , avant l'arrivée du choc.

Maintenant, nous étudions l'impact de la date d'occurrence du choc sur le comportement optimal d'extractions. Dans la figure 3.2, on observe les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite) pour différentes dates d'occurrence du choc (i.e. pour différentes t_a). Logiquement, l'état stationnaire du problème ne dépend pas de t_a , donc il est constant pour les simulations réalisées. Analysons maintenant le comportement d'extraction avant l'occurrence du choc. On observe que la valeur de $g^*(t)$ (en $t=0$ et $t=t_a$) diminue d'autant plus que le choc a lieu tard. En effet, pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, le taux d'extraction optimal en $t=0$ et $t=t_a$ diminue de 23 et respectivement de $256 \text{ Mm}^3/\text{an}$, quand le choc a lieu 15 ans après, i.e., quand t_a augmente de 5 à 20 ans. De ce fait, le stock d'eau optimal en t_a est inférieur plus le choc est tardif.

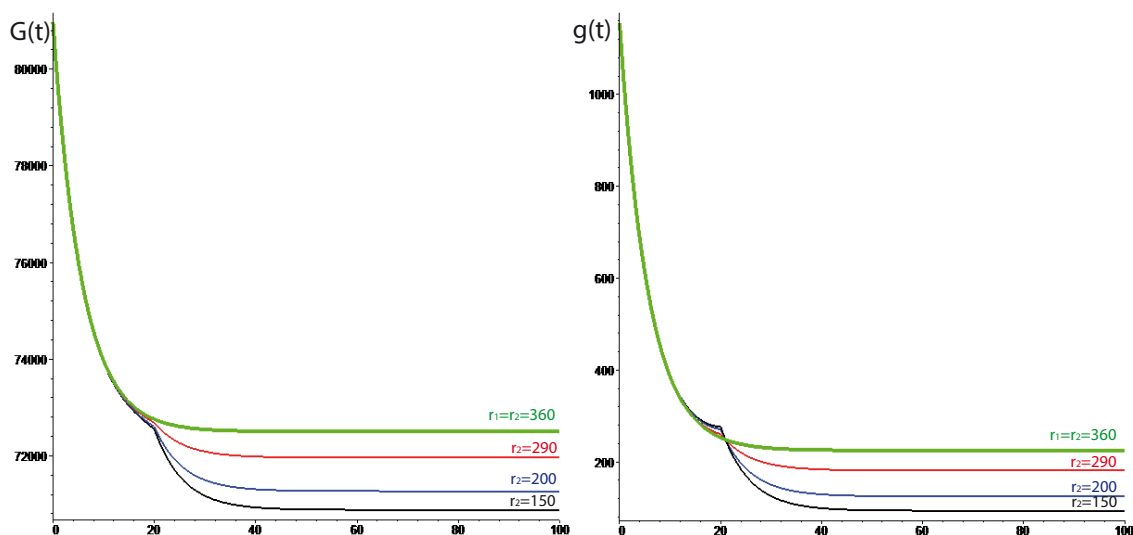


FIGURE 3.3 – Cas « feedback » : $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par année pour différentes valeurs de r_2 et $t_a = 20$ années.

Dans un deuxième temps, nous réalisons un exemple numérique sur le cas « feedback ». Dans la figure 3.3, nous pouvons observer les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite) pour différents valeurs de $r_2 = 290$ (en rouge), 200 (en bleu) et 150 (en noir) millions de mètres cubes (Mm^3/an). Les résultats sont similaires aux résultats trouvés avec une structure d'information « open-loop ». De nouveau, l'état stationnaire de la ressource et du taux d'extraction vont atteindre un niveau de plus en plus bas d'autant plus que le choc est important, résultat prouvé dans la proposition 3.5.1. Pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, on trouve une diminution du niveau de la ressource et du taux d'extraction de 540 Mm^3 et $43.7 \text{ Mm}^3/\text{an}$ respectivement. De plus, le comportement optimal avant

1. Nous rappelons ici que l'effet d'abondance a été décrit dans le chapitre 2 et représente l'augmentation de l'intensité des extractions avant l'arrivée du choc, afin de compenser les pertes dues à la diminution de la disponibilité en eau de la nappe à partir de t_a

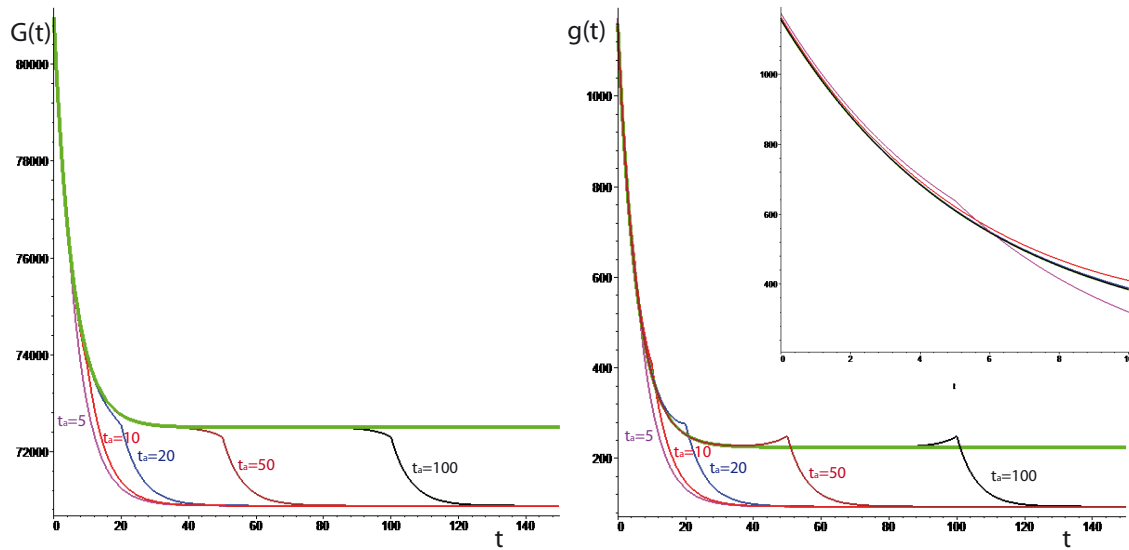


FIGURE 3.4 – Cas « feedback » : $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par année pour différentes valeurs de t_a et $r_2 = 290$.
Coin supérieur droit : zoom de $g^*(t)$ entre $t = 0$ et $t = 10$ ans.

l'arrivée du choc se traduit par une augmentation des extractions d'autant plus que la valeur du choc s'accroît, on parle de nouveau d'effet d'abondance. Ainsi, le volume de la ressource en t_a diminue lorsque l'intensité du choc augmente. Par exemple, pour le même choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, les extractions augmentent d'environ 0.34 et $8 \text{ Mm}^3/\text{an}$ en $t = 0$ et $t = t_a$ respectivement et le stock diminue de 68 Mm^3 , avant l'arrivée du choc.

Ensuite, si l'on étudie l'impact de la date d'occurrence du choc sur le comportement optimal d'extraction dans le cas « feedback » (voir Figure 3.4), on observe les solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite) pour différentes dates d'occurrence du choc t_a . De nouveau, avant l'occurrence du choc, on observe que la valeur de $g^*(t)$ (en $t=0$ et $t=t_a$) diminue d'autant plus que le choc est tardif. En effet, pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, le taux d'extraction optimal en $t=0$ et $t=t_a$ diminue de 17 et respectivement de $93 \text{ Mm}^3/\text{an}$, quand le choc a lieu 15 ans après, i.e. quand t_a augmente de 5 à 20 ans. Ainsi, le stock d'eau optimal en t_a est inférieur plus le choc est tardif.

En **résumé**, les résultats de cette section sont similaires aux résultats retrouvés dans le chapitre 2 concernant le comportement d'adaptation au choc par un régulateur. Quand nous analysons les deux structures d'informations séparément, à court terme, avant l'arrivée du choc, les extractions augmentent d'autant plus que l'intensité du choc augmente (effet d'abondance) ou d'autant plus que le choc est tardif. Les joueurs (ou groupes d'agriculteurs) cherchent donc à accumuler des gains dans une première période pour compenser les pertes qui auront lieu à partir de l'arrivée du choc. En effet, à cet instant t_a , les extractions commencent à diminuer pour atteindre l'état stationnaire du problème. La réduction de la recharge à partir de t_a provoque la diminution du stock de la ressource à l'état stationnaire. Néanmoins, même si de façon générale, le comportement d'adaptation est similaire pour les cas « open-loop » et « feedback », l'efficacité de l'exploitation (en termes de stock et de bien-être) n'est pas le même pour les différentes structures d'informations. Cela motive la suite du travail.

Comparaison des différentes structures d'informations avec l'optimum social

Dans cette partie, nous analysons puis évaluons à l'état stationnaire et à l'instant d'arrivée du choc, l'efficacité des différentes solutions « open-loop » et « feedback » en comparant avec l'optimum social (la solution efficace), lorsque l'intensité et la date d'occurrence du choc varient.

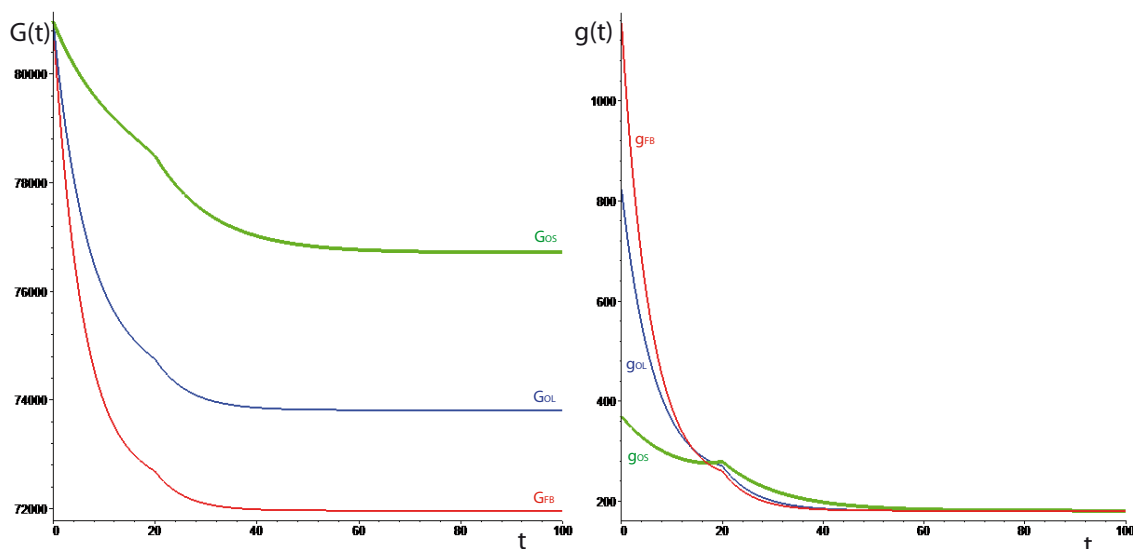


FIGURE 3.5 – Différentes solutions de $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par an : optimum social (en vert), « open-loop » (en bleu) et « feedback » (en rouge), quand $r_2 = 290$ et $t_a = 20$ ans.

Dans la figure 3.5, nous pouvons observer les différentes solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite) : l'optimum social (OS) (en vert), la solution « open-loop » (en bleu) et la solution « feedback » (en rouge), pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an (Mm^3/an) (i.e. $r_2 = 290$) à l'instant $t_a = 20$ ans. Si l'on observe la partie gauche de la figure, à l'état stationnaire, la solution la plus conservatrice pour la ressource est l'optimum social, i.e. le stock de la ressource atteint un niveau d'environ 76 711 Mm^3 pour la solution efficace qui est supérieur aux niveaux atteints par les solutions OL et FB (d'environ 73 811 et 71 962 Mm^3 respectivement). Ainsi, la différence entre l'optimum social et la solution « open-loop » est de 2 899 Mm^3 tandis que la différence entre l'optimum social et la solution « feedback » est de 4 749 Mm^3 . On confirme donc les résultats décrits dans les équations (3.20) et (3.21) : l'effet coût et stratégique sont positifs à long terme. En revanche, le taux d'extraction reste constant pour les différents types de solution avec une valeur d'environ 181 Mm^3/an à long terme, comme on avait prouvé théoriquement dans l'équation (3.19).

Ensuite, nous analysons le comportement optimal d'extraction pour les différentes solutions à court terme, i.e. entre $t = 0$ et $t = t_a$. Dans la partie droite de la figure 3.5, on observe que les différentes solutions se croisent avant l'arrivée du choc. En particulier, le taux d'extraction est supérieur en $t = 0$ dans le cas FB (d'environ 334 et 786 Mm^3/an) par rapport aux cas OL et OS respectivement, puis il est inférieur (d'environ 9 et 19 Mm^3/an) en $t = t_a$ dans le cas FB par rapport aux cas OL et OS. Le résultat qui est important à retenir ici est que les extractions totales réalisées jusqu'à l'arrivée du choc (i.e. l'aire comprise entre $t=0$ et 20 sous la courbe g_{FB}) sont plus importantes dans le cas FB (9 672 Mm^3) et moins importantes dans les solutions OL (8 383 Mm^3) et SO (6 044 Mm^3). Cela veut dire que la

stratégie d'adaptation « feedback » est la moins conservatrice à court terme, avant l'arrivée du choc.

Calculons maintenant le bien-être (décrit équation (3.7)) issu des différentes stratégies d'extractions à court terme (entre $t = 0$ et $t = t_a$) et à long terme (tout au l'horizon de planification) pour l'exemple numérique de la figure 3.5. A long terme (cf. colonne 5 du Tableau 3.5), l'inefficacité de la solution « feedback » par rapport à l'optimum social est estimé à environ 37 478 milliers d'euros et à 23 085 milliers d'euros par rapport à la solution « open-loop ». Regardons maintenant un résultat surprenant à court terme (cf. colonne 4 du Tableau 3.5), on observe que la différence de bien-être entre les solutions OS et OL est ici négative, c'est à dire le bien-être issue de la solution OL est supérieur à celui obtenu avec la solution OS. Cela veut dire que lorsque un tel choc a lieu, l'optimum social n'est pas toujours la solution la plus efficace en termes de bien-être.

Jusqu'à maintenant, nous pouvons relever **plusieurs résultats**.

1. A court et à long terme, i.e. avant l'occurrence du choc et à l'état stationnaire, l'exploitation privée (solutions « feedback » et « open-loop ») est inefficace en termes de stock de la ressource. La prise en compte de l'externalité stratégique (solution « feedback ») aggrave encore plus la surexploitation de la ressource. Nous confirmons donc le résultat trouvé par Negri (1989) [61] à long terme, et nous montrons que ce résultat est vrai aussi à court terme.
2. Nous avons vu que les extractions totales réalisées jusqu'à t_a sont moins intensives dans le cas OS et plus intensives dans le cas FB. Cela est dû au fait que l'information dont disposent les joueurs est plus importante dans le cas FB et donc, le comportement d'adaptation est moins conservateur à court terme. Plus précisément, dans le cas FB, le comportement d'extraction est plus intensif à très court terme ($t = 0$) et moins intensif juste avant l'arrivée du choc en t_a en comparaison avec l'optimum social.
3. En terme de bien-être, l'exploitation privée est aussi inefficace à long terme. Cependant, à court terme, le bien-être issue de la solution « open-loop » est supérieure au bien-être issue de l'optimum social. La réalisation d'autres simulations s'impose donc afin de comprendre cet intéressant résultat.

Variation de l'intensité du choc

Maintenant, nous simulons un choc très grand de 210 Mm³/an (voir figure 3.6). Ce choc est plus intense d'environ 140 Mm³/an, mais il a lieu à la même date que le choc décrit précédemment, illustré dans la figure 3.5. Dans un premier temps, on observe que l'ordre entre les différentes solutions à l'état stationnaire est de nouveau vérifié. L'état stationnaire du stock atteint des niveaux d'environ 73 338, 71 838 et 70 882 Mm³ pour les solutions SO, OL et respectivement FB. On remarque que les différences entre les solutions à l'état stationnaire sont presque deux fois plus importantes que pour le choc de plus basse intensité (70 Mm³/an) réalisé au même instant (voir tableau 3.2). Ainsi, la différence entre les solutions diminue quand r_2 diminue, i.e., d'autant plus que la valeur du choc augmente. Nous confirmons ce résultat en réalisant d'autres simulations dans le tableau 3.2 (voir colonnes 3,5,7). Ceci illustre le résultat prouvé théoriquement dans la proposition 3.5.2.

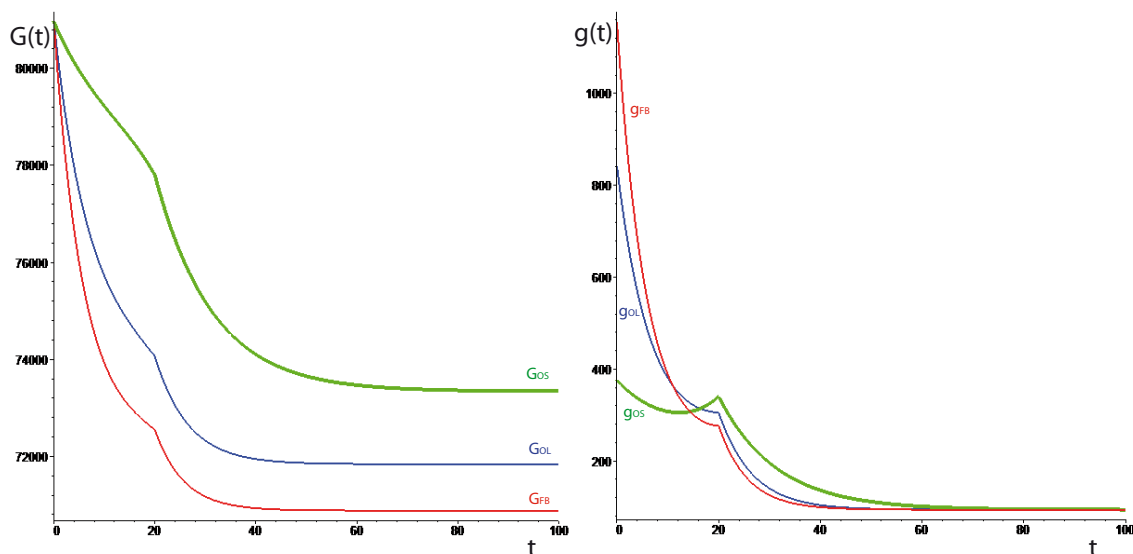


FIGURE 3.6 – Différentes solutions de $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par an : optimum social (en vert), « open-loop » (en bleu) et « feedback » (en rouge), quand $r_2 = 150$ et $t_a = 20$ ans.

Ensuite, dans les tableaux 3.4 et 3.5, nous calculons le bien-être total (tout au long de l’horizon de planification) et les différences de bien-être correspondant aux simulations réalisées dans le tableau 3.2 à l’état stationnaire (cf. colonnes 3,5 et 7). On observe de nouveau que les différences de bien-être diminuent quand r_2 diminue, i.e. d’autant plus que la valeur du choc augmente. L’inefficacité issue de l’exploitation privée est donc moins importante lorsque le choc est plus grand. Par exemple, la perte de bien-être issue des stratégies en « feedback » par rapport à l’optimum social est inférieure (d’environ 6 millions d’euros) lorsque l’intensité du choc augmente de 140 Mm^3 (voir la différence entre les colonnes 5 et 7 de la dernière ligne du tableau).

Réalisons maintenant le même type d’analyse à la date d’arrivée du choc (t_a). En premier, nous pouvons étudier les différentes solutions du choc de $210 \text{ Mm}^3/\text{an}$ (voir figure 3.6) en $t_a = 20$. Dans la partie droite de la figure 3.6 on observe le comportement optimal des extractions avant t_a , on trouve que le taux d’extraction en $t = 0$ est de 1 156, 842, et 375 Mm^3/an pour les cas FB, OL et SO respectivement. En particulier, les différences entre le cas FB et les cas OL et SO sont respectivement de 313 et 780 Mm^3/an . En faisant le même calcul en $t = t_a$, les différences entre le cas FB et les cas OL et SO sont respectivement de 29 et 63 Mm^3/an . On note que les différences entre les solutions diminuent en $t = 0$ et augmentent en $t = t_a$ par rapport au choc de valeur inférieure. On peut nommer ce phénomène un « effet de compensation ». Pour mieux comprendre cet effet, analysons les extractions réalisées jusqu’à t_a pour les différentes solutions. Les extractions restent plus importantes dans le cas « feedback » ($9\,757 \text{ Mm}^3$) et moins importantes dans les solutions OL ($8\,810 \text{ Mm}^3$) et SO ($6\,474 \text{ Mm}^3$). Ainsi, à court terme, les extractions totales augmentent dans les trois cas par rapport au choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$ d’environ 85, 427 et 430 pour les cas FB, OL, OS respectivement lorsque le choc est $140 \text{ Mm}^3/\text{an}$ plus intense. Il est intéressant de retenir ce résultat : l’effet d’abondance est plus important dans les cas OS et OL, que dans le cas FB. Cela veut dire que la présence de l’externalité « stratégique » fait réduire cet « effet d’abondance ».

$r_1 - r_2$	30	70	210
SO-OL	3 300	2 899	1 500
OL-FB	2 104	1 850	956
SO-FB	5 404	4 749	2 456

Tableau 3.2 – Ecart entre les solutions du stock en millions de m^3 à l'état stationnaire.

$r_1 - r_2$	30	70	210
SO-OL	3 744	3 743	3 738
OL-FB	2 220	2 063	1 515
SO-FB	5 964	5 806	5 253

Tableau 3.3 – Ecart entre les solutions du stock en millions de m^3 à la date d'occurrence du choc $t_a = 20$.

De plus, nous calculons les différences entre les solutions de $G^*(t)$ en t_a (instant où il a lieu le choc) et leur bien-être respectifs obtenus avant l'arrivée du choc dans les tableaux 3.3 et 3.5. D'une part, on observe dans le tableau 3.3 que lorsque le choc accroît son intensité, les différences entre les solutions OS et OL, puis entre les solutions OL et FB diminuent. Ainsi, à court terme, l'effet des différentes externalités décroît d'autant plus que le choc s'intensifie, la diminution de l'effet coût étant plus faible que celle de l'effet stratégique. En revanche, l'étude des différences de bien-être entre les solutions à court terme (cf. colonnes 2, 4 et 6 du Tableau 3.5) va nous donner des résultats surprenants. En premier, la différence de bien-être entre la solution « feedback » et l'optimum social maintenant augmente à court terme d'environ 3 millions d'euros lorsque l'intensité du choc augmente de 140 Mm^3 (voir la différence entre les colonnes 4 et 6 de la dernière ligne du tableau). Cela veut dire que avant l'arrivée du choc, l'exploitation privée procure une perte de bien-être de plus en plus importante lorsque la valeur du choc s'accroît, résultat qui en opposition avec le résultat obtenu à l'état stationnaire. Plus précisément, les différences de bien-être des solutions SO-OL et OL-FB, varient de façon non-monotones à court terme lorsque le choc devient plus grand, arrivant parfois à des valeurs négatives. Nous réaliserons d'autres simulations pour voir dans quels cas l'optimum social est la solution la plus efficace à court terme.

$r_1 - r_2$	30		70		210	
	$[0, t_a]$	TOTAL	$[0, t_a]$	TOTAL	$[0, t_a]$	TOTAL
SO	110 446	150 451	111 462	146 658	114 666	136 234
OL	114 908	135 750	114 886	132 265	114 445	122 475
FB	101 074	110 879	101 039	109 180	100 900	104 637

Tableau 3.4 – Bien-être des différentes solutions en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2$ varie et la date d'occurrence est fixe, $t_a = 20$.

Variation de la date du choc

Après avoir évalué le comportement optimal d'extraction des différentes solutions en fonction de l'intensité du choc, nous allons étudier les différents équilibres en fonction de la date d'occurrence du choc. Dans la figure 3.7, nous pouvons observer les différentes solutions optimales du stock $G^*(t)$ (à gauche) et du taux d'extraction $g^*(t)$ (à droite) : l'op-

$r_1 - r_2$	30		70		210	
	$[0, t_a]$	TOTAL	$[0, t_a]$	TOTAL	$[0, t_a]$	TOTAL
SO-OL	-4 462	14 701	-3 424	14 393	221	13 759
OL-FB	13 834	24 871	13 847	23 085	13 545	17 838
SO-FB	9 372	39 572	10 423	37 478	13 766	31 597

Tableau 3.5 – Écarts de bien-être en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2$ varie et la date d'occurrence est fixe, $t_a = 20$.

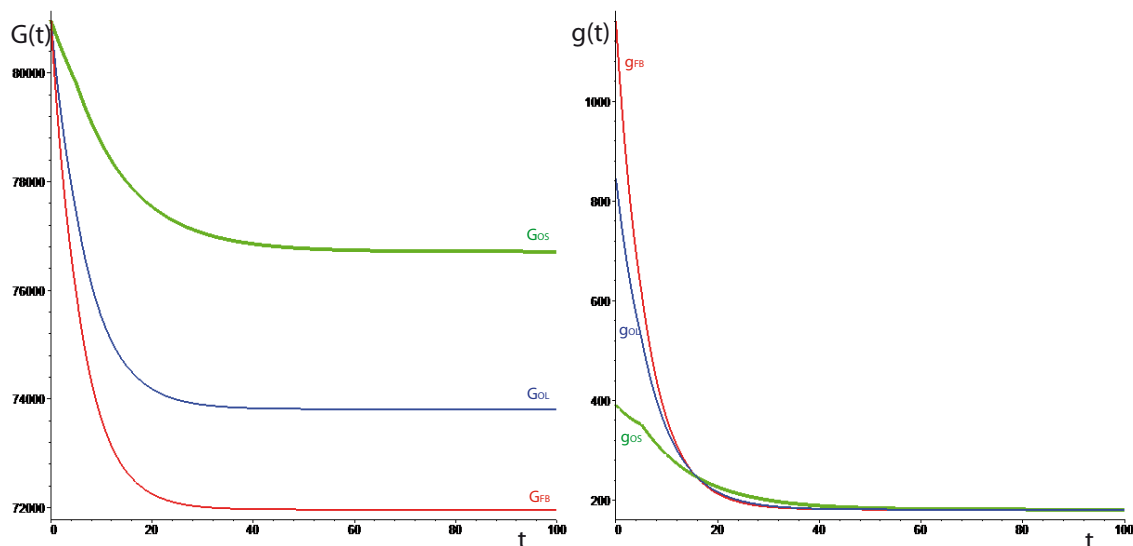


FIGURE 3.7 – Différentes solutions de $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par an : optimum social (en vert), « open-loop » (en bleu) et « feedback » (en rouge), quand $r_2 = 290$ et $t_a = 5$ ans.

timum social (OS) (en vert), la solution « open-loop » (en bleu) et la solution « feedback » (en rouge), pour un choc de 70 millions de mètres cubes par an (Mm^3/an) (i.e. $r_2 = 290$) à l'instant $t_a = 5$ ans. Dans la suite, nous comparons ces résultats avec le choc représenté précédemment dans la figure 3.5, de la même intensité mais ayant lieu 15 ans plus tard.

	$t_a = 5$	$t_a = 20$	$t_a = 50$
SO-OL	2 373	3 743	3 625
OL-FB	1 472	2 063	2 019
SO-FB	3 845	5 806	5 645

Tableau 3.6 – Écarts entre les solutions du stock à l'instant t_a (G_{t_a}) en millions de m^3 pour un choc de $70 \text{ Mm}^3/\text{an}$, ayant lieu à différentes dates t_a .

A l'état stationnaire, les différentes solutions ne dépendent pas de la date d'occurrence du choc comme nous l'avons remarqué analytiquement dans les équations (3.16), (3.17) et (3.18). En revanche, ce résultat n'est pas vrai à court terme.

Dans la partie droite de la figure (3.7), le taux d'extraction en $t = 0$ est de 1 161, 845, et 391 Mm^3/an pour les cas FB, OL et OS respectivement. Plus précisément, les différences entre le cas FB et les cas OL et SO sont respectivement de 315 et 770 Mm^3/an . Les différences entre les solutions du taux d'extraction en $t=0$ sont donc inférieures lorsque le choc a

lieu avant. En revanche, en $t = t_a$, les différences entre le cas FB et les cas OL et SO sont supérieures d'environ 94 et 268 Mm³/an. Globalement, les extractions totales restent plus importantes dans le cas « feedback » (4 254 Mm³) et moins importantes dans la solution OL (3 328 Mm³) OS (1 845 Mm³) avant l'occurrence du choc. De plus, elles diminuent globalement par rapport au choc plus tardif en $t_a = 20$. Est-ce que ce dernier résultat est monotone dans le temps ? Nous confirmons que la réponse à cette question est négative dans le tableau 3.6.

En effet, dans le tableau 3.6 les différences entre les solutions du stock ($G^*(t)$) pour différentes valeurs de t_a (instant où le choc a lieu) sont toujours positive, résultat obtenu aussi à l'état stationnaire. Cependant, la différence entre les solutions OS et OL augmente entre $t_a = 5$ et 20, mais diminue entre $t_a = 20$ et 50. Quant à la différence entre la solution OL et FB et la différence globale OS-FB, on observe la même tendance non-monotone. Si nous analysons le problème aux différentes dates d'occurrence du choc, les effets issus des différentes externalités coût et stratégique sont non monotones dans le temps. Ceci peut être dû au double effet que nous retrouvons dans le chapitre 2, i.e. l'augmentation de la valeur de l'information au fil du temps et la diminution de la différence entre les valeurs de l'information due à l'actualisation. Une analyse plus précise devrait être faite pour confirmer ce résultat.

$r_1 - r_2$	$t_a = 5$		$t_a = 20$		$t_a = 50$	
	[0, t_a]	TOTAL	[0, t_a]	TOTAL	[0, t_a]	TOTAL
SO	48 912	138 348	111 462	146 658	144 321	152 021
OL	68 017	125 350	114 886	132 265	133 402	137 086
FB	70 268	104 725	101 039	109 180	109 876	111 594

Tableau 3.7 – Bien-être des différentes solutions, en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2 = 70$ Mm³ est fixe et la date d'occurrence varie.

$r_1 - r_2$	$t_a = 5$		$t_a = 20$		$t_a = 50$	
	[0, t_a]	TOTAL	[0, t_a]	TOTAL	[0, t_a]	TOTAL
SO-OL	- 19 105	12 998	-3424	14 393	11 219	14 935
OL-FB	- 2 251	20 625	13 847	23 085	23 526	25 492
SO-FB	-21 356	33 623	10 423	37 478	34 745	40 427

Tableau 3.8 – Écarts des bien-être en milliers d'euros issus des différentes solutions lorsque l'intensité du choc $r_1 - r_2 = 70$ Mm³ est fixe et la date d'occurrence varie.

Observons maintenant le bien-être obtenu pour les mêmes simulations à court terme. Dans les colonnes 2, 4 et 6 du Tableau 3.7, le bien-être augmente avant l'arrivée de choc d'autant plus si celui-ci est tardif. Logiquement, plus le choc a lieu tard, plus les agriculteurs ont le temps de mieux s'adapter au choc à court terme. Calculons maintenant les différences de bien-être entre les solutions à court terme (colonnes 2,4 et 6 du Tableau 3.8). Nous pouvons noter un résultat très intéressant. Lorsque le choc a lieu à une date précoce ($t_a = 5$), la différence de bien-être entre le cas OS et les cas OL et FB est négative avant l'arrivée du choc (entre $t = 0$ et $t = t_a$). Cela veut dire que l'inefficacité (en termes de stock) de l'exploitation privée entraîne ici un gain de bien-être (au lieu d'une perte comme dans l'analyse à long terme). Par exemple, à court terme, la solution « feedback » entraîne un gain de bien-être de 21,3 millions d'euros par rapport à l'optimum social, pour un choc d'intensité moyenne (70

Mm³) qui a lieu en $t_a=5$ ans. Ce résultat n'est pas vrai si le choc arrive en $t_a = 20$ ou 50 ans. Cela veut dire que lorsque le choc est précoce, le temps pour bien s'adapter au choc est insuffisant dans le cas de l'optimum social par rapport aux solutions « open-loop » et « feedback ». Finalement, en calculant le bien-être social tout au long de l'horizon de planification pour des chocs de différentes dates (colonnes 3, 5 et 7 du Tableau 3.7), nous notons que le bien-être social issu des différentes solutions augmente d'autant plus que le choc est tardif. En effet, dans tous les cas, plus le choc a lieu de façon tardive, plus le temps et l'efficacité de l'adaptation sont supérieurs. De plus, les différences de bien-être total entre les solutions (colonnes 3,5,7 du Tableau 3.8) sont croissantes plus le choc est tardif. Nous pouvons donc noter que la perte de bien-être total issue de l'inefficacité de l'exploitation privée, évaluée comme la différence entre les solutions du stock OS et FB, est plus importante plus le choc est tardif. Par exemple, à long terme, la solution « feedback » entraîne une perte de bien-être 3 800 milliers d'euros supérieure si le choc arrive en $t_a = 20$ au lieu d'arriver en $t_a = 5$.

En résumé :

1. Nous avons remarqué que l'effet d'abondance est plus important dans les cas OS et OL, que dans le cas FB. Cela veut dire que la présence de l'externalité stratégique fait réduire cet effet d'abondance avant l'arrivée du choc. Nous pouvons interpréter ce résultat de la façon suivante : même si les stratégies « feedback » entraînent une surexploitation de la ressource par rapport aux solutions en « open-loop » à court terme, les stratégies FB sont moins influencées par une augmentation de la valeur du choc du fait qu'elles sont réalisées avec plus d'informations.
2. Les effets des externalités coûts et stratégiques, évalués comme la différence entre les solutions OS et OL (respectivement OL et FB) sont positifs et diminuent d'autant plus que le choc est intense à court et à long terme. Cela veut dire que les stratégies d'extractions se rapprochent lorsque la disponibilité en eau est soudainement et significativement réduite. Ce résultat est similaire à la règle de Gisser et Sánchez (GSE) dans l'idée que les deux modes de gestion (exploitation privée et optimale) se rapprochent lorsque la capacité de l'aquifère est grande. Nous montrons que ce résultat est vrai aussi à court et à long terme lorsque la recharge se voit soudainement réduite.
3. De plus, quand nous analysons maintenant l'impact des différentes externalités lorsque la date d'occurrence varie, on note que les différents effets se comportent de façon non-monotone et atteignent un effet maximal pour des événements qui ont lieu à moyen terme. A court ou respectivement à long terme, les effets sont moins importants car le temps d'adaptation est insuffisant ou respectivement trop long. A l'état stationnaire, les effets des différentes externalités ne varient pas en fonction de la date d'occurrence du choc.
4. En termes de bien-être, l'inefficacité de l'exploitation privée se traduit par une perte de bien-être total, perte qui est maximale pour des chocs peu intenses ou tardifs. L'implication politique de ce résultat est que la régulation à travers une gestion centralisée de l'aquifère La Mancha Occidentale serait justifiée. Cette régulation devient encore plus nécessaire si des chocs peu intenses ou tardifs avaient lieu.
5. Cependant, à court terme, les résultats sont surprenants. L'inefficacité de l'exploitation privée se traduit parfois par un gain de bien-être à court terme pour des chocs qui ont lieu à des dates précoces. Une intervention d'un régulateur dans la gestion de l'aquifère avant l'arrivée du choc ne serait donc pas toujours justifiée.

