



HAL
open science

D'oxymore en oxymore : du développement durable au contrôle complexe

S. Martin

► **To cite this version:**

S. Martin. D'oxymore en oxymore : du développement durable au contrôle complexe. Sciences de l'environnement. Habilitation à diriger des recherches en mathématiques appliquées, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand, 2015. tel-02601373

HAL Id: tel-02601373

<https://hal.inrae.fr/tel-02601373>

Submitted on 16 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL CLERMONT-FERRAND

Sophie MARTIN

*Laboratoire d'Ingénierie pour les Systèmes Complexes
Irstea - 9, avenue Blaise Pascal
CS 20085, 63178 Aubière*

D'OXYMORE EN OXYMORE :
DU DÉVELOPPEMENT DURABLE AU
CONTRÔLE COMPLEXE

Synthèse de l'activité scientifique en vue de l'obtention de l'HABILITATION

À DIRIGER DES RECHERCHES en MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

soutenue le 15 janvier 2015 devant le jury composé de :

M.	AUBIN JEAN-PIERRE	Professeur émérite Université Paris-Dauphine	(Rapporteur)
M.	BAYEN ALEXANDRE	Chancellor Professor University of California at Berkeley	(Rapporteur)
M.	CHUPIN LAURENT	Professeur Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand	(Examineur)
M.	DEFFUANT GUILLAUME	Directeur de recherche Irstea Clermont-Ferrand	(Examineur)
M ^{me}	FRANKOWSKA HÉLÈNE	Directeur de recherche CNRS Université Paris 6	(Examineur)
M.	RAPAPORT ALAIN	Directeur de Recherche INRA Montpellier	(Rapporteur)
M ^{me}	TICHIT MURIEL	Directeur de recherche INRA AgroParisTech	(Président)

Remerciements

J E voudrais exprimer mes plus profonds remerciements à mon tuteur à la fois discret et attentif, attitude qui donne confiance et motive pour la rédaction de ce document. Je remercie également très chaleureusement les rapporteurs de ce mémoire pour leurs remarques et suggestions qui sont un élan pour l'avenir. Ma reconnaissance va enfin à tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté aux travaux rassemblés dans ce mémoire.

Aux membres du LISC actuels et anciens, aux membres de LASTRE, aux membres des projets auxquels j'ai participé, aux co-auteurs des articles, aux interlocuteurs dans des discussions informelles, je souhaite dire que la rédaction de ce document a eu comme effet agréable de me remémorer de nombreuses scènes en leur compagnie, de rires, de réussites, de déceptions aussi, d'espoirs. Les travaux décrits dans ce mémoire sont le fruit des opportunités d'échanges qu'ils m'ont offertes. J'ai ainsi pu admirer des raisonnements sans faille, des pensées bien construites, des manières d'être assumées, des choix de vie courageux. J'ai pu participer à des projets dynamiques, des batailles vaines, des travaux bien menés, des découvertes inattendues, des échecs décevants ; j'ai pu tracer mon propre chemin sous des regards bienveillants, exigeants et constructifs ; j'ai pu suggérer des directions de recherche à des esprits déterminés, critiques et sincères. Merci.

Table des matières

Introduction générale	1
Avant-propos	1
Le fil directeur de mes recherches, les différentes questions abordées et les perspectives	3
1 Du concept à l'évaluation dans les modèles : première étape, la formalisation mathématique de la résilience	5
1.1 Le concept de résilience	7
1.1.1 Étymologie	7
1.1.2 De nombreux domaines d'utilisation	7
1.1.3 Le concept de résilience en écologie	7
1.2 Définitions opérationnelles dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux basées sur le concept d'équilibre	8
1.2.1 Modèles sous forme d'équations différentielles	9
1.2.2 Modèles individus-centrés : mesure basée sur la durée d'une évolution simulée	9
1.2.3 Limites : systèmes à l'équilibre et propriétés d'intérêt correspondant à une réunion de bassins d'attraction	9
1.3 Extension des définitions opérationnelles dans le cadre des inclusions différentielles	10
1.3.1 Mesure de résilience proposée	10
1.3.2 La mise en œuvre dans le cadre mathématique de la théorie de la viabilité	10
Conclusion	14
La mesure proposée est en accord avec la définition conceptuelle d'Holling . .	14
La définition proposée étend des mesures connues	14
Les limites pour la mise en œuvre	16
2 Du concept à l'évaluation dans les modèles : seconde étape, le calcul	17
2.1 Exemples d'évaluation de résilience dans des modèles de systèmes écologiques et sociaux	19
2.1.1 Eutrophisation des lacs	19
2.1.2 Gestion de pâturage	25
2.1.3 Compétition entre langues	28
2.1.4 Activité touristique et qualité de l'environnement	31
2.2 Calculs de noyaux de viabilité et de bassins de capture	35
2.2.1 Descriptions exactes	35
2.2.2 Des algorithmes d'approximation	38
2.2.3 Lien avec les algorithmes de résolution de problème d'optimisation . .	41
2.3 Méthodes de détermination d'évolutions viables ou résilientes particulières . .	44
2.3.1 Evolutions lentes	45
2.3.2 Evolutions éloignées des frontières	48

Conclusion	52
Résilience effectivement mesurée des dans modèles de systèmes écologiques et sociaux	52
La nécessité d'améliorer les performances des algorithmes d'approximation des noyaux de viabilité et bassins de capture	52
La richesse des stratégies de contrôle viables	53
3 Distinguer des politiques de gestion pouvant être qualifiées de durables dans le cadre de la théorie de la viabilité	55
3.1 Exemples de critères classiques pour évaluer la durabilité	57
3.2 Avec les outils de la théorie de la viabilité, pas de hiérarchisation des critères correspondant aux trois piliers	58
3.3 Prise en compte de l'équité intergénérationnelle	58
3.4 Exemple d'évaluation de politiques de gestion durables : la préservation de la forêt à Madagascar	60
3.4.1 La dynamique du système	60
3.4.2 Les enjeux écologiques et sociaux traduits comme un ensemble de contraintes	61
3.4.3 Les valeurs des paramètres	62
3.4.4 Résultats : évaluation de la durabilité de la situation actuelle du corridor forestier de Fianarantsoa	62
Conclusion	64
Proposition de critères de durabilité pertinents	64
Détermination des transferts monétaires nécessaires pour assurer la durabilité dans le cas d'un modèle de préservation de la forêt malgache	64
4 Le test des politiques d'actions viables ou résilientes obtenues	65
4.1 Cas relativement bien balisé, le Camembert, et test sur chaîne pilote	67
4.1.1 Un modèle d'affinage de Camembert issu de la littérature	67
4.1.2 Description de la dynamique : les modifications du modèle d'Helias	68
4.1.3 Description des contraintes et des cibles	70
4.1.4 Résultats	71
4.1.5 Validation	71
4.2 Cas de système écologique et social : l'ambition de l'intégration d'un agent expert viabilité dans un outil d'aide à la gestion participative	72
Conclusion	73
5 Perspectives : la résilience dans les systèmes complexes	75
5.1 Mon expérience « Systèmes Complexes »	77
5.1.1 Des projets pluridisciplinaires	77
5.1.2 Des définitions, des caractéristiques	77
5.1.3 Des questions de fond à investiguer	77
5.2 Mon projet de recherche	78
5.2.1 Contexte	78
5.2.2 Problématique : lier architecture et propriétés	78
5.2.3 Stratégie	78

Table des figures

1.1	Un lac peut être dans un état d'eau claire (a), ou dans un état d'eau trouble (b)	8
1.2	L'ensemble de contraintes représentant la propriété étudiée, K , est colorié en gris.	12
1.3	Représentation des perturbations envisagées. En gris l'ensemble des contraintes, K et en jaune le noyau de viabilité, $Viab_S(K)$	12
1.4	Le bassin de capture du noyau de viabilité, $Capt_S(\mathcal{K}, Viab_S(K))$, est colorié en rose, le noyau de viabilité en jaune.	13
1.5	Modèle de savane (1.6) avec une variable d'état s , la biomasse aérienne des plantes de la savane et la pression de pâturage constante considérée comme paramètre γ_g	15
1.6	Evaluation du coût de restauration (Fig. 1.6(b)) pour le modèle (1.6), pour la propriété décrite par l'ensemble K représenté dans la figure 1.6(a) et pour la fonction de coût correspondant au temps passé hors du noyau de viabilité. . .	15
2.1	Trois types de lacs en fonction de la valeur du paramètre b dans le modèle (2.1).	20
2.2	Noyaux de viabilité d'un lac hystérésique ($b = 0.8$).	21
2.3	Noyaux de viabilité d'un lac irréversible ($b = 0.4$).	22
2.4	Lorsque l'état du système est $x = (L, p)$, représentation de l'ensemble des états atteignables suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées : $y = (L, p')$ avec $p' \in [p, p + \alpha]$	22
2.5	La fonction de coût comporte deux termes : la zone où le coût écologique est non nul est coloriée en vert, celle où le coût économique est non nul est hachurée.	23
2.6	Lignes de niveau de la fonction de coût (2.9) avec $c_1 = 0.3$ et $c_2 = 17$. Dans la zone grise correspondant au noyau de viabilité, le coût est nul. A partir d'un point de la zone où le coût est infini, le noyau de viabilité ne peut être atteint, la propriété ne peut être restaurée et préservée.	24
2.7	Lignes de niveau de la résilience définie par (2.12) pour un lac irréversible ($b = 0.4$).	24
2.8	Les « bons » équilibres asymptotiquement stables (en gris) correspondent aux hauts niveaux de biomasse et les « mauvais » à une biomasse nulle (en noir).	26
2.9	Modèle de savane (2.15) avec deux variables d'état (s, γ_g), la biomasse des tiges et la pression de pâturage et un contrôle la vitesse de variation de la pression de pâturage; la propriété du système étudiée est décrite par un voisinage des équilibres associés à une biomasse élevée; la fonction de coût est le temps passé hors du noyau de viabilité.	26
2.10	Modèle de savane (2.15) avec deux variables d'état (s, γ_g), la biomasse de tiges et la pression de pâturage et un contrôle la vitesse de variation de la pression de pâturage; la propriété du système étudiée est décrite par une biomasse comprise entre deux bornes, $K = [0; +\infty] \times [0.05; 0.18]$; la fonction de coût est le temps passé hors du noyau de viabilité.	27

2.11	L'ensemble de contraintes K	29
2.12	Quatre vues 3D du domaine de viabilité de l'ensemble K (2.22) pour la dynamique (2.21).	30
2.13	Ensembles de niveau de la fonction temps passé hors du domaine de viabilité. Le domaine de viabilité est représenté en noir (c'est celui de la figure 2.12). Les ensembles de niveau de la fonction de coût sont représentés par des couleurs de plus en plus claires lorsque ce coût augmente.	31
2.14	Les valeurs des paramètres sont celles de (2.25) avec $a = 6$ et $\epsilon = 0.1$. L'attracteur est ($\bar{T} \approx 0.125$, $\bar{E} \approx 0.526$, $\bar{C} \approx 0.125$). Les régions foncées représentent le noyau de viabilité pour la dynamique (2.24) et l'ensemble des contraintes $K = [\bar{T} - \Delta; \bar{T} + \Delta] \times [\bar{E} - \Delta; \bar{E} + \Delta] \times [\bar{C} - \Delta; \bar{C} + \Delta]$, $\Delta = 0.075$ pour la figure (a), $\Delta = 0.05$ pour la figure (b) et $\Delta = 0.025$ pour la figure (c). En gris clair, le noyau de viabilité associé à $\Delta = 0.075$	33
2.15	Les valeurs des paramètres sont celles de (2.25) avec $a = 6$ et $\epsilon = 0.13$. L'attracteur est ($\bar{T} \approx 0.125$, $\bar{E} \approx 0.526$, $\bar{C} \approx 0.125$). Les régions foncées représentent le noyau de viabilité pour la dynamique (2.24) et l'ensemble des contraintes $K = [\bar{T} - \Delta; \bar{T} + \Delta] \times [\bar{E} - \Delta; \bar{E} + \Delta] \times [\bar{C} - \Delta; \bar{C} + \Delta]$, $\Delta = 0.075$ pour la figure (a), $\Delta = 0.05$ pour la figure (b) et $\Delta = 0.025$ pour la figure (c), le noyau de viabilité est vide. En gris clair, le noyau de viabilité associé à $\Delta = 0.075$	33
2.16	(a) En noir, l'ensemble des contraintes et le noyau de viabilité de la figure 2.14 (c). (b)... (i) Le dégradé de gris représente les bassins de capture successifs pour huit valeurs croissantes du temps maximal d'atteinte du noyau de viabilité $t = 10, \dots, t = 80$	34
2.17	Ensemble E colorié en bleu, C_1 et C_2 tracés en noir	37
2.18	Comparaison des résultats obtenus par l'algorithme de viabilité et le schéma <i>ultra-bee</i> pour le problème de consommation (2.56). A gauche, 50 points par axe, à droite, 100 points par axe. La frontière du noyau de viabilité exact est tracée par une ligne noire.	44
2.19	Exemple d'une évolution viable lente	47
2.20	La situation initiale appartient au noyau de viabilité avec $\tau_{max} = 10^7$. L'évolution est l'évolution viable qui minimise à chaque pas de temps le transfert monétaire viable.	48
2.21	Evolution des trois variables d'état correspondant à l'évolution de la figure 2.20.	48
2.22	Valeurs des transferts monétaires du temps 0 au temps 250 pour l'évolution de la figure 2.20 (la situation initiale appartient au noyau de viabilité pour $\tau_{max} = 10^7$ et cette évolution est l'évolution viable qui minimise à chaque pas de temps le transfert monétaire).	49
2.23	Fonction distance vue en transparence du domaine de viabilité du modèle de compétition entre langues pour l'ensemble des contraintes (2.22) et la dynamique (2.21). La discrétisation de l'espace délimité par le parallépipède dont les arrêtes sont dessinées en noir est de 100 points par axe. Seuls les points du domaine de viabilité sont colorés, leur couleur dépend de leur distance euclidienne à la frontière.	49
2.24	24 évolutions lentes issues de points initiaux choisis au hasard. La couleur du point dépend de sa distance à la frontière. Plus la couleur est foncée, plus la distance est faible (noire sur la frontière). Le domaine de viabilité est représenté par le nuage de points gris.	50
2.25	Evolutions lentes pour le modèle de compétition entre langues.	50
2.26	Evolutions avec le même point de départ mais des valeurs de seuil, r , différentes pour la stratégie prudente. Les stratégies prudentes gardent l'état du système loin des frontières.	51

2.27	Fréquence moyenne (densité) de la distance à la frontière pour différentes valeurs du seuil de la stratégie prudente.	52
3.1	Ensemble de contraintes, intersection du cube $[s_{min}; s_{max}] \times [P_{min}; P_{max}] \times [k_{min}; k_{max}]$ dont les arrêtes sont dessinées en gris et l'ensemble des $\{s, P, k\}$ tels que $sP \leq S_{max}$. Les valeurs des paramètres sont données dans la table 3.1 avec $s_{min} = S_{max}/P_{max}$ et $s_{max} = S_{max}/P_{min}$, et noyau de viabilité.	63
3.2	Evolution du noyau de viabilité avec la valeur du transfert monétaire maximal τ_{max}	64
4.1	Schéma d'évolution empirique de la valeur de la respiration en fonction du temps pour une température ambiante donnée constante au cours du temps.	69
4.2	Fonctions de contrôle de l'humidité relative (traits pleins) et de la température (pointillés).	71

Introduction

Avant-propos

J'ai réalisé l'ensemble des mes recherches au sein du Laboratoire d'Ingénierie pour les Systèmes Complexes (LISC) d'Irstea.

Le fil directeur de ma thèse a été le développement d'une approche originale de la résilience en écologie, au moyen de concepts et d'outils de la théorie mathématique de la viabilité. Initialement, la résilience qualifie la capacité d'un métal à retrouver sa forme initiale suite à une déformation. Le champ de ce concept s'est ensuite étendu à la biologie, l'écologie, la psychologie . . . En écologie, l'enjeu est d'éviter des situations irrémédiables, notamment à cause de l'activité humaine, et de faciliter la restauration de propriétés essentielles, lorsque cela est possible.

Mon objectif durant le travail de thèse était de proposer une définition rigoureuse de la résilience pour construire des outils permettant de l'évaluer effectivement à partir de modèles de systèmes écologiques et sociaux. La théorie mathématique de la viabilité s'est révélée particulièrement adaptée à l'étude de la résilience. Cette théorie fournit un cadre mathématique pour agir afin de conserver la viabilité d'un système. Alors que les méthodes classiques de la théorie du contrôle cherchent à maximiser un gain, la théorie de la viabilité cherche à maintenir des critères dans des ensembles de valeurs. Etant donnés des dynamiques et des ensembles de contraintes de viabilité, l'un des concepts fondamentaux de la théorie, le noyau de viabilité, rassemble les états à partir desquels il est possible d'agir pour préserver cette viabilité. Lorsque le noyau de viabilité n'est pas égal à l'ensemble des contraintes, le connaître permet de savoir quelles mesures doivent être prises et quand, cela pouvant être bien avant que la frontière de l'ensemble des contraintes ne soit effectivement franchie. Le noyau de viabilité constitue alors un outil d'anticipation.

Dans ce cadre, le principe de la définition de la résilience consiste à poser les propriétés essentielles du système socio-écologique considéré comme des contraintes de viabilité et d'étudier les perturbations qui peuvent conduire le système à perdre ces propriétés et, éventuellement, les actions à mener pour les restaurer.

Cette méthode d'évaluation de la résilience est plus générale que les méthodes concurrentes qui se basent sur l'existence d'équilibres et de bassins d'attraction ; elle permet en outre de définir de manière très flexible les propriétés à restaurer et de calculer de manière effective des politiques d'actions efficaces. Je donne les arguments dans le document de thèse [36] et dans l'article [10].

Proposer des outils pour calculer des politiques de gestions viables ou résilientes est devenue une des directions de recherche du LISC. Chaque application pose des problèmes mathématiques et algorithmiques spécifiques (trafic [14], quotas de pêche [7, 32], eutrophisation des lacs [10, 30]). Et généralement, lorsque les systèmes considérés se complexifient, les calculs deviennent longs et très coûteux en mémoire, d'où la nécessité d'améliorer la précision des approximations [9] ou d'utiliser des méthodes d'apprentissage statistique [8, 15, 17, 31].

Les méthodes et outils de calcul de la résilience ont été au cœur de deux projets coordonnées par le LISC et réalisés entre 2007 et 2010. Le projet européen « Pattern resilience » avait parmi ses objectifs de développer des méthodes et des outils informatiques pour déterminer les politiques d’actions permettant de restaurer des propriétés du système après des perturbations et de mettre en œuvre ces outils dans des études de cas appartenant à l’écologie, les sciences cognitives, la sociologie. Dans ce cadre, j’ai participé à l’étude de cas concernant l’évolution des proportions de langues parlées sur un territoire [4, 6] et au chapitre du livre édité à la suite du projet qui reprend la définition mathématique de la résilience dans le cadre de la théorie de la viabilité [12].

J’ai été le coordinateur du projet ANR « Déduction » [34, 35], programme « Agriculture et Développement durable », qui s’est déroulé de 2007 à 2010 et qui avait pour objectif d’étudier comment le formalisme de la théorie de la viabilité associé à l’évaluation de propriétés comme la résilience pouvait constituer un outil efficace pour l’ingénierie du développement durable [2, 3, 23, 29, 33]. Il y avait deux études de cas dans ce projet : la gestion sylvicole en forêt tempérée et la préservation de la biodiversité dans le corridor forestier de Fianarantsoa (Madagascar).

Ce projet a permis de financer avec l’aide d’Irstea la thèse de Claire Bernard soutenue en 2011 que j’ai co-encadrée. Claire Bernard s’est confrontée aux ambiguïtés de l’expression « développement durable » et a proposé des méthodes pour distinguer des évolutions durables de celles qui ne le seraient pas en s’appuyant sur les ponts déjà établis entre concepts de la théorie de la viabilité et résilience, dans le cas d’application de la conservation de la biodiversité dans la forêt tropicale malgache [1].

L’approche de la théorie de la viabilité qui consiste à envisager l’ensemble des possibles avant tout souci d’optimisation a également intéressé le domaine du génie des procédés alimentaires. Dans le cadre du projet ANR « Incalin », programme « Nutrition alimentaire humaine », qui s’est déroulé de 2007 à 2010, l’étude de l’ensemble des évolutions permettant de fabriquer un Camembert jugé « bon » a permis d’identifier des commandes qui réduisent la durée classique d’affinage [5, 24, 25, 27, 28]. Ce projet a permis de financer la thèse de Mariette Sicard soutenue en 2010 que j’ai co-encadrée. Cette collaboration s’est poursuivie avec la participation au projet européen DREAM « Design and development of REAListic food Models » de 2009 à 2014, qui avait pour objectif de développer des modèles qui rendent compte de la structure des aliments et qui permettent de simuler l’impact de processus de transformation agro-alimentaire sur les propriétés nutritionnelles ou microbiologiques des aliments. Dans ce cadre, un algorithme de calcul de noyaux de viabilité basé sur les kd-tree [15] a été élaboré.

Lorsque les objets étudiés sont des systèmes écologiques et sociaux, les fonctions de contrôle issues des calculs de viabilité sont des politiques d’actions. Nous avons commencé une réflexion sur les apports de ces résultats dans le cadre d’un outil d’aide à la gestion participative. La thèse de Wei Wei que j’ai co-encadrée sur l’intégration des modèles de viabilité dans les outils d’aide à la gestion participative de territoires protégés [16, 18] a été financée par la région Auvergne et Irstea, et soutenue en 2012.

Une fois l’ensemble des possibles déterminé, se pose la question de la distinction d’une trajectoire particulière. La connaissance de cet ensemble permet d’intégrer dans ce choix la distance à sa frontière [22, 26] et ainsi de proposer des fonctions de contrôle plus robustes face aux incertitudes ou imprécisions dans l’espace des états [13, 19]. Dans le même souci, calculer le noyau de viabilité sur un ensemble érodé permet de garantir au cours de l’évolution une distance minimale à la frontière de l’ensemble des contraintes [11, 20, 21].

Le fil directeur de mes recherches, les différentes questions abordées et les perspectives

Le contexte de mes recherches depuis mon arrivée à Irstea est l'omniprésence du « développement durable » dans les discours sur la gestion des systèmes écologiques et sociaux. L'origine de l'expression « développement durable » est la prise de conscience dans les années 60 de la vulnérabilité de la biosphère. Cette expression désigne les efforts entrepris ou à fournir pour parvenir à concilier activités humaines (en particulier croissance économique) et préservation des écosystèmes [Carson, 1962, Meadows *et al.*, 1972]. Les tentatives de définition du développement durable sont nombreuses, cependant sa signification reste vague [Mebratu, 1998]. Son utilisation fréquente comme label, attribué souvent sans véritable justification pour promouvoir des activités économiques ou des actions politiques qualifiées de « durables », pose le problème de la distinction entre les actions qui respectent les conditions du « développement durable », premier oxymore du titre de ce document, et les autres [Robinson, 2004].

Dans ce contexte, deux désirs que je perçois comme des nécessités me poussent et me guident dans mes recherches. D'une part, lever les ambiguïtés, les équivoques sur les termes employés, et c'est là pour moi le grand intérêt de la formulation mathématique. D'autre part, proposer des informations pertinentes pour l'action de gestion concernant ces systèmes écologiques et sociaux : les données sont imprécises, les prévisions incertaines, cependant toutes les actions ne sont pas équivalentes. Le « contrôle complexe » constitue le deuxième oxymore de mon titre.

Ainsi, mes contributions scientifiques concernent les définitions mathématiques de la résilience et du développement durable, la création d'algorithmes et leur implémentation pour la mise en œuvre de ces définitions dans plusieurs domaines (la préservation de la forêt malgache, l'eutrophisation des lacs, la préservation des stocks de poissons, la coexistence de plusieurs langues, la gestion du pâturage dans la savane, l'activité touristique et la préservation de la qualité de l'environnement, . . .). Les concepts et outils de la théorie mathématique de la viabilité constituent la base de mes travaux, mais pas l'unique source : les algorithmes d'approximation des noyaux de viabilité font appel à des méthodes de classification ; la détermination de politiques d'actions viables et robustes aux méthodes de calcul de la distance à la frontière d'un ensemble ; l'activité de modélisation est également importante pour modifier les modèles disponibles sous la forme de systèmes dynamiques contrôlés.

Le *premier chapitre* expose ma proposition de formalisation mathématique de la résilience.

Le *deuxième chapitre* détaille la mise en œuvre avec des exemples de calculs de résilience, la description d'algorithmes d'approximation et de méthodes de distinction d'évolutions particulières.

Le *troisième chapitre* montre comment le cadre de la théorie de la viabilité peut également permettre de distinguer des politiques de gestion pouvant être qualifiées de durables.

Le *quatrième chapitre* présente les rares tests des politiques d'actions viables ou résilientes obtenues.

Le *cinquième chapitre* présente les perspectives, l'utilisation de la résilience dans l'étude des systèmes complexes.

Les références personnelles citées dans ce mémoire apparaissent dans le texte sous la forme

[numéro]; les autres références apparaissent sous la forme [Auteur Année]. Les listes bibliographiques respectives se trouvent à la fin du mémoire.

Chapitre 1

Du concept à l'évaluation dans les modèles : première étape, la formalisation mathématique de la résilience

Sommaire

1.1	Le concept de résilience	7
1.1.1	Étymologie	7
1.1.2	De nombreux domaines d'utilisation	7
1.1.3	Le concept de résilience en écologie	7
1.2	Définitions opérationnelles dans les modèles de systèmes écolologiques et sociaux basées sur le concept d'équilibre	8
1.2.1	Modèles sous forme d'équations différentielles	9
1.2.2	Modèles individus-centrés : mesure basée sur la durée d'une évolution simulée	9
1.2.3	Limites : systèmes à l'équilibre et propriétés d'intérêt correspondant à une réunion de bassins d'attraction	9
1.3	Extension des définitions opérationnelles dans le cadre des inclusions différentielles	10
1.3.1	Mesure de résilience proposée	10
1.3.2	La mise en œuvre dans le cadre mathématique de la théorie de la viabilité	10
Conclusion	14
	La mesure proposée est en accord avec la définition conceptuelle d'Holling	14
	La définition proposée étend des mesures connues	14
	Les limites pour la mise en œuvre	16

L'OBJECTIF de ce chapitre est de montrer, d'abord, comment l'enjeu de la préservation de propriétés d'un système écologique et social peut être interprété comme un problème de viabilité, de montrer, ensuite, que l'évaluation de l'impact de perturbations sur la capacité du système à préserver ces propriétés est une mesure de résilience.

Ce chapitre reprend mon travail de thèse [10, 36], complété par le chapitre d'ouvrage [12] et présenté dans la conférence invitée [33].

1.1 Le concept de résilience

1.1.1 Étymologie

Le mot résilience vient du verbe latin *resilio*, *silire*, *silui* (*silii*) [re + *salio*] qui signifie sauter en arrière, se dérober à, rebondir, se plier, résilier.

1.1.2 De nombreux domaines d'utilisation

L'emploi du mot résilience remonte à la fin du 19^{ème} siècle, en physique des matériaux, pour désigner la capacité d'un métal à retrouver sa forme initiale suite à une déformation produite par un choc. Son utilisation s'est ensuite étendue au cours du 20^{ème} siècle d'abord aux Etats-Unis dans le domaine de la psychologie, où la résilience d'un individu est sa capacité à retrouver une vie normale après un traumatisme, dans le domaine de l'informatique où la résilience d'un système est sa capacité à fonctionner malgré les pannes de certains composants, dans les domaines de l'écologie, de l'économie, des sciences sociales également. Les objets changent mais reste l'idée commune de désigner par le mot « résilience » la capacité du système étudié à retrouver certaines propriétés malgré des bouleversements dus à des perturbations que le système ne maîtrise pas. Pour un physicien des matériaux, le système étudié sera une barre de métal, la propriété sera sa forme, la perturbation sera un choc, le bouleversement une déformation ; pour l'écologue, si le système est un lac, la propriété sera d'être dans un état d'eau claire (oligotrophe), la perturbation un événement pluvieux d'une forte intensité, le bouleversement le passage dans un état eutrophe d'eau trouble ; si le système est une forêt, la propriété sera une densité minimale pour limiter l'érosion, la perturbation une tempête. Quel que soit le domaine, l'étude de la résilience induit la définition du triplet, système, propriété de ce système, perturbations.

1.1.3 Le concept de résilience en écologie

L'intérêt actuel pour cette question de résilience, surtout dans les sciences du vivant, s'explique par le fait que les observations d'eutrophisation de lacs, de blanchiment de coraux, de forêts qui deviennent savanes même après l'arrêt des cultures, ont battu en brèche la représentation d'un système vivant comme étant dominé par des forces stabilisatrices qui le ramènent à un équilibre dès lors qu'une perturbation l'en éloigne et avec cette représentation la notion de résistance liée à l'intensité de la force nécessaire pour éloigner d'une certaine quantité l'état du système de l'équilibre.

Dans le domaine de l'écologie, la définition de la résilience qui trouve un large consensus à l'heure actuelle vient de [Holling, 1973] : c'est la capacité d'un système à recouvrer certaines propriétés essentielles perdues à la suite de perturbations (« *the capacity of a system to absorb disturbance and reorganize while undergoing change so as to still retain essentially the same function, structure, identity, and feedbacks* » [Walker *et al.*, 2004]).

Je vais donner un exemple pour illustrer cette définition : lorsque les rejets de nitrates dans un lac atteignent un niveau critique, l'eau se trouble et la vie (en particulier, les poissons) y est asphyxiée (Fig. 1.1). Dans certains cas, si par la suite on réduit suffisamment les rejets de nitrates, l'eau du lac peut devenir claire à nouveau et la vie reprendre. Dans d'autres cas,

le dommage est irréversible : la diminution des apports de nitrates ne suffit pas à retrouver un état d'eau claire.



(a) Lac oligotrophe



(b) Lac eutrophe

FIG. 1.1 – Un lac peut être dans un état d'eau claire (a), ou dans un état d'eau trouble (b).

Cette faculté de recouvrer une propriété essentielle après une perturbation est la résilience. L'enjeu de l'étude de la résilience est d'éviter des situations dans lesquelles des perturbations, notamment d'origine humaine mais également naturelles, peuvent conduire à des situations irrémédiables. Elle permet également de faciliter la restauration des propriétés essentielles, lorsque cela est possible.

[Holling, 1996] nomme cette définition de la résilience « *ecosystem resilience* » ou « *ecological resilience* ». Au-delà de son nom, [Levin *et al.*, 1998] soulignent son intérêt dans l'étude de systèmes modélisés à composantes écologiques et économiques. L'objectif sous-jacent est de maintenir le système entre certaines bornes plutôt qu'en un point stable.

L'« *ecological resilience* » peut être souhaitable ou non : une ressource polluée ou une dictature peuvent être très résilients. Cependant, dans la perspective de la durabilité, le fait d'accroître la résilience des états souhaités diminue l'intensité des dommages causés par d'éventuelles perturbations. La capacité d'un système écologique et social à conserver son mode de fonctionnement dépend des variables qui contrôlent les frontières de ces différents modes, de l'intensité et de la fréquence des perturbations considérées, de l'échelle de temps [Carpenter *et al.*, 2001], de la distribution des espèces ou plutôt des fonctions qu'elles réalisent, à l'intérieur d'une même échelle de temps et d'espace, et entre les différentes échelles [Peterson *et al.*, 1998].

1.2 Définitions opérationnelles dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux basées sur le concept d'équilibre

En ce qui concerne les définitions opérationnelles de la résilience permettant d'évaluer la résilience dans le cadre de modèles de systèmes écologiques et sociaux, de nombreux indices ont été suggérés.

1.2.1 Modèles sous forme d'équations différentielles

Mesures basées sur les valeurs propres de la linéarisation du système non linéaire au voisinage de l'équilibre

Lorsque le modèle est composé d'équations différentielles, la plupart des indices sont liés aux valeurs propres du système linéarisé au voisinage de l'équilibre : [Pimm et Lawton, 1977] ont mesuré la résilience comme inversement proportionnelle à la valeur propre de plus grande norme, qui représente une propriété asymptotique, le taux de décroissance de la distance à l'équilibre lorsque le temps tend vers l'infini. Pour compléter l'indice de résilience comme mesure de la réponse aux petites perturbations lorsque le système est proche de l'équilibre, [Neubert et Caswell, 1997] ont proposé des indices évaluant l'intensité et la durée des comportements transitoires au voisinage d'un équilibre asymptotiquement stable.

