



**HAL**  
open science

# Modélisation des risques de l'entreprise agricole pour une conception d'assurance revenu : Application à l'éleveur de porcs

Martial Phélippé Guinvarc'H

► **To cite this version:**

Martial Phélippé Guinvarc'H. Modélisation des risques de l'entreprise agricole pour une conception d'assurance revenu : Application à l'éleveur de porcs. Economies et finances. Université de Bretagne Occidentale; Institut d'Administration des Entreprises de Brest; Institut d'Actuariat de Brest; Ecole Nationale Supérieure Agronomique de Rennes, 2003. Français. NNT : . tel-02832376

**HAL Id: tel-02832376**

**<https://hal.inrae.fr/tel-02832376v1>**

Submitted on 7 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

# THÈSE

présentée devant

**l'Université de Bretagne Occidentale**

Institut d'Administration des Entreprises, Brest

EURO Institut d'Actuariat, Brest

École Nationale Supérieure Agronomique, Rennes

Thèse pour le

**Doctorat ès Sciences de Gestion**

**Modélisation des risques de l'entreprise  
agricole pour une conception**

**d'assurance revenu**

**Application à l'éleveur de porcs**

Présentée et soutenue publiquement le 19 décembre 2003 par

**Martial PHÉLIPPÉ GUINVARC'H**

Devant le jury suivant :

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| M. Jean Cordier                  | Directeur de thèse<br>Professeur à l'École Nationale Supérieure Agronomique de Rennes              |
| M. Christian Cadiou              | Directeur de thèse<br>Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale, Brest                     |
| M. Jacques Hamon                 | Rapporteur<br>Professeur à l'Université Paris-Dauphine   |
| M. Jacques Janssen               | Rapporteur<br>Professeur au Centre d'Études Interuniversitaire d'AssurFinance, Charleroi, Belgique |
| M <sup>me</sup> Catherine Rainer | Maître de conférence à l'Université de Bretagne Occidentale, Brest                                 |





## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Jean Cordier, mon directeur de thèse, pour les nombreuses séances de travail constructives et encourageantes. Je remercie également Christian Cadiou, co-directeur de thèse.

Je remercie particulièrement Jacques Janssen, Yves Surry et Jean-Pierre Masson pour leur soutien scientifique. Jacques Janssen m'a été d'une grande aide pour construire et rédiger la partie théorique de la thèse. Les remarques de Yves Surry m'ont aidé à structurer mon travail de thèse. Enfin, le chapitre 5 de la partie théorique est le fruit d'un travail avec Jean-Pierre Masson, que je remercie également pour avoir participé à la relecture de ce document.

Je tiens à remercier Hervé Le Borgne, directeur de l'EURIA, d'avoir initié cette thèse et d'avoir obtenu un financement de la Région Bretagne. M. Le Borgne m'a aidé à surmonter les difficultés administratives et m'a permis de bénéficier de la structure de l'EURIA. Il m'a également donné l'occasion de dispenser un cours aux étudiants de l'EURIA, et a mis à ma disposition les travaux des Bureaux d'Études.

J'ai bénéficié d'un financement de la région Bretagne et je souhaite remercier en particulier Jacques Berthelot, directeur de la commission scientifique, de l'intérêt qu'il a porté à mon projet. J'ai bénéficié également de l'accueil et de la mise à disposition de moyens de l'École Nationale Supérieure Agronomique de Rennes, et j'en remercie Pierre Thivend, directeur de cette école.

Merci également à Sabine Tréguer, Julien Salanié, Catherine Cordier et à tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à rendre ces presque trois années de travail agréables.

Je remercie chaleureusement chaque membre de ma famille avec, bien sûr, une mention toute particulière pour Sabrina.