Une structure alternative d'information : « open-loop » par morceaux

Finalement, un cas plus réaliste que la structure d'information en « open-loop » (OL) serait une structure « open-loop » par morceaux (OLM). Cette solution offre la possibilité de rétablir des stratégies d'extraction « open-loop » au moment de l'arrivée du choc. Intuitivement, ce type d'information se situerait à moitié chemin entre le cas « open-loop » et le cas « feedback » (FB). Nous voulons confirmer notre intuition initiale en réalisant un exemple numérique. Nous pouvons voir dans la figure 3.8, les solutions du stock et du taux d'extraction pour le choc étudié précédemment d'intensité moyenne ($r_2 = 290$), ayant lieu à moyen terme ($ta = 20$) issues de différentes structures d'information : « open-loop » (en bleu), « open-loop » par morceaux (en pointillés noirs) et « feedback » (en rouge).

Nous analysons d'abord les résultats à l'état stationnaire. Les solutions de la structure

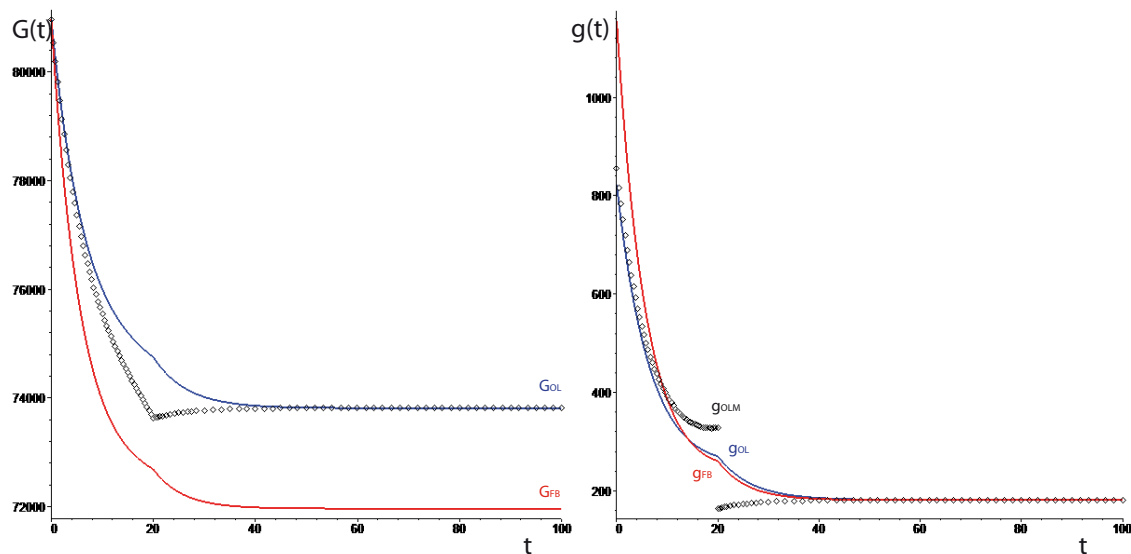


FIGURE 3.8 – Différentes solutions de $G^*(t)$ (à gauche) en millions de mètres cubes et $g^*(t)$ (à droite) en millions de mètres cubes par an : « open-loop » (en bleu), « open-loop » par Morceaux (en pointillés noirs) et « feedback » (en rouge), quand $r_2 = 290$ et $t_a = 20$ ans.

	$[0, t_a]$	TOTAL
OL	114 886	132 265
OLM	113 865	128 116
FB	101 039	109 180

Tableau 3.9 – Bien-être des différentes solutions en milliers d'euros lorsque l'intensité du choc est de $r_1 - r_2 = 70 \text{ Mm}^3$ et la date d'occurrence est $t_a = 20$ ans.

« open-loop » par morceaux sont les mêmes que dans le cas « open-loop ». Il est donc plus intéressant d'analyser les différents chemins d'extractions avant l'arrivée du choc. Les extractions réalisées dans le cas OLM avant l'arrivée du choc sont d'environ $9\,084 \text{ Mm}^3$. Comme nous l'attendions, les solutions de cette structure alternative se situent entre les niveaux obtenus dans le cas OL ($8\,368 \text{ Mm}^3$) et dans le cas FB ($9\,762 \text{ Mm}^3$). Ce comportement d'extraction procure donc un bien-être de $113\,865$ milliers d'euros à court terme pour l'exemple numérique illustré dans la figure 3.8. De plus, la différence de bien-être avec le cas OL est d'environ un million d'euros (cf. Tableau 3.9) à court terme. Ceci veut dire qu'à court terme, il est inefficace (en termes de bien-être et de stock) de rétablir une nouvelle stratégie « open-loop » au moment de l'arrivée du choc. Finalement, la différence de bien-être total entre les cas OL et OLM est aussi positive et elle est estimée à plus de 4 millions d'euros.

Nous pouvons conclure que la structure d'information « open-loop » par morceaux entraînent les mêmes niveaux d'exploitation de la ressource à l'état stationnaire, mais elle génère des stratégies moins conservatrices avant l'arrivée du choc, si l'on compare avec la structure « open-loop ». En termes de bien-être, l'exploitation selon une structure d'information OLM est inefficace en comparaison avec la structure OL à court et à long terme. Cela veut dire qu'il n'est pas intéressant pour les utilisateurs de la ressource de rétablir des nouvelles stratégies « open-loop » au moment de l'arrivée du choc.

3.6 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, notre but a été d'étendre l'analyse du choc déterministe réalisé dans le chapitre 2, en prenant en compte les différentes externalités issues de l'exploitation d'un aquifère en régime de propriété commune, i.e. les différentes interactions stratégiques et dynamiques entre les utilisateurs de la ressource. Nous présentons différentes solutions : l'optimum social, deux équilibres correspondant à différentes structures d'information classiques : « open-loop » et « feedback », puis nous proposons une autre structure d'information plus réaliste que la solution « open-loop » lorsque un tel choc a lieu, la solution « open-loop » par morceaux.

Dans un premier temps, quand nous analysons l'impact de l'occurrence d'un choc selon les différentes structures d'information indépendamment, nous retrouvons les mêmes tendances que dans le chapitre 2 lorsque nous étudions l'optimum social. Afin de pouvoir résoudre les différents problèmes analytiquement, nous présentons les résultats, pour un cas à 2 joueurs, pouvant correspondre à deux groupes d'irrigants symétriques. Le comportement d'adaptation du joueur face au choc consiste à exploiter la ressource de manière plus intensive avant l'arrivée du choc de façon à accumuler des gains et compenser les pertes qui auront lieu à partir de l'arrivée du choc. En effet, à cet instant t_a , les extractions commencent à diminuer afin de s'adapter à la diminution de la disponibilité en eau. A l'état stationnaire, le niveau du stock de la ressource tombe à un niveau inférieur en raison de la diminution de la recharge de la nappe. En revanche, même si le comportement d'extraction face au choc est similaire, nous montrons que l'impact de ce comportement d'adaptation sur les niveaux de stock et de bien-être n'est pas la même selon la structure d'information dont disposent les utilisateurs.

En effet, dans un deuxième temps, nous comparons les différents résultats obtenus pour les différentes stratégies lorsque le choc a lieu. Pour cela, nous réalisons des simulations numériques sur l'aquifère étudié dans le chapitre 2 : La Mancha Occidentale. D'abord, à long terme (état stationnaire), nous montrons que l'exploitation optimale (l'optimum social) est le mode de gestion le plus efficace (en termes de stock et de bien-être) en comparaison avec l'exploitation privée (stratégies en « open-loop » et en « feedback »). Les résultats trouvés sont en accord avec la littérature existante (Negri (1989) [61], Rubio et Casino (2001) [74] entre autres). La prise en compte de l'externalité stratégique (solution « feedback ») aggrave encore plus la surexploitation de la ressource. Par exemple, pour un choc de moyenne intensité qui arrive à moyen terme, la perte de bien-être issue des stratégies « feedback » par rapport à l'optimum social est estimée à 37 millions d'euros. Cependant, à court terme, avant l'arrivée du choc, nous ne retrouvons pas le même résultat. Nous montrons que l'exploitation privée reste la solution la moins efficace en termes de stock mais cette inefficacité peut se traduire par un gain de bien-être au lieu d'une perte dans certaines situations. Cela motive l'étude du comportement d'adaptation en fonction de l'intensité ou la date d'occurrence du choc.

Dans un troisième temps, nous analysons donc l'impact des externalités coût (évaluée comme la différence entre les solutions OS et OL) et stratégique (évaluée comme la différence entre les solutions OL et FB) sur le comportement d'adaptation pour différents types de choc. Nous montrons d'abord que l'effet d'abondance, i.e. l'augmentation des extractions avant l'arrivée du choc d'autant plus que la valeur du choc augmente, est plus important dans les cas OS et OL, que dans le cas FB. En effet, même si les stratégies Cela motive l'étude de différents types de chocs afin de entraînent une surexploitation de la ressource par rapport aux solution en « open-loop » à court terme, les stratégies FB sont moins influencées par une

augmentation de la valeur du choc du fait qu'elles sont réalisées avec plus d'informations. Ensuite, nous montrons que les effets des externalités coûts et stratégique diminuent à long terme d'autant plus que le choc est grand. Les deux types de gestion, exploitation privée et optimale, se rapprochent quand le choc devient plus intense à court et à long terme. Ce résultat rappelle la règle de Gisser et Sánchez (GSE) : les deux modes de gestion (exploitation privée et optimale) se rapprochent lorsque la capacité de l'aquifère est grande. Nous montrons que ce résultat est vrai aussi à court terme.

Ensuite, nous analysons l'impact des différentes externalités lorsque le date d'occurrence du choc varie. A l'état stationnaire, le comportement d'adaptation ne dépend en aucun cas de la date d'arrivée du choc. En revanche, si nous évaluons l'inefficacité de l'exploitation privée (en termes de stock) avant l'arrivée du choc, celle-ci est plus importante pour des événements qui ont lieu à moyen terme. A court ou respectivement à long terme, les effets coût et stratégiques sont moins importants car le temps d'adaptation est insuffisant ou respectivement trop long.

En termes de bien-être, nous avons montré que l'inefficacité de l'exploitation privée se traduit par une perte de bien-être total. De plus, cette perte est maximale pour des chocs peu intenses ou tardifs. Par exemple, elle est d'environ 39 millions d'euros lorsque un choc peu intense a lieu à moyen terme. L'implication politique la plus importante de cette analyse est que la régulation à travers une gestion centralisée de l'aquifère La Mancha Occidentale est justifiée. Cette régulation devient encore plus nécessaire si des chocs peu intenses ou tardifs ont lieu. Cependant, l'inefficacité de l'exploitation privée se traduit parfois par un gain de bien-être à court terme pour des chocs qui ont lieu à des dates précoces. Par exemple, l'exploitation issue des structures d'informations « open-loop » et « feedback » peut entraîner un gain de bien-être de respectivement 19 et 2 millions d'euros par rapport à l'exploitation optimale lorsque le choc a lieu à très court terme. Une intervention d'un régulateur dans la gestion de l'aquifère avant l'arrivée du choc ne serait pas toujours justifiée. Une analyse du bien-être obtenu par les différents modes de gestion seraient donc nécessaire en fonction des caractéristiques du choc, afin de savoir à quel moment l'intervention est justifiée.

Finalement, nous proposons une structure d'information située entre les cas « open-loop » et « feedback », que nous appelons le cas « open-loop » par morceaux. Cette structure serait plus réaliste que le cas OL, en offrant la possibilité aux utilisateurs de rétablir sa stratégie d'exploitation « open-loop » au moment d'arrivée du choc. L'étude de cette structure d'information alternative est surtout intéressante à court terme, car elle entraîne des stratégies d'extractions plus conservatrices que dans le cas FB, mais moins conservatrices que dans le cas OL. En revanche, à l'état stationnaire, les niveaux d'exploitation de la nappe sont les mêmes dans les cas « open-loop » et « open-loop » par morceaux. De plus, cette nouvelle structure d'information entraîne une perte de bien-être par rapport à la solution OL à court et à long termes. Cela veut dire qu'il n'est pas intéressant pour les utilisateurs de la ressource de rétablir des nouvelles stratégies « open-loop » au moment du choc.

Suite à ce travail, nous voulons proposer quelques extensions possibles du chapitre. En premier lieu, nous pouvons introduire l'incertitude sur le modèle, par exemple sur la date d'occurrence du choc, comme nous l'avons réalisé dans le chapitre précédent, ou sur l'intensité du choc. Deuxièmement, il serait intéressant d'introduire des asymétries entre les différents groupes d'irrigants. Finalement, il serait intéressant de chercher différentes solutions à l'inefficacité de l'exploitation privée. La mise en place d'un système de quotas pourrait être une solution à la surexploitation de cet aquifère. Dans le chapitre qui suit, nous étudierons un aquifère dans lequel nous retrouvons ce type de système de gestion : la gestion volumétrique.

Modèle d'exploitation agricole avec une dynamique de la ressource en eau : Application à la nappe de Beauce

Sommaire

4.1	Introduction	81
4.2	Le modèle	83
4.2.1	Paramètres du modèle	83
4.2.2	Formulation du modèle	85
4.2.3	Résolution du problème	85
4.2.4	Les solutions aux bords	88
4.2.5	Un cas statique particulier : $z = c = 0$	88
4.3	Application à la Beauce centrale	90
4.3.1	Contexte de la Beauce	90
4.3.2	Problématique de la gestion de l'eau	93
4.3.3	Recueil des données	95
4.3.4	Transformation des données	97
4.3.5	Application numérique : résultats	103
4.4	Conclusions	109

4.1 Introduction

En France, les précipitations moyennes annuelles varient de façon importante selon les régions. Par exemple, elles sont inférieures à 600 mm dans la moitié est de l'Eure-et-Loir, le delta du Rhône ou la vallée de l'Aude, mais elles sont supérieures à 2000 mm sur les monts du Cantal, au mont Aigoual ou en Chartreuse (voir [111]). Des régions vont donc être plus ou moins sujettes au risque sécheresse. Au total, le territoire français a été concerné au moins sur une de ses régions par 13 épisodes de sécheresses entre 1976 et 2005, c'est à dire, une occurrence moyenne de deux années sur cinq, soit deux fois plus que dans le passé sur une période deux fois plus longue (12 épisodes entre 1905 et 1965) (voir Itier (2008) [44]).

Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'impact des années sèches sur le remplissage des ressources en eau souterraines utilisées pour l'irrigation. D'une part, une sécheresse peut entraîner une baisse importante des niveaux d'eau de la nappe, et donner lieu à la mise en place de restrictions d'usage. Ceci se traduit par une diminution des volumes prélevables pour l'irrigation. Le secteur agricole est donc, un secteur fragile face au risque sécheresse. D'une autre part, à l'heure actuelle, le secteur agricole est le principale consommateur d'eau en France, avec environ 50 % de la consommation totale, (voir Margat et Andréassian (2008) [59]). Il constitue donc un secteur non seulement fragile mais responsable face au risque

sécheresse. Par conséquent, le problème à traiter est un problème de déséquilibre entre l'offre en eau, sujette aux sécheresses, et la demande en eau, sujette aux objectifs de rendements potentiels des agriculteurs.

Dans ce travail, nous nous posons plusieurs questions de recherche : quel est l'impact d'une année sèche sur la production, et donc, sur la valeur ajoutée de l'exploitation ? Quel est l'impact d'une année sèche sur la ressource en eau utilisée ? Quel comportement stratégique les agriculteurs peuvent avoir en année sèche, que ce soit sans ou avec restrictions des usages de l'eau ?

Pour répondre à ces questions, nous allons commencer par étudier la littérature économique sur les stratégies individuelles des agriculteurs face aux sécheresses. Dans cette littérature, nous identifions deux catégories pour déterminer le comportement optimal des agriculteurs : les stratégies à court terme (une ou deux campagnes) et les stratégies à long terme. A court terme, c'est-à-dire, lors de la campagne agricole annuelle, le choix des cultures et des techniques d'irrigation est fait. Les seuls facteurs à ajuster sont l'eau, l'engrais, les pesticides... A long terme, l'agriculteur a plus de possibilités d'adaptations, surtout en ce qui concerne les choix des cultures et des techniques d'irrigation. Reynaud (2009) [69] reprend cette approche et construit un modèle agro-économique dynamique, appliqué au cas des grandes cultures en Midi-Pyrénées. Dans ce modèle, les variables de décisions sont l'assolement et la stratégie d'irrigation optimale. La fonction d'utilité de l'agriculteur constitue la fonction à maximiser. La dynamique est intégrée ici dans le rendement agricole, le rendement dans la période $t+1$ dépend essentiellement du rendement de la période t , de la stratégie d'irrigation utilisée en t , et de l'aléa climatique qui a lieu en t .

En revanche, dans ce type de modèle, l'état de la ressource en eau n'est pas considéré. Pour prendre en compte cet élément important, il faut aborder la problématique avec une combinaison de modèles non seulement agronomiques et économiques, mais aussi de modèles hydrologiques. Par exemple, Evers, Elliot et Stevens (1998) [30] font le lien entre 4 modèles, un modèle de simulation de croissance de la culture (EPIC), un modèle hydrologique (PRMS), un modèle linéaire économique et un modèle de programmation dynamique qui intègre les 3 premiers. Les résultats obtenus dans les trois premiers modèles, c'est-à-dire, les rendements en fonction des différentes stratégies d'irrigation (par culture et type de sol), le flux (pluie-demande) du réservoir, le choix d'assolement par volume total d'eau de référence et par stratégies d'irrigation qui maximisent les revenus, correspondent aux données du modèle de programmation dynamique. Celui-ci permet de choisir le plan optimal par année, dans l'horizon de planification, selon l'état initial et final du réservoir à chaque étape. De même, en [86], Vedula et Nagesh Kumar (1996) déterminent à l'aide d'un modèle de programmation stochastique dynamique la valeur optimale du stock du réservoir à la fin de la saison et l'allocation optimale d'irrigation des cultures en prenant en compte à la fois les caractéristiques de croissance et de rendement des cultures, mais aussi les caractéristiques du réservoir (taille, pluie saisonnière, évapotranspiration saisonnière). Nous nous inspirerons de ce type de démarche pour réaliser notre travail, en considérant une nappe phréatique au lieu d'un réservoir. La principale différence entre l'utilisation d'un réservoir et d'une nappe réside dans la prise en compte des coûts de pompage pour exploiter ce dernier type de ressource.

Dans un premier temps, nous allons construire un modèle économique avec une dynamique de la ressource en eau. L'agriculteur cherche à maximiser son revenu annuel à partir des choix d'eau d'irrigation et d'assolement. Nous concevons ce modèle de façon à obtenir des solutions analytiques à notre problème afin de mieux comprendre les décisions des agriculteurs et notamment l'impact de l'état de la ressource dans leur choix.

Dans un deuxième temps, ce modèle dynamique d'exploitation agricole est appliqué à la

nappe de Beauce (en particulier, à la zone de la Beauce Centrale). Des études ont déjà été réalisées dans cette zone sur l'adaptation aux sécheresses et aux restrictions d'usages de l'eau de la nappe à l'échelle des exploitations. Ces travaux montrent que des adaptations, telles que la réduction de la fréquence (et donc de la quantité d'eau) d'irrigation ou la modification des assolements, sont envisagées par les exploitations (Bouarfa et al. (2010) [4]; Lejars et al. (2012, 2012, 2012) [49], [50], [51]; Graveline et Schomburkg (2013) [36]). La limite de ces études est justement l'absence de résultats analytiques. Cela justifie la réalisation du modèle d'optimisation théorique et le choix des variables de contrôles utilisées dans celui-ci. Dans le paragraphe qui suit, nous résumons la démarche méthodologique réalisée pour construire l'application de notre modèle.

En premier, nous allons utiliser un modèle agronomique réalisé sur la zone d'étude. Ce modèle simule d'une part, les rendements potentiels agricoles, en prenant en compte différentes stratégies d'irrigations. D'autre part, il simule le bilan hydrique de la période d'irrigation grâce à laquelle on pourra classer les résultats des rendements selon le type de saison climatique (sec, normal, humide). A partir de ces données, nous pouvons construire des courbes de réponse à l'eau¹ par culture, par type de sol et par type de saison climatique que nous allons introduire dans notre modèle économique. La sécheresse sera donc représentée dans le modèle économique par une baisse du rendement agricole de l'exploitant. De plus, nous utilisons un modèle hydrologique de la zone de la Beauce centrale pour représenter la dynamique de la ressource en eau.

Ensuite, plusieurs scénarios numériques seront réalisés pour une exploitation-type de la Beauce, le type Grandes cultures Betterave, la plus représentative de la zone d'étude. Nous analyserons non seulement les conséquences d'une année sèche sans et avec restrictions d'usages sur les choix d'assolement et d'irrigations de l'exploitation, mais aussi les conséquences économiques pour l'exploitant et les conséquences hydrologiques sur le niveau de la nappe. Le but final est de comparer nos résultats avec les résultats trouvés dans la littérature utilisant d'autres méthodologies : choix de modèles statiques, enquêtes de terrain ou « field experiment ».

4.2 Le modèle

Notre modèle d'optimisation possède une variable d'état, $H(t)$, la hauteur d'eau de la nappe en début de période t , puis deux variables de contrôles, $w_k(t)$, le volume d'eau d'irrigation par unité de surface utilisée par la culture k pendant la période t , $\alpha_k(t)$, la proportion de surface agricole utilisée par la culture k . C'est un modèle à deux périodes (le printemps et l'été) et à trois cultures ($k=3$), 2 cultures de printemps et une culture d'été.

4.2.1 Paramètres du modèle

Soit,

- t : indice du temps ($t=0$, le printemps, $t=1$, l'été),
- k : indice des cultures ($k=1,2$, les cultures de printemps et $k=3$ la culture d'été),

les paramètres du modèle agro-économique sont les suivants :

- S : surface moyenne de l'exploitation-type,

1. Une courbe de réponse à l'eau représente le rendement obtenu en fonction d'un seul intrant, le quantité d'eau utilisée.

- p_k : prix par culture k,
- x_k, a_k, b_k : coefficients de la fonction de demande en eau de la culture k,
- y_k : rendement de la culture k² (par unité de surface), avec

$$y_k = x_k + a_k w_k - b_k w_k^2$$

- C^P : coût de pompage d'une unité de volume d'eau, en fonction de L, la distance de pompage,

$$C^P = cL$$

où c est le coût d'énergie pour pomper à une unité de distance.

De façon équivalente, nous pouvons écrire cette fonction de coût en fonction de H, la hauteur d'eau de la nappe :

$$C^P = cL = c(L_{max} - H) = z - cH$$

avec L_{max} , la distance maximale de pompage et $z = c * L_{max}$, le coût maximal de pompage,

- d_k, e_k : coefficients de la fonction de charges opérationnelles
- C_k^O : charges opérationnelles de la culture k, avec :

$$C_k^O = d_k \alpha_k - \frac{e_k}{2} \alpha_k^2. \quad (4.1)$$

La fonction profit (ou Valeur Ajoutée Brute³ (VAB)) issue de la culture k de l'agriculteur est donc :

$$S \alpha_k (p_k y_k - C^P * w_k) - S * C_k^O.$$

Les paramètres du modèle hydrologique :

- S_B : surface totale de la zone d'étude (Beauce centrale),
- $r_0 (= r(0)), r_1 (= r(1))$: recharge printanière et estivale nette de la nappe,
- M : nombre d'exploitations étudiées,
- $w_0^i (= w^i(0)), w_1^i (= w^i(1))$: volumes d'extractions pour irrigation des autres exploitations⁴ de la zone d'étude, en printemps et en été respectivement
- w^f : volumes d'extractions hors irrigations (pour alimentation en eau potable et usage industriel)
- γ : coefficient de prélèvement
- η : coefficient de stockage de la nappe
- σ : coefficient de retour de l'eau dans la nappe

La dynamique de la ressource en eau est donc :

2. La fonction de demande en eau de la culture k est une fonction quadratique que nous allons estimer plus tard à l'aide d'un modèle agronomique.

3. Tout au long de ce chapitre, le profit représente la valeur ajoutée brute. Cette valeur correspond au Produit Brut (PB) auquel on soustrait la valeur des Consommations Intermédiaires (CI). Elle révèle la création de revenus distribués aux catégories institutionnelles usuelles que sont les ménages (agriculteurs et salariés), les administrations publiques et les entreprises (amortissements inclus), (cf. Lejars et al. (2012) [50]).

4. Dans notre modèle d'optimisation, nous nous concentrerons sur un seul type d'exploitation de la Beauce. En revanche, dans le modèle hydrologique, nous prenons en compte le volume d'eau utilisé par le reste d'exploitations de la zone d'étude.

$$H(t+1) = H(t) + \frac{r(t) - (1 - \sigma)(MS \sum_k \alpha_k(t)w_k(t) + w^i(t) + w^f)\gamma}{S_B * \eta} \quad t = 0, 1$$

4.2.2 Formulation du modèle

Le problème de l'exploitant-type est de maximiser son profit en choisissant de façon optimale $w_k(t)$ et $\alpha_k(t)$, sous la contrainte de la dynamique de la ressource en eau. Les proportions, $\alpha_k(t)$ ($k=1,2$) représentent les parts de surfaces des cultures de printemps, donc $\alpha_k(0) > 0$ et $\alpha_k(1) = 0$ ($k=1,2$) et inversement pour $\alpha_k(t)$ ($k=3$), la culture d'été. Logiquement, si $\alpha_k(t) = 0$, donc $w_k(t) = 0$. La réciproque n'est pas toujours vrai car nous pouvons cultiver en sec ($\alpha_k(t) > 0$ et $w_k(t) = 0$). Nous traduisons ce problème afin d'obtenir sa résolution à l'aide du principe de la programmation dynamique :

$$V(H(t)) = \max_{\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t) \\ w_1(t), w_2(t), w_3(t) \end{array} \right\}_{t=0,1}} S \sum_{k=1}^3 \alpha_k(t) \overbrace{(p_k(x_k + a_k w_k(t) - b_k w_k^2(t)) - d_k - z w_k(t) + c H(t) w_k(t))}^{y_k} - S \frac{e_k}{2} \alpha_k^2(t) + \beta V(H(t+1))$$

avec,

$$H(t+1) = H(t) + \frac{r(t) - (1 - \sigma)(M \sum_k w_k(t) + w^i(t) + w^f)\gamma}{S_B * \eta} \quad t=0,1$$

$$H(0) = H_0, \quad \alpha_3(1) = \bar{\alpha} \quad \text{donnés}$$

$$\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = \alpha_3(0) = 0 \implies w_1(1) = w_2(1) = w_3(0) = 0,$$

$$\alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \alpha_3(1) = 1,$$

et

$$V(H(2)) = V_T(\text{cte.}).$$

4.2.3 Résolution du problème

Nous allons résoudre le problème par le principe de la programmation dynamique. Nous rappelons que ce principe repose sur un raisonnement par récurrence à rebours⁵ (ou « backward induction »). Dans une première étape, nous allons calculer la fonction valeur en $t=1$, $V(H(1))$, i.e., la maximisation du profit de l'exploitation en été. Nous allons donc obtenir l'assolement et les volumes d'eau optimaux pour les cultures irriguées en été. Dans une deuxième étape, nous allons calculer la fonction valeur en $t=0$, $V(H(0))$. Nous maximisons

5. En partant de la valeur finale $V(H(T))$, nous allons calculer toutes les fonctions valeurs du problème ($V(H(T-1))$, $V(H(T-2))$, ... $V(H(0))$) (cf. chapitre 1).

donc le profit de l'exploitation en $t=0$, en calculant l'assolement et les volumes d'eau optimaux pour les cultures irriguées au printemps et en prenant en compte les solutions trouvées dans la première étape⁶.

Calcul de l'assolement et des volumes d'eau pour l'été

Soit $V(H(2)) = V_T$ (cte.),

$$\pi(1) = S \overbrace{\alpha_3(1)}^{\bar{\alpha}} (p_3(x_3 + a_3 w_3(1) - b_3 w_3(1)^2) - d_3 - z w_3(1) + cH(1)w_3(1)) - S \frac{e_3}{2} \alpha_3(1)^2 \quad (4.2)$$

Dans une première étape, on doit résoudre :

$$V(H(1)) = \max_{w_3(1)} \pi(1)$$

En utilisant les conditions de maximisation sur la fonction $\pi(1)$ (équation (4.2)), on obtient :

$$\frac{\partial \pi(1)}{\partial w_3(1)} = 0 \Leftrightarrow S \bar{\alpha} (p_3 a_3 - 2p_3 b_3 w_3(1) - z + cH(1)) = 0$$

et donc

$$w_3(1) = \frac{p_3 a_3 - z + cH(1)}{2p_3 b_3} \quad (4.3)$$

avec

$$H(1) = h_0 + \frac{r(0) - (1 - \sigma)\gamma(MS(\alpha_1(0)w_1(0) + \alpha_2(0)w_2(0)) + w^i(0) + w^f)}{S_B \eta} \quad (4.4)$$

et

$$\alpha_2(0) = 1 - \alpha_1(0) - \bar{\alpha}.$$

Soit le bénéfice marginal (par unité de surface) issu de la culture 3, noté bm_3 ,

$$bm_3 = p_3 a_3 - 2p_3 b_3 w_3,$$

et le coût marginal d'utilisation de l'eau issu de la culture 3, noté cm_3 ,

$$cm_3 = z - cH(1),$$

d'après l'expression de l'équation (4.3), le volume d'irrigation optimale de la culture d'été est donc celui qui permet d'égaliser le bénéfice marginal au coût marginal d'utilisation de l'eau pour la culture 3. Ce coût marginal d'utilisation de l'eau dépendra du comportement optimal d'irrigation réalisé au printemps.

En substituant la solution optimale (4.3) dans l'équation (4.2), on obtient le profit maximal en $t=1$, i.e. la valeur de la ressource en été en fonction des choix faits au printemps :

$$V(H(1)) = \pi^*(1) = F(\alpha_1(0), w_1(0), w_2(0)).$$

6. Dans cette section, nous calculons uniquement les solutions intérieures du problème.

Calcul de l'assolement et des volumes d'eau pour le printemps

Dans une deuxième étape, on doit maximiser le profit réalisé au printemps ($t=0$). Ainsi, on doit résoudre :

$$V(H(0)) = \max_{\substack{\alpha_1(0) \\ w_1(0), w_2(0)}} \pi(0)$$

avec

$$\begin{aligned} \pi(0) = & S\alpha_1(0)(p_1(x_1 + a_1w_1(0) - b_1w_1(0)^2) - d_1 - zw_1(0) + cH_0w_1(0)) - S\frac{e_1}{2}\alpha_1(0)^2 \\ & + S(1 - \alpha_1(0) - \bar{\alpha})(p_2(x_2 + a_2w_2(0) - b_2w_2(0)^2) - d_2 - zw_2(0) + cH_0w_2(0)) - S\frac{e_2}{2}(1 - \alpha_1(0) - \bar{\alpha})^2 \\ & + \beta F(\alpha_1(0), w_1(0), w_2(0)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

En utilisant les conditions de maximisation sur la fonction $\pi(0)$ (équation (4.5)), on obtient :

$$\frac{\partial \pi(0)}{\partial \alpha_1(0)} = 0 \Leftrightarrow P(1) - P(2) + \frac{\partial \pi(1)^*}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (4.6)$$

avec $P(1)$ et $P(2)$ les profits issus des cultures 1 et 2 :

$$P(1) = Sp_1(x_1 + a_1w_1(0) - b_1w_1^2(0)) - Sd_1 - Szw_1(0) + ScH_0w_1(0) - Se_1\alpha_1(0), \quad (4.7)$$

$$P(2) = Sp_2(x_2 + a_2w_2(0) - b_2w_2^2(0)) - Sd_2 - Szw_2(0) + ScH_0w_2(0) - Se_2(1 - \bar{\alpha} - \alpha_1(0)). \quad (4.8)$$

A partir de l'équation (4.6), on obtient la solution optimale de la part allouée à la culture 1 ($\alpha_1^*(0)$) en fonction des choix d'irrigations réalisés au printemps ($w_1(0)$ et $w_2(0)$). En particulier, la solution optimale, $\alpha_1^*(0)$, est telle que la différence (en valeur absolue) entre les profits issus des cultures 1 (équation (4.7)) et 2 (équation (4.8)) est égale à l'impact marginal (en valeur absolue) du choix d'allocation fait pour la culture 1 sur la valeur de la ressource en été, $\frac{\partial F(\alpha_1(0), w_1(0), w_2(0))}{\partial \alpha_1}$. Cela veut dire que plus le profit obtenu à partir des cultures 1 et 2 se différencie (plus $|P(1) - P(2)|$ s'accroît) plus le choix d'allocation de la culture 1 pèse sur le profit estival (et donc sur le profit de la campagne).

Les autres conditions de maximisation sont :

$$\frac{\partial \pi(0)}{\partial w_1(0)} = 0 \Leftrightarrow S\alpha_1(0)(p_1a_1 - 2p_1b_1w_1(0) - z + cH_0) + \beta \frac{\partial \pi(1)^*}{\partial w_1(0)} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \pi(0)}{\partial w_2(0)} = 0 \Leftrightarrow S\alpha_2(0)(p_2a_2 - 2p_2b_2w_2(0) - z + cH_0) + \beta \frac{\partial \pi(1)^*}{\partial w_2(0)} = 0 \quad (4.10)$$

On observe dans les équations (4.9) et (4.10), que les solutions d'irrigations optimales de la culture 1, $w_1^*(0)$, respectivement 2, $w_2^*(0)$ sont telles que le bénéfice net marginal d'utilisation de l'eau⁷ issu de la culture 1, respectivement 2, est égal à l'impact marginal (actualisée et en valeur absolue) du choix d'irrigation fait pour la culture 1, respectivement 2, sur le profit estival. Logiquement, cela veut dire que plus le bénéfice net marginal (dû à son irrigation) issu de la culture de printemps est important, plus son choix pèse sur le profit estival (et donc sur le profit de la campagne).

Nous avons donc un système de 3 équations (4.6), (4.9) et (4.10), à trois inconnues à résoudre pour trouver $\alpha_1^*(0)$, $w_1^*(0)$ et $w_2^*(0)$.

Finalement, nous devons substituer $\alpha_1^*(0)$, $w_1^*(0)$ et $w_2^*(0)$, dans l'équation (4.3) pour trouver $w_3^*(1)$, le choix d'irrigation optimale concernant la culture 3.

Nous trouvons ainsi la solution optimale (et intérieure) du problème. Dans la section suivante, nous analysons les solutions aux bords du problème.

4.2.4 Les solutions aux bords

Nous devons calculer différents cas selon l'absence (respectivement la présence) de restrictions d'usages d'eau.