Mesure basée sur la taille des bassins d'attraction

D'après [Beddington *et al.*, 1976], la résilience peut être mesurée comme l'intensité de la perturbation qu'un système peut absorber sans subir de changement qualitatif. D'un point de vue système dynamique, un changement qualitatif peut être interprété comme un saut de l'état dans un autre bassin d'attraction. Faisant l'hypothèse qu'avant la perturbation, le système est dans un état d'équilibre asymptotiquement stable, la résilience est alors définie comme proportionnelle à la distance entre cet équilibre et la frontière de son bassin d'attraction (voir par exemple [Collings et Wollkind, 1990], [Anderies *et al.*, 2002] et [van Coller, 1997]).

Mesure basée sur la distance aux points de bifurcation

Considérant que les variations de résilience sont dues à des variables évoluant lentement qu'ils considèrent comme des paramètres et en se plaçant cette fois dans l'espace des paramètres, [Ludwig *et al.*, 1997] ont proposé comme mesure de résilience l'inverse de la distance aux points de bifurcation. En effet, aux points de bifurcation des équilibres changent de nature, apparaissent ou disparaissent [Casagrandi et Rinaldi, 2002, Lacitignola *et al.*, 2007].

1.2.2 Modèles individus-centrés : mesure basée sur la durée d'une évolution simulée

Dans le cas de modèles individus-centrés, la résilience a été étudiée par simulations comme inverse du temps nécessaire après une perturbation pour retrouver un état du système proche de celui avant perturbation [Ortiz et Wolff, 2002, Matsinos et Troumbis, 2002].

Pour [Janssen et Carpenter, 1999], dans le cadre de la gestion d'un lac, un choix de gestion est qualifié plus résilient qu'un autre lorsque les valeurs maximales atteintes par les quantités de phosphates dans le lac au cours du temps de simulation sont plus faibles. Autrement dit, un système est plus résilient lorsque les courbes simulées restent plus éloignées des zones dangereuses.

1.2.3 Limites : systèmes à l'équilibre et propriétés d'intérêt correspondant à une réunion de bassins d'attraction

Les définitions de la résilience issues de la théorie des systèmes dynamiques (équilibres stables, bassins d'attraction) souffrent de deux limitations importantes : elles ne peuvent être utilisées quand plusieurs politiques d'actions sont envisagées alors que les problèmes pertinents dans le cadre de systèmes socio-écologiques nécessitent souvent l'identification de politiques d'actions favorisant leur résilience. En outre, ces définitions supposent qu'un

équilibre ou une réunion de bassins d'attraction coïncident avec la propriété du système dont il s'agit d'étudier la résilience.

1.3 Extension des définitions opérationnelles dans le cadre des inclusions différentielles

Les perturbations environnementales sont souvent des bouleversements vigoureux, plutôt que de doux tremblements. En outre, il peut n'y avoir aucun équilibre stable vers lequel retourner. D'ailleurs, la définition d'[Holling, 1973] contraste avec le concept de stabilité au sens statique (cf section 1.1.3).

En outre, lorsque sont considérés des systèmes écologiques et sociaux, il faut considérer la possibilité d'actions de contrôle par un gestionnaire.

Suivant l'interprétation d'[Holling, 1973], la résilience dépend de : (i) l'état du système, (ii) de la propriété étudiée (par exemple, dans le cas d'un lac, la propriété d'oligotrophie), (iii) des perturbations envisagées, (iv) des dynamiques, des contrôles disponibles et (v) du coût associé à l'effort qui est nécessaire pour restaurer cette propriété si elle est perdue à la suite de l'occurrence d'une perturbation (ce coût peut être le temps nécessaire pour la restauration par exemple) et (vi) de l'horizon temporel [Carpenter *et al.*, 2001].

Le défi est de fournir une définition opérationnelle qui prend explicitement en compte ces six points. Ainsi, l'évaluation de la résilience implique la description :

- de l'évolution de l'état du système en fonction de l'état lui-même mais également en fonction des actions de gestions, appelées contrôles,
- des propriétés du système considérées,
- des perturbations envisagées,
- de la fonction de coût utilisée pour évaluer l'effort de préservation ou de restauration.

1.3.1 Mesure de résilience proposée

Nous proposons donc comme mesure de résilience : l'inverse du coût associé à l'effort nécessaire pour restaurer et préserver certaines propriétés du système suite à des perturbations.

Ainsi en un état donné, un système sera pour une propriété donnée et un ensemble de perturbations envisagées :

- infiniment résilient si à la suite de toute occurrence d'une des perturbations envisagées, cette propriété peut être préservée,
- de résilience finie si à la suite d'une occurrence d'une des perturbations envisagées, cette propriété est perdue mais peut ensuite être restaurée et préservée et cela pour toute occurrence d'une des perturbations envisagées,
- de résilience nulle si une des perturbations envisagées provoque une perte définitive de cette propriété (aucune restauration n'est possible).

1.3.2 La mise en œuvre dans le cadre mathématique de la théorie de la viabilité

La théorie de la viabilité traite du contrôle de systèmes dynamiques sous contraintes (deux livres de référence [Aubin, 1991] et [Aubin *et al.*, 2011]).

La mise en œuvre de la mesure de résilience que nous proposons comporte deux étapes. Etant donné un système dynamique contrôlé et une propriété de ce système, la première étape consiste à étudier sa capacité à préserver cette propriété au cours du temps. Dans une seconde étape, étant données des perturbations envisagées, c'est l'impact de ces perturbations

sur la capacité du système à préserver la propriété considérée qui est évalué à l'aide de fonctions de coûts définies sur l'ensemble des évolutions possibles.

Première étape : le calcul du noyau de viabilité associé à la dynamique du système et à la propriété souhaitée permet de distinguer les états du système à partir desquels la propriété étudiée peut être préservée

La première hypothèse que nous faisons est que l'évolution de l'état du système est gouvernée par un système dynamique contrôlé, les variations dépendent de l'état mais également de contrôles exercés par un gestionnaire extérieur au système.

Définition 1.3.1 (Système dynamique contrôlé). *Soit $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ le vecteur de dimension n décrivant l'état du système, soit $u \in \mathbb{R}^p$ le vecteur décrivant les contrôles. Un système dynamique contrôlé \mathcal{S} est décrit par le couple (U, f) où*

- U est une correspondance de $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ qui à tout état du système associe l'ensemble des contrôles admissibles,
- et f est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à chaque état du système et à chaque valeur du contrôle associe la vitesse de variation de l'état du système.

Une évolution $t \in [0, +\infty[\rightarrow x(t) \in X$ qui décrit l'état du système au cours du temps est gouvernée par le système dynamique contrôlé \mathcal{S} si :

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \text{ pour presque tout } t \geq 0. \quad (1.1)$$

Notons $\mathcal{S}(x)$ l'ensemble de toutes les évolutions qui partent de x gouvernées par \mathcal{S} .

Nous supposons ensuite que les propriétés étudiées peuvent être décrites sous la forme d'un sous-ensemble de l'espace des états du système. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, nous supposons que le système a les propriétés étudiées si et seulement si $x \in K$.

Ainsi, le système conservera la propriété au cours du temps si son état suit une évolution qui reste dans K dite viable (Fig. 1.2(a)) :

Définition 1.3.2 (Evolution viable). *Une évolution est viable dans $K \subset X$ si*

$$\forall t \geq 0, x(t) \in K.$$

L'étude de la compatibilité entre dynamique et propriétés étudiées se résout par le calcul du noyau de viabilité, un des concepts fondamentaux de la théorie de la viabilité (Fig. 1.2(b)).

Définition 1.3.3 (Noyau de viabilité). *Le noyau de viabilité $Viab_{\mathcal{S}}(K)$ associé au système dynamique contrôlé \mathcal{S} et soumis à l'ensemble des contraintes $K \subset X$ est l'ensemble des tous les points initiaux à partir desquels il est possible de trouver une évolution viable gouvernée par \mathcal{S} [Aubin, 1991] :*

$$Viab_{\mathcal{S}}(K) = \{x_0 \in K \mid \exists x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0) \text{ telle que } \forall t \geq 0, x(t) \in K\}.$$

Deuxième étape : la mesure de résilience permet d'évaluer l'impact de perturbations sur la capacité du système à préserver certaines de ses propriétés.

Nous supposons maintenant que les perturbations envisagées peuvent être décrites par une correspondance dans l'espace des états :

$$D : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

qui associe à chacun des états du système l'ensemble des états atteignables à la suite de l'occurrence d'une de ces perturbations. Plusieurs perturbations peuvent être envisagées,

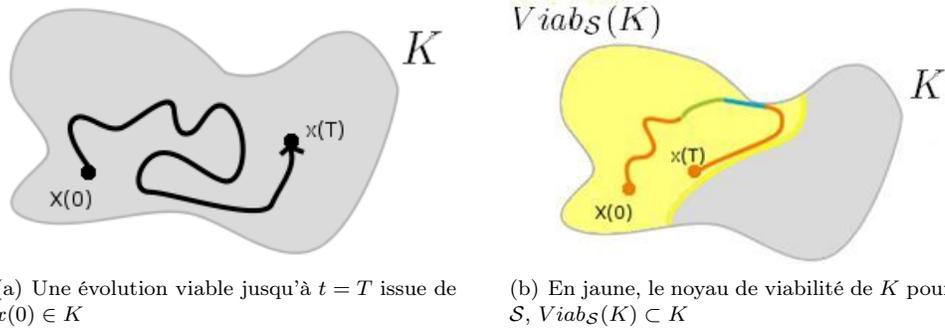


FIG. 1.2 – L'ensemble de contraintes représentant la propriété étudiée, K , est colorié en gris.

comme des incertitudes sur l'état précis du système après leur occurrence, d'où l'utilisation d'une correspondance plutôt que d'une fonction. Les perturbations ainsi considérées sont des chocs dans l'espace des états (Fig. 1.3(a)).

Le saut dans l'espace des états suite à une perturbation peut le faire sortir du noyau de viabilité, de l'ensemble des contraintes même, et dans de tels cas, soit les propriétés considérées peuvent être à nouveau restaurées et préservées, c'est à dire que le noyau de viabilité précédemment calculé peut à nouveau être atteint en utilisant les bonnes fonctions de contrôle, soit cela n'est pas possible quelles que soient les actions menées (Fig. 1.3(b)).

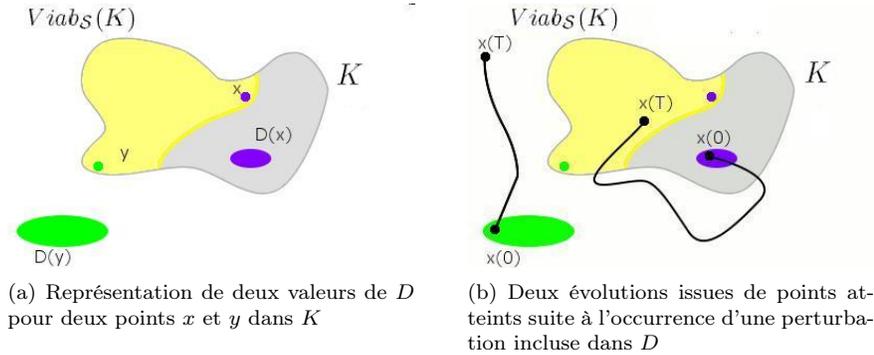


FIG. 1.3 – Représentation des perturbations envisagées. En gris l'ensemble des contraintes, K et en jaune le noyau de viabilité, $Viab_S(K)$.

L'impact de l'occurrence d'une perturbation sur la capacité du système à préserver les propriétés étudiées est évalué par le calcul du bassin de capture du noyau de viabilité : deuxième concept essentiel de la théorie de la viabilité, plus récent que celui de noyau de viabilité, le bassin de capture rassemble tous les états initiaux à partir desquels une cible peut être atteinte tout en respectant des contraintes.

Définition 1.3.4 (Bassin de capture). *Le bassin de capture $Capt_S(K, C)$ associé au système dynamique contrôlé \mathcal{S} , à la cible $C \subset X$ et soumis aux contraintes $\mathcal{K} \subset X$ est l'ensemble de tous les points initiaux à partir desquels il est possible de trouver une évolution viable dans \mathcal{K} jusqu'à atteindre C en temps fini :*

$$Capt_S(K, C) = \{x_0 \in \mathcal{K} \mid \exists x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0), \exists T \geq 0 \mid x(T) \in C \text{ et } \forall t \in [0; T], x(t) \in \mathcal{K}\}.$$

Ainsi, si suite à l'occurrence d'une perturbation, l'état du système reste dans le bassin de capture du noyau de viabilité calculé à la première étape, la propriété pourra être restaurée

et préservée. L'ensemble \mathcal{K} qui contient l'ensemble K (qui représente la propriété étudiée) représente alors les contraintes de viabilité infranchissables du système (Fig. 1.4).

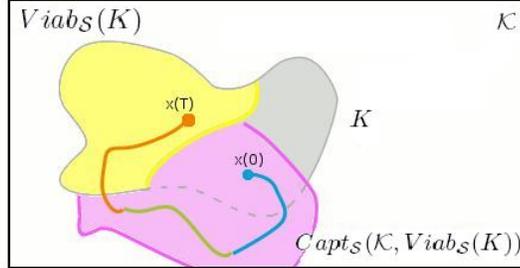


FIG. 1.4 – Le bassin de capture du noyau de viabilité, $Capt_S(\mathcal{K}, Viab_S(K))$, est colorié en rose, le noyau de viabilité en jaune.

A partir d'un point du bassin de capture du noyau de viabilité, la restauration est possible, mais elle peut avoir un coût :

- ce coût sera nul, si après le saut dû à l'occurrence d'une perturbation, l'état du système reste dans le noyau de viabilité. En effet, la propriété d'intérêt pourra continuer à être préservée,
- ce coût sera non nul mais fini si l'état après perturbation appartient au bassin de capture du noyau de viabilité, puisque la propriété nécessairement sera perdue mais pourra être restaurée et préservée,
- ce coût sera infini, si après le saut la propriété ne peut plus être préservée, c'est à dire si l'état du système est à l'extérieur du bassin de capture.

Ainsi, l'exemple le plus évident de fonction de coût est la fonction qui associe à une évolution le temps passé hors du noyau de viabilité. Soit $x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)$,

$$c(x(\cdot)) := \int_0^\infty (1 - \mathbb{1}_{Viab_S(K)}(x(\tau))) d\tau \quad (1.3)$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble.

A partir de l'état $x \in X$ du système, le coût minimal sur toutes les évolutions gouvernées par \mathcal{S} vaut :

$$c(x) = \min_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \int_0^\infty (1 - \mathbb{1}_{Viab_S(K)}(x(\tau))) d\tau. \quad (1.4)$$

Cependant, d'autres fonctions de coût peuvent être considérées selon le regard porté sur le système comme par exemple la fonction temps de crise [Doyen et Saint-Pierre, 1997].

Les perturbations envisagées lorsque l'état du système est $x \in \mathbb{R}^n$ sont décrites par l'ensemble $D(x)$ des états atteignables suite à l'occurrence d'une de ces perturbations. Pour l'évaluation de la résilience, le pire des cas est retenu, c'est à dire le saut dans l'espace des états qui conduit au plus fort coût de restauration.

La résilience du système à l'état x face aux perturbations D est alors une fonction décroissante de ce coût maximal sur tous les sauts de x à $x_1 \in D(x)$. La fonction inverse convient :

$$R(x) := \frac{1}{\max_{x_1 \in D(x)} c(x_1)}. \quad (1.5)$$

Conclusion du chapitre

La mesure proposée est en accord avec la définition conceptuelle d'[Holling, 1973]

Suivant [Carpenter *et al.*, 2001], la mesure de la résilience proposée, basée sur les concepts de la théorie de la viabilité, dépend :

- (i) de l'état du système,
- (ii) de la propriété du système étudiée,
- (iii) des perturbations envisagées,
- (iv) du coût associé à la restauration éventuelle de cette propriété,
- (v) des contrôles disponibles,
- (vi) et de l'horizon temporel considéré.

Liant résilience et coût de restauration d'une propriété, cette mesure permet de faire une distinction entre résilience et robustesse, la robustesse d'un système caractérisant le fait que les sorties varient peu lorsque les entrées varient. Cependant, les discussions concernant les liens entre les notions de résilience et robustesse sont toujours vives [Anderies *et al.*, 2013].

En particulier, le regard porté sur le traitement des perturbations a évolué, ainsi que leur prise en compte dans la mesure de résilience. Dans [10], les perturbations sont définies comme des correspondances et la résilience est évaluée avant l'occurrence éventuelle d'une de ces perturbations en fonction de ses conséquences possibles. Dans [12], sont considérés les états du système une fois que la perturbation s'est produite, et une valeur de résilience est associée à ces états obtenus après perturbation, soulignant alors l'idée que la résilience se révèle a posteriori une fois que la perturbation s'est produite.

La définition proposée étend des mesures connues aux systèmes dynamiques contrôlés et aux propriétés souhaitées déconnectées des équilibres

En collaboration avec Guillaume Deffuant, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea, et Justin Calabrese, Helmholtz Centre for Environmental Research-UFZ, Leipzig, Germany [12]

Nous avons montré dans le cas d'un modèle d'évolution de la savane de la littérature [Anderies *et al.*, 2002] que la définition de la résilience dans le cadre de la théorie de la viabilité contient celles basées sur les attracteurs.

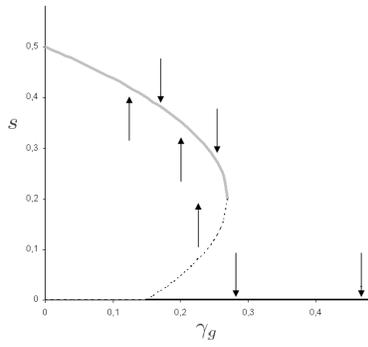
Dans le modèle d'[Anderies *et al.*, 2002], l'évolution de la biomasse aérienne des plantes de la savane, $s(t)$, est gouvernée par l'équation différentielle :

$$s'(t) = \frac{r_c}{\gamma_c} s(t) (a_c + r_s s(t)) \left(1 - \frac{s(t)}{s^*} - \alpha_{ws}\right) - \gamma_g s(t) \quad (1.6)$$

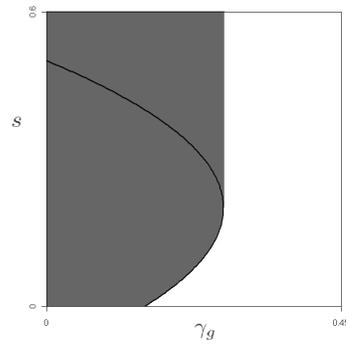
où γ_g est la fraction de biomasse supprimée par pâturage. Le modèle est décrit plus en détails dans la section 2.1.2.

Dans [Anderies *et al.*, 2002], à pression de pâturage γ_g constante, les « bons » équilibres asymptotiquement stables correspondent aux hauts niveaux de biomasse et les « mauvais » à une biomasse nulle (Fig. 1.5(a)). La résilience pour un système dans un « bon » équilibre asymptotiquement stable et à pâturage constant peut alors être mesurée par la distance à la frontière du bassin d'attraction comme indiqué dans la figure 1.5(b).

Considérant maintenant la mesure de la résilience dans le cadre de la théorie de la viabilité en gardant cependant la pression de pâturage constante, en définissant comme ensemble de contraintes un voisinage des « bons » équilibres (Fig. 1.6(a)), (c'est à dire que la propriété dont on étudie la résilience est d'être au voisinage des « bons » équilibres) et en prenant



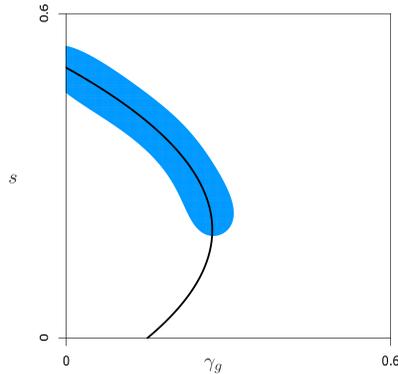
(a) Les « bons » équilibres asymptotiquement stables (en gris) correspondent aux hauts niveaux de biomasse et les « mauvais » à une biomasse nulle (en noir)



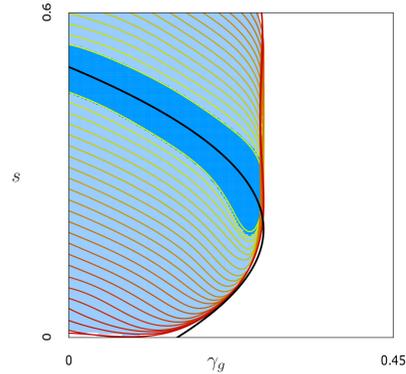
(b) La région coloriée en gris correspond au bassin d'attraction des « bons » équilibres asymptotiquement stables

FIG. 1.5 – Modèle de savane (1.6) avec une variable d'état s , la biomasse aérienne des plantes de la savane et la pression de pâturage constante considérée comme paramètre γ_g .

la fonction de coût la plus simple qui mesure le temps hors des contraintes, alors, la figure 1.6(b) montre que la réunion du noyau de viabilité et du bassin de capture du noyau de viabilité coïncide avec le bassin d'attraction des « bons » équilibres.



(a) Ensemble des contraintes, K , correspondant à la propriété d'être dans un voisinage des équilibres asymptotiquement stables qualifiés de « bons » car associés à un niveau de biomasse élevé



(b) La région coloriée en bleu correspond au noyau de viabilité de l'ensemble K . Les courbes de niveau sont celles du coût associé à l'atteinte du noyau de viabilité. Le bassin de capture du noyau de viabilité correspond à ces régions où le coût d'atteinte du noyau est fini

FIG. 1.6 – Evaluation du coût de restauration (Fig. 1.6(b)) pour le modèle (1.6), pour la propriété décrite par l'ensemble K représenté dans la figure 1.6(a) et pour la fonction de coût correspondant au temps passé hors du noyau de viabilité.

Dans le cas de la mesure basée sur la taille du bassin d'attraction, la valeur de la résilience renseigne sur l'intensité maximale de la perturbation en terme de perte soudaine de biomasse que le système à l'équilibre peut supporter tout en restant dans le bassin d'attraction d'un « bon » équilibre. Le temps d'atteinte de cet équilibre est bien sûr infini.

Dans le cas de la mesure de résilience dans le cadre de la théorie de la viabilité basée sur la fonction de coût associée au retour dans le noyau de viabilité de l'ensemble des contraintes

représentant la propriété étudiée, la valeur de la résilience en un état du système (qui n'est donc pas nécessairement à l'équilibre), renseigne sur le temps maximal nécessaire pour retourner dans le voisinage déterminé du « bon » équilibre au cas où l'une des perturbations envisagées se produirait.

Ainsi, la mesure de la résilience avec les outils de la théorie de la viabilité est une généralisation de la définition basée sur les attracteurs et leur bassin d'attraction. Elle permet en outre de déterminer des politiques d'action permettant de préserver la propriété du système considérée, ou de la restaurer en temps minimal (ou en coût minimal) lorsque cela est possible.

Les limites pour la mise en œuvre

Les premières limites concernent les hypothèses faites au cours de la section 1.3.2 qui restreignent le champ d'utilisation de cette mesure :

- les dynamiques du système sont décrites par des systèmes dynamiques contrôlés,
- les propriétés étudiées sont décrites par un sous-ensemble de l'espace des états,
- les perturbations envisagées sont des chocs uniques dans l'espace des états.

Les secondes limites concernent les capacités de calculs d'approximations des ensembles que sont le noyau de viabilité et le bassin de capture. En effet, les algorithmes existants souffrent de la malédiction de la dimensionnalité, exponentiels en mémoire avec la dimension de l'espace des états et exponentiels en temps de calcul avec celle de l'espace des contrôles.

Nous avons participé à des travaux visant à améliorer ces capacités de calcul :

- en utilisation des procédures de classification pour calculer le noyau de viabilité du système auxiliaire discret en temps (voir section 2.2.2)
- ou en faisant le lien avec les algorithmes de résolution de problèmes d'optimisation et en utilisant des schémas numériques anti-diffusifs (voir section 2.2.3).

Chapitre 2

Du concept à l'évaluation dans les modèles : seconde étape, le calcul

Sommaire

2.1 Exemples d'évaluation de résilience dans des modèles de systèmes écologiques et sociaux	19
2.1.1 Eutrophisation des lacs	19
2.1.2 Gestion de pâturage	25
2.1.3 Compétition entre langues	28
2.1.4 Activité touristique et qualité de l'environnement	31
2.2 Calculs de noyaux de viabilité et de bassins de capture	35
2.2.1 Descriptions exactes	35
2.2.2 Des algorithmes d'approximation	38
2.2.3 Lien avec les algorithmes de résolution de problème d'optimisation	41
2.3 Méthodes de détermination d'évolutions viables ou résilientes particulières	44
2.3.1 Evolutions lentes	45
2.3.2 Evolutions éloignées des frontières	48
Conclusion	52
Résilience effectivement mesurée des dans modèles de systèmes écologiques et sociaux	52
La nécessité d'améliorer les performances des algorithmes d'approximation des noyaux de viabilité et bassins de capture	52
La richesse des stratégies de contrôle viables	53

L'OBJECTIF de ce chapitre est de décrire des mesures de résilience effectuées sur des modèles de systèmes écologiques et sociaux issus de la littérature, de montrer ensuite l'état des réflexions sur les algorithmes d'approximation des noyaux de viabilité et bassins de capture et enfin de présenter des réalisations de différentes procédures de sélection d'évolutions viables ou résilientes.

Ces travaux sont le fruit de nombreuses collaborations publiés dans les articles [2, 4, 6], le chapitre d'ouvrage [13] et les conférences [19] en ce qui concerne les exemples de calculs de résiliences et d'évolutions viables ou résilientes particulières, et dans les articles [8, 9] et conférences [15, 17, 31] en ce qui concerne les algorithmes d'approximation.

2.1 Exemples d'évaluation de résilience dans des modèles de systèmes écologiques et sociaux

2.1.1 Eutrophisation des lacs

Le premier cas d'application de notre mesure de la résilience a été le phénomène d'eutrophisation des lacs.

Un lac oligotrophe est dans un état d'eau claire, de faible teneur en phosphates et de grande qualité écologique. Un lac eutrophe est caractérisé par une eau trouble, une haute teneur en phosphates et une faible qualité écologique dues à la prolifération d'algues vertes. Les algues prolifèrent à cause des excédents de phosphates déposés dans le bassin versant qui se retrouvent dans l'eau du lac.

Le système que nous avons étudié se compose d'un lac et des populations qui profitent de ses services ou apportent des excédents de phosphates par l'intermédiaire de leurs activités agricoles.

L'objectif des agriculteurs est d'assurer la rentabilité de leurs exploitations; le gestionnaire du lac souhaite le maintenir dans un état oligotrophe.

Le modèle d'évolution de l'état du système

La dynamique de la concentration en phosphates dans l'eau du lac est décrite par une version simplifiée du modèle décrit par [Carpenter *et al.*, 1999] :

$$\frac{dP(t)}{dt} = -b.P(t) + L(t) + r.\frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}, \quad (2.1)$$

- les variables sont $P(t)$, la quantité de phosphates (masse ou concentration) dissous dans l'eau et $L(t)$ les apports de phosphates provenant des activités humaines,
- les paramètres sont b la proportion de phosphates éliminés, r le taux maximal de recyclage des phosphates et m la valeur de P pour laquelle le recyclage atteint la moitié du taux de recyclage maximal.

En fonction de la valeur de b , [Janssen et Carpenter, 1999] décrivent trois différents types de lacs représentés dans la figure 2.1.

Nous supposons que les variations temporelles des apports de phosphates dépendent directement du contrôle $u(t)$ choisi par le gestionnaire au temps t :

$$\frac{dL(t)}{dt} = u(t). \quad (2.2)$$

Ces variations sont bornées, $u(t)$ appartient à l'ensemble fermé des contrôles admissibles U :

$$u(t) \in U := [-VL_{max}, VL_{max}]. \quad (2.3)$$

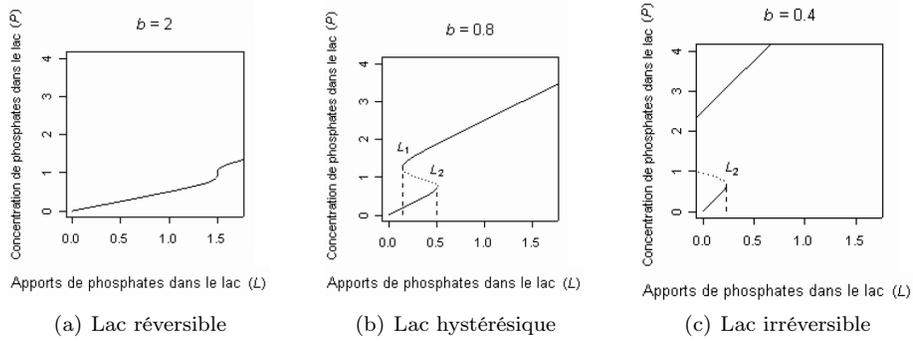


FIG. 2.1 – Trois types de lacs en fonction de la valeur du paramètre b dans le modèle (2.1).

La propriété du système étudiée décrite comme un sous-ensemble de l'ensemble des états

Le gestionnaire du lac a comme but de le conserver dans un état oligotrophe.

Un lac oligotrophe devient eutrophe lorsque la quantité de phosphates dissous dans l'eau croît au-dessus d'un seuil fixé P_{max} .

Par conséquent, l'objectif du gestionnaire du lac est atteint au temps t lorsque la variable positive $P(t)$ satisfait :

$$P(t) \in [0, P_{max}] . \quad (2.4)$$

L'objectif des agriculteurs est la rentabilité de leurs activités. Nous supposons dans ce modèle que leur bénéfice dépend linéairement des apports en phosphates.

Ainsi, leur objectif est atteint lorsque la valeur des apports de phosphates dépendant des activités humaines est supérieure à un seuil donné, L_{min} .

Un seuil maximal d'apports de phosphates, L_{max} , est fixé par les institutions ou les parties prenantes.

Les activités des agriculteurs sont donc rentables et légales au temps t lorsque :

$$L(t) \in [L_{min}, L_{max}] . \quad (2.5)$$

Ainsi, la propriété intéressante pour ce système est d'avoir à la fois un lac oligotrophe et des activités agricoles rentables. C'est donc la propriété que nous allons étudier et dont nous allons évaluer la résilience.

La dynamique et les contraintes

Les équations (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) peuvent être écrites de manière synthétique dans le formalisme des inclusions différentielles en considérant la variable vectorielle $x(t) := (L(t), P(t))$ appartenant à $X := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) &= (L'(t), P'(t)) = (u(t), -b.P(t) + L(t) + r. \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}) \\ u(t) &\in U(x(t)) = U , \end{cases} \quad (2.6)$$

avec comme contraintes

$$x(t) \in K := [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}] . \quad (2.7)$$

Noyaux de viabilité

Etudions tout d'abord la capacité du système à conserver la propriété étudiée en l'absence de perturbation. Le noyau de viabilité de l'ensemble des contraintes (2.7) pour la dynamique contrôlée (2.6) permet de distinguer les situations initiales à partir desquelles il existe au moins une fonction de contrôle qui permet de conserver la propriété au cours du temps (cf section 1.3).

Dans le cas d'un lac hystérésique, la figure 2.2 représente des noyaux de viabilité pour différentes valeurs des bornes de l'ensemble des contraintes P_{max} , L_{min} et L_{max} . Dans le cas (d) en particulier, le noyau de viabilité est vide ce qui signifie que la propriété d'intérêt ne peut être conservée même en l'absence de perturbation. Dans les autres cas, les noyaux de viabilité sont non vides mais non égaux à l'ensemble des contraintes.

