



**HAL**  
open science

# Modélisation et optimisation des réseaux de conduites sous pression

Olivier Piller

► **To cite this version:**

Olivier Piller. Modélisation et optimisation des réseaux de conduites sous pression. Mathématiques [math]. Habilitation à diriger des recherches en sciences pour l'ingénieur spécialité mathématiques appliquées, école doctorale sciences des métiers de l'ingénieur, 2019. tel-02608624

**HAL Id: tel-02608624**

**<https://hal.inrae.fr/tel-02608624>**

Submitted on 16 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



le **cnam**

# Mémoire scientifique

présenté à

## CNAM PARIS

### ÉCOLE DOCTORALE

### SCIENCES DES MÉTIERS DE L'INGÉNIEUR

par **Olivier PILLER**

En vue d'obtenir

## L'Habilitation à Diriger des Recherches

### SPÉCIALITÉ : SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

---

## Modélisation et optimisation des réseaux de conduites sous pression

---

**Date de soutenance :** 29 janvier 2019

**Devant la commission d'examen composée de :**

Mejdi AZAIEZ .....	Professeur, IPB Bordeaux .....	Président du jury
Georges-Henri COTTET ..	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur
Jochen DEUERLEIN .....	Dr Ingénieur, 3S Consult GmbH .....	Examineur
Thierry HORSIN .....	Professeur, M2N CNAM Paris .....	Examineur
Iraj MORTAZAVI .....	Professeur, M2N CNAM Paris .....	Garant
Mohamed NAAIM .....	Dr Ingénieur ICPEF, Irstea .....	Examineur
Fatiha NEJJARI .....	Professeur, UPC Catalunya .....	Rapporteur
Maria-Vittoria SALVETTI	Professeur, Università di Pisa .....	Rapporteur

- 2019 -



---

**Résumé** Les réseaux d'alimentation en eau potable sont des infrastructures complexes et interconnectées, d'importance vitale, essentielles pour le bien-être de l'homme et de l'humanité. Ils peuvent subir des dommages physiques ou un dysfonctionnement important suite à une catastrophe naturelle ou anthropique. Aussi, le vieillissement de ces systèmes de distribution accentue les causes de détérioration de la qualité de l'eau au robinet du consommateur et le gaspillage de la ressource. Ce mémoire décrit vingt ans de recherche en mathématiques appliquées et en sciences pour l'ingénieur pour apporter des solutions abordables en termes de qualité de service, de sécurité et de durabilité.

Dans une première partie, la formulation d'un problème d'optimisation convexe est utilisée pour résoudre efficacement les équations d'équilibrage hydraulique pour des réseaux de grandes tailles. Puis, les sensibilités locales de la solution aux variations des paramètres sont explicitées. Ensuite, la formulation primale est étendue pour permettre l'incorporation de fuites, la prise en compte de points hauts et de termes d'inertie. Enfin, les apports du génie logiciel sont examinés, à la fois en programmation orientée objet et en parallélisation, vis-à-vis de la performance du calcul.

Dans la seconde partie, quelques problèmes inverses importants sont alors traités, pour prendre en compte les vannes de contrôle, ou bien caler les paramètres du modèle ou encore optimiser l'emplacement de points de mesure. Les algorithmes de résolutions utilisent de façon centrale les informations du premier ordre.

La troisième partie est consacrée à la modélisation du transport et de la réaction d'indicateurs de la qualité de l'eau. Deux algorithmes sont décrits, lesquels sont spécialement adaptés aux phénomènes physiques et au modèle hydraulique faiblement couplé. Ils sont ensuite comparés aux algorithmes les plus classiques. Ensuite, les équations de sensibilités sont explicitées. Elles possèdent une même structure que le problème direct avec en plus un terme source additionnel.

Finalement, les principaux résultats sont rappelés ainsi que des perspectives de recherche sont données.

**Mots-clés** Réseau de conduites sous pression, modélisation, optimisation, calage, analyse de sensibilité, placement optimal de mesures, fiabilité, sécurité, temps réel, résilience, conception.

---

**Title** Water distribution system modelling and optimisation

**Abstract** Drinking water distribution systems are critical, complex and interconnected infrastructures, of vital importance for human live and welfare. They may suffer physical damage or an important malfunctioning in case of a natural or anthropic disaster. Also, these systems are ageing, which emphasises the water quality deteriorations at the consumer taps and the water losses. This report describes twenty years of research work in Applied Mathematics and Engineering Sciences aiming to provide affordable solutions in terms of quality of service, security and sustainability.

In the first part, a convex optimisation problem is used to effectively address the large-size network solving issue. Then, local sensitivity of steady state solutions to variations in parameters are made explicit. Following, the primal formulation is generalised for encompassing leakage outflows, high-lying points and inertia terms. Finally, it is shown object-oriented programming and parallelisation effort may provide improved performance for solving large systems.

In the second part, three important associated inverse problems are solved to consider control valves in modelling, or calibrate the model input parameters or still seeking optimal sensor placement. Solving algorithms are based on first-order information.

The third part is devoted to water quality indicator transport and reaction modelling. Two algorithms are described, which are specially adapted to each physical phenomenon and to the hydraulic predictions, which are weakly coupled. Then, they are compared to classical algorithms. Next, sensitivity equations are made explicit. They share the same structure as the direct problem with an additional source term.

Finally, the main results are reminded, as well as perspectives of research are given.

**Keywords** Water distribution systems, modelling, optimisation, calibration, sensitivity analysis, optimal sensor placement, reliability, security, real-time, resilience, design

**Institut de recherche** Irstea, 50 avenue de Verdun, Gazinet, F-33612 Cestas Cedex

# Remerciements

Pour commencer, j'exprime ma profonde reconnaissance à Iraj Mortazavi d'avoir accepté d'être mon garant pour cette HDR dans l'ED Sciences des métiers de l'ingénieur au CNAM Paris. Merci aussi pour m'avoir fait confiance en co-encadrant plusieurs thèses et avoir partagé une grande rigueur scientifique avec une qualité humaine remarquable.

Également, tous mes sincères remerciements à Fatiha Nejjari, Maria-Vittoria Salvetti et Georges-Henri Cottet pour avoir accepté de rapporter sur mes travaux. Je les remercie chaleureusement du temps qu'ils ont bien voulu y consacrer, pour leur relecture attentive et pour leur disponibilité.

À Mohamed Naaïm que je connais depuis plusieurs années et depuis les groupes de travail Cemagref en modélisation et calcul numérique, un grand merci pour avoir accepté d'être membre de mon jury d'HDR.

Toute ma gratitude à Mejdi Azaïez qui a su me motiver pour passer une HDR et pour participer à mon jury d'HDR.

Merci beaucoup à Thierry Horsin pour avoir accepté d'être membre de mon jury. J'espère pouvoir commencer des coopérations futures avec ce spécialiste du contrôle et des métamodèles.

Un merci tout particulier à Jochen Deuerlein, pour avoir accepté d'être membre de mon jury d'HDR et pour les coopérations passées dans les projets de recherche ANR/BMBF. J'espère que cette coopération se poursuivra et pourra se concrétiser par un projet européen.

Ce mémoire doit beaucoup aux membres de l'équipe GPIE, qui par leur amitié et leur disponibilité m'ont permis de travailler dans une ambiance chaleureuse. Merci particulièrement à Sandrine Sabatié pour sa relecture attentive du mémoire et merci à Denis Gilbert pour son aide et son implication pour la réalisation de plusieurs WP de projets européens et pour les différentes *battles* auxquelles nous avons participé. Merci aux anciens et nouveaux doctorants, post-doctorants et stagiaires (Guillaume, Élodie, Hervé, Mathias, Camille, Nhu, David...). Je n'oublierai pas les collègues des services d'appui qui m'ont beaucoup aidé; merci à Stéphanie et Gabrielle pour leur gestion de projet, des missions et leur aide presque quotidienne, merci à l'équipe IST et communication Marie-Pierre, Sybille et Gregory, et aux services informatique François, Gilles, Jacques, Pierre-Emmanuel et Philippe.

Je remercie également les membres de l'IMB et en particulier Angelo Iollo

---

pour leur coopération en recherche en Mathématiques Appliquées.

Je pense également aux coopérations internationales sans lesquelles les recherches seraient bien moins intéressantes et stimulantes. Je remercie tout particulièrement Kobus van Zyl, Angus Simpson, Sylvan Elhay, Edo Abraham, Ivan Stoianov, Manuel Herrera, Zoran Kapelan, Enrico Creaco, Ezio Todini et Yskandar Hamam. Les partenaires du projet ResiWater sont également chaleureusement remerciés.

Je n'oublierai pas mes collègues d'EADT Odile Leccia, Jean-Marie Lescot, Jean-Philippe Terreau, Françoise Vernier avec qui j'ai partagé beaucoup de discussions motivantes et pour leur soutien au quotidien.

Un merci tout particulier à Catherine et Bruno Chollier qui m'ont soutenu et aidé à la préparation de la soutenance.

Je ne pourrais pas terminer ces remerciements sans avoir une pensée affectueuse pour ma femme et mes deux fils qui ont été compréhensifs et aussi patients durant mes soirées et weekends studieux, les moments de dur labeur et de rédaction.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation de l'état hydraulique</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.1.1 Définitions et notations	6
1.1.2 Demande en eau dépendante de la pression	9
1.1.3 Résolution des équations conduites par la pression	10
1.1.4 Limitation des solutions logiciels existantes	11
1.2 Le problème direct de l'équilibrage hydraulique	12
1.2.1 Minimisation d'un principe de moindre action	13
1.2.2 Résolution par un algorithme de Newton avec amortissement	18
1.2.3 Application à un cas d'insuffisance de ressource en eau	23
1.3 Sensibilités locales des solutions d'équilibre aux variations des paramètres	25
1.3.1 Sensibilité de l'état par rapport à la demande	25
1.3.2 Sensibilité de l'état par rapport à la résistance hydraulique	26
1.3.3 Sensibilité de l'état par rapport aux paramètres rugosité, longueur et diamètre	26
1.4 Amélioration du problème direct	27
1.4.1 Prise en compte des fuites	28
1.4.2 Écoulement transitoire lent	29
1.4.3 Prise en compte de points hauts	32
1.5 Meilleure performance grâce au génie logiciel et à la parallélisation	32
1.5.1 Utilisation de la programmation orientée objet	33
1.5.2 Étude de l'apport de la parallélisation	34
1.6 Conclusion	37
<b>2 Problèmes inverses associés</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction	39
2.2 Prise en compte d'organes de contrôle	40
2.2.1 Modélisation des vannes qui régulent le débit	41
2.2.2 Modélisation des vannes de contrôle de la pression	42



---

2.2.3	Performance de l'algorithme sur un exemple de vanne de contrôle . . . . .	45
2.3	Calage ou identification des paramètres . . . . .	46
2.3.1	Identification de paramètres hydrauliques par résolution d'un problème des moindres carrés . . . . .	47
2.3.2	Pistes pour remédier à un mauvais conditionnement du problème ou à un manque de mesure . . . . .	52
2.3.3	Application au calage de la demande domestique pour un réseau réel . . . . .	54
2.4	Placement optimal de mesures pour identifier les paramètres . . . . .	58
2.5	Conclusion . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Indicateurs de la qualité de l'eau</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Équations d'advection-réaction avec un terme source . . . . .	63
3.2.1	Position du problème . . . . .	63
3.2.2	Plusieurs alternatives de résolution . . . . .	65
3.2.3	Équations de sensibilité . . . . .	69
3.3	Conclusion . . . . .	71
	<b>Conclusions et perspectives de recherche</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

# Introduction

Les réseaux d’Alimentation en Eau Potable (AEP) sont des systèmes complexes et interconnectés qui peuvent couvrir les besoins en eau de plusieurs villages ou secteurs. Les plus larges s’étendent sur plusieurs milliers de  $km^2$  et comprennent plusieurs milliers de  $km$  de conduites, de diamètres et de matériaux diverses. Ce sont aussi des infrastructures d’importance vitale, essentielles pour le bien-être de l’homme et de l’humanité. De nos jours, il est impératif d’assurer une pression suffisante, une eau de bonne qualité et la continuité du service aux robinets des consommateurs. Cependant, le taux moyen de renouvellement des conduites est insuffisant, en regard de la durée de maintien en service et du coût de remplacement, pour garantir la non-obsolescence de certaines parties du réseau. Ainsi, le vieillissement du système de distribution accentue les causes de détérioration de la qualité de l’eau au robinet du consommateur et le gaspillage de la ressource en eau potable. De plus, ces systèmes peuvent subir des dommages physiques importants ou un dysfonctionnement grave suite à une catastrophe naturelle, une attaque terroriste, des défaillances en cascade, ou encore un accident industriel. La sécurité du réseau et de ses abonnés est donc devenue un enjeu majeur pour lequel se posent les questions de la résilience et de l’adaptabilité. Il est donc nécessaire de répondre à ces besoins d’investissements lourds et aux enjeux sanitaires et sécuritaires importants.

Ce mémoire décrit vingt ans de recherches, appliquées à la modélisation et à l’optimisation des réseaux de conduites sous pression pour un écoulement incompressible, afin d’apporter des solutions abordables en termes de qualité de service, de sécurité et de durabilité. Les problématiques de l’estimation de l’état hydraulique, de la qualité de l’eau desservie et de la sécurité du réseau et de ses abonnés, objectifs de ce travail, sont donc primordiales pour la prise de décision d’un opérateur réseau. La réponse scientifique est rendue difficile, de par les caractéristiques des réseaux AEP qui les distinguent d’autres infrastructures d’importance vitale. Pour leur grande majorité, les conduites sont enterrées et posées depuis des dizaines d’années. De plus, les réseaux sont maillés, ce qui permet à l’eau d’avoir plusieurs chemins et une circulation possible dans les deux sens pour certaines conduites. Le nombre de points d’observation sur le réseau de distribution est en général faible, voire nul. Il y a de plus une grande incertitude sur l’état interne des conduites, l’état des vannes, la présence

---

de fuites, mais aussi sur la demande instantanée en eau en chaque point de distribution.

La méthode de travail participe généralement au schéma suivant : Au préalable, la formulation d'un problème direct est déterminée pour en déduire un outil performant de simulation, puis un ou plusieurs problèmes inverses sont résolus pour identifier les paramètres les plus incertains ou bien améliorer l'observabilité, enfin le modèle est éventuellement étendu pour le rendre plus fiable. Les méthodes employées empruntent aux mathématiques appliquées, à la recherche opérationnelle et aux sciences de l'ingénieur.

La première partie du mémoire est consacrée à la résolution des équations d'équilibrage hydraulique pour des graphes de réseau AEP de grande taille. Celle-ci est facilitée par la mise en place d'une nouvelle formulation matricielle et le recours à un cadre d'optimisation convexe et différentiable. La modélisation conduite par la pression permet de pallier aux situations d'insuffisance de la ressource en eau ; une fonction, pression - débit de consommation qui réduit le débit si la pression n'est pas suffisante, est alors introduite . Cependant, la convergence par un *algorithme de Newton* n'est plus garantie, et il est nécessaire de mettre en place une recherche linéaire inexacte qui utilise la minimisation du critère d'optimisation. Les sensibilités de l'état hydraulique par rapport aux paramètres du modèle permanent sont explicitées ; elles sont la clé pour comprendre l'influence de chaque paramètre sur la prédiction, seront utilisées pour la résolution et la définition de problèmes inverses (dans la seconde partie), et permettent de donner des estimation de l'état par intervalle comme première étape de la quantification d'incertitude. La formulation primale est ensuite étendue pour autoriser l'incorporation de fuites et la prise en compte de points hauts et de termes d'inertie. L'état d'équilibre est donc complété pour modéliser la trajectoire en écoulement incompressible, mais transitoire. Finalement, l'utilisation du génie logiciel et du calcul de haute performance sont rapportés dans le cadre du développement du logiciel *Porteau* ; une attention toute particulière est portée à la définition des classes métier pour qu'elles conduisent à un système d'équations mieux conditionné ; les mérites d'une expérience de parallélisation sont également donnés.

Pour la deuxième partie, trois problèmes inverses associés sont traités, pour prendre en compte les dispositifs de régulation, pour bien caler les paramètres du modèle, ou encore pour optimiser l'emplacement de points de mesure. L'état ouvert, fermé ou actif de chaque vanne de contrôle des débits et des charges est à déterminer. À cette fin, pour les limiteurs de débit, une loi de perte de charge de pénalité est introduite. Pour les stabilisateurs de pression amont ou aval, il est proposé de résoudre un problème des moindres carrés en fonction de la résistance hydraulique créée par la vanne ; la borne inférieure de la résistance correspond à l'état vanne ouverte et la borne supérieure à une vanne fermée. Pour le calage de paramètres hydrauliques, la minimisation de la somme de la fonction de Huber des résidus pondérés est formulée. Ainsi, la robustesse du

critère des moindres valeurs absolues est recherchée pour les valeurs aberrantes, tout en observant une convergence quadratique pour de petits résidus près de l'optimum. Le critère est également convexifié pour faire face au manque de mesures. L'*algorithme de Levenberg-Marquardt* est utilisé pour la résolution. Finalement, l'influence des erreurs de mesure sur l'estimation des moindres carrés est estimée au premier ordre; elle sert de base pour la conception de plans d'expérience optimaux; les mesures sont placées pour minimiser l'erreur d'estimation maximale.

Dans la troisième et dernière partie, le transport par advection réaction de trois indicateurs de la qualité de l'eau le long des arcs du graphe du réseau et les lois de mélange aux nœuds sont étudiés. Il s'agit du temps de séjour ou âge de l'eau, de la provenance de l'eau et du taux résiduel en désinfectant; il est possible de considérer des contaminants chimiques avec terme de réaction simple sans interaction. L'analyse de sensibilité des solutions par rapport aux paramètres du modèle s'avère importante. Elle permet d'un point de vue opérationnel le placement de capteurs pour minimiser l'influence des erreurs de mesure sur l'identification des paramètres; les coefficients de sensibilité sont de plus utiles à la mise en place de méthodes de descente pour l'identification des paramètres.

Finalement, dans la conclusion, les principaux résultats et les verrous levés sont rappelés, pour terminer sur les perspectives de recherche à court et à moyen termes.

---

# Chapitre 1

## Modélisation de l'état hydraulique

Ce chapitre introduit le problème direct de l'équilibrage hydraulique d'un réseau de conduites sous pression. Pour la consommation en eau, une relation pression - débit de consommation est utilisée pour tenir compte de la pression disponible. L'existence et l'unicité de la solution découlent de l'équivalence à un problème d'optimisation strictement convexe. La minimisation de ce dernier est utilisée pour assurer la convergence globale par recherche linéaire inexacte. Des formules explicites sont dérivées pour calculer à moindre coût les sensibilités locales des solutions d'équilibre aux variations des paramètres. Ensuite, il est proposé de généraliser le système d'équations d'équilibre pour obtenir la solution transitoire lente, mais aussi pour prendre en compte les fuites et corriger les inconsistances du modèle causées par les points hauts. Finalement, les bénéfices d'une expérience de parallélisation et de la programmation orientée objet sont rapportés et déclinés en terme de performance.

**Mots clés :** Principe de moindre action, Newton amorti, sensibilité, demande conduite par la pression, fuites, transitoire lent, programmation orientée objet.

### 1.1 Introduction

De nos jours, la pratique veut que les gestionnaires de réseaux AEP disposent d'un modèle hydraulique pour pouvoir appréhender la diversité des points possibles de fonctionnement, tester différents scénarios et s'assurer que l'eau potable soit distribuée dans de bonnes conditions de service chez l'abonné. Il est cependant nécessaire que le modèle soit à jour et soit calé à partir d'observations en nature et nombre suffisant pour prédire le fonctionnement d'un système complexe de conduites et que les équipements de régulation soient pris en compte par la modélisation hydraulique. Lorsque celle-ci n'est pas utilisée au sein du service gestionnaire, on pourra chercher à développer des métamodèles à partir des observations présentes ; sans validation croisée et avec de

nouvelles configurations de réseau, ceci se fait au détriment du pouvoir prédictif des modèles hydrauliques pour les écoulements dans les conduites en charge.

La performance du moteur hydraulique est primordiale pour permettre de traiter des graphes de réseaux de grandes tailles, mais aussi pour pouvoir être utilisé un grand nombre de fois.

Les modèles hydrauliques sont très largement utilisés par plusieurs applications, pour lesquels il est essentiel de tester un grand nombre de solutions hydrauliques réalisables. Cela s'applique, par exemple, pour dimensionner un réseau ou une installation, avec pour objectif de trouver une conception à moindre coût avec des variables de décision mixtes sous des contraintes hydrauliques [1, 2]. Pour lever un degré d'incertitude sur les données, ils sont le fermet de méthodes de plans d'échantillonnage [3, 4, 5], de calage, d'estimation d'état et d'analyse d'incertitude et de sensibilité [6, 7, 8]. Une fois calés, ils sont aussi couplés avec des modèles de transport pour concevoir un emplacement optimal de capteurs non-spécifiques, mesurer l'apport de capteurs mobiles de nouvelle génération et identifier les sources de contamination pour la surveillance et la sécurité [9, 10, 11]. Ils permettent la régulation du fonctionnement des réseaux par le contrôle optimal de la pression en jouant sur le niveau de fermeture de vannes de sectorisation et des stabilisateurs [12, 13]. Aussi, et la liste n'est pas exhaustive, ils permettent le calcul d'indices de performance pour l'analyse de la vulnérabilité et l'analyse de la résilience [14, 15] des réseaux de distribution d'eau, entre autres applications. Il est donc très important 1) de résoudre efficacement le système d'équations d'équilibrage hydraulique mais aussi 2) d'utiliser des techniques informatiques plus puissantes de calcul haute performance [16].

### 1.1.1 Définitions et notations

Un réseau AEP est décrit par un graphe orienté  $G = (V, E)$  où  $V$  est l'ensemble des nœuds et  $E$  l'ensemble des arcs pour lesquels une orientation arbitraire a été choisie; par hypothèse, le graphe sera simple (deux nœuds ne sont connectés que par un seul arc). Soit  $np$  le nombre d'arcs. Un arc au sens du logiciel Irstea *Porteau* [17] est une suite de conduites et d'équipements adjacents. Les nœuds sont de plusieurs natures. On distingue les nœuds jonctions au nombre de  $nj$ , des nœuds sources (réservoirs, plans d'eau,...), au nombre de  $nf \geq 1$ , pour lesquels la charge piézométrique est supposée connue au début d'un calcul permanent. Pour un calcul permanent conduit par la demande, les nœuds jonctions sont à demandes fixées, tandis que les nœuds sources sont à charges fixées.

Soit  $\mathbf{A}^N$  la matrice d'incidence nœud-arc. Elle contient toutes les informations topologiques du réseau. Ses éléments sont avec la convention de A. Dolan and J. Aldous p. 44 [18] :

$$[\mathbf{A}^N]_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si l'arc } j \text{ est orienté sortant de } i \\ -1 & \text{si l'arc } j \text{ est orienté rentrant en } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note par  $\mathbf{A}$  la sous-matrice réduite aux nœuds jonctions de taille  $(nj, np)$  et par  $\mathbf{A}_0$  celle réduite aux nœuds sources, de taille  $(nf, np)$ .

En introduisant un arbre  $T$  recouvrant tous les nœuds simples et le co-arbre  $C$  associé, on obtient une partition des arcs pour laquelle  $\mathbf{A}$  se décompose comme :

$$\mathbf{A} = ( \mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_2 ) \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{A}_1$  est la matrice d'incidence réduite aux nœuds jonctions du sous-graphe partiel  $T$  et  $\mathbf{A}_2$  est la matrice d'incidence réduite aux nœuds jonctions du sous-graphe partiel  $C$ . Pour une orientation et numérotation des arcs et des nœuds *ad hoc* et en présence de suffisamment de nœuds sources [19], il est possible de montrer que  $\mathbf{A}_1$  est inversible, triangulaire supérieure avec des -1 sur la diagonale principale et des +1 ou 0 pour les éléments hors-diagonaux. La procédure consiste à extraire du graphe  $G$  un arbre  $T$  de poids minimum recouvrant tous les nœuds jonctions par une modification de l'algorithme de Prim. Si, de plus, chaque composante connexe possède au moins un nœud source, il est possible de choisir un nœud source comme racine ; en construisant  $T$ , on obtient ainsi une arborescence orientée racine-feuilles (quitte à réorienter certains arcs).

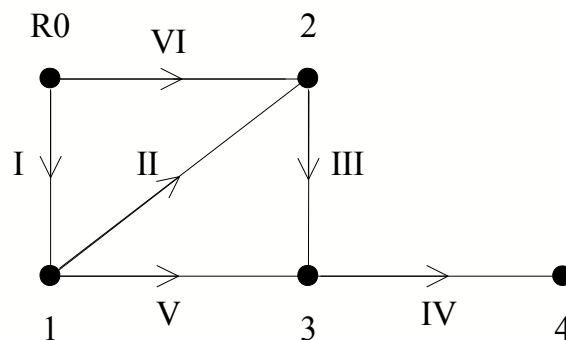


FIGURE 1.1 – Exemple #1 de réseau AEP avec 2 mailles et 1 réservoir.

On obtient pour le réseau de la Figure 1.1, si le nœud source R0 est le cinquième dans la liste des nœuds :



$$\mathbf{A}^N = \left( \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}_0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -0 & 1 \end{array} \right)$$

Les lignes correspondent aux nœuds et les colonnes aux arcs. Les arcs 1 à IV appartiennent à un arbre  $T$  recouvrant tous les nœuds jonctions et les arcs V et VI au co-arbre associé  $C$ .

**Définition 1.1.** On appelle matrice d'incidence mailles arcs, la matrice  $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{np-nj,np}$ , telle que :

$$\mathbf{M} \triangleq \left( -\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-T} \mid \mathbf{I}_{np-nj} \right) \quad (1.2)$$

Par construction, les lignes de  $\mathbf{M}$  et les lignes  $\mathbf{A}$  sont orthogonales :

$$\mathbf{M}\mathbf{A}^T = \mathbf{0}_{np-nj,np}$$

Chaque ligne de  $\mathbf{M}$  représente un cycle élémentaire ou bien une chaîne entre nœuds sources. Ainsi, pour le réseau de la Figure 1.1, on obtient :

$$\mathbf{M} = \left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

*Remarque.*  $\mathbf{A}$  s'interprète comme un opérateur divergence, sa transposée  $\mathbf{A}^T$  comme un opérateur gradient et  $\mathbf{M}$  comme un rotationnel.

Notons  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{np}$  le vecteur des débits inconnus dans le système,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{nj}$  celui des charges piézométriques inconnues aux nœuds jonctions,  $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{R}^{nf}$  celui des charges aux nœuds sources,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{nj}$  le vecteur des élévations aux nœuds jonctions et  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{np}$  le vecteur des résistances des arcs.

Notons  $\alpha$  l'exposant utilisé dans la formule de pertes de charge :  $\alpha = 2$  pour la formule de Darcy-Weisbach et  $\alpha = 1.852$  pour Hazen-Williams. De plus, notons  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{np}$  le vecteur des pertes de charge d'éléments  $[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})]_j = r_j(q_j)|q_j|^{\alpha-1}q_j$ ,  $\alpha \geq 1$ . En général, (*e.g.* pour la formule de Darcy-Weisbach)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$  mais pour Hazen-Williams  $\mathbf{r}$  est indépendant de  $\mathbf{q}$ .

La fonction de perte de charge satisfait les propriétés suivantes.

**Propriété 1.1.**  $\boldsymbol{\xi}$  comme fonction de  $\mathbf{q}$  :

- a) est une fonction strictement monotone ;
- b) toutes ses primitives sont coercives ;
- c)  $\boldsymbol{\xi}^{-1} : \mathbb{R}^{np} \rightarrow \mathbb{R}^{np}$  existe et est strictement monotone de classe  $C^0$ .

Soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{nj})^T \in \mathbb{R}^{nj}$  le vecteur des demandes aux nœuds jonctions. Et notons  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^{nj}$  le vecteur dont les éléments sont les consommations dépendantes de la pression aux  $nj$  nœuds jonctions du graphe.

### 1.1.2 Demande en eau dépendante de la pression

Pour le problème standard en calcul hydraulique permanent, les demandes nodales sont fixées au préalable et les équations sont résolues pour calculer les charges des nœuds et les débits des arcs du graphe du réseau. Ceci ne tient pas compte du fait que la demande possède le plus souvent une composante aléatoire. Cette dernière peut résulter d'une combinaison de demandes basées sur un volume, tel que celui du réservoir des toilettes, des machines à laver, *etc.*, et d'une demande basée sur la pression, tel que le débit au robinet [20]. Une demande déterministe est industrielle et/ou mesurée. Les fuites aux embranchements et au niveau des équipements et des conduites dépendent du bon état des éléments du réseau mais aussi de la pression locale. Dans le modèle hydraulique, elles sont généralement agrégées aux nœuds jonctions du modèle et s'ajoutent à la demande nodale [21].

Cette demande nodale  $\mathbf{d}$ , au préalable fixée, est habituellement construite à partir de la consommation d'eau pour une période donnée. Les débits calculés doivent lui correspondre indépendamment de la pression disponible. Pour de tels modèles, les résultats sont conduits par la demande (en anglais, demand-driven).

Une demande nodale fixe n'est pas appropriée dans les cas d'un niveau de fuite significativement élevé, d'une défaillance mécanique (une casse de conduite ou l'arrêt accidentel de pompes), ou encore d'une demande excessive pour le réseau d'eau (*e.g.* un débit incendie). Le modèle conduit par la demande (DDM) peut alors mener à des prédictions hydrauliques incorrectes avec un décalage entre la demande satisfaite et la pression disponible.

Pour corriger les problèmes soulignés, la modélisation conduite par la pression (PDM) généralise DDM. Bhave [22] a introduit une fonction d'Heaviside de la pression disponible ; une demande nodale de consommateurs est supposée être satisfaite, si la pression locale est plus grande qu'une pression de service (*e.g.* 2 bar) ; elle est, par contre, nulle si la pression est inférieure à la pression de service, ce qui définit un mode de défaillance. Wagner et al. [23] ont introduit un mode de fonctionnement réduit pour lequel la demande nodale est proportionnelle à la racine carrée de la pression. Quelques autres alternatives ont depuis été introduites, ce qui inclut une **fonction pression - débit de consommation** (Pressure Outflow Relationship, POR) linéaire [24], une POR cubique [25], une régularisation de la POR de Wagner [26] et la POR logistique sigmoïde de Tanyimboh and Templeman [27].