S'il n'y a pas de restrictions d'usages de l'eau, il faut étudier les cas suivants :

- cas 1 : $\alpha_1 = 0 \implies w_1 = 0$
- cas 2 : $\alpha_2 = 0 \implies w_2 = 0$
- cas 3 : $w_1 = 0$
- cas 4 : $w_2 = 0$
- cas 5 : $w_3 = 0$
- cas 6 : $w_1 = w_2 = 0$
- cas 7 : $w_1 = w_3 = 0$
- cas 8 : $w_2 = w_3 = 0$
- cas 9 : $w_1 = w_2 = w_3 = 0$

Si des restrictions d'usages d'eau existent et X représente le volume d'eau disponible pour l'exploitation (ou quota d'eau), il faut étudier aussi les cas :

- cas 10 : $S\alpha_1 w_1 = X \implies w_2 = w_3 = 0$
- cas 11 : $S\alpha_2 w_2 = X \implies w_1 = w_3 = 0$
- cas 12 : $S\alpha_3 w_3 = X \implies w_1 = w_2 = 0$
- cas 13 : $S\alpha_1 w_1 + S\alpha_2 w_2 = X \implies w_3 = 0$
- cas 14 : $S\alpha_1 w_1 + S\alpha_3 w_3 = X \implies w_2 = 0$
- cas 15 : $S\alpha_2 w_2 + S\alpha_3 w_3 = X \implies w_1 = 0$
- cas 16 : $S\alpha_1 w_1 + S\alpha_2 w_2 + S\alpha_3 w_3 = X$

Nous devons donc résoudre le problème selon les 17 cas possibles (16 + solution intérieure). L'optimum sera la solution (intérieure ou aux coins) qui maximise la fonction valeur, $V(H(0))$.

4.2.5 Un cas statique particulier : $z = c = 0$

Nous allons maintenant étudier l'impact de l'état de la ressource en eau sur les choix optimaux de l'exploitant, et donc l'importance de considérer la dynamique dans le modèle étudié. Pour cela, nous étudions les solutions optimales du problème statique où le coût de

7. On entend ici par bénéfice net marginal d'utilisation de l'eau, la différence entre les bénéfices et les coûts marginaux de l'irrigation.

pompagement nul ($z = c = 0$). En pratique, cela pourrait correspondre à un cas d'irrigation à partir d'une retenue collinéaire (ou réservoir artificiel).

En substituant $z = c = 0$ dans les équations (4.3), (4.6), (4.9) et (4.10) de la section précédente, on obtient :

$$w_3^s(1) = \frac{a_3}{2b_3} \quad (4.11)$$

et les conditions de maximisation en $t=0$:

$$\frac{\partial \pi(0)}{\partial \alpha_1(0)} = 0 \Leftrightarrow P^s(1) - P^s(2) = 0 \quad (4.12)$$

$$S\alpha_1(0)(p_1a_1 - 2p_1b_1w_1(0)) = 0 \quad (4.13)$$

$$S(1 - \alpha_1(0) - \bar{\alpha})(p_2a_2 - 2p_2b_2w_2(0)) = 0 \quad (4.14)$$

avec les valeurs de $P^s(1)$ et $P^s(2)$ définies dans les équations (4.7) et (4.8) avec $z = c = 0$.

Nous pouvons distinguer 3 solutions possibles du problème statique : d'une part, deux solutions aux bords,

1. $\alpha_1(0) = 0 \implies w_1(0) = 0, \alpha_2(0) = 1 - \bar{\alpha}$ et $w_2(0) = \frac{a_2}{2b_2}$,
2. $\alpha_2(0) = 1 - \alpha_1(0) - \bar{\alpha} = 0 \implies w_2 = 0, \alpha_1(0) = 1 - \bar{\alpha}$ et $w_1(0) = \frac{a_1}{2b_1}$,

et la solution intérieure,

$$\alpha_1^s(0) = \frac{p_1(x_1 + \frac{a_1^2}{4b_1}) - d_1 - (p_2(x_2 + \frac{a_2^2}{4b_2}) - d_2) + e_2(1 - \bar{\alpha})}{(e_1 + e_2)}, \quad (4.15)$$

$$\alpha_2^s(0) = 1 - \alpha_1^s(0) - \bar{\alpha} \quad (4.16)$$

$$w_1(0) = \frac{a_1}{2b_1} \quad (4.17)$$

$$w_2 = \frac{a_2}{2b_2} \quad (4.18)$$

L'équation (4.15) nous montre la solution optimale de la part allouée à la culture 1 au printemps, qui dépend de la différence entre les profits issus des cultures 1 et 2 et de la part allouée à la culture 3, notée $\bar{\alpha}$ (fixe par hypothèse). Plus les rendements obtenus à partir des cultures 1 et 2 se différencient, plus la part allouée à la culture 1 sera importante, et plus l'agriculteur aura tendance à faire de la monoculture.

Ensuite, on observe les solutions optimales du problème statique des volumes d'irrigation des cultures 1, 2 et 3 dans les équations (4.17), (4.18) et (4.11) respectivement. On conclut que quand le coût de pompage n'est pas pris en compte, les volumes d'irrigation optimaux des cultures 1, 2 et 3 correspondent aux volumes qui permettent d'égaliser le bénéfice marginal des cultures 1, 2 et 3 à 0.

4.3 Application à la Beauce centrale

4.3.1 Contexte de la Beauce

La nappe

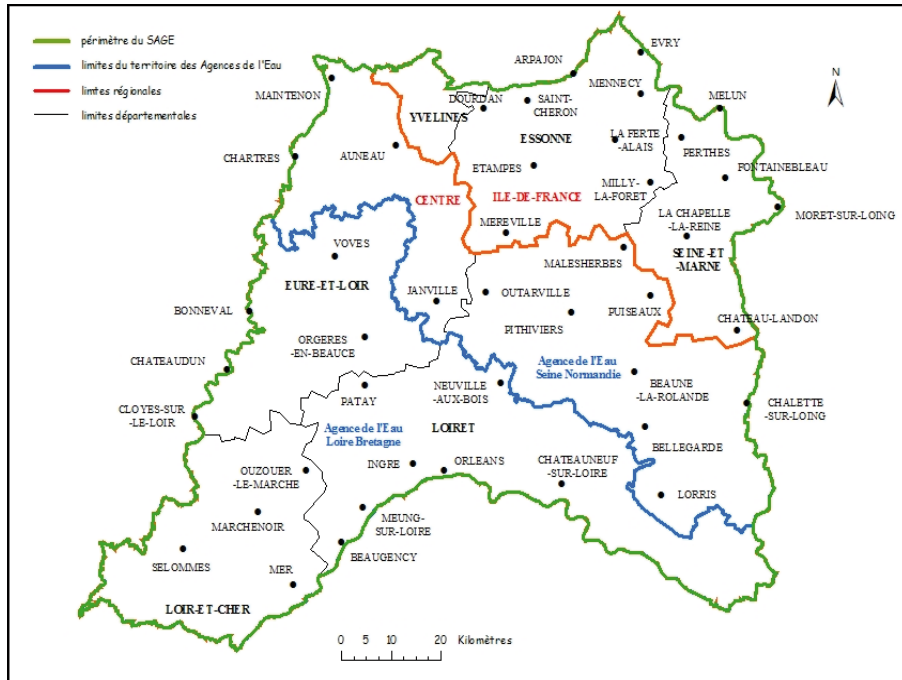


FIGURE 4.1 – Cadre administratif de la Beauce. Source : [104]

La nappe de Beauce est un vaste aquifère situé au sud-ouest de Paris. Elle occupe un territoire d'environ 9700 km², (voir Petit (2001) [66], Coz (2009) [14], Morardet et Hanot (2000) [60], Bouarfa et al. (2011) [4], Lejars et al. (2012) [51]....), entre la Loire et la Seine. Elle s'étend sur 2 régions : le Centre et l'Île de France, 6 départements : L'Eure-et-Loire (28), le Loir-et-Cher (41), le Loiret (45), la Seine-et-Marne (77), les Yvelines (78), et l'Essonne (91) et 2 Agences de l'Eau, correspondant aux 2 grands bassins hydrographiques : la Loire-Bretagne et la Seine-Normandie (voir Figure 4.1).

Elle est composée d'une succession de couches géologiques perméables (calcaires, marnes, sables) datant de l'ère tertiaire, sur un fond d'argile imperméable. De plus, la nappe de Beauce est dans sa majeure partie libre, c'est-à-dire, que son niveau d'eau peut varier sans être bloqué par une couche imperméable, sauf dans certaines zones comme la forêt d'Orléans où la nappe est captive, car le calcaire est recouvert par une couche d'argile. Dans la figure 4.2, nous pouvons observer une carte des différents niveaux piézométriques de la nappe en 1994. Les figures 4.3 et 4.4 correspondent aux coupes 1 et 2 (respectivement) matérialisées « en rouge » sur la carte de la figure 4.2 . Ces figures montrent l'importante variabilité des profondeurs de la nappe, entre 0 et 150 mètres d'altitude NGF⁸. De ce fait, il faudra être prudent dans l'évaluation du volume stocké par celle-ci (voir Coz (2009) [14]).

8. Le mètre NGF est une unité de mesure utilisée pour toutes les altitudes en France, et qui se réfère à l'altitude par rapport au niveau de la mer.

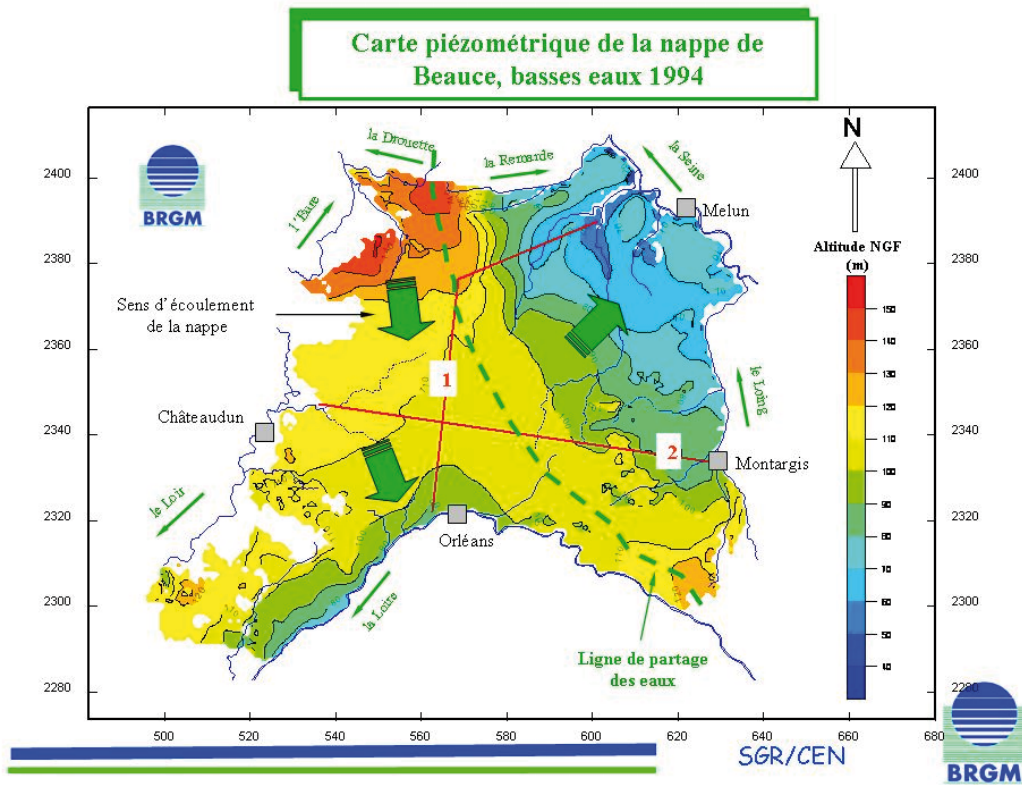


FIGURE 4.2 – Carte piézométrique de la nappe de Beauce, basses eaux 1994. Source : [105]

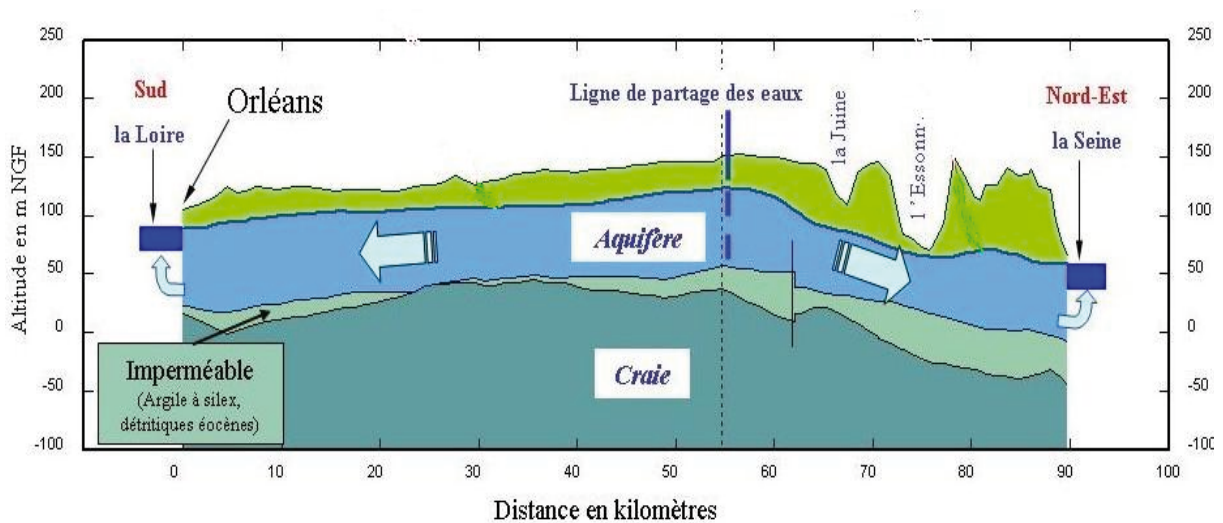


FIGURE 4.3 – Coupe 1. Source :[105]

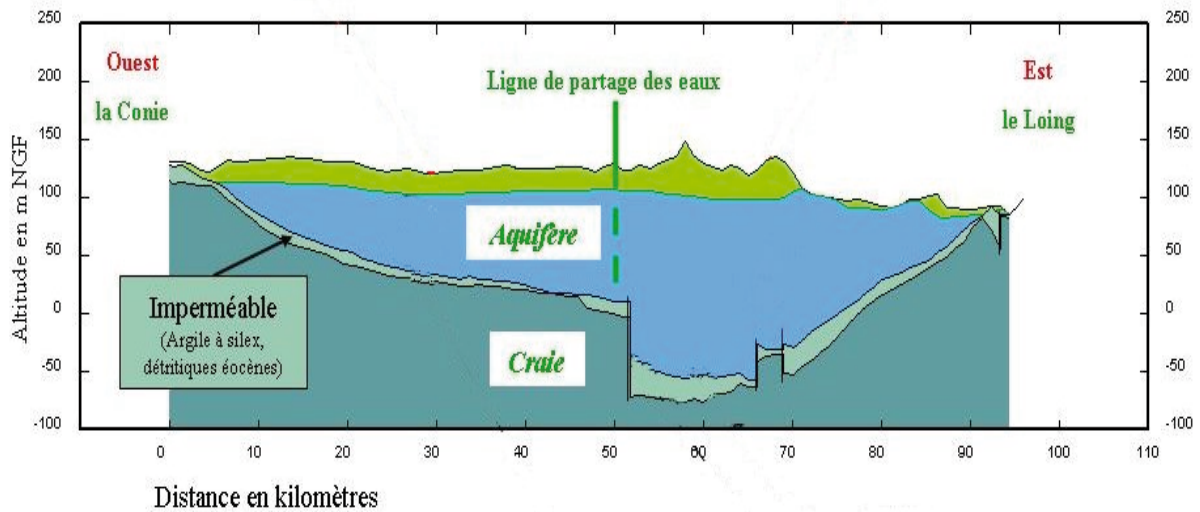


FIGURE 4.4 – Coupe 2. Source : [105]

La nappe de Beauce a une capacité de stockage estimée à 20 milliards de mètres cubes. La recharge se réalise essentiellement par les eaux de pluie qui s'infiltrent en hiver (d'octobre à mars). Le remplissage de la nappe dépend donc essentiellement du climat et en particulier de la pluviométrie. Le climat de la zone, semi-océanique (voir [105]) est un intermédiaire entre le climat océanique et le climat continental, à savoir en hiver des périodes froides et sèches mais aussi par moment des périodes douces et humides. Quant aux précipitations, elles sont régulières tout au long de l'année, mais elle restent faibles, en moyenne 600 mm de pluie par an, (voir [111]), dont 120 mm s'infiltrent dans le sol et alimentent naturellement plusieurs cours d'eau : la Loire, le Loing, la Seine, l'Essonne, l'Orge, l'Eure, le Loir et la Conie. L'alimentation des cours d'eau correspond à un prélèvement moyen de 600 millions de m³/an (voir Coz (2009) [14], Buisson (2010) [10], Lejars et al. (2012, 2012, 2012) [49], [50], [51]).

Les usages de l'eau

L'irrigation constitue le principal prélèvement sur la nappe avec un volume annuel compris entre 120 et 420 millions de m³/an, selon la sécheresse de l'année (voir Lejars et al. (2012) [51]). Tous les autres usages de l'eau (eau potable, industrie..) prélèvent environ 100 m³/an (voir Morardet et Hanot (2000) [60]). Des pluies en-dessous de la moyenne, des sols peu épais à certains endroits et des vents forts qui favorisent l'évapotranspiration donnent à la Beauce, les caractéristiques d'un endroit propice à l'irrigation (voir [106]).

En effet, plus de la moitié des exploitations agricoles de la Beauce irriguent. Ainsi, elle devance les principales régions d'irrigation françaises (Aquitaine, Midi-Pyrénées) avec plus de 340 000 ha de superficies irrigables. L'irrigation est essentiellement individuelle à partir de pompages dans la nappe. Il existe environ 3200 points d'eau enregistrés dans la Beauce, situés dans une majeure partie en Eure-et-Loir et dans le Loiret. De plus, les exploitations sont particulièrement bien équipées en systèmes d'irrigation (53 % de la SAU contre seulement 9 % en moyenne en France) ce qui facilite l'accès à l'eau et permet une grande diversification de la production : les cultures céréalières (Blé dur, Blé tendre, Maïs, Orge...) représentent plus de 70 % des surfaces irriguées en 2010. Les cultures à forte valeur ajoutée comme la betterave, les légumes et les pommes de terre, représentent 20 % des surfaces irriguées en 2010 (voir détails en [96]). Nous pouvons voir cette importante diversification des

assolements dans la figure 4.5.

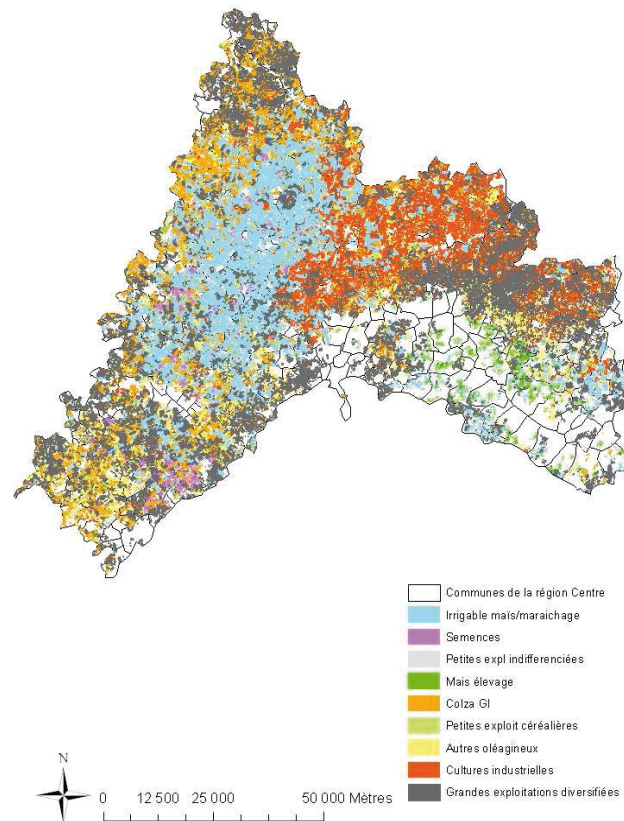


FIGURE 4.5 – Répartition géographique des assolements [10]

Finalement, nous rappelons qu'on distingue deux périodes pour l'irrigation : le printemps avec l'arrosage du blé tendre d'hiver, du blé dur, de l'orge et du pois, et l'été, avec l'irrigation de la betterave, du maïs et d'autres cultures sous-contrat telles que les semences, les pommes de terre et les oignons (entre autres). Nous nous appuierons plus tard sur cette typologie pour réaliser les simulations de notre modèle.

4.3.2 Problématique de la gestion de l'eau

Le niveau de la nappe de Beauce a toujours fait objet d'études, à cause de ces fortes fluctuations tout au long des années (voir Figure 4.6). Il a atteint son niveau le plus bas en 1994 et le plus haut en 1986. C'est pour cette raison que les pouvoirs publics ont dû mettre en place des mesures sur les droits d'irrigation puisant dans la nappe.

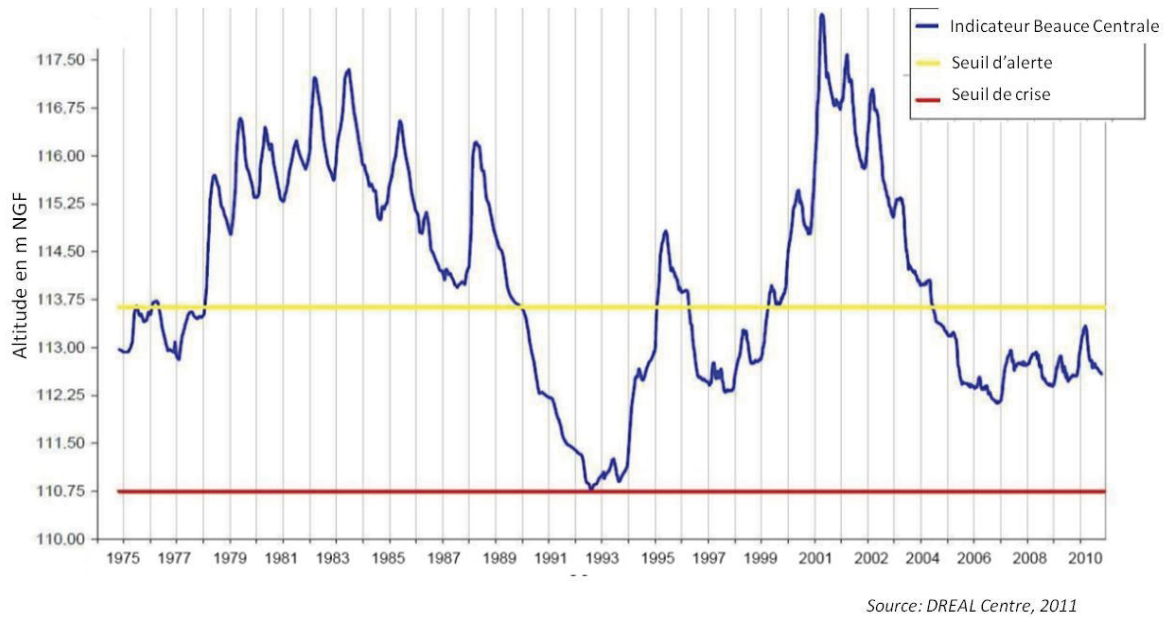


FIGURE 4.6 – Evolution du niveau piézométrique de la nappe de Beauce, en Beauce Centrale, entre 1975 et 2011. Source [51]

L'ensemble de mesures réalisées distingue plusieurs phases successives ces dernières années, (voir Petit (2001) [66]) :

- *De 1993 à 1994 : Restriction sans coordination des politiques.*

Suite à la sécheresse de 1990, des mesures sont prises pour pallier l'inquiétude sur le niveau de la nappe. Les restrictions correspondaient à des interdictions d'irriguer certains jours de la semaine pendant la période estivale dans chacun des départements concernés par la Beauce. Le problème de ces restrictions était la mauvaise coordination entre départements, qui a entraîné des règles différentes pour chaque département. Ces divergences ont été mal acceptées par les irrigants.

- *De 1995 à 1998 : La Charte nappe de Beauce et la définition des seuils d'alerte.*

La « Charte nappe de Beauce » est un accord signé en mars 1995 par l'administration et les syndicats d'irrigants, dans laquelle des mesures de restriction d'irrigation ont été mises en place. Ces mesures consistaient à définir différents seuils d'alertes en fonction du niveau moyen de la nappe.

Le seuil d'alerte niveau 1 correspondant au niveau d'avril 1990 est de 106.8 m. Le seuil d'alerte niveau 2 correspondant au niveau de décembre 1976 est de 105.6 m, et le seuil niveau 3 est de 103.9 m, correspondant au niveau de janvier 1994.

Entre les niveaux 1 et 2, si le niveau de la nappe remontait, aucune mesure n'était prise. En revanche, si le niveau de la nappe descendait, des interdictions d'irriguer 24 heures par semaine étaient prévues. Entre les niveaux 2 et 3, on prévoyait des interdictions d'irriguer 24 heures par semaine si le niveau montait et de 48 heures par semaine pour les céréales si le niveau descendait. En revanche, en dessous du niveau 3, situation d'alerte maximum, les conditions d'irrigations étaient à renégocier.

L'un des problèmes suscités par cet accord concernait par exemple, l'équité entre exploitants : seuls certains pouvaient se permettre l'achat d'équipements pour se procurer de l'eau dans un temps réduit. Un autre problème était la difficulté pour les irrigants de prévoir les interdictions, entraînant alors des pertes importantes, (voir Morardet et Hanot (2000) [60]).

– *De 1999 à nos jours : La gestion par quotas et la mise en place du SAGE.*

Suite à la baisse observée du niveau de la nappe en 1999, un nouveau système de régulation est mis en place : la gestion volumétrique ou gestion par quotas. Ce système attribue un volume de référence annuel à prélever par exploitation dépendant de la situation géographique et donc du type de terrain occupé, du nombre d'hectares à irriguer et finalement, du niveau de la nappe au début de la période d'irrigation. En effet, un « coefficient de réduction » sur les volumes de référence est fixé en fonction du niveau de la nappe en début de la période d'irrigation. Ce coefficient est appliqué à toutes les exploitations qui prélèvent de l'eau à usage agricole, et détermine le volume réel à prélever par exploitation. Par exemple, un « coefficient de réduction » de 0.6 correspond à une diminution du volume disponible de 40 % par rapport au volume de référence.

L'enjeu principal du système est qu'il permet à l'irrigant de gérer son propre stock d'eau tout au long de l'année. Si le quota est dépassé de plus de 20%, la quantité d'eau correspondante est déduite à la quantité attribuée l'année suivante. En 2002, des mesures comme la mise en place de compteurs ont facilité le suivi des prélèvements et donc le contrôle des niveaux piézométriques de la nappe.

Conjointement à la mise en place du nouveau système de régulation, depuis 1997, des groupes de travail composés par des représentants de l'État et des usagers décidaient l'élaboration d'un SAGE (Schéma d' Aménagement et de Gestion des Eaux) dans la Beauce. Ce dernier intégrait le système de gestion volumétrique des eaux. En 1999, le périmètre du SAGE est défini (voir figure 1), puis en 2000, une commission locale de l'eau est constituée⁹. Elle vise au respect des exigences réglementaires (DCE, Loi sur l'Eau, SDAGE) et au respect des exigences économiques et environnementales, c'est-à-dire, la satisfaction des besoins en eau de tous les usages (AEP, irrigation, industrie, loisirs) et le maintien d'un bon fonctionnement des cours d'eau (voir [104]).

Dans ce contexte, la forte variabilité des niveaux piézométriques et donc du « coefficient de réduction » de la nappe, qui a varié entre 0.955 et 0.45 entre 1999 et aujourd'hui (voir Lejars et al. (2012) [51]), vont motiver la réalisation de notre travail. Nous nous intéressons aux stratégies d'adaptation des agriculteurs dans le cas où des restrictions des usages de l'eau sont mises en place. Bouarfa et al. (2011) [4] ont réalisé une étude sur l'ensemble de la zone de la Beauce afin de caractériser des voies d'adaptation possibles aux restrictions de prélèvements d'eau. Les enquêtes ont révélé deux types de voies d'adaptation possibles : 1) la réduction de la quantité d'eau d'irrigation pour les cultures et/ou 2) la modification des assolements décidés en début de la campagne. Nous reprendrons ces deux voies d'analyse dans notre étude et nous comparerons nos résultats avec les résultats issus de Bouarfa et al. (2011) [4] et Lejars et al. (2012) [50].

4.3.3 Recueil des données

Notre zone d'étude comprend l'ensemble des communes des départements de l' Eure et Loir et du Loiret situées à l'intérieur du périmètre SAGE nappe de Beauce. Cette zone, dite Beauce centrale, s'étend sur une superficie de 623 000 ha. Notre étude comprend une superficie agricole utile (SAU) de 300 600 ha (cf. Lejars et al. (2012) [51]) et représente le 80 % du total des prélèvements de la nappe de Beauce.

9. Cette commission est formée par au moins 50% d'élus, au moins 25% d'usagers et au plus 25% des services de l'État

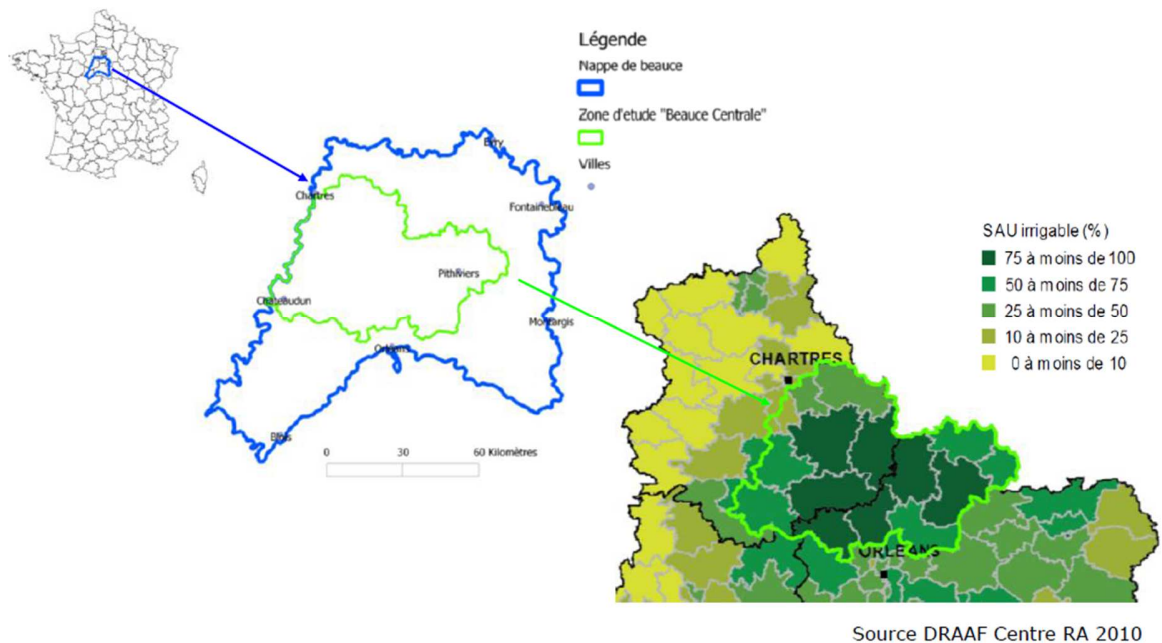


FIGURE 4.7 – Zone d'étude : Beauce Centrale. Source : [51]

Données agronomiques

Dans un premier temps, des simulations agronomiques ont été réalisées à partir du logiciel PILOTE dans la zone d'étude (voir Maillol et al. (2011) [58], Lejars et al. (2012) [51] et le rapport d'expertise [95]). En résumé, ce travail peut se décrire en trois étapes : le modèle bio-physique, la simulation des stratégies d'irrigation et les sorties du modèle.

En premier, les données d'entrée du modèle biophysique s'organisent autour de 4 fichiers (ou dossiers) dans lesquels il faut introduire un certain nombre de paramètres :

- le fichier *sol* où il faut renseigner, entre autres, la texture, la capacité au champ, la profondeur et la Réserve Utile de chaque type de sol,
- le fichier *plante*, où pour chaque culture, il faut signaler la somme des températures nécessaires pour arriver aux différents stades de développement, la profondeur d'enracinement...
- le fichier *climatique* où l'on insère des données climatiques journalières sur 17 ans issues de 5 stations météo, comme la pluie, l'évapotranspiration potentielle, les températures moyennes et le rayonnement moyen.
- le fichier *unité d'études* avec des données représentatives de 5 stations météo correspondant aux 5 unités d'étude, comme la moyenne et l'écart type du déficit P-ETP (Pluie-Évapotranspiration)¹⁰.

10. Pour choisir les 5 unités d'étude, une spatialisation du terrain a eu lieu, (voir détails en Ouchiha (2012) [65]). Le terrain a été découpé en mailles ($8 \times 8 \text{ km}^2$), où le déficit pluie-ETP a été calculé dans la période d'irrigation et dans la période critique. Plus tard, une analyse en composantes principales (ACP) (méthode statistique qui consiste à transformer des variables liées entre elles (dites « corrélées » en statistique) en nouvelles variables, nommées « composantes principales », décorrélatées les unes des autres.) a été réalisée en Ouchiha (2012) [65] afin de créer des classes en fonction du déficit moyen (P-ETP). A partir de la ACP, 7 classes de mailles ont été différenciées et finalement les 7 classes ont été regroupées en 5 classes, en raison des ressemblances entre classes. Les 5 classes retenues correspondent donc aux 5 unités d'étude retenues pour le fichier sur le logiciel PILOTE. Pour chaque classe ou unité d'études, la maille la plus représentative de la zone (et

Dans un deuxième temps, des différentes stratégies d'irrigation sont simulées pour chaque culture et chaque type de sol. Ces différentes stratégies correspondent à des doses d'eau prédéterminées pour chaque culture et chaque type de sol, D0 en sec (0 tour), D1 (1 tour), D2 (2 tours), D3 (3 tours) et D4 (4 tours)¹¹.

Finalement, les résultats du modèle sont le bilan hydrique, le rendement par stratégie d'irrigation, i.e. les volumes d'irrigation nécessaires pour atteindre différents niveaux de rendements, le développement de la surface foliaire, et les dates de début et de fin de phase critique (période de fort besoin en eau). Les résultats sont présentés par année, par culture et par type de sol. Parmi ces résultats, nous allons retenir le bilan hydrique par année (sur 17 années (1990-2007)) et les rendements par stratégie d'irrigation, par culture, par type de sol et par année pour réaliser une analyse statistique dans la section 4.3.4.

Données hydrologiques

Un modèle hydrologique a été réalisé dans la zone de la Beauce (voir Graveline et Schomburgk (2013) [36]). Ce travail peut se décrire en trois étapes : la définition de zones hydrologiques homogènes, le traitement des données et le calibrage du modèle. 6 zones hydrologiques caractérisées par des particularités géologiques et des volumes de recharges similaires ont été retenues. Parmi les 6 zones choisies, nous utilisons les données de la zone « Beauce centrale » qui correspond à notre zone d'étude : la recharge nette annuelle de la nappe¹², les coefficients de prélèvement et de stockage calibrés et le niveau piézométrique de la nappe observée en 2010 en mètres NGF. Ces données sont décrites et traitées dans la section 4.3.4.

Données économiques

Dans la suite, nous utiliserons les données des prix des différentes cultures issues du bulletin mensuel de FranceAgriMer [94] et du rapport de l'assemblée Générale de la Confédération Générale des Planteurs de Betterave [93] réalisé en 2009. De plus, nous utiliserons les charges opérationnelles par culture, issues d'un modèle linéaire d'exploitation agricole réalisée sur la zone d'étude (voir détails en Ouchiha (2012) [65]).