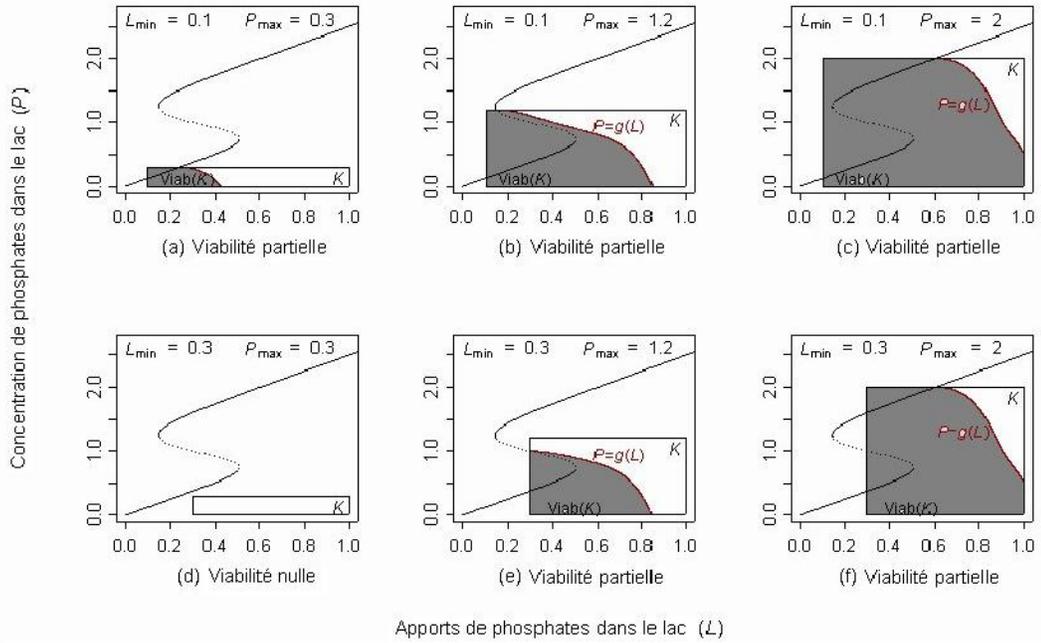


FIG. 2.2 – Noyaux de viabilité d'un lac hystérésique ($b = 0.8$).

La figure 2.3 représente les noyaux de viabilité pour les mêmes valeurs des bornes des contraintes mais dans le cas d'un lac irréversible. Les résultats montrent que les volumes des noyaux sont plus faibles que dans le cas d'un lac hystérésique et donc que la préservation à la fois d'activités agricoles et d'un lac oligotrophe est bien plus délicate.

Les perturbations envisagées

Etudions maintenant l'impact sur la capacité à préserver la propriété d'intérêt d'événements pluvieux extrêmes qui provoquent par ruissellement une brusque augmentation de la concentration de phosphates dans l'eau du lac décrite par la correspondance D_α (Fig. 2.4) :

$$D_\alpha(x) := \{y \in X | y \in x + \{0\} \times [0, \alpha]\}. \quad (2.8)$$

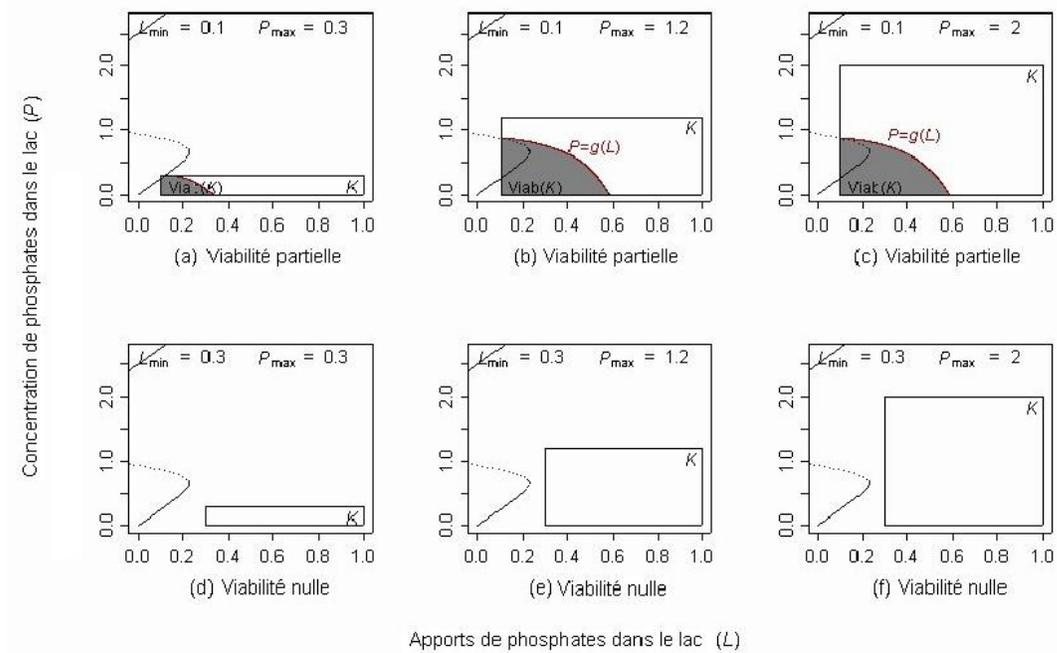


FIG. 2.3 – Noyaux de viabilité d’un lac irréversible ($b = 0.4$).

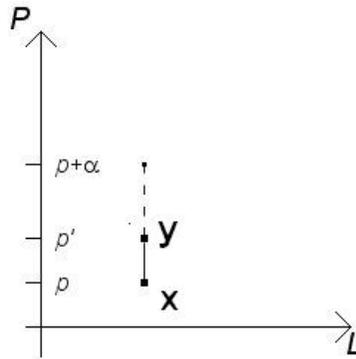


FIG. 2.4 – Lorsque l’état du système est $x = (L, p)$, représentation de l’ensemble des états atteignables suite à l’occurrence d’une des perturbations envisagées : $y = (L, p')$ avec $p' \in [p, p + \alpha]$.

La fonction de coût

Si une perturbation fait sortir l’état du système du noyau de viabilité, nécessairement la propriété qui nous intéresse sera perdue. Elle pourra éventuellement être restaurée si l’état atteint appartient au bassin de capture du noyau de viabilité. Cependant, la perte temporaire de cette propriété a un coût composé de deux termes : le premier terme correspond au coût écologique (il mesure le temps passé par le lac dans un état eutrophe), le second au coût économique (il mesure le temps passé avec des bénéfices négatifs pour les activités agricoles

pondéré par la valeur absolue de ces déficits) :

$$\lambda_{K,T=\infty}(y) := \min_{y(\cdot) \in \mathcal{S}(y)} \int_0^{+\infty} (c_1 \cdot \chi_1(y(\tau)) + c_2 \cdot \chi_2(y(\tau))) d\tau \quad (2.9)$$

avec $\chi_1, \chi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &:= 1 & \text{si } x \in X \setminus H_1, \\ &:= 0 & \text{si } x \in H_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec $H_1 := \{x = (L, P) \in X \mid P \leq P_{max}\}$ et

$$\begin{aligned} \chi_2(x) &:= L_{min} - L & \text{si } x \in X \setminus H_2, \\ &:= 0 & \text{si } x \in H_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $H_2 := H = \{x = (L, P) \in X \mid L \geq L_{min}\}$.

Cette fonction de coût est représentée dans la figure 2.5.

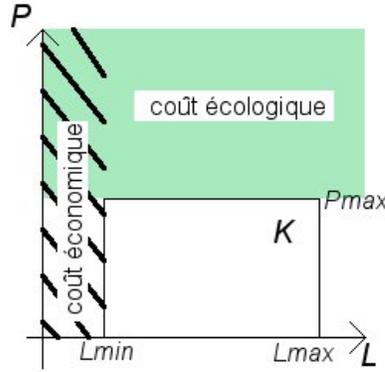


FIG. 2.5 – La fonction de coût comporte deux termes : la zone où le coût écologique est non nul est coloriée en vert, celle où le coût économique est non nul est hachurée.

La figure 2.6 représente les lignes de niveau de cette fonction de coût pour un lac irréversible et pour un lac hystérésique. Dans le cas d'un lac irréversible, figure 2.6(a), il existe des états pour lesquels le coût est infini, ce qui signifie que si l'état du système s'y trouvait suite à l'occurrence d'une perturbation, la propriété d'intérêt ne pourrait être restaurée (ces états n'appartiennent pas au bassin de capture du noyau de viabilité). Dans le cas hystérésique, en revanche, le coût est partout fini, figure 2.6(b), ce qui signifie que la propriété d'intérêt peut toujours être restaurée.

Résilience

La valeur de résilience en un état du système, $R(x)$, mesure l'inverse du coût maximal associé à la restauration de la propriété d'intérêt suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées :

$$R(x) = \frac{1}{\max_{y \in D(x)} \lambda_{K,T=\infty}(y)}. \quad (2.12)$$

Ses valeurs sont représentées dans la figure 2.7 dans le cas du lac irréversible :

- les états appartenant à la zone grise ont une résilience nulle, c'est à dire que parmi les perturbations envisagées il y en a au moins une qui provoquerait un saut de l'état du système non seulement hors du noyau de viabilité mais même hors du bassin de capture du noyau, la propriété d'intérêt ne peut être restaurée quelle que soit la fonction de contrôle employée,

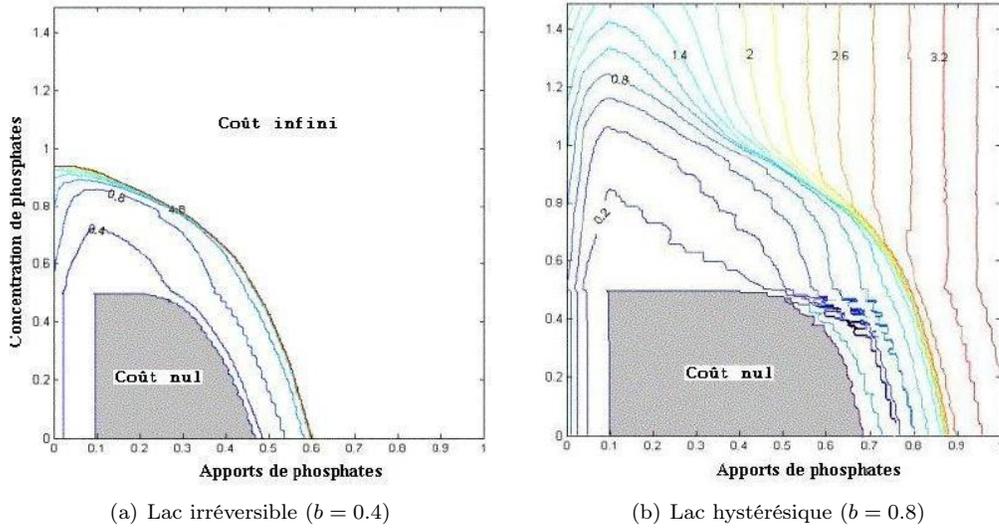


FIG. 2.6 – Lignes de niveau de la fonction de coût (2.9) avec $c_1 = 0.3$ et $c_2 = 17$. Dans la zone grise correspondant au noyau de viabilité, le coût est nul. A partir d'un point de la zone où le coût est infini, le noyau de viabilité ne peut être atteint, la propriété ne peut être restaurée et préservée.

- les états appartenant à la zone hachurée ont une résilience infinie c'est à dire que pour toute perturbation envisagée, l'état du système restera dans le noyau de viabilité, l'impact de ces perturbations sur la capacité du système à préserver la propriété est donc nul,
- dans la zone restante, les lignes de niveau indiquent le pire des coûts, fini, de restauration suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées, la propriété est perdue mais peut être restaurée, la résilience est alors finie mais non nulle.

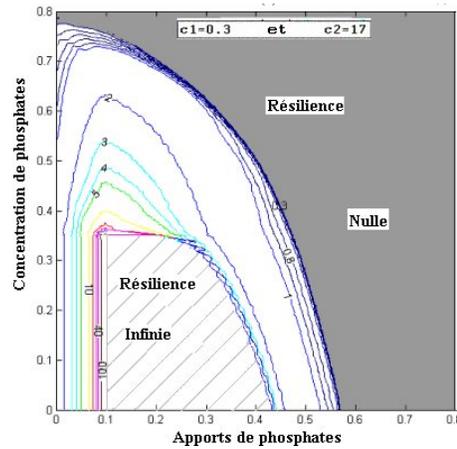


FIG. 2.7 – Lignes de niveau de la résilience définie par (2.12) pour un lac irréversible ($b = 0.4$).

2.1.2 Gestion de pâturage

En collaboration avec Guillaume Deffuant, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea, et Justin Calabrese, Helmholtz Centre for Environmental Research-UFZ, Leipzig, Germany [12]

Nous avons repris un modèle stylisé de gestion de pâturage d'[Anderies *et al.*, 2002]. Il explore les impacts des facteurs physiques, écologiques et économiques sur la résilience du système de pâturage. Le problème est celui du compromis entre des objectifs conflictuels d'accroissement du profit à court terme et de la préservation de la durabilité du pâturage. Accroître la pression de pâturage (nombre d'animaux par hectare) permet d'augmenter le gain à court terme, mais peut conduire à une dégradation irréversible de la pâture si la pression de pâturage qui en résulte est trop importante. D'un autre côté, conserver un taux de pâturage trop bas peut conduire à des pertes substantielles de revenu. L'objectif de la gestion du pâturage est alors d'identifier, si elles existent, les politiques d'action (évolution de la pression de pâturage au cours du temps) qui réconcilient ces objectifs concurrents.

Le modèle d'évolution de la dynamique

Le modèle originel possède deux dimensions :

$$\begin{cases} c'(t) &= r_c s(t) - \delta_c c(t) \\ s'(t) &= c(t)(a_c + r_s s(t))(1 - \frac{s(t)}{s^*}) - \gamma_g s(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $c(t)$ et $s(t)$ représentent respectivement la biomasse racinaire et la biomasse aérienne au temps t . Le paramètre s^* est la valeur maximale de la biomasse aérienne par unité de surface associée à un niveau nutritif du sol et un régime de pluie, et γ_g est la fraction de biomasse aérienne éliminée par pâturage. Les racines poussent à la vitesse $r_c s(t)$ et décroissent au taux δ_c . a_c mesure la croissance de la biomasse aérienne par unité de biomasse racinaire dépendant uniquement de cette biomasse racinaire. Le terme r_s mesure la croissance de la biomasse aérienne par unité de biomasse racinaire et par unité de biomasse aérienne dépendant de l'interaction entre biomasses racinaire et aérienne.

En faisant l'hypothèse que la biomasse racinaire est à l'équilibre, $c'(t) = 0$, l'évolution de la biomasse aérienne est gouvernée par l'équation différentielle :

$$s'(t) = \frac{r_c}{\gamma_c} s(a_c + r_s s)(1 - \frac{s}{s^*}) - \gamma_g s. \quad (2.14)$$

Par rapport au modèle d'[Anderies *et al.*, 2002], nous ajoutons la possibilité pour des gestionnaires du territoire de modifier la pression de pâturage, $\gamma_g(t)$, qui est la quantité de biomasse aérienne extraite par unité de surface au temps t . Plus précisément, nous supposons que pour tout t , les variations de γ_g peuvent être contrôlées : $\gamma_g'(t) = u(t)$, avec

$$-0.02 \leq u(t) \leq 0.02.$$

L'évolution de la pression de pâturage est continue et la dérivée est bornée.

La dynamique du système est alors décrite par :

$$\begin{cases} s'(t) &= \frac{r_c}{\gamma_c} s(t)(a_c + r_s s(t))(1 - \frac{s(t)}{s^*}) - \gamma_g s \\ \gamma_g'(t) &= u(t) \in [-0.02; 0.02]. \end{cases} \quad (2.15)$$

La propriété étudiée

Dans cette étude, nous nous intéressons à deux propriétés correspondant à des positionnements différents dans le diagramme qui représente les équilibres de la biomasse aérienne

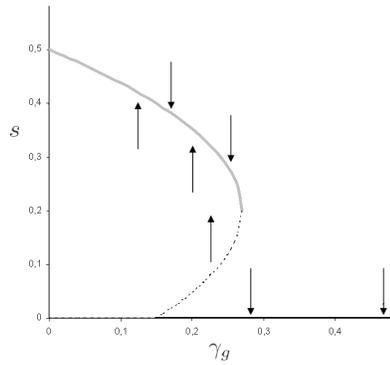
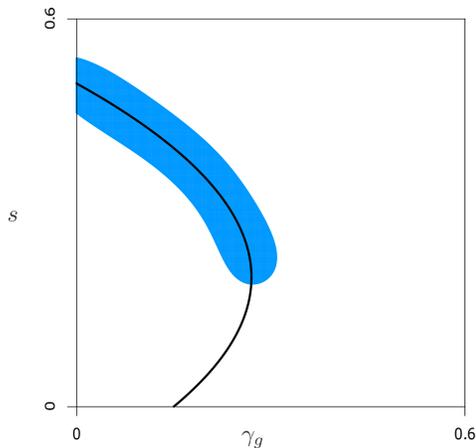


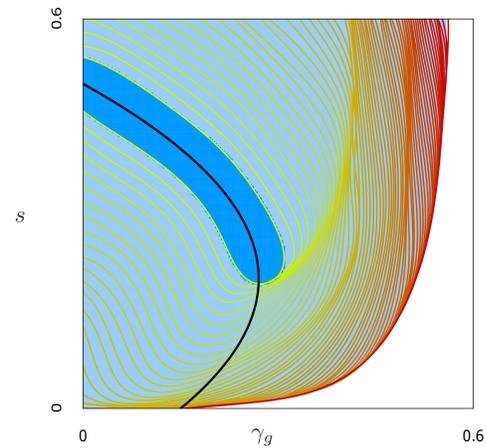
FIG. 2.8 – Les « bons » équilibres asymptotiquement stables (en gris) correspondent aux hauts niveaux de biomasse et les « mauvais » à une biomasse nulle (en noir).

(2.14) en fonction de la pression de pâturage, γ_g , considérée alors comme un paramètre (Fig. 2.8).

Nous étudions dans un premier temps la propriété du système telle que l'ensemble des contraintes associé dans l'espace des états soit un voisinage des équilibres asymptotiquement stables avec biomasse aérienne élevée. Le noyau de viabilité de cet ensemble de contraintes pour la dynamique (2.15) coïncide avec l'ensemble des contraintes entier (Fig. 2.9(a)). Cela signifie que si la propriété est acquise, elle peut être conservée au cours du temps. À partir de situations initiales hors du noyau de viabilité, nous évaluons le coût de restauration par le temps passé hors du noyau de viabilité. Les courbes de niveau de cette fonction de coût sont représentées figure 2.9(b).



(a) En bleu, le noyau de viabilité du voisinage des équilibres asymptotiquement stables associés à un niveau de biomasse élevée. Il coïncide avec ce voisinage



(b) Lignes de niveau de la fonction de coût égale au temps minimal d'atteinte du noyau de viabilité sur toutes les évolutions

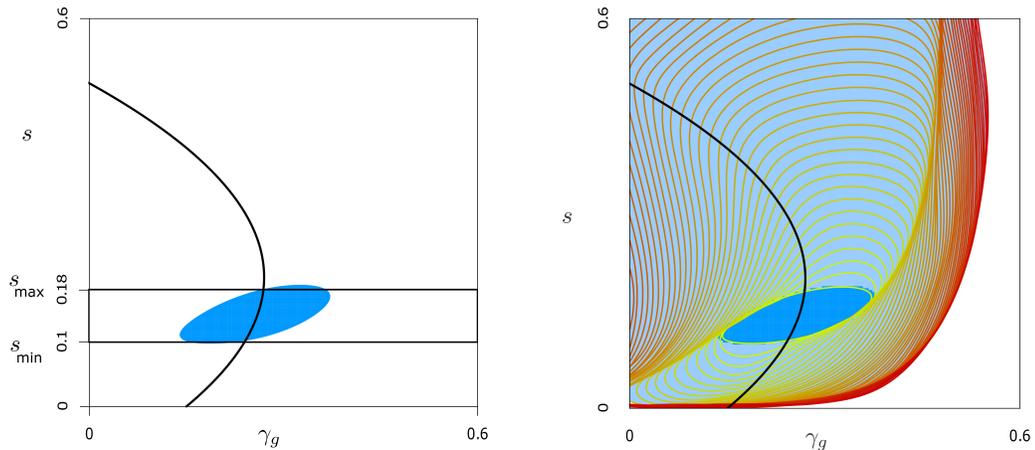
FIG. 2.9 – Modèle de savane (2.15) avec deux variables d'état (s, γ_g), la biomasse des tiges et la pression de pâturage et un contrôle la vitesse de variation de la pression de pâturage; la propriété du système étudiée est décrite par un voisinage des équilibres associés à une biomasse élevée; la fonction de coût est le temps passé hors du noyau de viabilité.

En tout point de la zone blanche, le coût est infini ce qui signifie que, quelle que soit la

fonction de contrôle utilisée, le voisinage des équilibres correspondant à la propriété d'intérêt ne peut pas être atteint. A partir d'un point de la zone des lignes de niveau, le noyau de viabilité peut être atteint et les lignes de niveau sont celles du temps minimal mis pour l'atteindre.

Cependant, la propriété dont on souhaite étudier la résilience n'est pas nécessairement liée aux équilibres stables de la dynamique du système. Dans le cadre de ce modèle de savane, nous avons illustré cette possibilité. Supposons que l'on veuille garder la biomasse des parties aériennes comprise entre deux seuils, s_{min} et s_{max} , tels qu'aucune des valeurs intermédiaires ne corresponde à un équilibre asymptotiquement stable (quelle que soit la valeur de pression de pâturage constante). Cela est sans doute assez artificiel mais on peut imaginer qu'une hauteur d'herbe trop élevée traduirait une trop faible utilisation de la ressource. Une telle propriété est représentée par l'ensemble des contraintes rectangulaire tracé en noir dans la figure 2.10(a).

En gardant la même dynamique avec la possibilité de faire varier la pression de pâturage avec une vitesse bornée (2.15), le noyau de viabilité obtenu est représenté figure 2.10(a) et les courbes de niveau de la fonction de coût mesurant le temps minimal à passer hors du noyau avant de l'atteindre sont représentées dans la figure 2.10(b).



(a) En bleu, le noyau de viabilité de l'ensemble des contraintes associé à un niveau de biomasse bornée

(b) Lignes de niveau de la fonction de coût égale au temps minimal d'atteinte du noyau de viabilité

FIG. 2.10 – Modèle de savane (2.15) avec deux variables d'état (s, γ_g), la biomasse de tiges et la pression de pâturage et un contrôle la vitesse de variation de la pression de pâturage ; la propriété du système étudiée est décrite par une biomasse comprise entre deux bornes, $K = [0; +\infty] \times [0.05; 0.18]$; la fonction de coût est le temps passé hors du noyau de viabilité.

Malgré l'absence dans l'ensemble des contraintes d'équilibre asymptotiquement stable pour la dynamique (2.14) à γ_g fixé, la possibilité de faire varier γ_g permet d'obtenir un noyau de viabilité non vide ce qui signifie qu'à partir de certains points il existe des variations de la pression de pâturage qui permettent de conserver un biomasse aérienne comprise entre les bornes s_{min} et s_{max} . Dès lors, le bassin de capture de ce noyau rassemble tous les points à partir desquels il est possible de l'atteindre.

Dans cette application, les perturbations envisagées n'ont pas été précisées. Cependant, soit $D : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$, la correspondance qui à tout état du système associe l'ensemble des états atteignables suite à l'occurrence d'une des perturbations envisagées. La connaissance de la valeur de la fonction de coût en tout point de l'ensemble des états, $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, permet de déduire la résilience de la propriété considérée vis à vis de ces perturbations envisagées lorsque l'effort pour retrouver la capacité de préserver la propriété est mesuré par la fonction

c :

$$R(x) = \frac{1}{\max_{y \in D(x)} c(y)}.$$

2.1.3 Compétition entre langues

En collaboration avec Claire Bernard, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [4]

Le modèle de la dynamique

Dans le modèle connu d'[Abrams et Strogatz, 2003], et dans ceux qu'il a inspirés, la taille de la population est supposée constante et ainsi les variables sont les proportions des différents groupes de locuteurs. Si la population est composée de trois groupes, les monolingues pour la langue A , ceux pour la langue B et les bilingues, le modèle a deux dimensions avec σ_A la proportion de monolingues A et σ_B la proportion de monolingues B ($\sigma_{AB} = 1 - \sigma_A - \sigma_B$).

Dans chacune des sous-populations linguistiques, il y a des forces, des influences exercées par les membres d'un autre groupe pour changer de pratique linguistique. L'hypothèse d'Abrams et Strogatz est que le taux de changement de langues dépend de l'attractivité de l'autre langue. Et l'autre langue est d'autant plus attractive que le nombre de personnes qui la parlent est important et que son prestige est élevé. Ainsi pour deux groupes monolingues, la fraction de monolingues B qui deviennent monolingues A par unité de temps est décrite par :

$$P_{B \rightarrow A} = s_A \sigma_A^a. \quad (2.16)$$

s_A représente le prestige de la langue A , et a est un paramètre qui décrit comment l'attractivité de la langue A évolue avec la proportion de personnes qui la parlent. Et la vitesse d'évolution de σ_A est donnée par :

$$\frac{d\sigma_A}{dt} = \sigma_B P_{B \rightarrow A} - \sigma_A P_{A \rightarrow B} \quad (2.17)$$

(avec une equation analogue pour $\frac{d\sigma_B}{dt}$).

Nous avons étendu le modèle d'[Abrams et Strogatz, 2003] en incluant un groupe de bilingues. L'équation (2.17) devient :

$$\frac{d\sigma_A}{dt} = \sigma_B P_{B \rightarrow A} + \sigma_{AB} P_{AB \rightarrow A} - \sigma_A (P_{A \rightarrow B} + P_{A \rightarrow AB}). \quad (2.18)$$

En supposant, comme [Wang et Minett, 2005], que les transitions $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ sont extrêmement rares, nous modélisons uniquement quatre transitions : $A \rightarrow AB$, $AB \rightarrow A$, $A \rightarrow AB$, et $AB \rightarrow B$ [Castello *et al.*, 2006, Minett et Wang, 2008]. De plus, comme [Castello *et al.*, 2006], nous supposons une asymétrie entre groupes monolingues et bilingues : $A \rightarrow AB$ (resp. $B \rightarrow AB$) à un taux proportionnel à l'attractivité des monolingues A (resp. B); $AB \rightarrow A$ (resp. $AB \rightarrow B$) à un taux proportionnel à l'attractivité de tous ceux qui parlent A , y compris les bilingues (ainsi, des bilingues peuvent produire des monolingues même en l'absence de monolingues) :

$$\begin{aligned} P_{AB \rightarrow A} &= (1 - \sigma_B)^a s_A \\ P_{A \rightarrow AB} &= \sigma_B^a s_B. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Et le modèle à deux dimensions est décrit par :

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_A}{dt} &= (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s_A - \sigma_A \sigma_B^a s_B \\ \frac{d\sigma_B}{dt} &= (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a s_B - \sigma_B \sigma_A^a s_A.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Posons $s_A = s$ et $s_B = 1 - s_A$, si la valeur du prestige, s , est constante dans $]0; 1[$, la dynamique (2.20) a trois équilibres : $(0, 1)$ et $(1, 0)$ qui sont stables et $(\sigma_{A,e}, \sigma_{B,e})$, $\sigma_{A,e} > 0$, $\sigma_{B,e} > 0$ qui est instable. Par conséquent, une langue est condamnée à disparaître.

Nous envisageons donc que le prestige s puisse évoluer (suite à des politiques publiques par exemple), mais avec une vitesse bornée. D'où le système dynamique contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_A}{dt} = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s - \sigma_A \sigma_B^a (1 - s) \\ \frac{d\sigma_B}{dt} = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a (1 - s) - \sigma_B \sigma_A^a s \\ \frac{ds}{dt} = u \\ u \in U. \end{cases}\quad (2.21)$$

La propriété étudiée

Pour préserver la diversité linguistique, nous étudions comme propriété d'intérêt du système la présence au-dessus d'une certaine proportion seuil, $\underline{\sigma}$, des deux groupes monolingues.

Cette propriété est décrite par l'ensemble de contraintes K défini par :

$$\begin{aligned}0 < \underline{\sigma} &\leq \sigma_A \leq 1 \\ 0 < \underline{\sigma} &\leq \sigma_B \leq 1 \\ 0 &\leq s \leq 1.\end{aligned}\quad (2.22)$$

$s \in [0, 1]$ par définition (Fig. 2.11).

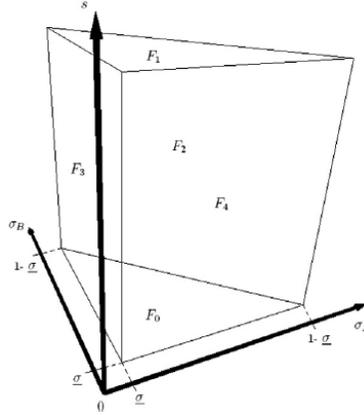


FIG. 2.11 – L'ensemble de contraintes K .

Description géométrique de l'ensemble des contraintes associé à la situation de coexistence de deux groupes monolingues

Soit K l'ensemble de contraintes correspondant à la coexistence de deux groupes monolingues (2.22). Sa frontière ∂K est la réunion de 5 faces :

- $F_0 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, s = 0\}$
- $F_1 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, s = 1\}$
- $F_2 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B = 1, 0 \leq s \leq 1\}$
- $F_3 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A = \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$
- $F_4 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B = \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$.

Noyau ou plutôt domaine de viabilité

Nous cherchons des stratégies de variations du prestige telles que des proportions minimales de monolingues des deux langues soient préservées, c'est à dire des évolutions telles que :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} 0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_A(t) \leq 1 \\ 0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_B(t) \leq 1 \\ 0 \leq s(t) \leq 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

En étudiant l'intersection entre la correspondance décrivant la dynamique (2.21), et les cônes contingents à l'ensemble des contraintes, T_K , nous montrons d'abord que K n'est pas un domaine de viabilité (définition 2.2.2). En effet, il existe des points $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \partial K$ tels que $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) \cap \{(\sigma'_A, \sigma'_B, u) \mid u \in U\} = \emptyset$.

K contient donc des points non viables à partir desquels les proportions minimales de monolingues des deux langues ne peuvent être préservées. Il est cependant possible de sculpter à l'intérieur de K un ensemble qui soit un domaine de viabilité, les étapes de cette détermination sont décrites en détails dans la section 2.2.1.

La figure 2.12 représente plusieurs vues 3D de cet ensemble lorsque $\underline{\sigma} = 0.1$ et $\bar{u} = 0.06$.

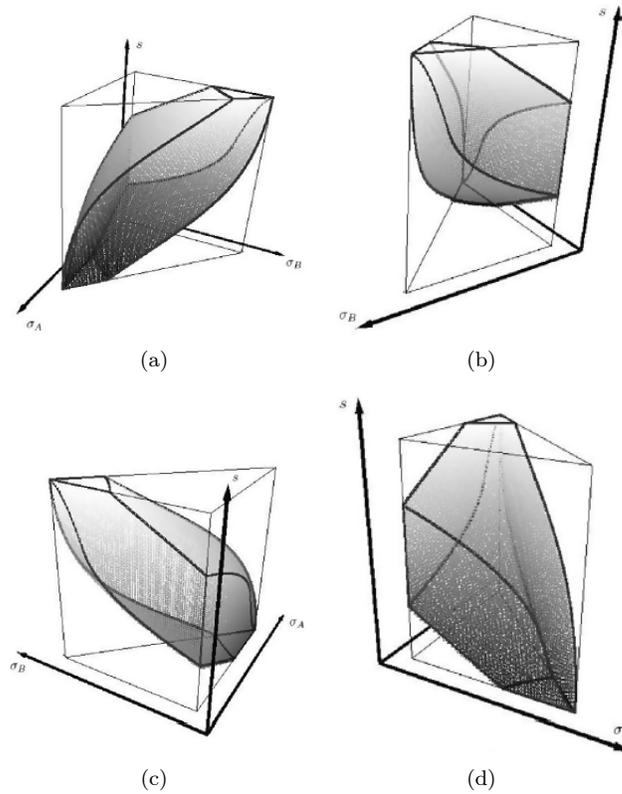


FIG. 2.12 – Quatre vues 3D du domaine de viabilité de l'ensemble K (2.22) pour la dynamique (2.21).

La résilience de cette propriété de coexistence de deux langues

Nous utilisons à nouveau la fonction de coût mesurant le temps passé hors du domaine de viabilité pour évaluer la résilience. La figure 2.13 montre les bassins de capture de D pour

différents horizons temporels (plus le gris est clair plus le temps d'atteinte est long) ; ainsi leurs frontières sont des lignes de niveau de la fonction de coût.

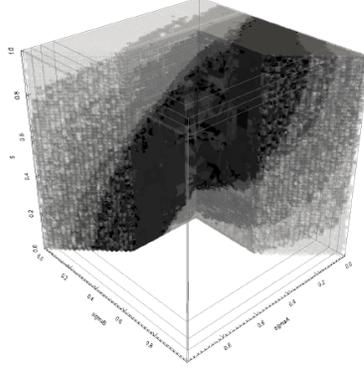


FIG. 2.13 – Ensembles de niveau de la fonction temps passé hors du domaine de viabilité. Le domaine de viabilité est représenté en noir (c'est celui de la figure 2.12). Les ensembles de niveau de la fonction de coût sont représentés par des couleurs de plus en plus claires lorsque ce coût augmente.