**Définition 1.2.** On note  $c$  la fonction scalaire :

$$c(\delta, y, e) \triangleq \delta \gamma(z(y - e)) \tag{1.3}$$

où  $\delta$  est l'intensité de la demande nodale,  $y$  est la charge piézométrique à un nœud jonction,  $e$  est l'élévation nodale,  $\gamma$  est une fonction continue, bornée,

monotone croissante définie de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $[0, 1]$ ,  $z$  est le ratio de pression disponible définit par :

$$z(y - e) \triangleq \frac{y - e - h_m}{h_s - h_m}$$

avec  $h_m$  la hauteur minimale en dessous de laquelle aucune desserte n'est possible et  $h_s$  est la hauteur de pression de service.

Les exemples principaux de fonctions  $\gamma$  sont représentés Figure 1.2.

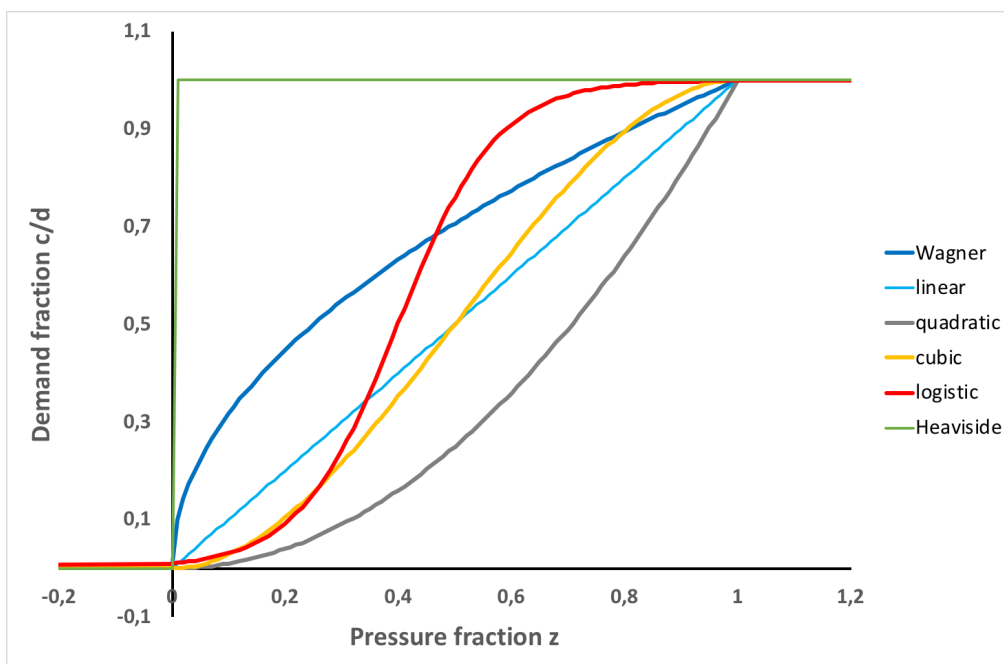


FIGURE 1.2 – Exemples de fonction  $\gamma$  pour une modélisation PDM.

Certains auteurs ont utilisé une dépendance puissance pour la **relation pression - débit de fuite** (power equation) ou une dépendance plus complexe avec l'équation *FAVAD* (Fixed and Variable Area Discharge) pour les conduites percées (*e.g.* [28]), tandis que d'autres ont corrigé l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec un terme d'inertie supplémentaire ou une résistance hydraulique équivalente [29, 30].

### 1.1.3 Résolution des équations conduites par la pression

Pour résoudre les équations PDM, plusieurs auteurs (*e.g.* [22]) ont proposé de résoudre le problème PDM en utilisant une procédure itérative à deux étapes (appelée : Node flow Iteration). Tout d'abord, un solveur DDM est utilisé pour

calculer la prédiction hydraulique. Ensuite, la demande est corrigée avec la fonction POR choisie. Ceci est répété jusqu'à ce qu'une certaine adéquation aux équations PDM soit atteinte. L'inconvénient d'une telle heuristique, réside dans le fait qu'il est difficile de traiter les cas de non-convergence.

Les logiciels comme *Epanet* donnent la possibilité d'utiliser des équipements émetteur (Emitter) pour modéliser les débits d'asperseur, les débits d'incendie ou les débits de fuites. Le débit généré est égal au produit d'un coefficient de fuite et de la pression du nœud jonction élevé à une puissance. Pour ne pas changer le solveur DDM, la solution utilise une astuce de modélisation. Pour chaque émetteur, un arc, une vanne d'étranglement et un réservoir sont ajoutés de façon à produire la perte de charge provoquée par le débit de fuite équivalente à la loi puissance. Pour modéliser également les débits de consommation PDM et borner le débit produit par le dispositif (*i.e.* le contraindre à être positif et plus petit qu'un seuil de demande fixé), Lippai and Wrigh [31] ont proposé d'introduire en plus une vanne anti-retour et un limiteur de débit. Cette solution est plus stable que celle de Bhave [22], mais nécessite de caler davantage de paramètres. De plus, pour modéliser un débit de consommation qui fluctue avec le temps, les paramètres des vannes de contrôle doivent de même varier en fonction du temps. Cette solution de modélisation, qui consiste à augmenter le graphe du réseau de façon significative en terme de nœuds et d'arcs, peut conduire à accroître les temps d'exécution et à créer un encombrement mémoire non négligeable pour des réseaux de tailles importantes [32].

Les deux premières solutions utilisent le solveur DDM. Nous considérons maintenant la résolution du système des équations conservatives, lequel inclut l'équation de continuité PDM, par une méthode de Newton. Plusieurs auteurs ont observé (*e.g.* [32, 33]) que la même structure que celle du solveur DDM dans *Epanet* (the Global Gradient Algorithm, ou GGA) pouvait être utilisée : à chaque itération, un système linéaire doit être résolu pour calculer les nouvelles charges. Puis, les débits sont mis à jour en utilisant l'équation de conservation de l'énergie. Pour le système linéaire, la matrice d'itération consiste en la somme de la matrice d'itération DDM et de la matrice jacobienne de la fonction POR par rapport à la charge. Une régularisation de la fonction POR peut s'avérer nécessaire pour améliorer la régularité des dérivées d'ordre un. Cette méthode est le plus souvent citée comme l'extension PDM de GGA.

### 1.1.4 Limitation des solutions logiciels existantes

Une importante limitation des trois méthodes précédentes est que la convergence globale (*i.e.* quelle que soit la solution initiale) n'est pas garantie. Quelques auteurs (*e.g.* [34, 35]) reconnaissent que l'introduction de fonctions POR détériore la bonne convergence de l'algorithme GGA. Giustolisi *et al.* [34] utilisent un paramètre de surrelaxation pour corriger à la fois les itérations des débits

et celles des charges nodales dans une heuristique pour réduire la *norme 1* des résidus sur l'énergie et la continuité. Siew and Tanyimboh [35] adoptent une heuristique similaire mais corrigent seulement les itérations des charges. Nous verrons plus tard pourquoi corriger à la fois les débits et les charges aurait été plus profitable en utilisant une méthode de recherche linéaire pour la minimisation d'un critère *ad hoc*, convexe et différentiable.

## 1.2 Le problème direct de l'équilibrage hydraulique

Un calcul permanent DDM consiste à rechercher un flot satisfaisant la première et la deuxième loi de Kirchhoff sur le graphe d'un réseau maillé. Le flux de vitesse ou débit dans chaque arc est calculé en appliquant les deux lois de Kirchhoff pour satisfaire la loi des nœuds (conservation de la masse) et la loi des mailles (conservation de l'énergie externe). La loi de perte de charge reliant sur un arc le débit à la différence de potentiel est empirique et non linéaire (sauf régime laminaire et formule de Darcy-Weibasch). On recherche donc un vecteur  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{np}$  qui soit solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{d} = \mathbf{0}_{nj} \\ \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0) = \mathbf{0}_{np-nj} \end{cases} \quad (1.4)$$

où la première équation représente la conservation de la masse et la seconde la conservation de l'énergie le long de mailles ou de chemins entre nœuds sources.

Un code de calcul permanent avait été développé à Irstea et ne permettait pas de traiter des réseaux de plus de mille arcs. Les raisons principales à cette limitation étaient que la matrice jacobienne du système de Kirchhoff (1.4), formulée avec la seule variable débit, n'est pas symétrique, qu'il n'y avait pas de solveur linéaire creux, ni de convergence superlinéaire. Dans le même temps, Carpentier *et al.* [36] ont montré la supériorité de la méthode hybride, laquelle consiste à chercher un flot et un potentiel (la charge piézométrique) en appliquant la méthode de Newton sur le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{d} = \mathbf{0}_{nj} \\ \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}^T \mathbf{h} - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 = \mathbf{0}_{np} \\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \end{cases} \quad (1.5)$$

Grâce à une écriture matricielle, il est possible de démontrer que les systèmes (1.4) et (1.5) sont équivalents et qu'il existe deux autres formulations équivalentes, les équations aux nœuds et les équations aux mailles qui ne considèrent pas le même jeu de variables [19]. Tous ces systèmes ne conduisent pas

à une matrice jacobienne symétrique (e.g. (1.4)). Ceux qui possèdent cette propriété dérivent tous d'un principe de moindre action sous contrainte. Plusieurs auteurs se sont placés dans le cadre d'un problème d'optimisation, convexe différentiable, pour résoudre le système (1.5) [19, 36, 37]. Dans le chapitre suivant, nous décrivons la généralisation d'un tel problème d'optimisation convexe à la modélisation PDM.

### 1.2.1 Minimisation d'un principe de moindre action

Les équations permanentes conduites par la pression consistent à rechercher les zéros de la fonction  $F$  suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) \triangleq \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}^T \mathbf{h} - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 \\ -\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{np+nj} \quad (1.6)$$

Le système (1.5) correspond au cas particulier :  $\mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \mathbf{d}$ . Par la suite, on supposera, sans perte de généralité, que  $\mathbf{c}$  est la fonction POR, relation pression - débit de consommation, de composantes  $[\mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h})]_i = c(d_i, h_i, e_i)$  avec  $c$  donnée par (1.3).

Soit le problème d'optimisation suivant, introduit par [26] :

$$\min_{\mathbf{x} \in U} C(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{j=1}^{np} \int_0^{x_j} \xi_j(u) du - \mathbf{h}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{nj} \int_0^{[-\mathbf{A}\mathbf{x}]_i} \varphi_i(v) dv \quad (1.7)$$

avec

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{np} / \mathbf{0}_{nj} \leq -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$$

et  $\varphi_i$  la fonction scalaire

$$\begin{cases} \varphi_i(v) = 0, & \text{si } d_i = 0, \\ \varphi_i(v) = (h_s - h_m) \gamma^{-1}\left(\frac{v}{d_i}\right) + h_m + e_i, & \text{si } d_i > 0, \forall v \in [0, d_i] \end{cases}$$

$\gamma$  est définie en (1.3) avec une fonction POR pour laquelle on supposera  $\gamma^{-1}(0) = 0$  et  $\gamma^{-1}(1) = 1$ , ce qui inclut les fonctions de Wagner, linéaire, quadratique, cubique, et d'Heaviside de la Figure 1.2 (pour Heaviside,  $\gamma^{-1}$  est identiquement nulle sur  $[0, 1]$ ), mais exclut la fonction POR logistique, pour laquelle  $\gamma^{-1}$  n'est pas définie en zéro et en un.

La fonction  $\varphi_i$  vérifie donc si  $d_i \neq 0$  :

$$\varphi_i(0) = h_m + e_i \text{ et } \varphi_i(d_i) = h_s + e_i \quad (1.8)$$

et est continue, croissante et prend toutes les valeurs intermédiaires sur l'intervalle  $[0, d_i]$ .

Le critère à minimiser  $C$  correspond à la notion de Content introduite par Millar [38] pour des réseaux électriques de caractéristiques non-linéaires. Comme nous allons le montrer, il s'agit ici d'une extension pour le cadre PDM.

Intéressons-nous tout d'abord aux propriétés de la fonction Content  $C$ .

**Propriété 1.2.** La fonction  $C$  est :

a) de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , de gradient :

$$\nabla C(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}(-\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

b) strictement convexe ;

c) coercive.

*Démonstration.* De a) vient de  $\boldsymbol{\xi}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$  de classe  $C^0$  ; de b) le gradient  $\nabla C(\mathbf{x})$  est strictement monotone, donc  $C$  est strictement convexe (Ortega and Rheinbolt 1970, p.86) ; de c) est une conséquence de la propriété 1.1b. ■

Les propriétés 1.2 permettent de démontrer le théorème suivant d'existence et d'unicité du flot solution.

**Théorème 1.1** (Existence et unicité de la solution). *Le problème équation (1.7) admet une et une seule solution.*

*Démonstration.*  $C$  est continue et coercive, les ensembles de niveau sont donc des compacts,  $U$  est une partie non vide fermée de  $\mathbb{R}^{np}$  ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{np}$  est solution réalisable triviale), donc par le théorème de Weierstrass, on obtient l'existence d'une solution.  $U$  est de plus convexe et  $C$  est strictement convexe, la solution est donc unique. ■

Nous allons maintenant relier les équations PDM (1.6) à la minimisation du principe de moindre action (1.7). Ceci se fait principalement en trois étapes.

**Corollaire 1.1** (Caractérisation de l'optimum). *Soit  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{np}$  l'optimum global, alors il existe deux multiplicateurs KKT (Karush-Kuhn-Tucker)  $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}_{nj}$  et  $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}_{nj}$  tels que les conditions de relâchement supplémentaires soient satisfaites :*

$$\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}\mathbf{q} = 0 \text{ et } \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{d}) = 0 \quad (1.10)$$

Soit  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{nj}$  le vecteur :

$$\mathbf{h} = \boldsymbol{\varphi}(-\mathbf{A}\mathbf{q}) + \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \quad (1.11)$$

Alors,  $(\mathbf{q}, \mathbf{h})$  vérifie le système (1.6).

*Démonstration.*  $C$  est de classe  $C^1$  et les contraintes sont affines (donc qualifiées), ce qui permet d'appliquer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre :

$$\exists \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}_{nj}, \exists \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}_{nj} / (1.10) \text{ soit satisfaite et } \nabla C(\mathbf{q}) - \mathbf{A}^T [\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0}_{np}$$

En utilisant l'expression du gradient de  $C$  équation (1.9), on obtient :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 - \mathbf{A}^T [\boldsymbol{\varphi}(-\mathbf{A}\mathbf{q}) + \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0}_{np}$$

$\mathbf{h}$  (équation (1.11)) est donc choisi pour qu'avec  $\mathbf{q}$ , l'équation de conservation de l'énergie pour chaque arc du graphe du réseau soit satisfaite :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 - \mathbf{A}^T \mathbf{h} = \mathbf{0}_{np} \quad (1.12)$$

L'existence d'un tel  $\mathbf{h}$  pour satisfaire l'équation de conservation de l'énergie est donc une condition nécessaire d'optimalité du problème (1.7).

La conservation de la masse PDM suivante est aussi satisfaite :

$$-\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}_{nj}$$

Démontrons-le pour les quatre cas de figure complémentaires suivants pour un nœud jonction  $i$  :

- a) si  $d_i = 0$ , alors  $h_i = \beta_i - \alpha_i$  est la variable de Lagrange associée à la contrainte  $[-\mathbf{A}\mathbf{q}]_i = 0$ ;
- b) si  $[-\mathbf{A}\mathbf{q}]_i = 0$  et  $d_i \neq 0$ , alors les équations (1.8) et (1.10) conduisent à  $h_i = h_m + e_i - \alpha_i \leq h_m + e_i$  et donc  $c(d_i, h_i, e_i) = 0$ ;
- c) si  $[-\mathbf{A}\mathbf{q}]_i = d_i$  et  $d_i \neq 0$ , il vient  $h_i = h_s + e_i + \beta_i \geq h_s + e_i$ , par conséquent  $c(d_i, h_i, e_i) = d_i$ ;
- d) finalement, si  $0 < [-\mathbf{A}\mathbf{q}]_i < d_i$  alors  $\alpha_i - \beta_i = 0$ , et donc  $z(h_i - e_i) = \gamma^{-1}([- \mathbf{A}\mathbf{q}]_i / d_i)$ , d'où  $c(d_i, h_i, e_i) = d_i \gamma(z(h_i - e_i)) = [-\mathbf{A}\mathbf{q}]_i$ . ■

**Corollaire 1.2** (Interprétation des variables de Lagrange et de KKT).

- a) si  $d_i \neq 0$  : la variable KKT  $\beta_i = \max(h_i - h_s - e_i, 0)$  est le surplus en hauteur de pression ;
- b) si  $d_i \neq 0$  : la variable KKT  $\alpha_i = -\min(h_i - h_m - e_i, 0)$  est le déficit en hauteur de pression ;
- c)  $d_i = 0$  : la variable de Lagrange  $h_i$  est associée à la contrainte égalité  $[-\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = 0$  de conservation de la masse ; elle représente la charge au nœud  $i$  et est une variable duale associée à une contrainte sur les débits, flux de vitesse.

$\mathbf{h}$  est donc une variable duale de  $\mathbf{q}$  au même titre que  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  mais présente l'avantage d'être non signée. Nous allons utiliser ceci pour dériver les formulations primale-duale et duale.

**Corollaire 1.3** (Équivalence des formulations Content et PDM).

- a)  $\mathbf{h}$  est défini de manière unique par l'équation (1.12) ssi le rang de  $\mathbf{A}$  est maximum,  $\text{rang}(\mathbf{A}) = nj$  :

$$\mathbf{h} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} [\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0] = (\mathbf{A}^T)^+ [\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0]$$

- b) Les conditions équation (1.6) nécessaires d'optimalité pour le problème (1.7) sont aussi suffisantes par convexité de  $C$ .



*Remarque.* Une partie de réseau déconnectée suite à une catastrophe naturelle, une casse de conduite, ou bien une panne de pompe, conduit à un sous-réseau sans nœud source. La sous-matrice d'incidence des nœuds jonctions induite sera donc déficiente en rang (une de ses lignes est la somme de toutes les autres). Donc pour le cas d'une partie de réseau déconnectée de ressource, il existe une solution de flot (débit nul) mais pas d'unique référence de charge.

**Corollaire 1.4** (Formulations équivalentes primale-duale et duale).

a) Pour résoudre la minimisation du Content équation (1.7), il est équivalent de rechercher un point-selle, solution de :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{np}} \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nj}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq & \sum_{j=1}^{np} \int_0^{x_j} \xi_j(u) du - \mathbf{h}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x} - \dots \\ & \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{nj} \int_{h_m + e_i}^{y_i} c(d_i, w, e_i) dw \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ce point-selle est solution de (1.6) et est unique si  $\text{rang}(\mathbf{A}) = nj$ .

b) Il est aussi équivalent de résoudre la maximisation du co-Content :

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nj}} \text{CC}(\mathbf{y}) \triangleq - \sum_{j=1}^{np} \int_{\xi_j(0)}^{[\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0]_j} \xi_j^{-1}(u) du - \sum_{i=1}^{nj} \int_{h_m + e_i}^{y_i} c(d_i, w, e_i) dw \quad (1.14)$$

*Démonstration.* De a), pour développer l'expression du lagrangien, observons, tout d'abord, que le dernier terme de la fonction Content, équation (1.7), peut être remplacé par un terme équivalent. On utilise, pour les termes correspondant aux demandes non nulles, la formule de Charles-Ange Laisant (1905) suivante :

$$\int_0^z \phi(v) dv = z \times \phi(z) - \int_{\phi(0)}^{\phi(z)} \phi^{-1}(w) dw$$

Pour écrire, en remarquant que  $\varphi_i(0) = h_m + e_i$ , ce qui suit :

$$\text{C}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{np} \int_0^{x_j} \xi_j(u) du - \mathbf{h}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x} - \varphi(-\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{nj} \int_{h_m + e_i}^{\varphi_i(-\mathbf{A} \mathbf{x})} c(d_i, w, e_i) dw$$

et en déduire que le lagrangien du problème est :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{np} \int_0^{x_j} \xi_j(u) du - \mathbf{h}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x} - \varphi(-\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{nj} \int_{h_m+e_i}^{\varphi_i([- \mathbf{A}\mathbf{x}]_i)} c(d_i, w, e_i) dw + \dots$$

$$+ \mathbf{a}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d})$$

où  $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}_{nj}$  est le vecteur des multiplicateurs KKT pour la contrainte d'inégalité de borne inférieure sur  $\mathbf{A}\mathbf{x}$ , et  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}_{nj}$  le vecteur KKT de la borne supérieure.

Poser alors  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nj}$ , le vecteur :

$$\mathbf{y} = \varphi(-\mathbf{A}\mathbf{x}) + \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad (1.15)$$

permet d'obtenir en restreignant à  $\mathbf{x} \in U$  l'expression de  $L$  dans (1.13).

On observe alors que les deux composantes du gradient de  $L$  sont :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \\ \nabla_{\mathbf{y}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Un point-selle qui annule le gradient de  $L$  est donc nécessairement une solution de (1.6).

De b), comme  $\boldsymbol{\xi}$  est un difféomorphisme, il est possible de caractériser, en fonction de  $\mathbf{y}$ , les  $\mathbf{x}$  qui annulent le gradient par rapport à  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0) \quad (1.16)$$

On pose alors :

$$CC(\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$$

ce qui permet d'obtenir :

$$CC(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{np} \int_0^{[\mathbf{x}(\mathbf{y})]_j} \xi_j(u) du - (\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0)^T \mathbf{x}(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^{nj} \int_{h_m+e_i}^{y_i} c(d_i, w, e_i) dw$$

Donc, en utilisant une nouvelle fois la la formule de Charles-Ange Laisant mais sur les deux premiers termes cette fois, on dérive la formulation (1.14). ■

*Remarque.* Les formulations primale-duale (1.13) et duale (1.14) permettent de prendre en compte la fonction logistique [24]. Dans le cadre de ce principe de moindre action et des minimisation et maximisation de co-énergies, un développement spécial pour la fonction POR par escalier d'Heaviside a été proposé [39, 40].

### 1.2.2 Résolution par un algorithme de Newton avec amortissement

L'avantage de ce formalisme convexe différentiable est l'obtention de conditions pour l'existence et l'unicité de la solution et de toute une gamme nouvelle d'algorithmes de résolution. La méthode de Newton avec amortissement sur le problème dual (1.14) s'est avérée très robuste [24]. Dans cette section, nous revenons sur les résultats.

Le Global Gradient Algorithm (GGA) par Todini and Pilati [41] est un exemple de méthode de Newton qui est implémentée dans *Epanet*. La méthode de Newton est des plus efficaces pour résoudre le problème de l'équilibrage hydraulique des réseaux DDM (1.5) [42]. Les raisons principales sont que les dérivées existent presque partout (en fait en tout point pour Colebrook mais presque partout pour Hazen-Williams), la matrice jacobienne impliquée dans les systèmes linéaires pour la résolution est particulièrement creuse, et dans la plupart des cas, la convergence est au moins quadratique dans un voisinage du zéro, ce qui pour simplifier signifie que le nombre de chiffres corrects double à minima à chaque itération [43]. Néanmoins, plusieurs cas de non-convergence ou de convergence lente peuvent se présenter dans le processus de résolution. Les causes principales sont l'utilisation d'une fonction sous-linéaire (qui croît moins vite qu'une linéaire), un problème de différentiabilité et une matrice jacobienne mal-conditionnée [44].

La méthode de Newton amorti (damped Newton) est une méthode de Newton qui considère un paramètre de relaxation ou d'amortissement qui présente les avantages suivants : les sous et surrelaxations sont possibles et des conditions suffisantes existent qui garantissent la convergence globale quel que soit la solution initiale.

En démarrant à partir d'une estimation initiale  $\mathbf{x}^0$ , la méthode résout un système linéaire pour obtenir la direction de Newton, puis une recherche linéaire inexacte est effectuée jusqu'à ce qu'une condition d'arrêt se vérifie. Soit  $\mathbf{x}^k$  le k-ème itéré et soit  $\mathbf{J}_k$  la jacobienne de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{x}^k$ , où  $\mathbf{F}$  est donnée en (1.6). À l'itération k, le problème linéaire suivant est résolu pour l'itération de Newton :

$$\mathbf{J}_{k-1} \mathbf{d}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1})$$

Alors, la direction de Newton  $\mathbf{d}^k$  est utilisée avec un choix approprié du pas ou facteur d'amortissement  $\rho_{k,m}$ , où  $m$  est le nombre d'essais dans la recherche linéaire :

$$\mathbf{x}^{k,m} = \mathbf{x}^{k-1} + \rho_{k,m} \mathbf{d}^k, k \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$$

Le pas  $\rho_{k,m}$  aide à réduire suffisamment un critère  $f$  pour lequel  $\mathbf{d}^k$  est une direction de descente (*e.g.* la somme de carrés des résidus pondérés sur la

conservation de la masse et de l'énergie ou encore – CC, l'opposé de la fonction co-Content, non contrainte [24]). La stratégie introduite par Goldstein pour une recherche linéaire inexacte est ici adoptée tant que  $\mathbf{d}^k$  est une direction de descente pour  $f$ . La tangente à la courbe  $f(\mathbf{x}^{k-1} + \rho\mathbf{d}^k)$  en  $\rho = 0$  est donnée par  $\tau(\rho) = f(\mathbf{x}^{k-1}) + \rho\nabla f(\mathbf{x}^{k-1})^T\mathbf{d}^k$ .

Définissons alors la famille de droites :

$$L_\mu(\rho) \triangleq f(\mathbf{x}^{k-1}) + \mu\rho\nabla f(\mathbf{x}^{k-1})^T\mathbf{d}^k, \text{ avec } 0 \leq \mu \leq 1 \quad (1.17)$$

Le principe de Goldstein (*cf.* Figure 1.3) indique que  $\rho$  doit être choisi pour que le point  $(\rho, f(\mathbf{x}^{k,m}))$  se situe entre les deux droites  $L_\sigma(\rho)$  et  $L_{1-\sigma}(\rho)$  pour un  $\rho > 0$  fixé. Ceci garantit qu'il y a une descente suffisante et que cela s'écarte significativement de zéro.

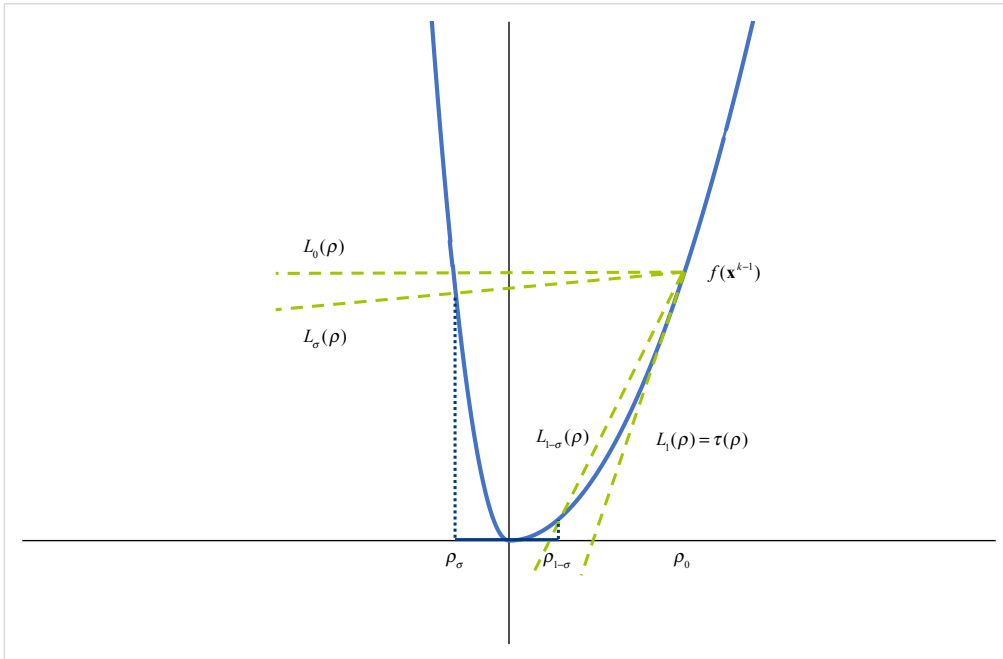


FIGURE 1.3 – Illustration du principe de Goldstein ;  $\rho$  est en abscisse, la courbe bleue correspond au critère  $f$  à minimiser le long de la direction de recherche linéaire.

À cette fin, l'indice de Goldstein est calculé et  $\rho_{k,m}$  est ajusté pour tomber dans l'intervalle  $[\sigma, 1 - \sigma]$  :

$$0 < \sigma \leq \frac{f(\mathbf{x}^{k-1}) - f(\mathbf{x}^{k-1} + \rho_{k,m}\mathbf{d}^k)}{\rho_{k,m} \nabla f(\mathbf{x}^{k-1})^T(-\mathbf{d}^k)} \leq 1 - \sigma \quad (1.18)$$

Cette règle comprend la règle d'Armijo et une condition de courbure plus facile à implémenter que celle de Wolfe pour assurer la pente suffisamment décroissante. Idéalement, l'indice de Goldstein vaut 0,5 et  $f$  n'a pas besoin d'être convexe. Une implémentation possible est de commencer avec  $\rho_{k,1} = 1$  et d'augmenter ou de réduire cette valeur jusqu'à ce que la règle de Goldstein équation (1.18) soit satisfaite.

L'application de la méthode de Newton à la maximisation du co-Content équation (1.14) revient à l'appliquer sur la minimisation de  $-CC$ . Remarquons que le gradient et la matrice hessienne de  $f_{CC} = -CC$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \nabla f_{CC}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{y}) + \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{y}) = \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{D}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{x}(\cdot)$  correspond à (1.16) ;  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \partial_q \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ , la jacobienne de  $\boldsymbol{\xi}$  par rapport à  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{x}$  est une matrice diagonale d'éléments diagonaux  $[\mathbf{D}(\mathbf{x})]_{jj} = \xi_j'(x_j) > 0$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{y}) = \partial_h \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{y})$ , la jacobienne de  $\mathbf{c}$  par rapport à  $\mathbf{h}$  en  $(\mathbf{d}, \mathbf{y})$  est diagonale d'éléments diagonaux  $[\mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{y})]_{ii} = \frac{d_i}{h_s - h_m} \gamma'(z(y_i - e_i)) \geq 0$ .