# Table des matières

Remerciements	i
1 Introduction	1
<b>I Problématique</b>	<b>5</b>
1 Le problème du producteur	7
1.1 Les risques du producteur agricole	7
1.1.1 Les risques communs aux entreprises	7
1.1.2 L'aléa sur le prix	8
1.1.3 L'aléa sur la production	9
1.1.4 L'aléa sur le coût de production	10
1.1.5 Conséquence sur le chiffre d'affaires et la marge	11
1.2 L'évolution de ces risques	11
1.2.1 La modernisation	11
1.2.2 L'évolution du contexte politique	12
1.2.3 Les « nouveaux » risques	12
1.3 Les spécificités des risques agricoles	13
1.3.1 Des risques incontrôlables	13
1.3.2 Des risques systémiques et multidimensionnels	13
2 Les réponses actuelles	15
2.1 Méthode générale de gestion du risque	15
2.2 Quelques outils traditionnels en agriculture	16
2.2.1 L'épargne	17
2.2.2 La diversification des productions ou des activités	18
2.2.3 Les contrats de production	18
2.2.4 Les coopératives	19
2.3 L'assurance privée en France	19
2.3.1 L'assurance des risques communs aux entreprises	19

2.3.2	L'assurance récolte . . . . .	20
2.4	Les programmes agricoles dans l'OCDE . . . . .	21
2.4.1	Fonds National de Garantie des Calamités Agricoles en France . . . . .	21
2.4.2	Exemple de l'Espagne . . . . .	22
2.4.3	Description des principaux programmes américains . . . . .	22
2.4.4	Les limites du marché de l'assurance privée . . . . .	26
2.5	Les marchés à terme et options . . . . .	26
2.5.1	Description de base . . . . .	27
2.5.2	Les contrats cotés . . . . .	28
2.5.3	La limite des marchés financiers . . . . .	29
	<b>La problématique de la thèse</b>	<b>31</b>
	<b>II Analyse des risques et des outils actuels</b>	<b>33</b>
1	<b>Description assurance et finance</b>	<b>35</b>
1.1	La nature des contrats d'assurance et des contrats financiers . . . . .	36
1.1.1	Le contrat d'assurance . . . . .	36
1.1.2	Le contrat financier . . . . .	37
1.2	Illustration : le cas du producteur agricole . . . . .	38
1.2.1	Paramétrisation . . . . .	39
1.2.2	Les différentes situations possibles . . . . .	39
1.2.3	Les techniques de gestion de risques . . . . .	40
1.2.4	Illustration des techniques de gestion de risques . . . . .	40
1.3	Analyse des convergences et divergences . . . . .	44
1.3.1	La cession du risque contre prime . . . . .	45
1.3.2	L'analyse des contrats de cession de risques . . . . .	45
1.4	Des contrats d'assurance? . . . . .	47
1.4.1	Le MPCCI . . . . .	48
1.4.2	Les dérivés climatiques . . . . .	48
1.4.3	Les contrats optimaux . . . . .	49
2	<b>Utilisation des outils de gestion</b>	<b>51</b>
2.1	Le hedging . . . . .	51
2.1.1	Les analyses historiques du hedging . . . . .	52
2.1.2	La fonction d'utilité . . . . .	52
2.1.3	Les paramètres de la maximisation . . . . .	53
2.1.4	Le hedging multidimensionnel . . . . .	53
2.1.5	Le hedging en continu . . . . .	54

2.1.6	Le hedging avec le contrat à terme sur le rendement . . .	54
2.2	L'intégration des programmes dans une gestion de risques . . .	55
2.2.1	L'utilisation des programmes et contrats d'assurance . . .	56
2.2.2	Les effets secondaires . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Analyse des programmes</b>	<b>59</b>
3.1	La détermination du prix des contrats . . . . .	59
3.1.1	Modélisation des risques agricoles . . . . .	59
3.1.2	La distribution des rendements agricoles . . . . .	61
3.1.3	La segmentation des risques agricoles . . . . .	64
3.1.4	La sélection adverse et l'aléa moral . . . . .	64
3.1.5	Le risque systémique . . . . .	66
3.2	La conception de contrats optimaux . . . . .	67
3.3	La gestion des contrats . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Analyse mathématique des marchés</b>	<b>71</b>
4.1	L'approche classique de la modélisation des marchés financiers	71
4.1.1	Le modèle de Black and Scholes . . . . .	72
4.1.2	La formule de Black and Scholes . . . . .	72
4.1.3	Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein . . . . .	74
4.2	Les extensions au modèle de Black and Scholes . . . . .	75
4.2.1	Les modèles à volatilité déterministe . . . . .	76
4.2.2	Les modèles à volatilité stochastique . . . . .	76
4.2.3	Les processus à sauts . . . . .	77
4.2.4	Les modèles mixtes . . . . .	80
<b>III</b>	<b>Développements théoriques</b>	<b>81</b>
<b>1</b>	<b>Une provision comptable</b>	<b>83</b>
1.1	Les bases de la modélisation . . . . .	84
1.1.1	Les pertes et gains systémiques . . . . .	85
1.1.2	Une mesure des pertes et gains systémiques sur le chiffre d'affaires . . . . .	85
1.2	La provision pour perte systémique sur le chiffre d'affaires . . .	87
1.2.1	Les caractéristiques de la provision . . . . .	87
1.2.2	Illustration du calcul de la provision . . . . .	88
1.3	Analyse de cette provision . . . . .	88
1.3.1	Les avantages . . . . .	88
1.3.2	Les limites et contraintes . . . . .	91
1.3.3	Le coût de mise en œuvre . . . . .	93