2.1.4 Activité touristique et qualité de l'environnement

En collaboration avec Wei Wei et Isabelle Alvarez, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [2]

Le modèle de [Casagrandi et Rinaldi, 2002] s'intéresse à l'interaction entre tourisme et environnement. L'espace des états de leur modèle est de dimension 3 : l'activité touristique $T(t)$, la qualité de l'environnement naturel $E(t)$ et le capital $C(t)$ vu comme structures dédiées aux activités touristiques. Leurs dynamiques sont gouvernées par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{dT(t)}{dt} &= T(t) \left[\mu_E \frac{E(t)}{E(t)+\varphi_E} + \mu_C \frac{C(t)}{C(t)+\varphi_C T(t)+\varphi_C} - \alpha T(t) - a \right] \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= E(t) \left[r E(t) \left(1 - \frac{E(t)}{K} \right) - \beta C(t) - \gamma T(t) \right] \\
 \frac{dC(t)}{dt} &= -\delta C(t) + \epsilon T(t).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La première équation décrit les variations de l'activité touristique, proportionnelle à l'activité actuelle et à l'attractivité relative du site. Son attractivité est composée de deux facteurs positifs, l'attractivité environnementale et celle des infrastructures, et de deux facteurs négatifs, la congestion et l'attractivité moyenne des autres sites (a peut être vu comme une mesure de la compétition exercée par les sites touristiques concurrents). Le paramètre μ_E est l'attractivité associée à une haute qualité environnementale, et φ_E la valeur de la qualité environnementale pour laquelle l'attractivité est la moitié de l'attractivité maximale. μ_C et φ_C sont eux associés à l'attractivité de l'infrastructure. La congestion est proportionnelle à l'activité touristique, T , avec le facteur $-\alpha$.

La deuxième équation décrit les variations de la qualité de l'environnement. Elle comprend une équation logistique qui décrit l'impact sur l'environnement des activités autres que le tourisme. Les paramètres r et K sont le taux de croissance net et la capacité de cette fonction logistique. Les deux autres termes représentent les dégâts induits par le tourisme corrélés de façon positive avec l'activité touristique (facteur γ) et les infrastructures (facteur β).

La dernière équation décrit le taux d'évolution du capital comme différence entre les investissements ϵT et la dépréciation δC (ϵ est le taux d'investissement et δ le taux de dépréciation). Le paramètre δ est supposé petit comparé à r pour tenir compte du fait que la dégradation des infrastructures touristiques est lente.

Nous utilisons les mêmes valeurs de paramètres que [Casagrandi et Rinaldi, 2002] :

$$r = K = \alpha = \beta = \gamma = \varphi_C = 1, \delta = 0.1, \varphi_E = 0.5, \mu_E = \mu_C = 10. \quad (2.25)$$

Dans [Casagrandi et Rinaldi, 2002], les paramètres, en fonction desquels l'analyse asymptotique est menée, sont a qui mesure la compétition exercée par les sites concurrents et ϵ le taux d'investissement. Les auteurs considèrent comme sûres les situations pour lesquelles il y a un seul équilibre asymptotiquement stable avec qualité de l'environnement et activité touristique strictement positives, et risquées des situations pour lesquelles l'équilibre correspondant à une qualité de l'environnement ou une activité touristique nulle est stable également, car une perturbation, un choc dans l'espace des états pourrait conduire l'état du système dans le bassin d'attraction de ce second attracteur caractérisé par aucune activité touristique ou un environnement complètement dégradé.

Cependant, une évolution vers un équilibre asymptotiquement stable dans une configuration sûre ou risquée d'après l'analyse du diagramme de bifurcation, peut être considérée comme peu souhaitable durant la phase transitoire : la distance à l'attracteur, tout d'abord, n'est pas nécessairement monotone décroissante, l'information de distance maximale à l'attracteur au cours de l'évolution (ou au moins une borne supérieure) est nécessaire pour s'assurer que les états non souhaitables du système sont évités ; ensuite, le temps nécessaire pour atteindre un voisinage de l'équilibre, nécessairement fini, peut être court ou bien trop long pour être jugé acceptable (par exemple, une évolution pour laquelle l'environnement resterait très dégradé sur une longue période, même si elle finit par croître vers la valeur strictement positive de l'équilibre.)

La propriété étudiée et l'étude de la capacité du système à la conserver en l'absence de perturbations

Lorsque $a = 6$ et $\epsilon = 0.1$ dans le modèle (2.24), l'équilibre asymptotiquement stable avec des valeurs d'activité touristique et de qualité environnementale strictement positives vaut approximativement ($\bar{T} \approx 0.125$, $\bar{E} \approx 0.526$, $\bar{C} \approx 0.125$). Définissons une boule (pour la norme sup) de taille Δ autour de cet attracteur :

$$K := [\bar{T} - \Delta; \bar{T} + \Delta] \times [\bar{E} - \Delta; \bar{E} + \Delta] \times [\bar{C} - \Delta; \bar{C} + \Delta].$$

Et étudions la propriété du système d'être dans un état appartenant au voisinage K de cet équilibre.

Nous approchons le noyau de viabilité de K pour différentes valeurs de Δ en utilisant l'algorithme décrit dans [8]. Le noyau de viabilité de la boule de taille Δ centrée sur l'attracteur rassemble les points à partir desquels l'évolution reste à une distance de l'attracteur inférieure à Δ (Fig. 2.14).

La frontière de ce noyau de viabilité est ainsi l'ensemble de niveau Δ de la fonction distance maximale à l'attracteur. Par conséquent, le calcul des noyaux de viabilité pour différentes valeurs de Δ permet d'approcher le graphe de la fonction maximale distance à l'attracteur au cours de l'évolution.

En prenant une valeur légèrement supérieure pour ϵ , $\epsilon = 0.13$, qui correspond à un taux d'investissement légèrement plus élevé dans le modèle (2.24), l'équilibre asymptotiquement stable à valeurs de qualité de l'environnement et d'activité touristique strictement positives est remplacé par un cycle limite [Casagrandi et Rinaldi, 2002]. Cependant, même s'il n'est plus un attracteur, le point ($\bar{T} \approx 0.125$, $\bar{E} \approx 0.526$, $\bar{C} \approx 0.125$) reste un état souhaitable du

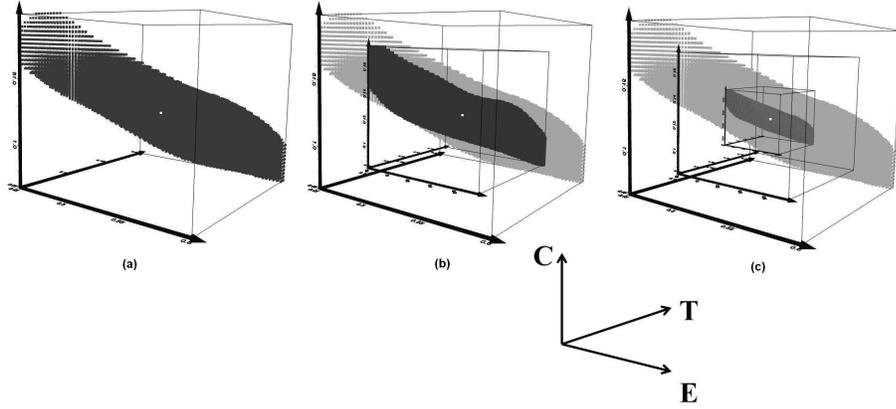


FIG. 2.14 – Les valeurs des paramètres sont celles de (2.25) avec $a = 6$ et $\epsilon = 0.1$. L'attracteur est $(\bar{T} \approx 0.125, \bar{E} \approx 0.526, \bar{C} \approx 0.125)$. Les régions foncées représentent le noyau de viabilité pour la dynamique (2.24) et l'ensemble des contraintes $K = [\bar{T} - \Delta; \bar{T} + \Delta] \times [\bar{E} - \Delta; \bar{E} + \Delta] \times [\bar{C} - \Delta; \bar{C} + \Delta]$, $\Delta = 0.075$ pour la figure (a), $\Delta = 0.05$ pour la figure (b) et $\Delta = 0.025$ pour la figure (c). En gris clair, le noyau de viabilité associé à $\Delta = 0.075$.

système avec des valeurs strictement positives pour les trois variables d'état. Et la question de déterminer la distance maximale à ce point au cours d'une évolution reste pertinente.

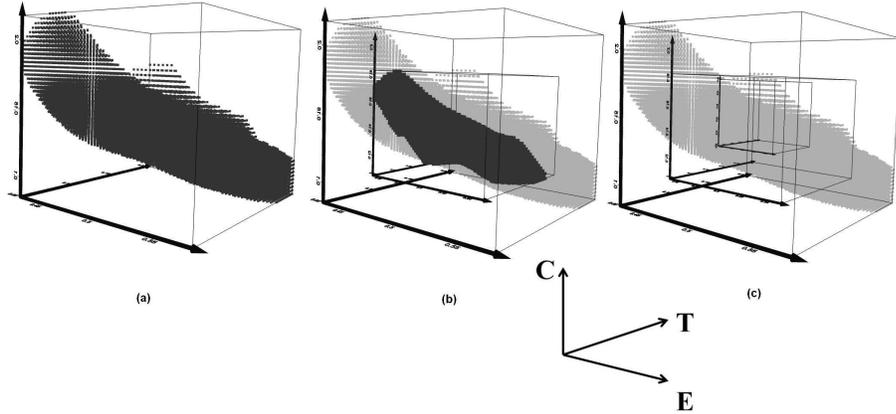


FIG. 2.15 – Les valeurs des paramètres sont celles de (2.25) avec $a = 6$ et $\epsilon = 0.13$. L'attracteur est $(\bar{T} \approx 0.125, \bar{E} \approx 0.526, \bar{C} \approx 0.125)$. Les régions foncées représentent le noyau de viabilité pour la dynamique (2.24) et l'ensemble des contraintes $K = [\bar{T} - \Delta; \bar{T} + \Delta] \times [\bar{E} - \Delta; \bar{E} + \Delta] \times [\bar{C} - \Delta; \bar{C} + \Delta]$, $\Delta = 0.075$ pour la figure (a), $\Delta = 0.05$ pour la figure (b) et $\Delta = 0.025$ pour la figure (c), le noyau de viabilité est vide. En gris clair, le noyau de viabilité associé à $\Delta = 0.075$.

Les figures 2.15 (a), 2.15 (b) et 2.15 (c) représentent les noyaux de viabilité pour les trois ensembles de contraintes précédents mais avec $\epsilon = 0.13$ dans la dynamique. Les deux premiers noyaux ne sont pas vides, il existe des points de départ dont les évolutions restent dans l'ensemble de contraintes. Comme ces évolutions convergent vers le cycle limite unique attracteur, cela implique que celui-ci est inclus dans les boules centrées en $(\bar{T} \approx 0.125, \bar{E} \approx 0.526, \bar{C} \approx 0.125)$ de rayons $\Delta = 0.075$ et $\Delta = 0.05$. Au contraire, lorsque $\Delta = 0.025$, le noyau de viabilité est vide, ce qui signifie que cette plus petite boule ne contient pas le cycle limite.

La fonction de coût

À partir d'un point du noyau de viabilité d'un voisinage autour d'un équilibre, nécessairement l'évolution restera dans ce voisinage. Néanmoins, si une perturbation se produit qui provoque un saut dans l'espace des états hors de ce noyau de viabilité, c'est le bassin de capture de ce noyau de viabilité qui renseignera sur le temps nécessaire pour retourner dans le noyau et évaluer ainsi le coût de la perturbation en terme de temps passé hors du voisinage de l'équilibre.

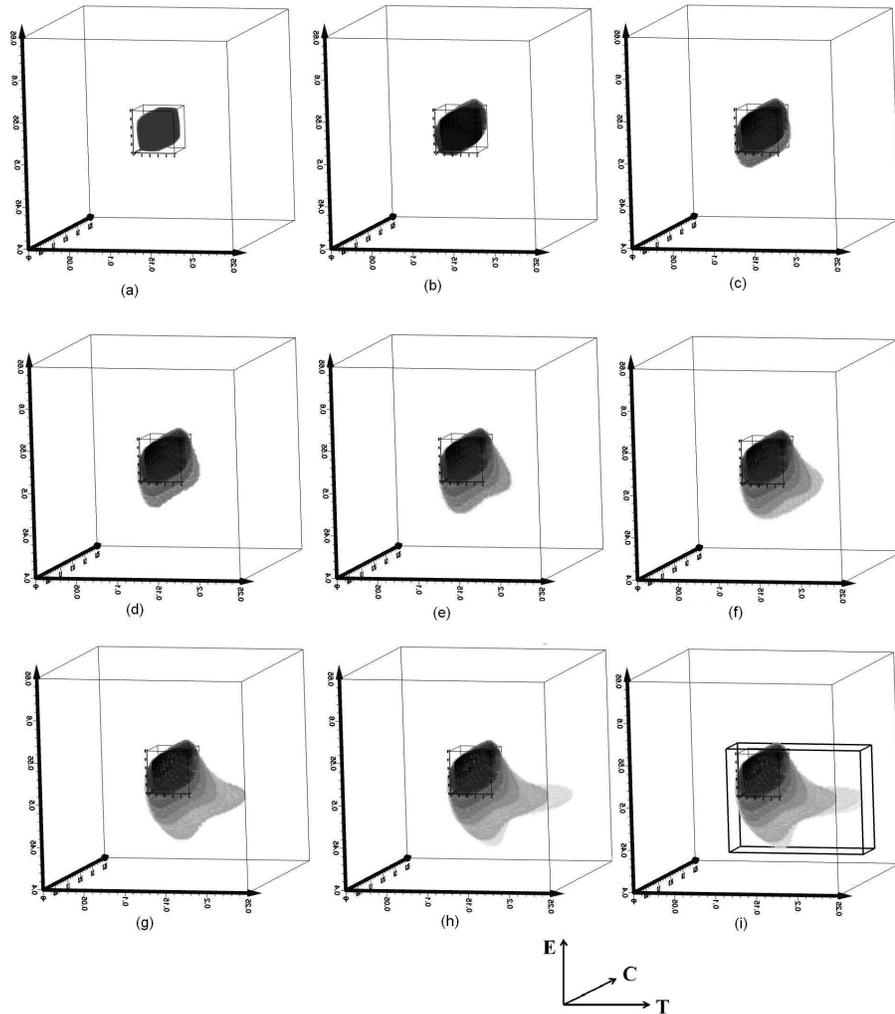


FIG. 2.16 – (a) En noir, l'ensemble des contraintes et le noyau de viabilité de la figure 2.14 (c). (b)... (i) Le dégradé de gris représente les bassins de capture successifs pour huit valeurs croissantes du temps maximal d'atteinte du noyau de viabilité $t = 10, \dots, t = 80$.

La figure 2.16 (a) reproduit le noyau de viabilité du paragraphe précédent représenté dans la figure 2.14 (c). Les huit figures suivantes (Figure 2.16) représentent les bassins de capture du noyau de viabilité pour huit temps d'atteinte croissants ($t = 10, t = 20, \dots, t = 80$). Les points du bassin de capture ne sont pas répartis de façon homogène autour du noyau de viabilité, seuls les évolutions partant de points initiaux appartenant au bassin de capture de la figure 2.16 (i) atteignent le noyau de viabilité en un temps plus petit ou égal à 80. Cette observation montre que partir proche du noyau de viabilité n'implique pas l'atteindre plus

rapidement.

Ainsi, après une perturbation, l'effort de restauration est évalué par le temps nécessaire à l'atteinte de situations sûres. Cependant, suivant les applications, des mesures de coût plus complexes peuvent être plus appropriées comme dans l'étude de l'eutrophisation des lacs de la section 2.1.1. Dans le cas du modèle de tourisme, une fonction de coût plus complexe pourrait être composée de deux termes : le premier terme correspondrait à un coût écologique en mesurant le temps passé avec un environnement de qualité inférieure au minimum acceptable, \underline{E} ; le second terme serait un coût économique mesuré par la durée d'activité touristique trop faible pondérée par l'écart à l'activité minimale acceptable, $\underline{T} - T(t)$.

2.2 Calculs de noyaux de viabilité et de bassins de capture

2.2.1 Descriptions exactes

L'évaluation de la résilience nécessite le calcul de sous-ensembles de l'espace des états, le noyau de viabilité et le bassin de capture, comme nous l'avons illustré dans la section 2.1.

Peu de descriptions exactes de noyaux de viabilité ont été déterminées. Nous connaissons les descriptions exactes de deux noyaux de viabilité de deux problèmes de dimension deux pour l'espace des états et de dimension un pour l'espace des contrôles : le modèle dit de croissance de population dans un espace limité [Aubin et Saint-Pierre, 2006] et le modèle dit de consommation [Aubin, 1991, chap. 6.2] (qui nous servira pour évaluer la précision d'algorithmes d'approximations en section 2.2.3).

Les outils nécessaires sont la caractérisation des domaines de viabilité par des conditions tangentielles et le théorème de viabilité.

Caractérisation d'un domaine de viabilité et théorème de viabilité

Rappelons les définitions d'un cône contingent et d'un domaine de viabilité [Aubin, 1991]. Soit X un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 2.2.1 (Cône contingent). *Soit D un sous-ensemble de X et $x \in D$, le cône contingent $T_D(x)$ à D en x est le cône fermé des éléments v tels que*

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(x + hv, K)}{h} = 0. \quad (2.26)$$

Si D est différentiable en x , le cône contingent est l'espace tangent.

Définition 2.2.2 (Domaine de viabilité). *Soit $F : X \rightsquigarrow X$ une correspondance non triviale. Un sous-ensemble $D \subset \text{Dom}^1(F)$ est un domaine de viabilité de F si et seulement si*

$$\forall x \in D, F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset. \quad (2.27)$$

¹Soit $F : X \rightsquigarrow X$ une correspondance non triviale,

$$\text{Dom}(F) = \{x \in X \text{ tels que } F(x) \neq \emptyset\}.$$

Définition 2.2.3 (Système contrôlé Marchaud). Soient $U : X \rightsquigarrow Y$ et $f : X \times Y \rightarrow X$. $\mathcal{S} := (U, f)$ est un système contrôlé Marchaud si $\text{Graph}(U)$ est fermé, f est continue, f et U ont des croissances linéaires² et les ensembles $\{f(x, u) | u \in U(x)\}$ sont convexes pour tout $x \in \text{Dom}(U)$.

Soit $\mathcal{S}(x_0)$ l'ensemble de toutes les évolutions, $x(\cdot) : t \in [0, \infty[\rightarrow x(t) \in X$ issues de $x_0 \in X$ et gouvernées par le système dynamique contrôlé Marchaud \mathcal{S} :

$$\mathcal{S}(x) = \{x(\cdot) | x(0) = x_0 \text{ et pour presque tout } t \geq 0, x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ et } u(t) \in U(x(t))\}. \quad (2.28)$$

Définition 2.2.4 (Evolution viable). Soit $K \subset X$, une évolution $x(\cdot) : t \in [0, \infty[\rightarrow x(t) \in X$ est viable dans K si $\forall t \geq 0, x(t) \in K$.

Théorème 2.2.1 (Théorème de viabilité). Soit un système contrôlé Marchaud $\mathcal{S} : (U, f)$ et un sous-ensemble fermé $D \subset \text{Dom}(U)$ de X . Soit $F(x) := \{f(x, u)\}_{u \in U(x)}$. Si D est un domaine de viabilité pour F , alors à partir de tout point $x_0 \in D$, il existe $x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0)$ avec $x(\cdot)$ viable dans D .

Définition 2.2.5 (Noyau de viabilité). Soit $K \subset \text{Dom}(U)$, le noyau de viabilité de K pour le système contrôlé $\mathcal{S} = (U, f)$, noté $\text{Viab}_{\mathcal{S}}(K)$, est le sous-ensemble des états initiaux $x_0 \in K$ tels qu'il existe au moins une évolution $x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0)$ viable dans K .

Théorème 2.2.2. Soit $\mathcal{S} = (U, f)$ un système contrôlé Marchaud, soit $K \subset \text{Dom}(U)$ fermé, alors le noyau de viabilité de K existe et est égal au plus grand domaine de viabilité fermé de \mathcal{S} inclus dans K .

Grâce au théorème de viabilité (théorème 2.2.1), la stratégie pour obtenir la description exacte d'un noyau de viabilité est de définir un sous-ensemble, D , de l'ensemble des contraintes K , puis de montrer grâce aux conditions tangentielles (définition 2.2.2) que cet ensemble est un domaine de viabilité. Pour montrer que D est le noyau de viabilité pour \mathcal{S} de K , il faut démontrer en plus que de tout point de son complémentaire, toutes les évolutions gouvernées par \mathcal{S} quittent K en temps fini.

Dans les deux cas que nous avons étudiés, nous avons déterminé ce sous-ensemble particulier en étudiant d'abord les valeurs de la dynamique sur la frontière de l'ensemble des contraintes, puis en remontant la dynamique pour des valeurs de fonctions de contrôle particulières à partir des points de la frontière où la dynamique peut s'annuler.

Ces études doivent être réalisées au cas par cas. Nous détaillons ici les résultats pour le modèle en deux dimensions d'[Abrams et Strogatz, 2003] (pour l'étude d'un modèle un trois dimensions, voir [4]).

Description exacte du noyau de viabilité correspondant à la coexistence de deux langues dans le modèle de compétitions entre langues d'Abrams-Strogatz

En collaboration avec Claire Bernard, Laetitia Chapel et Guillaume Deffuant, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [4, 6]

²Soit $F : X \rightsquigarrow X$ une correspondance. Notons

$$\|F(x)\| := \sup_{y \in F(x)} \|y\|,$$

F a une croissance linéaire s'il existe une constante positive c telle que

$$\forall x \in \text{Dom}(F), \|F(x)\| \leq c(\|x\| + 1).$$

Cette hypothèse évite l'explosion en temps fini des solutions puisqu'elles sont bornées par une exponentielle.

Le problème de viabilité Dans le modèle d'[Abrams et Strogatz, 2003] la taille de la population est supposée constante et chaque personne parle soit la langue A , soit la langue B . Ainsi, le modèle comporte une seule variable la proportion de personnes parlant la langue A , Σ (la proportion des monolingues B se déduit, $1 - \Sigma$).

Dans chacune des sous-populations linguistiques, il y a des forces, des influences exercées par les membres de l'autre groupe pour changer de pratique linguistique. Et pour [Abrams et Strogatz, 2003], l'évolution des proportions des groupes de locuteurs est gouvernée par :

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = f(\Sigma(t), s(t)) = (1 - \Sigma(t))\Sigma(t)(\Sigma(t)^{a-1}s(t) - (1 - \Sigma(t))^{a-1}(1 - s(t))). \quad (2.29)$$

a est un paramètre (pour plus de détails sur le modèle, voir la section 2.1.3) et s est le prestige relatif de la langue A . Considéré constant par les auteurs, nous considérons la possibilité de faire évoluer ce prestige relatif avec la contrainte que sa dérivée reste bornée [6], ce qui donne le système contrôlé :

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma(t)}{dt} &= f(\Sigma(t), s(t)) = (1 - \Sigma(t))\Sigma(t)(\Sigma(t)^{a-1}s(t) - (1 - \Sigma(t))^{a-1}(1 - s(t))) \\ \frac{ds(t)}{dt} &= u(t) \\ u(t) &\in [\underline{u}, \bar{u}]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La propriété intéressante du système est la préservation d'une proportion minimale de locuteurs dans chacune des deux langues, ce qui correspond à la préservation des deux langues. Cette propriété est décrite par le sous-ensemble de l'espace des états,

$$K := [\Sigma_1; \Sigma_2] \times [0; 1]$$

avec $0 < \Sigma_1 < \Sigma_2 < 1$.

La description exacte du noyau de viabilité La première étape consiste à définir un sous-ensemble E de K candidat pour être un domaine de viabilité pour (2.30).

Soit s_1 tel que $f(\Sigma_1, s_1) = 0$, $s_1 = \frac{(1-\Sigma_1)^{a-1}}{\Sigma_1^{a-1} + (1-\Sigma_1)^{a-1}}$. On définit alors C_1 comme les points de la trajectoire backward avec $u(t) = \underline{u}$ pour (2.30) issue de (Σ_1, s_1) . De même, soit s_2 tel que $f(\Sigma_2, s_2) = 0$, $s_2 = \frac{(1-\Sigma_2)^{a-1}}{\Sigma_2^{a-1} + (1-\Sigma_2)^{a-1}}$. On définit alors C_2 comme les points de la trajectoire backward avec $u(t) = \bar{u}$ pour (2.30) issue de (Σ_2, s_2) .

L'ensemble E candidat pour être domaine de viabilité est le sous-ensemble de K situé en dessous de C_1 et au dessus de C_2 comme représenté dans la figure 2.17.

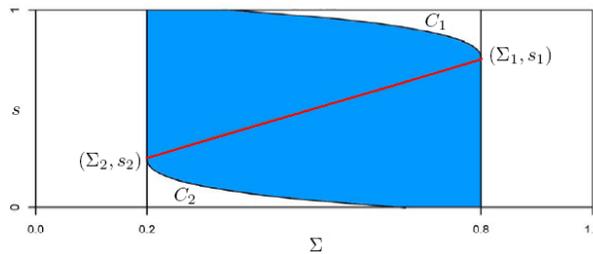


FIG. 2.17 – Ensemble E colorié en bleu, C_1 et C_2 tracés en noir pour les valeurs $a = 0.2$, $\Sigma_1 = 0.8$, $\Sigma_2 = 0.2$, $\underline{u} = -0.1$ et $\bar{u} = 0.1$. En rouge, les couples (Σ, s) , tels que $f(\Sigma, s) = 0$.

Théorème 2.2.3. $E \subset K$ est le noyau de viabilité de l'ensemble K pour la dynamique (2.30).

Démonstration. Les détails de la preuve sont dans [6].

Nous montrons d'abord que E est un domaine de viabilité - En effet, pour tout $(\Sigma, s) \in \partial E$, $\exists u \in U$, tel que $(f(\Sigma, s), u) \in T_E(\Sigma, s)$.

Nous montrons ensuite que E est le plus grand domaine de viabilité - A partir de $(\Sigma, s) \notin E$, toute évolution quitte K en temps fini. \square

2.2.2 Des algorithmes d'approximation

La possibilité de détermination exacte de noyaux de viabilité est à étudier au cas par cas. Des algorithmes d'approximations des noyaux existent depuis les années 1990.

Le premier algorithme de viabilité

Le premier d'entre eux est celui de [Saint-Pierre, 1994].

[Saint-Pierre, 1994] a proposé une méthode de construction de noyaux de viabilité utilisant des approximations discrètes dans le cas Lipschitz ([Quincampoix et Saint-Pierre, 1995] ont adapté l'algorithme au cas des inclusions différentielles Hölderiennes).

Cet algorithme se décompose en deux étapes :

- l'approximation du noyau de viabilité du système continu par des noyaux de systèmes discrets en temps,
- puis par des noyaux de systèmes discrets en temps et en espace.

Nous détaillons cet algorithme car il est à la base des travaux que nous avons menés.

Soit F une correspondance Marchaud³ définie de X dans X .

Soit K un sous-ensemble fermé de X .

L'objectif est d'approcher le noyau de viabilité de K pour F , noté $Viab_F(K)$, et défini comme le sous-ensemble composé de tous les éléments $x_0 \in K$ tels qu'il existe au moins une évolution gouvernée par F et viable dans K . [Saint-Pierre, 1994] utilise pour cela une suite de noyaux de viabilité associés à des systèmes dynamiques contrôlés discrets en temps.

Soit G une correspondance de X dans X , le système dynamique contrôlé en temps discret associé à G est :

$$x^{n+1} \in G(x^n). \quad (2.31)$$

Le noyau de viabilité de K pour G est défini comme le noyau de viabilité continu et noté $Viab_G(K)$.

Théorème 2.2.4. Soient F une correspondance Marchaud et l -Lipschitz et K un sous-ensemble fermé de X tel que $M := \sup_{x \in K} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < +\infty$. Considérons $F_\rho := F + \frac{Ml}{2}\rho\mathcal{B}$ et $\Gamma_\rho := 1 + \rho F_\rho$, alors,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Viab_{\Gamma_\rho}(K) = Viab_F(K)^4, \quad (2.32)$$

³Une correspondance non triviale $F : X \rightsquigarrow X$ est Marchaud si F est semi-continue supérieurement, à valeurs non vides, convexes, compactes et à croissance linéaire.

⁴Les définitions de convergence d'ensembles utilisées sont celles de Painlevé-Kuratowski.

Soit $A(s)$ des sous-ensembles de \mathbb{R}^n paramétrés par $s \in \mathbb{R}$:

Définition 2.2.6. La limite supérieure de $A(s)$ lorsque $s \rightarrow \bar{s}$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{s \rightarrow \bar{s}} d_{A(s)}(x) = 0\}.$$

Cette limite supérieure est notée $Limsup_{s \rightarrow \bar{s}} A(s)$.

Définition 2.2.7. La limite inférieure de $A(s)$ lorsque $s \rightarrow \bar{s}$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{s \rightarrow \bar{s}} d_{A(s)}(x) = 0\}.$$

où les noyaux de viabilité $Viab_{\Gamma_\rho}(K)$ sont des noyaux de viabilité associés aux systèmes discrets en temps.

Pour passer dans un second temps à des noyaux de viabilité discrets en temps dans des ensembles finis, [Saint-Pierre, 1994] associe à tout $h \in \mathbb{R}$, X_h un ensemble dénombrable de parties de X tel que :

$$\forall x \in X, \exists x_h \in X_h \mid d(x, x_h) \leq \alpha(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$.

En pratique, X_h est très souvent la grille régulière de pas h .

Théorème 2.2.5. Soient F une correspondance Marchaud et l -Lipschitz et K un sous-ensemble fermé de X tel que $M := \sup_{x \in K} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < +\infty$.

Considérons $\Gamma_\rho := 1 + \rho F + \frac{Ml}{2} \rho^2 \mathcal{B}$ et $k = 1 + \rho l$.

Supposons M et l sont non nuls et que ρ et h sont choisis tels que :

$$\alpha(h) \leq \frac{Ml}{2} \rho^2, \quad (2.33)$$

alors,

$$\text{Lim}_{h, \rho \rightarrow 0} Viab_{\Gamma_{\rho, h}}((K + Ml\rho^2\mathcal{B}) \cap X_h) = Viab_F(K) \quad (2.34)$$

avec

$$\Gamma_{\rho, h}(x_h) := (\Gamma_\rho(x_h) + Ml\rho^2\mathcal{B}) \cap X_h \quad (2.35)$$

définie sur les points de la grille X_h .

Si X_h est la grille régulière de pas h , les noyaux de viabilité $Viab_{\Gamma_{\rho, h}}((K + Ml\rho^2\mathcal{B}) \cap X_h)$ sont un sous-ensemble d'un ensemble fini puisque K est compact, donc calculables de manière exacte. Cependant, la mémoire nécessaire est exponentielle avec la dimension de l'espace des états d'où les travaux menés depuis pour améliorer cet algorithme ou s'en passer.

L'approximation du noyau de viabilité discret en temps avec une procédure de classification

En collaboration avec Guillaume Deffuant et Laetitia Chapel, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [8]

Dans l'algorithme de [Saint-Pierre, 1994], le calcul du noyau de viabilité du système dynamique discret fini est itératif : le sous-ensemble fini K_h^{n+1} de X_h obtenu à l'étape $n+1$ dépend du sous-ensemble fini K_h^n calculé à l'étape précédente. Le programme construit et mémorise une structure qui représente le sous-ensemble fini de X_h initial K_h^0 . Puis, à chaque étape, il modifie ce sous-ensemble en retirant certains points dont aucun successeur par la dynamique (2.35) n'appartient à K_h^n .

Nous proposons une approche utilisant des méthodes de classification afin de ne plus conserver en mémoire tous les points de la grille appartenant à l'ensemble, mais uniquement une partie d'entre eux nécessaires pour construire la fonction de classification.

Ce travail porte ainsi sur la seconde étape de l'algorithme de [Saint-Pierre, 1994], approcher un noyau de viabilité discret en temps par des noyaux de viabilité discrets en temps et définis sur des espaces finis.

Cette limite inférieure est notée $\text{Liminf}_{s \rightarrow \bar{s}} A(s)$.

Définition 2.2.8. Lorsque les limites supérieure et inférieure de $A(s)$ coïncident, $A(s)$ possède une limite lorsque $s \rightarrow \bar{s}$ notée $\text{Lim}_{s \rightarrow \bar{s}} A(s)$.