*Remarque.* Pour des débits nuls, la loi de perte de charge d'Hazen-Williams n'est pas continûment dérivable. Cette dernière est régularisée à l'origine pour que sa dérivée soit supérieure à une constante strictement positive [19]. Ainsi, la fonction du problème primal est rendue elliptique et la matrice hessienne du problème dual existe et est inversible en tout point si  $\mathbf{A}$  est de rang maximum. Ce choix de régularisation permet de garder intacte la topologie du réseau, plutôt que d'enlever du graphe les arcs à très forte résistance, ce qui revient à résoudre un système plus raide ou moins bien conditionné. Pour DDM,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{nj, nj}$ .

Nous supposons que  $\mathbf{A}$  est de rang maximum (au moins un nœud source dans chaque composante connexe), la direction de descente pour l'algorithme de Newton sur le problème dual est donc :

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{H}(\mathbf{h}^{k-1})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{h}^{k-1})$$

Ce qui conduit à l'algorithme suivant :

**Algorithme 1.1** (Newton amorti sur le problème dual ou co-Content).

1. **Initialisation.** On se donne un itéré initial  $\mathbf{h}^0$ , par exemple  $h_m + e_i < h_i^0 < h_s + e_i$ , pour  $i = 1, \dots, nj$  (voir [24] pour une analyse des meilleures stratégies d'initialisation). On calcule alors :  
 $\mathbf{q}^0 = \mathbf{x}(\mathbf{h}^0)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{h}^0) = \mathbf{A}\mathbf{q}^0 + \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}^0)$ ,  $f_{CC}(\mathbf{h}^0)$  ;
2. **Boucle d'itération.**  $k$ -ème étape :  $\mathbf{h}^{k-1}$ ,  $\mathbf{q}^{k-1}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{h}^{k-1})$ ,  $f_{CC}(\mathbf{h}^{k-1})$  sont connus ; répéter les étapes (a) à (d) jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

- (a) *Test d'arrêt.* Arrêt si  $\|\mathbf{g}(\mathbf{h}^{k-1})\|_{\infty} \leq \varepsilon_m$  ou si  $k$  est trop grand. Sinon, on passe aux étapes suivantes.
- (b) *Résoudre le système linéaire pour la direction de descente :*

$$[\mathbf{A}\mathbf{D}_{k-1}^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{E}_{k-1}] \mathbf{d}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{h}^{k-1})$$

et calculer  $\mathbf{g}(\mathbf{h}^{k-1})^T(\mathbf{d}^k)$ .

- (c) *Recherche linéaire.* Calcul de  $\mathbf{h}^{k,m}$  et de l'indice de Goldstein jusqu'à ce que la condition de Goldstein (1.18) soit satisfaite.
- (d) *Nouvel itéré.*

Une alternative, très intéressante en terme du nombre d'itérations [24] est d'associer le problème des moindres carrés suivant :

$$f_{LS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \mathbf{W} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{W}^{0.5} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{np+nj}^2 \quad (1.20)$$

avec  $\mathbf{W}$ , une matrice diagonale, de poids appropriés pour pondérer les résidus massiques et de conservation de l'énergie.

$f_{LS}$  est différentiable de gradient :

$$\nabla f_{LS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \mathbf{W} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{J}$  est la jacobienne de la fonction des résidus  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{x}) & -\mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A} & -\mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

C'est aussi l'expression de la hessienne du lagrangien  $L$  (1.13).

L'algorithme le plus standard pour minimiser une somme des moindres carrés est celui de Gauss-Newton. L'implémentation de Hartley (1961) consiste à ajouter un facteur d'amortissement. Ceci consiste à calculer la suite  $(\mathbf{q}^k, \mathbf{h}^k)$  de la manière suivante :

$$(\mathbf{q}^k, \mathbf{h}^k)^T = (\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1})^T - \rho_{k,m} (\mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{W} \mathbf{J}_{k-1})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{W} \mathbf{F}^{k-1}$$

avec  $\mathbf{J}_{k-1} = \mathbf{J}(\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1})$  et  $\mathbf{F}^{k-1} = \mathbf{F}(\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1})$ . Notons que  $\mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{W} \mathbf{J}_{k-1}$ , la matrice d'itération, est une bonne approximation de la hessienne des résidus dès lors que les termes résiduels sont petits. En essence, c'est une méthode de quasi-Newton.

$\mathbf{J}$  étant carrée et inversible, l'itéré de Gauss-Newton se simplifie pour

$$(\mathbf{q}^k, \mathbf{h}^k)^T = (\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1})^T - \rho_{k,m} \mathbf{J}_{k-1}^{-1} \mathbf{F}^{k-1} \quad (1.23)$$

Les deux méthodes, celle de Hartley pour minimiser le problème des moindres carrés (1.20) et la méthode de Newton amortie sur le lagrangien (1.13) sont équivalentes. Les poids ont disparu des itérations de par la mise à l'échelle (scaling) de Newton. La direction de Newton sur le lagrangien PDM est donc de descente pour le critère des moindres carrés sur les résidus. De plus, l'indice de Goldstein prend la forme particulière très facile à calculer :

$$\frac{f_{LS}(\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1}) - f_{LS}(\mathbf{q}^k, \mathbf{h}^k)}{\rho_{k,m} \langle \mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{W} \mathbf{F}^{k-1}, \mathbf{J}_{k-1}^{-1} \mathbf{F}^{k-1} \rangle} = \frac{f_{LS}(\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1}) - f_{LS}(\mathbf{q}^k, \mathbf{h}^k)}{2\rho_{k,m} f_{LS}(\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1})} \quad (1.24)$$

On en déduit que l'indice de Goldstein appliqué à la résolution de Newton amorti pour l'équation de point-selle (1.6) n'est rien d'autre qu'une mesure pondérée relative des moindres carrés des résidus.

Pour notre problème particulier, le complément de Schur  $\mathbf{S}$  du bloc  $\mathbf{D}$  de la matrice  $\mathbf{J}$  équation(1.22) correspond à la hessienne du problème dual :

$$\mathbf{H}(\mathbf{y}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \text{ avec } \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{D}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{y}) \quad (1.25)$$

C'est cette matrice qui est inversée dans la méthode hybride PDM. De plus petite taille, le nombre de nœuds jonctions, symétrique définie positive, creuse (pas plus de  $2np$  éléments non-nuls hors diagonaux) elle possède plusieurs propriétés intéressantes qui font qu'elle est préférable à inverser [19].

C'est pourquoi la méthode de Newton (avec amortissement) sur le lagrangien du problème (1.13) revient à :

**Algorithme 1.2** (Newton amorti sur le lagrangien ou algorithme hybride).

1. **Initialisation.** On se donne un itéré initial  $(\mathbf{q}^0, \mathbf{h}^0)$ , par exemple  $\mathbf{q}^0$  choisi pour correspondre à une vitesse de 0.5 m/s dans chaque arc et les charges choisies pour être  $h_m + e_i < h_i^0 < h_s + e_i$ , pour  $i = 1, \dots, nj$  (voir [24] pour une analyse des meilleures stratégies d'initialisation). On calcule alors :  
 $\mathbf{F}_e^0 = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}^0) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 - \mathbf{A} \mathbf{h}^0$ ,  $\mathbf{F}_m^0 = -\mathbf{A} \mathbf{q}^0 - \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}^0)$ ,  $f_{LS}(\mathbf{q}^0, \mathbf{h}^0)$  ;
2. **Boucle d'itération.** k-ème étape :  $\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1}$ ,  
 $\mathbf{F}_e^{k-1} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}^{k-1}) - \mathbf{A}_0^T \mathbf{h}_0 - \mathbf{A} \mathbf{h}^{k-1}$ ,  $\mathbf{F}_m^{k-1} = -\mathbf{A} \mathbf{q}^{k-1} - \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}^{k-1})$ ,  
 $f_{LS}(\mathbf{q}^{k-1}, \mathbf{h}^{k-1})$  sont connus ; répéter les étapes (a) à (d) jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.
  - (a) *Test d'arrêt.* Arrêt si  $(\|\mathbf{F}_m^{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon_m \text{ et } \|\mathbf{F}_e^{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon_e)$  ou si k est trop grand.  
Sinon, on passe aux étapes suivantes.

(b) *Résoudre le système linéaire pour la direction de descente :*

Pour la deuxième composante, liée aux charges :

$$[\mathbf{AD}_{k-1}^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{E}_{k-1}] \mathbf{d}_y^k = \mathbf{AD}_{k-1}^{-1}\mathbf{F}_e^{k-1} + \mathbf{F}_m^{k-1}$$

Puis pour la première, liée aux débits :

$$\mathbf{d}_x^k = -\mathbf{D}_{k-1}^{-1} [\mathbf{F}_e^{k-1} - \mathbf{A}^T \mathbf{d}_y^k]$$

(c) *Recherche linéaire.* Calcul de  $\mathbf{h}^{k,m} = \mathbf{h}^{k-1} + \rho_{k,m} \mathbf{d}_y^k$ , puis de  $\mathbf{q}^{k,m} = \mathbf{q}^{k-1} + \rho_{k,m} \mathbf{d}_x^k$  et de l'indice de Goldstein (1.24) jusqu'à ce que la condition de Goldstein (1.18) soit satisfaite.

(d) *Nouvel itéré.*

*Remarque.* Numériquement, il est intéressant d'exprimer les débits en l/s et les charges en m, ainsi les résistances des arcs qui dépendent des unités utilisées sont proches de un.

### 1.2.3 Application à un cas d'insuffisance de ressource en eau

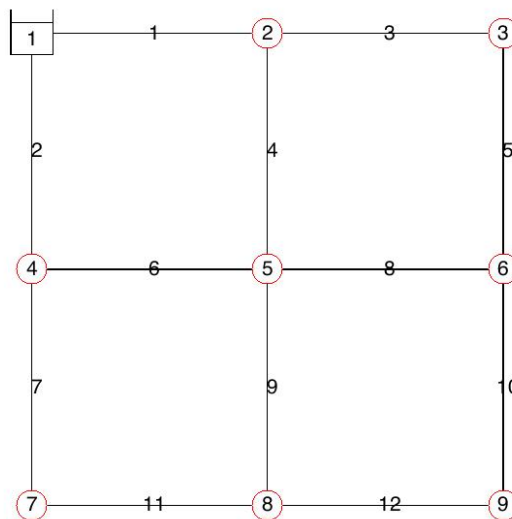


FIGURE 1.4 – Exemple #2 de graphe de réseau avec quatre mailles. Les caractéristiques des nœuds et des arcs sont similaires à [24]; la charge au nœud source est 25 m et la demande est magnifiée par 20.



*Application 1.1.* Nous allons illustrer que dans le cas d'insuffisance de ressource en eau, la méthode de Newton sans correction de pas (non amortie) peut être mise en échec alors que la version amortie converge. Un réseau simple maillé a été emprunté à [24] et est représenté Figure 1.4. Les caractéristiques des nœuds et des arcs sont les mêmes que dans 1.4 sauf pour la charge au nœud source et les demandes aux nœuds jonctions. La formule de Darcy-Weisbach a été utilisée pour le calcul des pertes de charge. L'unique nœud source à la hauteur de 25 m est insuffisant pour alimenter une demande qui a été magnifiée par un facteur 20, pour accentuer le problème de manque de ressource en eau. Les fonctions POR de Wagner et cubique (Figure 1.2) ont été choisies avec la méthode de Newton appliquée au problème PDM décrite plus haut, mais sans facteur d'amortissement. La fonction POR n'est pas continûment différentiable en  $z = 0$  et  $z = 1$  mais la fonction POR cubique l'est. Pour les deux options POR, la méthode de Newton n'a pas convergé après 50 itérations. La différence en charge relative entre deux itérés successifs oscille entre 1 à 3 comme le montre la Figure 1.5.

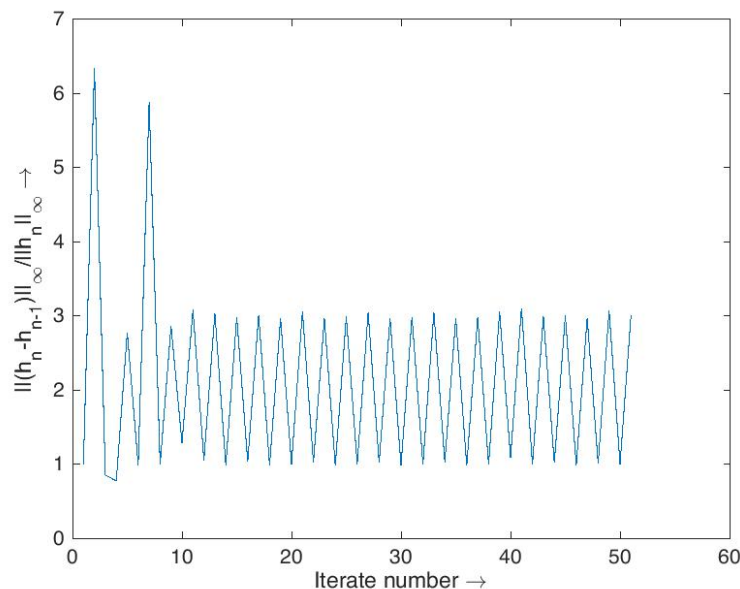


FIGURE 1.5 – Non-convergence pour la méthode de Newton et l'exemple #2; la différence relative en charge entre deux itérés successifs oscille entre 1 et 3.

Pour la même solution initiale, la méthode de Newton amortie algorithmne 1.2 avec  $\varepsilon_m = 10^{-6}$  l/s et  $\varepsilon_e = 10^{-6}$  m converge en 10 itérations et 17 corrections (recherche linéaire inexacte) pour la fonction POR de Wagner. Après 9 itérations, la différence relative en charge est moins de  $1 \times 10^{-3}$  et à l'itération 10 elle représente  $1.1 \times 10^{-7}$ . Pour les trois dernières itérations, la

convergence quadratique est évidente : le résidu massique passe de 0,83 l/s à  $2.3 \times 10^{-8}$  l/s et le résidu sur la conservation de l'énergie de  $2.1 \times 10^{-6}$  m à  $3.6 \times 10^{-14}$  m. Cinq des sept nœuds sont en mode de défaillance totale (avec  $d_i > 0$  et  $c_i(d_i, h_i, e_i) = 0$ ) et les deux autres nœuds ont une consommation réduite ( $0 < c_i(d_i, h_i, e_i) < d_i$ ). Le volume distribué est de 226.7 l/s, ce qui représente 2.91% de la demande totale. Des résultats similaires ont été obtenus en utilisant la fonction POR cubique.

### 1.3 Sensibilités locales des solutions d'équilibre aux variations des paramètres

Les dérivées de l'état hydraulique par rapport aux paramètres sont utiles pour le calage, le placement des mesures mais aussi pour comprendre et quantifier l'influence des paramètres sur l'état. Nous allons déterminer des formules explicites par différenciation du système PDM d'équations (1.6).

#### 1.3.1 Sensibilité de l'état par rapport à la demande

Une première différenciation par rapport au vecteur des débits aux nœuds jonctions  $\mathbf{d}$  permet d'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{q})\partial_d\mathbf{q} - \mathbf{A}^T\partial_d\mathbf{h} = \mathbf{0}_{np,nj} \\ -\mathbf{A}\partial_d\mathbf{q} - \mathbf{C}_d(\mathbf{h}) - \mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{h})\partial_d\mathbf{h} = \mathbf{0}_{nj,nj} \end{cases}$$

avec  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  comme dans (1.19),  $\mathbf{C}_d(\mathbf{h}) = \partial_d(\mathbf{c})$  est la jacobienne de la fonction POR  $\mathbf{c}$  par rapport à  $\mathbf{d}$ , diagonale d'éléments diagonaux  $[\mathbf{C}_d(\mathbf{h})]_{ii} = \gamma(z(y_i - e_i)) \in [0, 1]$  si  $d_i \neq 0$ , 0 sinon.

Pour ce système, il est assez facile de dériver :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\partial_d\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\partial_d\mathbf{h} \\ -\mathbf{A}\partial_d\mathbf{q} = \mathbf{C}_d + \mathbf{E}\partial_d\mathbf{h} \end{cases}$$

Il suit donc que si nous sommons les deux équations, la dépendance en  $\mathbf{q}$  disparaît :

$$\mathbf{0}_{nj,nj} = [\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{E}] \partial_d\mathbf{h} + \mathbf{C}_d$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de la jacobienne de  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{d}$  :

$$\partial_d\mathbf{h} = -(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{C}_d \quad (1.26)$$

En utilisant :

$$\partial_d\mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\partial_d\mathbf{h}$$

Nous déduisons aussi :

$$\partial_d \mathbf{q} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{C}_d \quad (1.27)$$

### 1.3.2 Sensibilité de l'état par rapport à la résistance hydraulique

La résistance d'un arc du graphe peut dépendre à la fois du débit en écoulement turbulent (en fait du Reynolds), mais également du diamètre et de la longueur des conduites qu'il représente pour tous régimes, et de la rugosité en écoulement turbulent. Nous nous intéressons à la différenciation par rapport aux résistances comme un artifice pour dériver la différenciation par rapport à ces paramètres.

La différenciation par rapport à  $\mathbf{r}$  conduit à :

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \partial_r \mathbf{q} - \mathbf{A}^T \partial_r \mathbf{h} = \mathbf{0}_{np, np} \\ -\mathbf{A} \partial_r \mathbf{q} - \mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) \partial_r \mathbf{h} = \mathbf{0}_{nj, np} \end{cases}$$

où  $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \partial_r \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ , la jacobienne de  $\boldsymbol{\xi}$  par rapport à  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{q}$ , est une matrice diagonale d'éléments diagonaux  $[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_{jj} = |q_j|^{\alpha-1} q_j$ .

La même manipulation que précédemment conduit à :

$$\begin{cases} -\mathbf{A} \partial_r \mathbf{q} = \mathbf{E} \partial_r \mathbf{h} \\ \mathbf{A} \partial_r \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \partial_r \mathbf{h} - \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \end{cases}$$

Nous obtenons en sommant à nouveau :

$$\mathbf{0}_{nj, np} = [\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E}] \partial_r \mathbf{h} - \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de la jacobienne de  $\mathbf{h}$  en  $\mathbf{r}$  :

$$\partial_r \mathbf{h} = (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \quad (1.28)$$

Et finalement, pour les dérivées de  $\mathbf{q}$  par rapport à  $\mathbf{r}$  :

$$\partial_r \mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \quad (1.29)$$

### 1.3.3 Sensibilité de l'état par rapport aux paramètres rugosité, longueur et diamètre

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées (ou chain rule), pour obtenir les dérivations de  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{q}$  par rapport aux rugosités, longueurs et diamètres. Ainsi :

$$\partial_p \mathbf{h} = (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (1.30)$$

et

$$\partial_p \mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (1.31)$$

Avec  $\mathbf{P} \triangleq \partial_p \mathbf{r}$ , la matrice diagonale, jacobienne de  $\mathbf{r}$  par rapport au paramètre  $\mathbf{p}$  d'intérêt. Des exemples d'application à la détermination d'intervalles de confiance pour le calage de paramètres et le placement de mesures sont donnés dans [45].

**Propriété 1.3** (Centralité du complément de Schur et modélisation DDM).

1. L'inverse de  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{E}$  (1.25) est central dans le calcul des matrices de sensibilité. Elle est la matrice d'itération clé dans les algorithmes 1.1 and 1.2. Il est donc avantageux de stocker la décomposition de cette matrice (*e.g.* la factorisation de Cholesky) lors du calcul permanent, pour l'utiliser à bon escient dans le calcul des dérivées. On résout alors plusieurs systèmes linéaires additionnels pour obtenir les dérivées par rapport aux paramètres à un coût marginal moindre.
2. Les formules explicites (1.26-1.31) sont aussi valides dans le cas d'un calcul permanent DDM. Il suffit de prendre  $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{n_j, n_j}$  et  $\mathbf{C}_d = \mathbf{I}_{n_j}$ .
3. Pour que  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{h})$  ait un inverse défini, il suffit que dans chacune de ses composantes connexes le graphe possède au moins un nœud source.
4. La sous-matrice bloc de  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{h})$ , associée à une composante connexe avec nœud source, est une matrice symétrique définie positive. C'est en plus une M-matrice, irréductible, d'inverse strictement non négative [19]. Ceci permet de montrer que les dérivées de la charge par rapport à la demande sont négatives ou nulles.

## 1.4 Amélioration du problème direct

Nous explorons tout d'abord les extensions du problème direct qui permettent de mieux prendre en compte les fuites locales et en particulier l'utilisation de l'équation FAVAD. Puis pour les fuites diffuses (background leakage), il est nécessaire de compléter la connaissance de l'état d'équilibre, pour modéliser la trajectoire en écoulement incompressible, transitoire. Les équations transitoires lentes permettent de prendre en compte le phénomène d'oscillation de masse, mais négligent l'onde de pression lorsqu'il n'y a pas de variations brusques pour le fonctionnement des pompes et des vannes de régulation, pour la mise à jour des volumes de réservoirs et pour la demande. Enfin, il est proposé de prendre en compte les points hauts dans la simulation.

### 1.4.1 Prise en compte des fuites

Il est bien connu que le débit de fuite est une fonction de la pression disponible. Ce comportement permet aux services des eaux de trouver des fuites grâce à des mesures de pression et d'utiliser des vannes de contrôle de la pression ou stabilisateurs pour réduire le volume des fuites et augmenter la durée de service des conduites [46]. La formule de Torricelli constitue la base des relations pression - débit de fuite et peut être utilisée pour décrire le débit pour des écoulements par des orifices :

$$c_O = C_d A \sqrt{2gp} \quad (1.32)$$

où  $c_O$  est le débit de fuite à travers l'orifice,  $C_d$  un coefficient de débit,  $A$  est la surface de l'orifice,  $g$  l'accélération de la pesanteur, et  $p$  la hauteur de pression à l'orifice. En pratique, le débit est décrit en une forme plus générale de fonction puissance (*i.e.* comme le sont les émetteurs dans *Epanet*) :

$$c_E = cp^{N_1} \quad (1.33)$$

où  $c$  est le coefficient de fuite et  $N_1$  l'exposant. Une étude de terrain consiste à caler le coefficient et l'exposant à partir de mesures de débit du réseau avant et après réduction de pression. Tandis que l'équation orifice (1.32) prédit un exposant égal à 0.5, des valeurs aussi élevées que 2.9 ont déjà été mesurées. Les exposants les plus élevés sont principalement dus à des surfaces d'orifice variant avec la pression du réseau.

Récemment, Cassa and van Zyl [47] ont montré que l'équation puissance ne fournit pas une bonne caractérisation de la réponse en pression d'une fuite, et que différents exposants résultent d'une même fuite mesurée à différentes pressions. van Zyl and Cassa [48] ont trouvé que le modèle *FAVAD* est particulièrement bien adapté pour modéliser des fuites individuelles dans des matériaux élastiques. Ils remplacent la valeur constante pour la surface de l'orifice équation (1.32), par une fonction affine de la pression à travers l'orifice, ce qui résulte en :

$$c_F(p) = \begin{cases} C_d \sqrt{2g} (A_0 + mp) \sqrt{p}, & p \geq 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

où  $A_0$  est la surface à l'intercept, et  $m$  est la pente pression-surface. La pente pression-surface est une fonction des propriétés de la fuite, comme du matériau de la conduite et de la forme de l'orifice. Pour des orifices circulaires,  $m$  est très petit (*i.e.* l'orifice s'agrandit très peu pour une augmentation de pression) ; et pour des fêlures longitudinales, en spirale ou le long de circonférence de la conduite, des formules pour  $m$  ont été proposées sur la base d'études CFD [49]. L'hypothèse d'une déformation élastique inhérente au modèle *FAVAD* (1.34) peut être considérée raisonnable, quoique les fuites dans les conduites

en plastique (PVC, PEH, *etc.*) peuvent subir un hystérésis et une déformation plastique [50].

Pour la réponse combinée de beaucoup de fuites, Schwaller and van Zyl [51] ont montré que le modèle *FAVAD* peut être utilisé avec succès pour décrire le comportement de zones de gestion de la pression, et que les paramètres du modèle *FAVAD* sont très proches de la somme de toutes les surfaces d'orifice et des pentes pression-surface dans le secteur d'étude.

Pour modéliser un débit de fuite localement au  $i$ -ème nœud du graphe du réseau, on additionne la relation pression-débit de fuite (1.34) à la consommation PDM équation. (1.3) pour obtenir un débit au nœud combinaison des deux actions :

$$[\mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h})]_i = c(d_i, h_i, e_i) + c_F(h_i - e_i)$$

Le système des équations permanentes à résoudre est donc toujours (1.6).

Piller and van Zyl [52] ont introduit le problème de maximisation du Content framework approprié pour résoudre le système (1.6) pour la modélisation PDM avec prise en compte des fuites locales. Comme la fonction POR est bornée, avec comme limite supérieure une demande fixe, la formulation primale (1.7) n'est pas directement applicable au modèle de fuite *FAVAD* qui n'est pas borné par le haut (une contrainte doit être libérée). Pour prendre en compte les fuites locales dans le cadre PDM, il faut considérer le problème suivant :

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_j}} CC_F(\mathbf{y}) \triangleq CC(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^{n_j} \int_{e_i}^{y_j} c_F(w - e_i) dw \quad (1.35)$$

avec  $CC$  défini en (1.14).

L'algorithme 1.1 de Newton amorti sur la minimisation de  $-CC_F$  est utilisé par [52] pour résoudre (1.6); l'algorithme 1.2 peut tout aussi bien être appliqué; seuls changent les calculs de  $\mathbf{E}$  et de la consommation aux nœuds.

Récemment, Kabaasha *et al.* [28] ont proposé d'ajouter deux émetteurs (1.33) à chaque nœud avec une fuite locale, le premier avec  $N_1 = 0.5$  et le second avec  $N_1 = 1.5$ , ce qui permet de prendre en compte correctement l'équation *FAVAD*. En observant que chaque émetteur peut être représenté par un arc fictif relié à un réservoir à la côte sol du nœud, les auteurs interprètent l'inverse de la fonction puissance comme une loi de perte de charge sur l'arc fictif, ce qui permet de définir le Content model sur le graphe augmenté. Ils n'utilisent pas cependant le modèle PDM et les équations POR.

## 1.4.2 Écoulement transitoire lent

Les écoulements transitoires lents (écoulements avec colonnes d'eau rigides) ont été introduits pour la modélisation de réseau de conduites sous pression par

opposition aux écoulements transitoires rapides (avec phénomène de coup de bélier) pour considérer la simplification des écoulements incompressibles [53, 54]. L'analyse en écoulement permanent a quelques limitations car en réalité les réseaux AEP présentent des écoulements qui varient graduellement de par la demande en eau, les fluctuations du niveau des réservoirs ou encore les mises en marche ou fermetures de vannes ou de pompes. Les modèles hydrauliques pseudo-transitoires (EPS), suite de calculs permanents, ne sont pas capables de reproduire fidèlement les impacts de ces phénomènes transitoires lents [55]. Pour l'analyse transitoire lente, les forces d'inertie sont incluses alors que les effets de compressibilité à la fois du fluide et des parois de conduites sont négligés. Des pas de temps d'intégration (de l'ordre de la minute sans organe de régulation, sinon de la seconde) peuvent être utilisés, qui consistent en des ordres de grandeur plus grands que pour l'analyse transitoire rapide. Aussi grâce à l'incompressibilité, un et un seul débit par arc du graphe du réseau, ainsi qu'une seule tension (différence de potentiel entre les deux extrémités de l'arc) sont nécessaires pour décrire l'état hydraulique transitoire lent, ce qui résulte en des gains de temps de calcul et de tailles de graphe de réseau pouvant être non négligeables.

Des outils de théorie de graphe pour des réseaux de grande taille (*e.g.* la matrice d'incidence nœud-arc équation (1.1)) ont été introduits pour la modélisation transitoire lente [56, 57]. Piller *et al.* [54] proposent une formulation d'une équation ordinaire différentielle qui consiste à rechercher les débits de maille et les niveaux dans les réservoirs avec une méthode de Rosenbrock, une généralisation de Runge-Kutta qui utilise la méthode de Newton avec un contrôle du pas de temps. Cette méthode permet de pallier aux instabilités numériques causées par des fermetures de vannes de contrôle et se montre plus rapide et plus précise que le schéma de Runge-Kutta-Fehlberg. Gancel and Piller [53] dérivent les équations EDO de sensibilités associées et résolvent avec le même schéma que pour le modèle direct, ce qui résulte en des économies de calcul.

La modélisation conduite par la pression PDM a également été considérée pour les écoulements transitoires lents [58]. Il n'est plus possible de considérer la formulation DDM avec des débits maillants mais une équation différentielle algébrique est à résoudre. Pour cela les auteurs proposent d'utiliser un  $\theta$ -schéma et une méthode de Newton qui conduisent à un système linéaire avec beaucoup de similitude avec le cas permanent. De plus, la caractérisation des équations d'équilibre est possible. Si aucun niveau de réservoir n'est à calculer, la fonction co-Content équation (1.14) est une fonction de Lyapunov stricte pour le système différentiel transitoire lent, avec pour conséquence que chaque trajectoire (quelle que soit la solution initiale) tend asymptotiquement vers l'unique point d'équilibre stable. En présence de réservoirs, le point d'équilibre dépend de la solution initiale et le Co-Content est une fonction de Lyapunov non stricte, ce qui prouve la stabilité du système différentiel PDM.

Une formulation transitoire lente qui incorpore des fuites diffuses a été proposée par Jaumouillé *et al.* [29]. Cette formulation a été dérivée des équations de Navier-Stokes axisymétrique, en coordonnées cylindriques, pour un écoulement incompressible. Nous supposons que le débit de fuite par unité de longueur est une constante qui dépend de la conduite et est décrit par :

$$c_{L,j} = 2\pi R_j v_r(R_j) \quad (1.36)$$

où  $R_j$  est le rayon interne de la j-ème conduite et  $v_r(R_j)$  est fixe et est une condition aux limites de vitesse radiale sur la paroi de la conduite. Le débit de fuite  $c_{L,j}$  est supposé indépendant de la pression dans la conduite. Une intégration de l'équation de continuité locale, du milieu de la conduite à une position longitudinale  $x$ , donne :

$$q_j(t, x) = q_j(t, 0.5L_j) + c_{L,j} (0.5L_j - x)$$

avec  $L_j$  la longueur de la j-ème conduite. Le débit à une position dans la conduite peut donc être calculé de façon exacte si l'on connaît le débit en milieu de conduite. La condition de conservation de la masse suivante a été établie pour un volume de contrôle autour de chaque nœud jonction :

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_{0.5}(t) + \mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) + \mathbf{c}_B = \mathbf{0}_{nj} \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{q}_{0.5}$  est le vecteur de composantes  $[\mathbf{q}_{0.5}]_j = q_j(t, 0.5L_j)$  et  $\mathbf{c}_B$  est le vecteur de fuite diffuse qui agrège la moitié des volumes de fuites de toutes les conduites adjacentes. En d'autres mots :

$$[\mathbf{c}_B]_i = 0.5 \sum_{j \in \Gamma_i^- \cup \Gamma_i^+} [c_L L]_j \quad (1.38)$$

où  $\Gamma_i^-$  (**resp.**  $\Gamma_i^+$ ) est l'ensemble des conduites orientées entrantes en  $i$  (**resp.** sortantes en  $i$ ).