4.3.4 Transformation des données

Notre travail consiste maintenant à la transformation des données décrites dans les sections précédentes 4.3.3, 4.3.3 et 4.3.3 pour obtenir les paramètres de notre modèle hydro-agro-économique (voir Tableaux 4.1, 4.2, 4.3). Le Tableau 4.1 contient les valeurs des paramètres du modèle hydro-agro-économique, puis les Tableaux 4.2 et 4.3 contiennent les valeurs des variables selon le scénario réalisé (année normale, année sèche sans restriction, année sèche avec restrictions (0.6 et 0.3)).

pas la moyenne de la classe) a été choisie, et donc la station météo la plus proche correspondant à cette maille représentative.

11. Nous rappelons qu'un tour d'eau correspond à l'irrigation d'une dose d'eau spécifique à chaque culture sur l'ensemble du terrain

12. La recharge est calculée à partir des données disponibles sur Meteo France en découpant des mailles de $8 \times 8 \text{ km}^2$.

Paramètres	Description	Unité	Valeur
S	Surface moyenne exploitation-type	ha	122
p_1	Prix culture 1 (Blé tendre)	Euros/Tonnes	109
p_2	Prix culture 2 (Orge de brasserie, Orge d'hiver)	Euros/Tonnes	95, 85
p_3	Prix culture 3 (Betterave)	Euros/Tonnes	25.41
z	Coût maximal de pompage	Euros/ m^3	0.02912
c	Coût unitaire de pompage	Euros/ m^3 *m	0.000224
d_1	Coeff 1 charges opér. cult 1	Euros/ha	0
d_2	Coeff 1 charges opér. cult 2	Euros/ha	0
d_3	Coeff 1 charges opér. cult 3	Euros/ha	0
e_1	Coeff 2 charges opér. cult 1	Euros/ha	908
e_2	Coeff 2 charges opér. cult 2	Euros/ha	780
e_3	Coeff 2 charges opér. cult 3	Euros/ha	1786
S_B	Surface totale zone d'étude	km^2	3006.6
r_e	Recharge nette été	m^3	0
r_p	Recharge nette printanière	m^3	0
M	N. exploit. type GC-betterave		679
w^f	Vol. d'eau total hors irr. par période	millions de m^3	13.78
γ	Coefficient prélèvement		1.1
η	Coefficient stockage nappe		0.08
σ	Coefficient retour d'eau		0
H_0	Hauteur d'eau initiale	m NGF	92.81
V_T	Valeur finale de la ressource en eau	euros	0
β	Taux d'actualisation	période ⁻¹	0.05
$\bar{\alpha}$	Part de surface alloué à la culture d'été		0.16

Tableau 4.1 – Valeurs des paramètres.

Paramètres	Description	Unité	Valeurs	
			Année normale	Année sèche
x_1	coef. 0 f. d. Blé	Tonnes/ha	9.415315	7.144896
x_2	coef. 0 f. d. Orge	Tonnes/ha	7.238088	5.876013
x_3	coef. 0 f. d. Betterave	Tonnes/ha	65.02174	42.94781
a_1	coef. 1 f. d. Blé	Tonnes/ m^3	0.0031337	0.0051176
a_2	coef. 1 f. d. Orge	Tonnes/ m^3	0.002735	0.004653
a_3	coef. 1 f. d. Betterave	Tonnes/ m^3	0.0325382	0.0554281
b_1	coef. 2 f. d. Blé	Tonnes.ha/ $m^3.m^3$	0.00000171	0.00000214
b_2	coef. 2 f. d. Orge	Tonnes.ha/ $m^3.m^3$	0.00000125	0.00000199
b_3	coef. 2 f. d. Betterave	Tonnes.ha/ $m^3.m^3$	0.00000743	0.0000141

Tableau 4.2 – Valeurs des coefficients de la fonction de demande en eau selon le scénario réalisé.

	Valeurs			
	S. Référence	S. Sans rest.	C.R. 0.6	C.R. 0.3
w_p^i	78	97	47	26
w_e^i	50	56	38	41

Tableau 4.3 – Valeurs des volumes d’irrigations au printemps w_p^i et en été w_e^i des autres exploitations-type selon le scénario réalisé (année normale, sèche sans restrictions, sèche avec restrictions 0.6 et 0.3) (en millions de m^3).

Nous nous intéressons aux exploitations irriguées de la zone d’étude uniquement. A partir du fichier RGA 2010, Lejars et al ont réalisé une typologie des exploitations irriguées dans la Beauce (voir Bouarfa et al. (2011) [4], Lejars et al. (2012) [49]). Dans la Figure 4.8, nous pouvons observer l’assolement des quatre exploitations-types retenues : Grandes Cultures (GC)-Cultures spéciales, GC-Maïs, GC-colza et GC-Betterave, qui se différencient par leur culture d’été, respectivement les légumes, le maïs, le colza et la betterave. On remarque que les céréales à pailles constituent plus de la moitié de l’assolement dans les quatre classes retenues. Nous pouvons voir aussi la répartition, les effectifs et la SAU moyenne de chaque type d’exploitation en fonction de la culture majoritairement présente. Notre étude va s’appuyer sur cette typologie des exploitations réalisée en 2010 sur la zone d’étude, de SAU égal à 300 600 ha, 2010 étant l’année que nous allons choisir pour construire notre scénario de référence.

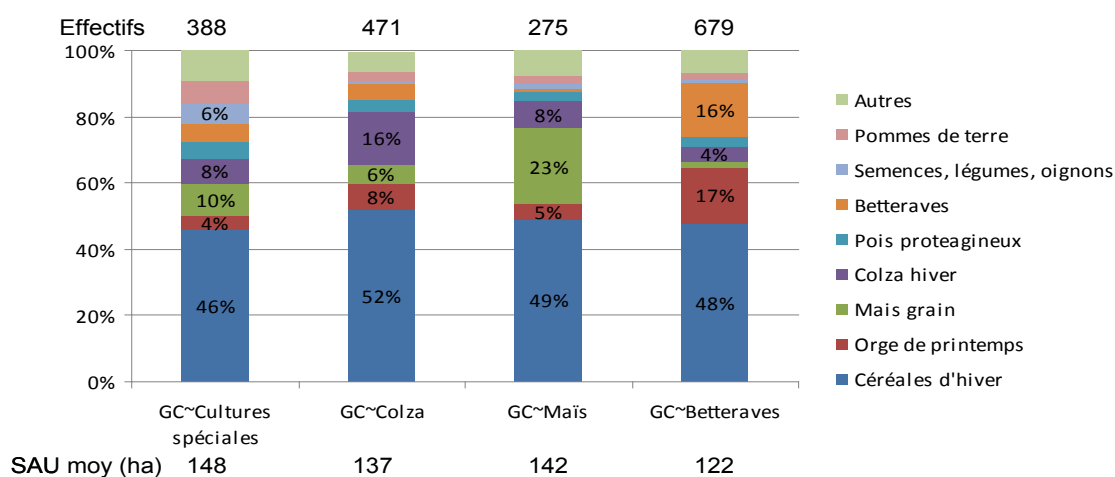


FIGURE 4.8 – Typologie des exploitations agricoles

En particulier, notre travail se concentre sur l’exploitation-type betterave. Avec un effectif de **679** exploitations, c’est l’exploitation-type la plus représentative dans la zone d’étude (environ 38% des exploitations irriguées). Ce type d’exploitation a en moyenne une SAU de **122** ha.

Construction des courbes de réponse à l'eau

Dans un premier temps, nous avons construit des courbes de réponse à l'eau par culture, par type de sol et par type de saison (printemps ou été) climatique à partir des résultats des simulations agronomiques décrites dans la section 4.3.3.

En premier lieu, à partir des résultats du bilan hydrique du modèle biophysique, nous calculons le déficit P-ETP, afin de classer les années en 3 groupes : année humide, normale, ou sèche. De plus, par simplicité, nous organisons les différents sols en deux types : sols superficiels (RU 50 à 75 mm) et sols moyens/profonds (RU 120 et 170 mm). Nous utiliserons uniquement les données des sols moyens/profonds, sol plus représentatif de l'exploitation-étude. Nous pouvons voir la procédure de classification détaillée dans l'annexe D.1.1.

En second lieu, nous disposons de nuages de points, qui représentent les rendements des cultures en fonction des apports en eau, par culture, par type de sol et par type de saison climatique, toutes unités géographique confondues. A partir de la réalisation d'une régression sur le nuages de points, nous estimons la courbe de réponse à l'eau par culture, par type de sol et par type d'année (voir détails en annexes D.1.2). Finalement, nous utiliserons les coefficients des courbes de réponse à l'eau comme paramètres (x_k, a_k, b_k ($k = 1..3$)) de notre modèle économique.

Précisions et hypothèses du modèle

Deuxièmement, dans la section 4.2.1, nous avons émis quelques hypothèses sur notre modèle théorique afin de simplifier la résolution de celui-ci. D'une part, nous précisons et justifions ici le choix des paramètres utilisés dans l'application numérique. D'une autre part nous avons émis des hypothèses sur la transformation des données en raison de l'absence d'information complète. Ces hypothèses sont détaillés dans la suite dans onze précisions, qui sont fixes ou variables selon le scénario réalisé.

– **Précision 1** : Modèle en 2 périodes : printemps / été

Le modèle a deux périodes, le printemps (avril-juin) et l'été (juin-septembre) afin de différencier les cultures irriguées au printemps et en été. Il est construit de façon à optimiser les volumes d'irrigation et les choix d'assolement pendant la saison d'irrigation (Avril-Septembre).

– **Précision 2** : Simplification de la modélisation de l'exploitation-type betterave avec un modèle de 3 cultures

Nous avons choisi de représenter un modèle de trois cultures car elles sont les plus représentatives de ce type d'exploitation : deux cultures irriguées au printemps, le blé tendre et l'orge de printemps, et une culture irriguée en été, la betterave (environ 48%, 17%, et 16% en moyenne de la SAU de l'exploitation). Nous notons 1 la culture du blé tendre, 2 la culture de l'orge de printemps et 3 la culture de la betterave. Nous rappelons que la somme des parts optimales allouées pour les trois cultures est égale à 1 (hypothèse issue du modèle théorique).

– **Précision 3** : Prix des cultures (cf. Tableau 4.1)

Nous nous intéressons aux prix des cultures choisies dans l'année de référence, 2010. Nous retrouvons le prix du blé tendre, p_1 et de l'orge de printemps, p_2 en [94], puis le prix de la betterave, p_3 en [93].

– **Précision 4** : Coût de pompage (cf. Tableau 4.1)

c , le coût pour pomper $1 m^3$ d'un mètre de hauteur est calculé de la façon suivante : $c = c_e * P_{in} * \frac{1}{K} = c_e * \frac{P_{out}}{\nu} * \frac{1}{K}$ où c_e représente le coût d'énergie (en euros/kWh) ; P_{in} , l'énergie d'entrée de la pompe (elle-même fonction de P_{out} , l'énergie de sortie de

la pompe (en kW) et ν , l'efficacité de la pompe), (en kW) ; K, la capacité de la pompe (en m^3/h).

Exemple : $K = 50 m^3/h$, ce qui correspond à 13,8 kg/s. Nous avons besoin d'une énergie : $P_{out} = 13.8 kg/s * 1m * 9.81 m/s^2 = 136W$ pour une levée d'un mètre. Nous avons donc un coût de : $c = 0.07 \text{ euros/kWh} * \frac{0.136}{0.85} \text{ kW} * \frac{1}{50} \text{ h/m}^3 = 0.000224 \text{ euros/m}^3$ z représente le coût maximal de pompage, c'est-à-dire le coût de pompage quand la nappe est vide, donc en supposant que la nappe et le sol se situent à 20 et 150 m respectivement au dessus du niveau de la mer (voir Graveline et Schomburgk (2013) [36]), la distance maximale de pompage est de $150-20=130$ m, et $z = c * 130$ ¹³.

- **Précision 5** : Charges opérationnelles représentées par une fonction de coût quadratique, avec le coefficient de degré 1 nul (cf. Tableau 4.1)

Nous voulons estimer une fonction de coût quadratique et convexe dans la variable de la surface labourée pour ce type de charges (voir équation (4.1)). En effet, un coût de ce type est justifié par le fait que pour labourer ou irriguer une proportion de la surface agricole, l'exploitant a investi par exemple dans de l'équipement. S'il veut agrandir cette proportion, il doit racheter certains équipements, ce qui augmente les coûts unitaires du labour ou d'irrigation, d'où une courbe de coûts non-linéaire mais convexe (voir les détails de ce type de coût dans Carpentier et Letort (2009) [12]). De plus, nous supposons le coefficient linéaire de la fonction $d_k = 0$ à cause d'un manque d'information sur comment partager les charges opérationnelles entre le paramètre linéaire et le quadratique, donc le coût unitaire par hectare dont nous disposons est égal à $e_k/2$.

- **Précision 6** : Recharges printanière et estivale nulles (cf. Tableau 4.1)

L'année 2010 a été une année climatique moyenne avec un printemps sec et un été pluvieux. Pour cette raison, nous avons choisi cette année comme le scénario de référence. Sachant que les nappes se rechargent préférentiellement en automne et en hiver (pendant l'arrêt de croissance de la végétation), et que le printemps de 2010 a été un printemps sec. Nous estimons $r_p = 0$. Nous supposons également que la recharge en été est nulle r_e .

- **Précision 7** : Volume d'eau utilisé hors irrigation (cf. Tableau 4.1)

Nous possédons les données des volumes d'eau annuels utilisés hors irrigation (eau potable, usage industriel) (voir [97]) en Beauce. En premier, nous adaptions ces données à la superficie de notre zone d'étude. Ensuite, nous divisons ce volume par deux pour estimer le volume d'eau utilisé hors irrigation, pendant la saison d'irrigation et par 4 pour estimer, w^f , le volume concernant chacune des deux périodes du modèle.

- **Précision 8** : Part fixe de SAU allouée pour la culture d'été (cf. Tableau 4.1)

Cette hypothèse est justifiée par le fait que la betterave est une culture contractuelle, donc sa part de SAU ne peut pas varier beaucoup. C'est une culture engagée sur des contrats pluriannuels de deux ans, où chaque année un quota minimum doit être livré par le planteur. Si le quota n'est pas respecté, le droit de production est diminué en fonction de la quantité manquante. Cette hypothèse est nécessaire pour obtenir la résolution analytique du modèle.

- **Précision 9** : Valeur finale de la ressource nulle (cf. Tableau 4.1)

Cette hypothèse revient à dire que la valeur finale de la ressource ne dépend pas de l'état de celle-ci, i.e. le prix implicite de l'eau est nul en fin de saison d'irrigation

13. Nous avons considéré uniquement le coût de pompage. Ce coût représente une borne minimale car il ne considère pas les redevances d'eau, l'amortissement pour les pompes et l'amortissement pour le matériel d'irrigation (enrouleurs etc...)

agricole (fin d'été). Nous pouvons interpréter cette hypothèse comme suit : à la fin de l'été, la ressource en eau ne peut plus être utilisée pour la production agricole de l'année écoulée. Elle a donc une valeur nulle pour les agriculteurs. Cette hypothèse permet la simplification de la résolution analytique du modèle.

- **Précision 10** : Courbe de réponse à l'eau (Hypothèse variable selon le scénario) (cf. Tableau 4.2)

Nous avons détaillé comment nous avons construit les différentes courbes dans la section 4.3.4.

- **Précision 11** : Volumes d'eau utilisés pour l'irrigation des autres GC-types connus et partagés en deux périodes. (Hypothèse variable selon le scénario) (cf. Tableau 4.3)

Nous possédons les données des besoins en eau par ha et par cultures du scénario de référence 2010 (voir Lejars et al. (2012) [50]), la répartition moyenne des cultures et la SAU moyenne d'une exploitation et le nombres d'effectifs par GC-type, (voir Figure 4.6). Dans un premier temps, nous calculons le nombre moyen d'hectares alloués par culture et par GC-type. Nous multiplions ce résultat par les besoins en eau par ha et par culture et nous obtenons les besoins en eau par culture et par exploitation pour chaque GC-type. Ensuite, nous multiplions ce dernier résultat par les effectifs de chaque exploitation-type et on obtient les besoins en eau par culture et par GC-type pour notre zone d'étude. Exemple : Pour le GC-cultures Spéciales, la SAU moyenne d'une exploitation est de 148 ha. L'orge de printemps représente environ 5% de la SAU totale de ce type d'exploitation. Donc, $(5/100)*148=8$ ha est la superficie moyenne allouée pour l'orge de printemps. En multipliant ce dernier chiffre par les besoins en eau de la plante par ha, on obtient les besoins en eau pour l'orge au sein de l'exploitation : $8 \text{ ha} * 660 \text{ m}^3/\text{ha} = 5\,280 \text{ m}^3$. De nouveau en multipliant ce dernier chiffre par les effectifs de ce GC-type, on obtient les besoins en eau moyens de l'orge du GC-type : $5\,280 * 388 = 2\,048\,640 \text{ m}^3$.

Finalement, sachant la saison d'irrigation de chaque culture, nous partageons ce dernier résultat dans les deux périodes du modèle (printemps/été) de façon à obtenir les besoins en eau d'irrigation par GC-type et par période. Les paramètres w_p^i et w_e^i contiennent les volumes d'irrigation des GC-types à l'exception du GC-betterave.

4.3.5 Application numérique : résultats

Comparaison de différents scénarios climatiques : Année normale, sèche sans restriction et sèche avec restrictions

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.60
α_2	Part surface orge		0.24
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	894
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	1 059
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	2167
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	138 781
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	89 717
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	94.23
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.09
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	91.67

Tableau 4.4 – Résultats scénario de référence année normale (2010).

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.56
α_2	Part surface orge		0.28
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	1 178
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	1 147
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	1 954
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	157 800
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	84 043
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	107.14
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	91.93
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	91.49

Tableau 4.5 – Résultats scénario année sèche sans restriction.

Dans cette section, nous présentons et comparons les résultats optimaux trouvés pour différents scénarios climatiques : année normale (N), année sèche sans restriction d'usages de l'eau (SSR) et année sèche avec restrictions (SAR), (cf. Tableaux 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7). Dans la suite, nous considérons une année climatiquement normale comme une année avec un printemps et un été normaux. De même, nous considérons qu'une année est sèche quand à la fois le printemps et l'été sont secs. (cf. Tableaux 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7).

Année normale versus année sèche sans restriction

Dans un premier temps, nous comparons les résultats du scénario N (Tableau 4.4) et SSR (Tableau 4.5) pour un sol de type moyen/profond, qui est le plus représentatif de ce type d'exploitation. Nous pouvons de cette façon estimer l'impact d'une année sèche au sein de l'exploitation. On observe que la part de blé (et d'orge) diminue (et respectivement augmente) de 4 points lorsque l'année est sèche. Autrement dit, la stratégie d'assolement est

de remplacer le blé irrigué par l'orge irrigué en cas de sécheresse sans restriction. L'intuition derrière cette substitution est que le blé est plus sensible que l'orge à la sécheresse, i.e. les rendements sont plus affectés par le manque d'eau¹⁴.

Quant à la stratégie d'irrigation, le volume d'eau total utilisé au sein de l'exploitation augmente d'environ 19 000 m³. En particulier, les volumes d'eau utilisés pour l'irrigation du blé tendre et de l'orge de printemps augmentent respectivement de 284 et 88 m³/ha, tandis que le volume d'eau utilisé pour la betterave diminue de 213 m³/ha¹⁵. Logiquement, comme nous n'avons pas encore pris en compte les restrictions d'usage de l'eau, la stratégie d'irrigation optimale est d'utiliser une quantité supérieure d'eau en année sèche pour assurer la production et les bénéfices. En particulier, le volume d'eau utilisé pour la betterave diminue au lieu d'augmenter, mais reste supérieure aux volumes utilisés pour le blé et pour l'orge car c'est la culture la plus rentable. De plus, l'augmentation du volume d'eau utilisé en année sèche est supérieure pour le blé que pour l'orge car le blé est plus rentable que l'orge (i.e., on obtient un rendement supérieur pour le blé que pour l'orge avec moins d'eau). En résumé, comme l'accès à l'eau n'est pas limité, le volume d'eau total est consacré aux cultures à plus forte rentabilité.

On observe que la nappe descend de 92.81 m NGF à 91.67 m NGF entre le début et la fin de la saison d'irrigation, lorsqu'il s'agit d'une année normale, i.e. de 1.14 m, 0.72 m (et 0.42 m) provenant de la réduction de la nappe au printemps (respectivement en été). En revanche, en année sèche, la nappe descend de 92.81 m à 91.49 m NGF entre le début et la fin de la campagne d'irrigation, i.e. de 1.32 m, 0.88 m (et 0.44 m) provenant de la réduction de la nappe au printemps (respectivement en été). Cela veut dire que l'augmentation des volumes d'eau totaux utilisés en année sèche est due au comportement d'irrigation au printemps.

On peut conclure que malgré l'utilisation d'une stratégie optimale, la valeur ajoutée de l'exploitation diminue d'environ 5 674 euros en année sèche à cause de la perte de rendements. De plus, l'inexistence de restriction d'usage de l'eau pendant la sécheresse a un impact négatif sur la nappe. Ces premiers résultats numériques montrent donc l'inefficacité de l'exploitation (en termes de stock et de valeur ajoutée) en absence de politiques de restriction et motivent les scénarios étudiés dans la suite.

Année sèche sans restriction versus année sèche avec restrictions

Dans un deuxième temps, nous allons étudier les résultats des scénarios « année sèche avec restrictions d'usages d'eau 0.6 et 0.3 » (SAR) que l'on peut observer dans les Tableaux 4.6 et 4.7 respectivement, puis nous allons comparer ces résultats avec le scénarios SSR. De cette façon, nous pouvons estimer l'impact réel de la politique des restrictions d'usage de l'eau en année sèche.

On observe que la part de blé (et d'orge) diminue (et augmente respectivement) de 2 (« coefficient de réduction » 0.6) à 4 points (« coefficient de réduction » 0.3) selon la restriction d'usage mise en place. La stratégie d'assolement varie donc en cas de restriction avec un remplacement du blé par l'orge. Cette variation est d'autant plus forte que la restriction est forte.

14. Par exemple, nous reprenons les volumes optimaux alloués au blé (894 m³/ha) et à l'orge (1 059 m³/ha) en année normale (cf Tableau 4.4). Si on utilise un volume de 894 m³/ha pour le blé en année sèche, la perte de rendement par rapport à l'année normale est de 0.84 Tonnes/ha. En revanche, si on utilise un volume de 1 059 m³/ha pour l'orge en année sèche, la perte de rendement par rapport à l'année normale est seulement de 0.16 Tonnes/ha.

15. On rappelle ici que la part de surface alloué pour la betterave est fixé, donc le volume optimal alloué pour la betterave est « biaisé » par cette contrainte du modèle

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.54
α_2	Part surface orge		0.30
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	506
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	319
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	1 954
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	83 269
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	72 346
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	56.54
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.39
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	92.04

Tableau 4.6 – Résultats scénario année sèche avec restriction 0.6.

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.52
α_2	Part surface orge		0.32
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	55
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	0
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	1954
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	41 634
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	55 486
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	28.27
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.65
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	92.3

Tableau 4.7 – Résultats scénario année sèche avec restriction 0.3.

Cependant, la stratégie d'irrigation est modifiée par la mise en place de la politique de restriction. Cette stratégie diffère lorsque la restriction d'usage d'eau est plus ou moins importante. Logiquement, la stratégie optimale consiste à utiliser le volume total permis, c'est-à-dire, le volume d'eau total utilisé au sein de l'exploitation diminue de 40 points pour un « coefficient de réduction » de 0.6 et de 70 points pour un « coefficient de réduction » de 0.3. Le volume d'eau utilisé pour la betterave reste quasiment constant lorsque des restrictions d'usage sont mises en place. En revanche, les volumes utilisés pour le blé et l'orge sont réduits de façon considérable d'environ 672 et 828 m^3/ha pour une restriction de 0.6, tandis qu'ils sont quasiment conduits en sec¹⁶ avec une restriction importante de 0.3. On note ici que l'orge subit une diminution plus importante de son volume alloué en cas de restriction d'usage. Logiquement, le volume se réduit plus pour la culture moins rentable, l'orge. Le fait que le volume d'eau consacré à la betterave reste constant en cas de restriction explique que lorsque l'accès à l'eau est limité par les restrictions, la variable d'ajustement est l'assolement. La part allouée pour la betterave ne pouvant pas varier par hypothèse, la stratégie d'assolement est de substituer du blé par l'orge en cas de restrictions.

16. En cas de restriction 0.3, le volume d'eau optimal utilisé par le blé est de 55 m^3/ha , ce qui correspond à peu près à un tour d'eau.

En résumé, les rendements et donc la valeur ajoutée de l'exploitation vont se voir affecté par les restrictions d'usage, et vont subir une diminution d'environ 11 697 et 28 557 euros pour des restrictions de 0.6 et 0.3 respectivement. Ces niveaux de réductions correspondent aux variations du produit brut que l'on retrouve dans le rapport [50] : -10% pour le scénario de restriction 0.6 et -21% pour le scénario de restriction 0.3. En revanche, cette politique de restriction garantit logiquement des niveaux supérieurs d'eau de la nappe, mais est-elle une politique efficace en termes de stock de la nappe et de valeur ajoutée pour l'exploitant ?

Année normale versus année sèche avec restrictions

	Lejars et al. 2012		Modèle proposé	
	CR 0.6	CR 0.3	CR 0.6	CR 0.3
Assolement	Néant	OB substitué par l'OH (50%)	BT substitué par OB (5 %)	BT substitué par OB (7 %)
Irrigation	Réduction volumes	BT et OH en sec	Réductions volumes	BT et OB en sec

Tableau 4.8 – Comparaison de modèles en cas de coefficients de réductions (CR) 0.6 et 0.3. Cultures : Betterave(B), blé tendre (BT), orge de brasserie (OB), orge d'hiver (OH).

Finalement, pour étudier l'efficacité de la politique de restriction, nous comparons dans un premier temps, les résultats des scénarios N et SAR (0.6 et 0.3) (voir Tableaux 4.4, 4.6 et 4.7). Dans un deuxième temps, afin de prouver la robustesse du modèle, nous comparons dans le Tableau 4.8 nos résultats avec un travail d'enquêtes, d'ateliers participatifs puis d'évaluation économique réalisé sur la même zone d'étude, sur la même question de recherche et avec les mêmes scénarios numériques (voir Lejars et al. (2012) [50]). Cela nous permet de voir si les scénarios optimaux sont comparables, ou non, aux scénarios décrits dans des expérimentations participatives.

Pour une restriction de 0.6, nous obtenons une modification de l'assolement de 6 points (substitution du blé tendre par l'orge de brasserie). De plus, on observe une importante réduction des apports d'eau pour les céréales (Blé tendre, Orge de Brasserie) d'environ 388 et 740 m^3/ha , et une réduction plus faible pour la betterave d'environ 213 m^3/ha . Si l'on compare maintenant avec les résultats de Lejars et al. (2012) [50] (voir Tableau 4.8) on obtient un résultat similaire quant à la stratégie d'assolement et d'irrigation. Les exploitations conservent leur assolement (ou le modifient à la marge) et jouent essentiellement sur la réduction des apports d'eau aux cultures les plus exigeantes (céréales, betterave).

Nous observons que la valeur ajoutée diminue de quasiment 17 317 euros en année sèche. De plus, c'est intéressant d'observer que les niveaux de la nappe ne diminuent pas ; au contraire ils augmentent.

Pour une restriction de 0.3, nous obtenons de nouveau une substitution du blé et de l'orge irrigué par l'orge en sec et le blé quasiment en sec, avec un volume d'irrigation de 55 m^3/ha . La betterave voit son apport en eau réduit, résultat que l'on retrouve en Lejars et al. (2012) [50].

En fin de saison d'irrigation, on observe de nouveau des niveaux supérieurs de la nappe quand on se situe dans le scénario année sèche avec restriction 0.3 que lorsque on se situe en année normale. Cela est un signe de la dureté de la restriction et met en question l'efficacité (en termes de valeur ajoutée de l'exploitant) de l'utilisation de la nappe. Cependant, on peut conclure que la politique de restriction est efficace en termes de stock de la nappe.

Logiquement, ces résultats sont en accord avec les résultats retrouvés lors des comparaisons année normale vs. année sèche sans restriction et année sèche sans restriction vs. année sèche avec restrictions. En résumé, d'une part, la stratégie d'assolement est la substitution du blé par l'orge. Cela est dû au fait que le rendement du blé est plus affecté que celui de l'orge par la sécheresse. D'une autre part, la stratégie d'irrigation consiste en réduire le volume utilisé pour les différentes cultures, réduction plus faible dans le cas de la betterave. Cela s'explique par le fait que l'on consacre une plus grande partie du volume d'eau disponible à la culture la plus rentable.

Le problème de ce résultat est que l'orge de brasserie est une culture qui doit être irriguée pour assurer sur la qualité et la quantité de la production. En effet, Lejars et al. (2012) [50] estiment que les exploitations diminueraient les surfaces en orge de brasserie pour les remplacer par de l'orge d'hiver. Les courbes de rendement de l'orge de brasserie et de l'orge d'hiver sont similaires, par contre le prix de vente de ce dernier est inférieur à celui de l'orge de brasserie. La valeur ajoutée correspondant à une situation de restriction 0.3 (cf. Tableau 4.7) est peut-être surestimée le tableau. Pour prendre en compte cette limite, nous avons réalisé un nouveau scénario pour la restriction 0.3 en substituant l'orge de brasserie par l'orge d'hiver, une culture non-irriguée (voir Tableau 4.9). Nous trouvons ensuite une valeur ajoutée inférieure, d'environ 2 200 euros dans le scénario « Orge d'hiver », correspondant uniquement à une réduction de 2% de la valeur ajoutée annuelle par rapport à notre scénario précédent « Orge de Brasserie ».

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.55
α_2	Part surface orge		0.29
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	52
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	0
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	1 954
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	41 634
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	53 311.55
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	28.27
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.65
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	92.28

Tableau 4.9 – Résultats scénario Orge d'hiver année sèche avec restriction 0.3.

Scénario statique ($z = c = 0$) versus scénario dynamique en année normale.

Dans cette section, nous réalisons le scénario numérique qui correspond au modèle statique défini dans la section 4.2.5 (voir Tableau 4.10) et nous comparons les résultats avec le scénario du modèle dynamique (voir Tableau 4.4). Le but est d'étudier l'impact de l'état de la ressource en eau sur les choix optimaux de l'exploitant. Autrement dit, ce scénario hypothétique pourrait correspondre à un cas où les coûts d'utilisation de la ressource seraient nuls.

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.60
α_2	Part surface orge		0.24
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	916
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	1094
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	2190
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	141 905
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	90 549.85
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	96.35
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.08
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	91.66

Tableau 4.10 – Résultats scénario coût de pompage nul.

On observe que lorsque on passe au cas statique, l'assolement ne varie pas. En revanche, les volumes appliqués aux différents cultures augmentent légèrement : les volumes utilisés par le blé, l'orge et la betterave augmentent respectivement de 22, 35 et 23 m^3/ha . Ce scénario montre l'importance de considérer la dynamique dans ce type de modèle. Cependant dans notre cas, l'impact de la dynamique est très faible à cause de l'importante capacité de stockage de la nappe. On note que le niveau de la nappe en fin de campagne est de 91.66 m dans le cas statique face au 91.67 m du cas dynamique. En effet, il serait plus important de considérer la dynamique dans l'étude de nappes plus petites ou des nappes avec des niveaux d'eau plus bas (et donc avec des coûts de pompage plus importants). Cela motive la réalisation du scénario suivant où le coût de pompage subit une augmentation.

Augmentation du coût de pompage, $z' = k * z$, $c' = k * c$

Nous avons donc réalisé plusieurs scénarios en multipliant le coût de pompage par $k=5$, 10 et 20 (cf. Figures D.2, D.3, D.4 dans l'annexe D.2) que nous avons résumé dans le tableau 4.11. On observe que l'assolement reste inchangé, mais les volumes d'irrigation diminuent de façon importante. Par exemple, quand le coût de pompage est multiplié par 10, on observe une économie d'environ 30 000 m^3 au niveau de l'exploitation et d'environ 26 millions de m^3 au niveau de la zone d'étude (Beauce centrale). Cette économie de l'eau entraîne des niveaux supérieurs de la nappe (+ 0.1 m) en fin de période d'irrigation. En revanche, la valeur ajoutée de l'exploitation diminue de l'ordre de 6 500 euros. Ceci montre l'intérêt de considérer les coûts de pompages dans un modèle d'exploitation agricole.

Ensuite, lorsque nous avons analysé les résultats du scénario année sèche en cas de restriction (voir section 4.3.5), nous avons remarqué la dureté des restrictions dans le sens où sa mise en place entraîne une augmentation des niveaux de la nappe par rapport à l'année de référence (année climatique normale) d'environ 0.4 m (respectivement 0.6 m) pour une restriction moyenne (respectivement une restriction forte). Nous nous demandons si une politique de taxation sur le prix de l'eau, c'est à dire une augmentation de coût de pompage serait préférable par rapport aux politiques de restrictions en cas de sécheresse. Nous calculons donc les taxes qui procureraient la valeur ajoutée obtenue en cas de restriction 0.6, 72 346 euros (cf. Tableau 4.6) et en cas de restriction 0.3, 55 486 euros (cf. Tableau 4.7). Nous pouvons voir les résultats dans le Tableau 4.12. Pour obtenir la valeur ajoutée obtenue en cas de restriction 0.6 (respectivement en cas de restriction 0.3), il faudrait multiplier les coût de

pompages par 13.9 (respectivement 45.4). Dans les deux cas, la mise en place de cette politique de taxation entraînerait des niveaux de la ressource inférieurs par rapport aux politiques de restriction. La politique de taxation serait donc la moins préférable pour le maintien de la ressource.

Coût de pompage	x5	x10	x20
w_1	-90	-201	-425
w_2	-140	-316	-667
w_3	-90	-202	-426
w_{TOT}	-12 456	-27 966	-58 921
VAB	-3 107	-6 486	-11 567
w_{GC}	-8.46	-18.99	-26.28
H_1	+0.03	+0.1	+0.2
H_2	+0.04	+0.1	+0.2

Tableau 4.11 – Résultats scénario augmentation coût de pompage.

VAB	72 346		55 486	
	CR 0.6	x13.9	CR 0.3	x45.4
H_1	92.39	92.00	92.65	92.20
H_2	92.04	91.58	92.29	91.80

Tableau 4.12 – Comparaisons des politiques de taxation et restriction.

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous réalisons un modèle économique qui choisit l'assolement et les volumes d'irrigation qui maximisent la valeur ajoutée brute d'une exploitation agricole. Le problème est contraint par l'utilisation d'une ressource commune en eau. Nous avons donc introduit la dynamique de la ressource en eau dans le modèle afin de prendre en compte ce dernier aspect dans les choix de l'exploitation. En particulier, nous représentons une saison d'irrigation avec deux périodes, le printemps et l'été, et trois cultures dont deux cultures irriguées au printemps et une culture irriguée en été.

Dans un premier temps, nous calculons les solutions analytiques de notre problème et nous les comparons avec les solutions d'un problème statique où la ressource en eau n'est pas prise en compte dans la modélisation. Le but est de caractériser ainsi l'impact de l'utilisation de la ressource dans les choix de l'exploitant.