Contexte et notations Soit la correspondance $G : X \rightsquigarrow X$, considérons le système dynamique contrôlé discret en temps défini par :

$$x^{n+1} \in G(x^n). \quad (2.36)$$

L'ensemble des contraintes de viabilité est un sous-ensemble de X noté K . Le noyau de viabilité de K pour la dynamique définie par (2.36) est :

$$Viab_G(K) = \{x \in K \mid \exists (x^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x^{n+1} \in G(x^n) \text{ et } x^n \in K \forall n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.37)$$

Nous supposons que G est une correspondance μ -Lipschitz à images fermées⁵ et que K est compact. Notre objectif est d'approcher $Viab_G(K)$ (2.37). D'après les théorèmes de viabilité [Aubin, 1991], $Viab_G(K)$ est le plus grand sous-ensemble E de K tel que :

$$\forall x \in E, G(x) \cap E \neq \emptyset. \quad (2.38)$$

L'algorithme utilisant des fonctions de classification décrit dans [8] est le suivant. Soit une grille finie, K_h , telle que :

$$\forall x \in K, \exists x_h \in K_h, \text{ tel que } \|\bar{x} - x_h\| \leq \alpha(h) \quad (2.39)$$

avec $\alpha(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Une telle grille existe puisque K est compact.

De plus,

- l est une procédure d'apprentissage qui associe à un ensemble S de paires $(x_i, e_i) \in K \times \{-1, 1\}$, une fonction de classification $l_S(x) : K \rightarrow \{-1, 1\}$.
- $d(E, F)$, la distance entre deux sous-ensembles E et F .
- $E \setminus F$, l'ensemble complémentaire de F dans E lorsque $F \subset E$.

Les étapes de l'algorithme A chaque étape, sont définis un ensemble discret, $K_h^n \subset K_h^{n-1} \subset K_h$, et un ensemble continu, noté $L(K_h^n)$, qui est une généralisation de cet ensemble discret, et qui constitue l'approximation courante du noyau de viabilité :

1. Initialisation : $K_h^0 := K_h$ et $L(K_h^0) := K$.
2. Récurrence :
 - Définition de l'ensemble discret K_h^{n+1} à partir de K_h^n et $L(K_h^n)$:

- $$K_h^{n+1} = \{x_h \in K_h^n \mid d(G(x_h), L(K_h^n)) \leq \mu\alpha(h)\}$$
- si $K_h^{n+1} \neq K_h^n$, utiliser la procédure d'apprentissage l avec les points x_h de la grille K_h , avec l'étiquette +1 si $x_h \in K_h^{n+1}$ et l'étiquette -1 sinon. Soit l_h^{n+1} la fonction de classification obtenue de K dans $\{-1, 1\}$, $L(K_h^{n+1})$ est défini ainsi :

$$L(K_h^{n+1}) = \{x \in K, \mid l_h^{n+1}(x) = +1\} \quad (2.40)$$

- sinon, arrêt et retourner $L(K_h^n)$.

Le théorème de convergence de l'algorithme La démonstration de ce théorème est donnée dans [8].

Théorème 2.2.6. *S'il existe un réel $\lambda \geq 1$ tel que, pour toutes les itérations n , l'approximation $L(K_h^n)$ satisfait les conditions suivantes :*

⁵ $\forall x, x' \in K, G(x') \subset G(x) + \mu\|x - x'\|B$ où B est la boule unité et $\forall x \in K$, l'ensemble $G(x)$ est fermé

$$\forall x \in L(K_h^n) \quad d(x, K_h^n) \leq \lambda\alpha(h) \quad (2.41)$$

$$\forall x \in K \setminus L(K_h^n) \quad d(x, K_h \setminus K_h^n) \leq \alpha(h) \quad (2.42)$$

alors, l'algorithme d'approximation du noyau de viabilité fournit un résultat qui converge vers le noyau de viabilité exact lorsque le pas de la grille h tend vers 0.

Ces conditions signifient que tout point de $L(K_h^n)$ doit être près d'un point de K_h^n et que tout point de $K \setminus L(K_h^n)$ doit être près d'un point de $K_h \setminus K_h^n$.

Nous avons utilisé cet algorithme avec trois fonctions de classification :

- les Support Vector Machines (bien que celles-ci ne vérifient pas toutes les conditions du théorème) [8]
- la fonction plus proche voisin [17]
- et les kd-tree [15].

2.2.3 Lien avec les algorithmes de résolution de problème d'optimisation

En collaboration avec Olivier Bokanowski, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, Rémi Munos, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau et Haasna Zidani, UMA, ENSTA, Paris [9]

L'algorithme de viabilité proposé par [Saint-Pierre, 1994] calcule, pour une grille X_h donnée, le noyau de viabilité d'un système auxiliaire discret en temps et en espace, et quand le pas de la grille h tend vers 0, le noyau de viabilité discret converge vers le noyau de viabilité du problème initial continu en temps et en espace.

Cependant, un noyau de viabilité peut aussi être caractérisé comme la limite en temps infini de la fonction valeur d'un problème de contrôle optimal et peut ainsi être approché par les méthodes de résolution des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaites par ces fonctions valeurs. Ces fonctions valeurs étant discontinues (fonctions indicatrices d'un ensemble), les schémas de discrétisations classiques comme ceux basés sur des techniques d'interpolation (par exemple des méthodes aux différences finies développées pour des fonctions valeurs continues [Camilli et Falcone, 1996, Abgrall, 2003]) ne parviennent pas à produire des approximations précises à cause du phénomène de diffusion numérique [Després et Lagoutière, 2001]. Or, le schéma anti-diffusif *ultra-bee* a été étendu à la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, sans preuve de convergence mais avec des expérimentations numériques testées sur plusieurs problèmes classiques [Bokanowski et Zidani, 2007].

En collaboration avec Olivier Bokanowski, Haasna Zidani et Rémi Munos, nous avons réalisé des expériences numériques pour comparer les performances de l'algorithme de viabilité avec le schéma de discrétisation d'Euler et le schéma *ultra-bee* appliqué aux équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaites par les fonctions valeurs associées à quatre problèmes de viabilité classiques. Les résultats approchés issus des calculs sont comparés aux résultats exacts. Pour les quatre problèmes, l'erreur commise par le schéma *ultra-bee* est plus faible car le phénomène de diffusion est moindre.

Soit K sous-ensemble compact non vide de \mathbb{R}^n , et U un sous-ensemble compact convexe non vide de \mathbb{R}^p . Soit $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant :

A.1 f est continue. Il existe deux fonctions g et h telles que $f(x, u) = g(x) + h(x).u$.

A.2 Il existe $c_0 \geq 0$ telle que $\sup_{u \in U} |f(x, u)| \leq c_0(1 + |x|)$.

A.3 Pour tout $R > 0$, il existe $L_R > 0$ tel que $\forall x, y \in B(0, R)$, $\sup_{u \in U} |f(x, u) - f(y, u)| \leq L_R |x - y|$.

Pour toute fonction de contrôle mesurable $u(\cdot) \in \mathcal{U} := L^\infty((0, \infty); U)$, notons, $x(\cdot)$, l'unique solution absolument continue de

$$x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ pour presque tout } t \geq 0 \text{ et } x(0) = x. \quad (2.43)$$

Définissons la correspondance $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F(x) := \{f(x, u) \mid u \in U\}. \quad (2.44)$$

Si (A1), (A2) et (A3) sont satisfaites, alors F est une correspondance continue à croissance linéaire à valeurs compactes et convexes. De plus, si $x(\cdot)$ est solution de (2.43), alors $x(\cdot)$ vérifie l'inclusion différentielle

$$x'(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \geq 0 \text{ et } x(0) = x. \quad (2.45)$$

Inversement, si $x(\cdot)$ est solution de (2.45), alors il existe $u \in L^\infty((0, \infty), U)$ telle que $x(\cdot)$ soit solution de (2.43) associée à u [Aubin et Cellina, 1984, Aubin, 1991].

Pour déterminer le noyau de viabilité de K pour la dynamique F , nous définissons la fonction

$$\mathcal{V}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que la solution } x(\cdot) \text{ de (2.43) satisfait } x(t) \in K, \forall t \geq 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Bien sûr, $\mathcal{V}(x) = +\infty$ si $x \notin K$ et nous pouvons déterminer $\mathcal{V}(x)$ comme le résultat d'un problème d'optimisation :

$$\mathcal{V}(x) = \min\{0 \mid \exists u \in \mathcal{U}, x(\cdot) \text{ solution de (2.43) satisfaisant } x(t) \in K, \forall t \geq 0\}, \quad (2.47)$$

avec la convention que $\mathcal{V}(x) = +\infty$ si l'ensemble est vide.

Ainsi, le noyau de viabilité est donné par :

$$Viab_F(K) = \{x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{V}(x) = 0\}. \quad (2.48)$$

En introduisant pour chaque $T \geq 0$ la fonction valeur dépendant du temps

$$\mathcal{V}(T, x) := \begin{cases} 0 & \text{si } \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que la solution } x(\cdot) \text{ de (2.43) satisfait } x(t) \in K, \forall t \in [0, T], \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.49)$$

nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses (A.1), (A.2) et (A.3), pour tout $x \in K$, $\mathcal{V}(T, s)$ converge vers $\mathcal{V}(x)$ lorsque $T \rightarrow +\infty$.*

Démonstration. Ce résultat est similaire à [Aubin, 1991, chap. 4]. □

V peut être vue comme la fonction valeur d'un problème de contrôle optimal :

$$V(T, x) = \min\{0 \mid \exists u \in \mathcal{U}, x(\cdot) \text{ solution de (2.43) satisfaisant } x(t) \in K, \forall t \in [0, T]\}. \quad (2.50)$$

V satisfait alors une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman de la forme suivante :

$$V_t - \min(f(x, u) \cdot \nabla_x V) = 0, \quad t > 0, \quad x \in K, \quad (2.51)$$

$$V(0, x) = 0, \quad x \in K. \quad (2.52)$$

En imposant la contrainte *inward pointing*, avec η_x le vecteur normal sortant dans le cas où ∂K est suffisamment régulière

$$\min_{u \in U} f(x, u) \cdot \eta_x < 0, \forall x \in \partial K \quad (2.53)$$

ou la contrainte *outward pointing*

$$\max_{u \in U} f(x, u) \cdot \eta_x > 0, \forall x \in \partial K, \quad (2.54)$$

la fonction valeur peut être correctement caractérisée grâce à [Soner, 1986] pour l'hypothèse (2.53) et grâce à [Frankowska et Plaskacz, 2000] pour l'hypothèse (2.54).

Dans les cas que nous considérons où ni l'hypothèse (2.53), ni l'hypothèse (2.54) ne sont vérifiées, nous proposons des expérimentations numériques pour le calcul de valeurs approchées en utilisant le schéma numérique anti-diffusif *ultra-bee*.

Schéma *ultra-bee* Le schéma numérique *ultra-bee* pour une advection linéaire de dimension 1 est présenté dans [Bokanowski et Zidani, 2007]. Il peut être étendu à une advection linéaire de dimension 2 :

$$\begin{aligned} v_t + f_1(x_1, x_2)v_{x_1} + f_2(x_1, x_2)v_{x_2} &= 0 \\ v(0, x_1, x_2) &= v_1(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.55)$$

en utilisant un Trotter splitting (méthode décrite dans [Dautray et Lions, 2000]).

Les propriétés intéressantes de transport exact de fonctions discontinues sont décrites dans [Després et Lagoutière, 2001].

Les premières applications du schéma *ultra-bee* à la résolution d'équations HJB avec des données initiales discontinues ont été réalisées dans [Bokanowski et Zidani, 2007] et ce schéma semble bien adapté pour approcher des solutions discontinues en particulier lorsque la fonction valeur prend uniquement deux valeurs 0 et 1.

Expérimentations numériques Dans [9], nous avons réalisé quatre tests numériques pour comparer les résultats obtenus pour le calcul de noyaux de viabilité, d'une part par la résolution des équations HJB par le schéma *ultra-bee* et d'autre part par l'algorithme de viabilité [Saint-Pierre, 1994]. Les tests ont été réalisés pour des problèmes de viabilité dont le noyau de viabilité peut être déterminé de manière exacte.

Le modèle de consommation par exemple

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - y(t) \\ y'(t) &= u \in [\underline{u}, \bar{u}] \\ K &= [0; \bar{x}] \times [0; \bar{y}] \end{aligned} \quad (2.56)$$

dont le noyau de viabilité exact est décrit dans [Aubin, 1991].

La figure 2.18 représente les résultats obtenus avec l'algorithme de [Saint-Pierre, 1994] et le schéma *ultra-bee*. Dans cet exemple comme dans les trois autres de l'article [9], pour un même nombre de points de grille par dimension, l'approximation avec le schéma *ultra-bee* est plus proche du noyau de viabilité exact.

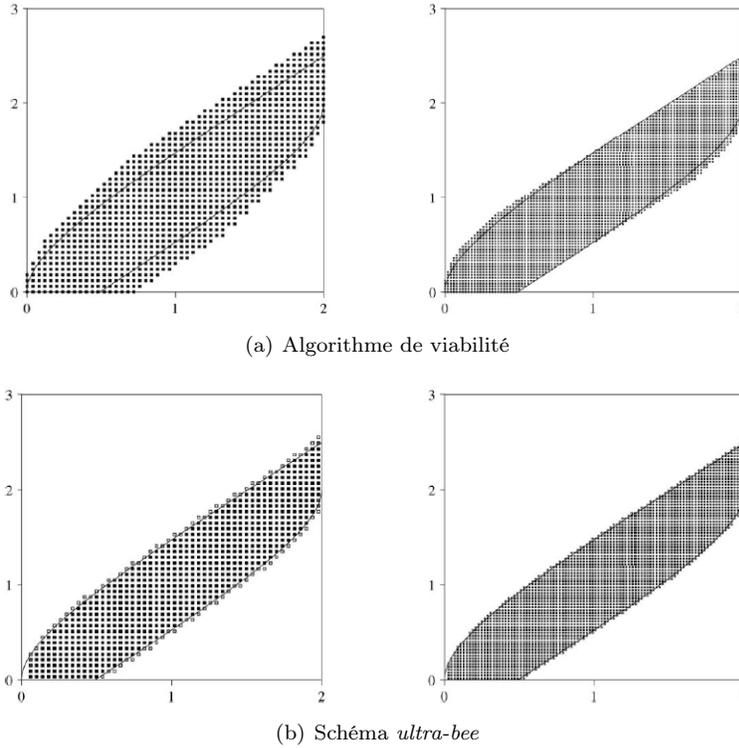


FIG. 2.18 – Comparaison des résultats obtenus par l’algorithme de viabilité et le schéma *ultra-bee* pour le problème de consommation (2.56). A gauche, 50 points par axe, à droite, 100 points par axe. La frontière du noyau de viabilité exact est tracée par une ligne noire.

2.3 Méthodes de détermination d’évolutions viables ou résilientes particulières

[Aubin, 1991] a montré le lien entre noyau de viabilité et régulation d’évolutions viables. Rappelons les définitions d’une évolution viable et d’une correspondance de régulation :

Définition 2.3.1 (Evolution viable). *Soit K un sous-ensemble de $X \subset \mathbb{R}^n$. Une évolution $x(\cdot) : [0; +\infty[\rightarrow X$ est viable dans K si $\forall t \geq 0, x(t) \in K$.*

Définition 2.3.2 (Correspondance de régulation). *Considérons un système $\mathcal{S} = (U, f)$ décrit par la correspondance des contrôles admissibles U et la dynamique f . Au sous-ensemble $K \subset \text{Dom}(U)$ peut être associée la correspondance de régulation $R_K : K \rightsquigarrow U$ définie par*

$$\forall x \in K, R_K(x) := \{u \in U(x) \mid f(x, u) \in T_K(x)\}, \quad (2.57)$$

où $T_K(x)$ est le cône contingent à l’ensemble K au point x (définition 2.2.1).

Il est important de noter que K est un domaine de viabilité (définition 2.2.2) si et seulement si la correspondance de régulation R_K est stricte (aucune de ses valeurs n’est l’ensemble vide).

Théorème 2.3.1 (Théorème de viabilité). *Soit un système contrôlé Marchaud $\mathcal{S} = (U, f)$ et un sous-ensemble fermé $K \subset \text{Dom}(U)$ de X . Soit $F(x) := \{f(x, u)\}_{u \in U(x)}$. Si K est un*

domaine de viabilité pour F , alors à partir de tout point $x_0 \in K$, il existe une évolution viable gouvernée par \mathcal{S} :

$$\text{pour presque tout } t \geq 0, \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)). \end{cases} \quad (2.58)$$

De plus, toute fonction de contrôle gouvernant une solution viable $x(\cdot)$ obéit à la loi de régulation :

$$\text{pour presque tout } t \geq 0, u(t) \in R_K(x(t)). \quad (2.59)$$

Cela signifie que grâce à la correspondance de régulation, si la situation actuelle est dans un domaine de viabilité, le système peut être contrôlé afin que son état reste dans ce domaine de viabilité.

Cependant, plusieurs fonctions de contrôle peuvent permettre d'assurer la viabilité. Une fois le noyau (ou le domaine) de viabilité déterminé, l'enjeu suivant est de déterminer des fonctions de contrôle viables.

2.3.1 Evolutions lentes

Dans les évolutions lentes, l'idée est de minimiser la norme du contrôle, une justification de l'intérêt de telles évolutions étant que l'intensité du contrôle peut être positivement corrélée à son coût.

Procédures de sélection

S'il le système dynamique contrôlé \mathcal{S} est Marchaud, il est aisé de définir la sélection minimale, R_K^* , de la correspondance de régulation R_K (2.3.2). En effet, les valeurs de la correspondance de régulation R_K sont convexes et fermées et l'on peut associer à $x \in K$ le contrôle viable de norme minimale :

$$\begin{aligned} R_D^*(x) &:= m(R_D(x)) \\ &:= \{u \in R_D(x) \mid \|u\| = \min_{y \in R_D(x)} \|y\|\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Cependant, l'existence de solutions gouvernées par R_D^* n'est pas évidente. Une condition suffisante pour qu'une sélection de norme minimale (ou une sélection minimisant un autre critère) soit une solution du système est l'hypothèse de stricte convexité de la partie droite de l'inclusion différentielle $x' \in F(x)$ [Falcone et Saint-Pierre, 1987].

Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée comme dans le cas du modèle de langues, l'existence d'évolutions viables lentes doit être démontrée à la main en utilisant la définition et le théorème suivant d'[Aubin, 1991, chap. 6] :

Définition 2.3.3 (Procédure de sélection). *Soit Y un espace normé. Une procédure de sélection d'une correspondance $F : X \rightsquigarrow Y$ est correspondance $S_F : X \rightsquigarrow Y$ satisfaisant*

$$\begin{cases} (i) & \forall x \in \text{Dom}(F), S(F(x)) := S_F(x) \cap F(x) \neq \emptyset \\ (ii) & \text{le graphe de } S_F \text{ est fermé.} \end{cases} \quad (2.61)$$

La correspondance $S(F) : x \rightsquigarrow S(F(x))$ est appelée sélection de F .

Théorème 2.3.2. *Considérons un système contrôlé Marchaud $\mathcal{S} = (U, f)$ et supposons que K est un domaine de viabilité. Soit S_{R_K} une sélection de la correspondance de régulation R_K . Supposons que les valeurs de S_{R_K} sont convexes.*

Alors, à partir de tout point $x_0 \in K$, il existe une solution viable au système contrôlé (U, f) gouvernée par la sélection $S(R_K)$ de la correspondance de régulation R_K , dans le sens de :

$$\text{pour presque tout } t \geq 0, \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in S(R_K)(x(t)) := R_K(x(t)) \cap S_{R_K}(x(t)). \end{cases} \quad (2.62)$$

Détermination d'évolutions lentes préservant la coexistence de deux langues

En collaboration avec Claire Bernard, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [4]

Dans le cas du maintien de la coexistence de deux langues, décrit en détails dans la section 2.1.3, la fonction de contrôle qui minimise l'intensité du contrôle à chaque instant peut être jugée intéressante car elle minimise les variations du prestige à chaque instant et donc l'intensité des mesures à mettre en œuvre.

Notons à nouveau D le domaine de viabilité de l'ensemble K (2.22) pour la dynamique (2.21).

Nous avons démontré dans [4] l'existence de solutions gouvernées par la sélection minimale, R_D^* , de la correspondance de régulation :

Théorème 2.3.3. *Pour tout point $x_0 \in D$, il existe une solution viable partant de x_0 et gouvernée par R_D^* :*

$$\text{pour presque tout } t \geq 0, \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in R_D^*(x(t)). \end{cases} \quad (2.63)$$

Démonstration. L'idée de la preuve décrite dans [4] est d'introduire une correspondance, \hat{R}_D , qui soit une procédure de sélection de R_D (définition 2.3.3) à valeurs convexes pour appliquer le théorème 2.3.2 [Aubin, 1991], et s'assurer que pour tout point $x_0 \in D$, il existe une solution viable du système contrôlé (2.21) partant de x_0 et gouvernée par la sélection $S(\hat{R}_D)$ de la correspondance de régulation R_D ,

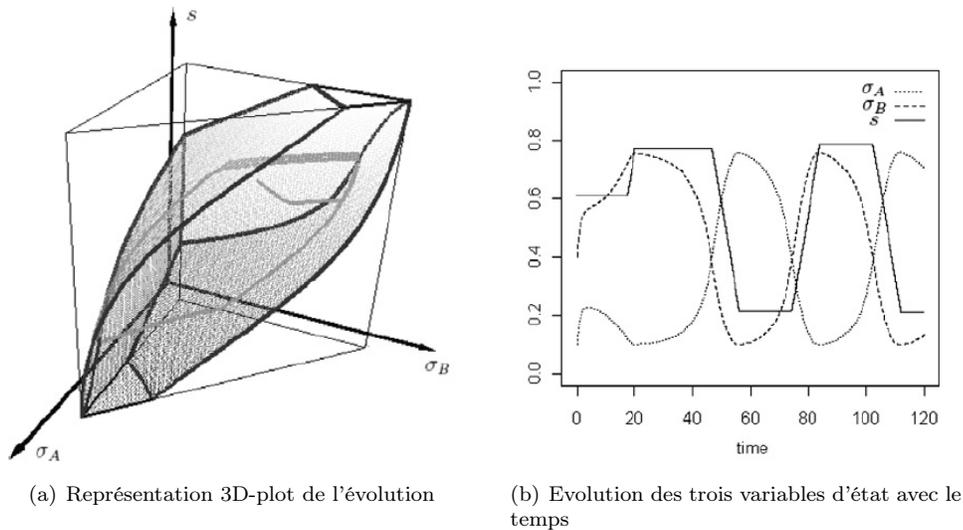
$$\text{pour presque tout } t \geq 0, \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in S(\hat{R}_D)(x(t)) := R_D(x(t)) \cap \hat{R}_D(x(t)). \end{cases} \quad (2.64)$$

Pour \hat{R}_D bien choisie, $S(\hat{R}_D)$ diffère de R_D^* seulement en certaines régions du domaine de viabilité D et l'on vérifie à la main dans ces régions que la solution gouvernée par R_D^* existe.

Ainsi, on a montré qu'à partir de tout point de $x_0 \in D$, il existe une solution viable du système contrôlé (2.21) partant de x_0 et gouvernée par la sélection minimale R_D^* . \square

La figure 2.19 représente une évolution viable lente : à gauche la trajectoire à l'intérieur du domaine de viabilité, à droite, l'évolution temporelle des trois variables d'état.

L'évolution viable lente consiste à choisir à chaque instant le contrôle de norme minimale. Dans le cas du modèle de langues, le contrôle est la vitesse de variation du prestige relatif d'une langue par rapport à l'autre. Par conséquent, l'évolution viable lente présente des périodes durant lesquelles les variations du prestige relatif sont nulles et donc ce dernier est constant jusqu'à ce que la viabilité du système soit en jeu c'est à dire jusqu'à ce que la frontière du noyau de viabilité soit atteinte. Par exemple, pour l'évolution viable lente partant de la situation de 10% de monolingues A , 40% de monolingues B (et par conséquent 50% de bilingues), représentée sur la figure 2.19, le prestige relatif reste constant entre $t = 0$ et $t = 17.5$, $t = 20.2$ et $t = 47.0$, $t = 56.3$ et $t = 74.4$, et $t = 84.1$ et $t = 102.3$. Cependant, ces



(a) Représentation 3D-plot de l'évolution (b) Evolution des trois variables d'état avec le temps

FIG. 2.19 – Exemple d'une évolution viable lente pour $\underline{\sigma} = 0.1$ et $\bar{u} = 0.06$.

périodes de prestige relatif constant sont séparées par des périodes de variation de prestige maximales. Les mesures à prendre pour augmenter le prestige de la langue en danger doivent être prises bien avant que la frontière de l'ensemble de contraintes ne soit franchie (c'est l'intérêt du noyau de viabilité comme outil d'anticipation) : par exemple, au temps $t = 47.0$, des mesures doivent être prises pour augmenter le prestige de la langue B pour éviter que le nombre de monolingues B passe dans le futur en dessous du seuil minimal souhaité; cependant, à cet instant les tailles des deux communautés sont loin de ce seuil, $\sigma_A = 41\%$ and $\sigma_B = 37\%$.

Détermination de l'évolution viable associée à la fonction de contrôle qui minimise à chaque instant la norme d'une des composantes du contrôle

En collaboration avec Claire Bernard, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [1]

Dans l'exemple de la section 3.4, le calcul de noyaux de viabilité nous a permis de déterminer pour quelle valeur de transfert monétaire maximal (c'est à dire pour quelle valeur de la borne supérieure de la variable de contrôle) la situation actuelle du corridor forestier de Fianarantsoa peut être jugée durable. Il s'agit d'une borne supérieure, au cours de l'évolution cette valeur n'est pas nécessairement l'unique choix viable.

Nous avons ainsi poursuivi l'étude en calculant une approximation de l'évolution viable qui minimise à chaque instant le transfert monétaire.

Dans le cas où $\tau_{max} = 10^7$, nous avons construit l'évolution viable de la figure 2.20, qui part d'une situation initiale à l'intérieur du noyau de viabilité approché grâce à l'algorithme de [Saint-Pierre, 1994], en choisissant à chaque pas de temps le contrôle viable pour lequel τ est minimal.

Les différentes valeurs de transferts monétaires au cours de cette évolution sont représentées par un dégradé de couleurs du blanc au rouge (en blanc les transferts monétaires sont faibles, en rouge ils sont proches de la valeur maximale $\tau_{max} = 10^7$).

La figure 2.21 montre l'évolution des trois variables d'état : gouvernée par les transferts viables minimaux, cette évolution viable conduit à la population minimale, P_{min} , pour assurer une présence humaine dans le corridor, elle atteint le capital par personne visé, k_{max} ,

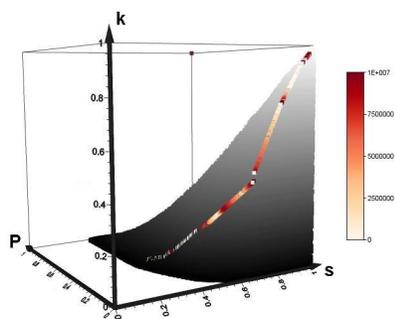


FIG. 2.20 – La situation initiale appartient au noyau de viabilité avec $\tau_{max} = 10^7$. L'évolution est l'évolution viable qui minimise à chaque pas de temps le transfert monétaire viable.

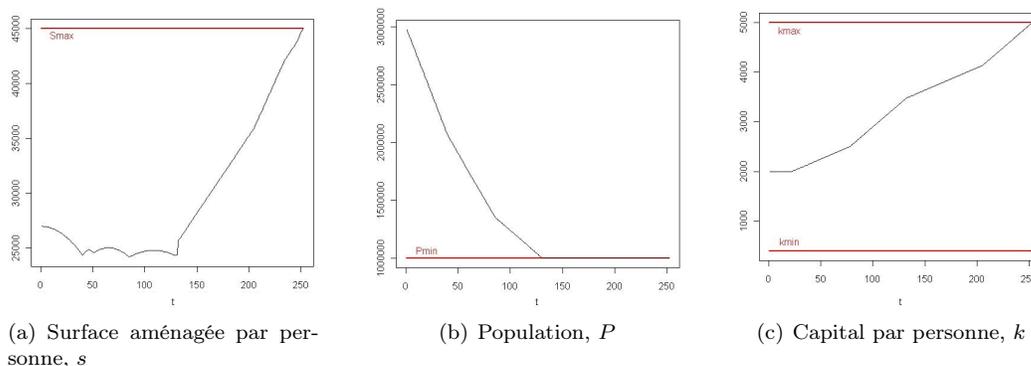


FIG. 2.21 – Evolution des trois variables d'état correspondant à l'évolution de la figure 2.20.

en même temps que la surface aménagée maximale, S_{max} .

La figure 2.22 représente les valeurs des transferts monétaires associés à l'évolution viable de la figure 2.20 du temps 0 au temps 250 (en années).

Nous remarquons ainsi des fluctuations très fortes sur le transfert monétaire au cours du temps, qui peut même être nul durant certaines périodes. En outre, il est intéressant de noter qu'il n'est pas tout le temps nécessaire de fournir le transfert monétaire maximal τ_{max} .

2.3.2 Evolutions éloignées des frontières

En collaboration avec Isabelle Alvarez, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea [13]

Dans le cadre du modèle de compétition entre langues décrit dans la section 2.1.3, et à partir du domaine de viabilité calculé dans [4], nous nous sommes intéressées à partir de situations initiales données aux évolutions effectivement viables et à la distance de l'état du système à la frontière du domaine de viabilité au cours du temps. La distance de l'état du système à la frontière du domaine de viabilité constitue une mesure de robustesse par rapport à une perturbation extérieure qui provoquerait un saut dans l'espace des états : plus l'état du système est proche de la frontière du domaine de viabilité plus une perturbation de faible intensité peut provoquer un saut hors du domaine de viabilité.

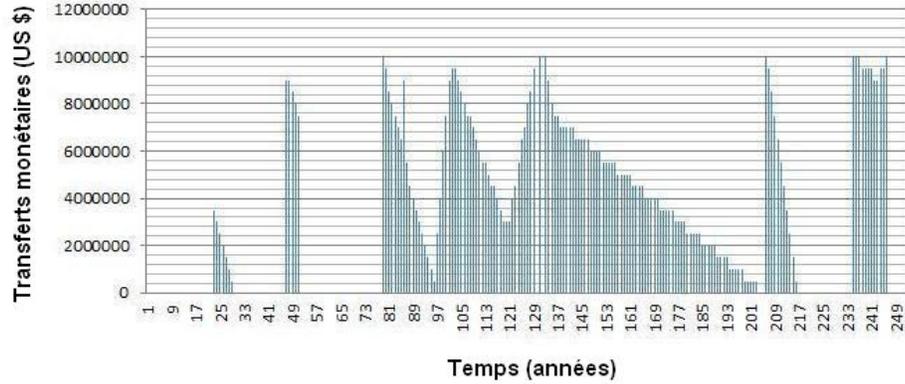


FIG. 2.22 – Valeurs des transferts monétaires du temps 0 au temps 250 pour l'évolution de la figure 2.20 (la situation initiale appartient au noyau de viabilité pour $\tau_{max} = 10^7$ et cette évolution est l'évolution viable qui minimise à chaque pas de temps le transfert monétaire).

Calcul de la distance à la frontière du domaine de viabilité

Nous avons réalisé dans [13] le calcul de la distance à la frontière en tout point du domaine de viabilité en utilisant l'algorithme décrit dans [22]. Les fonctions distance et projection sont calculées grâce à une version adaptée d'un algorithme venant de la morphologie mathématique [Meijster *et al.*, 2000] : l'espace est discrétisé, l'algorithme calcule la distance exacte de chaque point de l'espace discrétisé à la frontière définie comme un sous-ensemble de cet espace discret. Nous avons modifié l'algorithme originel pour calculer également la (les) projection(s) de chaque point sur la frontière. Cet algorithme est détaillé dans [22].

La figure 2.23 représente le résultat de cet algorithme appliqué au domaine de viabilité du modèle de compétition entre langues.

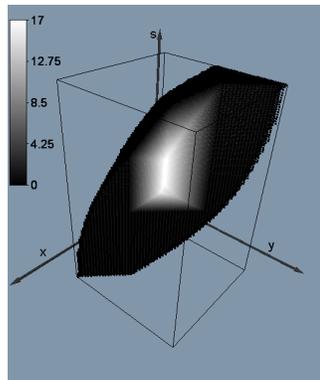


FIG. 2.23 – Fonction distance vue en transparence du domaine de viabilité du modèle de compétition entre langues pour l'ensemble des contraintes (2.22) et la dynamique (2.21). La discrétisation de l'espace délimité par le parallépipède dont les arêtes sont dessinées en noir est de 100 points par axe. Seuls les points du domaine de viabilité sont colorés, leur couleur dépend de leur distance euclidienne à la frontière.