L'équation de conservation de l'énergie (équivalent à la conservation de la quantité de mouvement) est la suivante :

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{q}}_{0.5} = 2\beta\mathbf{P}\mathbf{q}_{0.5} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{c}_L, \mathbf{q}_{0.5}) + \mathbf{A}^T\mathbf{h} + \mathbf{A}_0^T\mathbf{h}_0 \quad (1.39)$$

où le point sur le symbole dénote une dérivée en temps,  $\mathbf{L}$  (**resp.**  $\mathbf{P}$ ) est une matrice diagonale d'éléments diagonaux :  $\mathbf{L}_{jj} = L_j/(gS_j)$ ,  $j = 1, \dots, np$  (**resp.**  $\mathbf{P}_{jj} = c_{L,j}L_j/(gS_j^2)$ ) avec  $S_j$  la surface de la j-ème conduite,  $\beta$  est le coefficient de Boussinesq ou de quantité de mouvement, et  $\boldsymbol{\xi}$  est le vecteur de perte de charge par effet de friction et fuite diffuse linéique d'éléments :

$$[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{c}_L, \mathbf{q}_{0.5})]_j = \int_0^{L_j} f_j q_j(t, x) |q_j(t, x)|^{\alpha-1} dx$$



où  $f_j$  est le coefficient de friction de la conduite qui dépend des unités. Par exemple, pour la formule d’Hazen-Williams, on obtient :

$$[\boldsymbol{\xi}(c_L, \mathbf{q}_{0.5})]_j = \frac{f_j}{2.852c_{L,j}} \left[ \left| q_{0.5} + c_{L,j} \frac{L_j}{2} \right|^{2.852} - \left| q_{0.5} - c_{L,j} \frac{L_j}{2} \right|^{2.852} \right] \quad (1.40)$$

Le système d’équations bilan massique (1.37) et bilan énergétique (1.39) a été résolu pour une modélisation conduite par la demande pour laquelle il a été possible de réduire la conservation de la masse et d’utiliser un débit maillant. Une des conclusions est que le terme d’inertie de convection peut s’avérer significatif pour des niveaux de fuites importants mais réalistes.

Plusieurs auteurs [59, 60] ont supposé que la fuite dépend de la pression le long des conduites ; ils ont dérivé une équation aux dérivées partielles non-linéaire reliée à la diffusion appelée p-laplacien. L’équation puissance (1.33) a été utilisée dans l’équation de continuité. Ce modèle physique a été utilisé pour minimiser le volume réel de perte en eau, par action sur la perte de la charge locale créée par une vanne de contrôle de la pression, en assurant une charge de service minimale au niveau des usagers [46]. Il a été supposé que les consommations et les pertes apparentes ne sont pas impactées par le contrôle. Sur un cas d’étude réel, le contrôle de la pression en deux points stratégiques a permis de réduire de 5% le volume d’eau distribué.

### 1.4.3 Prise en compte de points hauts

Une limitation des modèles conduits par la pression réside dans le fait qu’ils ne prennent pas en considération que la ligne piézométrique, sans apport d’énergie, ne peut remonter et passer par un point haut pour desservir une zone de consommation. Pour prévenir ces situations, Piller and van Zyl [61] introduisent des vannes stabilisatrices de pression amont au niveau de chaque point haut, avec pour consigne l’élévation du point haut.

## 1.5 Meilleure performance grâce au génie logiciel et à la parallélisation

De la conception d’un logiciel peut dépendre sa performance mais aussi sa robustesse et sa stabilité, nous allons illustrer comment la conception orientée objet peut s’avérer utile. Les efforts pour développer un algorithme performant en terme de nombre d’itérations mais aussi en temps de calcul ont été dans les chapitres précédents par simple analyse des propriétés algorithmiques (*e.g.* sur la matrice d’itération), par le choix approprié d’une formulation (*i.e.* conduisant au meilleur rayon de convergence de la suite de Newton) et en utilisant

une correction de pas dans la descente. Il est également intéressant de mesurer le gain en temps de calcul que pourrait apporter la parallélisation ou le calcul distribué. Dans cette section, nous donnerons quelques éléments de réponse.

### 1.5.1 Utilisation de la programmation orientée objet

La programmation orientée objet (POO) est spécialement conçue pour autoriser les évolutions d'un logiciel et ses extensions à travers des cycles de vie. Avec les progrès récents en informatique, l'application d'un atelier de génie logiciel (AGL) résulte en une solution logicielle, maintenable et de haute qualité, avec une bonne indépendance du langage de programmation. Modelio (anciennement Objecteering) est l'AGL qui a été choisi à Irstea pour concevoir et développer le progiciel *Porteau*. POO et **UML** (Unified Programming Language) sont utilisés pour faciliter les nouveaux développements, garantir les résultats, la bonne tenue et l'utilisation du logiciel, par une meilleure conception, avec moins de bugs. Le codage est réalisé en **Java** pour l'interface graphique, les objets métiers, et en **C++** pour les moteurs de calcul. Il a été fait usage d'un cycle de vie à la fois itératif et incrémental. Les principaux résultats sont décrits dans [17] et sont reportés ci-dessous :

- trois couches logiciel sont définies comme étant le modèle métier Réseau, l'interface graphique et les modules de calcul ;
- la couche Modèle métier est entièrement représentée dans l'AGL Modelio, ce qui permet de générer automatiquement le code **Java** ; une documentation de la conception est également exportable avec en particulier les diagrammes de classes ;
- les choix technologiques ont été **Java** pour les deux premières couches logiciel, **C++** pour les modules de calcul et **XML** pour la pérennité et la sauvegarde des données ;
- l'interface graphique du logiciel *Porteau* possède les quatre vues arborescente, panoramique, schématique et tableur ;
- la représentation du modèle métier est différente d'autres logiciels d'hydraulique, de conception non objet comme *Epanet*. Elle conduit à un système mieux conditionné et permet une meilleure évolutivité ;
- le logiciel est multiplateforme et multilingue. Le langage de modélisation unifié **UML** est un langage de modélisation universel d'aide au développement dans le domaine du génie logiciel, qui a pour but de fournir une méthode normalisée pour concevoir un logiciel.

Parmi les douze packages principaux constituant la couche modèle réseau, le package "graph" est central. Les éléments du graphe consistent en des nœuds, des arcs (ou liens). Nous montrons Figure 1.6 le diagramme de classe des arcs (la classe est appelée Link) avec ses principales associations.

Un diagramme de classe décrit la structure d'un système en montrant les classes qui le composent, ses attributs ou propriétés, les opérations (ou mé-

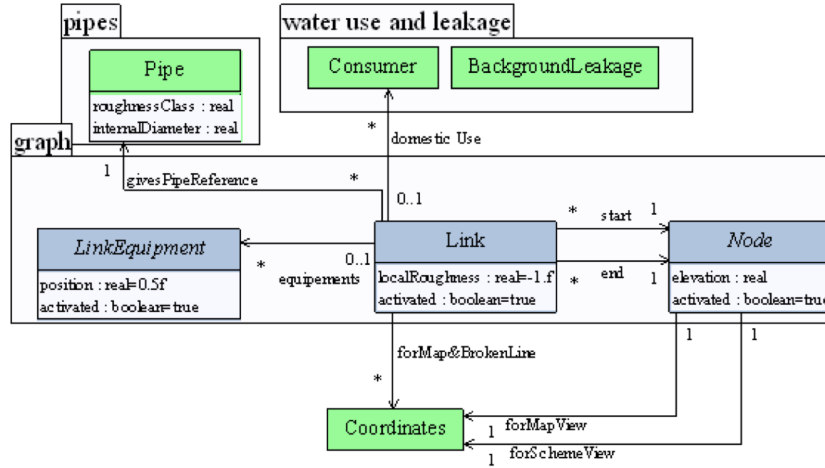


FIGURE 1.6 – Diagramme de classe pour la classe Link et ses associations principales.

thodes), et les relations entre classes. Les classes en vert sont définies dans d’autres packages. Il peut être remarqué que chaque arc possède (par construction) deux nœuds extrémités (initiale et finale), que les appareils hydrauliques (vannes et pompes) peuvent être portés par un arc à une position précise. En italique sont les classes abstraites ou superclasses qui ne seront pas instanciées. Un arc peut représenter donc (par conception) plusieurs conduites et équipements en série, ce qui permet, en cumulant les pertes de charge de chaque élément constitutif, d’améliorer le conditionnement du système à résoudre. Une consommation domestique et des fuites diffuses peuvent être définies “en route” sur un arc.

### 1.5.2 Étude de l’apport de la parallélisation

Il a été mesuré dans Piller *et al.* [62] ce que peut apporter la **parallélisation** pour le calcul permanent de *Porteau*. La méthode a comparé deux algorithmes de résolution de systèmes linéaires pour la direction de descente de 1.2, une méthode directe de Cholesky avec une renumérotation à base de bisections emboîtées (nested dissections) et une méthode itérative de gradient conjugué préconditionné. La bibliothèque C++ MPICH, appelée à partir de **Java**, a été utilisée pour le parallélisme. Pour les tests numériques et l’étude

des performances effectués sur des réseaux de tailles moyennes et importantes, le temps de calcul décroît pour des systèmes de taille de plus de 4500 nœuds jonctions. Ceci confirme les expérimentations d'autres chercheurs pour d'autres logiciels à base d'*Epanet* : par exemple, les efforts de Crous *et al.* [63] portent sur l'utilisation de la GPU pour accélérer la résolution numérique en utilisant la méthode du gradient conjugué pour ses opérations algébriques simples, une amélioration n'est reportée que sur des réseaux de très grande taille ( $> 100000$ ). Guidolin *et al.* [64] et Wu and Lee [65] ont, quant à eux, utilisé des techniques de calcul haute performance plus classiques et rapportent qu'il y aurait également un intérêt à paralléliser aussi les autres tâches (*e.g.* le calcul des pertes de charge) et pas seulement la résolution linéaire.

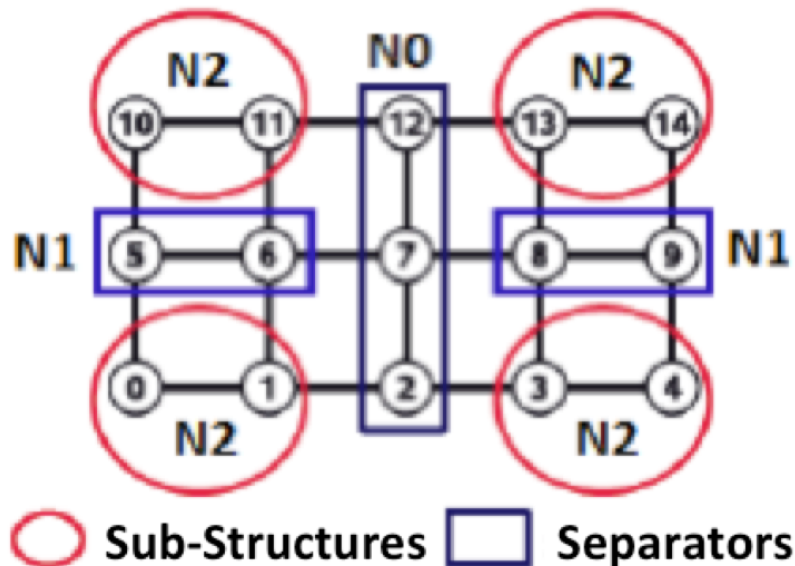


FIGURE 1.7 – Exemple de partition des nœuds jonctions par la méthode des bisections emboîtées.

*Porteau* est un logiciel utilisé essentiellement sur des ordinateurs personnels (PC) munis de microprocesseur multi-cœurs. Pour minimiser la communication entre les unités de calculs (cœurs), certaines procédures dans le solveur doivent être changées. Le profilage du temps montre que, pour *Porteau*, la résolution linéaire demande la majorité de l'effort computationnel. La méthode de gradient conjugué préconditionné (*PGC*) a été choisie car elle se prête à la parallélisation. Le deuxième algorithme est une méthode de factorisation de Cholesky pour matrice creuse (avec décomposition  $LDL^T$ ) qui utilise la méthode de bisections emboîtées (*SC+ND*). La factorisation logique et la renumérotation des inconnues (des sommets du graphe de la matrice de Schur **S**

(1.25), en fait des nœuds jonctions) sont réalisées dans une étape de prétraitement et sont valides pour toute la résolution.

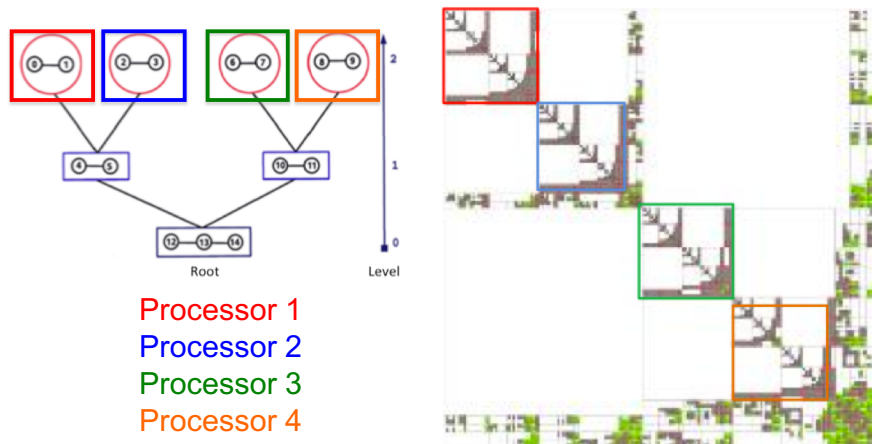


FIGURE 1.8 – Numérotation feuille racine a) arbre d’élimination de la méthode de bisections emboîtées b) répartition des calculs entre processeurs et factorisation symbolique de  $\mathbf{S}$ .

L’exemple de la Figure 1.7 illustre le travail de l’algorithme sur un graphe de réseau classique. En premier, une bisection initiale est effectuée sur toutes les inconnues. Cela forme l’ensemble séparateur  $N_0$  contenant les nœuds 2, 7 et 12. Ce séparateur est alors enlevé du graphe initial pour former deux composantes déconnectées. Les deux sous-graphes sont alors coupés en deux en utilisant le même procédé avec un nouveau séparateur  $N_1$  formé des nœuds 5, 6 et 8, 9 respectivement. Finalement, les quatre couples  $\{0, 1\}$ ,  $\{10, 11\}$ ,  $\{13, 14\}$  et  $\{3, 4\}$  sont obtenus comme sous-structures de niveau 2.

Cet algorithme a pour but de découper un graphe en  $k$  sous-graphes de même taille pour assurer un bon équilibre dans la parallélisation entre processeurs. D’un autre côté, il recherche à minimiser la taille et le nombre de séparateurs pour réduire les coûts indirects de communication qui résultent. L’arbre d’élimination doit donc être large et de faible hauteur. Enfin, si l’on numérote en premier les feuilles de l’arbre d’élimination, par le théorème de Rose-Tarjan-Lueker, il n’y aura pas de remplissage entre les différents sous-groupes du dernier niveau. Ceci est illustré sur l’exemple de la Figure 1.8. Pour la factorisation, il y a trois boucles d’itération qui peuvent être utilisées de 6 manières différentes en fonction de l’ordre des indices. À cause du type

de stockage du code de *Porteau* (par colonne), seuls deux implémentations peuvent être utilisées. L'algorithme "fan-in" minimise le nombre d'étapes de communication et est donc choisi.

*Application 1.2.* Les codes parallèles ont été comparés en terme de précision et de convergence sur une douzaine de réseaux réels de taille différente (le plus large approximativement 20000 nœuds). Il a été constaté que la méthode *SC+NR* est significativement plus rapide que *PGC*. De plus, *PGC* n'a pas toujours convergée. Le préconditionnement était par une méthode de Gauss-Seidel. Il s'est avéré que les directions de recherche pouvaient ne pas être conjuguées, certainement de par le conditionnement de la matrice d'itération  $\mathbf{S}$  qui possède, sur certains réseaux et configurations, des valeurs qui peuvent différer de plus de 15 ordres de grandeur ; ainsi, pendant les multiplications matrice-vecteur, les valeurs proches de zéro ont pu disparaître conduisant à une matrice résultante non définie positive.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux formulations et méthodes qui permettent de mieux décrire les écoulements hydrauliques en écoulement incompressible pour un réseau maillé de conduites sous pression.

Les écoulements conduits par la pression qui ont été introduits, permettent de réduire la demande en eau en cas d'insuffisance de pression, ce qui est la base d'un calcul de fiabilité mécanique et d'étude de criticité. Cependant, il n'existe pas d'évidence sur le choix de la fonction pression - débit de consommation POR à utiliser, et plus de recherches sont à mener en présence d'une large partie de réseau déconnectée.

Le principe de moindre action, Content PDM, a été formulé, et s'exprime en fonction de la variable primale débit. Les équations stationnaires, conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, sont celles du calcul permanent PDM. La variable duale associée à la contrainte de conservation de la masse est la charge piézométrique. La dérivation de ce cadre d'optimisation permet de démontrer l'existence et l'unicité de la variable débit. Une condition d'unicité pour la variable duale est donnée sur le rang de la matrice d'incidence nœud arc, qui revient à vérifier que chaque composante connexe possède une ressource en eau.

Il est démontré que la méthode de Newton peut ne pas converger sur des cas simples. Une recherche linéaire inexacte avec la règle de Goldstein permet d'obtenir la convergence globale. Deux méthodes de Newton amorti sont décrites. Elles utilisent toutes deux la hessienne du problème duale qui est particulièrement creuse et dont la décomposition de Cholesky peut être réutilisée pour calculer les sensibilités locales des solutions permanentes PDM par rapport aux variations de leurs paramètres. Les formules explicites des sensibilités

locales sont dérivées.

Le Content PDM et les algorithmes de Newton amorti sont étendus pour incorporer des fuites locales en utilisant la relation pression - débit de fuite, FAVAD, laquelle permet de modéliser des orifices de fuite variables avec la pression. L'incorporation de fuites diffuses ne peut se faire qu'en tenant compte de nouveaux termes d'inertie et en modifiant la loi de perte de charge. On est alors conduit à résoudre des équations transitoires lentes, équivalent des équations de Saint-Venant pour les écoulements incompressibles.

Enfin, l'expérience de réécriture de *Porteau* à l'aide d'un atelier de génie logiciel et de la programmation orientée objet est restituée. Une attention toute particulière a été apportée à ce que la définition des objets métiers conduisent à un système mieux conditionné. Les efforts de parallélisation sur les cœurs CPU d'un ordinateur ont confirmé que le temps de calcul décroît pour des systèmes de taille de plus de 5000 nœuds jonctions.

# Chapitre 2

## Problèmes inverses associés

Dans ce chapitre, plusieurs problèmes inverses sont considérés, pour la prise en compte d'organes de régulation, pour identifier les paramètres du modèle et enfin pour l'emplacement optimal de mesures. Une constante est la formulation d'un problème des moindres carrés avec résolution par l'algorithme de Levenberg-Marquardt projeté. Celle-ci permet la détermination du statut des vannes de pression en calculant les variables de Karush-Kuhn-Tucker associées aux contraintes sur le degré de fermeture. Les paramètres du modèle hydraulique sont également identifiés en minimisant la somme de la fonction de Huber des résidus. Le choix et l'emplacement de mesures minimisent l'influence des erreurs de mesure sur l'estimation des moindres carrés tout en garantissant l'observabilité de l'état hydraulique.

**Mots clés :** Problème des moindres carrés, Levenberg-Marquardt, prise en compte de vannes de contrôle, calage de paramètres, emplacement optimal de mesures.

### 2.1 Introduction

Les modèles hydrauliques sont très largement utilisés pour la conception, l'analyse et l'optimisation des réseaux AEP. Le système équation (1.4) (**resp.** (1.6)), pour des équations DDM (**resp.** pour des équations PDM) constitue le modèle direct. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux problèmes inverses associés. D'une part, il est nécessaire que les équipements de régulation présents soient pris en compte par la modélisation et, pour cela, nous nous plaçons dans le cadre d'une formulation d'un problème des moindres carrés. D'autre part, il est important que le modèle direct soit calé à partir d'observations suffisantes pour appréhender la diversité des points de fonctionnement possibles. Finalement, nous considérerons aussi comment placer de façon optimale des capteurs et des équipements de mesure pour le calage des paramètres ou pour l'estimation de l'état hydraulique.



## 2.2 Prise en compte d'organes de contrôle

Les réseaux de distribution d'eau doivent fournir un bon niveau de service sous des conditions de fonctionnement multiples. Pour le réaliser, les ingénieurs emploient souvent des vannes de contrôle pour réguler les flux et les pressions. Les vannes de contrôle peuvent opérer mécaniquement (comme des vannes anti-retour ou clapets) ou par des circuits hydrauliques (comme les limiteurs de débit et les stabilisateurs de pression) et peuvent être contrôlées par des conditions locales ou un signal externe.

Le logiciel libre généralement utilisé, *Epanet* [66], utilise un ensemble de règles de contrôle pour déterminer l'état (ouvert, fermé, actif) des vannes. Bien que la méthode fonctionne bien en pratique et soit largement acceptée par une partie des spécialistes de la modélisation hydraulique, il n'y a aucune garantie que son algorithme heuristique puisse déterminer les bons états des vannes de contrôle dans tous les cas. En effet, Simpson [67] a illustré ce problème par un certain nombre de combinaisons de vannes de contrôle pour lesquelles le moteur hydraulique *Epanet* n'a pas trouvé de solution, ou a produit des résultats incorrects.

Des méthodes alternatives pour modéliser les vannes de contrôle existent et se sont développées ces dernières années. Piller and Brémond [68] ont proposé une approche d'optimisation globale au sens des moindres carrés pour déterminer le statut des vannes en minimisant l'écart entre valeurs de consigne et valeurs calculées par un modèle hydraulique. Les auteurs ont reporté que dans certaines situations, la modélisation conduite par la demande (DDM) n'était pas adaptée, car il convenait de réduire la demande à l'aval en cas de pression insuffisante. L'approche PDM est donc recommandée.

Deuerlein *et al.* [69] ont suggéré une méthode basée sur un équilibre de Nash, pour déterminer le statut correct des vannes de contrôle de la pression. De plus, les auteurs ont décrit quelques exemples simples pour lesquels il n'y a ni unicité de la solution, ni existence. Deuerlein *et al.* [70] ont proposé une autre méthode pour traiter les limiteurs de débit et les clapets. Ils utilisent la théorie de la minimisation du Content pour définir des conditions qui garantissent l'existence et l'unicité de la solution avant de chercher à résoudre le problème (par analyse des contraintes sur le problème d'optimisation). Un résultat intéressant est l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange sur les limitations de débit comme une perte de charge créée par la vanne de contrôle.

Dans la section suivante, l'approche d'optimisation utilisée dans le solveur hydraulique du progiciel *Porteau* est étendue pour traiter des vannes de contrôle. Des approches différentes sont utilisées pour la modélisation des limiteurs de débit ou des stabilisateurs de pression.

### 2.2.1 Modélisation des vannes qui régulent le débit

Les vannes qui régulent le débit incluent les limiteurs de débit (notées FCV, pour *Flow Control Valve*) qui empêchent le débit traversant la vanne d'excéder une valeur cible, et les clapets (notés CV, pour *Check Valve*) qui autorisent un débit dans une seule direction. Les FCV et les CV sont modélisés comme appartenant à un arc du graphe du modèle hydraulique (voir Figure 1.6), puisque cela aboutit à un modèle plus simple et évite des problèmes numériques dans des vannes avec de très petites pertes de charge.

Dans l'approche proposée [13], le problème n'est pas résolu par des contraintes d'inégalités fortes (comme dans [70]) mais en ajoutant une pénalisation à la fonction Content. Cette méthode de pénalité extérieure facilite la satisfaction des contraintes tout en étant robuste et simple à implémenter. Le solveur hydraulique utilisé est basé sur l'approche d'optimisation algorithm 1.2 et ceci facilite le traitement simultané des arcs et des vannes de contrôle de débit. On pose alors :

**Définition 2.1** (Problème d'optimisation Content avec FCV et CV).

$$\min_{\mathbf{x} \in U} C_{FCV}(\mathbf{x}) \triangleq C(\mathbf{x}) + \dots \left[ \sum_{j \in J_{FCV}} \max(0, x_j - q_j^{set})^3 + \sum_{j \in J_{CV}} \max(0, -x_j)^3 \right] \quad (2.1)$$

où  $J_{FCV}$  (**resp.**  $J_{CV}$ ) est l'ensemble des indices d'arc avec un FCV (**resp.** un CV);  $r_{max}$  est un coefficient de résistance positif et suffisamment grand; et le dernier terme pénalise les violations des consignes de FCV et les écoulements dans le sens du retour pour les CV.

Normalement, la méthode de pénalité exigerait que  $C_{FCV}$  soit minimisé pour un suite de  $r_k$  jusqu'à ce qu'une solution appropriée soit trouvée. Cependant, pour cette application, il a été trouvé que de bons résultats sont obtenus avec un seul grand coefficient  $r_{max}$ . Lorsque les pénalités de FCV et CV sont actives, elles génèrent des pertes de charge locales :

**Propriété 2.1** (Les gradients des contributions des FCV et des CV sont des pertes de charge singulières ou locales).

$$\xi_j^{FCV}(x_j, r_{max}) = r_{max} \max(0, x_j - q_j^{set})^2 = h_0 \max\left(0, \frac{x_j - q_j^{set}}{\Delta q}\right)^2$$

$$\xi_j^{CV}(x_j, r_{max}) = -r_{max} \max(0, -x_j)^2$$

avec  $h_0$  la pénalité de perte de charge pour une violation de débit de  $\Delta q$ ;  $x_j$  est le débit dans l'arc  $j$ ;  $q_j^{set}$  la valeur de consigne; et  $\xi^{FCV} + \xi^{CV}$ , la fonction de perte de charge locale (de pénalité) en  $\mathbf{x}$ , est le gradient du terme additionnel

de la fonction de Content. La fonction de perte de charge pour un FCV est une fonction du débit quadratique dont la forme générale est représentée Fig. 2.1.

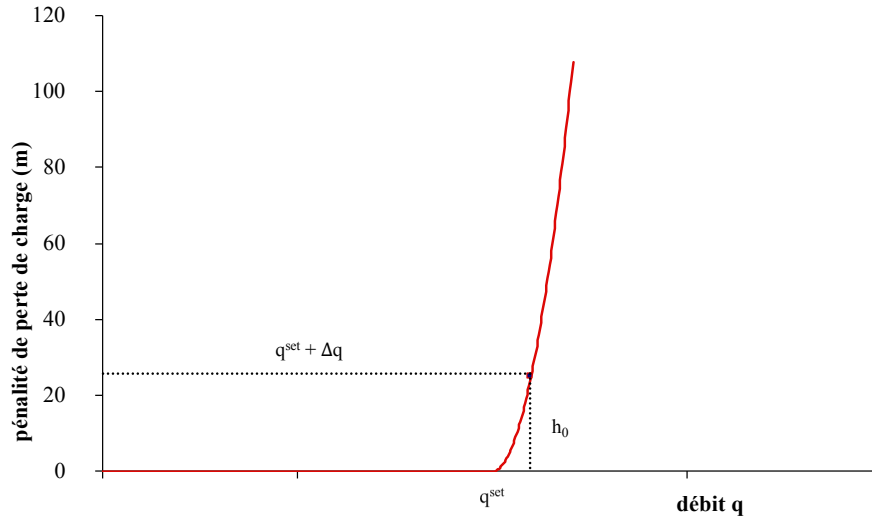


FIGURE 2.1 – Modélisation d'un limiteur de débit par pénalité extérieure de perte de charge.

## 2.2.2 Modélisation des vannes de contrôle de la pression

Un stabilisateur aval (PRV, Pressure Reducing Valve) a pour but de maintenir une pression maximale à l'aval de la vanne. Les PRV sont souvent utilisés aux points d'entrée d'une zone de pression, pour protéger les conduites et pour minimiser les fuites. *A contrario*, les stabilisateurs amonts (PSV, Pressure Sustaining Valves) sont utilisés pour maintenir une pression minimale à l'amont de la vanne.

Comme pour les limiteurs de débit, ces dispositifs de régulation de la pression (PRD, Pressure Regulating Device) sont positionnés sur un arc du graphe de réseau avec une consigne localisée à l'aval ou à l'amont de la vanne. Si  $\mathbf{S}$  est la matrice de sélection des  $nt$  nœuds de consigne de pression, l'ensemble complet des consignes de pression peut être réécrit sous la forme d'une contrainte de charge sous la forme matricielle :  $\mathbf{S}\mathbf{h} \leq \mathbf{h}^{set}$ .

Quand elles sont actives, les vannes PRV et PSV créent une perte de charge locale pour rapprocher la charge aussi près que possible du vecteur consigne de

charge  $\mathbf{h}^{set}$  (hauteur de pression de consigne + côte sol). Ces pertes de charge locales se rajoutent à la perte de charge par effet de friction  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$ . Pour des arcs avec de tels dispositifs, la perte locale prend la forme :

$$\boldsymbol{\xi}^{PRD}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \triangleq \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{S}_q^T \mathbf{r}, \quad r_j = \frac{8K_j}{g\pi^2 D_j^4}, \quad i = 1, \dots, nt$$

où  $r_j$  est la résistance hydraulique locale pour l'arc  $j$ ,  $K_j$  le coefficient sans dimension correspondant, et  $D_j$  le diamètre de l'arc  $j$ ;  $\mathbf{B}$  est la matrice diagonale d'éléments  $[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_{jj} = \max(0, q_j)^2$ ; et  $\mathbf{S}_q$  est la matrice de sélection de taille  $nt \times np$  pour identifier les vannes PRD. Ces vannes de contrôle agissent seulement dans une direction - selon le dispositif en place, elles bloqueront le retour de l'eau, ou, si le retour par bypass est autorisé, elle généreront une perte de charge locale additionnelle dans le sens de retour de l'eau.