<b>2</b>	<b>Un contrat financier agricole</b>	<b>95</b>
2.1	Le contrat dérivé sur le chiffre d'affaires . . . . .	96
2.1.1	Le contexte de l'intermédiation financière . . . . .	96
2.1.2	Modélisation du marché financier . . . . .	97
2.1.3	Définition du contrat dérivé sur le chiffre d'affaires . . . . .	98
2.1.4	Le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires . . . . .	99
2.2	La gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires . . . . .	101
2.2.1	Construction formelle . . . . .	101
2.2.2	Illustration de la gestion du contrat . . . . .	102
2.2.3	Estimation des coûts de transaction . . . . .	104
2.3	L'option sur le chiffre d'affaires . . . . .	106
2.3.1	Le prix de l'option de vente . . . . .	106
2.3.2	Le portefeuille de réplication . . . . .	106
2.3.3	Illustration de la gestion de l'option de vente sur le chiffre d'affaires . . . . .	107
<b>3</b>	<b>Un contrat dérivé sur le prix moyen</b>	<b>111</b>
3.1	Construction d'un contrat dérivé sur le prix moyen . . . . .	112
3.1.1	Les intérêts et limites des options asiatiques . . . . .	112
3.1.2	La définition d'un contrat dérivé sur le prix moyen . . . . .	113
3.1.3	Les propriétés de ce contrat dérivé . . . . .	114
3.2	Modélisation du sous-jacent . . . . .	114
3.2.1	Première étape . . . . .	116
3.2.2	Seconde étape . . . . .	118
3.3	Le portefeuille de réplication du sous-jacent . . . . .	120
3.4	Le prix et le portefeuille de réplication du contrat dérivé . . . . .	121
3.4.1	Le prix du contrat dérivé . . . . .	121
3.4.2	Le portefeuille de réplication du contrat dérivé . . . . .	122
3.5	Illustration de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen . . . . .	122
<b>4</b>	<b>Un contrat d'assurance agricole</b>	<b>125</b>
4.1	Les bases du modèle . . . . .	125
4.1.1	Le contrat d'assurance . . . . .	126
4.1.2	La mesure du risque systémique . . . . .	126
4.1.3	Une décomposition du temps . . . . .	127
4.2	Estimation du prix du contrat d'assurance . . . . .	127
4.2.1	La fonction de densité conditionnelle des pertes . . . . .	128
4.2.2	Le prix du contrat dérivé . . . . .	129
4.2.3	Le prix du contrat d'assurance . . . . .	131
4.3	La technique de gestion . . . . .	131
4.3.1	De 0 à $T^-$ . . . . .	131