Suivi de la distance à la frontière pour les évolutions viables lentes

Les évolutions lentes [Aubin, 1991] correspondent au choix du contrôle de norme minimale dans la correspondance de régulation. Dans [4], nous avons montré l'existence des évolutions viables lentes dans le cas du problème de viabilité de la compétition entre langues (section 2.3.1). Dans de telles évolutions, la valeur du prestige reste constante lorsque l'état du système est à l'intérieur du domaine de viabilité. La figure 2.24 montre plusieurs évolutions viables lentes issues d'états et de contrôles initiaux tirés au hasard dans le domaine de viabilité.

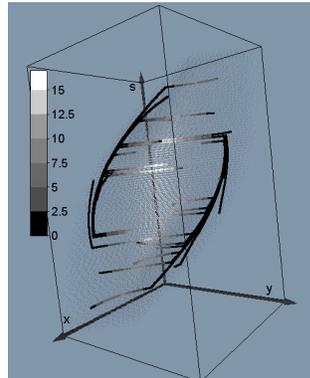


FIG. 2.24 – 24 évolutions lentes issues de points initiaux choisis au hasard. La couleur du point dépend de sa distance à la frontière. Plus la couleur est foncée, plus la distance est faible (noire sur la frontière). Le domaine de viabilité est représenté par le nuage de points gris.

Le contrôle est constant jusqu'à atteindre la frontière du domaine de viabilité. Lorsque la frontière du domaine de viabilité est atteinte alors qu'elle ne coïncide pas avec celle de l'ensemble des contraintes, la valeur du contrôle change et l'évolution reste sur la frontière du domaine de viabilité jusqu'à atteindre la frontière de l'ensemble des contraintes (théorème de Quincampoix [Quincampoix, 1992]). L'état du système appartient souvent à la frontière du domaine de viabilité comme le montre la figure 2.25.

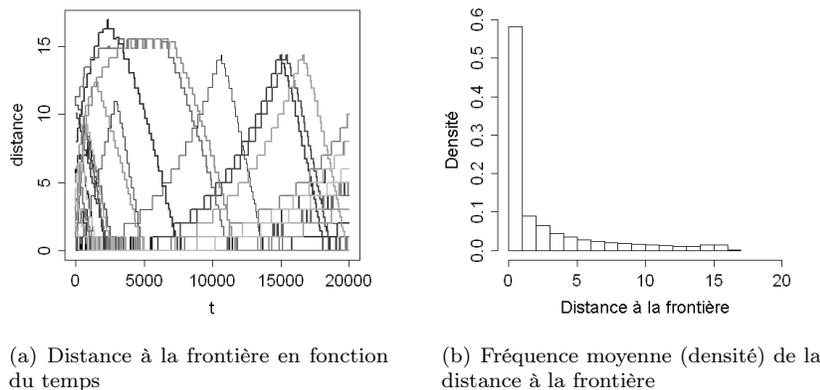


FIG. 2.25 – Evolutions lentes pour le modèle de compétition entre langues.

Les stratégies de contrôle viables lentes gouvernent des évolutions pour lesquelles l'état du système est souvent sur la frontière du domaine de viabilité. Nous venons de l'illustrer

dans le cas de ce modèle de compétition entre langues mais c'est une propriété générale du fait du théorème de Quincampoix [Quincampoix, 1992] qui montre qu'une évolution viable ne peut quitter la frontière du noyau de viabilité que lorsque celle-ci coïncide avec celle de l'ensemble des contraintes. En particulier, si le noyau de viabilité appartient à l'intérieur de l'ensemble des contraintes, une évolution viable qui attendrait sa frontière y resterait définitivement.

Pour trouver des fonctions de contrôle qui garantissent une certaine robustesse, l'idée, comme dans [11, 21, 20], peut être de prendre un ensemble de contraintes plus petit que le véritable, de calculer le noyau de viabilité et de contrôler de manière classique à partir des points viables trouvés. Cependant, cette stratégie assure que l'état du système au cours de l'évolution reste à une certaine distance de l'ensemble des contraintes initial mais pas du noyau de viabilité initial.

Heuristique : contrôle basé sur la distance à la frontière

L'objectif de la stratégie de contrôle basée sur la distance est de proposer des politiques de contrôles robustes aux perturbations ou aux incertitudes sur les variables d'état. Le principe est non seulement de suivre des évolutions viables mais également de se tenir si possible loin des frontières du noyau de viabilité. Pour cela, nous avons défini une stratégie avec seuil de prudence : le contrôle est le contrôle viable de norme minimale tant que la distance de l'état du système à la frontière est supérieure à un seuil fixé (pour l'évolution lente la valeur de ce seuil est 0). Lorsque la distance atteint la valeur seuil, par souci d'anticipation, c'est le contrôle viable au point de projection sur la frontière du domaine de viabilité qui est choisi.

La figure 2.26 représente la distance à la frontière du domaine de viabilité en fonction du temps pour trois évolutions issues du même point de départ mais suivant des stratégies de prudence avec des valeurs de seuil différentes. La stratégie prudente est efficace : la stratégie lente (seuil de prudence 0) gouverne des évolutions dont la distance à la frontière est très souvent nulle, alors que les stratégies avec seuil de prudence strictement positif ne franchissent plus ce seuil dès lors que celui-ci est atteint.

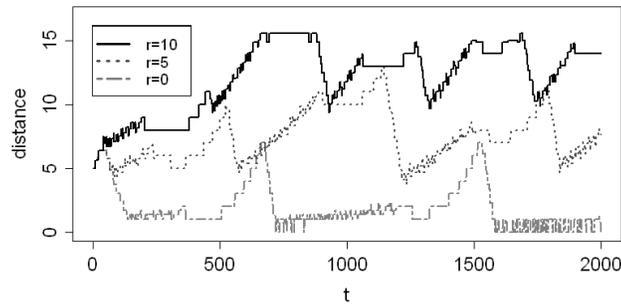


FIG. 2.26 – Evolutions avec le même point de départ mais des valeurs de seuil, r , différentes pour la stratégie prudente. Les stratégies prudentes gardent l'état du système loin des frontières.

Nous avons également réalisé l'expérimentation numérique suivante : à partir de points initiaux choisis au hasard, nous avons calculé les évolutions gouvernées par des stratégies prudentes de différents seuils dont 0. Pour chaque évolution, nous avons calculé la distance à la frontière au cours du temps. La figure 2.27 montre les résultats obtenus pour 24 évolutions : la plupart du temps, la distance de l'état du système à la frontière est supérieure au seuil, montrant l'efficacité de la stratégie prudente pour ce modèle de compétition entre langues.

Les valeurs de distance plus petites que le seuil sont dues au fait que la distance à la frontière des points initiaux pris au hasard peut être plus faible que le seuil choisi.

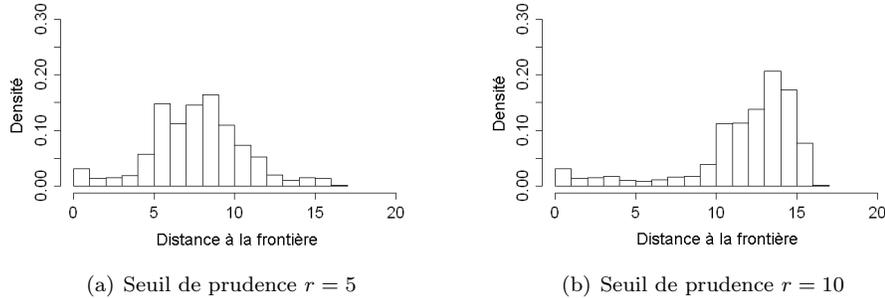


FIG. 2.27 – Fréquence moyenne (densité) de la distance à la frontière pour différentes valeurs du seuil de la stratégie prudente.

Conclusion du chapitre

Résilience effectivement mesurée dans des modèles de systèmes écologiques et sociaux

Dans le cas du phénomène d'eutrophisation des lacs, nous avons évalué la résilience de la propriété d'oligotrophie d'un lac dont le bassin versant accueille des activités agricoles face à des événements pluvieux extrêmes.

Dans le cas de la gestion de pâturage, l'évaluation du coût associé à la restauration et à la préservation d'une certaine quantité de biomasse d'herbe, permet d'évaluer la résilience de ce système de pâturage face à des perturbations provoquant une brusque modification du cheptel ou de la biomasse d'herbe.

Dans le cas de compétition entre langues, l'évaluation du coût associé à la restauration et à la préservation d'un nombre minimal de locuteurs de chacune des deux langues, permet d'évaluer la résilience de la propriété de diversité linguistique face à des perturbations provoquant une brusque modification de la proportion de locuteurs de chaque langue.

Dans le cas de la conciliation entre activité touristique et qualité de l'environnement, l'évaluation du coût associé à la restauration et à la préservation de situations dans lesquelles activité touristique et qualité environnementale sont suffisamment élevées, permet d'évaluer la résilience de la propriété d'un environnement de qualité en présence d'activité touristique face à des perturbations provoquant une brusque modification de la qualité environnementale ou des infrastructures touristiques.

La nécessité d'améliorer les performances des algorithmes d'approximation des noyaux de viabilité et bassins de capture

L'évaluation de la résilience nécessite le calcul de sous-ensembles de l'espace des états, le noyau de viabilité et le bassin de capture. Les descriptions exactes ne peuvent être établies qu'au cas par cas (et dans les cas simples) en utilisant les propriétés tangentiels des domaines de viabilité, d'où la nécessité d'algorithmes d'approximation de ces ensembles.

Le premier d'entre eux date de 1994, nous l'avons étendu à l'utilisation de fonctions de classification moins gourmandes en mémoire que la grille de points régulières et comparé sa

précision par rapport au schéma numérique *ultra-bee* utilisé pour la résolution de problèmes d'optimisation.

La richesse des stratégies de contrôle viables

Une fois le noyau de viabilité calculé, l'enjeu est de déterminer des fonctions de contrôle permettant de réguler des évolutions viables.

Si elle existe, l'évolution lente est l'évolution gouvernée par le contrôle viable de norme minimale. Elle a l'intérêt de ne pas demander une intensité de contrôle plus forte que nécessaire, mais l'inconvénient de produire des évolutions qui peuvent être souvent situées à la frontière des noyaux de viabilité et pour lesquelles la moindre perturbation dans l'espace des états peut provoquer une sortie du noyau de viabilité.

Dans le cadre du modèle de compétition entre langues, nous avons proposé l'heuristique de la stratégie prudente qui consiste à choisir le contrôle de norme minimale tant que la distance de l'état à la frontière du noyau de viabilité est supérieure à un seuil fixé. Si le seuil est atteint c'est le contrôle de norme minimale au point de projection sur la frontière du noyau de viabilité qui est choisi. Nous avons montré par des expérimentations numériques l'efficacité de cette stratégie dans ce contexte.

Chapitre 3

Distinguer des politiques de gestion pouvant être qualifiées de durables dans le cadre de la théorie de la viabilité

Sommaire

3.1	Exemples de critères classiques pour évaluer la durabilité . . .	57
3.2	Avec les outils de la théorie de la viabilité, pas de hiérarchisation des critères correspondant aux trois piliers	58
3.3	Prise en compte de l'équité intergénérationnelle	58
3.4	Exemple d'évaluation de politiques de gestion durables : la préservation de la forêt à Madagascar	60
3.4.1	La dynamique du système	60
3.4.2	Les enjeux écologiques et sociaux traduits comme un ensemble de contraintes	61
3.4.3	Les valeurs des paramètres	62
3.4.4	Résultats : évaluation de la durabilité de la situation actuelle du corridor forestier de Fianarantsoa	62
Conclusion	64
	Proposition de critères de durabilité pertinents	64
	Détermination des transferts monétaires nécessaires pour assurer la durabilité dans le cas d'un modèle de préservation de la forêt malgache	64

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment les méthodes et outils de la théorie de la viabilité peuvent permettre de distinguer des politiques de gestion pouvant être qualifiées de durables.

Ces travaux menés dans le cadre du projet « Dédution » ont été publiés dans les articles [1, 3] et les conférences [23, 30].

3.1 Exemples de critères classiques pour évaluer la durabilité

Les discussions autour du concept de « développement durable » sont plus souvent l'expression d'émotions et d'attitudes que l'analyse formelle de chemins durables pour l'industrie moderne [Solow, 1993], d'où la nécessité de formalisations mathématiques de la durabilité, à la fois claires et ouvrant la voie vers la possibilité d'évaluation. Les objectifs à satisfaire sont nombreux, puisqu'il faut tenir compte des aspects économiques, sociaux et écologiques. Les outils de formalisation devront permettre de restituer cette diversité. Par ailleurs, le développement durable s'intéresse aux générations actuelles tout autant qu'aux générations futures, ce qui implique un horizon temporel infini. De plus, il s'agira aussi de traiter le futur et le présent sur un pied d'égalité pour assurer l'équité intergénérationnelle [Chichilnisky, 1997].

Les critères classiques utilisés sont :

- Le critère utilitariste : Chaque génération t a une préférence représentée par une fonction d'utilité $u(c(t), s(t))$ qui dépend de la consommation $c(t)$ et du stock de ressources disponible au temps t , $s(t)$. L'objectif est la maximisation de la somme infinie actualisée des utilités, soit :

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(c(t), s(t))}{(1 + \delta)^t}, \quad (3.1)$$

où $\delta \geq 0$ est le taux d'actualisation. Ce taux intervient dans le critère pour prendre en compte deux principes : le fait que la valeur d'un bien de consommation tend à se déprécier avec le temps, mais également le fait qu'il existe une préférence à consommer un bien aujourd'hui plutôt que demain.

Ce critère conduit à une utilité décroissant vers 0 pour les générations les plus éloignées. Cette méthode avantage la génération actuelle.

- Maximin : La méthode du Maximin consiste à maximiser l'utilité de la génération la moins favorisée, soit :

$$\max \min_t u(c(t), s(t)). \quad (3.2)$$

- Critère de Heal : La méthode consiste à maximiser l'utilité à l'infini [Heal, 1998] :

$$\max \lim_{t \rightarrow \infty} u(c(t), s(t)). \quad (3.3)$$

Afin de maximiser l'utilité des générations les plus éloignées, ce critère conduit à une consommation nulle des ressources naturelles et donc au maintien d'un stock de ressources égal au stock initial s_0 . Les générations actuelles sont donc pénalisées.

- Critère de Chichilnisky : les critères usuels tels que le critère de Heal ou la somme des utilités actualisées sont des dictatures du futur pour le premier et du présent pour le second. [Chichilnisky, 1997] propose un critère qui ne favorise ni le présent ni le futur. Le critère de Chichilnisky est la somme pondérée des deux critères précédents :

$$\alpha \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(c(t), s(t))}{(1 + \delta)^t} + (1 - \alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} u(c(t), s(t)), \quad (3.4)$$

où α est le coefficient de pondération de l'utilité du présent strictement compris entre 0 et 1. En prenant comme premier terme la somme des utilités escomptées, [Chichilnisky, 1997] s'assure que son critère n'est pas une dictature du futur, et ajoutant le critère de maximisation de l'utilité à l'infini, son critère ne peut pas être une dictature du présent. Cependant, ce critère rajoute la difficulté de choisir le poids α pour chacune de ses composantes.

3.2 Avec les outils de la théorie de la viabilité, pas de hiérarchisation des critères correspondant aux trois piliers

[Martinet et Doyen, 2007] ont appliqué les outils de la théorie de la viabilité au modèle de Dasguspta-Heal et Solow et ont défini la durabilité par le fait de pouvoir respecter en même temps et pour tout temps des contraintes écologiques, des contraintes économiques et des contraintes sociales. Ainsi, chacun des trois piliers du développement durable est décrit par un ensemble de contraintes dans l'espace des états et un développement durable est défini comme une évolution qui reste dans l'intersection de ces trois ensembles de contraintes. Tous les critères sont ainsi traités de manière identique en évitant ainsi de devoir choisir des poids dont les valeurs sont difficiles à justifier comme dans le cas des critères basés sur l'optimisation d'une fonction d'utilité agrégée.

Rechercher des développements durables consiste alors à rechercher les conditions dans lesquelles le noyau de viabilité n'est pas vide (comme dans [Rapaport *et al.*, 2006]).

Ils imposent par exemple des contraintes stipulant que les niveaux de consommation et le stock de ressources épuisables ne devront jamais être inférieurs à certains seuils admissibles. Ceci implique, pour une société dont les conditions initiales se situent dans le noyau de viabilité, que celle-ci pourra garantir un certain niveau de consommation et de préservation de la ressource à l'ensemble des générations à venir. [Martinet et Doyen, 2007] définissent alors la durabilité comme la possibilité de transmettre un ensemble de « droits minimaux » aux générations futures.

3.3 Prise en compte de l'équité intergénérationnelle

En collaboration avec Marie-Hélène Durand, LASTRE et IRD, Bondy, France et Patrick Saint-Pierre, Leda-SDFi Paris Dauphine et LASTRE, Paris [3]

Une approche normative du développement durable a été développée qui caractérise l'équité intergénérationnelle par le respect de deux axiomes : le principe de Pareto, ou d'efficacité (toute suite infinie dont les éléments sont supérieurs à ceux d'une autre doit lui être préférée) ; et le principe d'anonymat faible, ou de neutralité (une permutation de n'importe quelle paire d'éléments d'une suite ne doit pas changer son évaluation). Le respect de ces deux axiomes, qui impliquent absence de gaspillage et de discrimination d'une génération quelconque, est qualifié de principe de Suppes-Sen [Asheim, 2010]. La somme infinie des utilités escomptées, critère d'évaluation intertemporel le plus utilisé, respecte le principe de Pareto mais pas celui d'anonymat.

Avoir un objectif d'équité intergénérationnelle dans un modèle de viabilité du développement consiste à rechercher, parmi les évolutions viables, celles qui offriront une plus juste répartition des ressources entre générations. La première manière d'aborder ce problème normatif avec les outils de la viabilité, envisagée par [Martinet et Doyen, 2007], consiste à agir sur les contraintes et à rechercher le niveau maximum de « droit minimum » en termes de consommation garantie par habitant et de ressource préservée qui pourront être transmis à

l'ensemble des générations : contraindre, à toutes les périodes, les générations présentes à respecter les « droits » des générations futures.

Nous avons étudié une seconde piste qui consiste à utiliser une fonction qui permettra de sélectionner parmi toutes les évolutions viables, celle pour laquelle l'inégalité entre les générations sera la plus faible. Pour cet exercice, nous nous intéressons aux variations de la consommation moyenne entre générations successives. La définition de l'équité intergénérationnelle de [Martinet et Doyen, 2007] est basée sur la garantie des droits, la nôtre sur la réduction des inégalités.

Nous avons pris comme support le modèle simple (3.5) dans lequel chaque génération fait des choix entre consommer, $c(t)$, produire, $r(t)$, et se reproduire $n(t)$ selon ses dotations en capital naturel et manufacturé et ses besoins liés au niveau de sa population. Le résultat de ces choix, en termes d'accumulation de capital, détermine l'éventail des possibilités offertes aux générations suivantes. Sans progrès technique et avec une fonction de production autorisant la substitution entre les facteurs de production (la ressource naturelle et le capital manufacturé), le niveau de consommation et la croissance démographique sont les deux éléments qui décident de l'héritage laissé aux générations suivantes.

Nous avons considéré que les variations de consommation par habitant entre générations successives constituaient une mesure de l'« inégalité entre les générations » qu'il faut maintenant chercher à réduire. Nous avons utilisé le pourcentage de variation pour tenir compte de l'effet d'accumulation de richesses au cours des générations.

Les variables d'états sont le capital manufacturé par personne $k(t)$, la population $P(t)$, la quantité de ressource disponible par personne $s(t)$ et la consommation par personne $c(t)$, et les variables de contrôle sont la quantité de ressource extraite par personne $r(t)$, le taux de croissance de la population $n(t)$ et le taux de croissance de la consommation par personne $v(t)$. Les évolutions de ces variables sont gouvernées par le système dynamique contrôlé détaillé dans [3] :

$$\begin{aligned} \frac{dk(t)}{dt} &= k(t)^\alpha r(t)^\beta - n(t)k(t) - c(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= n(t)P(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} &= -r(t) - n(t)s(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} &= v(t)c(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

et comme bornes sur les valeurs des contrôles pour tout t :

$$\begin{aligned} 0 &\leq r(t) \leq r_{max} \\ n_{min} &\leq n(t) \leq n_{max} \\ v_{min} &\leq v(t) . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les contraintes de durabilité sont un capital par personne positif, une présence de population, une quantité de ressource par personne garantie à toutes les générations s_{min} et une consommation minimale garantie à toutes les générations c_{min} . Ces contraintes sont décrites par le sous-ensemble de l'espace des états défini par :

$$\begin{aligned} k(t) &\geq 0 \\ P(t) &\geq P_{min} \\ s(t) &\geq s_{min} \\ c(t) &\geq c_{min} . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Etablir une forme d'équité intergénérationnelle en limitant les inégalités entre générations tout en respectant les contraintes écologiques et matérielles de production consiste, dans cet exemple, à contraindre $v(t)$, le taux de croissance de la consommation par habitant, à être toujours supérieur ou égal à un certain seuil minimum v_{min} . Si le noyau de viabilité de l'ensemble de contraintes (3.7) pour la dynamique (3.5) n'est pas vide, il sera possible de trouver un chemin de développement viable et équitable à partir de toute situation initiale

appartenant à ce noyau. Le taux de croissance de la consommation par habitant sera toujours limité par la contrainte inférieure $v(t) \geq v_{min}$ pour toutes les générations. Couplée aux autres contraintes, elle interdit les modes de développement où le comportement de certaines générations aurait un impact trop négatif sur la consommation des générations futures. Par exemple, si on choisit v_{min} nul, la consommation par habitant des générations futures ne sera jamais inférieure à celle des générations précédentes.

3.4 Exemple d'évaluation de politiques de gestion durables : la préservation de la forêt à Madagascar

En collaboration avec Claire Bernard, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes, Irstea, France [1]

L'enjeu de durabilité pour la forêt tropicale du corridor de Fianarantsoa à Madagascar est de préserver la forêt tout en assurant le développement de la population locale. Une procédure générale basée sur les concepts et outils de la théorie de la viabilité permet de déterminer si la situation actuelle est durable en fonction des possibilités d'action sur la dynamique du système. Elle consiste à traduire les enjeux de durabilité en ensembles de contraintes sur l'espace des états, à élaborer un modèle mathématique des règles d'évolution du système sous la forme d'un système dynamique contrôlé et à calculer les noyaux de viabilités associés à différentes politiques de contrôle.

Le corridor forestier de la région de Fianarantsoa est situé à l'est de Madagascar, il relie le parc national de Ranomafana au nord à celui d'Andringitra au sud. Il est situé entre 800 et 1300 mètres d'altitude, cette altitude contribue à l'existence de nombreuses espèces endémiques, la forêt joue également un rôle important dans la régulation écologique de la région [De Wilde *et al.*, 2012]. L'est du corridor est habité par les Tanalas qui vivent de culture itinérante de riz sur brûlis. A l'ouest, vivent les Betsileo qui pratiquent une riziculture irriguée dans les bas-fonds. Les Tanalas et les Betsileo se côtoient. Les saisons sont différentes des deux cotés du corridor, les uns travaillent chez les autres durant les périodes de récoltes [Toillier et Lardon, 2009]. La population est très pauvre et la natalité très forte. Ils ont besoin de nouvelles terres pour produire du riz et ils coupent la forêt pour la transformer en rizières par la création de systèmes d'irrigation [Toillier *et al.*, 2011]. L'enjeu de durabilité comporte deux objectifs concurrents : la conservation de la forêt et la subsistance de la population.

3.4.1 La dynamique du système

Les trois variables d'état sont S la surface aménagée, P la population et K le capital de cette population. Les variables de contrôle sont les transferts monétaires, τ , la proportion de travailleurs extérieurs, ρ , l'aménagement de nouveaux espaces, δ , et les variations de population, r .

Surface

La surface aménagée S croît avec $\delta(t)$ l'effort d'aménagement par travailleur disponible à la date t , effort borné par δ_{max} . La proportion de travailleurs extérieurs est $\rho(t) \in [0; 1]$, ainsi le nombre de travailleurs disponibles pour aménager de nouvelles terres est $(1 - \rho(t))P(t)$ et :

$$\begin{aligned} S'(t) &= \delta(t)(1 - \rho(t))P(t) \\ \delta(t) &\in [0; \delta_{max}] \\ \rho(t) &\in [0; 1]. \end{aligned}$$

Population

Nous supposons simplement que le taux de croissance de la population est borné au cours du temps, $r(t) \in [r_{min}; r_{max}]$:

$$\begin{aligned} P'(t) &= r(t)P(t) \\ r(t) &\in [r_{min}; r_{max}]. \end{aligned}$$

Capital

Le capital commun à l'ensemble de la population, K , croît avec les revenus de l'agriculture, les salaires des travailleurs extérieurs et les transferts monétaires, et décroît avec la consommation et les efforts pour aménager de nouvelles terres.

La surface effectivement cultivée dépend de la surface aménagée et de la force de travail. Soit γ la surface maximale qu'une personne peut cultiver, la surface effectivement cultivée est $\min(S(t), \gamma(1 - \rho(t))P(t))$. Avec p le prix du riz et e la productivité, le gain de l'activité agricole est $pe \min(S(t), \gamma(1 - \rho(t))P(t))$.

Soit ω le revenu moyen des travailleurs extérieurs, leur travail rapporte à la communauté $\omega\rho(t)P(t)$. Les transferts monétaires consentis par des organisations extérieures sont bornés, $\tau(t) \in [0; \tau_{max}]$, la valeur de τ_{max} dépendant d'hypothèses sur l'argent que ces organisations sont prêtes à donner pour contribuer à la durabilité du corridor.

Soit \underline{c} la consommation moyenne par personne et β le coût pour aménager une unité de surface alors le capital décroît suivant $-\underline{c}P(t) - \beta\delta(t)(1 - \rho(t))P(t)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} K'(t) &= -\underline{c}P(t) - \beta\delta(t)(1 - \rho(t))P(t) \\ &\quad + pe \min(S(t), \gamma(1 - \rho(t))P(t)) \\ &\quad + \omega\rho(t)P(t) + \tau(t) \\ \delta(t) &\in [0; \delta_{max}] \\ \rho(t) &\in [0; 1] \\ \tau(t) &\in [0; \tau_{max}]. \end{aligned}$$

En résumé, le modèle est de dimension 3 pour les variables d'état et 4 pour celles de contrôle :

$$\left\{ \begin{aligned} S'(t) &= \delta(t)(1 - \rho(t))P(t) \\ P'(t) &= r(t)P(t) \\ K'(t) &= -\underline{c}P(t) - \beta\delta(t)(1 - \rho(t))P(t) \\ &\quad + pe \min(S(t), \gamma(1 - \rho(t))P(t)) \\ &\quad + \omega\rho(t)P(t) + \tau(t) \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &\leq \delta(t) \leq \delta_{max} \\ 0 &\leq \rho(t) \leq 1 \\ 0 &\leq \tau(t) \leq \tau_{max} \\ r_{min} &\leq r(t) \leq r_{max}. \end{aligned} \right.$$

3.4.2 Les enjeux écologiques et sociaux traduits comme un ensemble de contraintes

La durabilité implique plusieurs types d'enjeux. Dans cette étude de cas, ces enjeux sont de type écologique et de type économique.

La contrainte écologique est de préserver la forêt donc de borner supérieurement les surfaces aménagées :

$$0 \leq S(t) \leq F_0 - F_{min}. \quad (3.9)$$

L'objectif économique peut s'exprimer de deux façons :

- le capital par personne doit rester supérieur à un seuil, k_{min} :

$$k_{min} \leq \frac{K(t)}{P(t)}, \quad (3.10)$$

- le capital par personne ne doit pas décroître :

$$0 \leq \left(\frac{K(t)}{P(t)} \right)'. \quad (3.11)$$

La taille de la population doit être bornée, pour assurer une présence humaine, mais sans excéder la capacité du corridor :

$$P_{min} \leq P(t) \leq P_{max}. \quad (3.12)$$

En résumé, le sous-ensemble des contraintes, \mathcal{K} , est défini par :

$$\begin{aligned} S(t) &\leq F_0 - F_{min} \\ k_{min} &\leq \frac{K(t)}{P(t)} \\ 0 &\leq \left(\frac{K(t)}{P(t)} \right)' \\ P_{min} &\leq P(t) \leq P_{max}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4.3 Les valeurs des paramètres

Nous avons estimé ces paramètres à partir de trois sources : l'United States Agency for International Development (USAID), l'Institut National de la Statistique de Madagascar (INSTAT) et [Muttentzer, 2006].

Définition	Notation	Unité	Valeur
Consommation	\underline{c}	US\$/personne/année	200
Coût d'aménagement d'une nouvelle surface	β	US\$/ha	25
Prix du riz	p	US\$/kg	0.30
Productivité du riz	e	kg/ha/année	1000
Surface aménagée cultivée par personne	γ	ha/personne	0.46
Salaire agricole	ω	US\$/personne/année	200
Effort maximal d'aménagement par personne	δ_{max}	ha/personne/année	0.008
Transfert monétaire maximal	τ_{max}	US\$/année	variable
Taux de croissance minimal	r_{min}	/année	0
Taux de croissance maximal	r_{max}	/année	0.04
Surface forestière de référence	F_0	ha	110000
Seuil minimal de surface forestière	F_{min}	ha	65000
Seuil minimal de capital par personne	k_{min}	US\$/personne	400
Seuil minimal de population	P_{min}	personne	1000000
Seuil maximal de population	P_{max}	personne	10000000

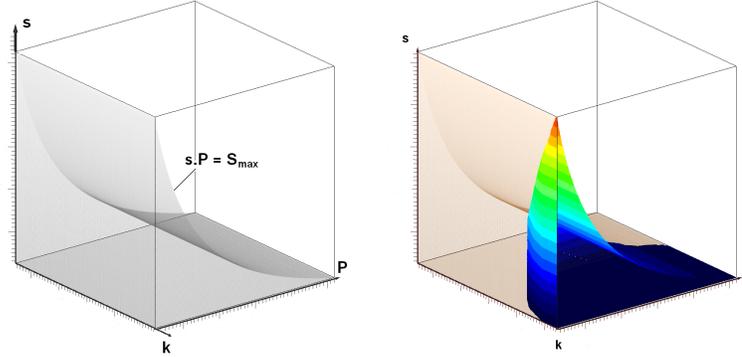
TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres pour le modèle (3.8) et les contraintes (3.13).

3.4.4 Résultats : évaluation de la durabilité de la situation actuelle du corridor forestier de Fianarantsoa

La situation actuelle est-elle durable sans transfert monétaire ?

Elle l'est si elle appartient au noyau de viabilité de la dynamique définie par (3.8) avec le paramètre $\tau_{max} = 0$ et l'ensemble des contraintes (3.13).

L'ensemble des contraintes \mathcal{K} est représenté en gris dans la figure 3.1(a). La figure 3.1(b) représente à l'intérieur de l'ensemble de contraintes \mathcal{K} le noyau de viabilité de la dynamique définie par (3.8) avec $\tau_{max} = 0$: sa frontière à l'intérieur du noyau de viabilité varie du bleu au rouge en fonction de la valeur de la surface aménagée par personne.



(a) Ensemble de contraintes \mathcal{K}

(b) A l'intérieur de l'ensemble des contraintes avec un dégradé du bleu au rouge, le noyau de viabilité du système défini par (3.8) avec $\tau_{max} = 0$ et l'ensemble des contraintes (3.13)

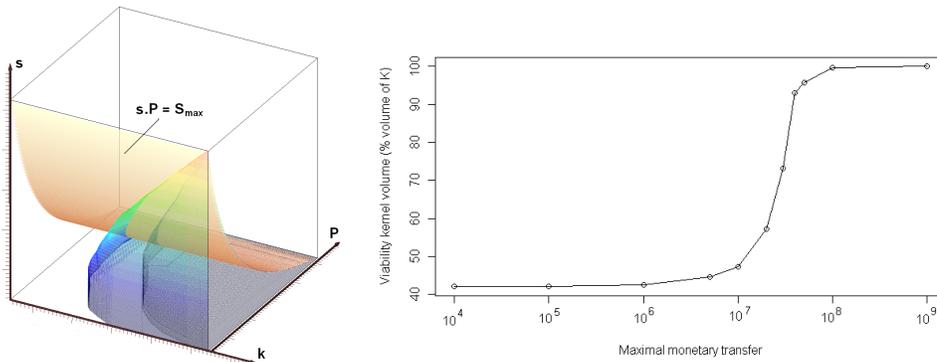
FIG. 3.1 – Ensemble de contraintes, intersection du cube $[s_{min}; s_{max}] \times [P_{min}; P_{max}] \times [k_{min}; k_{max}]$ dont les arêtes sont dessinées en gris et l'ensemble des $\{s, P, k\}$ tels que $sP \leq S_{max}$. Les valeurs des paramètres sont données dans la table 3.1 avec $s_{min} = S_{max}/P_{max}$ et $s_{max} = S_{max}/P_{min}$, et noyau de viabilité.