Les PRD sont traités avec une formulation des moindres carrés (LS, Least Squares) avec pour variables d'intérêt les résistances des vannes de contrôle. Le problème LS de la détermination des statuts des vannes PRD se formalise comme suit :

**Définition 2.2** (Formulation LS continue pour la détermination du statut des vannes PRV and PSV).

$$\min_{\mathbf{0}_{nt} \leq \mathbf{r} \leq r_{max} \mathbf{1}_{nt}} f(\mathbf{r}) \triangleq \frac{1}{2} (\mathbf{S}\mathbf{h}(\mathbf{r}) - \mathbf{h}^{set})^T \mathbf{I}^+ (\mathbf{S}\mathbf{h}(\mathbf{r}) - \mathbf{h}^{set}) \quad (2.2)$$

La borne supérieure  $r_{max}$  pour la résistance de la vanne est la même que celle utilisée pour les limiteurs de débits :  $r_{max} = h_0/\Delta q^2$ . Elle correspond à l'état vanne fermée. La borne inférieure  $r_i = 0$  correspond à l'état ouvert pour la  $i$ -ème vanne.  $\mathbf{I}^+$  est une matrice indicatrice carrée diagonale, avec pour éléments diagonaux la fonction caractéristique du débit positif du PRD (1 si le débit est positif).

*Remarque.* La fonction  $f$  n'est pas partout différentiable aux  $r_j$  tels que  $q_j(r_j) = 0$ . Cependant, comme ces vannes de contrôles sont actives pour une petite plage de  $q_j$  positifs, et sont soit ouvertes soit fermées en dehors de cette plage, il n'a pas été nécessaire de régulariser le terme  $\mathbf{I}^+$ .

Pour résoudre les équations KKT, le gradient de  $f$  doit être déterminé. En utilisant le théorème des fonctions implicites, il est possible de montrer que  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{r})$  est une fonction continûment différentiable par rapport aux variables  $\mathbf{r}$ . Ceci permet d'obtenir l'expression du gradient de  $f$  :

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^T (\mathbf{S}\mathbf{h}(\mathbf{r}) - \mathbf{h}^{set}) \quad \text{avec } \mathbf{J} = \mathbf{S}\partial_r \mathbf{h}$$

avec  $\partial_r \mathbf{h}$  donnée en (1.30) avec  $\mathbf{P} = \mathbf{S}_q^T$ .

La fonction de perte de charge totale  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  inclut les pertes par effet de friction, les pertes de charge de pénalité FCV et CV et les pertes de charge

PRD. Le calcul du gradient de  $f$  est immédiat, comme la matrice à inverser est très creuse et sa décomposition de Cholesky est connue à partir de la solution hydraulique courante avec les valeurs précédentes de  $\mathbf{r}$ .

Puisque  $f$  est continûment différentiable, et que les contraintes sont linéaires, les conditions KKT d'optimalité du premier ordre sont satisfaites (*e.g.* voir [71]). Par conséquent, il existe deux vecteurs multiplicateurs  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2 \geq \mathbf{0}_{nt}$  tels que :

$$\mathbf{J}^T (\mathbf{S}\mathbf{h}(\mathbf{r}) - \mathbf{h}^{set}) = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \quad (2.3)$$

C'est la condition d'admissibilité duale tandis que

$$\mathbf{M}_1^T \hat{\mathbf{r}} = 0 = \mathbf{M}_2^T (\hat{\mathbf{r}} - r_{max} \mathbf{1}_{nt}) \quad (2.4)$$

sont les conditions de complémentarité avec  $\hat{\mathbf{r}}$  la solution optimale. La condition d'admissibilité duale établit que le gradient n'est pas contraint en signe. Ces deux conditions sont utilisées pour vérifier si les conditions KKT sont satisfaites, *i.e.* si le statut correct des vannes a été trouvé.

**Propriété 2.2** (Conditions nécessaires pour un statut correct des vannes PRD).

1. Si  $\hat{r}_i = 0$  (**la i-ème vanne PRD est ouverte**), alors par (2.4) il est nécessaire que  $[\mathbf{M}_2]_i = 0$  et l'équation (2.3) indique que la i-ème composante du gradient doit être positive ou nulle.
2. De la même façon, si  $\hat{r}_i = r_{max}$  (**la i-ème vanne PRD est fermée**), alors  $[\mathbf{M}_1]_i = 0$  et la composante du gradient correspondant doit être négative ou nulle.
3. Finalement, si  $0 < \hat{r}_i < r_{max}$  (**la i-ème vanne est active**), alors nécessairement  $[\mathbf{M}_1]_i = [\mathbf{M}_2]_i = 0$  et la i-ème composante du gradient doit être nulle.

*Remarque.* Ces conditions d'optimalité sont utiles pour déterminer le statut correct d'une vanne PRD (et non le réglage exact de la vanne). Une fois que le statut correct des vannes PRD est déterminé, il est nécessaire de résoudre à nouveau le problème des moindres carrés équation (2.2) en considérant uniquement les vannes actives, pour calculer les pertes de charges locales exactes pour parfaitement satisfaire aux consignes.

La méthode de résolution utilisée est une légère modification de l'algorithme de Levenberg-Marquardt (LM) qui tient compte des contraintes. Au début de l'algorithme de résolution, les statuts initiaux des vannes sont obtenus de la solution du pas de temps précédent, ou bien des réglages de vannes initiaux. Le système équation (1.6) est alors résolu, et les résistances  $\mathbf{r}$  des vannes PRD sont estimées avec la formule itérative :

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \mathbf{P}_k \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{J}(\mathbf{r}^k) + e_k \text{diag} \left( \mathbf{J}(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{J}(\mathbf{r}^k) \right) \right]^{-1} \nabla f(\mathbf{r}^k) \quad (2.5)$$

où  $e_k$  est le facteur LM d'amortissement,  $\mathbf{P}_k$  est la matrice de projection sur les contraintes primales non saturées (2.2) (*i.e.* pour sélectionner les vannes actives qui n'ont pas le statut fixé par l'algorithme 'fermé' ou 'ouvert' à l'itération précédente). La valeur de  $e_k$  est augmentée si les conditions d'admissibilité primales (PF) ne sont pas respectées, si la matrice  $\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k$  est mal conditionnée ou si il n'y a pas descente du critère à minimiser. À chaque itération  $k$ , le système hydraulique est résolu pour calculer les valeurs prédites  $\mathbf{h}(\mathbf{r}^k)$ . Le fonctionnement des PRD est modélisé en ajustant les coefficients de perte de charge locale pour satisfaire l'optimalité d'un problème des moindres carrés.

### 2.2.3 Performance de l'algorithme sur un exemple de vanne de contrôle

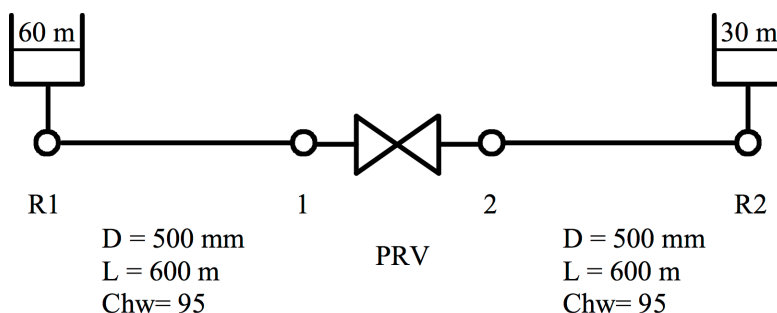


FIGURE 2.2 – Réseau #3 avec un PRV entre deux nœuds sources.

*Application 2.1.* La méthode proposée a été appliquée à un certain nombre de réseaux test [13] et est implémentée dans la solution logicielle *Porteau*. Les auteurs rapportent que la convergence peut être plus lente lorsque deux vannes interagissent (*e.g.* en parallèle sur une même maille ou en série). Un réseau simple avec un stabilisateur aval ou PRV sur un chemin entre deux réservoirs est représenté Figure 2.2. Cet exemple est fourni pour illustrer la bonne convergence de la méthode quand il n'y a pas d'interaction entre les vannes (bonne pratique).

Les côtes sol des nœuds 1 et 2 sont à 0 m. Trois charges consigne au nœud 2 ont été testées :  $\mathbf{h}^{set} =$  a) 60 m, b) 40 m and c) 20 m. Elles correspondent aux trois situations suivantes : a) vanne ouverte et impossible de respecter la consigne car irréaliste pour la ligne piézométrique, b) dispositif actif (une perte de charge équivalente est créée avec un coefficient  $K = 34,5$ ), c) vanne fermée,

consigne trop basse pour être atteinte de par la présence du réservoir R2. La convergence pour les trois situations est montrée sur la Figure 2.3. Dans tous les cas, l’algorithme converge en 6 itérations au plus.

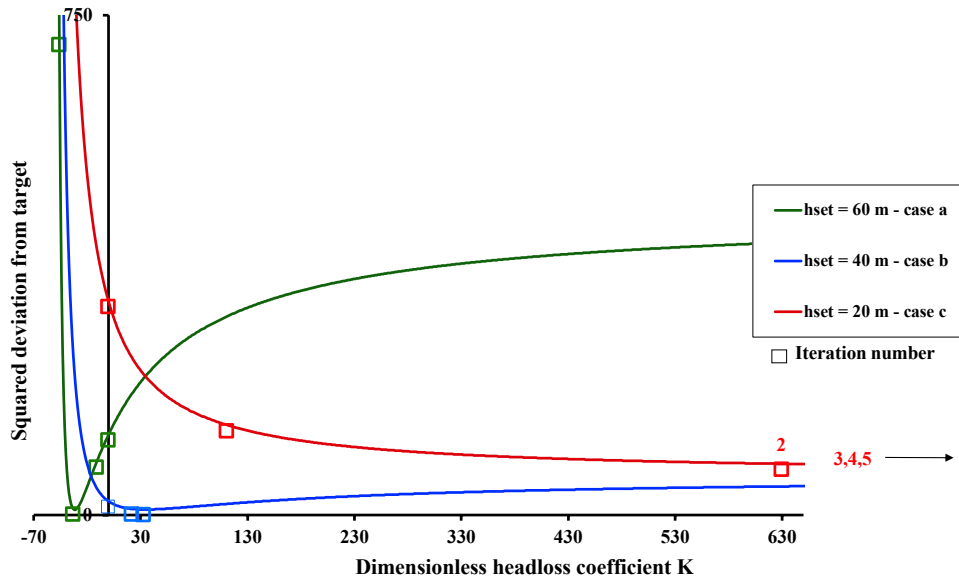


FIGURE 2.3 – Performance de l’algorithme équation (2.5) à chaque itération.

## 2.3 Calage ou identification des paramètres

Les paramètres de réseaux qui sont utilisés dans les modèles hydrauliques sont souvent incertains. Des observations ou mesures hydrauliques (pressions, débits, niveaux de réservoir, demandes, *etc.*) peuvent être utilisées pour caler les paramètres du modèle et estimer l’état inconnu du réseau. Carpentier and Cohen [72] ont défini l’observabilité comme la capacité à déterminer si l’ensemble des mesures disponibles apporte suffisamment d’information pour l’estimation d’état. Ils définissent deux niveaux d’observabilité, l’un topologique qui utilise la théorie des graphes, et l’autre algébrique qui analyse la matrice de sensibilité. La qualité de l’estimation de ces paramètres, qui conditionne la qualité des prédictions, dépend de la position, du nombre et de la nature des mesures. Ce choix doit garantir l’observabilité du réseau mais aussi empêcher que de petites erreurs de mesure ne résultent en une estimation incorrecte des paramètres [4].

### 2.3.1 Identification de paramètres hydrauliques par résolution d'un problème des moindres carrés

L'optimisation multi-objectif a été proposée pour le calage de paramètres des modèles hydrauliques [73, 74]. Elle reste particulièrement bien adaptée pour une résolution par algorithmes évolutionnaires qui génèrent des fronts de Pareto. Les solutions sont plus faciles à implémenter, plus flexibles sur les conditions de régularité et sur la définition des variables, mais demeurent souvent sous-optimales, avec moins de pouvoir prédictif et sont coûteuses en calcul. Une formulation des moindres carrés, laquelle minimise les écarts entre valeurs prédites et observations, est une approche standard mono-objectif pour des problèmes surdéterminés. La pondération des résidus permet de tenir compte des erreurs de mesures. Lorsque cette erreur suit une loi normale, le problème de minimisation des moindres carrés pondérés WLS (Weighted Least Squares) correspond à la maximisation d'une fonction de vraisemblance (l'estimateur est donc asymptotiquement efficace). Le problème WLS se définit comme :

$$\min_{\mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{S}\mathbf{y}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{z}(t))^T \mathbf{W} (\mathbf{S}\mathbf{y}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{z}(t)) dt \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur des paramètres à déterminer ;  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$  est la prédiction hydraulique, implicitement définie par le système (1.6) ;  $\mathbf{S}$  est la matrice de sélection des composantes mesurées du vecteur d'état ;  $\mathbf{z}$  est le vecteur des mesures ; et  $\mathbf{W}$  est une matrice poids, diagonale. La plupart des auteurs ont considéré une forme plus simple de (WLS) sans la dépendance en temps ; par exemple, Kapelan *et al.* [75] ont simplifié au cas permanent, et Piller [19] a utilisé une formule de quadrature pour l'intégrale en supposant une simulation pseudo-transitoire (une suite temporelle de calculs permanents).

Preis *et al.* [76] ont utilisé une fonction de Huber (voir Fig. 2.4) pour modifier le critère des moindres carrés équation (2.6) en présence de résidus élevés pour obtenir des écarts de moindres valeurs absolues ( $\ell_1$ -norm). De cette façon, l'estimation de paramètres est plus robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes (outliers). Ils résolvent par algorithmes génétiques (GA) et simplifient leur réseau pour accélérer la résolution et pour permettre la surveillance pseudo temps réel de la demande. Les méthodes de résolution de type gradient (qui utilisent les dérivées du critère WLS) sont beaucoup plus efficaces en nombre d'itérations ; la méthode de LM a été appliquée avec succès pour résoudre des problèmes de calage WLS pour des réseaux de distribution d'eau [19]. Cependant, comme le critère WLS peut posséder plusieurs minima locaux (et maxima), un algorithme GA peut être préféré en première étape dans une approche hybride GA/LM pour se rapprocher de la solution globale [77]. Dans cette situation, Piller *et al.* [7] proposent de convexifier le critère WLS en ajoutant un terme de régularisation de Tikhonov qui pénalise l'éloignement du



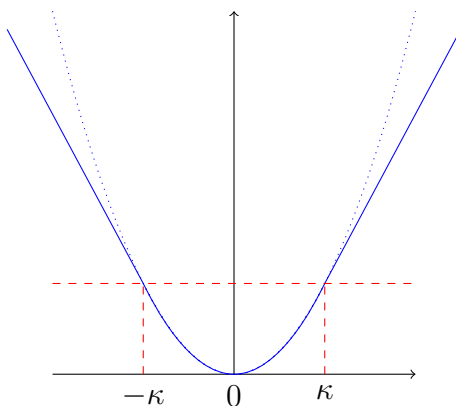


FIGURE 2.4 – Représentation du critère d’Huber ; pour de petits résidus  $R \leq \kappa$  une fonction quadratique des résidus ; pour de grands résidus le critère des moindres valeurs absolues

voisinage d’une solution a priori.

Sans perte de généralité et dans un souci de simplicité, nous focaliserons la suite de la section sur le calage de la demande. Ceci présente l’avantage d’avoir, pour le problème pseudo-transitoire sur une période d’observation ou en temps réel, la décomposition en sous-problèmes indépendants pour le calcul permanent dès lors que la régulation et les niveaux de réservoirs sont observés, ce que nous supposerons. Pour la calage de paramètres ne variant pas avec le temps sur un échelle d’observation courte, comme les coefficients de rugosité, nous référons à [19].

Sur la base de l’occupation des locaux et de l’analyse des relevés de compteurs, les consommateurs peuvent être regroupés, selon leurs caractéristiques, en plusieurs classes avec le même coefficient de demande dans une courbe temporelle de classe (en général une fonction en escalier). Ceci réalise une réduction significative du nombre de paramètres inconnus. Par exemple, on utilise habituellement les classes de consommateurs domestiques, celle des résidentiels et plusieurs industriels ou gros consommateurs (hôpital, écoles, *etc.*). Alors, la dépendance entre le vecteur de demande nodale et celui des classes de demande est la suivante :

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{K}_D \mathbf{\Delta}(t) \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{d}$  est le vecteur des demandes agrégées nodales,  $\mathbf{K}_D$  est la matrice, de taille  $(nj, nc)$ , d’appartenance aux  $nc$  classes de demande, et  $\mathbf{\Delta}$  est le vecteur de classe de demande.

*Remarque* (Sur les classes de demande). L’équation (2.7) consiste à simplifier la réalité, puisqu’elle suppose que chaque consommateur à l’intérieur d’une même classe consommera le même débit moyen instantanément. Des alterna-

tives existent principalement en utilisant la modélisation stochastique. (2.7) présente l'avantage de donner de très bonnes prédictions pour les conduites principales pour lesquelles la demande s'accumule et sur lesquelles sont placés les capteurs et les appareils de mesure.

L'objectif du calage de la demande consiste à ajuster la demande nodale d'un modèle hydraulique de réseau pour coller au mieux à un jeu de données. Soit le modèle de régression non-linéaire suivant :

$$z_i = y_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{x} = \Delta$  est le vecteur des paramètres à caler (ici les classes de demande à un temps donnée), et  $\varepsilon_i$  est un terme d'erreur gaussien d'espérance nulle et d'écart type  $\sigma_i$ .

Un résidu est défini comme la différence entre la valeur observée et la valeur prédite par le modèle. Un résidu réduit est un résidu divisé par l'écart type correspondant. Nous supposons que ces derniers sont *iid* et suivent des distributions  $N(0, 1)$ . Sommer les résidus réduits au carré consiste à calculer le critère des moindres carrés avec poids.

**Définition 2.3.** Le problème WLS avec des contraintes de bornes (box-constraint) pour le calage de paramètres consiste à chercher un minimiseur du critère différentiable :

$$\min_{\mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}} f(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m H_{\kappa} \left( \frac{y_i(\mathbf{x}) - z_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_2^2 \quad (2.9)$$

où à la place du critère traditionnel des moindres carrés, la fonction de Huber sur le résidu pondéré (WH) est utilisée ;  $H_{\kappa}$  est la fonction de Huber avec paramètre  $\kappa$  (voir Figure 2.4) ;  $\mathbf{x}^0$  est une estimation a priori de  $\mathbf{x}$  (*e.g.* valeur précédente dans un calcul pseudo transitoire) et  $\alpha$  est le coefficient de régularisation de Tikhonov. Pour un  $\alpha$  suffisamment large, la solution WLS sera pénalisée en s'écartant de  $\mathbf{x}^0$ . Cette régularisation sera utilisée si la solution (pour  $\alpha = 0$ ) n'est pas satisfaisante.

*Remarque* (Intérêt des contraintes de bornes). L'intérêt des contraintes de bornes pour  $\mathbf{x}$  est multiple : l'ensemble admissible des solutions est réduit aux solutions physiques ; Il y a existence de la solution par le théorème de Weierstrass ou "des bornes atteintes" qui énonce que toute fonction réelle continue sur un compact atteint ses bornes ; celles-ci peuvent également être choisies pour correspondre à un intervalle de confiance à un certain risque (*e.g.* 99%).

Piller *et al.* [78] ont proposé d'utiliser une méthode de type gradient pour résoudre le problème équation (2.9). L'algorithme état de l'art pour résoudre un problème différentiable des moindres carrés est celui de Levenberg-Marquardt (une version projetée a déjà été introduite pour modéliser les vannes PRD

équation (2.5)). C'est une méthode itérative, qui calcule le gradient de  $f$  et une estimation de la matrice hessienne pour le point courant  $\mathbf{x}^k$ .

Le gradient de  $f$  en  $\mathbf{x}^k$  est :

$$\nabla f^k = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}^k) + \alpha (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0)$$

où  $\mathbf{W}$  est la matrice poids (ici diagonale, avec pour éléments diagonaux, les inverses des écarts types au carré) ;  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{S} \partial_x \mathbf{y}(\mathbf{x}^k)$  est la matrice jacobienne de la fonction de prédiction en  $\mathbf{x}^k$ , avec  $\partial_x \mathbf{y}$  comme dans (1.26) et (1.27) en utilisant la post-multiplication  $\mathbf{P} = \mathbf{K}_D$  ; et  $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}^k)$  est le  $(m,1)$ -vecteur des résidus non réduits tronqués définis comme suit :

$$\begin{cases} \left[ \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}^k) \right]_i = [\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}]_i, & \text{if } |[\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}]_i| \leq \kappa \sigma_i \\ \left[ \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}^k) \right]_i = \kappa \sigma_i \text{sign}([\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}]_i), & \text{if } |[\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}]_i| > \kappa \sigma_i \end{cases}$$

**Propriété 2.3** ( $\mathbf{J}$  est de plein rang le nombre de paramètres à caler). Dans cette recherche, un choix approprié d'emplacement de mesures (*i.e.*  $\mathbf{S}$ ) en relation avec la réduction des inconnus (équation (2.7)) garantit que la jacobienne  $\mathbf{J}$  est de plein rang, le nombre de ses colonnes  $nc$  (le nombre de paramètres). L'obtention d'un emplacement optimal de mesures pour le calage de la demande est décrit dans la section 2.4.

L'estimation de la hessienne prend la forme de la matrice, symétrique, définie, positive, suivante :

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}^k) + \alpha \mathbf{I}_{nc} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}^k) + \alpha \mathbf{I}_{nc} \quad (2.10)$$

où  $\tilde{\mathbf{J}}$  est donnée par :

$$\begin{cases} \left[ \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}^k) \right]_{ij} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)]_{ij}, & \text{if } |[\mathbf{S}\mathbf{y}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}]_i| \leq \kappa \sigma_i, \quad j = 1, \dots, nc \\ \left[ \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}^k) \right]_{ij} = 0, & \text{else} \end{cases}$$

**Propriété 2.4** ( $\mathbf{H}_k$  est une matrice symétrique, définie, positive). Si les résidus en  $\mathbf{x}_k$  sont proches de zéro alors  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}^k)$ , et l'équation (2.10) est une bonne approximation de la matrice hessienne puisque les termes manquants et tronqués sont les dérivées secondes multipliées par les résidus. Comme la jacobienne est de plein rang la taille de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{H}_k$  est inversible (même pour de petites valeurs de  $\alpha$  si les résidus sont suffisamment petits).

Les contraintes de borne sont traitées par un mécanisme de saturation / désaturation, lequel peut saturer un élément de  $\mathbf{x}$  qui tendrait à dépasser ou s'approcher des limites inférieures et supérieures pour qu'il soit figé à la valeur

de borne jusqu'à convergence (*i.e.* saturé). Alors, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour l'optimalité sont vérifiées pour 1) stopper les itérations si tous les multiplicateurs de Lagrange pour les composantes saturés sont positifs ou nuls, ou 2) continuer avec la composante désaturée (ou libérée) pour le plus grand des multiplicateurs négatifs.

L'algorithme de LM projeté consiste, dans sa forme la plus simple, à résoudre le système linéaire :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1} \mathbf{C}_k \nabla f_k \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{C}_k$  est la matrice de sélection pour les composantes non saturées  $\mathbf{x}$  qui sont les seules autorisées à changer à ce niveau. Cela revient à considérer seulement les lignes et les colonnes de la matrice hessienne pour les composantes non saturées. Cette version d'algorithme avec  $\mathbf{H}_k$  donnée par l'équation (2.10) correspond à la méthode de Gauss-Newton. Cette méthode de projection peut être regardée comme du second ordre puisque la direction de recherche résultante inclut des informations sur la hessienne.

Néanmoins, cela peut converger lentement ou bien excéder le nombre maximal d'itérations, si l'estimation initiale est loin du minimum global ou si la matrice hessienne  $\mathbf{H}_k$  est mal conditionnée. Pour remédier à ce problème, Marquardt a proposé de pivoter en amortissant la direction de descente à l'aide d'un paramètre de régularisation et de faire une mise à l'échelle du gradient selon la courbure pour qu'il y ait un mouvement plus large le long de directions pour lesquelles le gradient est plus petit (on recherche la direction de descente de la plus forte pente quand il y a un problème). Aussi la hessienne est maintenant calculée par :

$$\mathbf{H}_k(\lambda) = \mathbf{H}_k + \lambda [\mathbf{diag}(\mathbf{H}_k) + \phi \mathbf{I}_{nc}] \quad (2.12)$$

où  $\phi$  est un paramètre positif et  $\lambda$  est un facteur de régularisation ou d'amortissement, lequel est ajusté pour être le plus petit possible (pour atteindre la convergence quadratique) et suffisamment large pour assurer que la hessienne  $\mathbf{H}_k$  soit inversible numériquement et que le critère à minimiser décroisse suffisamment (c'est différent de la recherche linéaire pour laquelle la direction de recherche ne change pas). L'itération de LM avec l'équation (2.12) peut être interprétée comme un algorithme à régions de confiance qui essaie d'approcher au mieux le critère des moindres carrés par une forme quadratique à laquelle est ajouté une surface quadratique centrée en  $\mathbf{x}_k$ . En fait, il est équivalent de résoudre l'équation (2.11) ou bien le problème quadratique suivant :

$$\min_{\mathbf{B}_k(\mathbf{x}-\mathbf{x}^k)=\mathbf{0}} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \mathbf{H}_k(\lambda) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \nabla f_k^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \right)$$

où  $\mathbf{B}_k$  est la matrice de sélection pour les composantes saturées de  $\mathbf{x}$  (*i.e.* pour lesquelles les bornes sont atteintes).

### 2.3.2 Pistes pour remédier à un mauvais conditionnement du problème ou à un manque de mesure

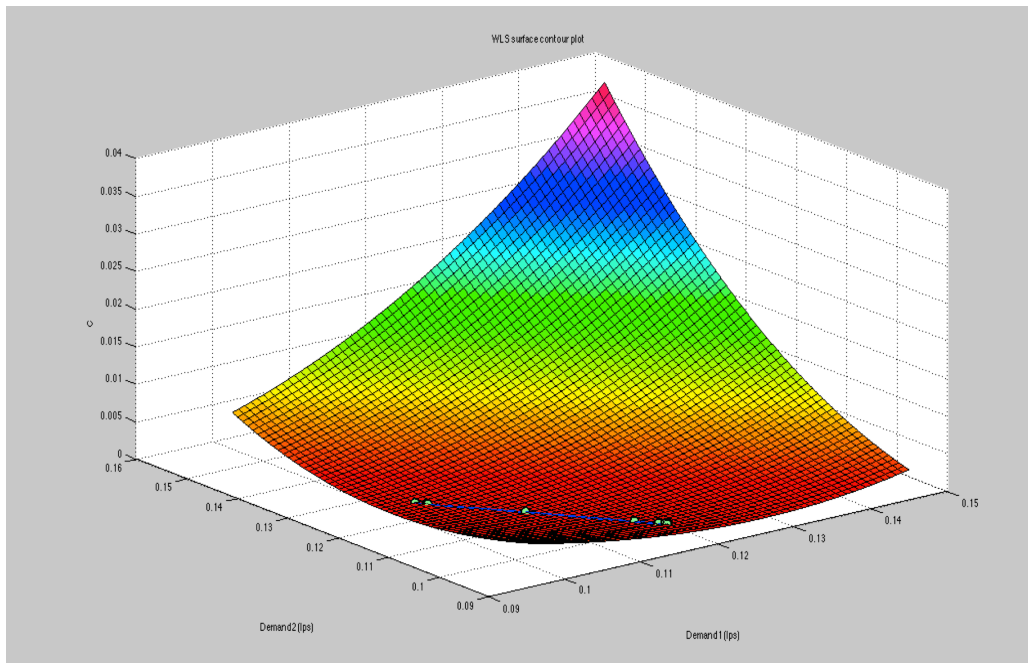


FIGURE 2.5 – Exemple d’un problème WLS mal conditionné pour l’estimation de la demande.

Additionnellement, pour des **réseaux pathologiques** (par exemple, sans perte de charge significative), le problème WLS équation (2.9) peut être mal conditionné pour une période de temps particulière. Un exemple ci-après est développé pour lequel les mesures de hauteur de pression et la côte sol sont précises au centimètre près (une excellente et plutôt inattendue précision) ; la surface WLS est très plate dans une région assez large autour de la solution exacte, ce qui correspond à l’exemple de la Figure 2.5. Il n’y a pas de différence significative pour la région en rouge (le critère est proche de zéro et  $< 1E - 5$ ), ainsi si on démarre l’algorithme de LM avec la solution exacte ( $\Delta_1 = 0,12$  l/s and  $\Delta_2 = 0,1$  l/s), à cause de l’erreur de troncature (même si elle est petite), après 6 itérations, il converge vers une autre solution qui est relativement

différente de la solution exacte (20% ), mais qui est optimale pour le problème WLS.

Ceci explique pourquoi l'estimation ponctuelle n'est pas suffisante et une **estimation par intervalle** peut aider dans ce contexte. Cette dernière reflète le niveau de confiance qu'il y a dans l'estimation. En utilisant la formule de Taylor, il est possible [78] de dériver l'influence de l'erreur de mesure sur l'estimation :

$$\delta \mathbf{x}(\boldsymbol{\varepsilon}) \triangleq \mathbf{x}_\varepsilon - \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{W}^{0.5} \mathbf{J})^+ (\mathbf{W}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.13)$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}$  l'estimation WLS sans erreur de mesure et  $\mathbf{x}_\varepsilon$  l'estimation WLS du premier ordre en cas d'erreur de mesure  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Ceci est valide dans le contexte de l'utilisation de la fonction de Huber si tous les résidus sont suffisamment petits à l'optimum pour ne plus dépendre de  $\kappa$  et nous prenons  $\alpha = 0$ .