4.3.2	De $T^-$ à $T$ . . . . .	132
4.4	Simulations . . . . .	133
4.4.1	Les calculs préalables . . . . .	133
4.4.2	Le prix de ce contrat d'assurance . . . . .	135
4.4.3	Résultats des simulations . . . . .	135
<b>5</b>	<b>Ajout de sauts au modèle financier</b> . . . . .	<b>139</b>
5.1	Le nouveau modèle du marché financier . . . . .	139
5.1.1	Les nouvelles équations différentielles . . . . .	139
5.1.2	Deux remarques préalables . . . . .	140
5.1.3	La probabilité risque neutre . . . . .	141
5.2	Le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires . . . . .	142
5.3	La gestion du contrat à terme . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Discussion de l'approche théorique</b> . . . . .	<b>147</b>
6.1	Les potentiels de ces développements théoriques . . . . .	147
6.1.1	Une approche originale . . . . .	147
6.1.2	Une avancée théorique . . . . .	148
6.1.3	Quelques perspectives se dessinent . . . . .	148
6.2	Les difficultés d'une mise en œuvre . . . . .	149
6.2.1	Les limites du marché financier . . . . .	149
6.2.2	Les limites du modèle liées au portefeuille d'assurance . . . . .	151
6.2.3	Les spécificités des différentes productions . . . . .	151
<b>IV</b>	<b>Applications et tests</b> . . . . .	<b>153</b>
<b>1</b>	<b>Test sur les données maïs de l'Illinois</b> . . . . .	<b>155</b>
1.1	Test du prix du contrat d'assurance instantané . . . . .	155
1.1.1	Les données rendements de l'Illinois . . . . .	156
1.1.2	Description des tests . . . . .	159
1.1.3	Résultats des tests et commentaires . . . . .	161
1.2	Tests de la gestion de ces contrats sur les marchés financiers . . . . .	166
1.2.1	Les données du CBOT . . . . .	166
1.2.2	Description des tests . . . . .	166
1.2.3	Résultats des tests et commentaires . . . . .	168
<b>2</b>	<b>Applications aux éleveurs de porcs</b> . . . . .	<b>173</b>
2.1	Contexte de l'éleveur de porcs Breton . . . . .	173
2.1.1	La vie du porc . . . . .	174
2.1.2	Une description des producteurs . . . . .	174

2.1.3	La typologie des risques . . . . .	176
2.1.4	Les marchés à terme utiles à l'éleveur de porcs . . . . .	177
2.2	Test de la provision . . . . .	180
2.2.1	Rappels conceptuels . . . . .	180
2.2.2	Test de la provision pour le producteur de porcs . . . . .	181
2.2.3	Un lissage alternatif . . . . .	181
2.3	Une option sur la marge du producteur de porcs . . . . .	183
2.3.1	Évaluation du prix de l'option sur la marge . . . . .	183
2.3.2	Évaluation numérique du prix de l'option sur la marge . . . . .	184
2.4	Test du contrat dérivé sur le prix moyen . . . . .	187
2.4.1	Le risque de base sur le prix moyen géométrique actualisé	187
2.4.2	Description des tests . . . . .	189
2.4.3	Résultats des tests et commentaires . . . . .	189
2.5	L'assurance chiffre d'affaires et marge . . . . .	191
<b>V</b>	<b>Conclusion</b>	<b>193</b>
	Conclusion	195
	Bibliographie	197
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>207</b>
A	Démonstration du Lemme 2.1	209
B	Analyse temporelle du marché financier	211
C	Le test de normalité d'Anderson-Darling	215
D	Lexique Anglais-Français	217
E	Liste des publications	219
E.1	Articles . . . . .	219
E.2	Communications . . . . .	219
F	Cartes des rendements de l'Illinois	221
	Table des figures	226
	Liste des tableaux	228

*TABLE DES MATIÈRES*

ix

Résumé

229



# Chapitre 1

## Introduction

Les risques de l'entreprise agricole peuvent-ils être gérés par des outils financiers privés?

Les sources de risques sont nombreuses pour les producteurs agricoles. Citons, par exemple, les risques de prix, les risques sanitaires, les risques environnementaux, les risques climatiques plus tous les risques communs aux petites entreprises. Tous ces risques ont des conséquences importantes sur la vie de l'entreprise agricole. Tout d'abord, la connaissance de ces risques influe sur les choix de l'agriculteur, comme par exemple, les choix d'investissements ou les choix de types et de modes de production. Ces risques peuvent être à l'origine d'une perte de rendement ou d'une perte de qualité de la production ou d'un dommage de l'outil de production. Ainsi, ces risques ont des conséquences financières majeures sur le chiffre d'affaires ou sur la marge de l'entreprise agricole.

Les réponses privées sur la gestion des risques de l'entreprise agricole, en terme de contrat financier ou de contrat d'assurance, sont actuellement limitées ou incomplètes. Ces limites s'expliquent en partie par deux caractéristiques des risques agricoles. Ces risques sont tout d'abord multiples et interdépendants. Or, la majorité des contrats de gestion de risques ne traitent qu'une seule composante. Citons, par exemple, les contrats à terme sur le prix ou les contrats d'assurance sur la grêle. Ces contrats ne permettent pas de gérer les risques agricoles dans leur ensemble.