La situation actuelle estimée à $S = 33000$ ha, $P = 1000000$ habitants et $k = 800$ US\$ par personne d'après les projections de l'INSTAT et de l'USAID, n'appartient pas à ce noyau de viabilité, elle n'est donc pas durable sans transferts monétaires.

Effet de la valeur du transfert monétaire maximal τ_{max} sur le noyau de viabilité

Evidemment, une plus grande valeur de τ_{max} conduit à un plus gros noyau de viabilité. La figure 3.2(a) représente à l'intérieur de l'ensemble des contraintes les frontières de deux noyaux de viabilité avec des couleurs variant du bleu au rouge en fonction de la valeur de la surface aménagée par personne du point : le plus petit correspond à $\tau_{max} = 0$ et le plus gros à $\tau_{max} = 10^7$. Les transferts monétaires permettent d'inclure dans la zone durable davantage de situations initiales, en particulier des situations avec un capital plus faible. La courbe de la figure 3.2(b) associe à la valeur du transfert monétaire maximal τ_{max} le volume du noyau de viabilité.

Notons qu'augmenter le transfert monétaire maximal a d'abord peu d'effets sur le noyau de viabilité : il représente environ 42% de l'ensemble des contraintes pour τ_{max} appartenant à $[0; 10^6]$. Cependant, son volume représente 100% de l'ensemble des contraintes pour des transferts monétaires maximaux supérieurs à 10^9 . En ce qui concerne la situation actuelle, elle appartient au noyau de viabilité dès lors que $\tau_{max} \geq 25000000$. Ainsi la valeur maximale du transfert monétaire qui rendrait la situation actuelle durable est $\tau_{max} = 25000000$ US\$ environ. Les évolutions durables toutefois ne nécessitent pas à chaque période des transferts monétaires égaux à cette valeur maximale comme nous l'avons précisé dans la section 2.3.1.



(a) Deux noyaux de viabilité pour le système défini par (3.8) avec l'ensemble de contraintes (3.13) pour deux valeurs différentes du transfert monétaire maximal $\tau_{max} = 0$ et $\tau_{max} = 10^7$

(b) Volume du noyau de viabilité comme pourcentage du volume de l'ensemble des contraintes en fonction du transfert monétaire maximal τ_{max}

FIG. 3.2 – Evolution du noyau de viabilité avec la valeur du transfert monétaire maximal τ_{max} .

Conclusion du chapitre

Proposition de critères de durabilité pertinents

Les critères classiques d'évaluation de la durabilité d'évolutions sont basés sur la définition d'une fonction d'utilité agrégeant les critères écologiques, économiques et sociaux du développement durable.

L'approche proposée consiste à traduire les trois piliers du développement durable par des ensembles de contraintes dans lesquels l'état du système doit rester et à étudier la capacité du système à maintenir son état dans l'intersection de ces trois ensembles de contraintes. Cette approche assure qu'à partir d'une situation appartenant au noyau de viabilité, il existe une fonction de contrôle qui permette que les contraintes soient respectées pour toutes les générations d'où l'assurance d'une certaine équité entre les générations. Un second aspect de l'équité peut être atteint en choisissant parmi les évolutions viables celle qui minimise la variation maximale de consommation d'une génération à la suivante.

Détermination des transferts monétaires nécessaires pour assurer la durabilité dans le cas d'un modèle de préservation de la forêt malgache

Dans le cas du problème de la préservation de la forêt malgache, la traduction des enjeux écologiques et économiques de gestion durable en ensembles de contraintes et le calcul des noyaux de viabilité associés à différentes valeurs de transferts monétaires maximaux a permis de déterminer la valeur à partir de laquelle la situation devient durable dans le sens où il existe une politique d'actions gouvernant une évolution qui reste dans l'intersection des ensembles de contraintes.

Chapitre 4

Le test des politiques d'actions viables ou résilientes obtenues

Sommaire

4.1	Cas relativement bien balisé, le Camembert, et test sur chaîne pilote	67
4.1.1	Un modèle d'affinage de Camembert issu de la littérature	67
4.1.2	Description de la dynamique : les modifications du modèle d'Helias	68
4.1.3	Description des contraintes et des cibles	70
4.1.4	Résultats	71
4.1.5	Validation	71
4.2	Cas de système écologique et social : l'ambition de l'intégration d'un agent expert viabilité dans un outil d'aide à la gestion participative	72
	Conclusion	73

L'OBJECTIF de ce chapitre est de décrire un cas dans lequel des fonctions de contrôle issues de calculs de viabilité a été testé et un contexte dans lequel nous avons l'ambition de pouvoir les utiliser. Le premier cas concerne le contrôle de l'affinage du Camembert, phénomène qui met en jeu des mécanismes encore mal connus, mais pour lequel le protocole de test est évident : appliquer les fonctions de contrôle sur la chaîne pilote et évaluer le fromage obtenu. Le second contexte concerne l'aide à la gestion participative, les fonctions de contrôle issues des calculs de viabilité sont alors des politiques d'actions. Nous n'avons pas eu pour le moment les moyens de tester ces politiques en grandeur nature, l'objectif que nous avons proposé est plus modeste : tester en quoi les résultats de calculs de viabilité peuvent participer à un outil d'aide à la gestion participative.

Les travaux sur l'affinage du Camembert ont été réalisés dans le cadre du projet « Incalin » publiés dans les articles [5] et les conférences [24, 25, 27, 28]. L'ambition et les premiers pas de l'utilisation des calculs de viabilité dans les outils d'aide à la gestion participative ont été exposés dans les conférences [16, 18].

4.1 Cas relativement bien balisé, le Camembert, et test sur chaîne pilote

En collaboration avec Mariette Sicard, Cédric Baudrit et Nathalie Perrot, AgroParis-Tech, INRA, Thiverval-Grignon, France, Romain Reuillon, ISC-PIF, Paris, France, Salma Mesmoudi et Pierre-Henry Wuillemin, Lip6, Paris, France, Isabelle Alvarez, Irstea, France [5, 24, 25, 27, 28]

L'objectif est de déterminer l'ensemble des trajectoires, des contrôles d'un processus d'affinage de Camembert qui conduisent à une cible qualité attendue. Nous nous basons sur un modèle d'affinage de Camembert issu de la littérature.

4.1.1 Un modèle d'affinage de Camembert issu de la littérature

Le modèle d'affinage utilisé a été celui développé en 2007 par [Helias *et al.*, 2007]. Ce modèle mécanistique décrit les dynamiques de perte de masse des Camemberts au cours de l'affinage et les changements de température en surface des fromages (4.1) et (4.2) :

$$\frac{dm}{dt} = s \{w_{o_2} \cdot r_{o_2} - w_{co_2} \cdot r_{co_2} - k [a_w \cdot p_{sv}(T_s) - rh \cdot p_{sv}(T_\infty)]\} \quad (4.1)$$

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{s}{m \cdot C} \left\{ h(T_\infty - T_s) + \varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T_s^4) - \lambda k [a_w \cdot p_{sv}(T_s) - rh \cdot p_{sv}(T_\infty)] + \alpha \frac{r_{o_2} + r_{co_2}}{2} \right\}. \quad (4.2)$$

t représente le temps, m la masse du fromage en (kg) et s sa surface en (m^2). C représente la chaleur spécifique du fromage ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$); T_s et T_∞ représentent respectivement la température en surface d'un Camembert et la température dans le hâloir exprimées en degré Kelvin (K). La pression de vapeur saturante est notée p_{sv} et exprimée en Pascal (Pa). a_w nombre sans dimension représente l'activité de l'eau du fromage, c'est à dire sa capacité à libérer de l'eau. rh est l'humidité relative du hâloir. Enfin, k est le coefficient moyen de transfert d'eau en $kg \cdot m^{-2} \cdot Pa^{-1} \cdot s^{-1}$. λ est la chaleur latente de vaporisation de l'eau ($J \cdot kg^{-1}$). h est le coefficient moyen de transfert de chaleur par convection ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$), ε est l'émissivité du fromage (sans dimension), σ est la constante de Stefan-Boltzmann ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$). r_{CO_2} est le taux de production de dioxyde de carbone et r_{O_2} le taux de d'oxygène consommé. α est la chaleur dégagée par la respiration des microorganismes lors de la production d'1 mol de dioxyde de carbone ($J \cdot mol^{-1}$). Les paramètres w_{o_2} et w_{co_2} sont la masse molaire ($kg \cdot mol^{-1}$) respectivement du d'oxygène et du dioxyde de carbone.

Dans ce modèle, la perte de masse et les variations de la température de surface sont liés :

1. à l'évaporation de l'eau :

$$\phi_w = \lambda k [a_w \cdot p_{sv}(T_s) - rh \cdot p_{sv}(T_\infty)] , \quad (4.3)$$

2. aux flux convectifs et radiatifs exprimés :

$$\psi_{cr} = h(T_\infty - T_s) + \varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T_s^4) , \quad (4.4)$$

3. à l'activité respiratoire des microorganismes :

$$\begin{cases} r = \alpha \frac{r_{o_2} + r_{co_2}}{2} \\ p_c = w_{o_2} \cdot r_{o_2} - w_{co_2} \cdot r_{co_2} . \end{cases} \quad (4.5)$$

Le modèle d'affinage de Camembert d'[Helias *et al.*, 2007] a été validé sur deux essais en hâloir pilote, la température, l'humidité relative et les concentrations en dioxygène et dioxyde de carbone étaient continuellement mesurées. Après les essais, les enregistrements de ces mesures étaient utilisés pour prédire la perte de masse du fromage et sa température de surface au cours de l'affinage. La perte de masse et la température de surface ainsi calculées ont ensuite été comparées aux données mesurées pendant l'essai.

4.1.2 Description de la dynamique : les modifications du modèle d'Helias

Le modèle du processus d'affinage d'[Helias *et al.*, 2007] comporte deux variables d'état, la masse du camembert, m , et la température du surface du Camembert, T_s .

Les variations de ces variables d'état au cours du temps, $\frac{dm}{dt}(t)$ et $\frac{dT_s}{dt}(t)$, décrites par les équations (4.1) et (4.2), dépendent des valeurs des variables, $m(t)$ et $T_s(t)$, de la respiration $r_{o_2}(t)$ et $r_{CO_2}(t)$, de la température ambiante $T_\infty(t)$ et de l'humidité relative $rh(t)$ et de paramètres constants, s , w_{o_2} , w_{CO_2} , k , a_w , p_{sv} , C , h , ϵ , σ , λ et α .

La quantité $r_{o_2}(t)$ se déduit facilement de la quantité $r_{CO_2}(t)$ car la consommation de dioxygène est équimolaire à la libération de dioxyde de carbone, c'est à dire qu'aux erreurs de mesure près $w_{o_2} \cdot r_{o_2} = w_{CO_2} \cdot r_{CO_2}$.

Dans ce modèle donc, cinq quantité varient : $m(t)$, $T_s(t)$, $r_{CO_2}(t)$, $T_\infty(t)$ et $rh(t)$. Les deux dernières peuvent être contrôlées par un opérateur, ce sont donc des contrôles dans la terminologie de la théorie de la viabilité. Les variables d'état décrivant l'état du fromage durant le processus d'affinage et dont les variations sont non linéaires et interdépendantes sont donc au nombre de trois : $m(t)$, $T_s(t)$ et $r_{CO_2}(t)$.

Le modèle d'[Helias *et al.*, 2007] donne les équations de variation de $m(t)$ et $T_s(t)$, mais pas de $r_{CO_2}(t)$. En effet, il utilisait dans son modèle des valeurs mesurées de la respiration. Il faut donc, pour mener l'analyse de viabilité, développer une équation d'évolution de la respiration.

Discrétisation du modèle en temps

Ne disposant pas de l'équation différentielle continue régissant les variations de la respiration r_{CO_2} , nous décrivons notre problème de viabilité directement sous une forme discrète en temps.

Soit $\Delta t > 0$, le pas de temps, $n \in N$, la discrétisation du modèle (4.1) et (4.2) est :

$$m^{n+1} = m^n + \Delta t \cdot s \{w_{o_2} \cdot r_{o_2}^n - w_{co_2} \cdot r_{co_2}^n - k [a_w \cdot p_{sv}(T_s^n) - rh^n \cdot p_{sv}(T_\infty^n)]\} \quad (4.6)$$

$$T_S^{n+1} = T_S^n + \Delta t \cdot \frac{s}{m^n \cdot C} \left\{ h(T_\infty^n - T_S^n) + \varepsilon \sigma (T_\infty^{n4} - T_S^{n4}) - \lambda k [a_w \cdot p_{sv}(T_S^n) - r h^n \cdot p_{sv}(T_\infty^n)] + \alpha \frac{r_{o_2}^n + r_{co_2}^n}{2} \right\}. \quad (4.7)$$

m^n , T_S^n et $r_{CO_2}^n$ sont les variables d'état, T_∞^n et r_h^n sont les variables de contrôle. Les évolutions de m et T_S sont décrites par les équations (4.6) et (4.7). Il faut maintenant définir celle de la respiration r_{CO_2} .

Modèle empirique de respiration

Pour présenter la dynamique sous forme d'un système dynamique contrôlé en temps discret, il faut définir l'évolution de la variable respiration $r_{CO_2}^n$, c'est à dire déterminer une fonction f qui associe aux valeurs des variables d'état et de contrôle à l'instant n , la valeur de la respiration à l'instant $n + 1$:

$$r_{CO_2}^{n+1} = f(m^n, T_S^n, r_{CO_2}^n, T_\infty^n, r_h^n).$$

Nous avons uniquement à notre disposition les courbes expérimentales de respiration pour trois valeurs constantes de la température ambiante, T_∞ (8°C, 12°C et 16°C) et pour 98% d'humidité relative.

Nous avons alors dû faire plusieurs hypothèses très audacieuses :

- La première hypothèse est que la respiration à l'instant $n + 1$ ne dépend que de la valeur de la respiration et de la température ambiante à l'instant n .
- La seconde hypothèse est que $r_{CO_2}^{n+1}$ se déduit de $r_{CO_2}^n$ et T_∞^n de la manière suivante : La température T_∞^n permet de sélectionner la courbe expérimentale de référence. Ensuite, à une même valeur de $r_{CO_2}^n$ peuvent correspondre deux points sur la courbe de respiration expérimentale comme indiqué sur la figure 4.1.

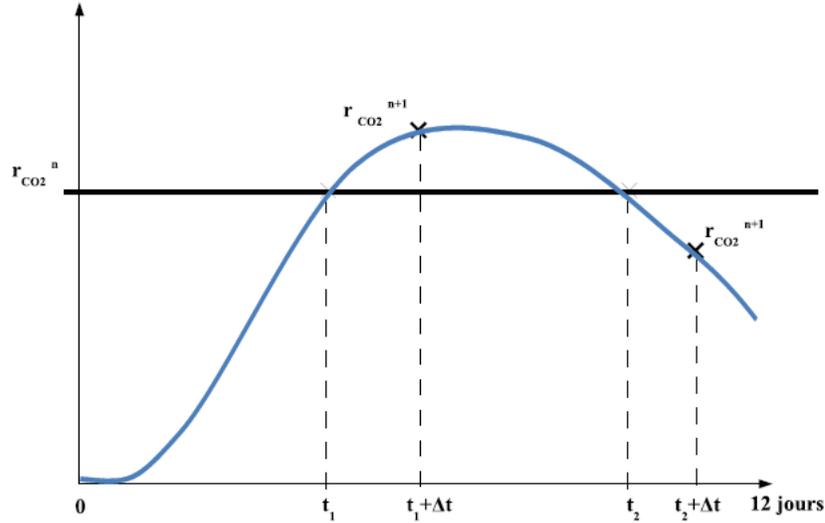


FIG. 4.1 – Schéma d'évolution empirique de la valeur de la respiration en fonction du temps pour une température ambiante donnée constante au cours du temps.

Nous avons donc rajouté une variable b discrète qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0; 1\}$ et qui indique si on est en phase ascendante $b = 0$ ou en phase descendante $b = 1$.

L'évolution de la variable b est décrite par :

$$\begin{cases} b^{n+1} = b^n & \text{si } b^n = 1, \\ b^{n+1} = 1 & \text{si } b^n = 0 \text{ et } r_{CO_2}^{n+1} < r_{CO_2}^n, \\ b^{n+1} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Malgré les deux hypothèses ci-dessus non vérifiées, ce modèle a l'intérêt d'incorporer les phénomènes physiques et microbiologiques de l'affinage et ainsi de prendre en compte une certaine part de la complexité des phénomènes.

Fréquence de variation des contrôles

En usine, la modification de la valeur de la température ambiante, T_∞ , ou de l'humidité relative, rh , est réalisée par un opérateur, dont la fréquence d'intervention sur les hâloirs est journalière. Nous imposons donc que les contrôles \tilde{T}_∞ et $\tilde{r}h$ soient susceptibles d'être modifiés uniquement toutes les 24 heures.

Les valeurs de ces contrôles sont bornées :

$$\forall n \in N \quad \tilde{T}_\infty^n \in [8^\circ C; 16^\circ C] \quad (4.9)$$

$$\forall n \in N \quad \tilde{r}h^n \in [92; 96]. \quad (4.10)$$

Ces intervalles de variations sont plus larges que les conduites d'affinage usuellement réalisées afin éventuellement de trouver des méthodes de conduite nouvelles pour les industriels.

4.1.3 Description des contraintes et des cibles

La définition des contraintes et des cibles a été obtenue à partir des connaissances des experts et du domaine de validité du modèle :

	Unité	Min	Max
Masse	g	250	310
Température de surface du fromage	kelvin	281	289
Respiration	$g_{CO_2}.m^{-2}.jour^{-1}$	0	55

TAB. 4.1 – Contraintes sur les variables d'état pour l'algorithme de viabilité

Ces contraintes se traduisent par l'ensemble $K \in \mathbb{R}^3 \times \{0, 1\}$:

$$K := [250; 310] \times [281; 289] \times [0; 55] \times \{0, 1\}. \quad (4.11)$$

b peut prendre les valeurs 0 ou 1, il n'y a pas de contrainte supplémentaire sur b .

La cible qualité à atteindre en fin d'affinage a été définie suite au recueil d'expertise auprès des fromagers : la masse du fromage qui doit être au minimum légal de 250 g et au maximum de 270 g, l'activité microbienne ne doit pas être trop importante, ni trop faible et en décroissance et la température de surface ne doit pas être trop élevée.

La cible au temps final T_f correspond au sous-ensemble $C_f \in \mathbb{R}^3 \times \{0, 1\}$ défini par :

$$C_f := [250; 270] \times [281; 283] \times [23; 50] \times \{1\}. \quad (4.12)$$

b doit être égal à 1 car l'activité des microorganismes doit décroître en fin d'affinage.

Doit être également définie une cible initiale car au début de l'affinage, les microorganismes ne sont pas actifs :

$$C_i := [250; 310] \times [281; 289] \times \{0\} \times \{0\}. \quad (4.13)$$

4.1.4 Résultats

Le problème posé de déterminer l'ensemble des conduites qui permettent de réaliser un bon Camembert revient à calculer successivement deux bassins de capture : un bassin de capture avec la dynamique *forward* et la cible C_f , puis à l'intérieur de ce bassin de capture, le bassin de capture de la cible initiale par la dynamique *backward*.

Deux bassins de capture ont été calculés pour des durées d'affinage de 8 jours et de 12 jours, 12 jours étant la durée usuelle d'un affinage. Cependant les bassins de capture pour une durée d'affinage de 8 jours ne sont pas vides ce qui signifie qu'il existe pour le modèle, les contraintes et les cibles que nous avons définis, une fonction de contrôle qui permet de réaliser un affinage en 8 jours soit 4 jours de moins que la durée usuelle. Nous avons en particulier identifié une trajectoire pour un affinage de 8 jours avec un fromage de masse initiale 284 g. Les contrôles à appliquer pour suivre cette trajectoire sont présentés sur la figure 4.2(a) en comparaison avec la trajectoire d'affinage standard sur la figure 4.2(b).

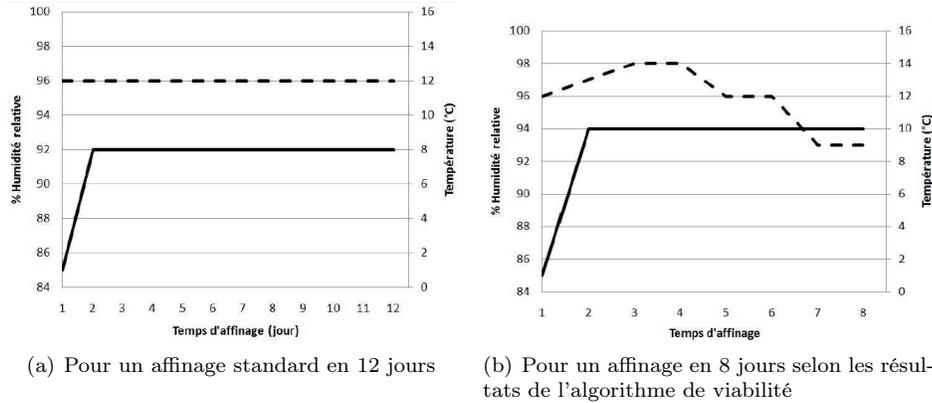


FIG. 4.2 – Fonctions de contrôle de l'humidité relative (traits pleins) et de la température (pointillés).

Cette trajectoire a ensuite été testée sur un hâloir pilote du laboratoire, les contrôles étant fixés chaque jour selon les consignes issues de l'algorithme de viabilité.

4.1.5 Validation

Les résultats de pertes de masse mesurées en ligne pour les conduites d'affinage montrent que la cible de masse est atteinte dans les deux cas (entre 250 g et 270 g). En revanche, dans le cas de l'affinage standard 54 g de matière sont perdus contre seulement 34 g dans le cas de l'affinage en 8 jours.

Concernant les cinétiques microbiennes six indicateurs ont été suivis : le pH, les concentrations en *K. marxianus*, *G. candidum*, *P. camemberti*, *B. aurantiacum* et la vitesse de libération du CO_2 . Le taux de libération du dioxyde de carbone observé pendant l'affinage en 8 jours est conforme aux contraintes imposées : la respiration démarre à 0 augmente, atteint un maximum supérieur à $30 \text{ g/m}^2/\text{jour}$ et ensuite redescend lentement jusqu'au 8e jour. La respiration des microorganismes dans l'affinage en 8 jours démarre environ 1.5 jours plus tôt que lors de l'affinage standard.

Dans le cas de l'affinage en 8 jours, la hausse caractéristique du pH a lieu 1 jour plus tôt que dans le cas de l'affinage standard.

La levure *K. marxianus* semble s'être moins bien développée qu'au cours de l'affinage standard ce qui paraît curieux car les levures sont habituellement favorisées par des températures

plus élevées.

L'autre levure, *G. candidum*, a eu le même développement dans les deux conduites d'affinage. Pour le *Penicilium camemberti*, la concentration en spores reste globalement constante dans les deux cas d'affinage. Les mesures du panel sensoriel montrent l'apparition du *P. camemberti* au 4e jour pour l'affinage en 8 jours et au 6e jour pour l'affinage standard.

Pour les bactéries de type *B. aurantiacum*, le développement se révèle être moins important dans le cas de l'affinage en 8 jours. En revanche l'allure globale de la cinétique est similaire.

Les deux affinages ont été suivis par le panel sensoriel. Ces mesures permettent de comparer l'évolution des profils sensoriels : il apparaît que les fromages de l'affinage en 8 jours ont au 15e jour le même profil qu'au 20e jour pour les fromages affinés de manière standard.

Pour comparer le profil organoleptique des fromages expérimentaux à ceux vendus dans le commerce, les fromages sont évalués par un panel spécialisé dans la dégustation de camembert de l'Actilait, centre technique du lait et des produits laitiers. Une analyse est également effectuée sur des camemberts d'une marque vendue en grande distribution. La première analyse de ces profils permet de voir que les camemberts expérimentaux ne sont pas très différents des camemberts du commerce analysés. Sur des échelles de 0 à 10 pour 26 critères, l'écart maximal est de 3 points. Cependant, dans cette comparaison, il y a plus de différences entre camemberts du commerce et camemberts expérimentaux qu'entre les camemberts expérimentaux conduits selon les deux types d'affinages (standard vs. en 8 jours).

4.2 Cas de système écologique et social : l'ambition de l'intégration d'un agent expert viabilité dans un outil d'aide à la gestion participative

En collaboration avec Marta de Azevedo Irving et Gustavo Mendes de Melo UFRJ et INCT-PPED Rio de Janeiro, Brésil, José Eurico Filho Vasconcelos, NATI, UNIFOR, Fortaleza, Brésil, Jean-Pierre Briot, Lip6, Paris, France, Wei Wei et Isabelle Alvarez, Irstea, France [16, 17, 18]

Lorsque les outils de la théorie de la viabilité sont utilisés pour étudier la compatibilité entre des dynamiques de systèmes écologiques et sociaux soumis à des contraintes physiques, biologiques et normatives, les résultats obtenus sont des politiques de gestion. N'ayant pas trouvé jusqu'à présent l'opportunité de tester ces politiques d'action dans le monde réel, nous avons l'objectif de tester en quoi les résultats de calculs de viabilité peuvent participer à un outil d'aide à la gestion participative.

En effet, sous la pression sociétale, la gestion des territoires s'oriente vers un processus de décision où l'ensemble des acteurs concernés est impliqué : l'ensemble des acteurs élabore la définition du problème et sa solution. Ce mode de gestion participatif met l'accent sur la connaissance de chaque acteur, sur les discussions et la négociation.

L'élaboration de méthodes et d'outils pour l'aide au déroulement du processus de gestion participative sont un domaine de recherche [Lynam *et al.*, 2007]. Ainsi, la modélisation d'accompagnement a initialement proposé comme méthodes et outils pour aider les différents acteurs à créer une compréhension collective des conflits et à négocier des stratégies pour y faire face, de coupler des simulations multi-agents pour représenter l'évolution des ressources environnementales et des jeux de rôles joués par les parties prenantes [Barreteau, 2003].

Les jeux sérieux sont une approche nouvelle et efficace pour explorer et tester des possibilités d'évolutions dans un contexte réaliste mais sans coût ni risque [Susi *et al.*, 2007]. Ainsi, la plateforme SimParc [Briot *et al.*, 2007] a pour objectif la formation de gestionnaires de parcs nationaux au Brésil, ainsi que l'exploration de scénarios : le jeu est basé sur un processus de négociation qui se déroule au sein du conseil du parc. Les différentes parties prenantes

participent au jeu et sont donc des « joueurs ». Le gestionnaire du parc agit comme un arbitre dans le jeu, il prend une décision finale sur les types de conservation à attribuer à chaque unité de paysage. Les autres joueurs font des propositions. Il y a également des agents artificiels qui peuvent remplacer certains joueurs [18].

Dans le cadre de l'assistance à la gestion participative des territoires et très précisément à l'intérieur de la plateforme SimParc, nous avons considéré la possibilité d'utiliser des études de viabilité de modèles de l'environnement soumis à de multiples contraintes. L'objectif est d'amener à une réflexion sur les possibilités d'intégrer des modèles de viabilité dans un processus d'aide à la gestion participative, de manière à apporter aux acteurs des connaissances liées à la viabilité des systèmes. Il s'agit d'examiner la faisabilité de l'utilisation de ces connaissances et leur impact sur la qualité de la solution de gestion choisie.

Nous avons précisé les règles de recours à l'expertise de l'agent expert viabilité au cours du jeu [16, 17] : l'agent expert viabilité ne prend pas de décision pendant le jeu, son rôle est de proposer des résultats de compatibilité entre dynamiques et contraintes pour aider les joueurs à évaluer la qualité de la décision eu égard aux contraintes spécifiées.

Lorsqu'un joueur fait appel à l'agent expert viabilité, plusieurs systèmes dynamiques représentant les lois gouvernant les évolutions du système ainsi que l'impact des choix de gestion lui sont proposés, il peut en faire varier les paramètres ; de même, il peut modifier les valeurs des seuils des variables qu'il souhaite borner.

L'agent expert viabilité calcule alors le noyau de viabilité associé à ces dynamiques et contraintes : si le noyau est vide, dynamiques et contraintes ne sont jamais compatibles, sinon à partir de situations initiales situées dans le noyau, l'agent expert propose des fonctions de contrôle gouvernant effectivement des évolutions viables avec des graphiques représentant les évolutions des variables d'état et de contrôle associées.

Le joueur peut à nouveau faire appel à l'agent expert viabilité en modifiant certains paramètres des dynamiques et des contraintes. Dans ce cas, en plus des résultats précédents, l'agent expert viabilité fournit une comparaison avec les expérimentations numériques précédentes en comparant les volumes des noyaux de viabilité obtenus.

Conclusion du chapitre

Il existe peu de cas de tests des résultats de la théorie de la viabilité sur les systèmes réels. Nous en connaissons en robotique, en finance et pour l'affinage du Camembert. Nous avons participé à cette dernière application et nous avons trouvé en considérant *a priori* l'ensemble des conduites possibles, une conduite d'affinage plus courte que celle de l'affinage classique et réalisé un Camembert jugé correct en 4 jours de moins.

Quant à l'utilisation réelle dans le cadre de la gestion de systèmes écologiques et sociaux, il n'en existe pas à notre connaissance. Notre ambition se limite pour le moment à l'utilisation des résultats dans le cadre d'outils d'aide à la gestion participative et il reste encore du travail pour y parvenir.

Chapitre 5

Perspectives : la résilience dans les systèmes complexes

Sommaire

5.1	Mon expérience « Systèmes Complexes »	77
5.1.1	Des projets pluridisciplinaires	77
5.1.2	Des définitions, des caractéristiques	77
5.1.3	Des questions de fond à investiguer	77
5.2	Mon projet de recherche	78
5.2.1	Contexte	78
5.2.2	Problématique : lier architecture et propriétés	78
5.2.3	Stratégie	78

5.1 Mon expérience « Systèmes Complexes »

5.1.1 Des projets pluridisciplinaires

Depuis 13 ans, mes recherches se déroulent au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes et plusieurs projets auxquels j'ai participé impliquaient plus ou moins directement l'Institut des Systèmes Complexes de Paris Ile-de France.

Les projets ANR « Dédution » et « Icalin », les projets européens « Patres » et « Dream » s'intéressaient à des objets différents (des forêts tempérées ou tropicales, des savanes, des communautés linguistiques pour « Dédution » et « Patres », des procédés de l'industrie agroalimentaire pour « Incalin » et « Dream »). Cependant, la stratégie mise en œuvre était similaire : réunir des chercheurs réfléchissant sur des méthodes et des chercheurs étudiant des phénomènes pour se poser de nouvelles questions sur ces phénomènes. Dans le contexte de ces projets, mes apports ont concerné la formulation de problèmes de viabilité et de résilience et leur résolution.

Cette approche « systèmes complexes » consiste à mobiliser différentes méthodes, différents outils issus de différents domaines scientifiques pour répondre à une question posée sur un objet appartenant éventuellement à un autre domaine scientifique. C'est d'abord la notion de résilience qui m'a intéressée, les concepts de la théorie de la viabilité se sont ensuite avérés pertinents pour la mesurer. Dans le projet « Incalin », la modélisation et le contrôle de l'affinage du Camembert ont mobilisé des chercheurs étudiant le phénomène d'affinage, mais également, les réseaux bayésiens, la théorie de la viabilité, l'informatique pour parvenir à une intégration des connaissances et des données disponibles sur l'affinage, à la formulation et à la résolution d'un problème de viabilité associé aux contraintes et objectifs sur ce phénomène, et finalement à la proposition de nouvelles conduites d'affinage.

[Zwirn, 2006] note et illustre la richesse pluridisciplinaire des apports de cette approche « systèmes complexes » qui traverse les frontières classiques des sciences [Miller et Page, 2007].

5.1.2 Des définitions, des caractéristiques

Les idées de complexité et de systèmes complexes nourrissent une littérature très riche. De nombreuses mesures de la complexité ont été proposées et aucune n'est actuellement universellement reconnue [Mitchel, 2009]. [Deffuant *et al.*, 2014] distinguent trois visions de la complexité en utilisant le démon de Laplace comme référence.

Certaines réflexions que les discussions sur la complexité et les systèmes complexes provoquent, m'inspirent et j'en cherche l'écho dans les métaphores et modèles mathématiques à la construction desquels je contribue.