L'équation (2.13) conduit à l'estimation par intervalle à 99% suivante (pour  $|\varepsilon_i| \leq 3\sigma_i$ ) :

$$\left| [\delta \mathbf{x}]_j \right| \leq 3 \sum_{i=1}^m |\mathbf{S}_{ji}| \text{ with } \mathbf{S} = (\mathbf{W}^{0.5} \mathbf{J})^+, j = 1, \dots, nc \quad (2.14)$$

Nous supposons ici que les  $\sigma_i$  de population sont connus et utilisés pour la pondération (réduction) des résidus. Sinon, il est possible d'étendre l'équation (2.14), en supposant que  $\sigma_i = \sigma \Delta y_i$ , avec  $\Delta y_i$  la confiance que nous avons pour la  $i$ -ème mesure à un certain degré. Les poids dans l'équation (2.9) doivent être remplacés par les  $\Delta y_i$ ; et  $\sigma$  peut être estimé sur la base du carré moyen résiduel (*i.e.* la somme des carrés résiduels divisée par le nombre de degrés de liberté). Ainsi, l'équation (2.14) peut être généralisée par :

$$\left| [\delta \mathbf{x}]_j \right| \leq 3s \sum_{i=1}^m |\mathbf{S}_{ji}| \quad (2.15)$$

avec  $s = f(\hat{\mathbf{x}})/(m - nc)$  l'estimation de  $\sigma$ . Dans le contexte du calage en ligne,  $\sigma$  peut être estimé pour les premières heures, alors l'estimation WLS avec les poids connus et l'estimation par intervalle équation (2.14) peuvent être utilisées avec succès.

*Remarque* (Résolution du problème indéterminé en utilisant des algorithmes génétiques). La méthode développée pour le calage cherche à définir un problème des moindres carrés bien posé (au sens d'Hadamard), par régularisation et convexification du problème, en optimisant l'emplacement des mesures et en contraignant les solutions à vivre dans un hyperplan particulier, par exemple celui des informations disponibles a priori. Il est cependant possible [79, 80] de caler les classes de demande sous une condition de problème inverse non bien posé, dans le sens où il n'y a pas unicité de la solution quand le nombre de mesures est insuffisant. Pour cette coopération avec l'Université d'Adélaïde, dans

le cadre de la thèse de Nhu Do, un problème des moindres carrés avec variables de décision en nombres entiers et une résolution par algorithme GA ont été expérimentés. Les résultats montrent que l'état hydraulique non mesuré peut être estimé en moyennant plusieurs optimisations successives par GA. Il est également remarquable que l'emplacement des mesures influence fortement la performance du modèle GA.

### 2.3.3 Application au calage de la demande domestique pour un réseau réel

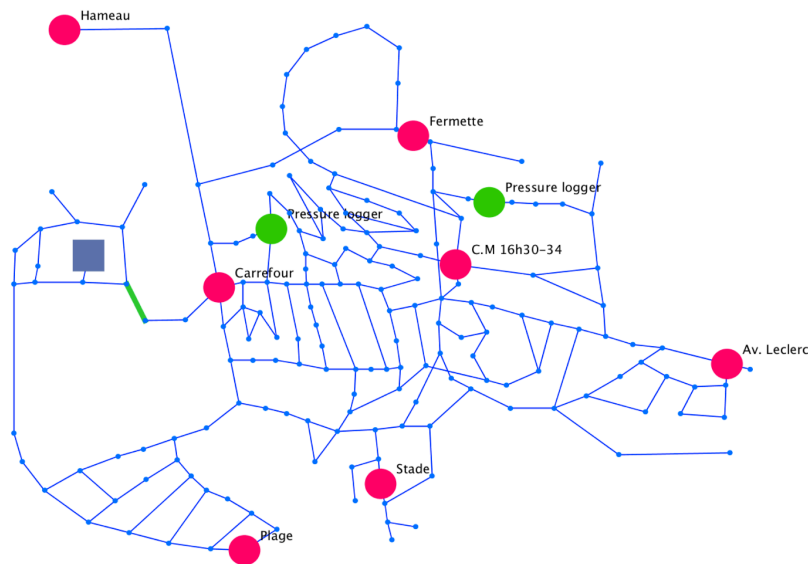


FIGURE 2.6 – Modèle *Porteau* du réseau # 3 : 1 réservoir, 183 nœuds jonctions, 231 arcs, et 7 ouvertures/fermetures de bornes d'incendie en rouge toutes les 20 min.

*Application 2.2.* Nous présentons ici les résultats pour le calage de la demande d'un réseau réel de taille moyenne. Il y a à la fois présence d'erreur du modèle, et d'erreurs de mesure. Des mesures de débit et charge sont obtenues pour une période de deux heures et vingt minutes.

Le graphe du réseau est représenté Figure 2.6 ; il se compose de 231 arcs, 183 nœuds jonctions et 1 nœud source réservoir ; il y a 49 mailles indépendantes ; La longueur des conduites du réseau (hors branchements) est approximativement de 38 km. Il y a quatre classes de rugosités qui correspondent à trois matériaux différents (polychlorure de vinyle, fonte grise et fonte ductile) et une zone problématique en fonte. Les coefficients d'Hazen-Williams ont été calibrés pour cette campagne de mesure et approximés par : ( $C_{PVC} = 131,65$  ;  $C_{CI} = 86,75$  ;

## 2. Problèmes inverses associés

$C_{DI} = 82,9$ ;  $C_{PB} = 72,95$ ). Une (classe de) demande domestique pour 2562 abonnés est à caler pour sept périodes différentes pour lesquelles des poteaux d'incendie ont été ouverts puis fermés (pour créer des pertes de charge significatives par période de 15 minutes). Les niveaux du réservoir, les débits en tête de réseau et deux capteurs de pression fixes sont enregistrés pour toute la campagne de mesures (en vert dans la Figure 2.6). En plus, la pression et le débit au poteau d'incendie ouvert sont mesurés.

TABLE 2.1 – Résultats à chaque itération pour le calage OLS de la demande domestique du réseau 3; la demande *per capita* est en ml/s.

iter	nbfct	nbgrad	f(x)	$\ \nabla f\ $	LM $\lambda$	$\Delta(t_1)$	$\Delta(t_2)$	$\Delta(t_3)$	$\Delta(t_4)$	$\Delta(t_5)$	$\Delta(t_6)$	$\Delta(t_7)$
0	1	1	257,70	31999,5	0,01	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0
1	2	2	95,62	1435,83	0,004	6,3	4,0	1,7	3,8	2,9	7,2	7,6
2	3	3	95,41	18,4558	0,0016	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5
3	4	4	95,41	0,43004	0,00064	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5
3	5	4	95,41	0,43004	<b>0,0064</b>	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5
3	6	4	95,41	0,43004	<b>0,064</b>	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5
3	7	4	95,41	0,43004	<b>0,64</b>	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5
3	8	4	95,41	0,43004	<b>6,4</b>	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5
3	9	4	95,41	0,43004	<b>64</b>	6,2	4,0	1,6	3,8	2,9	7,2	7,5

Nous résolvons en premier le problème WLS pour rechercher la demande domestique qui mène à la meilleure correspondance aux mesures pour la période de surveillance de deux heures. Tous les poids sont pris à 1,  $\kappa = M$  un grand nombre et  $\alpha = 0$ , pour que le critère soit celui des moindres carrés ordinaire (OLS, Ordinary Least Squares). La borne inférieure de la demande est fixée à 0 :  $x^{min} = 0$  l/s et  $x^{max} = 1$  l/s.

TABLE 2.2 – Intervalles de confiance pour la classe de demande domestique pour les sept périodes de mesure et le réseau 3.

Demande domestique	gradient local
$\Delta(t_1) = 0,0062 \pm 0,0020$ l/s	0,036952
$\Delta(t_2) = 0,0040 \pm 0,0022$ l/s	-0,000089
$\Delta(t_3) = 0,0016 \pm 0,0019$ l/s	-0,001057
$\Delta(t_4) = 0,0038 \pm 0,0021$ l/s	0,000869
$\Delta(t_5) = 0,0029 \pm 0,0020$ l/s	0,039451
$\Delta(t_6) = 0,0072 \pm 0,0021$ l/s	-0,430042
$\Delta(t_7) = 0,0075 \pm 0,0019$ l/s	0,158449

La convergence est atteinte en trois itérations (voir Table 2.1) et à la dernière itération, il y a eu cinq sous-itérations pour lesquelles le facteur d'amor-



tissement LM a augmenté par un facteur 10, avec, à chaque fois, une nouvelle évaluation du critère OLS. La raison de ces cinq sous-itérations est que le critère OLS n'a pas décreu suffisamment alors que le gradient n'est pas nul. En conséquence, la direction de descente se réduit et tourne à chaque fois que le facteur LM augmente pour s'approcher de celle du gradient.

L'intervalle de confiance à 99% Table 2.2 est calculé en utilisant l'équation (2.15) avec l'estimation de l'écart type  $s = 2,1315$ . Nous pouvons remarquer que pour la période  $t_3$ , la demande domestique n'est pas significativement différente de 0.

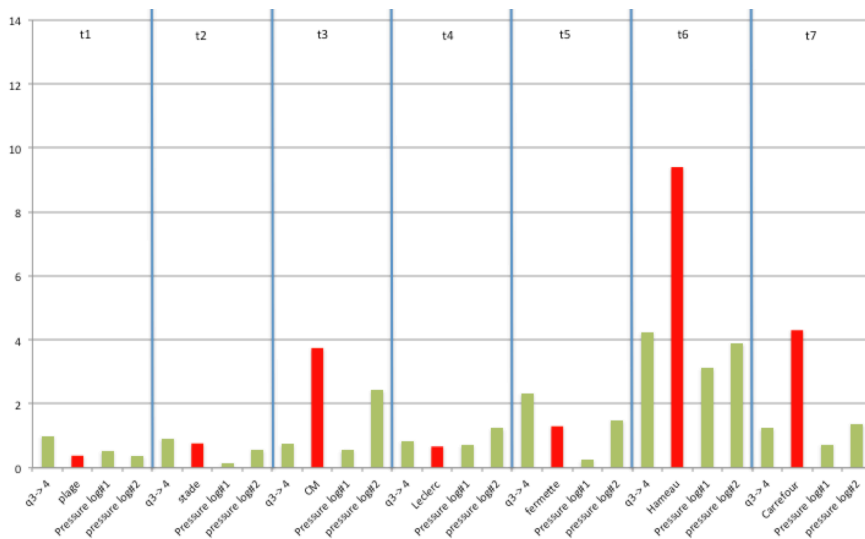


FIGURE 2.7 – Les 28 résidus en valeur absolue pour le calage OLS du réseau #3 : erreur absolue moyenne 1,76 ; erreur absolue minimale 0,16 ; erreur absolue maximale 9,4.

Pour les 28 valeurs absolues des résidus sur la Figure 2.7 (OLS estimation), nous pouvons observer que certains résidus sont conséquents aux périodes  $t_3$ ,  $t_6$  et  $t_7$ . Une pression mesurée dans un voisinage du poteau d'incendie (chez l'habitant) avec moins de précision (ou un biais pour la côte sol) pourrait expliquer les larges résidus en rouge. De plus, les différences (échelles hétérogènes petites et grandes) dans les résidus entre les différentes périodes ont pu causer les sous-itérations additionnelles de la Table 2.1.

Comme les résultats sont satisfaisants pour les deux premières périodes, l'écart type est estimé pour les périodes  $t_1$  et  $t_2$ , ce qui donne  $\hat{\sigma} = 0,53$ . Il y a suffisamment de mesures pour cela (*i.e.* par rapport au nombre de degrés de liberté,  $m = 8$  et  $nc = 2$ ). Cette mesure de dispersion sur les mesures (1 débit, 2 pressions fixes et la pression au voisinage de la borne incendie ouverte, répété pour les deux périodes) est adimensionnelle. Les sept problèmes inverses aux sept périodes  $t_1$  à  $t_7$  sont résolus pour la formulation WH (avec la fonction

## 2. Problèmes inverses associés

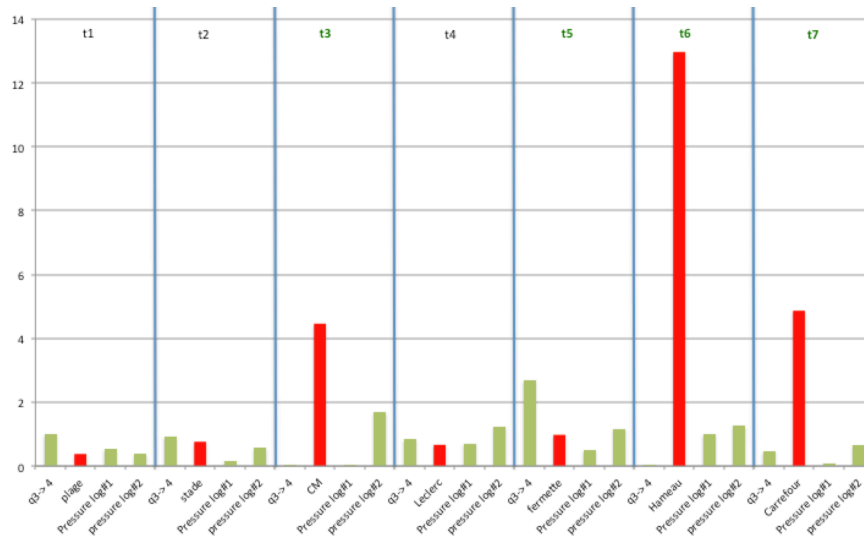


FIGURE 2.8 – Les 28 résidus en valeur absolue pour le calage WH du réseau #3 : erreur absolue moyenne 1,47 ; erreur absolue minimale 0,025 ; erreur absolue maximale 13,0.

de Huber), en considérant  $1/0,53$  comme poids, et la fonction de Huber (avec  $\kappa = 3$ ) pour la robustesse sur les valeurs aberrantes (voir Fig. 2.4), encore avec  $\alpha = 0$ .

Les résultats sont présentés Figure 2.8. Il est intéressant de noter qu'il n'y a pas de changement pour les périodes  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_4$ . Par contre, pour les périodes  $t_3$ ,  $t_5$ ,  $t_6$  et  $t_7$ , plusieurs résidus ont diminué de façon drastique, alors que, un à deux par période ont augmenté. Avec la minimisation de la fonction Huber pondérée, la valeur absolue moyenne des résidus non réduits a décréu de 1,76 à 1,47 et la valeur absolue minimale aussi de 0,16 à 0,025. La valeur absolue maximale sur les résidus non réduits a augmenté de 9,4 à 13. L'ajustement global a augmenté le pouvoir prédictif au détriment de seulement quatre résidus, soit quatre valeurs aberrantes (outliers) plutôt que huit précédemment (une valeur mesurée de débit est considérée comme aberrante si son résidu est  $> 10\%$ ; pour une charge si le résidu est  $> 2$  mètres de colonne d'eau).

Le nombre d'itérations pour la convergence est le même pour les périodes  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_4$ . Il a été multiplié par deux à trois pour les périodes  $t_5$ ,  $t_6$  et  $t_7$  et par six pour la période  $t_3$ . Les estimations sont, certes, plus robustes mais la convergence demande plus d'itérations en présence de valeurs aberrantes car la fonction de Huber est seulement linéaire pour les grands résidus. Les estimations finales pour la demande domestique sont données dans la Table 2.3 ci-dessous :

Pour cette étude numérique, nous n'avons pas utilisé la régularisation de Tikhonov et des informations a priori ( $\alpha = 0$ ). Ceci peut être ajouté en cas de

TABLE 2.3 – Estimations WH par somme de Huber des résidus pondérés pour la demande domestique pour le réseau 3.

Temps	nbfct	nbgrad	Limite inf 99%	Demande domestique en ml/s	Limite sup 99%	Nombre de outliers
$t_1$	5	5	5,7	6,2	6,7	0
$t_2$	3	3	3,4	4,0	4,6	0
$t_3$	23	23	0,6	2,0	3,4	1
$t_4$	4	4	3,1	3,8	4,5	0
$t_5$	15	15	1,6	2,7	3,8	1
$t_6$	12	12	2,1	5,0	7,9	1
$t_7$	11	11	5,7	7,1	8,5	1

problèmes de convergence. Notre conclusion est que l’algorithme LM a convergé en moins de 25 itérations dans tous les cas, ce qui fait que la méthode est applicable pour des réseaux d’assez grande taille (*e.g.* 30000 nœuds) et pour le calage pseudo temps réel toutes les dix minutes.

## 2.4 Placement optimal de mesures pour identifier les paramètres

Une mesure imprécise à un emplacement critique peut complètement biaiser les estimations. Dans cette section, nous nous intéressons au choix de mesures qui conduit à l’erreur sur l’estimation minimale en présence d’une erreur de mesure avec une distribution statistique connue. Pour un tel choix de mesures, le problème du calage sera mieux conditionné, ce qui participe à l’effort de convexification du critère des moindres carrés.

Afin de pouvoir comparer plusieurs choix de mesures, l’équation de régression (2.8) est réécrite pour considérer un ensemble de mesures déterminé par la variable  $\mathbf{s}$  :

$$\mathbf{z}_s = \mathbf{S}\mathbf{y}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_s$$

où  $\mathbf{s}$  définit l’ensemble des observations en considération ; la matrice de sélection  $\mathbf{S}$  a la même définition que dans l’équation (2.6), pour sélectionner les  $m$  composantes de l’état indiquées par  $\mathbf{s}$  ;  $\mathbf{z}_s \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des réalisations ;  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{np+nj}$  est le vecteur des prédictions, charges nodales et débits des arcs, calculés à partir du modèle hydraulique (peuvent aussi être considérés les niveaux des réservoirs, les demandes nodales, *etc.*), et  $\boldsymbol{\varepsilon}_s \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d’erreurs que nous supposons distribué avec une moyenne  $\mathbf{0}_m$  et une matrice de variance-covariance  $\mathbf{V}_s$ . De façon plus explicite, nous supposons  $\mathbf{V}_s$  diagonale, de la forme :

$$\mathbf{V}_s = \sigma^2 \text{diag} (\Delta y_i^2) = \sigma^2 \mathbf{W}_s^{-1}$$

avec  $\Delta y_i$  le niveau de confiance que nous avons pour la  $i$ ème mesure (il peut dépendre de la nature de mesure), et  $\sigma$  est le coefficient de proportionnalité.

Intéressons-nous à l'influence de l'erreur de mesure sur l'estimation des moindres carrés, qui représente l'écart à la solution avec aucune erreur de mesure. Au premier ordre, nous avons déjà remarqué (2.13) que cette erreur d'estimation satisfaisait l'équation linéaire :

$$\delta \mathbf{x}_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s) = (\mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \mathbf{J}_s)^{-1} \mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s = (\mathbf{W}_s^{0.5} \mathbf{J}_s)^+ (\mathbf{W}_s^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}_s)$$

avec  $\mathbf{J}_s = \mathbf{S} \mathbf{J}(\mathbf{x}^0)$  la jacobienne de  $\mathbf{y}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  dont les lignes ont été sélectionnées par  $\mathbf{S}$ , et  $\mathbf{x}^0$  une estimation a priori de la solution.

Cette dernière expression permet d'interpréter la pseudo-inverse de la jacobienne comme la matrice de sensibilité de l'estimation des moindres carrés à l'erreur de mesure. Nous recherchons les choix de mesures qui permettent de minimiser une norme de l'erreur d'estimation. Pour toute p-norme induite, on obtient la majoration :

$$\|\delta \mathbf{x}_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s)\| \leq \|(\mathbf{W}_s^{0.5} \mathbf{J}_s)^+\| \|\mathbf{W}_s^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}_s\| \quad (2.16)$$

Pour des erreurs de mesures à l'intérieur d'un intervalle de confiance défini par les valeurs  $\Delta y_i$  (i.e. on astreint l'erreur à satisfaire  $\|\mathbf{W}_s^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}_s\| \leq k\sigma$ ), l'équation (2.16) conduit à la majoration de l'erreur d'estimation :

$$\|\delta \mathbf{x}_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s)\| \leq k\sigma \|(\mathbf{W}_s^{0.5} \mathbf{J}_s)^+\|$$

ce qui a été utilisé par Do *et al.* [81] pour quantifier les incertitudes d'un modèle de prédiction-correction de la demande en pseudo-temps réel en donnant une estimation par intervalle à un niveau de confiance donné.

Le cas particulier  $k\sigma = 1$  correspond aux  $\Delta y_i$  qui représentent la précision de mesure en valeur absolue (e.g. utilisation d'une loi uniforme). On obtient ainsi que les erreurs réduites sont dans la boule unité pour la norme utilisée. Pour la norme infinie :  $\|\mathbf{W}_s^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}_s\|_\infty \leq 1$ , [19] recherche un choix de mesure  $\mathbf{s}$  qui minimise le critère  $Z_\infty$  ( $p = \infty$ ) sous une condition de rang maximum pour la jacobienne, avec  $Z_p$  défini comme suit :

$$\min_{\{\mathbf{s} / \text{rank}(\mathbf{J}_s) = nc\}} Z_p(\mathbf{s}) \triangleq \|(\mathbf{W}_s^{0.5} \mathbf{J}_s \mathbf{E}_s)^+\|_p \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{E}_s$  permet d'équilibrer les colonnes de la jacobienne pour tenir compte de différences éventuelles de grandeurs parmi les composantes de  $\mathbf{x}^0$ .

La minimisation de  $Z_p$  revient à rechercher les lignes de la jacobienne des résidus pondérés qui, une fois extraites, conduisent à une pseudo-inverse de norme  $\ell_p$  minimale. Pour la norme infinie, on minimise ainsi le volume du plus grand hypercube contenant l'erreur d'estimation. La résolution par un algorithme glouton de ce problème de programmation non-linéaire en nombres

entiers s'est révélée très performante, souvent optimale et dans de rares cas légèrement sous-optimale. Un calcul récursif de la pseudo-inverse de la jacobienne a été mis en place. Comme on peut le voir sur la Figure 2.9, pour un réseau réel, une réduction drastique de l'erreur quadratique moyenne est observée en comparant à un choix non optimal d'expert.

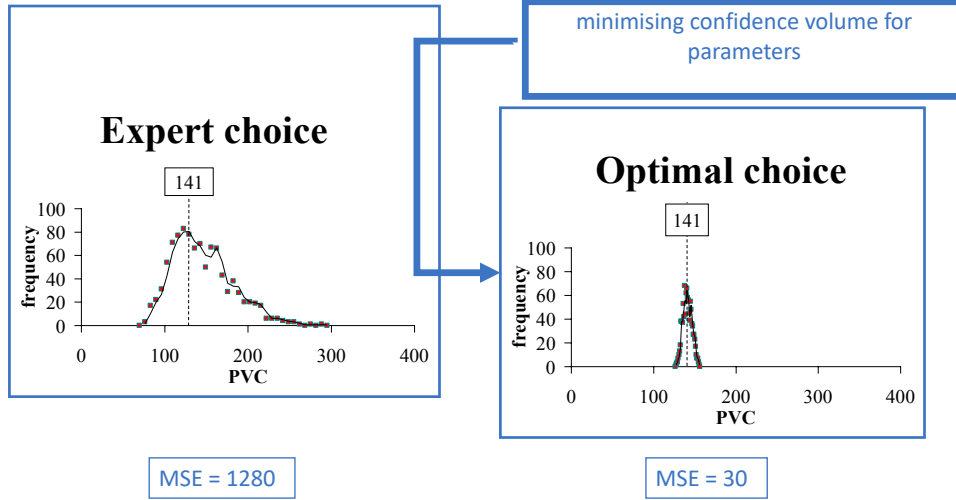


FIGURE 2.9 – Comparaison de deux choix de mesures pour la prédiction d'une classe de coefficient rugosité pour la formule d'Hazen-Williams - a) pour le choix donné par des experts, b) pour le choix optimal qui minimise le volume de confiance des paramètres.

Piller *et al.* [24] ont observé qu'une variété de métriques peuvent être appliquées pour décider des lignes à sélectionner. Par exemple, l'utilisation de la norme  $\ell_1$  conduit à la minimisation de  $Z_1$ , la sensibilité aux erreurs de mesure en valeur absolue moyenne, ce qui constitue une alternative à la minimisation de l'erreur maximale.

*Remarque.* La littérature est riche sur la conception de plans d'expérience optimaux (optimal design) en statistique et en sciences pour l'ingénieur (*e.g.* Wikipedia [82]). Les critères d'optimalité sont souvent basés sur l'estimation de la matrice de covariance de l'estimation des moindres carrés :

$$\mathbf{V}_{\hat{x}}(\mathbf{s}) = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \mathbf{J}_s)^{-1} \quad (2.18)$$

Ainsi, le critère de A-optimalité revient à minimiser la trace de la matrice de variance-covariance (minimisation de la variance moyenne des estimés) et celui de la D-optimalité maximise le déterminant de l'inverse de la matrice de variance-covariance (*i.e.* celui de la matrice d'information).

À notre connaissance, la minimisation du critère  $Z_p$  ne correspond pas à un critère de conception de plans d'expérience connu. Pourtant le calcul récursif

de la norme  $\ell_\infty$  ou  $\ell_1$  de la jacobienne est très facile et efficace par l'algorithme Greville (*e.g.* beaucoup plus efficace que le calcul récursif du déterminant de la matrice). Le fait que l'algorithme glouton pour résoudre l'équation (2.17) soit très performant offre une alternative au placement de mesures que nous avons adoptés.

On peut de plus observer que :

$$\mathbf{V}_{\delta \mathbf{x}_s} = (\mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \mathbf{J}_s)^{-1} \mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \mathbf{V}_s \mathbf{W}_s \mathbf{J}_s (\mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \mathbf{J}_s)^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{J}_s^T \mathbf{W}_s \mathbf{J}_s)^{-1}$$

et donc la variance de l'erreur d'estimation est aussi celle de l'estimation optimale, ce qui permet de comparer les différentes approches. D'autres perspectives de recherches pourraient être menées pour les comparer et identifier leurs mérites respectifs.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs problèmes inverses ont été explorés pour améliorer la résolution du problème de l'équilibrage hydraulique d'un réseau. Pour la modélisation des vannes de contrôle de la pression et pour le calage des paramètres du modèle hydraulique, une formulation sous la forme d'un problème des moindres carrés a été utilisée. Le problème du placement optimal de mesures a été en outre considéré pour minimiser l'influence de l'erreur de mesure sur l'estimation des paramètres.

Pour la prise en compte des vannes de contrôle, deux approches différentes sont entreprises. Les limiteurs de débit et les clapets sont modélisés en utilisant une perte de charge de pénalité si besoin, ce qui permet de ne pas recourir à l'optimisation et représente une accélération substantielle de calcul. Pour les stabilisateurs de pression, la résistance hydraulique de la vanne est calée au sens des moindres carrés pour que la charge au nœud de consigne soit la plus proche possible de la valeur cible, tout en étant bornée entre la valeur de résistance d'une vanne ouverte et celle d'une vanne fermée. Les multiplicateurs de Lagrange sur les bornes min et max indiquent si localement la vanne doit s'ouvrir ou se fermer pour stabiliser la consigne.

L'identification des paramètres d'un modèle de réseau peut s'avérer difficile en présence d'erreurs de mesure, voire d'erreurs de modèle importantes. Plusieurs minima locaux sont également possibles. L'approche adoptée ici est de convexifier le problème avec des informations a priori et de minimiser un critère différentiable sur un compact. La fonction de Huber du résidu réduit est choisie pour sa robustesse vis à vis des observations aberrantes. L'algorithme de Levenberg-Marquardt avec projection sur les contraintes de bornes est utilisé, avec un facteur d'amortissement sur la diagonale de la matrice hessienne du problème qui permet d'orienter la direction de recherche vers celle de la plus

forte pente, si besoin. Un résultat important est qu'il n'y a pas besoin d'avoir recours en général à la convexification quand est utilisé un choix optimal de mesure qui garantit l'observabilité.

La conception d'un plan d'expérience optimal est formulée pour minimiser un volume de confiance sur l'erreur d'estimation au sens des moindres carrés. Suivant la norme choisie, on minimisera le plus grand hypercube contenant l'erreur sur l'estimation ou bien l'erreur d'estimation moyenne. Un algorithme glouton en lien avec un calcul itératif de la pseudo-inverse de la matrice de sensibilité s'est révélé très performant et quasi-optimal.

# Chapitre 3

## Indicateurs de la qualité de l'eau

### 3.1 Introduction

La qualité de l'eau distribuée par un réseau AEP est le plus souvent évaluée par différents indicateurs, tels que le temps de séjour ou âge de l'eau, la provenance de nœuds du réseau (en général les ressources) et le résiduel de concentration en désinfectant. Ces indicateurs peuvent être obtenus en résolvant des modèles mathématiques qui dépendent d'estimations de paramètres physiques. Les paramètres cinétiques qui caractérisent les réactions du désinfectant au niveau de la paroi (wall) et dans l'écoulement (bulk) sont rarement connus avec précision. Pour pallier à ce problème, le calage des paramètres est requis et la sensibilité de la solution aux variations des paramètres doit être analysée. Plusieurs études ont porté sur la sensibilité de l'état hydraulique permanent [77, 83], pour le calage hydraulique des rugosités et des classes de demande [19] et pour la conception de plans d'échantillonnage optimaux pour mesurer la quantité et la qualité de l'eau [4, 5, 84].

**Mots clés** : Indicateurs de la qualité de l'eau ; transport ; splitting opérateur ; méthode des caractéristiques ; équations de sensibilité ; placement de capteurs ; lois de mélanges aux nœuds.

### 3.2 Équations d'advection-réaction avec un terme source

#### 3.2.1 Position du problème

La modélisation de la qualité de l'eau consiste à calculer les changements de ces trois indicateurs dans le temps et pour le graphe du réseau. Leur propagation revient à résoudre une équation d'advection-réaction pour chaque arc, dans un ordre particulier (des sources aux nœuds puits) et à utiliser une loi de



mélange aux nœuds pour propager les indicateurs aux arcs suivants. Les écoulements dans les conduites sont le plus souvent turbulents rugueux, aussi la dispersion hydrodynamique est négligée pour le calcul des ces indicateurs [85] (mais ce n'est pas le cas pour le suivi d'un produit chimique pathogène [86]). Dans ces conditions, soit  $F_j$  l'indicateur de la qualité dans l'arc  $j$ , il satisfait à l'équation aux dérivées partielles (EDP), mono-dimensionnelle et hyperbolique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t F(t, x) + U_j(t) \partial_x F(t, x) + R_j(F) = 0, \\ F(0, x) = F_{0,j}(x), \quad 0 \leq x \leq L_j, \\ F(t, 0) = \Phi_i(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $U_j(t)$  est la vitesse moyenne sur une section droite de l'arc  $j$ , laquelle a été calculée indépendamment, soit par le modèle hydraulique pseudo-transitoire ( $U_j$  est une fonction en escalier) soit par un solveur transitoire lent ;  $\Phi_i$  est la condition aux limites au nœud  $i$ , entrée  $x = 0$  ; la condition initiale est soit 0, soit égale à la solution permanente ; et le terme de réaction  $R_j(F)$  dépend de chaque indicateur et est explicité ci-dessous :

$$\begin{cases} R(C) = \beta C^\alpha(t, x) \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 1, & (3.2a) \\ R(A) = -1, & (3.2b) \\ R(P) = 0. & (3.2c) \end{cases}$$

avec, pour le résiduel en désinfectant l'équation (3.2a),  $\alpha$  l'ordre de réaction et  $\beta$  la constante de cinétique globale [87], l'équation (3.2b) pour la réaction de l'âge, et l'équation (3.2c) pour la provenance.