Ensuite, ces risques affectent souvent un très grand nombre de producteurs en même temps. Cela explique pourquoi la mutualisation des risques, qui est la méthode de gestion traditionnelle d'un contrat d'assurance, ne fonctionne pas, et donc, pourquoi peu de contrats d'assurance privés sur les risques agricoles sont disponibles. Ainsi, les contrats de gestion de risques agricoles sont peu nombreux et les contrats existants n'apportent généralement qu'une réponse partielle.

Ces limites des outils de gestion privés sont pour une bonne part à l'origine des interventions des pouvoirs publics dans la gestion des risques agricoles. Mais la situation évolue. En effet, il semble que le niveau de risques des agriculteurs augmente inexorablement et que les pouvoirs publics tentent de se désengager. Le problème de la gestion privée des risques de l'entreprise agricoles devient donc primordial.

L'objectif de la thèse est de concevoir les outils innovants de gestion privée des risques agricoles. Elle s'intéresse en particulier aux éleveurs de porcs bretons.

La **première partie** présente le problème du producteur et les outils actuels dont il dispose pour sa gestion de risques. Elle présente les limites actuelles des contrats financiers et les raisons de la *quasi* absence de contrats d'assurance privés sur la marge ou sur le chiffre d'affaires. Cette partie définit plus précisément le problème qui sera étudié dans la thèse.

La **seconde partie** propose une analyse descriptive de l'assurance et de la finance. Elle analyse, sur une base bibliographique, la gestion financière des risques agricoles par une couverture sur les marchés à terme (*le hedging*) et les contrats d'assurance. Elle présente également différents modèles mathématiques de l'évolution du prix des actifs financiers.

La **troisième partie** présente les développements théoriques de la thèse. Le premier développement théorique concerne la construction d'une provision comptable originale. Cette provision est simple et efficace et elle permettrait au producteur de lisser son chiffre d'affaires. Le deuxième développement théorique construit un contrat à terme et une option sur le chiffre d'affaires qui intègre le risque de prix et le risque de rendement agricole. Ces contrats dérivés sont une première réponse théorique au caractère multidimensionnel des risques agricoles. Le troisième propose de gérer un contrat dérivé sur un prix moyen pour répondre aux risques des agriculteurs qui achètent ou vendent régulièrement un même produit agricole. Le quatrième développement donne une réponse théorique positive à la question : « l'assureur est-il capable de gérer un contrat d'assurance sur le rendement agricole ? » Le cinquième s'intéresse de nouveau au contrat à terme sur le chiffre d'affaires, mais dans un cadre théorique plus complexe. Le sixième et dernier chapitre de cette partie propose une analyse, sur l'ensemble de ces développements théoriques, de leurs intérêts et de leurs limites.

*" Farming looks mighty easy when your plow is a pencil, and you're a thousand miles from the corn field " Dwight D. Eisenhower, US president (1953-1961).*

Cette citation introduit la **quatrième partie** qui réalise les développements appliqués. Tout d'abord, elle teste le contrat à terme et l'option sur le

chiffre d'affaires et le contrat d'assurance agricole dans le cas des producteurs de maïs de l'Illinois aux États Unis. Elle propose ensuite quelques applications et tests pour l'éleveur de porcs breton. Ces applications présentent un intérêt pour les producteurs de porcs bretons, leurs intermédiaires financiers ou leurs assureurs, et la Région Bretagne.





**Première partie**  
**Problématique**



# Chapitre 1

## Le problème du producteur

Les agriculteurs sont confrontés depuis toujours à de nombreux risques techniques et financiers. L'objectif de ce chapitre est de présenter le problème du producteur agricole. Cette étape est nécessaire pour pouvoir ensuite proposer des outils adaptés. Dans une première partie, un aperçu des risques auxquels les producteurs doivent faire face est réalisé. L'évolution de ces risques est présentée dans une seconde partie. Enfin, dans une troisième partie, quelques spécificités des risques agricoles qui font l'objet de la thèse sont analysées.

### 1.1 Les risques du producteur agricole

L'objectif de cette partie est de donner un aperçu des nombreux risques auxquels les producteurs doivent faire face. La **notion de risques** est très importante et peut être définie comme la conséquence néfaste (ou l'ensemble des conséquences néfastes) d'un événement aléatoire. La première section présente brièvement les risques communs à toute activité économique. Les sections suivantes présentent un à un les risques spécifiques majeurs qui affectent les producteurs agricoles (Hardaker et al., 1998). Elles traitent respectivement du risque sur le prix, sur la production (quantité et qualité) et sur les coûts de production. La cinquième et dernière section synthétise l'ensemble de ces risques dans les notions de risque sur le chiffre d'affaires ou de risque sur la marge.