Dans un deuxième temps, nous réalisons une application numérique du modèle dans la zone de la Beauce Centrale sur un type d'exploitation (la plus représentative de la zone d'étude) spécialisée dans une culture d'été, la betterave et deux cultures de printemps, le blé tendre et l'orge de brasserie. Dans la Beauce, l'irrigation a lieu essentiellement à travers des pompages individuels sur la nappe, donc elle constitue un endroit propice à l'application de notre modèle théorique.

Dans cette partie, nous simulons d'abord plusieurs scénarios numériques selon le type d'année climatique, normal ou sec, dans le cas d'absence de politique de restriction. Nous obtenons que la stratégie optimale d'assolement est une substitution du blé par l'orge irrigués. Quant à la stratégie d'irrigation, elle consiste à augmenter de façon générale les volumes

d'eau utilisés au sein de l'exploitation d'environ 20 000 m^3 afin d'assurer la production et la valeur ajoutée de l'exploitation. Le volume d'eau utilisé pour la betterave est supérieure aux volumes utilisés pour le blé et pour l'orge. En effet, quand l'accès à l'eau n'est pas un problème, la stratégie face à la sécheresse consiste à prioriser l'irrigation sur les cultures à plus forte rentabilité, comme la betterave. La sécheresse entraîne ici des pertes d'environ 5 674 euros dues à la perte de rendements. De plus, l'inexistence de restriction d'usage de l'eau pendant la sécheresse a un impact négatif sur la nappe.

Ensuite, nous simulons plusieurs coefficients de restrictions d'usage de l'eau en cas d'année sèche. Nous rappelons que la gestion de la nappe de Beauce se fait par un système de quotas d'eau annuels alloués à chaque exploitation en fonction de la superficie et de la zone géographique. De plus, un coefficient de restriction sur le quota d'eau est appliqué en fonction des niveaux observés de la nappe en début de période d'irrigation. Un des buts de ce chapitre est donc d'identifier l'impact des restrictions d'usage dans les stratégies optimales d'assolements et d'irrigation au niveau de l'exploitation. En cas de restrictions, les résultats montrent une substitution du blé et de l'orge irrigués par du blé et de l'orge en sec. On observe une importante réduction des apports d'eau pour les céréales (Blé tendre, Orge de Brasserie). Juste l'irrigation de la betterave est assurée. En effet, lorsque l'accès à l'eau est limité par les restrictions, la variable d'ajustement est l'assolement. La part allouée pour la betterave ne pouvant pas varier par hypothèse, la stratégie d'assolement est de substituer du blé par l'orge en cas de restrictions. Ensuite, nous comparons nos résultats avec des travaux réalisés dans la zone d'étude sur les mêmes voies d'adaptation de l'agriculteur à la sécheresse et aux restrictions d'usages et nous retrouvons des résultats similaires, ce qui est un signe de robustesse de notre modèle théorique.

De plus, nous observons que la valeur ajoutée diminue de quasiment 17 317 euros en année sèche avec une restriction d'usage moyenne et en cas de restriction forte ce résultat double. Il est intéressant d'observer que les niveaux de la nappe ne diminuent pas à cause de la sécheresse, mais qu'ils augmentent. Cela est un signe de la dureté de la restriction et met en question l'efficacité (en termes de valeur ajoutée de l'exploitant) de l'utilisation de la nappe. Cependant, on peut conclure que la politique de restriction est efficace en termes de stock de la nappe (ou de façon équivalente en termes de niveaux d'eau observés). Nous montrons que cette politique est préférable pour le maintien des niveaux de la ressource par rapport à d'autres types de mesures comme la taxation sur le prix de l'eau.

Troisièmement, nous montrons de façon générale, l'importance de considérer la dynamique dans ce type de modèle surtout dans l'étude de nappes plus petites ou des nappes avec des niveaux d'eau plus bas (et donc avec des coûts de pompage plus importants). Dans le cas de la nappe de Beauce, l'impact de la dynamique est très faible à cause de l'importante capacité de stockage de la nappe.

Finalement, nous énonçons quelques extensions possibles du travail réalisé dans ce chapitre. En premier lieu, nous devons réaliser d'autres scénarios avec des restrictions moins dures (e.g. coefficients de réduction 0.8) de façon à obtenir les niveaux de la nappe de notre année de référence, puis ensuite comparer cette politique avec la politique de taxation sur le prix de l'eau. De plus, une analyse plus complète sur d'autres types de mesures (autre que la taxation) pour éviter la surexploitation de la nappe en année sèche peut être réalisé. En second lieu, il serait intéressant de calculer l'impact sur le niveau de la nappe de l'exploitation de celle-ci en cas de plusieurs années climatiquement sèche, normale et/ou humides. Une autre idée serait d'introduire à notre modèle d'autres types de stratégies d'adaptation de l'adaptation à la sécheresse, comme par exemple, la possibilité de choisir parmi différentes technologies d'irrigation. Finalement, l'utilisation d'un logiciel d'optimisation nous

permettrait de réaliser un modèle plus complexe, prenant en compte un plus grand nombre de variables économiques.

Discussion et conclusion

Dans cette thèse, nous avons modélisé un problème de gestion d'une ressource commune en eau souterraine utilisée pour l'irrigation. L'exploitation de ce type de ressource se fait souvent en régime de propriété commune dans le sens où son usage est exclusif aux propriétaires des terres sus-jacentes à l'aquifère. Gérer ce type de ressource de manière efficace est un problème abordé dans de nombreux travaux théoriques et empiriques de la littérature existante. Ces travaux montrent qu'une gestion centralisée de la ressource permet des niveaux de stock et de bien-être social supérieurs à une exploitation de la ressource en régime de propriété commune. L'ampleur de la différence entre les deux types de régime va nous permettre de savoir si une régulation est justifiée ou non dans les différentes situations. Si la régulation est nécessaire pour palier l'inefficacité du régime de propriété commune, la solution la plus utilisée est l'intervention étatique. Dans ces cas, les politiques recommandées consistent à définir des charges (ou taxes) sur la quantité d'eau pompée ou à attribuer des quotas d'eau aux utilisateurs de la ressource, afin de se rapprocher de la solution centralisée. De plus, dans ce type de problème de gestion d'une ressource, de nombreuses incertitudes peuvent apparaître dues à une connaissance limitée des participants (par exemple, sur les caractéristiques de l'aquifère) ou aux phénomènes liés à la nature (par exemple, la variabilité météorologique). De fait, la prise de décisions face au risque n'est pas évidente. Dans cette thèse, nous avons traité une incertitude liée à un risque climatique : la sécheresse.

La première question que nous nous sommes posés a été comment introduire la sécheresse dans ce type de modèle. Nous parlons ici de sécheresse lorsque l'activité agricole subit un déficit d'eau de surface ou souterraine. Ce déficit affecte en premier lieu l'humidité des sols, on parle donc d'une sécheresse « agronomique ». En revanche, si la sécheresse persiste, elle peut causer des problèmes structurels comme un manque d'eau dans les réservoirs ou ressources en eaux souterraine, on parle donc de sécheresse « hydrologique ». En particulier, dans la première partie de ce travail (chapitres 2 et 3), nous avons traité les effets d'une sécheresse hydrologique sur la gestion de la ressource, tandis que dans une deuxième partie (chapitre 4), nous avons analysé les conséquences d'une sécheresse agronomique sur la gestion de la ressource en eau, mais aussi les conséquences sur l'exploitation agricole. Nous avons donc choisi de modéliser la sécheresse de manière différente dans les deux parties : la sécheresse hydrologique est introduite dans le modèle comme un choc (ou changement de régime) sur la dynamique de la ressource en eau, tandis que la sécheresse agronomique est représentée par une perte des rendements agricoles.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes interrogés sur les stratégies pouvant être employées pour limiter les conséquences des sécheresses. En effet, anticiper est un élément clé pour limiter les effets de ce risque climatique sur les ressources en eau disponibles et sur l'activité économique agricole. Un point important est donc de considérer le type d'information dont disposent les utilisateurs et/ou les gestionnaire de la ressource.

Dans le chapitre 2, nous utilisons la théorie du contrôle optimal pour montrer comment le gestionnaire de la ressource doit s'adapter le mieux possible à la sécheresse selon le type d'information dont il dispose : une information déterministe ou « statistique ». Afin de caractériser les conséquences de cette adaptation sur une situation particulière, nous appliquons le modèle à l'aquifère La Mancha Occidentale en Espagne. Nous concluons qu'un accroissement de l'incertitude concernant l'arrivée du choc, conduit à un comportement d'extraction

plus prudent sur le long terme mais à des stratégies d'extractions plus intenses sur le très court terme. Ce comportement d'adaptation est plus prononcé lorsque la probabilité d'occurrence du choc s'accroît. De plus, les implications économiques liées à l'augmentation de cette incertitude se traduisent par une perte du bien-être social. Cela signifie que l'agence de l'eau du bassin a intérêt à acquérir des informations concernant la date d'occurrence du choc. L'acquisition de cette information est particulièrement importante pour des chocs à haute intensité de moyen risque (ou de façon équivalente ayant lieu à moyen terme). En effet, si le choc est tardif, il reste suffisamment de temps à l'agence pour s'adapter au choc, et si le choc est précoce, le temps pour s'adapter est insuffisant, donc dans les deux cas, il n'est pas intéressant d'acquérir une information précise sur la date du choc. En revanche, nous prouvons que ces résultats sont seulement vrais si l'agence n'est pas sûre d'acquérir des informations exactes sur la date du choc au moment de son arrivée. Dans ce dernier cas, ce n'est plus intéressant pour l'agence d'avoir des informations exactes sur la date du changement de régime avant son arrivée à l'exception de chocs extrêmes (hautes intensité et tardifs) où l'acquisition d'information reste toujours intéressante.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour la suite de ce chapitre. Nous pourrions par exemple envisager d'autres types de fonctions de distributions dans le cas d'un choc stochastique. Nous pourrions également introduire l'incertitude dans la valeur du choc ou directement dans le processus de recharge de la nappe. De plus, dans le chapitre 2, nous nous situons dans un cas de gestion centralisée. La limite principale de ce travail est que nous ne considérons pas les externalités liées à l'exploitation de la ressource en régime de propriété commune. Cette dernière limite motive le travail que nous avons réalisé dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 3, nous utilisons la théorie des jeux dynamiques afin de prendre en compte les interactions stratégiques dynamiques entre utilisateurs qui apparaissent en raison du partage de la ressource. Pour simplifier, nous analysons seulement le cas d'un choc déterministe, i.e. d'un manque d'eau structurel qui va avoir lieu à une certaine date connue par le gestionnaire et les utilisateurs de la ressource. En particulier, nous comparons les différentes stratégies d'extraction selon le type d'informations dont disposent les agriculteurs : la solution « open-loop », la solution « feedback », la solution « open-loop » par morceaux, avec la solution efficace (l'optimum social) calculée dans le chapitre 2. Une fois de plus, nous réalisons des simulations numériques sur l'aquifère étudié dans le chapitre 2 : La Mancha Occidentale. Les résultats trouvés à long terme sont en accord avec la littérature existante (Negri [61], Rubio et Casino [74] entre autres) : l'exploitation privée est le type de gestion la moins efficace en termes non seulement de stock mais de bien-être social. Dans le cas du bassin de la Mancha, la perte de bien-être issue de l'exploitation privée de la ressource est d'environ 37 millions d'euros lorsqu'un choc d'intensité moyenne se produit. Cependant, si nous analysons le problème au moment de l'arrivée du choc, nous ne retrouvons pas le même résultat : l'exploitation privée reste la moins efficace en termes de stock mais cette inefficacité peut se traduire par un gain de bien-être au lieu d'une perte. Par exemple, pour des chocs très précoces, l'inefficacité en termes de stock des stratégies « feedback » provoque un gain de bien-être d'environ 21 millions d'euros à court terme. Nous pouvons conclure que la régulation à travers d'une gestion centralisée de l'aquifère La Mancha Occidentale est justifiée. De plus, nous montrons que cette régulation devient encore plus nécessaire si des chocs peu intenses ou tardifs ont lieu. Cependant, une intervention sur l'aquifère avant l'arrivée du choc ne serait pas justifiée lorsque des chocs très précoces ont lieu. Une analyse du bien-être selon les différents modes de gestion et en fonction des caractéristiques du choc serait donc nécessaire afin de savoir à quel moment l'intervention serait justifiée.

Une extension immédiate du travail réalisé dans le chapitre 3 est l'introduction de l'incertitude dans le modèle (comme nous l'avons réalisé dans le chapitre 2). Il serait de même intéressant de chercher des solutions à l'inefficacité de l'exploitation privée pour ce cas d'étude. Est-ce-qu'un système de taxation ou de quotas pourrait compenser la perte de bien-être associée à cette inefficacité ? Dans le chapitre 4, nous avons étudié justement un système de gestion par quotas pour un cas particulier : la nappe de Beauce. De plus, dans le chapitre 3, nous avons considéré que les agriculteurs orientent leur stratégie d'adaptation en priorité par rapport à l'information hydrologique. En cas de sécheresse, d'autres types de stratégies (de nature agronomique) peuvent être utilisés comme les décisions d'assolements, afin d'assurer une gestion efficace de l'exploitation agricole et de la ressource. Ces idées motivent le travail que nous avons réalisé dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 4, nous avons construit un modèle économique de production agricole dans lequel l'agriculteur choisit non seulement les volumes d'irrigation, mais aussi l'assolement qui vont maximiser la valeur ajoutée brute d'une exploitation agricole de la Beauce Centrale (centre de la France). Le problème est contraint par l'utilisation d'une ressource commune en eau. La principale contribution du chapitre est l'introduction d'une dynamique de la ressource en eau afin de prendre en compte l'évolution de la ressource dans les choix de l'exploitant. La gestion de la nappe de Beauce se fait par un système de gestion volumétrique, c'est à dire, un système de quotas d'eau annuels alloués à chaque exploitation sur laquelle un coefficient de réduction est appliqué en fonction des niveaux observés de la nappe en début de période d'irrigation. Dans ce chapitre, nous nous sommes interrogés dans un premier temps, sur l'impact d'une année sèche dans les stratégies optimales d'assolements et d'irrigation au niveau de l'exploitation. Dans un deuxième temps, nous analysons cet impact lorsque des restrictions d'usage sont mises en places. En premier lieu, nous montrons que lorsque l'accès à l'eau n'est pas un problème, la stratégie face à la sécheresse consiste à augmenter de façon globale les volumes utilisés en priorisant l'irrigation sur les cultures à plus forte rentabilité, comme la betterave. La sécheresse entraîne ici des pertes d'environ 17 000 euros dues à la baisse de rendements. De façon évidente, l'inexistence de restriction d'usage de l'eau pendant la sécheresse a un impact négatif sur la nappe. En second lieu, lorsque l'accès à l'eau est limité par les restrictions d'usage, nous montrons que la variable d'ajustement est plutôt l'assolement. Néanmoins, la valeur ajoutée diminue de quasiment 19 000 euros en année sèche avec une restriction d'usage moyenne. En cas de restriction forte ce résultat double. La principale conclusion de ce chapitre est que les différentes politiques de restriction sont efficaces dans le sens où elles évitent la surexploitation de la nappe en année sèche. Cependant le débat reste ouvert sur la question suivante : une politique de restriction est-elle la solution la plus efficace en termes de bien-être social ? Nous montrons que cette politique est préférable pour le maintien des niveaux de la ressource par rapport à d'autres types de mesures comme la taxation sur le prix de l'eau.

La limite principale de ce travail est le fait qu'il y ait une seule période de décision. Il serait intéressant d'introduire plusieurs périodes de décisions lors de la campagne pendant lesquelles d'autres types d'ajustement de court terme seraient possibles, e.g. les calendriers d'irrigation, l'utilisation d'engrais ou de pesticides. Une autre limite du modèle est qu'il concerne un exploitant-type. Il serait intéressant de prendre en compte les interactions stratégiques avec d'autres types d'agriculteurs. De plus, la sécheresse est « prévisible » longtemps à l'avance. Il serait pertinent d'introduire l'aléa climatique dans ce modèle.

A ce stade, nous voulons également souligner d'autres limites de l'ensemble des chapitres, mettre en avant des pistes à suivre pour les travaux qui sont en cours, et proposer de

possibles extensions de cette thèse.

Dans les chapitre 2 et 3, nous avons analysé l'impact d'un choc sur l'exploitation de la ressource. Un autre problème plus complexe consisterait à l'analyse d'une suite de chocs $\{t_i, r_i\}_{i=1}^N$, de dates et d'intensités différentes. De plus, nous pourrions refaire ce type d'analyse dans le chapitre 4 afin d'étudier l'impact de ces chocs sur le profit de l'exploitation agricole.

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons étudié les possibilités individuelles d'adaptation des agriculteurs en cas de sécheresses. Nous avons déjà remarqué qu'il serait intéressant dans un premier temps, d'introduire l'aléa climatique dans ces modèles. Dans le chapitre 3, ce risque climatique peut être introduit de la même manière que dans le chapitre 2 ou directement dans le processus de recharge. L'étude de la théorie des jeux stochastiques serait donc nécessaire, offrant de multiples structures d'informations possibles. Dans le chapitre 4, l'aléa climatique pourrait être introduit dans la fonction de rendements (voir Reynaud (2009) [69] pour exemple) ou aussi dans la fonction de recharge. D'autres extensions consisteraient à introduire des asymétries entre les groupes d'irrigants (chapitre 3) ou de considérer les interactions stratégiques avec d'autres types d'exploitations dans le chapitre 4.

Globalement, d'autres types de stratégies d'adaptation aux sécheresses peuvent être prise en compte dans l'intégralité des chapitres. Comme décrit dans le chapitre introductif, d'autres possibilités d'adaptation de nature individuelle et collective sont par exemple le choix des techniques d'irrigation, l'emploi d'assurance contre la sécheresse ou l'utilisation de réserves de substitution.

Des travaux sont déjà en cours suite à l'étude réalisée dans la première partie (chapitres 2 et 3). Situons-nous dans un cas où les utilisateurs de la ressource sont « myopes »¹⁷. De plus, la ressource est confrontée à l'occurrence d'un choc (ou changement de régime) « aléatoire ». Nous savons à partir de la littérature existante qu'un comportement d'adaptation myope va entraîner des niveaux de la ressource inférieurs à l'optimum social. La question que l'on se pose est la suivante : est-ce que le bien-être de l'agent serait supérieur si l'on annonce un quota ou si l'on annonce une taxe afin de rejoindre les niveaux de la ressource à l'optimum social ? En partant du jeu réalisé dans le chapitre 3 dans lequel deux groupes d'irrigants partagent une ressource en eau, une autre idée consisterait à résoudre le problème suivant : un groupe d'irrigants prélève à un instant donné une quantité d'eau supplémentaire par rapport à l'autre groupe. Comment ce dernier groupe peut s'adapter le mieux possible à ce manque d'eau ?

Finalement, on peut s'interroger sur l'intérêt concret de cette thèse. Nous avons montré l'utilité de considérer des modèles dynamiques dans l'étude des stratégies d'adaptation aux sécheresses. En effet, ce type de modèle est essentiel pour caractériser les décisions de court et long termes des agriculteurs ou/et régulateurs car celles-ci dépendent de phénomènes qui évoluent dans le temps comme le stock de la ressource en eau. D'ailleurs, il serait intéressant de considérer des modèles dynamiques qui prennent en compte aussi l'évolution de la qualité de l'eau. Pour aller plus loin, les modèles théoriques conçus ici permettraient d'expliquer des phénomènes de surexploitation d'autres types de nappes subissant des sécheresses. Cependant, la question reste ouverte sur les solutions propres à chaque situation particulière. Il serait intéressant d'utiliser ce type de modèle pour étudier l'efficacité à court et à long terme de la mise en place de politiques spécifiques à chaque problème : un système de quotas, un système de taxation, ainsi que des systèmes d'incitations individuelles et collectives (e.g., subventions) pour garantir la gestion durable des ressources en eaux souterraines.

17. Nous rappelons que la solution myope consiste à caractériser le taux d'extraction maximisant le profit individuel de l'irrigant (de façon à égaliser bénéfice et coût marginal d'usage) (cf. Gisser et Sánchez [35]).

Bibliographie

- [1] Amigues, J.P., Debaeke, P, Itier, B., Lemaire, G., Seguin, B., Tardieu, F., Thomas, A., 2006, Sécheresse et Agriculture, Réduire la vulnérabilité de l'agriculteur à un risque accru de manque d'eau, Expertise Scientifique collective INRA.
- [2] Blanco M., Jacquet, F., Flichman, G., Louhichi, K., Notes de cours : Optimisation et outils de la programmation Mathématique pour la modélisation des politiques publiques.
- [3] Bontemps, C., Couture, S., 1999, Utilisation d'un modèle agronomique pour la gestion de l'irrigation dans un contexte de rareté.
- [4] Bouarfa, S., Brunel, L., Granier, J., Mailhol, J.C., Morardet, S., Ruelle, P., 2011, Évaluation en partenariat des stratégies d'irrigation en cas de restriction des prélèvements dans la nappe de Beauce (France), Cahiers agricultures, 20, 124-129.
- [5] Bouarfa, S., Kuper, M., 2012, Groundwater in irrigation systems : from menace to mainstay, Irrigation and Drainage 61 (Suppl.1), 1-13.
- [6] Brozovic, N., Schlenker, W., 2011, Optimal management of an ecosystem with an unknown threshold, Ecological economics, 70, 627-640.
- [7] Bryant, K.J., Mjelde, J.W., Lacewell, R.D., 1993, An Intraseasonal Dynamic Optimization Model to allocate Irrigation water between crops, American Journal of Agricultural Economics, 75(4), 1021-1029.
- [8] Buisson, G., 2010, Diagnostic territorial(SIG) de l'agriculture sur la zone d'influence de la nappe de Beauce, Mémoire de fin d'études.
- [9] Byun, H. R., Wilhite, D. A., 1999, Objective Quantification of Drought Severity and Duration, American Meteorological Society, 2747-2756.
- [10] Buisson, G., 2010, Diagnostic territorial(SIG) de l'agriculture sur la zone d'influence de la nappe de Beauce, Mémoire de fin d'études.
- [11] Caputo, M.N., 2005, Foundations of Dynamic Economic Analysis, Optimal Control Theory and Applications, Cambridge University Press.
- [12] Carpentier, A., Letort, E., 2009, UMR INRA / Agrocampus Rennes : Structures et Marchés Agricoles, Ressources et Territoires. Modelling acreage decisions within the multinomial logit framework.
- [13] Clarke, H., R., Reed, W., J., 1994, Consumption/pollution tradeoffs in an environmental vulnerable to pollution-related catastrophic collapse, Journal of Economics Dynamics and Control, 18, 991-1010.
- [14] Coz, D., 2009, Gestion durable d'une ressource en eaux souterraines : Cas de la nappe de Beauce.
- [15] Cummings, R. G., 1971, Optimum Exploitation of Groundwater Reserves with Salt-water Intrusion, Water Resources Research 7 (6), 1415-1424.
- [16] Dasgupta, P., Heal, G., 1974, The Optimal Depletion of Exhaustible Resources, The Review of Economic Studies, 41, 3-28.
- [17] de Frutos Cachorro, J., Erdlenbruch, K., Tidball, M., 2014, Optimal adaptation strategies to face shocks on groundwater resources, Journal of Economic Dynamics and Control, 40, pp. 134-153.

- [18] de Zeeuw, A., Zemel, A., 2012, Regime shifts and uncertainty in pollution control, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36, 939-950.
- [19] Di Maria, C., Smulders, S., van der Werf, E., 2012, Absolute abundance and relative scarcity : Environmental policy with implementation lags, *Ecological Economics*, 74, 104-119.
- [20] Dockner, E.J, Long, N.V., 1993, International Pollution Control : Cooperative versus Non-cooperative Strategies, *Journal of Environmental economics and management* 24, 13-29.
- [21] Dockner, E.J., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G., 2000, *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press.
- [22] Dudley, N.J., 1972, Irrigation Planning 4, Optimal Interseasonal Water Allocation, *Water Resource Research*, 8(3).
- [23] Erdlenbruch, K., Loubier, S., Montginoul, M., Morardet, S., Lefebvre, M., 2013, La gestion du manque d'eau structurel et des sécheresses en France, *Sciences Eaux & Territoires*, 11.
- [24] Erdlenbruch, K., Montginoul, M., 2009, Les réserves de substitutions sont-elles une solution à la pénurie d'eau ?, *Ingenieries*, 59-60, 131-136.
- [25] Erdlenbruch, K., Thoyer, S., Grelot, F., Kast, R., Enjolras, G., 2009, Risk-sharing policies in the context of the French Flood Prevention Actions Programmes, *Journal of Environmental Management*, 91, 363-369.
- [26] Erdlenbruch, K., Tidball, M., Zaccour, G., Quantity-Quality Management of a Groundwater Resource by a water agency, Working Paper.
- [27] Esteban, E., Albiac, J., 2011, Groundwater and ecosystem damages : Questioning the Gisser-Sánchez effect, *Ecological Economics*, 2062-2069.
- [28] Esteban, E., Dinar, A., 2012, Groundwater-dependent ecosystems : How does the type of ecosystem affect the optimal management strategy, Working paper.
- [29] Estrela Monreal, T., 2006, La gestión de las sequías en España, *I.T.*, 74.
- [30] Evers, A.J.M., Elliot, R.L., Stevens, E.W., 1998, Integrated Decision Making for Reservoir, Irrigation, and Crop management, *Agricultural Systems*, 58(4), 539-554.
- [31] Feinerman, E., Knapp, K.C., 1983, Benefits from groundwater management : magnitude, sensitivity, and distribution, *American Journal of Agricultural Economics*, 65, 703-710.
- [32] Foudi, S., Erdlenbruch, K., 2011, The role of irrigation in farmers' risk management strategies in France, *European Review of Agricultural Economics*, 1-19.
- [33] Garrido, A., Zilberman, D., 2008, Revisiting the demand of agricultural insurance : The case of Spain, *Agricultural Finance Review*, Emerald Group Publishing, 68 (1), 43-66.
- [34] Gisser, M., Mercado, A., 1973, Economic aspects of ground water resources and replacement flows in semiarid agricultural areas, *American Journal of Agricultural Economics*, 55, 461-466.
- [35] Gisser, M., Sánchez, D. A., 1980, Competition Versus Optimal Control in Groundwater Pumping, *Water Resource Research*, 16(4), 638-642.

- [36] Graveline, N., Schomburkg, S., 2013, Hydro-economic modelling of the aquifer and agriculture in Beauce (France) : analysis of alternative water policy settings, Working paper.
- [37] Graveline, N., 2013, Adaptation de l'agriculture aux politiques de gestion de l'eau et aux changements globaux : l'apport des modèles de programmation mathématique, thèse de doctorat.
- [38] Guettier, P., 2009, La politique publique de l'eau en France, Ministère de l'écologie, de l'énergie, du développement durable et de l'aménagement du territoire.
- [39] Haurie, A., Moresino, F., 2001, Computation of S-adapted Equilibria in Piecewise Deterministic Games via Stochastic Programming Methods, *Advances in Dynamic Games and Applications*, *Annals of the International Society of Dynamic Games* vol.6, 225-252.
- [40] He, X., Prasad, A., Sethi, S.P., Gutierrez, G.J., 2007, A survey of stackelberg differential game models in supply and marketing channels, *J. Syst. Sci. Eng.*, 16(4), 385-413.
- [41] Heckelei, T., Wolff, H., 2003, Estimation of constrained optimisation models for agricultural supply analysis based on generalised maximum entropy, *European Review of Agricultural Economics* vol. 30(1), 27-50.
- [42] Howith, R.E., 1995, Positive mathematical programming, *American journal of Agricultural Economics* 77, 329-342.
- [43] IPCC, 2007, Climate change 2007 : Synthesis report, Contribution of working groups I, II and III to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Core writing team, Pachauri R.K., Reisinger A. (eds.)], IPCC, Geneva, Switzerland, 104 pp.
- [44] Itier, B., 2008, Agriculture et Sécheresse : le contexte et les enjeux, *Innovations agro-nomiques*, 2, 1-8.
- [45] Kamien, M. I., Schwartz, N. L., 1991, Dynamic optimization : the calculus of variation and optimal control in economics and management, *Advanced Textbooks in Economics*, Elsevier Science publishing.
- [46] Koundouri, P., 2004, Current Issues in the Economics of Groundwater Resource Management, *Journal of Economic Surveys*, 18(5).
- [47] Kuper, M., Hammani, A., Chohin, A., Garin, P., Saaf, M., 2012, When groundwater takes over : linking 40 years of agricultural and groundwater dynamics in a large-scale irrigation scheme in Morocco, *Irrigation and Drainage* 61 (Suppl. 1), 45-53.
- [48] Lefebvre, M., Thoyer, S., 2012, Risque sécheresse et gestion de l'eau agricole en France, *Etudes et Synthèses*, LAMETA, ES 2012-02.
- [49] Lejars, C., Fusillier, J.L., Bouarfa, S., Coutant, C., Brunel, L., Rucheton, G., 2012, Limitation of agricultural groundwater uses in Beauce (France) : what are the impacts on farms and on the food-processing sector ?, *Irrigation and Drainage* 61, 54-64.
- [50] Lejars, C., Fusillier, J.L., Brunel, L., Rucheton, G., Coutant, C., Bouarfa, S., 2012, Impact des restrictions d'eau sur les filières agro-alimentaires nappe de Beauce, Rapport complet.
- [51] Lejars, C., Fusillier, J.L., Bouarfa, S., Brunel, L., Rucheton, G., Coutant, C., Girard, X., Golaz, F., 2012, Impact des restrictions en eau d'irrigation sur les exploitations et les filières agricoles en Beauce, *Agronomie Environnement & Sociétés* 2, vol. 2, 139-154.

- [52] Léonard, D., Long, N.V., 1992, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, 353 p.
- [53] López-Gunn, E., 2012, Groundwater governance and social capital, *Geoforum* 43, 1140-1151.
- [54] López Sanz, G., 1993, El acuífero 23 de la Mancha Occidentale y el acuífero 24 del Campo de Montiel : Funcionamiento, Gestión, problemática y alternativas, *Présentation aux journées de la gestion de l'eau de Campo del Montiel et La Mancha Occidentale*.
- [55] LLamas, M.R., Martínez-Santos, P., 2005, Intensive Groundwater use : A silent revolution that cannot be ignored, *Water Science and Technology series*, 51 (8), 167-174.
- [56] Madani, K., Dinar, A., 2012, Non-cooperative institutions for sustainable common pool resource management : Application to groundwater, *Ecological Economics*, 74, 34-45.
- [57] Madramootoo, C.A., 2012, Sustainable groundwater use in agriculture, *Irrigation and Drainage* 61 (Suppl.1), 26-33.
- [58] Maillol, J.C., Ruelle, P., Walser, S., Schütze, N., Dejean, C., 2011, Analysis of AET and yield predictions under surface and buried drip irrigation systems using the Crop Model PILOTE and Hydrus-2D, *Agricultural Water Management*, 98, 1033-1044.
- [59] Margat, J., Andréassian, V., 2008, *L'eau*, Editions Le cavalier bleu.
- [60] Morardet, S., Hanot, S. , 2000, *La gestion volumétrique de l'eau en Beauce : impact sur les exploitations agricoles*.
- [61] Negri, D.H., 1989, The Common Property resource as a Differential Game, *Water Resources Research*, 25, 9-15.
- [62] Nieswiadomy, M., 1988, The demand for irrigation water in the High Plains of Texas 1957-1980, *American Journal of Agricultural Economics*, 67(3), 619-626.
- [63] Olcina Cantos, J., 2001, Tipología de sequías en España, *Ería*, 56, 201-227.
- [64] Ostrom, E., 1990, *Governing the Commons, The evolution of Institutions for Collective Action*, Cambridge University Press.
- [65] Ouchiha, F., 2012, *Modélisation micro-économique spatialisée des exploitations irrigantes dans la Beauce*, Mémoire de stage.
- [66] Petit, O., 2001, *L'évolution de la gouvernance des eaux souterraines et de l'irrigation en France : Le cas de la nappe de Beauce*.
- [67] Provencher, B., Burt, O., 1993, The Externalities Associated with the Common Property Exploitation of Groundwater, *Journal of Environmental Economics and Management* 24, 139-158.
- [68] Rao, N.H., Sarma, P.B.S, 1990, Optimal Multicrop Allocation of Seasonal and Intra-seasonal Irrigation Water, *Water Resources Research*, 26(4), 551-559.
- [69] Reynaud, A., 2009, Adaptation à court et à long terme de l'agriculteur au risque de sécheresse : une approche par couplage de modèles biophysiques et économiques, *Revue d'Etudes en Agriculture et Environnement*, 90(2), 121-154.
- [70] Rieul, L., Ruelle, P., et al, 2003, *Irrigation - Guide pratique*, Cemagref Editions.
- [71] Röhm, O., Dabbert, S., 2003, Integrating agri-environmental programs into regional production models : an extension of positive mathematical programming, *American journal of Agricultural Economics*. 85(1), 254-265.

- [72] Roseta-Palma, C., 2002, Groundwater Management When Water Quality Is Endogenous, *Journal of Environmental Economics and Management* 44, 93-105.
- [73] Roseta-Palma, C., 2003, Joint Quantity/Quality Management of Groundwater, *Environmental and Resource Economics* 26, 89-106.
- [74] Rubio, S.J., Casino, B., 2001, Competitive versus efficient extraction of a common property resource : The groundwater case, *Journal of Economics Dynamics and Control* 25, 1117-1137.
- [75] Rubio, S.J., Casino, B., 2003, Strategic Behaviour and Efficiency in the common Property Extraction of Groundwater, *Environmental and Resource Economics*, 26, 73-87.
- [76] Sahuquillo, A., Custodio, E., LLamas, M.R., 2009, La gestión de las aguas subterráneas, *Tecnología del Agua, Mars et Avril 2009*, 305 : 60-67 et 306 : 54-67, (en Espagne).
- [77] Seierstad, A., Sydsæter, K., 1987, *Optimal Control Theory with Economic Applications*, vol. 24, *Advanced Textbooks in Economics*, Elsevier Science B.V.
- [78] Sethi, S. P., Thompson, G. L., 2000, *Optimal Control Theory : Applications to Management Science and Economics*, Second edition, Springer.
- [79] Shah, T., 2005, Groundwater and Human Development : Challenges and Opportunities in Livelihoods and Environment, *Water Science and Technologie* 51(8), 27-37.
- [80] Souveyroux, J., et al., 2011, *Projet ClimSec : Impact du changement climatique en France sur la sécheresse et l'eau du sol*, 1-72.
- [81] Stoecker, A.L., Seidmann, A., Lloyd, G.S., 1985, A Linear Dynamic Programming Approach to Irrigation System Management with Depleting Groundwater, *Management Science*, 31(4), 422-434.
- [82] Tsur, Y., Zemel, A., 1995, Uncertainty and irreversibility in groundwater resource management, *Journal of Environmental Economics and Management*, 29,149-161.
- [83] Tsur, Y., Zemel, A., 1996, Accounting for global warming risks : Resource management under event uncertainty, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20, 1289-1305.
- [84] Tsur, Y., Zemel, A., 2004, Endangered aquifers : Groundwater management under threats of catastrophic events, *Water Resources Research* 40, 1-10.
- [85] Tsur, Y., Zemel, A., 2014, Dynamic and stochastic analysis of environmental and natural resources. In : Fischer, M.M., Nijkamp, P. (Eds.), *Handbook of Regional Science*, Springer, pp. 929-949. Chapter 47.
- [86] Vedula, S., Nagesh Kumar, D., 1996, An integrated model for optimal reservoir operation for irrigation of multiple crops, *Water Resources Research*, 32(4), 1101-1108.
- [87] Wilhite, D.A., Glantz, M.H., 1985, Understanding the Drought Phenomenon : The Role of Definitions, *Water International* 10, 111-120.
- [88] Worthington, V.E., Burt, O.R., Brustkern, R.L., 1985, Optimal management of a confined aquifer, *Journal of Environmental Economics and Management*, 12, 229-245.
- [89] Yaron, D., Dinar, A., 1982, Optimal allocation of farm irrigation water during peak seasons, *American Journal of Agricultural Economics* 64, 681-689.
- [90] Zemel, A., 2012, Precaution under mixed uncertainty : Implications for environmental management, *Resource and Energy Economics*, 34, 188-197.