Alors, pour mettre à jour les conditions aux limites aux nœuds jonctions et aux nœuds réservoirs, nous considérons un mélange parfait qui soit complet et instantané. En réalité, un mélange imparfait peut être observé pour quelques géométries d'embranchement en croix ou en double T [88, 89] mais n'est pas considéré en général pour les indicateurs de la qualité de l'eau. Donc, les mélanges aux nœuds jonctions sont obtenus par la somme pondérée par les débits des indicateurs de la qualité de l'eau, nous écrivons pour le  $i$ -ème nœud :

$$\begin{cases} F_i(t) = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i^-} q_j F_j(t)}{\sum_{j \in \Gamma_i^-} q_j}, \\ F_i(0) = \Phi_i(0). \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $F_j(t)$  est la quantité d'intérêt donnée au nœud  $i$  au temps  $t$  pour l'arc  $j$  ;  $\Gamma_i^-$  est identique à l'équation (1.38) et  $q_j$  est le débit entrant au nœud  $i$  par

l'arc  $j$ . Pour les nœuds réservoirs, le bilan massique entrant ou sortant d'un réservoir à niveau variable s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{F}_i = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i^-} q_j (F_j - F_i)}{V_i} - R(F_i) \\ F_i(0) = \Phi_i(0) \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $F_i(t)$  est la valeur moyennée de l'indicateur à l'intérieur du réservoir  $i$ ;  $R(F_i)$  est le terme de réaction donné par l'équation (3.2).

Pour indiquer un intervalle pour l'âge de l'eau, nous calculons non seulement l'âge moyen par l'équation (3.3) mais aussi les valeurs maximales et minimales pour tout temps :

$$\begin{aligned} A_i^{upper} &= \max_{j \in \Gamma_i^-} A_j, \\ A_i^{lower} &= \min_{j \in \Gamma_i^-} A_j. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Plusieurs alternatives de résolution

Pour la résolution qualité, la méthode *Hybride* [90] qui est implémentée dans le logiciel *Porteau* est tout d'abord décrite. Cette méthode à pas fractionnaire (splitting temporel) associe une résolution par une méthode des caractéristiques (MOC) avec un  $\theta$ -schéma amont (*e.g.* différences finies du premier ordre en espace et Cranck-Nicholson avec  $\theta = 1/2$ ).

Posons  $n_j$ , le nombre de points intermédiaires sur l'arc  $j$ , choisi pour vérifier :

$$n_j \Delta t < \frac{L_j}{U_j^n} \leq (n_j + 1) \Delta t, \text{ avec } U_j^n \geq U_{\min} > 0$$

où  $U_{\min}$  (*e.g.* correspond à un temps de transit de 7 jours sur l'arc) est un seuil de vitesse pour décider s'il y a advection,  $L_j$  est la longueur de l'arc  $j$ ,  $\Delta t$  est le pas de temps de résolution transport choisi plus petit que le pas de temps hydraulique,  $U_j^n = U_j(t_n)$  est la vitesse permanente sur l'arc  $j$  pour le temps  $t_n$ . Choisissons  $\delta t \leq \Delta t$  le pas de temps intermédiaire et  $\delta x \leq L_j$  le pas de discrétisation spatial le long de l'arc  $j$  pour être :

$$\delta t = \frac{t_j^{transit}}{n_j + 1} = \frac{L_j}{(n_j + 1)U_j^n}, \quad \delta x = U_j^n \delta t = \frac{L_j}{(n_j + 1)}$$

Pour la première étape, il y a résolution exacte par la méthode MOC :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i+1}^{n+1/2} = C_i^n e^{-\beta\delta t}, \quad \alpha = 1 \\ C_{i+1}^{n+1/2} = ([C_i^n]^{1-\alpha} + (\alpha - 1)\beta\delta t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \alpha > 1 \\ A_{i+1}^{n+1/2} = A_i^n + \delta t \\ P_{i+1}^{n+1/2} = P_i^n \end{array} \right. \quad (3.5)$$

avec  $F_{i+1}^{n+1/2} = F(n\Delta t + \delta t, (i+1)\delta x)$ ,  $C$  pour la concentration en désinfectant,  $A$  pour l'âge de l'eau, et  $P$  pour la provenance.

Après quoi, pour la seconde étape, le  $\theta$ -schema amont est appliqué à  $\tau = \Delta t - \delta t$ , soit, si le terme de réaction est linéaire (concentration avec  $\alpha = 1$ , âge de l'eau et provenance) :

$$\begin{aligned} & \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_{i+1}^{n+1/2}}{\tau} + \theta U_j^n \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{\delta x} + \\ & (1 - \theta) U_j^n \frac{F_{i+1}^{n+1/2} - F_i^{n+1/2}}{\delta x} + \theta R_j(F_{i+1}^{n+1}) + (1 - \theta) R_j(F_{i+1}^{n+1/2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si le terme de réaction est non-linéaire, on utilise la méthode de Newton qui consiste à itérer sur  $m = 0, \dots, M$  :

$$\begin{aligned} & \frac{C_{i+1}^{n+1,m+1} - C_{i+1}^{n+1/2}}{\tau} + \theta U_j^n \frac{C_{i+1}^{n+1,m+1} - C_i^{n+1,m+1}}{\delta x} + \\ & (1 - \theta) U_j^n \frac{C_{i+1}^{n+1/2} - C_i^{n+1/2}}{\delta x} + \beta\theta \tilde{C}_{i+1}^{n+1,m+1} + \beta(1 - \theta) \tilde{C}_{i+1}^{n+1/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec  $C_{i+1}^{n+1,m+1}$  l'itéré de Newton, le premier itéré qui est fixé à  $C_{i+1}^{n+1,0} = C_{i+1}^{n+1/2}$  sert au calcul du premier terme linéarisé de réaction,  $\tilde{C}_{i+1}$  est le terme de réaction linéarisée par la formule de Taylor sur la fonction puissance :

$$\tilde{C}_{i+1} = [(1 - \alpha) C_{app}^\alpha + \alpha C_{app}^{\alpha-1} C_{i+1}]$$

et  $C_{app}$  est choisi pour être :

$$C_{app} = \omega C_{i+1}^{n+1,m} + (1 - \omega) C_{i+1}^{n+1/2}, \quad 0 < \omega < 1$$

où  $\omega$  est un coefficient de relaxation dans la méthode de Newton pour prévenir de cas de non-convergence (on peut trouver aussi une justification dans l'erreur de troncature).

La grille est montrée Figure 3.1. La méthode *Hybride* est d'autant plus précise que  $\tau$  est petit. La Figure 3.2, montre que si  $\Delta t$  divise parfaitement

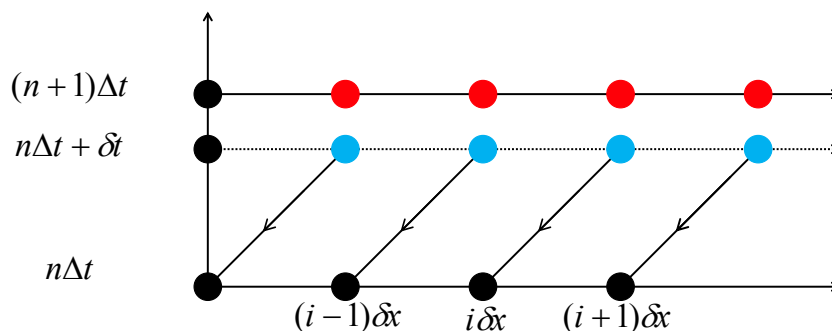


FIGURE 3.1 – Grille pour la méthode *Hybride* : en rouge les valeurs estimées par le  $\theta$ -schéma, en bleu les valeurs exactes calculées par MOC, et en noir les valeurs connues.

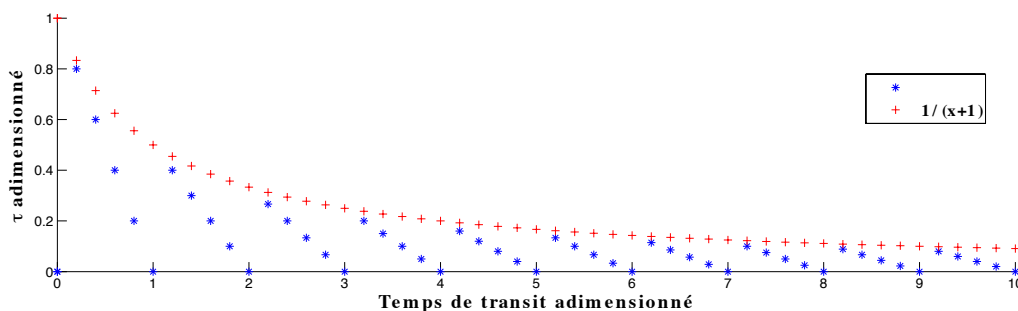


FIGURE 3.2 – Représentation de la variable  $\tau/\Delta t = 1 - \delta t/\Delta t$  de la méthode *Hybride* en fonction de  $t_j^{transit}/\Delta t$  :  $\tau$  correspond au pas de temps pour l'étape de Cranck-Nicholson, pour  $\tau = 0$  il y a résolution exacte.

$t_j^{transit}$  dans l'arc  $j$  alors  $\tau = 0$  et  $\tau$  adimensionné est majoré par  $1/(n_j + 1)$  soit  $0 \leq 1 - \delta t/\Delta t < 1/(n_j + 1)$ .

Dans Porteau, la valeur du pas de temps de calcul  $\Delta t$  est fixée par l'utilisateur, ce n'est donc pas la valeur optimale d'utilisation mais ce choix réalise un assez bon compromis.

Une deuxième méthode de résolution (appelée *Splitting-TVD*) qui permet de traiter des vitesses prédites par un modèle transitoire lent a été développée au cours de la thèse de Guillaume Gancel [91]. La méthode consiste à séparer l'opérateur d'advection du terme de réaction (operator splitting) afin de mieux les traiter séparément. Elle permet d'atteindre un ordre 2 pour des solutions régulières en réalisant un calcul fractionnaire en trois étapes, réaction pour un pas de  $\Delta t/2$ , puis advection pour  $\Delta t$ , et finalement réaction pour un pas de

### 3.2. Équations d'advection-réaction avec un terme source

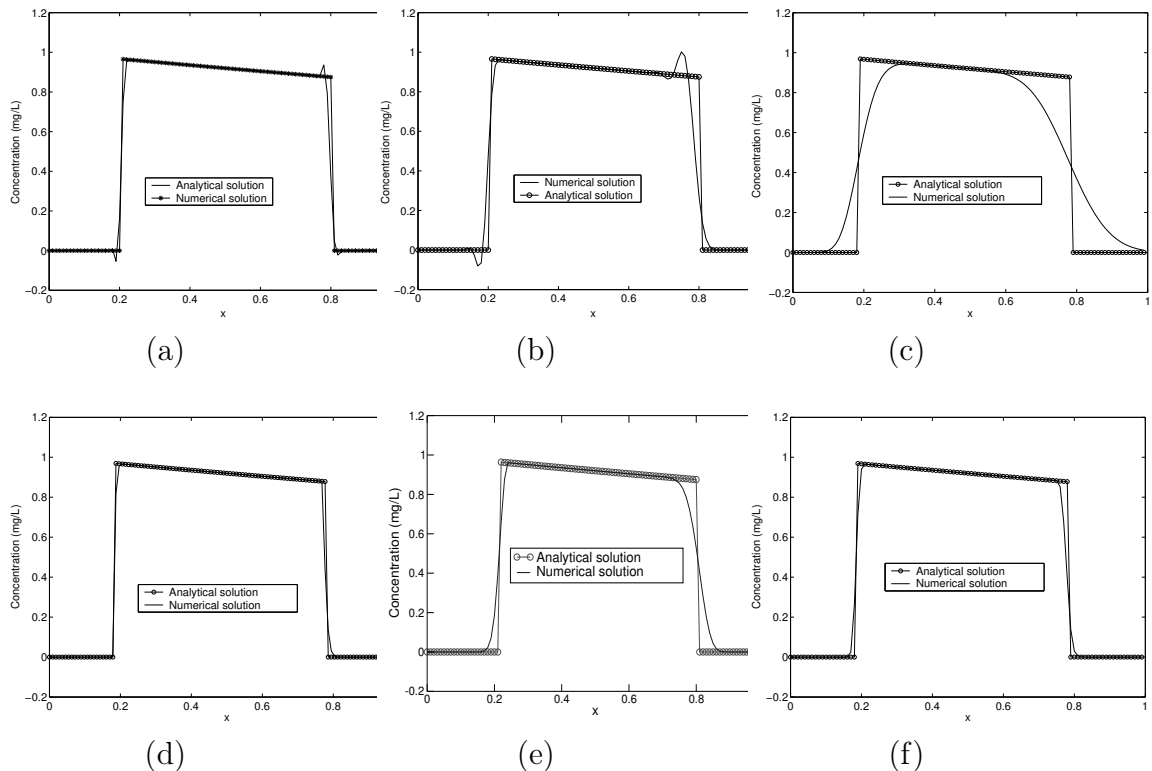


FIGURE 3.3 – Solution à un  $t$  fixe pour six différents schémas : Le schéma de *Holly-Preissmann* (a), le schéma de *Lax-Wendroff* (b), le  $\theta$ -schéma (c), le schéma *Hybride* (d), le schéma de *Van Leer* (e), et le schéma *Splitting-TVD* (f).

$\Delta t/2$ .

Cette méthode [90, 92] permet de traiter également les équations de sensibilité qui ont la même structure que le problème direct, mais ajoute un terme source à la réaction. Un schéma TVD (Total Variation Diminishing) eulérien, utilisant un schéma quatre points de Takacs rendu TVD et  $L^\infty$ -stable), a été choisi pour résoudre l'advection. Ceci permet de calculer des solutions discontinues sans oscillation. Un schéma de Runge-Kutta explicite du 4-ème ordre a été utilisé pour atteindre une bonne approximation de la réaction et de la source.

Ces deux schémas *Hybride* et *Splitting-TVD* ont été comparés aux quatre techniques standards : *Lax-Wendroff*,  $\theta$ -schéma avec  $\theta = 0, 5$ , *Holly-Preissmann* et *Van Leer*, sur un exemple de transport advectif simple.

Considérons un arc de longueur 500 m dans lequel est introduit un échelon unitaire de chlore ( $C = 1$  mg/l) d'une durée de  $T$  s avec une vitesse permanente ( $U = 0,5$  m/s). Une comparaison avec la solution exacte dans le cas linéaire est donnée Figure 3.3, où la discrétisation spatiale est de  $n_j = 100$  points de discrétisation (le pas adimensionnel est  $\Delta x = 0,01$ ).

La technique de *Holly-Preissmann* [93] qui est souvent utilisée pour les réseaux de distribution d'eau utilise une interpolation d'Hermite du 3-ème ordre pour interpoler sur le pied de la caractéristique. Cette méthode est très efficace mais possède deux inconvénients : son temps d'exécution et l'utilisation de la dérivée de la solution, ce qui peut créer des oscillations avec des solutions non régulières comme on peut le voir sur la Figure 3.3a. Le schéma de *Lax-Wendroff* Fig. 3.3b (de 2-ème ordre en temps et en espace et  $L^2$  stable) est efficace pour les solutions continues mais génère des dépassements "Overshooting" et "Undershooting" près des singularités. Le  $\theta$ -schéma (Fig. 3.3c) souffre d'une diffusion numérique importante et d'une condition de positivité qui peut être trop restrictive pour notre problème. La Figure 3.3d montre la solution avec la méthode *Hybride* qui se révèle la plus précise. Le schéma de Van Leer [94] conduit à une précision du 2-ème ordre (Fig. 3.3e), mais il est moins précis que les méthodes *Hybride* et *Splitting-TVD* Figures 3.3d et 3.3f, car il est plus diffusif.

Les deux approximations les plus précises sont données par le *Splitting-TVD* (Fig. 3.3f) et la méthode *Hybride* (Fig. 3.3d). La méthode *Hybride* est conçu pour une vitesse constante par morceau et  $\Delta t$  doit diviser le temps de transit de l'arc pour bénéficier de la résolution exacte MOC au mieux. Pour une vitesse transitoire lente variant continuellement et pouvant s'approcher de 0 la méthode *Splitting-TVD* est plus adaptée.

*Remarque* (Recherche d'unification des solveurs par changement de variables). Pillier and Tavard [95] ont introduit la température, moyennée sur la surface droite, comme 4-ème indicateur de la qualité de l'eau. Une équation de transport réaction est aussi à résoudre mais avec un terme de réaction différent. Les auteurs proposent de faire un changement de variable pour ne résoudre qu'avec une onde et proposent des formules de changement de variables et de mises à jour des conditions aux limites et initiales pour les quatre indicateurs. Ces travaux préliminaires sont à poursuivre, une instabilité numérique pouvant être observée sur certains cas d'étude réels. L'adimensionnalisation peut être envisagée par exemple.

### 3.2.3 Équations de sensibilité

L'analyse de sensibilité permet l'identification des propriétés physiques qui doivent être identifiées (*e.g.* des paramètres incertains et influents du modèle). De plus, cela donne les nœuds les plus sensibles sur lesquels il devrait être le plus profitable de placer des capteurs de qualité de l'eau [92, 96, 97].

Essentiellement, trois approches ont été utilisées pour l'analyse de sensibilité : les différences finies, la différenciation automatique et les équations de sensibilité. Les techniques de différences finies sont faciles à implémenter mais

elles peuvent se révéler coûteuses en temps de calcul, si une fonction est appelée de nombreuses fois pour calculer les variables prédites à chaque variation des paramètres. La différenciation automatique est une famille de technique pour calculer les dérivées d'une fonction définies par un programme. Quoique cette technique soit rapide et précise, elle produit des codes de calcul longs et complexes. Nous privilégions les équations de sensibilité car elles conduisent aux résultats les plus précis et leur résolution n'ajoute pas beaucoup de surcoût en calcul et temps d'exécution.

Les équations de sensibilité sont dérivées du problème direct équation (3.1). Soit  $N_a$  le nombre de paramètres incertains et  $a_k$  le  $k$ -ème paramètre du modèle, le problème revient à chercher la concentration ou la quantité d'intérêt  $C_{a_k}$  pour chaque conduite telle que :

$$\begin{cases} \partial_t C_{a_k} + U_j(t) \partial_x C_{a_k} + \partial_{a_k}(\beta C^\alpha) = 0, \\ C_{a_k}(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_j \\ C_{a_k}(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $C_{a_k} = \partial_{a_k} C$  est la dérivée de  $C$  par rapport à  $a_j$ ,  $C$  étant la solution du problème original (équation (3.1)). Les paramètres qui ont été considérés sont : le coefficient de décroissance global  $\beta$  (paroi+écoulement), et l'ordre de réaction  $\alpha$ . Il est possible d'étendre aux paramètres qui influencent les vitesses dans les arcs [7].

Il est courant d'affecter une même cinétique de disparition à un ensemble de conduites de même matériau, de même âge et de même diamètre. Ainsi, comme pour la demande équation (2.7), on définit des classes de conduites équivalentes et une matrice d'appartenance :

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbf{M}_{kinetics} \mathbf{b} \\ \alpha &= \mathbf{M}_{kinetics} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n_c})$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n_c})$  et  $n_c$  le nombre de classes.

Par conséquent,  $2n_c$  équations (3.8), deux pour chaque classe de paramètres, peuvent être écrites pour l'arc  $j$  :

$$\begin{cases} \partial_t C_{b_l} + U_j(t) \partial_x C_{b_l} + \alpha \beta C^{\alpha-1} C_{b_l} + C^\alpha \delta_{lj} = 0, \quad 1 \leq l \leq n_c, \\ \partial_t C_{a_l} + U_j(t) \partial_x C_{a_l} + \alpha \beta C^{\alpha-1} C_{a_l} + \beta C^\alpha \ln C = 0, \\ C_{a_l}(0, x) = 0, \quad C_{b_l}(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_j, \\ C_{a_l}(t, 0) = 0, \quad C_{b_l}(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $C_{b_l} = \partial_{b_l} C$  et  $C_{a_l} = \partial_{a_l} C$  sont les sensibilités de la concentration par rapport à  $b_l$  et  $a_l$  respectivement.

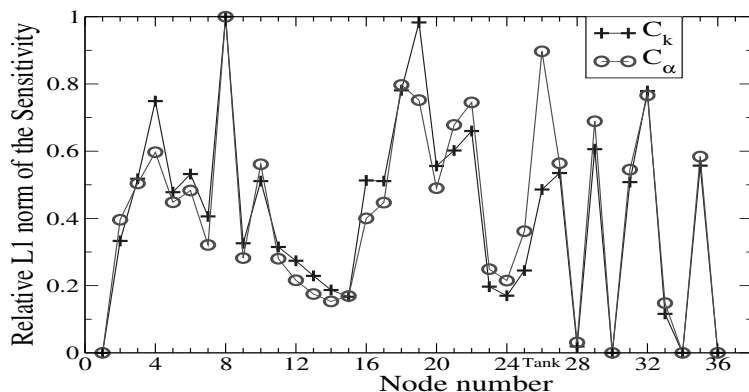


FIGURE 3.4 – Sensibilité de la concentration par rapport à la constante cinétique  $\beta = k$  et par rapport à l'ordre cinétique  $\alpha$  dans un réseau.

La technique *Splitting-TVD* est appliquée aux équations de sensibilité :

$$\begin{cases} \partial_t C_{a_k}(t, x) + [U_j \partial_x + B] C_{a_k}(t, x) + f(t, x) = 0, \\ C_{a_k}(t, 0) = C_0(t), \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $f$  est le terme source et  $B(t, x)$  un opérateur linéaire.

Un exemple de calcul de sensibilité de la concentration en chlore par rapport aux cinétiques de disparition dans un réseau réel est montré Fig. 3.4. Davantage d'applications, pour le placement de capteurs et pour le calage des cinétiques de disparition, sont décrites dans [91].

### 3.3 Conclusion

Dans ce troisième chapitre, sont explicitées les équations de transport pour les trois indicateurs de la qualité de l'eau, concentration en désinfectant, âge de l'eau et provenance au nœud du graphe du réseau. Les lois de mélange aux nœuds sont aussi données. Deux méthodes de résolution sont particulièrement efficaces. La méthode *Hybride*, une méthode de pas fractionnaires, avec une étape de résolution exacte par MOC et une complétion par un  $\theta$ -schéma, tire avantage du temps de transit pour définir la discrétisation spatiale sur les arcs. Elle permet de calculer de façon précise des pics de concentration (ou de pollution) et est particulièrement bien adaptée aux écoulements pseudo-transitoires, suite de calculs permanents. La deuxième méthode *Splitting-TVD* consiste à faire une séparation d'opérateurs et est utilisée pour les écoulements transitoires lents. Quand les équations transitoires lentes sont requises



pour modéliser des variations lentes des conditions aux limites et des organes de régulation, l'algorithme *Splitting-TVD* est beaucoup plus performant ; il permet de considérer une vitesse régulière et variant lentement et aussi des termes sources additionnels de diverses natures. Les équations de sensibilité de la concentration en désinfectant par rapport aux cinétiques de disparition sont aussi exposées. Ces équations sont résolues par l'algorithme *Splitting-TVD* en parallèle des équations de transport direct (de même structure) ce qui permet de réaliser des économies de calcul. Les coefficients de sensibilité permettent de déterminer des plans d'échantillonnage pour le calage et de caler les paramètres du modèle par des méthodes utilisant les informations du premier ordre.

# Conclusions et perspectives de recherche

Les problématiques de l'estimation de l'état hydraulique, de la qualité de l'eau desservie et de la sécurité d'un réseau et de ses abonnés sont primordiales pour la prise de décision d'un opérateur de réseaux d'eau. Ce mémoire d'habilitation s'attache à apporter des éléments de réponse par la *modélisation et l'optimisation des réseaux de conduites sous pression* pour ces questions. Ce continuum de recherche a permis d'arriver à un niveau de compréhension suffisant pour proposer des solutions adaptées au large spectre de problématiques. Plus concrètement, et ceci a été détaillé tout au long des trois chapitres, il s'agit :

- d'améliorer la prédiction de l'état hydraulique en formulant un cadre théorique pour la modélisation permanente conduite par la pression, mais aussi en corrigeant les équations pour tenir compte de termes d'inertie additionnels, des points hauts et des fuites ;
- de résoudre les trois problèmes inverses associées, de la régulation du réseau par des vannes de contrôle, du calage des paramètres du modèle hydraulique et du placement optimal de capteurs et d'appareils de mesures ;
- de résoudre l'équation de transport pour les trois indicateurs de la qualité de l'eau distribuée, que sont le temps de séjour, la provenance de l'eau et le taux résiduel de désinfectant ; de résoudre les problèmes inverses associés ; d'améliorer la prédiction du transport en dérivant de nouvelles lois de mélange aux embranchements et en tenant compte de la dispersion hydrodynamique ;

La résolution des équations d'équilibrage hydraulique pour des graphes de réseaux AEP de grandes tailles est facilitée par la mise en place d'une nouvelle formulation matricielle et le recours à un cadre d'optimisation convexe et différentiable. Ceci a permis de démontrer l'existence et l'unicité du flot solution du problème primal. La variable duale associée à la contrainte de conservation de la masse est la charge piézométrique, qui n'est pas toujours définie de façon

---

unique. Une méthode de Newton avec amortissement permet de garantir la convergence globale. La recherche linéaire utilise le critère de Goldstein. Pour prendre en compte les fuites diffuses mais aussi pour compléter la connaissance de l'état d'équilibre, les changements d'état ou de trajectoire en écoulement incompressible sont modélisés en résolvant les équations transitoires lentes. Ces dernières permettent de prendre en compte le phénomène d'oscillation de masse et les termes d'inertie liés aux fuites, mais négligent l'onde de pression lorsqu'il n'y a pas de variations brusques pour le fonctionnement des pompes et des vannes de régulation, pour la mise à jour des volumes de réservoirs et pour la demande.

Les vannes de régulation du débit sont prises en compte en ajoutant une perte de charge de pénalité. L'état ouvert, actif ou fermé des vannes de régulation de la pression est déterminé par la résistance hydraulique de vanne qui minimise au sens des moindres carrés l'écart à la consigne. Cette dernière est ouverte si égale à la borne de contrainte minimale et fermée si égale à la borne de contrainte maximale. Le signe des variables de Lagrange associées aux contraintes de bornes pour la résistance indique si une vanne de contrôle doit rester saturée (*i.e.* soit ouverte ou fermée). Pour l'identification de l'état des paramètres du modèle hydraulique permanent, un problème fortement convexe sous contraintes de bornes est formulé. Le critère à minimiser utilise la fonction de Huber pour sa robustesse aux valeurs aberrantes et est équivalent aux moindres carrés pondérés pour de petits résidus. Un terme de régularisation de Tikhonov est rajouté qui pénalise les déviations d'une solution a priori. En cas d'observabilité algébrique, un algorithme de Levenberg-Marquardt projeté est implémenté, lequel utilise les sensibilités des valeurs mesurées aux variations des paramètres. Le choix de mesure optimal est celui qui minimise le volume de confiance de l'erreur sur l'estimation des moindres carrés en présence d'erreurs de mesure. Il est donc conçu pour améliorer le conditionnement du problème du calage. Il est montré que l'erreur quadratique moyen décroît drastiquement. Le problème indéterminé en variables entières peut aussi être résolu en moyennant plusieurs optimisations successives par algorithme génétique. L'utilisation du placement optimal de mesures a permis d'améliorer les performances de cet algorithme en terme de précision (*i.e.* scoring sur le nombre de fois que la solution exacte est trouvée).

Pour étudier les équations de transport d'indicateurs de la qualité de l'eau le long des arcs du graphe du réseau, et les lois de mélange aux nœuds, deux codes de résolution ont été développés, l'un par pas fractionnaires et l'autre par décomposition des opérateurs (splitting). Tous deux sont couplés faiblement avec l'état hydraulique ; le premier utilise les vitesses des équations d'équilibrage en mode pseudo-transitoire, et le second la solution transitoire lente. L'analyse de sensibilité des solutions par rapport aux paramètres du modèle est importante. Elle permet, d'un point de vue opérationnel, le placement de capteurs pour minimiser l'influence des erreurs de mesure sur l'identification

des paramètres ; les coefficients de sensibilité sont de plus utiles à la mise en place de méthodes de descente pour le problème du calage.

Une part importante de mes recherches actuelles se focalise sur la sécurité des réseaux, la protection des consommateurs et la maîtrise des fuites. Il faut pour cela mettre en place des systèmes d'alerte précoce et des méthodes qui permettent de remonter jusqu'à la source de contamination, de vérifier la décontamination, de limiter et détecter les fuites, comme de quantifier et renforcer la résilience des réseaux AEP.

Mes projets de recherche à court et moyen terme sont tournées vers la *gestion intelligente, la résilience et l'adaptabilité des réseaux*. En effet, les services des eaux sont confrontés à de grands défis en raison du vieillissement des réseaux de distribution, de la rareté et de la qualité de l'eau, de l'augmentation de la population et de la demande en eau, de pressions réglementaires et financières, de la sécurité du réseau et de ses abonnés, et du changement climatique. De nouvelles opportunités sont déjà offertes par l'acquisition de données du réseau de distribution en temps réel, par l'apparition de capteurs intelligents et du concept de réseau de capteurs. Mais, de nouvelles connaissances sont nécessaires pour optimiser la ressource en eau et en énergie, la distribution de l'eau, la capacité et l'utilisation des installations, des équipements et des conduites pour atteindre un futur durable.

Relever ces défis demande de nouvelles technologies et un nouveau paradigme pour gérer ces infrastructures d'importance vitale, complexes et interconnectées et délivrer des services essentiels à moindre coût. Pour que les opérateurs de réseaux puissent mesurer les risques sur la quantité et la qualité de la distribution et sur les conséquences financières, il faut pouvoir quantifier les changements et développer des outils d'aide à la décision.