#### 1.1.1 Les risques communs aux entreprises

L'entreprise agricole supporte les risques communs à toute activité économique. Cette section présente tout d'abord les risques des petites entreprises.

Elle mentionne ensuite les risques financiers et enfin les risques institutionnels.

Étant le plus souvent de petite taille, l'entreprise agricole est très sensible aux risques humains ou personnels du ou des dirigeant(s). Elle peut être affectée par des événements tels que la mort, un accident, ou la défaillance d'un homme (ou femme) clef lié à un événement familial ou tout autre raison que ce soit. L'entreprise doit également parfois faire face aux comportements opportunistes et au manque de fiabilité de ses partenaires, de ses clients ou encore de ses fournisseurs. Ces risques ne sont pas propres aux petites entreprises, mais y sont plus importants du fait de l'importance relative de chacun de ses clients et fournisseurs. L'entreprise peut aussi être victime, comme toute entreprise, d'un vol, d'un incendie, d'une perte ou d'un dysfonctionnement de l'équipement et des bâtiments. Le risque de responsabilité prend aujourd'hui une forme et une importance nouvelle. En particulier, la loi du 19 mai 1998 a instauré la 'responsabilité du fait de produits défectueux' pour les producteurs agricoles (Journal Officiel Numéro 117 du 21 Mai 1998).

Le risque financier est lié aux modes de financement de l'activité. Suivant la structure de sa dette, un producteur sera plus ou moins sensible aux risques de taux ou de défaillance. De plus, comme pour toute entreprise, les recettes et les dépenses ne sont pas synchrones (dans le cadre d'une gestion mensuelle, annuelle voir pluriannuelle) et le producteur s'expose à un risque de liquidité. Même pour les entreprises les plus compétitives, le manque de liquidité peut s'avérer un risque majeur.

Le risque institutionnel résulte de changements politiques ou réglementaires. Il peut s'agir de nouvelles réglementations sanitaires, fiscales, ou encore de décisions nationales ou internationales qui affectent le commerce international. Ce n'est pas un risque propre à l'agriculture, mais il peut avoir des répercussions importantes dans ce secteur. Par exemple, de nouvelles normes sur le bien-être animal, sur les traitements (épandage de lisier, pesticides), ou sur les soins vétérinaires peuvent modifier les coûts de production.

Les risques mis en évidence dans cette section n'étant pas spécifiques à l'entreprise agricole, ils ne font pas l'objet de la thèse. Pour mieux comprendre et gérer ces risques, il est possible de se référer à la littérature sur la gestion d'entreprise (Maquet, 1994; Barthelemy, 2000).

### 1.1.2 L'aléa sur le prix

L'aléa sur le prix appelé risque de marché dans les articles anglosaxons (*market price*) correspond aux variations de prix de la production. La formation des prix agricoles est complexe et prend en compte des considérations régionales, nationales et internationales. Comme le processus de production

est généralement long, le prix de vente obtenu par le producteur peut être radicalement différent du prix auquel il pouvait raisonnablement s'attendre en initiant la production.

Par exemple, le prix du kg de porc sur la période 2000-2002 a évolué entre 0,91€ et 1,87€ sur la cotation du Marché du Porc Breton. Or le prix de revient moyen a été estimé à 1,3€/kg sur la même période<sup>1</sup>. Ceci illustre l'importance du risque de marché qui entraîne périodiquement des pertes financières pour les producteurs agricoles.

### 1.1.3 L'aléa sur la production

L'agriculteur est exposé depuis toujours aux aléas climatiques et sanitaires. Un producteur de céréales peut être victime de mauvaises conditions climatiques (pluviométrie, températures) ou de catastrophes (tempêtes, sécheresses, inondations, gels, grêles, parasites). Un éleveur quant à lui peut être également affecté par une épizootie. L'Encéphalopathie Spongiforme Bovine (ESB), la fièvre aphteuse, la peste porcine par exemple ont défrayé la chronique durant les années 1990-2003. La variabilité des rendements est considérée comme inhérente à l'activité agricole. Le nombre d'événements qui peuvent affecter la production est considérable et leurs conséquences financières aussi. Le dommage cumulé annuel moyen d'origine climatique est estimé à 1,3 milliard d'euros en France (Defrance et al., 2002). Leurs analyses seraient complexes et feraient appel à des connaissances agronomiques. C'est pourquoi dans la thèse, le risque de quantité et de qualité sont considérés comme la cause d'une perte pécuniaire indépendamment de sa cause première "agronomique".