- [91] Zilberman, D., Dinar, A., MacDougall, N., Khanna, M., Brown, C. and Castillo, F., 2003, Individual and institutional responses to drought : The case of Californian agriculture, Working Paper, Dept. of Agr. and Res. Econ., University of California, Berkeley.
- [92] Rapport : Protocolo de actuación en situación de alerta y eventual sequía, 2005, Ministerio de Medio Ambiente, Confederación Hidrográfica del Júcar.
- [93] Rapport de l'Assemblée Générale de la Confédération Générale des planteurs de Betterave (CGB) : La betterave en 2010, Décembre 2009.
- [94] FranceAgriMer, 2012, Les synthèses : Les prix payés aux producteurs/ résultats de l'enquête trimestrielle 2010/2011, Grandes cultures, 3.
- [95] Stratégies d'irrigation/rendements/consommations en eau des cultures présentes sur la nappe de Beauce, 2012, rapport réalisé dans le cadre de la convention de partenariat de recherche Irstea/Diataé.
- [96] L'irrigation en Beauce, un facteur de production de créateur de richesse, 2012, Agreste Centre, Analyse et Résultats, Ministère de l'agriculture, de l'agroalimentaire et de la forêt.
- [97] Les actions prioritaires, Unité hydrologique Nappe de Beauce, Plan territorial d'actions prioritaires 2013-2018.
- [98] Site internet Actu-environnement : <http://www.actu-environnement.com/ae/>
- [99] Site internet Dictionnaire Larousse : <http://www.larousse.fr/>
- [100] Site internet Wikipedia : <http://fr.wikipedia.org/>
- [101] Site internet « Regime Shifts DataBase » : <http://www.regimeshifts.org/what-is-a-regime-shift>
- [102] Site internet Vie Publique : <http://www.vie-publique.fr/>
- [103] Site internet Ministère de l'Agriculture, de l'Agroalimentaire et de la Forêt : <http://agriculture.gouv.fr/assurance-recolte-calamites>
- [104] Site internet Sage du bassin du Loir : <http://www.sage-loir.fr/spip.php?rubrique76>
- [105] Site internet Acces (Actualisation Continue des Connaissances des Enseignants en Sciences) : <http://acces.ens-lyon.fr/eduterre-usages/nappe/html/Ressources/climat/climat.htm>
- [106] Site internet « Meteorologic » : <http://www.meteorologic.net/climat-francais.php>
- [107] Site internet « Groundwater Conference » 2011 (Orléans) : <http://www.groundwater-2011.net>
- [108] Site internet eaufrance : <http://www.eaufrance.fr/groupe-de-chiffres-cles/prelevements-d-eau-par-usage-et>
- [109] Site internet BRGM : <http://www2.brgm.fr/divers/nappes.htm>
- [110] Site internet Université le Havre : <http://www.univ-lehavre.fr/cybernat/pages/aquifere.htm>
- [111] Site internet MeteoFrance : <http://pluiesextremes.meteo.fr/>

ANNEXE A

Liste des sigles

ACP : Analyse en composantes principales
AEP : Approvisionnement en eau potable
B : Betterave
BT : Blé tendre
CI : Consommation intermédiaires
CR : coefficient de réduction
ETP : Évapotranspiration Potentielle
FB : Feedback
GC : Grandes cultures
GSE : Effet Gisser-Sánchez
HJB : Hamilton-Jacobi-Bellmann
LVI : Niveau des volumes d'irrigations (en anglais, « Level volume irrigation »)
N : Normale
NGF : Nivellement général de la France
OB : Orge de brasserie
OH : Orge d'hiver
OL : Open-loop
OLM : Open-loop par morceaux
OS : Optimum social
P : Pluie
PAC : Politique agricole commune
PB : Produit brut
PD : Programmation dynamique
RU : Réserve Utile
SAU : Surface agricole utile
SAR : Sèche avec restriction
SSR : Sèche sans restriction
VAB : Valeur ajoutée brute

Annexes correspondant au chapitre 2

B.1 Intégrale par parties

Dans cette section, nous détaillons l'intégration par parties de la fonction :

$$\int_0^{\infty} f_T(T) \left[\int_0^T e^{-\rho t} F(G(t), g(t)) dt \right] dT$$

on trouve,

$$\begin{aligned} & \left[\psi_T(T) \left[\int_0^T e^{-\rho t} F(G(t), g(t)) dt \right] \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\rho T} F(G(T), g(T)) \psi_T(T) dT \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\rho T} F(G(T), g(T)) dT - \int_0^{\infty} e^{-\rho T} F(G(T), g(T)) \psi_T(T) dT \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient finalement,

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho T} (1 - \psi_T(T)) F(G(T), g(T)) dT = \int_0^{\infty} e^{-\rho T} \Omega_T(T) F(G(T), g(T)) dT.$$

B.2 Résolution du problème simple

Le Hamiltonien du problème est donné par :

$$H = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g + \lambda(-(1 - \alpha)g + r),$$

où λ est la variable adjointe. En appliquant le principe du maximum et en supposant des solutions intérieures, on obtient les conditions nécessaires de premier ordre :

$$\frac{\partial H}{\partial g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} - \frac{1}{b}g - (z - cG) - \lambda(1 - \alpha) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial G} + \rho\lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = -c\lambda + \rho\lambda. \quad (\text{B.2})$$

A partir de (B.1), nous retrouvons le taux d'extraction optimal en fonction du stock de la ressource et de la variable adjointe (« prix implicite ») :

$$g = a - zb + cbG - \lambda b(1 - \alpha). \quad (\text{B.3})$$

En substituant (B.3) dans les équations d'évolution du stock (2.3) et de la variable adjointe (B.2), on obtient le système d'équations linéaires :

$$\dot{G} = r - (1 - \alpha)(a - zb) - cb(1 - \alpha)G + \lambda b(1 - \alpha)^2, \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\lambda} = c(a - zb) - c^2bG + (cb(1 - \alpha) + \rho)\lambda, \quad (\text{B.5})$$

avec $G(0) = G_0$, qui va nous permettre d'obtenir les racines du polynôme caractéristique :

$$\rho_{1,2} = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4cb(1 - \alpha)\rho}}{2}. \quad (\text{B.6})$$

D'après les équations (B.3), (B.4) et (B.5), lorsque $\dot{G} = 0$ et $\dot{\lambda} = 0$, on trouve l'état stationnaire du problème :

$$g_\infty = \frac{r}{(1 - \alpha)}, \quad (\text{B.7})$$

$$\lambda_\infty = \frac{cr}{\rho(1 - \alpha)}, \quad (\text{B.8})$$

$$G_\infty = \frac{r}{cb(1 - \alpha)} + \frac{r}{\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}. \quad (\text{B.9})$$

En supposant que tous les paramètres sont positifs, g_∞ et λ_∞ dans les équations (B.7) et (B.8) sont toujours positifs. De plus, dans ce qui suit, nous considérons les paramètres tels que la valeur de G_∞ (équation (B.9)) est positive.

Finalement, nous allons obtenir le chemin d'extraction optimal, avec ρ_2 , la racine négative :

$$G^*(t) = e^{\rho_2 t}(G_0 - G_\infty) + G_\infty, \quad (\text{B.10})$$

$$g^*(t) = \frac{r}{(1 - \alpha)} - \frac{\rho_2}{(1 - \alpha)} e^{\rho_2 t}(G_0 - G_\infty), \quad (\text{B.11})$$

$$\lambda^*(t) = e^{\rho_2 t}(\lambda_0 - \lambda_\infty) + \lambda_\infty, \quad (\text{B.12})$$

et,

$$\lambda_0 = \frac{a}{b(1 - \alpha)} - \frac{z - cG_0}{(1 - \alpha)} - \frac{1}{b(1 - \alpha)^2}(r - \rho_2(G_0 - G_\infty)),$$

que l'on trouve en combinant les équations (2.3) et (B.1).

B.3 Résolution du problème déterministe

Pour résoudre ce problème, nous allons le séparer en deux parties, puis nous allons procéder par récurrence à rebours (« backward induction »). En premier, nous allons résoudre la maximisation entre t_a et ∞ , en utilisant la technique de la section précédente (B.2).

L'état stationnaire du problème est :

$$g_\infty = \frac{r_2}{(1 - \alpha)}, \quad (\text{B.13})$$

$$\lambda_\infty = \frac{cr_2}{\rho(1 - \alpha)}, \quad (\text{B.14})$$

$$G_\infty = \frac{r_2}{cb(1 - \alpha)} + \frac{r_2}{\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}. \quad (\text{B.15})$$

Nous savons que les solutions sont de la forme :

$$G_{r_2}^+(t) = e^{\rho_2(t-t_a)}(G_{t_a} - G_\infty) + G_\infty, \quad (\text{B.16})$$

$$\lambda_{r_2}^+(t) = e^{\rho_2(t-t_a)}(\lambda_{t_a} - \lambda_\infty) + \lambda_\infty, \quad (\text{B.17})$$

$$g_{r_2}^+(t) = \frac{r_2}{1-\alpha} - \frac{\rho_2}{(1-\alpha)}(G_{t_a} - G_\infty)e^{\rho_2(t-t_a)}, \quad (\text{B.18})$$

avec,

$$\lambda_{t_a} = \frac{a}{b(1-\alpha)} + \frac{-z + cG_{t_a}}{(1-\alpha)} - \frac{r_2}{b(1-\alpha)^2} + \frac{1}{b(1-\alpha)^2}\rho_2(G_{t_a} - G_\infty), \quad G_{t_a} \text{ inconnue.}$$

En substituant (B.16) et (B.18) dans le problème (2.7), nous pouvons calculer la fonction « scrap value », $\phi(G_{t_a})$ (voir équation (2.7)), i.e. :¹

$$\phi(G_{t_a}) = \sigma + \tau G_{t_a} + v G_{t_a}^2, \quad \text{avec}^2 \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{-r_2\rho(4cb(1-\alpha) + \rho) + \rho^2(1-\alpha)(a - zb) + 4cb(1-\alpha)^2\rho(a - zb)}{\rho(1-\alpha)^2b(\eta + \rho + 4cb(1-\alpha))} \\ & + \frac{(2cb(1-\alpha) + \rho)r_2\eta - \rho(1-\alpha)\eta(a - zb)}{\rho(1-\alpha)^2b(\eta + \rho + 4cb(1-\alpha))}, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$v = -\frac{c(-4cb(1-\alpha) - \rho + \eta)}{(1-\alpha)(\eta + \rho + 4cb(1-\alpha))}, \quad \text{et} \quad (\text{B.21})$$

$$\eta = \sqrt{\rho}\sqrt{\rho + 4bc(1-\alpha)}. \quad (\text{B.22})$$

Maintenant, on passe à la résolution de la deuxième partie du problème, entre 0 et t_a , prenant en compte la solution optimale de la première partie. Le Hamiltonien du problème peut s'écrire :

$$H = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g + \pi(-(1-\alpha)g + r_1),$$

où π est la variable adjointe. Nous sommes confrontés à un problème avec un point final libre (voir la section de méthodologie du chapitre 1 pour détails), avec t_a donnée et nous avons besoin d'une condition additionnelle de transversalité (cf. Léonard and Ngo van Long [52]) :

$$\pi(t_a) = \frac{\partial\phi(t_a, G_{t_a})}{\partial G_{t_a}} = 2vG_{t_a} + \tau.$$

En appliquant le principe du maximum et en supposant des solutions intérieures, on obtient les conditions nécessaires de premier ordre : (B.1), (B.2) et l'équation représentant l'évolution du stock de l'aquifère (2.3), avec $r = r_1$. On a un système linéaire d'équations différentielles :

$$\dot{G} = r_1 - (1-\alpha)(a - zb) - cb(1-\alpha)G + \pi b(1-\alpha)^2, \quad (\text{B.23})$$

1. On trouve que l'expression $\phi(t_a, G_{t_a})$ ne contient pas le terme t_a de façon indépendante. De ce fait, la fonction « scrap value » est notée dans la suite $\phi(G_{t_a})$.

2. Nous détaillons pas l'expression de σ car elle n'est pas nécessaire à la résolution du problème, mais elle est disponible sur demande.

$$\dot{\pi} = c(a - zb) - c^2bG + (cb(1 - \alpha) + \rho)\pi. \quad (\text{B.24})$$

Les solutions d'un problème d'horizon fini sont de la forme :

$$\begin{aligned} G_{r_2}^-(t) &= A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + A_3, \\ \pi_{r_2}^-(t) &= B_1 e^{\rho_1 t} + B_2 e^{\rho_2 t} + B_3, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

avec,

$$G_{r_2}^-(0) = A_1 + A_2 + A_3 = G_0, \quad (\text{B.26})$$

$$\pi(t_a) = B_1 e^{\rho_1 t_a} + B_2 e^{\rho_2 t_a} + B_3 = 2vG_{t_a} + \tau, \quad (\text{B.27})$$

et les racines ρ_1, ρ_2 décrites en (B.6).

Ceci constitue un système de 6 équations et 6 inconnues, que nous devons résoudre afin de trouver les solutions optimales du problème dans la première période entre 0 et t_a . Nous trouvons les valeurs optimales A_i, B_i ($i = 1..3$)³ :

$$A_i = C_1^i + C_2^i(2vG_r^*(t_a) + \tau), \quad i=1,2,$$

avec,

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \frac{b(1 - \alpha)(\rho c(r_1 + (1 - \alpha)e^{\rho_2 t_a}(a - zb) - r_1 e^{\rho_2 t_a}) - \rho_2 c r_1)}{D^1} \\ &+ \frac{b(1 - \alpha)((1 - \alpha)c^2(r_1 b + e^{\rho_2 t_a} \rho b G_0 - r_1 b e^{\rho_2 t_a}))}{D^1}, \end{aligned}$$

$$C_2^1 = \frac{b(1 - \alpha)^2 \rho (\rho_2 - \rho - cb(1 - \alpha))}{D^1},$$

$$D^1 = \rho((\rho_2 - \rho)e^{\rho_1 t_a} cb(1 - \alpha) + c^2 b^2 (1 - \alpha)^2 (e^{\rho_2 t_a} - e^{\rho_1 t_a}) - cb(1 - \alpha), \rho_1 e^{\rho_1 t_a} + \rho_1 e^{\rho_1 t_a} (\rho_2 - \rho)),$$

$$C_1^2 = \frac{-(cb(1 - \alpha) + \rho - \rho_2)(\rho_1 e^{\rho_1 t_a} \rho((1 - \alpha)(a - zb) - r_1) + c^2 b^2 (1 - \alpha)^2 (G_0 \rho + r_1 - r_1 e^{\rho_1 t_a}))}{D^2}$$

$$+ \frac{cb(1 - \alpha)((G_0 \rho - r_1)e^{\rho_1 t_a} \rho_1 - \rho r_1 e^{\rho_1 t_a}) + cb(1 - \alpha)^2 e^{\rho_1 t_a} \rho(a - zb)}{D^2},$$

$$C_2^2 = \frac{(cb(1 - \alpha) + \rho - \rho_2)(cb^2(1 - \alpha)^3 \rho)}{D^2},$$

3. Nous ne fournissons pas le détail des solutions B_i ($i = 1..3$) car les expressions sont très longues et ne sont pas nécessaires pour les démonstrations du chapitre. Elles sont de toute façon disponibles si besoin.

$$D^2 = cb(1 - \alpha)\rho((\rho_2 - \rho)cb(1 - \alpha)e^{\rho_1 t_a} + c^2 b^2 (1 - \alpha)^2 (e^{\rho_2 t_a} - e^{\rho_1 t_a}))$$

$$+ cb(1 - \alpha)\rho(-cb(1 - \alpha)e^{\rho_1 t_a} \rho_1 - \rho e^{\rho_1 t_a} \rho_1 + e^{\rho_1 t_a} \rho_1 \rho_2),$$

et,

$$A_3 = -\frac{r_1 \rho - \rho a + \rho z b + \rho \alpha a - \rho \alpha z b + cr_1 b - cr_1 b \alpha}{b\rho(\alpha - 1)c}. \quad (\text{B.28})$$

Finalement, nous combinons les solutions des deux périodes de façon que $G_{r_2}^-(t_a) = G_{r_2}^+(t_a)$, pour obtenir les solutions optimales du stock $G_{r_2}^*(t)$ et du taux d'extraction $g_{r_2}^*(t)$ du problème déterministe.

B.4 Résolution du problème stochastique

Le Hamiltonien du problème stochastique est :

$$H = \frac{a}{b}g - \frac{1}{2b}g^2 - (z - cG)g + \theta\phi(G) + \gamma(r_1 - (1 - \alpha)g)$$

avec la fonction $\phi(G)$ décrite en (B.19) et γ la variable adjointe. En appliquant le principe du maximum et en supposant des solutions intérieures, on obtient les conditions nécessaires de premier ordre :

$$\frac{\partial H}{\partial g} = 0 \implies \frac{a}{b} - \frac{1}{b}g - (z - cG) - \gamma(1 - \alpha) = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial G} + (\rho + \theta)\gamma \implies \dot{\gamma} = -cg - \theta\frac{\partial\phi(G)}{\partial G} + (\rho + \theta)\gamma$$

$$\implies \dot{\gamma} = -cg - \theta(2vG + \tau) + (\rho + \theta)\gamma \quad (\text{B.30})$$

A partir de (B.29), nous retrouvons le taux d'extraction optimal en fonction du stock de la ressource et de la variable adjointe :

$$g = a - zb + cbG - \gamma b(1 - \alpha). \quad (\text{B.31})$$

En substituant (B.31) dans les équations représentant l'évolution du stock (2.15) et de la variable adjointe (B.30), on obtient le système linéaire d'équations différentielles :

$$\dot{G} = r_1 - (a - zb)(1 - \alpha) - cb(1 - \alpha)G + b(1 - \alpha)^2\gamma, \quad (\text{B.32})$$

$$\dot{\gamma} = -c(a - zb) - \theta\tau - (c^2b + 2\theta v)G + (cb(1 - \alpha) + \rho + \theta)\gamma, \quad (\text{B.33})$$

où $G(0) = G_0$, qui va nous permettre d'obtenir les racines du polynôme caractéristique :

$$\nu_{1,2} = \frac{\rho + \theta}{2} \pm \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\rho\theta + \theta^2 + 4bc(1 - \alpha)(\rho + \theta) - 8b\theta v(1 - \alpha)^2}}{2}. \quad (\text{B.34})$$

A partir des équations (B.31), (B.32) et (B.33), lorsque $\dot{G} = 0$ et $\dot{\gamma} = 0$, on trouve l'état stationnaire du problème :

$$g_{\infty} = \frac{r_1}{(1 - \alpha)}, \quad (\text{B.35})$$

$$\gamma_{\infty} = \frac{-c^2 b r_1 - \theta \tau c b (1 - \alpha) + 2 \theta v (1 - \alpha) (a - z b - r_1)}{b (1 - \alpha) (-c \rho - c \theta + 2 \theta v (1 - \alpha))}, \quad (\text{B.36})$$

$$G_{\infty} = \frac{(a - z b) (1 - \alpha) (\rho + \theta) - r_1 (\rho + \theta) - c b (1 - \alpha) r_1 - b (1 - \alpha)^2 \theta \tau}{b (1 - \alpha) (-c \rho - c \theta + 2 \theta v (1 - \alpha))}, \quad (\text{B.37})$$

avec les valeurs de τ et v décrites dans les équations (B.20) et (B.21). De nouveau, nous allons considérer des valeurs de paramètres tel que G_{∞} et g_{∞} (équations (B.37) et (B.35)) sont positifs.

Finalement, nous obtenons le chemin d'extraction optimal du problème stochastique avec ν_2 , la racine négative :

$$G_{r_2^*}^*(t) = e^{\nu_2 t} (G_0 - G_{\infty}) + G_{\infty}, \quad (\text{B.38})$$

$$g_{r_2^*}^*(t) = \frac{r_1}{(1 - \alpha)} - \frac{\nu_2}{(1 - \alpha)} e^{\nu_2 t} (G_0 - G_{\infty}), \quad (\text{B.39})$$

avec G_{∞} décrit dans l'équation (B.37).

B.5 Démonstrations des propositions

Proposition 2.2.2 : $G_r^*(t_a)$ est une fonction monotone croissante en r .

Démonstration :

Il faut démontrer que $\frac{\partial G_r^*(t_a)}{\partial r} > 0$.

Comme on prouve dans l'annexe B.3,

$$\phi(G) = \sigma + \tau G_r^*(t_a) + v G_r^*(t_a)^2, \quad (\text{B.40})$$

$$\pi(t_a) = G_r^*(t_a) + 2v G_r^*(t_a), \quad (\text{B.41})$$

$$G_r^*(t_a) = A_1 e^{\rho_1 t_a} + A_2 e^{\rho_2 t_a} + A_3, \quad (\text{B.42})$$

et,

$$A_i = C_1^i + C_2^i (2v G_r^*(t_a) + \tau), \quad i=1,2, \quad (\text{B.43})$$

où v et τ sont des fonction de r , $C_2^i (i = 1, 2)$, et A_3 est une fonction qui ne dépend pas de r .

La dérivée de $G_r^*(t_a)$ par rapport à r est donc,

$$\frac{\partial G_r^*(t_a)}{\partial r} = \frac{\partial A_1}{\partial r} e^{\rho_1 t_a} + \frac{\partial A_2}{\partial r} e^{\rho_2 t_a}, \quad (\text{B.44})$$

avec,

$$\frac{\partial A_i}{\partial r} = C_2^i \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} G_r^*(t_a) + 2v \frac{\partial G_r^*(t_a)}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \right). \quad (\text{B.45})$$

En substituant la valeur $G_r^*(t_a)$ (équation (B.42)) dans l'équation (B.45) et en simplifiant (B.44), on obtient,

$$\frac{\partial G_r^*(t_a)}{\partial r} = \frac{M1(e^{\rho_1 t_a} - e^{\rho_2 t_a})e^{-\rho_1 t_a}}{M2}, \quad (\text{B.46})$$

avec,

$$M1 = 2(1 - \alpha)^2 c^2 b^2 \sqrt{\rho + 4b(1 - \alpha)c}, \quad (\text{B.47})$$

$$M2 = (\rho + 4b(1 - \alpha)c) \sqrt{\rho(3b(1 - \alpha)c\rho + b(1 - \alpha)c\eta + \rho^2 + \eta\rho)}, \quad (\text{B.48})$$

$\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$ et $\eta > 0$, décrits dans les équations (B.6) et (B.22).

Comme tous les paramètres du modèle sont positifs, les expressions $M1$, $M2$ et η des équations (B.47), (B.48), et (B.22) respectivement, sont des expressions positives. Ainsi, la partie droite de l'équation (B.46) est plus grande que 0, et $\frac{\partial G_r^*(t_a)}{\partial r_2} > 0$. \square

Proposition 2.2.3 : $g_r^*(0)$ est une fonction monotone décroissante en r .

Démonstration Il faut prouver que $\frac{\partial g_r^*(0)}{\partial r} < 0$.

En substituant la dérivée de l'équations (B.25) dans l'équation (2.8) de la dynamique de l'aquifère, on obtient $g_r^*(t)$. En évaluant la fonction en $t=0$, on peut voir que,

$$g_r^*(0) = \frac{1}{1 - \alpha} (r_1 - \rho_1 A_1 - \rho_2 A_2).$$

La dérivée par rapport à r est donc,

$$\frac{\partial g_r^*(0)}{\partial r} = -\frac{1}{1 - \alpha} \left(\rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial r} + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial r} \right), \quad (\text{B.49})$$

avec $\frac{\partial A_i}{\partial r}$ ($i = 1, 2$) décrits dans l'équation (B.45).

En substituant les valeurs des fonctions dans la partie droite de l'équation (B.49), on obtient,

$$\frac{\partial g_r^*(0)}{\partial r} = \frac{N1 * N2}{N3 * N4 * N5}, \quad (\text{B.50})$$

avec,

$$N1 = 4c^2 b^2 (1 - \alpha)^2, \quad (\text{B.51})$$

$$N2 = -c^2 b^2 (1 - \alpha)^2 (\eta(5 - e^{-\eta t_a}) + \rho(13 - e^{-\eta t_a})) - cb(1 - \alpha)(5\rho\eta + 7\rho^2)$$

$$-\rho^3 - \eta\rho^2 - 4c^3 b^3 (1 - \alpha)^3 (1 - e^{-\eta t_a}), \quad (\text{B.52})$$

$$N3 = 4cb(1 - \alpha)\rho e^{\rho_1 t_a} + 2cb(1 - \alpha)\eta e^{\rho_1 t_a} + 2c^2 b^2 (1 - \alpha)^2 (e^{\rho_1 t_a} - e^{\rho_2 t_a}) + \rho^2 e^{\rho_1 t_a} + \rho\eta e^{\rho_1 t_a}, \quad (\text{B.53})$$

$$N4 = \eta + \rho + 4cb(1 - \alpha), \quad (\text{B.54})$$

$$N5 = 3cb(1 - \alpha)\rho + cb(1 - \alpha)\eta + \rho\eta + \rho^2, \quad (\text{B.55})$$

et, $\eta > 0$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$ décrits dans les équations (B.6) et (B.22).

Comme on assume que tous les paramètres du modèle sont positifs, les expressions $N1$, $N3$, $N4$, et $N5$ des équations (B.51), (B.53), (B.54), respectivement (B.55), sont des expressions positives, et $N2$ (équation (B.52)) est une expression négative. Ainsi, la partie droite de l'équation (B.50) est inférieure à 0, et $\frac{\partial g_r^*(0)}{\partial r} < 0$. \square

Proposition 2.2.4 : $g_r^*(t_a)$ est une fonction monotone décroissante en r .

Démonstration Il faut prouver que $\frac{\partial g_r^*(t_a)}{\partial r} < 0$.

En procédant comme dans l'annexe B.5, mais en évaluant la fonction en $t = t_a$, on a,

$$\frac{\partial g_r^*(t_a)}{\partial r} = -\frac{1}{1 - \alpha} \left(\rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial r} e^{\rho_1 t_a} + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) e^{\rho_2 t_a}, \quad (\text{B.56})$$

avec $\frac{\partial A_i}{\partial r}$ ($i = 1, 2$) décrits dans l'équation (B.45).

En substituant les valeurs des fonctions dans la partie droite de l'équation (B.56), on obtient,

$$\frac{\partial g_r^*(t_a)}{\partial r} = \frac{D1 * D2}{D3}, \quad (\text{B.57})$$

avec,

$$D1 = -c^2 b^2 (1 - \alpha), \quad (\text{B.58})$$

$$D2 = (4cb(1 - \alpha) + \rho)(1 + e^{-\eta t_a}) + (1 - e^{-\eta t_a})\eta, \quad (\text{B.59})$$

$$D3 = 7cb(1 - \alpha)\rho^2 + 4c^2 b^2 (1 - \alpha)^2 (3\rho + \eta) + \rho^{\frac{3}{2}}\eta + 5cb(1 - \alpha)\rho\eta + \rho^3, \quad (\text{B.60})$$

et $\eta > 0$ (voir équation B.22).

Comme on assume que tous les paramètres du modèle sont positifs, l'expression $D1$ dans l'équation (B.58) est négative, et les expressions $D2$ et $D3$ décrites dans les équations (B.59) et (B.60), respectivement, sont positives. Ainsi, la partie droite de l'équation (B.57) est inférieure à 0, et $\frac{\partial g_r^*(t_a)}{\partial r} < 0$. \square

Proposition 2.2.6 : $G_{rS}^*(\infty)$ (et $g_{rS}^*(\infty)$) sont des fonctions monotone croissante (et constante) en r.

Démonstration Il faut prouver que $\frac{\partial G_{rS}^*(\infty)}{\partial r} > 0$ and $\frac{\partial g_{rS}^*(\infty)}{\partial r} = 0$.

En premier, si l'on dérive (B.37) par rapport à r, on voit que,

$$\frac{\partial G_{rS}^*(\infty)}{\partial r} = \frac{-(1-\alpha)\theta\frac{\partial\tau}{\partial r}}{(-c\rho - c\theta + 2\theta v(1-\alpha))}. \quad (\text{B.61})$$

avec v (équation (B.21)), une fonction de r.

Dérivant τ (équation (B.20)) par rapport à r et substituant le résultat en (B.61),

$$\frac{\partial G_{rS}^*(\infty)}{\partial r} = \frac{\theta * S1}{S2},$$

avec,

$$S1 = \rho(\eta - \rho) + q(\eta - 2\rho),$$

$$S2 = \rho bc(1-\alpha)(\rho\eta + \rho^2 + 4\rho bc(1-\alpha) + 2\theta\rho),$$

$$q = 2cb(1-\alpha)$$

et $\eta > 0$ comme décrit dans l'équation (B.22). En supposant que tous les paramètres sont positifs, on voit que $q > 0$ et donc, $S2 > 0$. Il reste à prouver que $S1 > 0$.

$$S1 > 0 \iff \rho(\eta - \rho) + q(\eta - 2\rho) > 0 \iff \rho\eta + q\eta > \rho^2 + 2q\rho \iff \eta > \frac{\rho(2q + \rho)}{\rho + q}$$

Comme $\eta = \sqrt{\rho}\sqrt{\rho + 2q}$, (voir équation (B.22)),

$$\eta > \frac{\rho(2q + \rho)}{\rho + q} \iff \sqrt{\rho}\sqrt{\rho + 2q} > \frac{\rho(2q + \rho)}{\rho + q} \iff \rho^2 + 2q\rho > \frac{\rho^2(2q + \rho)^2}{(\rho + q)^2}$$

$$\iff (\rho^2 + 2q\rho)(\rho + q)^2 > \rho^2(4q^2 + 4q\rho + \rho^2)$$

$$\iff \rho^4 + 2q\rho^3 + q^2\rho^2 + 2q\rho^3 + 4q^2\rho^2 + 2q^3\rho > 4\rho^2q^2 + 4q\rho^3 + \rho^4 \iff q^2\rho^2 + 2q^3\rho > 0.$$

Comme $q^2\rho^2 + 2q^3\rho$ est toujours une expression positive, $S1 > 0$ et donc, $\frac{\partial G_{rS}^*(\infty)}{\partial r} > 0$.

Finalement, on peut observer d'après l'équation (B.35) que $\frac{\partial g_{rS}^*(\infty)}{\partial r} = 0$. \square

Proposition 2.2.7 : $G_{r,S}^*(\infty)$ (et $g_{r,S}^*(\infty)$) sont des fonctions monotone décroissante (et constante) en θ .

Démonstration Il faut prouver que $\frac{\partial G_{r,S}^*(\infty)}{\partial \theta} < 0$ et $\frac{\partial g_{r,S}^*(\infty)}{\partial \theta} = 0$.

Dans un premier temps, en dérivant (B.37) par rapport à θ , on voit que,

$$\frac{\partial G_{r,S}^*(\infty)}{\partial \theta} = 2(r_1 - r_2) \frac{T1}{T2}, \quad (\text{B.62})$$

avec,

$$T1 = (\rho + 4cb(1 - \alpha))(\rho - \eta),$$

$$T2 = \rho^2 + \rho(\eta + 4cb(1 - \alpha)) + 2\eta\theta.$$

Par hypothèse $r_1 - r_2 > 0$, et tous les paramètres sont positifs, et d'après l'expression η en (B.22), on voit que $\rho < \eta$, et donc, $T1 < 0$ et $T2 > 0$.

Ainsi, la partie droite de l'équation (B.62) est inférieure à 0, et $\frac{\partial G_{r,S}^*(\infty)}{\partial \theta} < 0$.

Finalement, on conclut à partir de (B.35) que $\frac{\partial g_{r,S}^*(\infty)}{\partial \theta} = 0$. \square

Annexes correspondant au chapitre 3

C.1 Résolution de l'optimum social (OS)

Le hamiltonien du problème est :

$$H = \sum_{i=1}^M \left(\frac{a}{b} g_i - \frac{1}{2b\theta_i} g_i^2 - (z - cG) g_i \right) + \lambda \left(-(1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r \right),$$

où λ représente la variable adjointe. En utilisant le principe du maximum et en supposant des solutions intérieures, on obtient les conditions de premier ordre :

$$\frac{\partial H}{\partial g_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} - \frac{1}{b\theta_i} g_i - (z - cG) - \lambda(1 - \alpha) = 0, \quad i = 1..M, \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial G} + \rho\lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = -c \sum_{i=1}^M g_i + \rho\lambda, \quad i = 1..M. \quad (\text{C.2})$$

Nous supposons que les joueurs sont symétriques afin de simplifier la résolution analytique du problème. Ainsi, $\theta_i = \frac{1}{M}$ et $g = g_i$ dans la suite.

A partir de (C.1), on trouve le taux d'extraction optimal g en fonction du stock de la ressource et de la variable adjointe :

$$g = \frac{1}{M} (a - zb + cbG - \lambda b(1 - \alpha)). \quad (\text{C.3})$$

En substituant (C.3) dans les équations décrivant l'évolution de l'état de la ressource (3.9) et de la variable adjointe (C.2), on obtient le système dynamique suivant :

$$\dot{G} = r - (1 - \alpha)(a - zb) - cb(1 - \alpha)G + \lambda b(1 - \alpha)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$\dot{\lambda} = -c(a - zb) - c^2 bG + (cb(1 - \alpha) + \rho)\lambda, \quad (\text{C.5})$$

à partir duquel on obtient les racines du polynôme caractéristique :

$$\rho_{1,2} = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4cb(1 - \alpha)\rho}}{2}. \quad (\text{C.6})$$

A partir des équations (C.3), (C.4) et (C.5), avec $\dot{G} = 0$ et $\dot{\lambda} = 0$, on trouve l'état stationnaire du problème OS :

$$g_{\infty}^{OS} = \frac{r}{(1 - \alpha)M}, \quad (\text{C.7})$$

$$\lambda_{\infty}^{OS} = \frac{cr}{\rho(1 - \alpha)}, \quad (\text{C.8})$$

$$G_{\infty}^{OS} = \frac{r}{cb(1-\alpha)} + \frac{r}{\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}. \quad (\text{C.9})$$

En supposant que les paramètres utilisés sont des nombres positifs, g_{∞} et λ_{∞} (équations (C.7) et (C.8)) prennent toujours des valeurs positives. De plus, dans la suite du travail, on considère des paramètres tel que G_{∞} (équation (C.9)) est un nombre positif.