Pour [Boccaro, 2004], une population d'agents connectés est complexe lorsqu'il existe une dynamique globale émergente résultant des actions des individus et non imposée par un contrôleur central. [Morin, 1990] note cette notion d'« *écologie de l'action* ».

[Gell-Mann, 1995] caractérise les systèmes adaptatifs complexes par leur capacité à traiter l'information : les systèmes adaptatifs complexes identifient des régularités dans les flux de données qu'ils reçoivent et compressent ces régularités en schémas.

Pour [Miller et Page, 2007], l'étude des systèmes complexes porte l'intérêt entre les frontières scientifiques habituelles. Le monde tend à ne pas être complètement gelé ou aléatoire, mais il existe entre ces deux états. La complexité, « *c'est l'incertitude au sein de systèmes richement organisés. Elle concerne des systèmes semi-aléatoires dont l'ordre est inséparable des aléas qui les concernent.* » [Morin, 1990]

5.1.3 Des questions de fond à investiguer

S'il n'y a pas de définition consensuelle d'un système complexe, des problématiques semblables sont apparues alors que les objets étaient différents. Il y a donc un enjeu de capita-

lisation des expériences et de définition de problématiques scientifiques.

Parmi les caractéristiques rencontrées, ni nécessaires, ni suffisantes pour qualifier un système de complexe, notons :

- le fait que les propriétés globales ne se déduisent pas simplement des propriétés des éléments, ces propriétés sont alors qualifiées d'émergentes et une question de fond est de comprendre l'origine des propriétés émergentes au sens de propriétés qualitativement différentes de celles des éléments,
- l'existence de rétroactions du niveau global souvent qualifié d'émergent sur les niveaux locaux,
- une réduction des possibles par rapport à l'ensemble des comportements obtenus en combinant diversement les comportements individuels,
- la présence d'incertitude : lorsqu'une situation est complexe, même après une analyse précise et nécessaire, il restera des éléments imprévisibles (dans le déroulement d'un projet par exemple, il n'est pas possible d'anticiper toutes les réactions des parties prenantes) avec lesquels il faudra composer, les « *cygnes noirs* » de [Taleb, 2007].

5.2 Mon projet de recherche

5.2.1 Contexte

Dans un système complexe, le comportement global peut ne pas être affecté par certaines variations des états des niveaux locaux. L'existence d'interactions entre les éléments et de rétroactions du niveau global sur les niveaux locaux, couplées aux lois agissants à ces niveaux locaux, peut stabiliser des états marginaux ou critiques.

Ainsi, le schéma d'interactions peut apparaître plus important que certains détails microscopiques, aux variations desquels le système est précisément capable de s'adapter sans que son comportement global ne change.

5.2.2 Problématique : lier architecture et propriétés

Conservant mon aspiration à l'ingénierie, la problématique du lien entre architecture de régulation et propriétés observées m'intéresse. Dans la suite des travaux sur la résilience, je souhaite aborder ces propriétés par les contraintes que leur réalisation impose, et par les perturbations auxquelles elles sont résilientes afin de déterminer quelles architectures de régulation peuvent les produire.

5.2.3 Stratégie

Des modèles minimaux

[Anderson, 1972] propose de réduire les informations retenues dans la modélisation des éléments au strict nécessaire, l'étude de systèmes-modèles, minimaux, pourra être très fructueuse, en associant à différentes architectures, nécessairement multi-échelles, différentes possibilités de régulation, puis en déterminant quelles sont celles qui assurent la résilience de propriétés globales face à des perturbations globales ou locales.

Des allers-retours avec les applications

Proposer une architecture fournit une hypothèse pour exploiter, organiser, interpréter des données expérimentales et guider leur recueil ; les données recueillies conduisent à modifier l'architecture proposée lorsque les possibilités qu'elle offre sont soit trop restreintes et ne contiennent pas certains phénomènes observés, soit bien plus vastes que les phénomènes

effectivement observés ; cette nouvelle architecture peut à son tour guider le recueil de nouvelles données.

Dans ce cadre, les collaborations potentielles sont nombreuses au sein même d'Irstea (par exemple, dans la suite des projets antérieurs, les forêts mélangées et les réseaux trophiques).

Premier pas vers le contrôle complexe

Un système complexe une fois contrôlé n'a sans doute plus rien de complexe. Le contrôle complexe est donc un oxymore ou une illusion si contrôle est pris au sens d'imposer une consigne. « *Dans la très haute complexité, le désordre devient liberté et l'ordre est beaucoup plus régulation que contrainte.* » En envisageant les structures de régulations, le « et » de « un et un », les interactions, les informations échangées, qui font que « *le tout est plus que la somme des parties* », qu'« *il existe des qualités émergentes, c'est-à-dire qui naissent de l'organisation d'un tout, et qui peuvent rétroagir sur les parties* », l'objectif peut être d'étudier comment ces structures de régulation conduisent à une restriction de l'ensemble des possibles, au fait que « *le tout est également moins que la somme des parties car les parties peuvent avoir des qualités qui sont inhibées par l'organisation de l'ensemble* » (citations de [Morin, 1990]).

La première vertu de la restriction de l'ensemble des possibles peut être de favoriser la persistance du système complexe et des entités qui le composent au cours du temps.

Comment construire alors un ensemble, lois individuelles - lois d'interactions, tel que des préoccupations de viabilité nécessairement locales favorise la viabilité de tous ?

Dans le formalisme de la viabilité, la question peut se poser ainsi : considérons N agents, membres d'une même entité globale.

Chaque agent i est caractérisé par ses propres variables d'état, $x_i \in X_i \subset R^{n_i}$, et ses propres variables de contrôle, $u_i \in R^{p_i}$. Puisque tous les agents appartiennent à la même entité globale, chacune des dynamiques individuelles dépend des états et contrôles qui lui sont propres mais est aussi influencée par les variables d'état de l'entité globale, $x \in X \subset R^n$:

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= f_i(x_i(t), u_i(t), x(t)) \\ u_i(t) &\in U_i(x_i(t), x(t)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où $U_i(x_i, x) \subset R^{p_i}$ est l'ensemble des contrôles admissibles pour l'agent i lorsque son état est x_i et celui de l'entité globale est x .

A leur niveau, les agents sont confrontés à des contraintes de viabilité locales décrites par $L_i \subset X_i$:

$$\forall t, x_i(t) \in L_i. \quad (5.2)$$

En outre, les variations des variables macroscopiques $x \in X \subset R^n$ décrivant l'entité globale dépendent de leur propres valeurs mais également des variables d'état et de contrôle locales :

$$x'(t) = f(x(t), \{x_i(t)\}_{1,\dots,N}, \{u_i(t)\}_{1,\dots,N}). \quad (5.3)$$

Résoudre un tel problème de viabilité consiste à trouver des fonctions de contrôle telles que les contraintes soient satisfaites au cours du temps. L'utilisation du noyau de viabilité, ensemble de dimension $\sum_1^N n_i + n$ dans ce cas, est impossible. De plus, envisager d'imposer à chaque individu son comportement est irréaliste dans ce contexte. Il peut être pertinent, en revanche, de trouver des procédures d'identification de domaines de viabilité (ensembles ayant les mêmes propriétés que les noyaux sauf celle de plus grand ensemble) sous forme de produits d'ensembles signifiants au niveau de chaque individu. Par exemple, est-ce que le produit de noyaux de viabilités locaux, impliquant un individu et les informations qu'il partage avec les autres, est un domaine de viabilité pour le système global ? Si tel est le cas, le gain supplémentaire est la calculabilité éventuelle de ce domaine puisqu'exprimable comme produit de noyaux de viabilité de systèmes de dimensions bien plus faibles.

Références personnelles citées dans ce mémoire

Articles dans des revues à comité de lectures

- [1] C. Bernard and S. Martin. Comparing the sustainability of different action policy possibilities : Application to the issue of both household survival and forest preservation in the corridor of fianarantsoa. *Mathematical Biosciences*, 245(2) :322–330, 2013.
- [2] W. Wei, I. Alvarez, and S. Martin. Sustainability analysis : Viability concepts to consider transient and asymptotical dynamics in socio-ecological tourism-based systems. *Ecological Modelling*, 251 :103–113, 2013.
- [3] M.-H. Durand, S. Martin, and P. Saint-Pierre. Viability and sustainable development. *Natures Sciences Societes*, 20(3) :271–285, 2012.
- [4] C. Bernard and S. Martin. Building strategies to ensure language coexistence in presence of bilingualism. *Applied Mathematics and Computation*, 218(17) :8825–8841, 2012.
- [5] N. Sicard, N. Perrot, R. Reuillon, S. Mesmoudi, I. Alvarez, and S. Martin. A viability approach to control food processes : Application to a camembert cheese ripening process. *Food Control*, 23(2) :312–319, 2012.
- [6] L. Chapel, X. Castello, C. Bernard, G. Deffuant, V. Eguiluz, S. Martin, and M. San Miguel. Viability and resilience of languages in competition. *PLoS One*, 5(1 (e8681)) :11, 2010.
- [7] L. Chapel, G. Deffuant, S. Martin, and C. Mullon. Defining yield policies in a viability approach. *Ecological Modelling*, 212(1-2) :10–15, 2008.
- [8] L. Chapel G. Deffuant, G. and S. Martin. Approximating viability kernels with support vector machines. *IEEE Transactions on automatic control*, 52(5) :933–937, 2007.
- [9] O. Bokanowski, S. Martin, R. Munos, and H. Zidani. An anti-diffusive scheme for viability problems. *Applied Numerical Mathematics*, 56(9) :1147–1162, 2006.
- [10] S. Martin. The cost of restoration as a way of defining resilience : a viability approach applied to a model of lake eutrophication. *Ecology and Society*, 9(2) :19, 2004.

Chapitres d’ouvrages

- [11] I. Alvarez, S. Martin, O. Dordan, X. Litrico, and P. Saint-Pierre. Indicateurs de sécurité et de restauration dynamiques. In V. Ancey, I. Avelange, and B. Dedieu, editors, *Agir en situation d’incertitude. Regards pluridisciplinaires au Nord et au Sud*, Collection Ecopolis, page 419. Peter Lang, 2013.

- [12] S. Martin, G. Deffuant, and J.M. Calabrese. Defining resilience mathematically : from attractors to viability. In G. Deffuant and N. Gilbert, editors, *Viability and Resilience of Complex Systems*, Understanding complex systems, pages 15–36. Springer, 2011.
- [13] I. Alvarez and S. Martin. Geometric robustness of viability kernels and resilience basins. In G. Deffuant and N. Gilbert, editors, *Viability and Resilience of Complex Systems*, Understanding complex systems, pages 193–218. Springer, 2011.
- [14] J.P. Aubin and S. Martin. Travel time tubes regulating transportation traffic. In A. Leizarowitz, B.S. Mordukhovich, I. Shafir, and A.J. Zaslavski, editors, *Contemporary Mathematics*, vol .514, pages 1–25. American Mathematical Society, 2010.

Conférences avec actes

- [15] I. Alvarez, R. de Aldama, S. Martin, and R. Reuillon. Assessing the resilience of bilingual societies : coupling viability and active learning with kd-tree. application to bilingual societies. In *IJCAI 2013 AI and Computational Sustainability Track*, pages 2776–2782, Beijing, China, August 2013.
- [16] W. Wei, I. Alvarez, S. Martin, J.-P. Briot, M. Irving, and G. Melo. Integration of viability models in a serious game for the management of protected areas. In *Antonio Palma dos Reis and Patrick S.P. Wang, Zijiang (eds), IADIS Intelligent Systems and Agents Conference 2012*, Lisbonne, Portugal, January 2012.
- [17] W. Wei, I. Alvarez, and S. Martin. Algorithme d’approximation du noyau de viabilité avec procédure de classification. In *Actes de la conférence RFIA 2012*, pages 978–2–9539515–2–3, Lyon, France, January 2012. Session "Posters".
- [18] J.P. Briot, M. Irving, G. Melo, E. Vasconcelos, I. Alvarez, S. Martin, and W. Wei. A serious game and artificial agents to support intercultural participatory management of protected areas for biodiversity conservation and social inclusion. In *Culture and Computing 2011, The Second International Conference on Culture and Computing, Kyoto University, 20/10/2011-22/10/2011, Kyoto, JPN*, page 6. Conference Publishing Services(CPS), 2011.
- [19] I. Alvarez, C. Bernard, S. Martin, and P. Saint-Pierre. Compétition linguistique : stratégies pour favoriser la coexistence durable en présence de bilinguisme. In *48ème colloque de l’Association de Science Régionale de Langue Française, ASRDLF 2011, 06/07/2011-08/07/2011, Schoelcher, MTQ / CD Rom, Session spéciale Vulnérabilité-Résilience-Viabilité, Actes du 48ème colloque ASRDLF 2011*, page 11, 2011.
- [20] S. Martin and I. Alvarez. Indicateurs dynamiques de gestion durable. In *23èmes Entretiens Jacques Cartier, "Vulnérabilité et résilience des écosystèmes aquatiques : de l’évaluation à un fonctionnement durable - une utopie ?", 22/11/2010-23/11/2010, Lyon, FRA / Vulnérabilité et résilience des écosystèmes : l’utopie d’une gestion durable*, pages 6–15, 2010.
- [21] I. Alvarez, S. Martin, O. Dordan, X. Litrico, and P. Saint Pierre. Indicateurs de sécurité et de restauration dynamiques. In *Agir en situation d’incertitude : quelles constructions individuelles et collectives des régimes de protection et d’adaptation en agriculture ?, 22/11/2010-24/11/2010, Montpellier, FRA / Agir en situation d’incertitude : La construction individuelle et collective des régimes de protection et d’adaptation en agriculture*, page 12, 2010.
- [22] I. Alvarez, S. Martin, and S. Mesmoudi. Describing the result of a classifier to the end-user : geometric-based sensitivity. In *ECAI 2010, 19th European Conference on Artificial Intelligence, 16/08/2010-20/08/2010, Lisbonne, PRT / Frontiers in Artificial Intelligence and Applications.Helder Coelho, Rudi Studer, Michael Wooldridge (Eds.)*, volume 215, pages 835–840. IOS Press, 2010.

- [23] S. Martin. Changer pour durer : problèmes de viabilité et de résilience. In *Changer pour durer*, 19/09/2009-26/09/2009, Cerisy-la-Salle, FRA, page 6, 2009.
- [24] M. Sicard, R. Reuillon, N. Perrot, C. Baudrit, I. Alvarez, and S. Martin. Control of camembert mass loss during ripening with viability theory. In *XIIème Congrès de la Société Française de Génie des Procédés*, 14/10/2009-16/10/2009, Marseille, FRA / *Récents Progrès en Génie des Procédés, Numéro 98*, volume 98, page 6, Paris, 2009. SFGP.
- [25] S. Mesmoudi, I. Alvarez, S. Martin, M. Sicard, and P.H. Wuillemin. Geometric analysis of a capture basin : application to cheese ripening process. In *European Conference on Complex System*, 21/09/2009-25/09/2009, Warwick, GBR, page 14, 2009.
- [26] I. Alvarez and S. Martin. Explaining a result to the end-user : a geometric approach for classification problems. In *Exact09, IJCAI 2009 Workshop on explanation aware computing (International Joint Conferences on Artificial Intelligence)*, 11/07/2009-13/07/2009, Pasadena, USA, pages 102–109, 2009.
- [27] M. Sicard, N. Perrot, C. Baudrit, R. Reuillon, P. Bourguine, I. Alvarez, and S. Martin. The viability theory to control complex food processes. In *ECCS'09, European Conference on Complex Systems*, 21/09/2009-25/09/2009, Warwick, GBR, page 6, 2009.
- [28] M. Sicard, N. Perrot, C. Baudrit, I. Alvarez, and S. Martin. The viability theory to control food processes. In *8th World Congress of Chemical Engineering, WCCE8, 23/08/2009-27/08/2009, Montréal, CAN / Proceedings of Process Control and Optimization Symposium, 8th World Congress on Chemical Engineering (WCCE8)*, page 5, 2009.
- [29] M.H. Durand and S. Martin. Développement durable et développement viable. In *La problématique du développement durable vingt ans après : nouvelles lectures théoriques, innovations méthodologiques et domaines d'extension*, 20/11/2008-22/10/2008, Ville-neuve d'Ascq, FRA, page 14, 2008.
- [30] L. Chapel, S. Martin, and G. Deffuant. Lake eutrophication : using resilience evaluation to compute sustainable policies. In *10th International conference on environmental science and technology - CEST 2007, Kos island, GRC, 5-7 September 2007*, page 8, 2007.
- [31] P. Coquelin, S. Martin, and R. Munos. A dynamic programming approach to viability problems. In *IEEE ADPRL Symposium on Approximate Dynamic Programming and Reinforcement Learning*, 01/04/2007-05/04/2007, Honolulu, Hawaii, USA, pages 178–184, 2007.
- [32] L. Chapel, G. Deffuant, S. Martin, and C. Mullon. Defining yield policies in a viability theory approach. In *5th European conference on ecological modeling, Pushchino, RUSSIE, 19-23 septembre 2005*, page 3, 2005.

Conférence Invitée

- [33] S. Martin. Résilience : un essai de définition formelle. Application au phénomène d'eutrophisation des lacs. Conférence invitée, R.I.S.K. : Risk Intelligence Symposium and Knowledge - Résilience, 3 septembre 2009, Paris, FRA, 2009.

Rapports

- [34] S. Martin. Compte-rendu final projet ANR Déduction. Rapport, Irstea, 2010.

- [35] S. Martin and D. Hervé. Rapport sur les journées de travail du projet ANR Dédution, 7, 8 et 9 novembre 2007 à Fianarantsoa. Rapport, Irstea, 2007.

Thèse

- [36] S. Martin. *La résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux*. Thèse en mathématiques appliquées, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Juin 2005. 193 pages.

Bibliographie

- [Abgrall, 2003] ABGRALL, R. (2003). Numerical discretization of boundary conditions for first order hamiltonĀjacobi equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6):2233–2261.
- [Abrams et Strogatz, 2003] ABRAMS, D. et STROGATZ, S. (2003). Modelling the dynamics of language death. *Nature*, 424(6951):900.
- [Anderies et al., 2013] ANDERIES, J. M., FOLKE, C., WALKER, B. et OSTROM, E. (2013). Aligning key concepts for global change policy : robustness, resilience, and sustainability. *Ecology and Society*, 18(2):8.
- [Anderies et al., 2002] ANDERIES, J. M., JANSSEN, M. A. et WALKER, B. H. (2002). Grazing management, resilience, and the dynamics of a fire-driven rangeland system. *Ecosystems*, 5:23–44.
- [Anderson, 1972] ANDERSON, P. W. (1972). More is different. *Science*, 177(4047):393–396.
- [Asheim, 2010] ASHEIM, G. B. (2010). Intergenerational equity. *Annual Review of Economics*, 2:197–222.
- [Aubin, 1991] AUBIN, J. (1991). *Viability Theory*. Birkhauser, Basel.
- [Aubin et al., 2011] AUBIN, J., BAYEN, A. et SAINT-PIERRE, P. (2011). *Viability Theory : New Directions*. Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York.
- [Aubin et Saint-Pierre, 2006] AUBIN, J. et SAINT-PIERRE, P. (2006). An introduction to viability theory and management of renewable resources. *Advanced Methods for Decision Making and Risk Management*, 44:52–96.
- [Aubin et Cellina, 1984] AUBIN, J.-P. et CELLINA, A. (1984). *Differential Inclusions*, volume 24 de *Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer, Berlin.
- [Barreteau, 2003] BARRETEAU, O. (2003). The joint use of role-playing games and models regarding negotiation processes : Characterization of associations. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 6(2).
- [Beddington et al., 1976] BEDDINGTON, J., FREE, C. et LAWTON, J. (1976). Concepts of stability and resilience in predator-prey models. *Journal of Animal Ecology*, 45:791–816.
- [Boccaro, 2004] BOCCARA, N. (2004). *Modeling Complex Systems*. Springer.
- [Bokanowski et Zidani, 2007] BOKANOWSKI, O. et ZIDANI, H. (2007). Anti-dissipative schemes for advection and application to hamiltonĀjacobiĀbellman equations. *J. Sci. Computing*, 30(1):1–33.
- [Briot et al., 2007] BRIOT, J.-P., GUYOT, P. et IRVING, M. (2007). Participatory simulation for collective management of protected areas for biodiversity conservation and social inclusion. In *International Modeling and Simulation Multiconference (IMSM07)*, pages 183–188, Buenos Aires, Argentina.
- [Camilli et Falcone, 1996] CAMILLI, F. et FALCONE, M. (1996). Approximation of optimal control problems with state constraints : Estimates and applications. In *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control*, pages 23–57, New York. Springer.

- [Carpenter *et al.*, 1999] CARPENTER, S., LUDWIG, J. et BROCK, W. (1999). Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change. *Ecological Applications*, 9:751–771.
- [Carpenter *et al.*, 2001] CARPENTER, S., WALKER, B., ANDERIES, J. et ABEL, N. (2001). From metaphor to measurement : resilience of what to what ? *Ecosystems*, 4:765–781.
- [Carson, 1962] CARSON, R. (1962). *Silent Spring*. Houghton Mifflin, Boston.
- [Casagrandi et Rinaldi, 2002] CASAGRANDE, R. et RINALDI, S. (2002). A theoretical approach to tourism sustainability. *Conserv. Ecol.*, 6(1):13.
- [Castello *et al.*, 2006] CASTELLO, X., EGUÍLUZ, V. et MIGUEL, M. S. (2006). Ordering dynamics with two non-excluding options : bilingualism in language competition. *New J. Phys.*, 8:308–322.
- [Chichilnisky, 1997] CHICHILNISKY, G. (1997). What is sustainable development ? *Land Economics*, 73(4):467–491.
- [Collings et Wollkind, 1990] COLLINGS, J. et WOLLKIND, D. (1990). A global analysis of a temperature-dependent model system for a mite predator-prey interaction. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 50(5):1348–1372.
- [Dautray et Lions, 2000] DAUTRAY, R. et LIONS, J.-L. (2000). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, volume 5. Springer, Berlin.
- [De Wilde *et al.*, 2012] DE WILDE, M., BUISSON, E., RATOVOSON, F., RANDRIANAIVO, R., CARRIÈRE, S. et LOWRY II, P. (2012). Vegetation dynamics in a corridor between protected areas after slash-and-burn cultivation in south-eastern Madagascar. *Agr. Ecosyst. Environ.*, 159:1–8.
- [Deffuant *et al.*, 2014] DEFFUANT, G., BANOS, A., CHAVALARIAS, D., BERTELLE, C., BRODU, N., JENSEN, P., LESNE, A., MULLER, J.-P., PERRIER, E. et VARENNE, F. (2014). Visions de la complexité : Le démon de laplace dans tous ses états. *Natures Sciences Sociétés*, page à paraître.
- [Després et Lagoutière, 2001] DESPRÉS, B. et LAGOUTIÈRE, F. (2001). Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *J. Sci. Computing*, 16:479–524.
- [Doyen et Saint-Pierre, 1997] DOYEN, L. et SAINT-PIERRE, P. (1997). Scale of viability and minimal time of crisis. *Set-valued Analysis*, 5(3):227–246.
- [Falcone et Saint-Pierre, 1987] FALCONE, M. et SAINT-PIERRE, P. (1987). Slow and quasi-slow solutions of differential inclusions. *NonLinear Anal. Theor.*, 11(3):367–377.
- [Frankowska et Plaskacz, 2000] FRANKOWSKA, H. et PLASKACZ, S. (2000). Semicontinuous solutions of hamilton-Ûjacobi-Ûbellman equations with degenerate state constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 251(2):818–838.
- [Gell-Mann, 1995] GELL-MANN, M. (1995). *Le quark et le jaguar*. Albin Michel.
- [Heal, 1998] HEAL, G. (1998). *Valuing the future : Economic theory and sustainability*. Columbia University Press.
- [Helias *et al.*, 2007] HELIAS, A., MIRADE, P. S. et CORRIEU, G. (2007). Modeling of camembert-type cheese mass loss in a ripening chamber : Main biological and physical phenomena. *Journal of Dairy Science*, 90:5324–5333.
- [Holling, 1973] HOLLING, C. (1973). Resilience and stability of ecological systems. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 4:1–24.
- [Holling, 1996] HOLLING, C. (1996). Engineering resilience vs. ecological. In SCHULZE, P., éditeur : *Engineering within Ecological Constraints*, pages 31–43. National Academy Press, Washington (DC).

- [Janssen et Carpenter, 1999] JANSSEN, M. A. et CARPENTER, S. R. (1999). Managing the resilience of lakes : A multi-agent modeling approach. *Conservation Ecology*, 3(2):15.
- [Lacitignola et al., 2007] LACITIGNOLA, D., PETROSILLO, I., CATALDI, M. et ZURLINI, G. (2007). Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability. *Ecol. Model.*, 206:191–204.
- [Levin et al., 1998] LEVIN, S., BARRETT, S., ANIYAR, S., BAUMOL, W., BLISS, C., BOLIN, B., DASGUPTA, P., EHRLICH, P., FOLFE, C., GREN, I.-M., HOLLING, C., JANSSON, A.-M., JANSSON, B.-O., MARTIN, D., MÄLER, K.-G., PERRINGS, C. et SHESHINSKY, E. (1998). Resilience in natural and socioeconomic systems. *Environment and Development Economics*, 3(2):222–235.
- [Ludwig et al., 1997] LUDWIG, J., WALKER, B. et HOLLING, C. (1997). Sustainability, stability and resilience. *Conservation Ecology*, 1(1):7.
- [Lynam et al., 2007] LYNAM, T., JONG, W. D., SHEIL, D., KUSUMANTO, T. et EVANS, K. (2007). A review of tools for incorporating community knowledge, preferences, and values into decision making in natural resources management. *Ecology and Society*, 12(1):5.
- [Martinet et Doyen, 2007] MARTINET, V. et DOYEN, L. (2007). Sustainability of an economy with an exhaustible resource : A viable control approach. *Resour. Energy Econ.*, 29(1):17–39.
- [Matsinos et Troumbis, 2002] MATSINOS, Y. G. et TROUMBIS, A. Y. (2002). Modeling competition, dispersal and effects of disturbance in the dynamics of a grassland community using a cellular automaton. *Ecological Modelling*, 149:71–83.
- [Meadows et al., 1972] MEADOWS, D. H., MEADOWS, D. L., RANDERS, J. et III, W. W. B. (1972). *The Limits to Growth : a Report for the Club of Rome’s Project on the Predicament of Mankind*. Universe Books, New York.
- [Mebratu, 1998] MEBRATU, D. (1998). Sustainability and sustainable development : historical and conceptual review. *Environmental Impact Assessment Review*, 18:493–520.
- [Meijster et al., 2000] MEIJSTER, A., ROERDINK, J. et HESSELINK, W. (2000). A General Algorithm for Computing Distance Transforms in Linear Time. *Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, pages 331–340.
- [Miller et Page, 2007] MILLER, J. H. et PAGE, S. E. (2007). *Complex Adaptive Systems*. Princeton University Press.
- [Minett et Wang, 2008] MINETT, J. et WANG, W. (2008). Modelling endangered languages : the effects of bilingualism and social structure. *Lingua*, 118:19–45.
- [Mitchel, 2009] MITCHEL, M. (2009). *Complexity : A Guided Tour*. Oxford University Press.
- [Morin, 1990] MORIN, E. (1990). *Introduction à la pensée complexe*. Le Seuil.
- [Muttенzer, 2006] MUTTENZER, F. (2006). The folk conceptualization of property and forest-related going concerns in Madagascar. In BENDA-BECKMANN, K. V., BENDA-BECKMANN, F. V. et WIBER, M., éditeurs : *Changing Properties of Property*, pages 269–292. Berghahn Publishers, New York.
- [Neubert et Caswell, 1997] NEUBERT, M. et CASWELL, H. (1997). Alternatives to resilience for measuring the responses of ecological systems to perturbations. *Ecology*, 78(3):653–665.
- [Ortiz et Wolff, 2002] ORTIZ, M. et WOLFF, M. (2002). Dynamical simulation of mass-balance trophic models for benthic communities of north-central chile : assessment of resilience time under alternative management scenarios. *Ecological Modelling*, 148:277–291.
- [Peterson et al., 1998] PETERSON, G., ALLEN, C. et HOLLING, C. (1998). Ecological resilience, biodiversity, and scale. *Ecosystems*, 1:6–18.
- [Pimm et Lawton, 1977] PIMM, S. et LAWTON, J. (1977). Number of trophic levels in ecological communities. *Nature*, 268:329–331.

- [Quincampoix, 1992] QUINCAMPOIX, M. (1992). Differential inclusions and target problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30(2):324–335.
- [Quincampoix et Saint-Pierre, 1995] QUINCAMPOIX, M. et SAINT-PIERRE, P. (1995). An algorithm for viability kernels in hölderian case : approximation by discrete dynamical systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 5:1–13.
- [Rapaport *et al.*, 2006] RAPAPORT, A., TERREAUX, J. et DOYEN, L. (2006). Viability analysis for the sustainable management of renewable resources. *Mathematical and Computer Modelling*, 43:466–484.
- [Robinson, 2004] ROBINSON, J. (2004). Squaring the circle? some thoughts on the idea of sustainable development. *Ecological Economics*, 48:369–384.
- [Saint-Pierre, 1994] SAINT-PIERRE, P. (1994). Approximation of viability kernel. *Applied Mathematics and Optimization*, 29:187–209.
- [Solow, 1993] SOLOW, R. M. (1993). An almost practical step toward sustainability. *Resources Policy*, 19(3):162–172.
- [Soner, 1986] SONER, H. (1986). Optimal control with state-space constraint. *SIAM J. Control Optim.*, 24(3):552–561.
- [Susi *et al.*, 2007] SUSI, T., JOHANNESSON, M. et BACKLUND, P. (2007). *Serious games : an overview*. University of Skövde.
- [Taleb, 2007] TALEB, N. N. (2007). *The Black Swan : The Impact of the Highly Improbable*. Random House.
- [Toillier et Lardon, 2009] TOILLIER, A. et LARDON, S. (2009). From forest-clearers to environmental managers : Farmers’ adaptation capacities in the eastern rainforest of Madagascar. *Outlook Agr.*, 38(2):119–126.
- [Toillier *et al.*, 2011] TOILLIER, A., SERPANTIÉ, G., HERVÉ, D. et LARDON, S. (2011). Livelihood strategies and land use changes in response to conservation : An insight into pitfalls of community-based forest management in Madagascar. *J. Sustain. Forest.*, 30(1):20–56.
- [van Coller, 1997] van COLLER, L. (1997). Automated techniques for the qualitative analysis of ecological models : Continuous models. *Conservation Ecology*, 1(1):5.
- [Walker *et al.*, 2004] WALKER, B., HOLLING, C. S., CARPENTER, S. R. et KINZIG, A. (2004). Resilience, adaptability and transformability in social-ecological systems. *Ecology and Society*, 9(2):5.
- [Wang et Minett, 2005] WANG, W.-Y. et MINETT, J. (2005). The invasion of language : emergence, change and death. *Trends in Ecology and Evolution*, 20(5):263–269.
- [Zwirn, 2006] ZWIRN, H. (2006). *Les systèmes complexes : Mathématiques et biologie*. Éditions Odile Jacob.

Titre D'oxymore en oxymore : du développement durable au contrôle complexe

Résumé J'explique dans ce mémoire comment les questionnements sur l'évaluation de la résilience de systèmes écologiques et sociaux ainsi que sur la distinction de politiques d'actions pouvant être qualifiées de durables, m'ont conduit à proposer des mesures basées sur les concepts de la théorie mathématique de la viabilité. La mise en œuvre de ces mesures dans chaque cas particulier pose des problèmes de modélisation et de calcul. Certaines réponses sont spécifiques au cas en question, d'autres comme les algorithmes de calcul peuvent être capitalisés pour se poser de nouvelles questions. Celles qui m'intéressent actuellement concernent les architectures de régulation dans les systèmes complexes, complexes au sens où les propriétés d'intérêt globales sont résilientes à des perturbations locales.

Mots-clés Résilience, théorie de la viabilité, développement durable, contrôle, algorithme de viabilité, régulation.

Title From one oxymoron to another : from sustainable development to complex control

Abstract I explain in this document how questions on the assessment of the resilience of socio-ecological systems and questions on the distinction between action policies that can be considered as sustainable, led me to propose measures based on concepts of the mathematical viability theory. The implementation of these measures in each particular case raises modeling and calculation issues. Some answers are specific to the particular case, but others, such as algorithms, can be capitalized to ask new questions. My current focuses are regulation architectures in complex systems when the properties of interest are global and resilient to local disturbances.

Keywords Resilience, viability theory, sustainable development, control, viability algorithm, regulation.