Dans le risque de production il est possible de dissocier deux types de dommages. Il s'agit de la perte de rendement et de la perte de qualité.

#### Le rendement agricole

Le premier élément qui caractérise la production est le rendement<sup>2</sup> agricole et une perte de quantité entraîne une réduction du chiffre d'affaires.

Certaines productions comme les cultures céréalières ou fourragères ont une forte variabilité de leurs rendements. Par exemple, les producteurs de

1. EDE Bretagne (2001) « Les résultats technico-économiques des élevages porcins en Bretagne ».

2. Le rendement est la quantité produite par unité de production comme, par exemple, le nombre de tonnes de céréales à l'hectare ou le nombre de porcs produit par truie et par an. En finance, le mot rendement désigne généralement un rendement financier. C'est pourquoi, dans la thèse, ce terme sera soit défini par le contexte, soit complété de l'adjectif agricole ou financier.

mais de l'Iowa ont un rendement moyen de 114,41 bu/acre avec une variance de 395,70 (Nayak et Turvey, 2000). Les rendements des cultures et des élevages hors-sol sont souvent plus stables. Néanmoins, un producteur agricole est rarement à l'abri d'une catastrophe. Par exemple, une panne de la ventilation d'un bâtiment avicole de quelques heures peut suffire à anéantir la production. Les élevages peuvent subir également une crise sanitaire et même un abattage systématique du cheptel comme pour l'encéphalopathie spongiforme bovine. Les producteurs d'huîtres ne sont pas à l'abri d'une tempête ou d'une pollution. Le gel ou la grêle peuvent détruire une saison fruitière. Ainsi, une perte modérée ou forte de rendement affecte la situation financière de l'entreprise agricole.

### La qualité

Le deuxième élément qui caractérise la production est la qualité du produit. Pour beaucoup de produits, il y a une qualité de référence standard. Le prix du produit dépend alors du prix du marché et de la différence de qualité. Une qualité moindre se vend en général à un prix inférieur et affecte, comme le risque de rendement, le chiffre d'affaires du producteur. Par exemple, le Marché du Porc Breton a une grille de valorisation du porc en fonction de sa qualité définie par le poids de la carcasse et le taux de matière grasse. Les productions maraîchères et fruitières sont particulièrement sensibles au niveau de qualité. La perte financière due à la moindre qualité se calcule à partir de la perte de valeur du produit.

#### 1.1.4 L'aléa sur le coût de production

Le risque de marché peut également se répercuter sur le coût de production. En effet, les prix des intrants sont déterminants dans les coûts de production. Par exemple, les variations du prix de revient du kg de porc s'expliquent essentiellement par les variations des prix de l'aliment (maïs, soja, blé...). Le coefficient de corrélation entre le prix de revient et le prix de l'aliment est de 0,88 sur la période 1992-2001 <sup>1 page 9</sup>.

Le risque de production peut engendrer aussi des coûts supplémentaires parfois même sans affecter ni le rendement ni la qualité. Par exemple, un parasite peut générer un surcoût de traitement, une forte pluviométrie peut augmenter la consommation de fertilisants. Pour compenser une trop forte humidité d'une céréale, un producteur peut procéder à un séchage industriel. En période de froid, le porc engraisse moins vite ce qui allonge le temps de production et entraîne un surcoût unitaire.

### 1.1.5 Conséquence sur le chiffre d'affaires et la marge

« La concurrence accrue fragilise les entreprises en érodant leurs marges et en augmentant leurs risques. Il est important que le chef d'entreprise maîtrise ses risques de manière efficace et cohérente. La gestion des risques est de plus en plus intégrée à la gestion normale de l'entreprise. Il est en effet indispensable d'identifier et de mesurer tous les enjeux de l'entreprise qu'ils soient positifs ou négatifs pour faire les bons choix. Ces décisions doivent assurer le développement de l'entreprise tout en évitant que surviennent des sinistres qui nuiraient à ce développement » (André Frisque, Actuaire, cours de DESS d'actuariat, Brest 2000).