Finalement, on obtient le chemin d'extraction optimal, avec ρ_2 , la racine négative :

$$G^{OS}(t) = e^{\rho_2 t}(G_0 - G_{\infty}^{OS}) + G_{\infty}^{OS}, \quad (\text{C.10})$$

$$g^{OS}(t) = \frac{r}{(1-\alpha)M} - \frac{\rho_2}{(1-\alpha)M} e^{\rho_2 t}(G_0 - G_{\infty}^{OS}), \quad (\text{C.11})$$

$$\lambda^{OS}(t) = e^{\rho_2 t}(\lambda_0 - \lambda_{\infty}^{OS}) + \lambda_{\infty}^{OS}, \quad (\text{C.12})$$

et,

$$\lambda_0 = \frac{a}{b(1-\alpha)} - \frac{z - cG_0}{(1-\alpha)} - \frac{1}{b(1-\alpha)^2}(r - \rho_2(G_0 - G_{\infty})),$$

que l'on obtient à partir des équations (3.9) et (C.1).

C.2 Résolution de l'optimum social avec choc

Pour résoudre le problème modifié, il faut procéder en deux étapes. Dans un premier temps, nous allons résoudre le problème entre t_a et ∞ . Le problème du planificateur est de trouver $\phi^{OS}(G_{t_a})$,

$$\phi(G_{t_a}) = \max_{g_i(\cdot)} \int_{t_a}^{\infty} \sum_{i=1}^M F_i(G, g_i) e^{-\rho(t-t_a)} dt, \quad (\text{C.13})$$

avec $F_i(G, g_i)$ (équation (3.8)), sous contrainte de la dynamique (équation (3.9)) avec $r = r_2$ et les conditions (3.11) et $G(t_a) = G_{t_a}$.

En utilisant la même procédure que dans l'annexe (B.2) et en supposant que les joueurs sont symétriques, l'état stationnaire du problème modifié est maintenant :

$$g_{\infty} = \frac{r_2}{(1-\alpha)M}, \quad (\text{C.14})$$

$$\lambda_{\infty} = \frac{cr_2}{\rho(1-\alpha)}, \quad (\text{C.15})$$

$$G_{\infty} = \frac{r_2}{cb(1-\alpha)} + \frac{r_2}{\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}. \quad (\text{C.16})$$

On sait que dans cette période, les solutions du problème sont de la forme :

$$G^{OS+}(t) = e^{\rho_2(t-t_a)}(G_{t_a} - G_{\infty}) + G_{\infty}, \quad (\text{C.17})$$

$$\lambda^{OS+}(t) = e^{\rho_2(t-t_a)}(\lambda_{t_a} - \lambda_{\infty}) + \lambda_{\infty}, \quad (\text{C.18})$$

$$g^{OS+}(t) = \frac{r_2}{(1-\alpha)M} - \frac{\rho_2}{(1-\alpha)M}(G_{ta} - G_\infty)e^{\rho_2(t-t_a)}, \quad (C.19)$$

avec,

$$\lambda_{ta} = \frac{a}{b(1-\alpha)} + \frac{-z + cG_{ta}}{(1-\alpha)} - \frac{r_2}{b(1-\alpha)^2} + \frac{1}{b(1-\alpha)^2}\rho_2(G_{ta} - G_\infty), \quad G_{ta} \text{ inconnu.}$$

En substituant (C.17) et (C.19) dans le problème (C.13), nous trouvons la fonction « scrap value », $\phi^{OS}(G_{ta})$,¹ :

$$\phi(G_{ta}) = \epsilon + \kappa G_{ta} + \iota G_{ta}^2, \quad \text{avec}^2 \quad (C.20)$$

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{-r_2\rho(4cb(1-\alpha) + \rho) + \rho^2(1-\alpha)(a - zb) + 4cb(1-\alpha)^2\rho(a - zb)}{\rho(1-\alpha)^2b(\eta + \rho + 4cb(1-\alpha))} \\ & + \frac{(2cb(1-\alpha) + \rho)r_2\eta - \rho(1-\alpha)\eta(a - zb)}{\rho(1-\alpha)^2b(\eta + \rho + 4cb(1-\alpha))}, \end{aligned} \quad (C.21)$$

$$\iota = -\frac{c(-4cb(1-\alpha) - \rho + \eta)}{(1-\alpha)(\eta + \rho + 4cb(1-\alpha))}, \quad \text{et} \quad (C.22)$$

$$\eta = \sqrt{\rho}\sqrt{\rho + 4bc(1-\alpha)}. \quad (C.23)$$

Dans un deuxième temps, nous allons résoudre le problème entre 0 et t_a , le problème du planificateur social est (C.52) contraint par les conditions (C.53), (C.54) et la condition transversale,

$$\lambda(t_a) = \frac{\partial\phi(ta, G_{ta})}{\partial G_{ta}} = 2\iota G_{ta} + \kappa, .$$

avec $\phi(ta, G_{ta})$ décrit par l'équation (C.20).

$$H = \sum_{i=1}^M \left(\frac{a}{b}g_i - \frac{1}{2b\theta_i}g_i^2 - (z - cG)g_i \right) + \lambda(-(1-\alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r),$$

où λ représente la variable adjointe. En utilisant le principe du maximum et en supposant des solutions intérieures, on obtient les conditions de premier ordre (C.1) et (C.2). A partir de ces conditions et de l'équation de l'évolution de l'état de la ressource (C.53), avec $r = r_1$, on obtient un système linéaire d'équations différentielles :

$$\dot{G} = r_1 - (1-\alpha)(a - zb) - cb(1-\alpha)G + \lambda b(1-\alpha)^2, \quad (C.24)$$

$$\dot{\lambda} = -c(a - zb) - c^2bG + (cb(1-\alpha) + \rho)\lambda, \quad (C.25)$$

et les solutions sont maintenant de la forme :

$$G^{OS-}(t) = A_1e^{\rho_1 t} + A_2e^{\rho_2 t} + A_3, \quad (C.26)$$

1. On remarque que l'expression $\phi(ta, G_{ta})$ ne possède pas de terme indépendant t_a , ainsi, dans la suite, la fonction « scrap value » est définie par $\phi(G_{ta})$.

2. Nous ne détaillons pas l'expression de σ car elle n'est pas nécessaire à la résolution du problème.

$$\lambda^{OS-}(t) = B_1 e^{\rho_1 t} + B_2 e^{\rho_2 t} + B_3,$$

avec,

$$G^{OS-}(0) = A_1 + A_2 + A_3 = G_0, \quad (C.27)$$

$$\lambda(t_a) = B_1 e^{\rho_1 t_a} + B_2 e^{\rho_2 t_a} + B_3 = 2\iota G_{t_a} + \kappa, \quad (C.28)$$

et les racines ρ_1, ρ_2 décrites équation (C.6). Ceci constitue un système de 6 équations et 6 inconnues que l'on doit résoudre afin d'obtenir les solutions optimales de notre problème entre 0 et t_a . On trouve les valeurs optimales de A_i, B_i ($i = 1..3$)³ :

$$A_i = C_1^i + C_2^i(2\nu G_r^*(t_a) + \tau), \quad i=1,2,$$

avec,

$$C_1^1 = \frac{b(1-\alpha)(\rho c(r_1 + (1-\alpha)e^{\rho_2 t_a}(a-zb) - r_1 e^{\rho_2 t_a}) - \rho_2 c r_1)}{D^1} \\ + \frac{b(1-\alpha)((1-\alpha)c^2(r_1 b + e^{\rho_2 t_a} \rho b G_0 - r_1 b e^{\rho_2 t_a}))}{D^1}, \\ C_2^1 = \frac{b(1-\alpha)^2 \rho(\rho_2 - \rho - cb(1-\alpha))}{D^1},$$

$$D^1 = \rho((\rho_2 - \rho)e^{\rho_1 t_a} cb(1-\alpha) + c^2 b^2 (1-\alpha)^2 (e^{\rho_2 t_a} - e^{\rho_1 t_a}) - cb(1-\alpha), \rho_1 e^{\rho_1 t_a} + \rho_1 e^{\rho_1 t_a} (\rho_2 - \rho)),$$

$$C_1^2 = \frac{-(cb(1-\alpha) + \rho - \rho_2)(\rho_1 e^{\rho_1 t_a} \rho((1-\alpha)(a-zb) - r_1)}{D^2} \\ + \frac{c^2 b^2 (1-\alpha)^2 (G_0 \rho + r_1 - r_1 e^{\rho_1 t_a})}{D^2}, \\ + \frac{cb(1-\alpha)((G_0 \rho - r_1)e^{\rho_1 t_a} \rho_1 - \rho r_1 e^{\rho_1 t_a}) + cb(1-\alpha)^2 e^{\rho_1 t_a} \rho(a-zb)}{D^2}, \\ C_2^2 = \frac{(cb(1-\alpha) + \rho - \rho_2)(cb^2(1-\alpha)^3 \rho)}{D^2},$$

$$D^2 = cb(1-\alpha)\rho((\rho_2 - \rho)cb(1-\alpha)e^{\rho_1 t_a} + c^2 b^2 (1-\alpha)^2 (e^{\rho_2 t_a} - e^{\rho_1 t_a})) \\ + cb(1-\alpha)\rho(-cb(1-\alpha)e^{\rho_1 t_a} \rho_1 - \rho e^{\rho_1 t_a} \rho_1 + e^{\rho_1 t_a} \rho_1 \rho_2),$$

et,

$$A_3 = -\frac{r_1 \rho - \rho a + \rho z b + \rho \alpha a - \rho \alpha z b + c r_1 b - c r_1 b \alpha}{b \rho (\alpha - 1) c}. \quad (C.29)$$

Finalement, considérant la continuité de la variable d'état, i.e. $G^{OS-}(t_a) = G^{OS+}(t_a)$, on obtient les solutions optimales du stock $G^{OS}(t)$ et du taux d'extraction $g^{OS}(t)$ du problème modifié.

3. Nous ne fournissons pas les expressions de B_i ($i = 1..3$) car elles ne sont pas nécessaires pour la suite du travail.

C.3 Résolution du cas « open-loop »

Nous allons également résoudre le cas « open-loop » en commençant dans un premier temps entre t_a et ∞ . Le Hamiltonien du problème dans cette période est :

$$H_i = F_i(G, g_i) + \pi_i(r_2 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i) = \frac{a}{b}g_i - \frac{1}{2b\theta_i}g_i^2 - (z - cG)g_i + \pi_i(r_2 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i). \quad (\text{C.30})$$

En utilisant le principe du maximum et en supposant des solutions intérieures, on obtient les conditions de premier ordre :

$$\frac{\partial H_i}{\partial g_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} - z + cG - \frac{1}{b\theta_i}g_i - \pi_i(1 - \alpha) = 0, \quad (\text{C.31})$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial G} + \rho\pi_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\pi}_i = -cg_i + \rho\pi_i. \quad (\text{C.32})$$

L'équilibre du jeu en « open-loop » consiste à résoudre M stratégies qui vérifient les conditions (C.31) et (C.32) ($i=1..M$), i.e. un système linéaire de 2M équations. Afin de simplifier la résolution analytique du problème, nous supposons que les joueurs sont symétriques, $\theta_i = \frac{1}{M}$, $g = g_i$ et $\pi = \pi_i$. A partir de (C.31), on trouve le taux d'extraction optimal g en fonction du stock de la ressource et de la variable adjointe :

$$g = \frac{1}{M}(a - zb + cbG - \pi b(1 - \alpha)). \quad (\text{C.33})$$

En substituant (C.33) dans les équations décrivant l'évolution de l'état de la ressource (3.9) et de la variable adjointe (C.32), on obtient le système dynamique suivant :

$$\dot{G} = r_2 - (1 - \alpha)(a - zb) - cb(1 - \alpha)G + \pi b(1 - \alpha)^2, \quad (\text{C.34})$$

$$\dot{\pi} = \frac{1}{M}(-c(a - zb) - c^2bG + cb(1 - \alpha) + \rho M)\pi, \quad (\text{C.35})$$

à partir duquel on obtient les racines du polynôme caractéristique :

$$\beta_{1,2} = \frac{\rho M + c(1 - \alpha)b(1 - M)}{2M} \quad (\text{C.36})$$

$$\pm \frac{\sqrt{\rho^2 M^2 + cb(1 - \alpha)(-2M(1 - \alpha)cb + c(1 - \alpha)b(1 + M^2) + 2\rho M(1 + M))}}{2M}. \quad (\text{C.37})$$

A partir des équations (C.33), (C.34) et (C.35), avec $\dot{G} = 0$ et $\dot{\pi} = 0$, on trouve l'état stationnaire du problème :

$$g_\infty^{OL} = \frac{r_2}{(1 - \alpha)M}, \quad (\text{C.38})$$

$$\pi_\infty^{OL} = \frac{cr_2}{M\rho(1 - \alpha)}, \quad (\text{C.39})$$

$$G_{\infty}^{OL} = \frac{r_2}{cb(1-\alpha)} + \frac{r_2}{M\rho} - \frac{a}{cb} + \frac{z}{c}. \quad (\text{C.40})$$

En supposant que les paramètres utilisés sont des nombres positifs, g_{∞} et π_{∞} (équations (C.38) et (C.39)) prennent toujours des valeurs positives. De plus, dans la suite du travail, on considère des paramètres tel que G_{∞} (équation (C.40)) est un nombre positif.

Finalement, on obtient le chemin d'extraction optimal, avec β_2 , la racine négative :

$$G^{OL+}(t) = e^{\beta_2(t-t_a)}(G_{t_a} - G_{\infty}^{OL}) + G_{\infty}^{OL}, \quad (\text{C.41})$$

$$g^{OL+}(t) = \frac{r_2}{(1-\alpha)M} - \frac{\beta_2}{(1-\alpha)M} e^{\beta_2(t-t_a)}(G_{t_a} - G_{\infty}^{OL}), \quad (\text{C.42})$$

$$\pi^{OL+}(t) = e^{\beta_2(t-t_a)}(\pi_{t_a} - \pi_{\infty}^{OS}) + \pi_{\infty}^{OS}, \quad (\text{C.43})$$

et,

$$\pi_{t_a} = \frac{a}{b(1-\alpha)} - \frac{z - cG_{t_a}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{b(1-\alpha)^2}(r_2 - \beta_2(G_{t_a} - G_{\infty}^{OL})), \quad (\text{C.44})$$

que l'on obtient à partir des équations (3.9) et (C.31) avec $r = r_2$.

Dans un deuxième temps, nous allons résoudre le problème entre 0 et t_a . Dans cette période, le Hamiltonien est défini par

$$H_i = F_i(G, g_i) + \pi_i(r_1 - (1-\alpha) \sum_{i=1}^M g_i) = \frac{a}{b}g_i - \frac{1}{2b\theta_i}g_i^2 - (z - cG)g_i + \pi_i(r_1 - (1-\alpha) \sum_{i=1}^M g_i). \quad (\text{C.45})$$

Le principe de résolution est le même que celui décrit précédemment. On réécrit les conditions de premier ordre (équations (C.30), (C.31), (C.32) respectivement avec $r_2 = r_1$) en appliquant le principe du maximum. De plus, on suppose de nouveau que les joueurs sont symétriques.

Dans un problème en horizon fini, les solutions d'équilibre prennent maintenant la forme :

$$G^{OL-}(t) = C_1 e^{\beta_1 t} + C_2 e^{\beta_2 t} + C_3, \quad (\text{C.46})$$

$$\pi^{OL-}(t) = D_1 e^{\beta_1 t} + D_2 e^{\beta_2 t} + D_3. \quad (\text{C.47})$$

En substituant $G^{OL-}(t)$ et $\pi^{OL-}(t)$ (équations (C.46) et (C.47)) dans les conditions des premier ordre (C.31), (C.32), et en ajoutant les conditions aux bords $G(0) = G_0$ et $\pi(t_a) = \pi^{OL+}(t_a)$, on obtient un système de 6 équations et 6 inconnues (C_i, D_i avec $i=1,2,3$) qui a comme solutions⁴ :

$$C_1 = \frac{-(1-\alpha)b(-\rho M c r_1 + \rho M c (1-\alpha)^2 b \pi_{t_a} - (1-\alpha)c^2 b r_1) - c^2 e^{\beta_2 t_a} \rho M (1-\alpha) b G_0}{D_1}$$

4. Les solutions de D_i pour $i=1,2,3$, ne sont pas détaillées ici, mais elles sont disponibles auprès de l'auteur en cas de besoin.

$$\frac{+ce^{\beta_2 t_a} \rho M(r_1 + (1 - \alpha)zb - (1 - \alpha)a) + cr_1 M\beta_2 - (1 - \alpha)\rho M^2 \pi_{ta}(\beta_2 - \rho) + c^2 e^{\beta_2 t_a} b(1 - \alpha)r_1}{D_1}$$

$$\frac{+ce^{\beta_2 t_a} \rho M(r_1 + (1 - \alpha)zb - (1 - \alpha)a) + cr_1 M\beta_2 - (1 - \alpha)\rho M^2 \pi_{ta}(\beta_2 - \rho)}{D_1}, \quad (\text{C.48})$$

avec

$$D_1 = \rho M(-e^{\beta_1 t_a} \beta_1(\rho M + cb(1 - \alpha) - M\beta_2) + (1 - \alpha)cb(-(1 - \alpha)cb(e^{\beta_2 t_a} - e^{\beta_1 t_a}) + Me^{\beta_1 t_a}(\beta_2 - \rho))),$$

$$C_2 = \frac{-(-\rho M - cb(1 - \alpha) + \beta_2 M)(-c^2 b^2(1 - \alpha)^2 r_1 - \rho M e^{\beta_1 t_a} cb(1 - \alpha)G_0(\beta_1 + cb(1 - \alpha)))}{D_2}$$

$$\frac{+cb^2(1 - \alpha)^3 \rho M \pi_{ta} + e^{\beta_1 t_a}(\beta_1 + cb(1 - \alpha))(\rho M(r_1 - (a - zb)(1 - \alpha)) + cb(1 - \alpha)r_1)}{D_2}, \quad (\text{C.49})$$

avec

$$D_2 = cb(1 - \alpha)\rho M((\beta_2 - \rho M - cb(1 - \alpha) + M\beta_2)),$$

$$+cb(1 - \alpha)(e^{\beta_2 t_a} cb(1 - \alpha) + e^{\beta_1 t_a}(-cb(1 - \alpha)(\beta_2 - \rho)M)),$$

$$C_3 = \frac{\rho M(r_1 - (a - zb)(1 - \alpha)) + cb(1 - \alpha)r_1}{cb(1 - \alpha)\rho M}. \quad (\text{C.50})$$

avec π_{ta} décrit en (C.44). Finalement, en considérant que $G(t)$ est une fonction continue ($G^{OL-}(t_a) = G^{OL+}(t_a)$), on obtient les solutions optimales du jeu en « open-loop » $G^{OL}(t)$, $g^{OL}(t)$ et $\pi^{OL}(t)$.

C.4 Résolution du cas « open-loop » par morceaux

De la même manière que précédemment, nous allons résoudre dans un premier temps le problème entre t_a et ∞ ,

$$\max_{g_i(\cdot)} \int_{t_a}^{\infty} F_i(G, g_i) e^{-\rho(t-t_a)} dt, \quad (\text{C.51})$$

avec $F_i(G, g_i)$ (équation (3.8)), sous contrainte de la dynamique (équation (3.9)) avec $r = r_2$ et les conditions (3.11) et $G(t_a) = G_{t_a}$.

En supposant la symétrie des joueurs et en appliquant le principe de maximum, on doit résoudre le problème résolu dans la section précédente entre t_a et ∞ . On obtient donc les solutions décrites dans les équations (C.41), (C.33), (C.43).

Dans un deuxième temps, nous allons résoudre le problème entre 0 et t_a , i.e.,

$$\max_{g_i(\cdot)} \int_0^{t_a} F_i(G, g_i) e^{-\rho t} dt + e^{-\rho t_a} \phi(t_a, G_{t_a}). \quad (\text{C.52})$$

$$\dot{G} = -(1 - \alpha) \sum_{i=1}^M g_i + r_1. \quad (\text{C.53})$$

$$G(0) = G_0 \quad \text{connu, les conditions de positivité} \quad (\text{C.54})$$

et avec la condition transversale

$$\pi(t_a) = \frac{\partial \phi(t_a, G_{t_a})}{\partial G_{t_a}}, \quad (\text{C.55})$$

où $\pi(t)$ est la variable adjointe. $\phi(t_a, G_{t_a})$ représente la valeur postérieure de l'événement (ou « scrap value function ») et elle est définie de la façon suivante :

$$\phi(G_{t_a}) = \sigma + \tau G_{t_a} + v G_{t_a}^2, \quad (\text{C.56})$$

avec,

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{\beta_2(1 - \alpha)^2 c^2 b^2 \rho r_2 + 2\beta_2 M(1 - \alpha)^2 c b^2 \rho^2 z + \beta_2^2 M(1 - \alpha) b \rho^2 z - 2\beta_2^2 M(1 - \alpha) c b \rho r_2}{M^2(1 - \alpha)^3 c b^2 \rho(\rho^2 - 3\rho\beta_2 + 2\beta_2^2)} \\ & + \frac{M(1 - \alpha)^2 c^2 b^2 \rho^2 r_2 + 2\beta_2 M(1 - \alpha) c b \rho^2 r_2 + 2\beta_2^2 M(1 - \alpha)^2 c b \rho a - \beta_2^2 M(1 - \alpha) \rho^2 a}{M^2(1 - \alpha)^3 c b^2 \rho(\rho^2 - 3\rho\beta_2 + 2\beta_2^2)} \\ & - \frac{2\beta_2 M(1 - \alpha)^2 c b \rho^2 a + \beta_2^3 M(1 - \alpha) \rho a + \beta_2^2 M \rho^2 r_2 - 2\beta_2^2 M(1 - \alpha)^2 c b^2 \rho z}{M^2(1 - \alpha)^3 c b^2 \rho(\rho^2 - 3\rho\beta_2 + 2\beta_2^2)} \\ & + \frac{\beta_2^2(1 - \alpha) c b \rho r_2 - 2r_2 M(1 - \alpha)^2 c^2 b^2 \rho \beta_2 - \beta_2^3 (M \rho r_2 + M(1 - \alpha) b \rho z + (1 - \alpha) c b r_2)}{M^2(1 - \alpha)^3 c b^2 \rho(\rho^2 - 3\rho\beta_2 + 2\beta_2^2)}, \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

$$v = -\frac{\beta_2(\beta_2 + 2c(1 - \alpha)b)}{2M(1 - \alpha)^2 b(\rho - 2\beta_2)} \quad (\text{C.58})$$

et $\beta_2 < 0$, la racine décrite dans l'équation (C.37). Les solutions de cette période (allant de $t = 0$ à $t = t_a$) sont donc les solutions obtenues pour le problème « open-loop » (équations (C.46), (C.47)) mais avec $\pi(t_a)$, vérifiant la condition (C.55). Finalement, en considérant que $G(t)$ est une fonction continue, on obtient les solutions optimales de l'équilibre en « open-loop » par morceaux, $G^{OLM}(t)$, $g^{OLM}(t)$ et $\pi^{OLM}(t)$.

5. Ici aussi, nous ne détaillons pas l'expression de σ car elle n'est pas nécessaire à la résolution du problème.

C.5 Résolution du cas « feedback »

De nouveau, en premier, nous allons résoudre d'abord le problème entre t_a et ∞ . Le problème du joueur i est :

$$\max_{g_i(\cdot)} \int_{t_a}^{\infty} F_i(G, g_i) e^{-\rho(t-t_a)} dt, \quad (\text{C.59})$$

avec $F_i(G, g_i)$ (équation (3.8)), sous contrainte de la dynamique équation (3.12) avec $r = r_2$ et les conditions (3.11) et $G(t_a) = G_{t_a}$.

Pour chaque joueur i ($i = 1..M$) la valeur optimale de la ressource, $V^i(G)$, vérifie l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\rho V^i(G) = \max_{g_i} (F_i(G, g_i) - V_G^i(G)(r_2 - (1 - \alpha) \sum_{j=1}^M g_j)), \quad i = 1..M, \quad (\text{C.60})$$

avec $V^i(G)$ et g_j ($j \neq i$) :

$$V^i(G) = AG^2 + BG + C, \quad (\text{C.61})$$

$$g_j = a_j G + b_j. \quad (\text{C.62})$$

Afin de simplifier la description de la résolution analytique du problème, on suppose $M = 2$ joueurs (ou groupe d'agriculteurs) dans la suite. En premier, on va résoudre le problème pour le joueur 1 (i.e. $i = 1$). On trouve le taux d'extraction optimal du joueur 1, g_1^* , si l'on résout la partie droite de l'équation (C.60),

$$g_1^* = a_1 G + b_1. \quad (\text{C.63})$$

avec,

$$a_1 = \frac{b(c - 2(1 - \alpha)A)}{2}, \quad (\text{C.64})$$

$$b_1 = \frac{a - zb - b(1 - \alpha)B}{2}. \quad (\text{C.65})$$

En substituant g_1^* dans la partie droite de l'équation (C.60), et en égalisant les parties gauche et droite de celle-ci, nous allons obtenir les valeurs optimales des coefficients A, B et C de la fonction valeur V^i en fonction des variables a_2 et b_2 (voir équation (C.62)), coefficients du taux d'extraction du joueur 2.

De plus, en supposant que les joueurs sont symétriques (comme dans les équilibres résolus précédemment), $g_1(t) = g_2(t)$ pour tout $t = t_a.. \infty$, donc $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. En substituant A^* et B^* en (C.64), (C.65) et en prenant en compte cette symétrie entre les joueurs, on retrouve les valeurs optimales des coefficients du taux d'extraction du joueur 1, b_1^* et a_1^* :

$$b_1^* = \frac{(1 - \alpha)\rho(-a + zb) + (1 - \alpha)^2 a_1^*(-a + zb) + r_2(\rho + (1 - \alpha)(cb + 2a_1^*))}{(1 - \alpha)((1 - \alpha)(cb + 2a_1^*) + 2\sqrt{(\rho + 2(1 - \alpha)a_1^*)(\rho + 2(1 - \alpha)(cb + a_1^*))}}$$

$$+ \frac{r_2 \sqrt{(\rho + 2(1 - \alpha)a_1^*)(\rho + 2(1 - \alpha)(cb + a_1^*))}}{(1 - \alpha)((1 - \alpha)(cb + 2a_1^*) + 2\sqrt{(\rho + 2(1 - \alpha)a_1^*)(\rho + 2(1 - \alpha)(cb + a_1^*))})}. \quad (\text{C.66})$$

$$a_1^* = \frac{-\rho + (1 - \alpha)cb + \sqrt{\rho^2 + 4\rho(1 - \alpha)cb + (1 - \alpha)^2 c^2 b^2}}{6(1 - \alpha)}. \quad (\text{C.67})$$

Finalement, en substituant b_1^* et a_1^* dans l'équation de la dynamique de la ressource (3.12) avec $r = r_2$, on peut résoudre l'équation différentielle (3.12) avec la condition $G(t_a) = G_{ta}$ et obtenir les solutions optimales du problème $G^{FB+}(t)$, $g_1^{FB+}(t)$ et la fonction valeur optimale $V^*(G)$ entre t_a et ∞ :

$$G^{FB}(t) = e^{-2(1-\alpha)a_1^*(t-t_a)}(G_{ta} - G_\infty) + G_\infty, \quad (\text{C.68})$$

$$g_1^{FB}(t) = \frac{r}{2} + 2(1 - \alpha)a_1^* e^{-2(1-\alpha)a_1^*(t-t_a)}(G_{ta} - G_\infty),$$

et

$$V^+(G) = A^*G^2 + B^*G + C^*, \quad (\text{C.69})$$

avec,

$$G_\infty = \frac{r_2}{2(1 - \alpha)a_1^*} - \frac{b_1^*}{a_1^*} \quad (\text{C.70})$$

et b_1^* , a_1^* définis dans les équations (C.66) et (C.67).

Ensuite, nous allons résoudre le problème entre 0 et t_a . La fonction valeur du problème du joueur i , $V^i(t, G)$ ⁶ vérifie l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\rho V^i(t, G) - V_t^i(t, G) = \max_{g_i} (F_i(G, g_i) - V_G^i(G)(r_1 - (1 - \alpha) \sum_{j=1}^M g_j)), \quad i = 1..M, \quad (\text{C.71})$$

avec $V^i(G, t)$ et g_j ($j \neq i$) :

$$V^i(t, G) = A(t)G^2 + B(t)G + C(t), \quad (\text{C.72})$$

$$g_j(t) = a_j(t)G + b_j(t), \quad (\text{C.73})$$

et la condition transversale,

$$V^i(t_a, G_{ta}) = V^+(G_{ta}). \quad (\text{C.74})$$

L'expression $V^+(G_{ta})$ a été obtenue dans la première étape de la résolution et elle est décrite dans l'équation (C.69).

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser une procédure similaire à celles utilisées précédemment. La difficulté de la résolution réside dans le fait que les stratégies des joueurs

6. On rappelle que dans un problème avec horizon fini, la fonction valeur dépend de G et de t de façon indépendante.

dépendent du stock de la ressource G et des fonctions $a_1(t)$ et $b_1(t)$ de façon indépendantes. Ainsi, la résolution du problème est en grande partie numérique.

En premier, en supposant $M = 2$ agriculteurs, on retrouve le taux d'extraction optimal du joueur 1, $g_1^*(t)$, si l'on résout la partie droite de l'équation (C.71), pour $i = 1$. On retrouve l'expression (C.63) avec $a_1 = a_1(t)$, $b_1 = b_1(t)$, décrits dans les équations (C.64) et (C.65) avec $A = A(t)$ et $B = B(t)$, des fonctions qui dépendent de t .

En supposant maintenant que les joueurs sont symétriques, $g_1(t) = g_2(t)$ pour tout $t = 0..t_a$, on obtient $a_1(t) = a_2(t)$ et $b_1(t) = b_2(t)$. En substituant $g_1^*(t)$ dans la partie droite de l'équation (C.71), et en égalisant les parties gauche et droite de celle-ci, il faut résoudre 3 équations différentielles en $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$, coefficients de la fonction valeur $V(t, G)$, (voir équation (C.72)), avec les conditions finales :

$$A(t_a) = A^*, B(t_a) = B^*, C(t_a) = C^*,$$

issues de la condition transversale équation (C.74) :

$$V^-(G_{t_a}, t_a) = A(t_a)G_{t_a}^2 + B(t_a)G_{t_a} + C(t_a) = V^+(G_{t_a}).$$

A ce stade de la résolution, nous obtenons $A^*(t)$ et $B^*(t)$ par approximation numérique. En substituant $A^*(t)$ et $B^*(t)$ dans l'expression $g_1^*(t)$, on retrouve les valeurs optimales des coefficients du taux d'extraction, $b^*(t)$ et $a^*(t)$. Ensuite nous substituons ces valeurs dans l'équation de la dynamique de la ressource (3.12) avec $r = r_1$. Ainsi, nous obtenons numériquement les solutions optimales du problème entre 0 et t_a , $G^{FB-}(t)$, $g^{FB-}(t)$, avec la condition initiale $G(0) = G_0$ donné.

C.6 Démonstration des propositions

Proposition : A l'état stationnaire, l'externalité stratégique $G^{OL}(\infty)$ - $G^{FB}(\infty)$ est toujours positive.

Démonstration Il faut prouver que $G_{\infty}^{FB} - G_{\infty}^{OL} < 0$.

A partir des équations (3.17) et (3.18), on sait que

$$G_{\infty}^{FB} - G_{\infty}^{OL} = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{2(1-\alpha)a_1^*} - \frac{1}{M\rho} - \frac{1}{(1-\alpha)cb} + \frac{a}{cb} - \frac{z}{c} - \frac{b_1^*}{a_1^*} \right),$$

avec b_1^* , a_1^* définis dans les équations (C.66) et (C.67).

En substituant les valeurs optimaux de b_1^* et a_1^* (équations (C.65) et (C.64) et en simplifiant, on obtient que

$$G_{\infty}^{FB} - G_{\infty}^{OL} = \frac{F1}{F2}, \quad (C.75)$$

avec $F2$ décrit dans l'expression,

$$F2 = 2c\rho(2A^*(1-\alpha) + c),$$

puis

$$F1 = \frac{E1}{E2}, \quad (C.76)$$

avec,

$$E1 = c\left(\frac{a}{b} - z\right) + r_2 \frac{2}{b} 2A^* + 4A^* \left(\frac{a}{b} - z\right)(\alpha - 1)$$

et

$$E2 = -\rho \frac{2}{b} + 2c(\alpha - 1) + 6A^* - 12A^* \alpha + 6A^* \alpha^2.$$

D'une part $F2 > 0$ car $A^* < \frac{c}{2(1-\alpha)}$ (condition de stabilité de la solution « feedback »⁷). En substituant A^* en E1, E2, on obtient

$$E1 = -\frac{1}{6}(2\alpha c + \rho \frac{2}{b} - 2c - \sqrt{\omega})r_2 c^2 \quad (C.77)$$

et

$$E2 = -\rho 2b - \frac{1}{2}\sqrt{\omega}.$$

Ainsi, ω et b sont positifs par hypothèse, donc $E2 < 0$. De plus, si $(2(\alpha - 1)c + \rho \frac{2}{b}) < 0$ donc l'expression entre parenthèse dans l'équation (C.77)

$$(2(\alpha - 1)c + \rho \frac{2}{b}) - \sqrt{\omega} \quad (C.78)$$

E1 est négative. Si $(2(\alpha - 1)c + \rho \frac{2}{b}) > 0$, en évaluant au carré l'expression entre parenthèse

$$(2(\alpha - 1)c + \rho \frac{2}{b}) - \sqrt{\omega}, \quad (C.79)$$

on trouve $12\rho bc(\alpha - 1) < 0$ donc par monotonie de la fonction carré l'expression (C.79) est inférieur à 0. Dans les deux cas, $E1 > 0$.

Ainsi, si $E1 > 0$ et $E2 < 0$, $F1 < 0$ (décrit équation (C.76)). Comme $F1 < 0$ et $F2 > 0$, on conclut à partir de l'équation (C.75) que $G_\infty^{FB} - G_\infty^{OL} < 0$, ce que l'on voulait prouver. . \square

7. Cette condition est issue de Rubio et Casino [74] et elle est nécessaire afin d'assurer la stabilité du système linéaire d'équations différentielles.

Annexes correspondant au chapitre 4

D.1 Application numérique : Recueil et transformation des données

D.1.1 Classification des années par types de printemps/été climatique

A partir des résultats du modèle biophysique, nous disposons du bilan hydrique (comme Pluie, Évapotranspiration réelle (ETR) entre autres) dans la période d'irrigation par culture, par type de sol et par zones entre 1991-2007. Afin de classifier les années en fonction du type (sec, normal ou humide) de printemps et d'été, nous choisissons deux cultures de référence : le blé tendre pour le printemps et la betterave pour l'été et nous calculons pour chaque année le bilan Pluie-ETR, qui sera notre indice de sécheresse. Ensuite nous classifions les années de façon à avoir des scénarios contrastés. Voici la valeur des bornes choisies pour les types de saisons climatiques :

Pluie-ETP	Sec	Normal	Humide
Blé tendre	<60	-60 à 35	>35
Betterave	<-220	-220 à -120	>-120

Tableau D.1 – Types de saison climatique.

D.1.2 Réalisation de la courbe de réponse à l'eau

Dans les Figures suivantes, nous pouvons voir les nuages de points dont on dispose et les courbes de réponse à l'eau que l'on utilisera dans notre modèle du blé tendre, orge de printemps et betterave sur un sol moyen/profond par type de printemps/été (sec, normal, humide). En bleu, nous pouvons voir les observations et en rouge les différentes courbes de réponse à l'eau réalisées à partir d'une régression quadratique sur les observations. Nous montrons aussi les Tableaux de sortie de la régression quadratique. Dans la colonne « coeff », nous obtenons les coefficients de la courbe et dans la colonne « $P > |t|$ », nous observons que les coefficients sont tous significatifs (valeur colonne moins de 5%).