Il est maintenant possible de donner une formulation mathématique aux différents problèmes, de développer, d'étendre et de valider expérimentalement de nouvelles méthodes d'analyse et de dériver de nouvelles applications pour la conception, la modernisation des réseaux d'eau avec des topologies reconfigurables dynamiquement et une gestion intelligente de la distribution l'eau. Les réseaux adaptatifs et intelligents améliorent la résilience du réseau et la gestion de la pression, ils étendent l'espérance de vie des éléments du réseau, réduisent l'utilisation de l'énergie et gèrent proactivement les fuites, les incidents et la qualité de l'eau. Plus spécifiquement, il est important de développer des outils et des méthodes pour garantir l'observabilité de l'état hydraulique, la détection des fuites, la régulation de la pression, la sécurisation du réseau et la sécurité sanitaire, et pour la résilience et la durabilité du réseau.

Plusieurs projets en cours ou à venir vont permettre de développer la connaissance pour répondre en partie à ces questionnements. Ils sont détaillés ci-après.

---

Le projet ANR/BMBF ResiWater [98], que je coordonne, a vocation à fournir des indicateurs de performance pour la résilience du réseau et la criticité en cas de crises majeures, par suite de catastrophes naturelles ou causées par l'homme. Il arrivera à son terme fin 2018. Plusieurs outils de simulation sont développés pour entraîner au mieux les services des eaux aux réponses à donner, comme, une méthode de quantification d'incertitude par chaos polynomial, ou un nouveau code hydraulique conduit par la pression pour prendre en compte les déconnexions totales ou partielles, ou encore l'ajout de contraintes de capacité en chaque arc du graphe du réseau.

Le projet H2020 RISE Wat-Qual vient d'être accepté et permettra de mener des recherches finalisées dans le domaine de la qualité de l'eau distribuée. Il a commencé en février 2018 pour une durée de deux ans. Ce projet finance des missions et des échanges courts de chercheurs. Le principal objectif de Wat-Qual est de comprendre les impacts du rinçage, de la désinfection et de la maintenance/réparation de l'infrastructure sur la qualité de l'eau distribuée à travers le foisonnement des pratiques en Europe. Le projet rassemblera des approches scientifiques et techniques pour identifier et disséminer des conseils de bonnes pratiques et des outils adaptés. La quantification d'incertitude sera utilisée pour évaluer la fiabilité et la résilience de réseaux autonettoyants et de systèmes adaptatifs. De nouveaux indices de performance seront établis pour la gestion de la qualité de l'eau, par exemple, en cas de décoloration due à un rinçage.

Dans les quatre prochaines années, l'équipe GPIE (UR ETBX) va investir dans une plateforme expérimentale (financée par la région Nouvelle Aquitaine, le fond FEDER, les Agences de l'Eau Loire-Bretagne et Adour-Garonne et l'ARS Aquitaine) avec pour objectif principal le développement de connaissances pour le renouvellement orienté des conduites (projet ROC) afin de préserver la qualité de l'eau, de gérer le risque sanitaire et de réduire le volume des pertes en eau. Ces installations vont notamment permettre d'étudier le relargage de chlorure de vinyle monomère (CVM) par les conduites en polychlorure de vinyle (PVC), d'appréhender plus exactement les fluctuations de CVM dans l'eau pour adapter les mesures de gestion, et d'étudier la relation entre la pression et le niveau de fuite en fonction de la nature des conduites et de leurs conditions d'environnement. La compréhension de ces phénomènes est capitale pour définir les moyens à mettre en œuvre dans la limitation des pertes, la préservation de la qualité de l'eau et donc dans l'amélioration de la sécurité sanitaire. Dans le cadre de ce projet, je dirigerai une thèse (ED SMI n° 432), qui a vocation à développer des méthodes et un outil de prise de décision pour renforcer la durabilité et la résilience des réseaux par rapport aux risques d'augmentation du niveau de fuite et de la dégradation de la qualité de l'eau.

La recherche académique sera menée en coopération avec le CNAM Paris et le Pr. Iraj Mortazavi.

En matière de coopération internationale, deux faits marquants viennent renforcer les activités de recherche autour de la gestion intelligente, de la résilience et de l'adaptabilité des réseaux :

- entre Irstea, Tshwane University of Technology et The Council for Scientific and Industrial Research, tous deux à Pretoria en Afrique du Sud, a été signé en septembre 2016 une coopération de recherche (Memorandum of Understanding) pour une coopération sur la détection et la localisation de fuites, et sur l'estimation d'état et la prédiction de la demande en temps réel. Le MoU devrait permettre l'encadrement de plusieurs thèses de doctorat en cotutelle.
- une bourse EPSRC (Engineering and Physical Sciences Research Council, sciences physiques pour l'ingénieur, Royaume-Uni) a été accordée fin 2016 au Pr Stoianov (Imperial College London, Civil and Engineering Department) pour construire un consortium de recherche dans le but d'optimiser la résilience et la durabilité des réseaux AEP, en adaptant dynamiquement la topologie d'un réseau, les conditions hydrauliques et les objectifs opérationnels pour des conditions normales de fonctionnement. Je fais partie du comité consultatif de ce projet d'une durée de cinq ans. Un accord de consortium devrait être mis en place.

---

# Bibliographie

- [1] Lina Perelman, Mashor Housh, and Avi Ostfeld. Robust optimization for water distribution systems least cost design. *Water Resources Research*, 49(10) :6795–6809, 2013.
- [2] Jakobus E. van Zyl, Yves le Gat, Olivier Piller, and Thomas M. Walski. Impact of water demand parameters on the reliability of municipal storage tanks. *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, 138(5) :553–561, 2012.
- [3] Gerard Sanz and Ramon Pérez. Sensitivity analysis for sampling design and demand calibration in water distribution networks using the singular value decomposition. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 141(10) :04015020, 2015.
- [4] Olivier Piller, Bernard Brémond, and Paul Morel. A spatial sampling procedure for physical diagnosis in a drinking water supply network. In D. Savic and G. Walters, editors, *Water industry systems : modelling and optimization applications, International Conference on Computing and Control for the Water Industry CCWI '99*, volume 1, pages 309–316. Research Studies Press Ltd., 1999.
- [5] Cheryl A. Bush and James G. Uber. Sampling design methods for water distribution model calibration. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 124(6) :334–344, 1998.
- [6] Guangtao Fu, Zoran Kapelan, and Patrick Reed. Reducing the complexity of multiobjective water distribution system optimization through global sensitivity analysis. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 138(3) :196–207, 2012.
- [7] Olivier Piller, Denis Gilbert, and Jakobus E. van Zyl. Dual calibration for coupled flow and transport models of water distribution systems. In *Water Distribution Systems Analysis 2010*, pages 722–731. ASCE, 2011.
- [8] Derya Sumer and Kevin Lansey. Effect of uncertainty on water distribution system model design decisions. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 135(1) :38–47, 2009.



- 
- [9] Olivier Piller, Jochen Deuerlein, Denis Gilbert, and Jean-Marc Weber. Installing fixed sensors for double calibration and early-warning detection purposes. *Procedia Engineering*, 119 :564–572, 2015.
- [10] Lina Perelman and Avi Ostfeld. Operation of remote mobile sensors for security of drinking water distribution systems. *Water Research*, 47(13) :4217–4226, 2013.
- [11] Xueyao Yang, Dominic Boccelli, and Annamaria De Sanctis. *A Bayesian Approach for Probabilistic Contamination Source Identification*, pages 304–313. ASCE, 2011.
- [12] Robert Wright, Edo Abraham, Panos Parpas, and Ivan Stoianov. Control of water distribution networks with dynamic DMA topology using strictly feasible sequential convex programming. *Water Resources Research*, pages n/a–n/a, 2015.
- [13] Olivier Piller and Jakobus E. van Zyl. Modeling control valves in water distribution systems using a continuous state formulation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(11) :04014052, 2014.
- [14] Enrico Creaco, Marco Franchini, and Ezio Todini. The combined use of resilience and loop diameter uniformity as a good indirect measure of network reliability. *Urban Water Journal*, 13(2) :167–181, 2016.
- [15] T. Devi Prasad and Nam-Sik Park. Multiobjective genetic algorithms for design of water distribution networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 130(1) :73–82, 2004.
- [16] Guilherme Peretti Pezzi, Evelyne Vaissié, Yann Viala, Denis Caromel, and Philippe Gourbesville. Parallel profiling of water distribution networks using the clément formula. *Applied Mathematics and Computation*, 267(Supplement C) :83–95, 2015.
- [17] Olivier Piller, Denis Gilbert, Karim Haddane, and Sandrine Sabatié. Porteau : An object-oriented programming hydraulic toolkit for water distribution system analysis. In *Urban Water Management : Challenges and Opportunities Savic Dragan ; Kapelan Zoran and Butler David (Eds)*, volume 1/3, pages 27–32. Centre for Water Systems, University of Exeter, 2011.
- [18] Alan Dolan and Joan Aldous. *Networks and algorithms : an introductory approach*. J. Wiley and Sons, 1993.
- [19] Olivier Piller. *Modélisation du fonctionnement d’un réseau de distribution d’eau : analyse hydraulique et choix des mesures pour l’estimation*

- de paramètres*. PhD thesis in Applied Mathematics, Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux, 1995. Defended on 03 February 1995, 288 pages (in French).
- [20] Orazio Giustolisi and Thomas M. Walski. Demand components in water distribution network analysis. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 138(4) :356–367, 2012.
- [21] Orazio Giustolisi and Daniele Laucelli. Water distribution network pressure-driven analysis using the enhanced global gradient algorithm (egga). *Journal of Water Resources Planning and Management*, 137(6) :498–510, 2011.
- [22] Pramod R. Bhave. Node flow analysis distribution systems. *Transportation Engineering Journal*, 107(4) :457–467, 1981.
- [23] Janet M. Wagner, Uri Shamir, and David H. Marks. Water distribution reliability : Simulations methods. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 114(3) :276–294, 1988.
- [24] Sylvan Elhay, Olivier Piller, Jochen Deuerlein, and Angus R. Simpson. A robust, rapidly convergent method that solves the water distribution equations for pressure-dependent models. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 142(2) :04015047, 2016.
- [25] Okitsugu Fujiwara and Tharmarajah Ganesharajah. Reliability assessment of water supply systems with storage and distribution networks. *Water Resources Research*, 29(8) :2917–2924, 1993.
- [26] Olivier Piller, Bernard Brémond, and Matthew Poulton. Least action principles appropriate to pressure driven models of pipe networks. In Paul Bizier and Paul Debarry, editors, *World Water and Environmental Resources Congress (EWRI03)*, pages (CD-ROM). ASCE, 2003.
- [27] Tiku T. Tanyimboh and Andrew B. Templeman. A new nodal outflow function for water distribution networks. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Engineering Computational Technology*. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, 2004.
- [28] Asaph M. Kabaasha, Olivier Piller, and Jakobus E. van Zyl. Incorporating the modified orifice equation into pipe network solvers for more realistic leakage modeling. *Journal of Hydraulic Engineering*, 144(2) :04017064, 2018.

- 
- [29] Elodie Jaumouillé, Olivier Piller, and Jakobus E. van Zyl. A hydraulic model for water distribution systems incorporating both inertia and leakage. In *Water Management Challenges in Global Change (CCWI2007 and SUWM2007 Conference)*, volume 1, pages 129–135. Balkema, 2007.
- [30] Marco Ferrante, Ezio Todini, Christian Massari, Bruno Brunone, and Silvia Meniconi. Equivalent hydraulic resistance to simulate pipes subject to diffuse outflows. *Journal of Hydroinformatics*, 14(1) :65–74, 2012.
- [31] Istvan Lippai and Len Wright. Demand constructs for risk analysis. *Procedia Engineering*, 89 :640–647, 2014.
- [32] Zheng Y. Wu, Rong H. Wang, Thomas M. Walski, Shao Y. Yang, Daniel Bowdler, and Christopher C. Baggett. Extended global-gradient algorithm for pressure-dependent water distribution analysis. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 135(1) :13–22, 2009.
- [33] Peter Cheung, Jakobus E. Van Zyl, and Luisa Fernanda. R. Reis. Extension of epanet for pressure driven demand modeling in water distribution system. In Dragan A. Savic, Godfrey Walters, Roger King, and Soon-Thiam Khu, editors, *Eight International Conference on Computing and Control in the Water Industry CCWI05 'Water Management for the 21st Century'*, volume 1. Centre for Water Systems, 2005.
- [34] Orazio Giustolisi, Dragan Savic, and Zoran Kapelan. Pressure-driven demand and leakage simulation for water distribution networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(5) :626–635, 2008.
- [35] Calvin Siew and Tiku Tanyimboh. Pressure-dependent epanet extension. *Water Resources Management*, 26(6) :1477–1498, 2012.
- [36] Pierre Carpentier, Guy Cohen, and Yskandar Hamam. Water network equilibrium, variational formulation and comparison of numerical algorithms. In *EURO VII, Proc. 7th European Congress on Operational Research*, page 30. Bologna Tecnoprint, 1985.
- [37] M. Collins, L. Cooper, R. Helgason, R. Kennington, and L. Leblanc. Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques. *Management Science*, 24(7) :747–760, 1978.
- [38] Williams Millar. Some general theorems for non linear systems possessing résistance. *Philosophical magazine*, 42 :1150–1160, 1951.
- [39] Olivier Piller and Jakobus E. van Zyl. On suitable pressure driven model prédictions for the analysis of water distribution systems. In *10th International Water Distribution System Analysis conference (WDSA), 17-20 August 2008, Kruger National Park, ZAF*, page 19, 2008.

- [40] Olivier Piller and Jakobus E. van Zyl. A unified framework for pressure driven network analysis. In *Water Management Challenges in Global Change (CCWI2007 and SUWM2007 Conference)*, volume 2, pages 25–30, 2007.
- [41] Ezio Todini and S. Pilati. A gradient projection algorithm for the analysis of pipe networks. In in D. Coulbeck, editor, *Computer Applications for Water Supply and Distribution*, volume 1, pages 1–20. Research Study Press Ltd. Taunton, UK, UK ©1988, 1988.
- [42] Ezio Todini and Lewis A. Rossman. Unified framework for deriving simultaneous equation algorithms for water distribution networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 139(5) :511–526, 2013.
- [43] Newton’s method wikipedia. Last checked on 11, March 2018. [https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method).
- [44] Olivier Piller, Sylvan Elhay, Jochen Deuerlein, and Angus R. Simpson. Why are line search methods needed for hydraulic DDM and PDM solvers? In *Conference : CCWI 2017 – Computing and Control for the Water Industry - Sheffield 5th - 7th September 2017*, page 8, 2017. <https://doi.org/10.15131/shef.data.5364229.v1>.
- [45] Olivier Piller, Sylvan Elhay, Jochen Deuerlein, and Angus R. Simpson. Local sensitivity of pressure-driven modeling and demand-driven modeling steady-state solutions to variations in parameters. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 143(2) :04016074, 2017.
- [46] Pierre Fabrie, Elodie Jaumouillé, Iraj Mortazavi, and Olivier Piller. Numerical approximation of an optimisation problem to reduce leakage in water distribution systems. *Mathematical Control and Related Fields*, 2(1) :101–120, 2012.
- [47] Amanda M. Cassa and Jakobus E. van Zyl. Predicting the leakage exponents of elastically deforming cracks in pipes. *Procedia Engineering*, 70(0) :302–310, 2014.
- [48] Jakobus E. van Zyl and Amanda M. Cassa. Modeling elastically deforming leaks in water distribution pipes. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(2) :182–189, 2014.
- [49] Amanda M. Cassa and Jakobus E. van Zyl. Predicting the head-leakage slope of cracks in pipes subject to elastic deformations. *Journal of Water Supply : Research and Technology—AQUA*, 62(4) :214–223, 2013.

- 
- [50] Marco Ferrante, Christian Massari, Bruno Brunone, and Silvia Meniconi. Experimental evidence of hysteresis in the head-discharge relationship for a leak in a polyethylene pipe. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(7) :775–780, 2011.
- [51] Julie Schwaller and Jakobus E. Van Zyl. Implications of the known pressure-response of individual leaks for whole distribution systems. *Procedia Engineering*, 70(0) :1513–1517, 2014.
- [52] Olivier Piller and Jakobus E. van Zyl. Incorporating the FAVAD leakage equation into water distribution system analysis. *Procedia Engineering*, 89(0) :613–617, 2014.
- [53] Guillaume Gancel and Olivier Piller. Coupled numerical simulation and sensitivity assessment under slow transient conditions. In Dragan A. Savic, Godfrey Walters, Roger King, and Soon-Thiam Khu, editors, *Eight International Conference on Computing and Control in the Water Industry CCWI05 'Water Management for the 21st Century*, volume 1, pages 281–286. Centre for Water Systems, 2005.
- [54] Olivier Piller, Guillaume Gancel, and Marco Propato. Slow transient pressure regulation in water distribution systems. In Dragan A. Savic, Godfrey Walters, Roger King, and Soon-Thiam Khu, editors, *Eight International Conference on Computing and Control in the Water Industry CCWI05 'Water Management for the 21st Century'*, volume 1, pages 263–268. Centre for Water Systems, 2005.
- [55] Doo-Yong Choi, Jae-Heung Yoon, and Hyoung-Min Woo. Water quality modeling under gradually varied flows in distribution systems. In *World Water and Environmental Resources congress, EWRI01*, page 10. ASCE, 2001.
- [56] kotaro Onizuka. System dynamics approach to pipe network analysis. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(8) :728–747, 1986.
- [57] Masashi Shimada. Graph-theoretical model for slow transient analysis of pipe networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(9) :1165–1183, 1989.
- [58] Olivier Piller and Marco Propato. Slow transient pressure driven modeling in water distribution networks. In *8th annual Water Distribution System Analysis Symposium, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio USA, August 27-30 2006*, page 13. ASCE, 2008.
- [59] Bernard Brémond, Pierre Fabrie, Elodie Jaumouillé, Iraj Mortazavi, and Olivier Piller. Numerical simulation of a hydraulic saint-venant type

- model with pressure-dependent leakage. *Applied Mathematics Letters*, 22(11) :1694–1699, 2009.
- [60] Elodie Jaumouillé, Olivier Piller, and Jakobus E. van Zyl. *Advantages of a Hydraulic Saint-Venant Type Model with Pressure-Dependent Leakage*, pages 1–10. ASCE, 2008.
- [61] Olivier Piller and Jakobus E. van Zyl. Pressure-driven analysis of network sections supplied via high-lying nodes. In Boxall (eds) and Maksimovic, editors, *Computing and Control in the Water Industry 2009 'Integrating Water Systems'*, volume 1, pages 257–262. CRC press/Balkema, Taylor and Francis Group, London, 2009.
- [62] Olivier Piller, Mathieu Le Fichant, and Jakobus E. van Zyl. Lessons learned from restructuring a hydraulic solver for parallel computing. In A.C.T. Adelaide, South Australia. Barton, editor, *WDSA 2012 : 14th Water Distribution Systems Analysis Conference*, Engineering Collection, pages 398–406. Engineers Australia, 24-27 September 2012.
- [63] Peter A. Crous, Jakobus E. van Zyl, and Yuko Roodt. The potential of graphical processing units to solve hydraulic network equations. *Journal of Hydroinformatics*, 14(3) :603–612, 2012.
- [64] Michele Guidolin, Zoran Kapelan, and Dragan Savić. Using high performance techniques to accelerate demand-driven hydraulic solvers. *Journal of Hydroinformatics*, 15(1) :38–54, 2013.
- [65] Zheng Yi Wu and Ian Lee. Lessons for parallelizing linear equation solvers and water distribution analysis. In *Computing and Control for the Water Industry 2011, Exeter, 5th - 7th Sep 2011, Urban Water Management : Challenges and Opportunities*, 2011.
- [66] Lewis A Rossman. *EPANET User's manual*. U.S. Environmental agency, Cincinnati, Ohio, 2000.
- [67] Angus R. Simpson. Modeling of pressure regulating devices : The last major problem to be solved in hydraulic simulation. In *Water Resources Planning and Management Conference*, page 9p. ASCE, 1999.
- [68] Olivier Piller and Bernard Bremond. *Modeling of Pressure Regulating Devices : A Problem Now Solved*, pages 1–10. ASCE, 2001.
- [69] Jochen Deuerlein, Angus R. Simpson, and Egbert Gross. The never ending story of modeling control-devices in hydraulic systems analysis. In Zyl Kobus Van, editor, *10th International Water Distribution System Analysis conference (WDSA), 17-20 August 2008, Kruger National Park, ZAF*, volume 340, page 72. ASCE, 2008.

- 
- [70] Jochen Deuerlein, Angus R. Simpson, and Stephan Dempe. Modeling the behavior of flow regulating devices in water distribution systems using constrained nonlinear programming. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(11) :970–982, 2009.
- [71] Mokhtar S. Bazaraa, Henaf D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. Wiley, third edition edition, 1993.
- [72] Pierre Carpentier and Guy Cohen. State estimation and leak detection in water distribution networks. *Civil Engineering Systems*, 8(4) :247–257, 1991.
- [73] Werner B. F. de Schaetzen. *Optimal Calibration and Sampling Design for Hydraulic Network Models*. Phd thesis in Engineering, University of Exeter, 2000.
- [74] Dragan A. Savic, Zoran S. Kapelan, and Philip M. R. Jonkergouw. Quo vadis water distribution model calibration? *Urban Water Journal*, 6(1) :3 – 22, 2009.
- [75] Zoran S. Kapelan, Dragan A. Savic, and Godfrey A. Walters. Multiobjective sampling design for water distribution model calibration. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 129(6) :466–479, 2003.
- [76] Ami Preis, Andrew J. Whittle, Avi Ostfeld, and Lina Perelman. Efficient hydraulic state estimation technique using reduced models of urban water networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 137(4) :343–351, 2011.
- [77] Zoran Kapelan. *Calibration of water distribution system hydraulic models*. Phd thesis in Engineering, University of Exeter, 2002.
- [78] Olivier Piller, Mathias Braun, Idel Montalvo, Jochen Deuerlein, and Thomas Bernard. *SMaRT-Online<sup>WDN</sup> D5.4 : Development of a concept for online model calibration*. Technical report, Irstea, 2015.
- [79] Nhu Do, Angus Simpson, Jochen Deuerlein, and Olivier Piller. Demand estimation in water distribution systems : Solving underdetermined problems using genetic algorithms. *Procedia Engineering*, 186 :193–201, 2017.
- [80] Nhu C. Do, Angus Simpson, Jochen Deuerlein, and Olivier Piller. Calibration of water demand multipliers in water distribution systems using genetic algorithms. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 142(11) :04016044, 2016.

- [81] Nhu C. Do, Angus R. Simpson, Jochen W. Deuerlein, and Olivier Piller. Particle filter-based model for online estimation of demand multipliers in water distribution systems under uncertainty. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 143(11) :04017065, 2017.
- [82] Optimal design. Last checked on 11, March 2018. [https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal\\_design](https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_design).
- [83] Andrzej Bargiela and Graham D. Hainsworth. Pressure and flow uncertainty in water systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 115(2) :212–229, 1989.
- [84] Olivier Chesneau, Bernard Bremond, and Olivier Piller. Calibration methodology for a residual chlorine decreasing model in drinking water networks. In *2003 World Water an Environmental Resources Congress - EWRI03*, page 10. ASCE, 2003. Langue : Anglais Département : GMA ATR - TR : TED / NETWATER.
- [85] Lewis A. Rossman and Paul F. Boulos. Numerical methods for modeling water quality in distribution systems :a comparison. *J. Water Resour. Plan. Manage.*, 122(2) :137–146, 1996.
- [86] Hervé Ung. *Quasi Real-Time Modeling for Security of Water Distribution Networks*. Docteur spécialité mathématiques appliquées et calcul scientifique, université de bordeaux, Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux, 2016.
- [87] James C. Powell, John R. West, Nicholas B. Hallam, Christopher F. Forster, and John Simms. Performance of various kinetic models for chlorine decay. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 126(1) :13–20, 2000.
- [88] Hervé Ung, Denis Gilbert, Olivier Piller, Iraj Mortazavi, and Angelo Iollo. LES and DNS simulations of imperfect mixing for double-tee junctions. *Procedia Engineering*, 89(0) :1268–1275, 2014.
- [89] Mathias Braun, Thomas Bernard, Hervé Ung, Olivier Piller, and Denis Gilbert. Model based investigation of transport phenomena in water distribution networks for contamination scenarios. *Procedia Engineering*, 70(0) :191–200, 2014.
- [90] Pierre Fabrie, Guillaume Gancel, Iraj Mortazavi, and Olivier Piller. Quality modeling of water distribution systems using sensitivity equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(1) :34–44, 2010.



- 
- [91] Guillaume Gancel. *Modélisation d'un problème inverse pour la qualité de l'eau dans les réseaux d'eau potable*. Doctorat mathématiques appliquées, Université de Bordeaux 1, 2006.
- [92] Guillaume Gancel, Iraj Mortazavi, and Olivier Piller. Coupled numerical simulation and sensitivity assessment for quality modelling in water distribution systems. *Applied Mathematics Letters*, 19(12) :1313–1319, 2006.
- [93] Forrest M. Holly and Alexandre Preissmann. Accurate calculation of transport in two dimensions. *Journal of Hydraulics Division*, 103 (HY11) :1259–1277, 1977.
- [94] Bram van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14 :361–370, 1974.
- [95] Olivier Piller and Laure Tavard. Modeling the transport of physico-chemical parameters for water network security. *Procedia Engineering*, 70(0) :1344–1352, 2014.
- [96] Guillaume Gancel and Olivier Piller. Coupled numerical simulation and sensitivity assessment under slow transient conditions. In Dragan A. Savic, Godfrey Walters, Roger King, and Soon-Thiam Khu, editors, *Eight International Conference on Computing and Control in the Water Industry CCWI05 'Water Management for the 21st Century*, volume 1, pages 281–286. Centre for Water Systems, 2005.
- [97] Guillaume Gancel, Olivier Piller, and Iraj Mortazavi. Coupled numerical simulation and sensitivity assessment for quality modeling in water distribution systems. In *ACTUI 2004, 'Decision support in the water industry under conditions of uncertainty'*, 2004.
- [98] Irstea. Resiwater website for the French German project funded by ANR (ANR-14-PICS-03) and BMBF (BMBF-13N13690). Last checked on 25, March 2018. <https://www.resiwater.eu/project/>.
- [99] Olivier Piller. Quality modeling in water distribution systems with kinetic order equal to or higher than one. Rapport d'étude, Cemagref (in French, Internal Use Only), 1996.
- [100] Marco Propato, James G. Uber, and Olivier Piller. Robust optimization for feedback control design of booster disinfection systems. In Dragan A. Savic, Godfrey Walters, Roger King, and Soon-Thiam Khu, editors, *Eight International Conference on Computing and Control in the Water Industry CCWI05 'Water Management for the 21st Century*, volume 1, pages 99–104. Centre for Water Systems, 2005.

- [101] P. Cheung, M. Propato, B. Bremond, and O. Piller. Water quality parameter estimation in a water distribution system. In *Water Management Challenges in Global Change (CCWI2007 and SUWM2007 Conference)*, volume 1, pages 279–285. Balkema, 2007.
- [102] Hervé Ung, Olivier Piller, Denis Gilbert, and Iraj Mortazavi. *Inverse Transport Method for Determination of Potential Contamination Sources with a Stochastic Framework*, pages 798–812. ASCE, Cincinnati (Ohio), USA, 2013.
- [103] Marco Propato, Michael .E. Tryby, and Olivier Piller. Linear algebra analysis for contaminant source identification in water distribution systems. In *World Environmental and Water Resources Congress 2007, Tampa, Florida, USA, 15-19 May 2007*, page 10, 2007. Titre traduit en français : Analyse par algèbre linéaire pour une identification des sources de contamination dans un système de distribution d’eau Département : MA ATR - TR : TED / NETWATER.
- [104] Hervé Ung, Olivier Piller, and Denis Gilbert. Quasi-real time modeling for security of a drinking water distribution network. *Procedia Engineering*, 70 :800–809, 2014.
- [105] Mathias Braun, Thomas Bernard, Hervé Ung, Olivier Piller, and Denis Gilbert. Computational fluid dynamics modeling of contaminant mixing at junctions for an online security management toolkit in water distribution networks. *Journal of Water Supply : Research and Technology—AQUA*, 64(5) :504–515, 2015.
- [106] Denis Gilbert, Iraj Mortazavi, Olivier Piller, and Hervé Ung. Low dimensional modeling of double T-junctions in water distribution networks using kriging interpolation and Delaunay triangulation. *Pacific Journal of Mathematics for Industry*, 9(2) :19, 2017.
- [107] Jochen Deuerlein, Olivier Piller, Fabrizio Parisini, Angus R. Simpson, and Sylvan Elhay. On the solvability of the pressure driven hydraulic steady-state equations considering feedback-control devices. In *CCWI*, 2017.
- [108] Asaph M. Kabaasha, Jakobus E. van Zyl, and Olivier Piller. Modelling pressure : Leakage response in water distribution systems considering leak area variation. In *14th CCWI international conference, Computing and Control in Water Industry, 07/11/2016 - 07/11/2016*, page 7, 2016.
- [109] Olivier Piller, Raphael Ricklin, Denis Gilbert, and Jakobus van Zyl. Simulating pressure control valves in porteau. In A.C.T. Barton, editor,

- WDSA 2012 : 14th Water Distribution Systems Analysis Conference*, pages 560–568. Engineers Australia, 2012.
- [110] Olivier Piller. Calage automatique du réseau de Montreuil. Technical report, Irstea, 1998.
- [111] Olivier Piller, Bernard Brémond, and Patrick Eisenbeis. Water supply network modelling including head-dependent demand and elevated nodes. In *IWA specialised conference : system approach to leakage control and water distribution systems management*, volume 1, pages 72–80, 2001.
- [112] Mathias Braun, Olivier Piller, Jochen Deuerlein, and Iraj Mortazavi. Limitations of demand- and pressure-driven modeling for large deficient networks. *Drink. Water Eng. Sci.*, 10(2) :93–98, 2017. DWES.
- [113] Sylvan Elhay, Jochen Deuerlein, Olivier Piller, and Angus R. Simpson. Graph partitioning in the analysis of pressure dependent water distribution systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 144(4) :04018011, 2018.
- [114] Colin Cherry. Some general theorems for non-linear systems possessing reactance. *Philosophical magazine*, 42 :1161–1177, 1951.