Blé tendre

1. Printemps sec

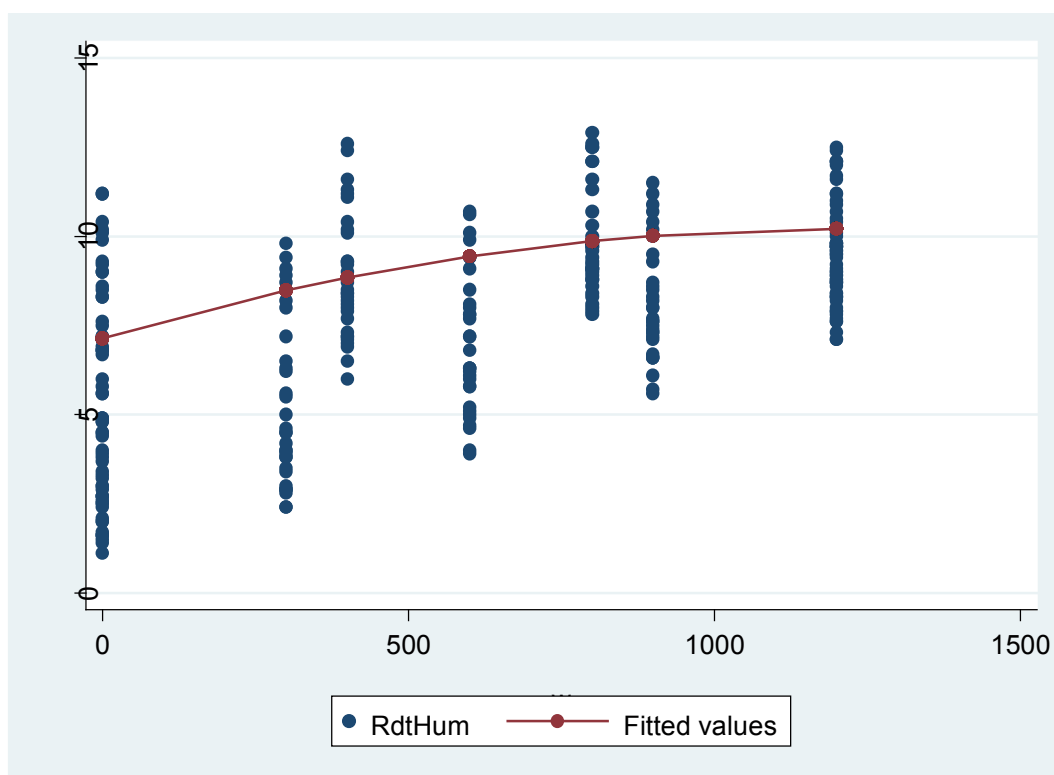


FIGURE D.1 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) du blé tendre sur sol moyen/profond en type d'année sèche.

Source	SS	df	MS			
Model	176.51571	2	88.2578551	Number of obs =	125	
Residual	378.031178	122	3.09861622	F(2, 122) =	28.48	
Total	554.546889	124	4.47215233	Prob > F	= 0.0000	
				R-squared	= 0.3183	
				Adj R-squared	= 0.3071	
				Root MSE	= 1.7603	
rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0051176	.0012194	4.20	0.000	.0027036	.0075315
w2	-2.14e-06	9.86e-07	-2.17	0.032	-4.09e-06	-1.87e-07
_cons	7.144896	.3032466	23.56	0.000	6.544589	7.745203

FIGURE D.2 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

2. Printemps normal

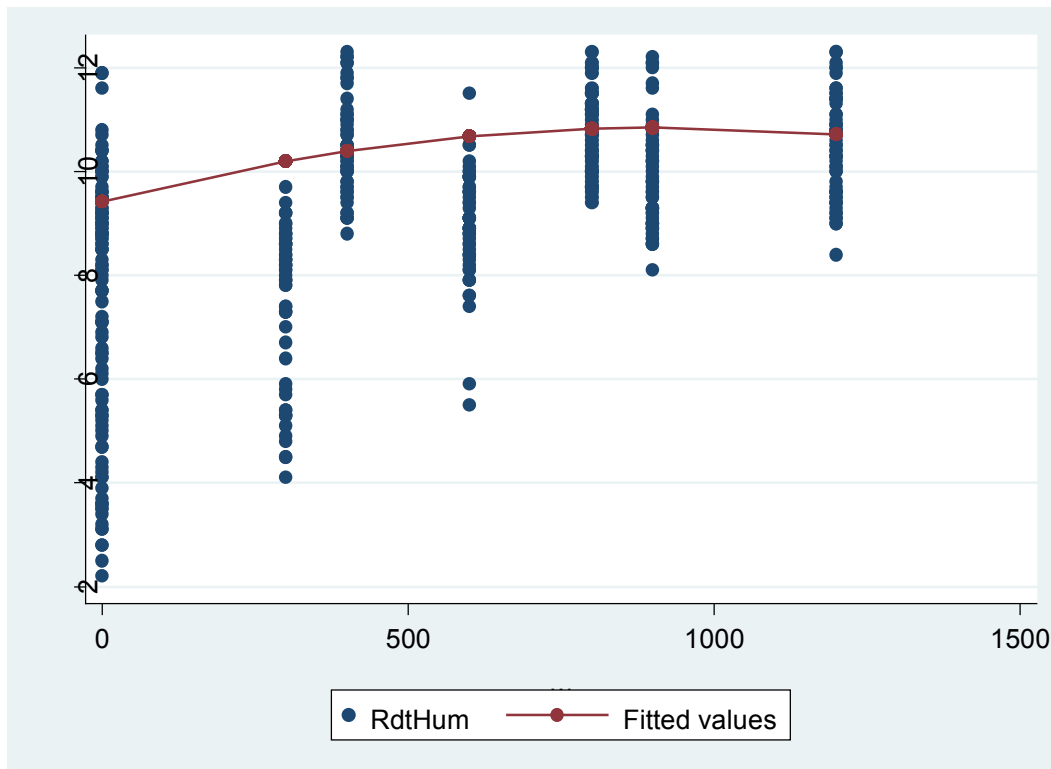


FIGURE D.3 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l’eau (ligne rouge) du blé tendre sur sol moyen/profond en type d’année normale.

Source	SS	df	MS			
Model	57.9136146	2	28.9568073	Number of obs =	173	
Residual	146.401061	170	.861182712	F(2, 170) =	33.62	
				Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.2835	
				Adj R-squared =	0.2750	
				Root MSE =	.928	
rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0031337	.0005348	5.86	0.000	.0020779	.0041895
w2	-1.71e-06	4.76e-07	-3.60	0.000	-2.65e-06	-7.71e-07
_cons	9.415315	.1214989	77.49	0.000	9.175474	9.655156

FIGURE D.4 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

3. Printemps humide

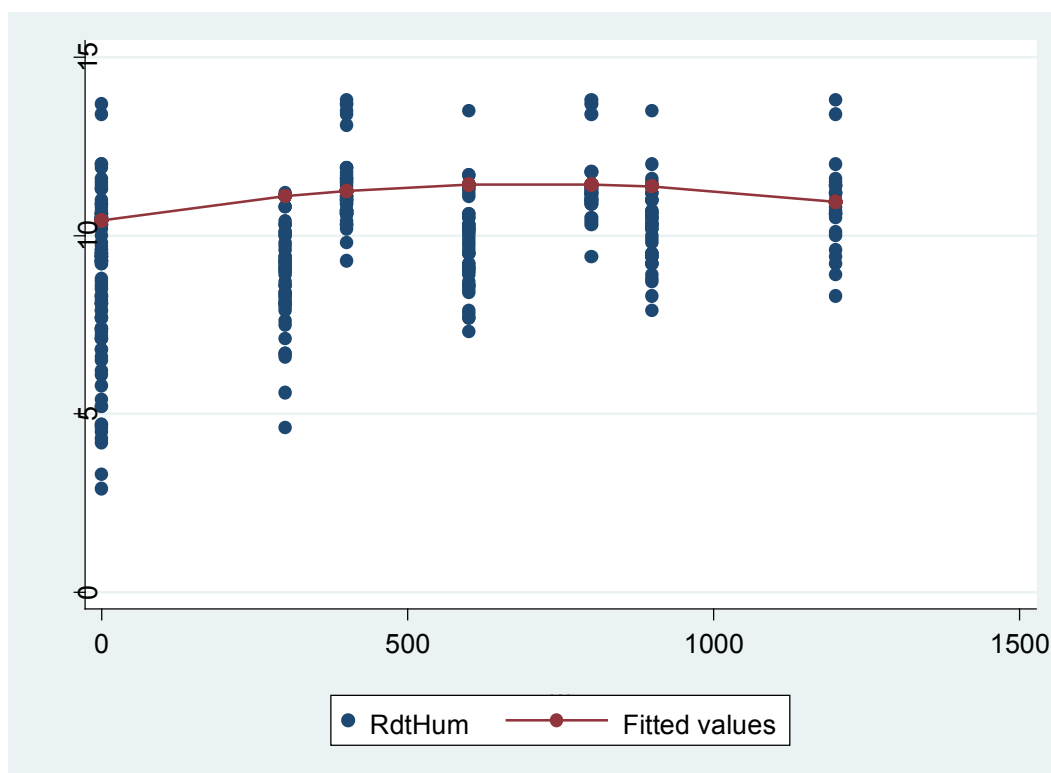


FIGURE D.5 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) du blé tendre sur sol moyen/profond en type d'année humide.

Source	SS	df	MS			
Model	22.7218424	2	11.3609212	Number of obs =	117	
Residual	130.119344	114	1.14139775	F(2, 114) =	9.95	
Total	152.841186	116	1.31759643	Prob > F	= 0.0001	
				R-squared	= 0.1487	
				Adj R-squared	= 0.1337	
				Root MSE	= 1.0684	
rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0029218	.0008057	3.63	0.000	.0013258	.0045178
w2	-2.06e-06	8.68e-07	-2.38	0.019	-3.78e-06	-3.45e-07
_cons	10.42152	.1525615	68.31	0.000	10.1193	10.72375

FIGURE D.6 – Tableau de sortie de la régression quadratique.

Orge de printemps

1. Printemps sec

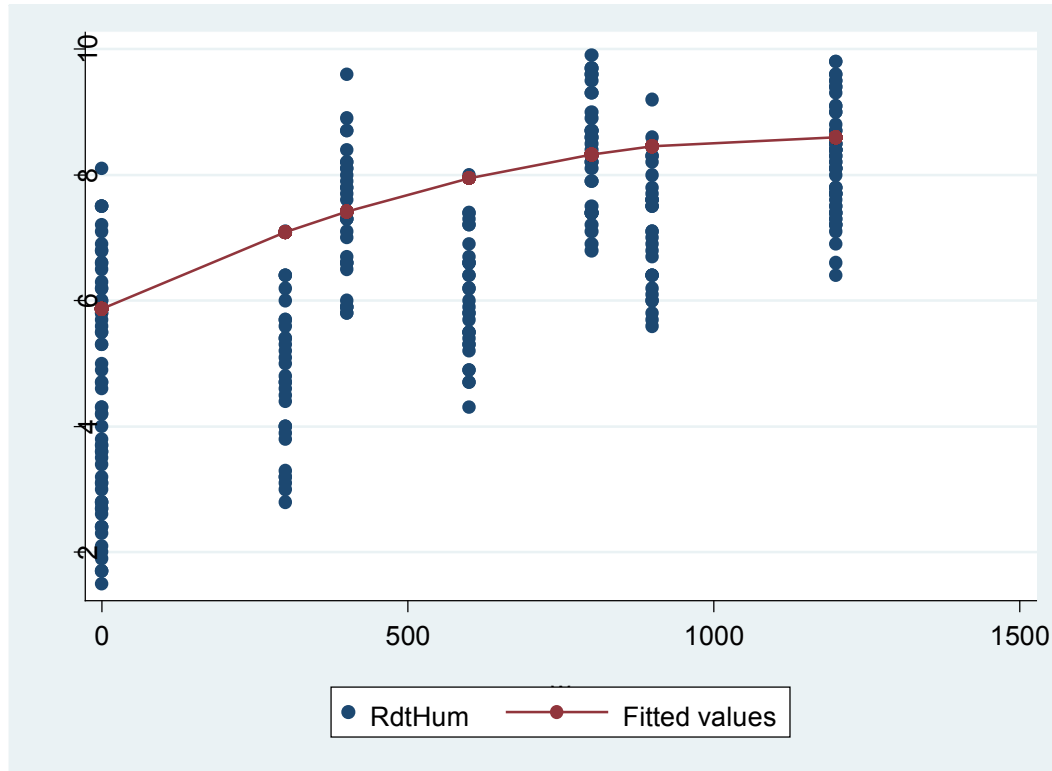


FIGURE D.7 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l’eau (ligne rouge) de l’orge de printemps sur sol moyen/profond en type d’année sèche.

Source	SS	df	MS			
Model	133.844762	2	66.9223809	Number of obs =	119	
Residual	124.959614	116	1.07723805	F(2, 116) =	62.12	
				Prob > F	= 0.0000	
				R-squared	= 0.5172	
				Adj R-squared	= 0.5088	
				Root MSE	= 1.0379	
Total	258.804375	118	2.19325742			
rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.004653	.0007293	6.38	0.000	.0032086	.0060974
w2	-1.99e-06	6.00e-07	-3.32	0.001	-3.18e-06	-8.01e-07
_cons	5.876013	.1789212	32.84	0.000	5.521637	6.230389

FIGURE D.8 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

2. Printemps normal

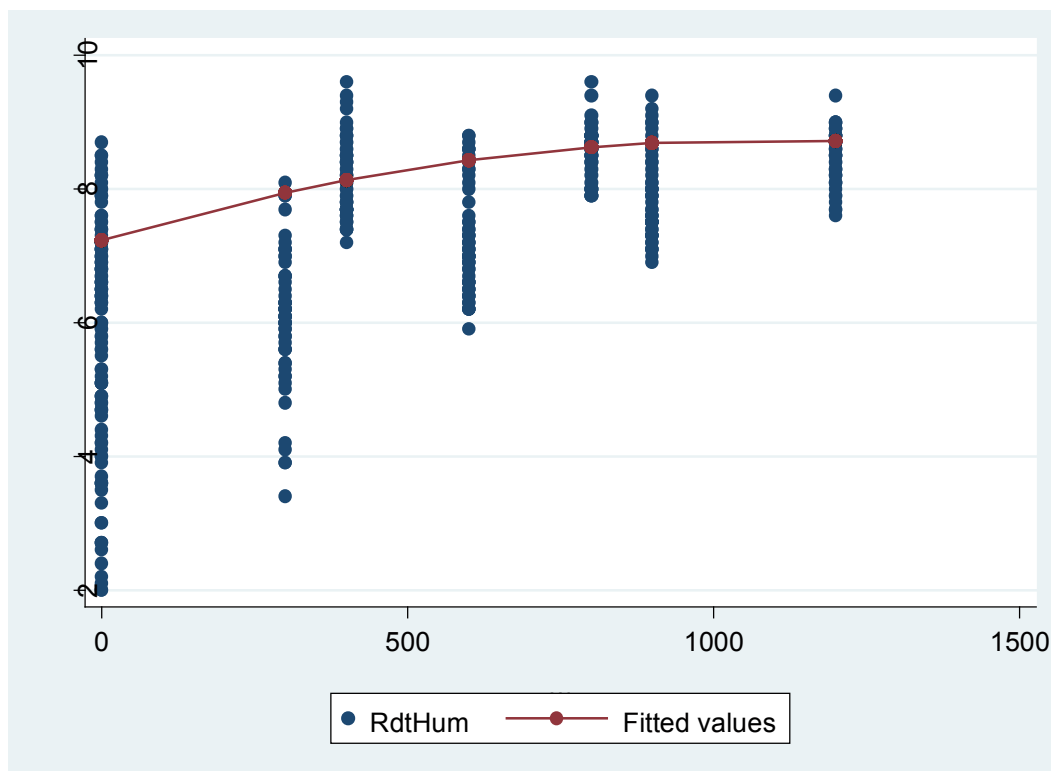


FIGURE D.9 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de l'orge de printemps sur sol moyen/profond en type d'année normale.

Source	SS	df	MS			
Model	50.5498004	2	25.2749002	Number of obs =	154	
Residual	50.913575	151	.337175993	F(2, 151) =	74.96	
Total	101.463375	153	.663159316	Prob > F	= 0.0000	
				R-squared	= 0.4982	
				Adj R-squared	= 0.4916	
				Root MSE	= .58067	

rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.002735	.0003649	7.50	0.000	.002014	.0034559
w2	-1.25e-06	3.57e-07	-3.50	0.001	-1.95e-06	-5.44e-07
_cons	7.238088	.0763662	94.78	0.000	7.087203	7.388972

FIGURE D.10 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

3. Printemps humide

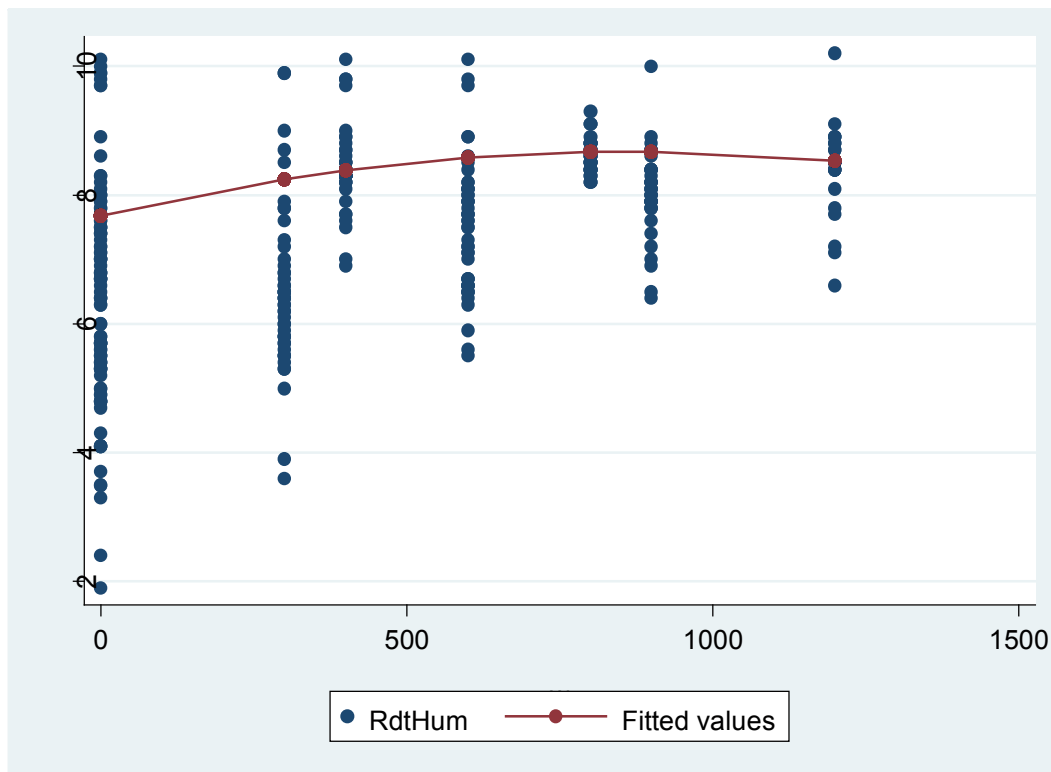


FIGURE D.11 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l’eau (ligne rouge) de l’orge de printemps sur sol moyen/profond en type d’année humide.

Source	SS	df	MS			
Model	20.3882608	2	10.1941304	Number of obs =	120	
Residual	79.2816566	117	.677620997	F(2, 117) =	15.04	
Total	99.6699175	119	.837562332	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.2046	
				Adj R-squared =	0.1910	
				Root MSE =	.82318	

rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0022922	.0006509	3.52	0.001	.0010032	.0035812
w2	-1.32e-06	7.32e-07	-1.80	0.075	-2.76e-06	1.33e-07
_cons	7.67778	.1176547	65.26	0.000	7.444771	7.910789

FIGURE D.12 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

Betterave

1. Été sec

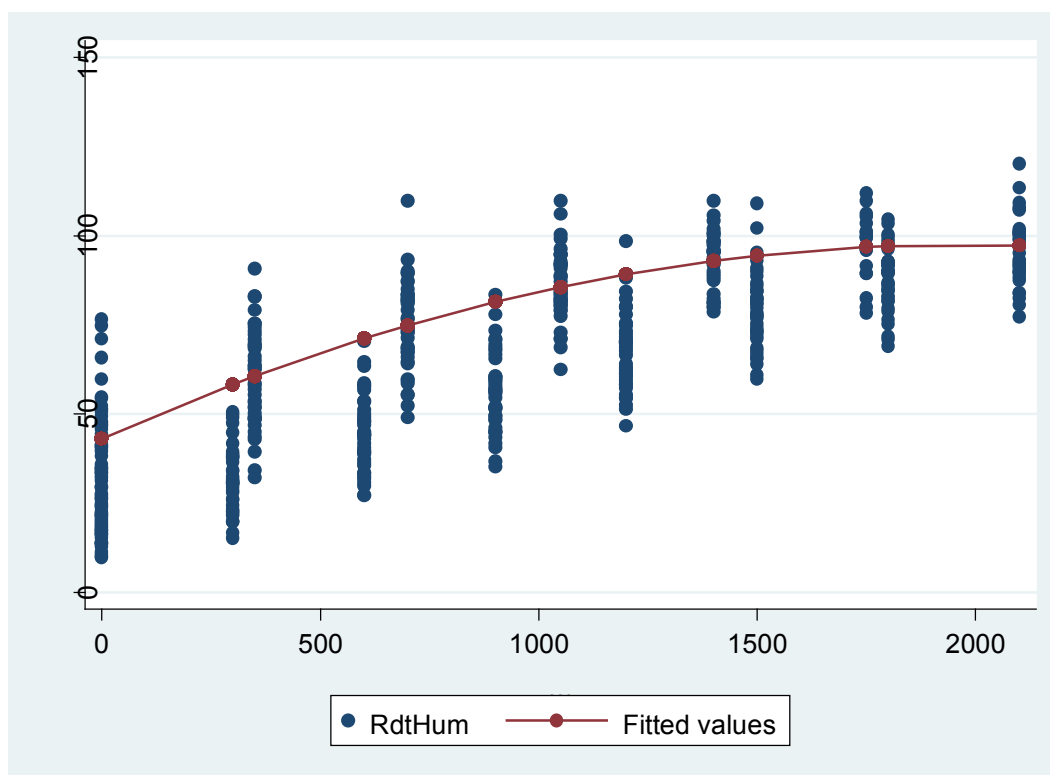


FIGURE D.13 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de la betterave sur sol moyen/profond en type d'année sèche.

Source	SS	df	MS			
Model	73011.189	2	36505.5945	Number of obs =	212	
Residual	29348.0094	209	140.421098	F(2, 209) =	259.97	
				Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.7133	
				Adj R-squared =	0.7105	
				Root MSE =	11.85	
rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0554281	.0048382	11.46	0.000	.0458902	.064966
w2	-.0000141	2.83e-06	-4.97	0.000	-.0000196	-8.48e-06
_cons	42.94781	1.710531	25.11	0.000	39.57571	46.31992

FIGURE D.14 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

2. Été normal

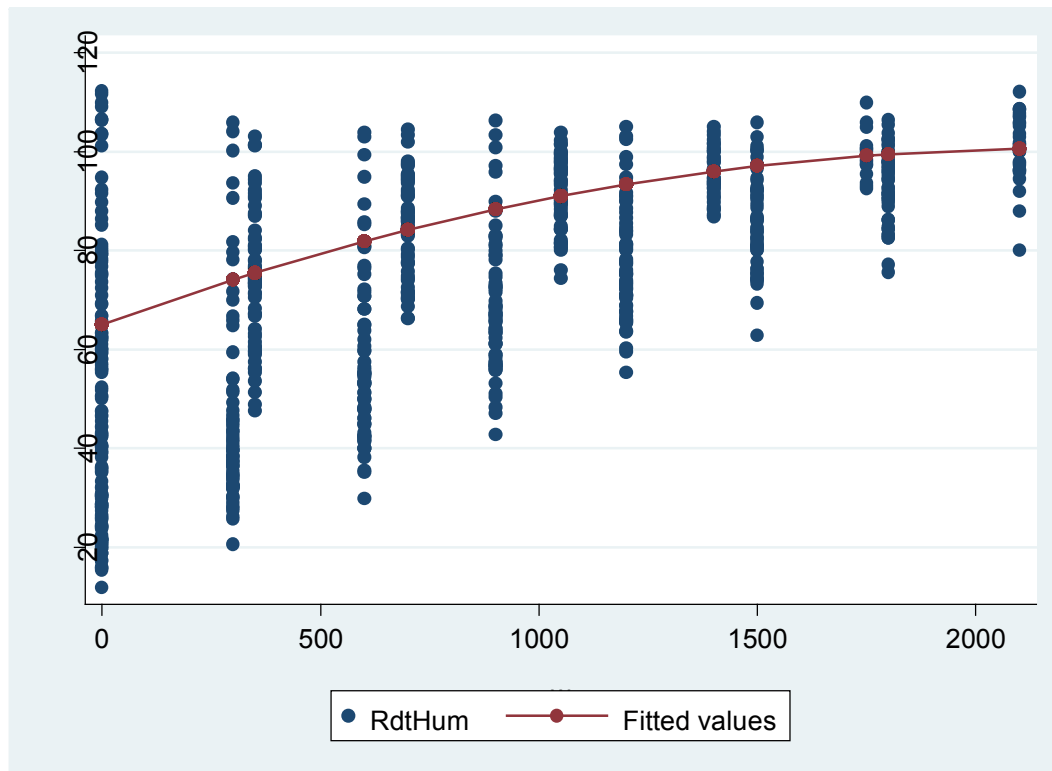


FIGURE D.15 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de la betterave sur sol moyen/profond en type d'année normale.

Source	SS	df	MS			
Model	40183.8653	2	20091.9327	Number of obs =	309	
Residual	56637.2271	306	185.088978	F(2, 306) =	108.55	
Total	96821.0924	308	314.354196	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.4150	
				Adj R-squared =	0.4112	
				Root MSE =	13.605	

rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0325382	.004551	7.15	0.000	.023583	.0414934
w2	-7.43e-06	2.88e-06	-2.58	0.010	-.0000131	-1.75e-06
_cons	65.02174	1.462459	44.46	0.000	62.14399	67.89948

FIGURE D.16 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

3. Été humide

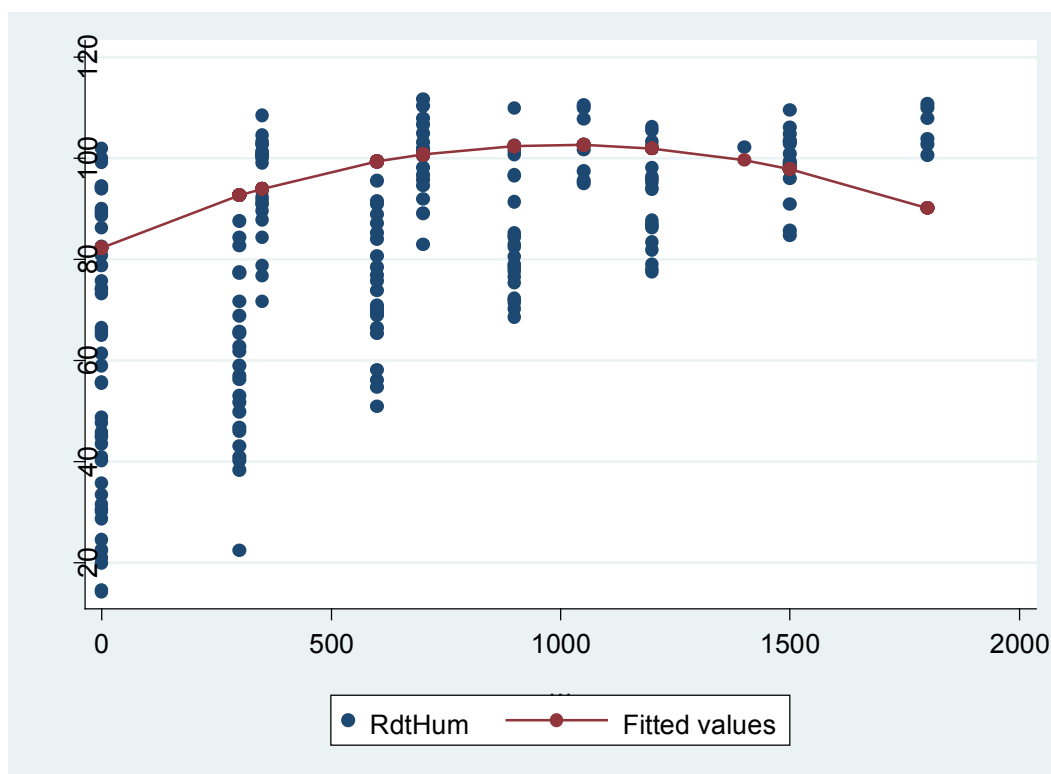


FIGURE D.17 – Observations (en bleu) et courbe de réponse à l'eau (ligne rouge) de la betterave sur sol moyen/profond en type d'année humide.

Source	SS	df	MS			
Model	4547.66753	2	2273.83377	Number of obs =	74	
Residual	8089.73215	71	113.939889	F(2, 71) =	19.96	
				Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.3599	
				Adj R-squared =	0.3418	
				Root MSE =	10.674	
Total	12637.3997	73	173.115064			
rdthum	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
w	.0404101	.0095222	4.24	0.000	.0214233	.0593969
w2	-.00002	8.91e-06	-2.25	0.028	-.0000378	-2.27e-06
_cons	82.33762	2.109714	39.03	0.000	78.13097	86.54427

FIGURE D.18 – Tableau de sortie de la regression quadratique.

D.2 Résultats scénarios augmentation du coût de pompage

Nous pouvons voir ci-dessous les résultats optimaux de différents scénarios obtenus en multipliant le coût de pompage par $k=5$, 10 et 20 (cf. Figures D.2, D.3, D.4).

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.60
α_2	Part surface orge		0.24
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	804
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	919
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	2 077
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	126 325
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	86 610.15
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	85.77
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.12
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	91.7

Tableau D.2 – Résultats scénario augmentation coût de pompage x5.

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.60
α_2	Part surface orge		0.24
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	693
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	743
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	1 965
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	110 815
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	83 231.32
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	75.24
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.16
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	91.75

Tableau D.3 – Résultats scénario augmentation coût de pompage x10.

Paramètres	Description	Unité	Valeur
α_1	Part surface blé		0.60
α_2	Part surface orge		0.24
α_3	Part surface betterave		0.16
w_1	Vol. d'eau blé	m^3/ha	469
w_2	Vol. d'eau orge	m^3/ha	392
w_3	Vol. d'eau betterave	m^3/ha	1 742
w_{TOT}	Vol. d'eau total exploitation	m^3	79 860
VAB	Valeur ajoutée brute annuelle	Euros	78 149.80
w_{GC}	Vol. d'eau total GC-type bet.	millions de m^3	54.22
H_1	Niveau nappe fin de printemps	m	92.25
H_2	Niveau nappe fin d'été	m	91.85

Tableau D.4 – Résultats scénario augmentation coût de pompage x20.

VU et PERMIS D'IMPRIMER

A Montpellier, le

Le Président de l'Université Montpellier I

Philippe Augé

GESTION D'UNE RESSOURCE EN EAUX SOUTERRAINES SUJETTE AUX SÉCHERESSES : ANALYSE DES STRATÉGIES D'ADAPTATION.

Résumé : La gestion d'une ressource en eau souterraine utilisée pour l'irrigation est un phénomène dépendant de plusieurs facteurs et concernant différents acteurs (utilisateurs et gestionnaire). En cas d'aléa climatique comme la sécheresse, gérer une ressource devient un problème plus complexe. Il est justement important de mieux comprendre et d'anticiper les sécheresses car ils peuvent avoir des impacts significatifs sur l'activité économique agricole et sur les niveaux de la ressource. Pour cela, le type d'information dont disposent les utilisateurs et/ou les gestionnaire est essentiel. Dans les chapitres 2 et 3, nous analysons l'impact d'une sécheresse « hydrologique » sur la gestion optimale de la ressource, avant et après son arrivée. Dans le chapitre 2, nous montrons comment le gestionnaire de la ressource peut s'adapter le mieux possible à cette sécheresse selon l'information dont il dispose. Dans le chapitre 3, nous montrons que la prise en compte des interactions stratégiques et dynamiques entre les utilisateurs de la ressource entraîne une exploitation moins efficace de la ressource. Nous appliquons les modèles des chapitres 2 et 3 à l'aquifère La Mancha Occidentale au Sud de l'Espagne. Dans le chapitre 4, nous analysons l'impact d'une sécheresse « agronomique » sur la gestion optimale d'une exploitation agricole située dans la zone de la Beauce centrale, en France. Nous prenons en compte des informations de caractère hydrologique, agronomique et économique. En particulier, nous étudions l'impact d'une année sèche sur la valeur ajoutée de l'exploitation et sur la ressource en eau utilisée. De plus, nous nous intéressons au comportement stratégique que les agriculteurs peuvent avoir en année sèche, que ce soit sans ou avec restrictions des usages de l'eau. Nous montrons qu'une politique de régulation est nécessaire pour éviter la surexploitation de la nappe en année sèche.

Mots clés : Ressource en eau souterraine, agriculture irriguée, gestion efficace, sécheresses, stratégies d'adaptation, comportement d'extraction, choix d'assolement.

GROUNDWATER RESOURCE MANAGEMENT SUBJECT TO DROUGHTS : ANALYSIS OF ADAPTATION STRATEGIES.

Abstract : The management of a groundwater resource used for irrigation is a phenomenon that depends on several factors and concerning various actors (users and manager). Moreover, the resource can be subject to droughts. In this case, the management of the resource becomes a more complex problem. Adaptation to droughts is important because they can have significant impacts on agricultural activity and on the water table of the resource. This adaptation hinges crucially on the information available to the manager and the resource users. In chapters 2 and 3, we analyze the impact of an hydrological drought on the optimal management of the resource, before and after its arrival. In particular, in chapter 2, we show how the manager can adapt as good as possible to this drought according to the nature of information he has. In chapter 3, we show that taking into account strategic and dynamic interactions between the users of the ressource leads to less efficient resource use. We apply models of chapters 2 and 3 to the aquifer Western La Mancha, in Spain. In chapter 4, we study the impact of an agronomic drought on the optimal management of a farm in the area of Central Beauce, in France. We take into account hydrological, agronomic and economic informations. In particular, we analyze the impact of a dry period on the annual benefits of the farm and on the groundwater resource level. Furthermore, we study optimal strategic behavior of farmers in a dry year, whether they are subject to water restrictions or not. We show that a regulation policy is necessary to avoid the overexploitation of the ressource in a dry year.

Key words : Groundwater resource management, irrigated agriculture, drought, adaptation strategies, pumping behavior, choice of land use.

Discipline : Sciences Économiques.

Laboratoire d'accueil : LAMETA - Laboratoire Montpellierain d'Économie Théorique et Appliquée.