Le problème du producteur est que ces trois risques unitaires prix, productions et coûts affectent son chiffre d'affaires et sa marge. Les risques de chiffre d'affaires et de marge étant multidimensionnels, une gestion de risques cohérente se soit d'intégrer toutes les dimensions du problème (Nayak et Turvey, 2000, par exemple). Ce constat simple est une spécificité de la problématique de la thèse et fera l'objet d'une attention particulière.

## 1.2 L'évolution de ces risques

Dans notre monde en constante évolution, les risques agricoles changent également. L'évolution même de ces risques est un risque à part entière. La première section analyse l'effet de la modernisation, la seconde celle de l'évolution du contexte politique. La troisième et dernière section présente les "nouveaux" risques.

### 1.2.1 La modernisation

L'évolution rapide du secteur agricole bouleverse l'importance relative des risques. La volonté de maintenir ou d'augmenter la compétitivité de l'entreprise est le point moteur de cette modernisation. Les progrès agronomiques et zootechniques permettent notamment d'augmenter fortement les performances agricoles. Néanmoins, cette modernisation a un fort impact sur la nature et l'intensité des risques (Babusiaux, 2000). Certains sont mieux maîtrisés, d'autres aggravés, et de 'nouveaux' risques émergent.

La modernisation de l'agriculture a profondément transformé la structure de l'entreprise agricole. Elle nécessite des investissements techniques, financiers et humains plus importants qui conduisent vers une spécialisation des



producteurs. Ces moyens plus importants permettent de meilleures performances, la réduction de certains risques par une plus grande technicité et, un meilleur savoir-faire.

Malgré cela, la modernisation a augmenté le risque global de l'entreprise. Alors qu'une diversification aurait permis d'amortir les chocs, le producteur spécialisé assume de front l'ensemble des sinistres de sa production.

Au delà du producteur, les régions elles-même se sont parfois spécialisées et on parle alors de bassin de production. Si la filière est sinistrée, cela affecte alors toute l'économie régionale. Ainsi, la Région Bretagne, où les éleveurs de porcs sont fortement implantés (la moitié de la production nationale), est particulièrement concernée par ce problème.

Dans certains cas, les méthodes modernes aggravent les risques de production. Les engrais permettent certes de meilleurs rendements mais augmentent la sensibilité des productions aux aléas climatiques. Il en est de même pour les variétés de fruits ou de légumes qui sont soit précoces soit tardives pour permettre aux producteurs de réaliser une saison plus longue. L'agriculture moderne est donc plus performante mais parfois au prix d'un risque plus élevé pour l'entreprise.

### 1.2.2 L'évolution du contexte politique

Historiquement, l'État intervient fortement dans la gestion des risques agricoles que ce soit par des prix de soutien et par des aides en cas de sinistres. Or, en France et en Europe, les pouvoirs publics tentent de se désengager. Il est donc nécessaire d'être capable, demain, de faire face à une plus grande variabilité des prix et aux sinistres majeurs.

L'évolution du marché agricole européen et mondial s'accompagne d'une hausse continue des exportations de produits agricoles français. Il en résulte un risque lié à la politique internationale. Le risque sur les exportations peut également se manifester lorsque, suite à l'apparition d'un problème sanitaire, nos produits deviennent suspects aux yeux des acheteurs étrangers. Ou encore, les producteurs peuvent être victimes d'un interdit (*ban*) ou d'un appel au boycott des produits français. Les contextes politiques intérieurs et extérieurs peuvent donc créer des dommages aux agriculteurs.

### 1.2.3 Les « nouveaux » risques

L'évolution de la réglementation et des attentes de la société fait émerger des risques d'un genre nouveau. Les risques environnementaux, les risques de santé publique prennent aujourd'hui une importance nouvelle. L'agriculteur peut en être victime ou responsable. S'il est responsable, il doit alors en

assumer les conséquences au titre de sa responsabilité civile et pénale, risque qui prend une importance nouvelle pour l'ensemble des entreprises.

Les technologies et pratiques nouvelles génèrent des risques nouveaux dont on ne peut mesurer l'importance. L'utilisation d'organismes génétiquement modifiés (OGM) et l'épandage de boues des stations d'épuration en sont deux exemples.

### 1.3 Les spécificités des risques agricoles

Pour bien définir le problème du producteur, il est nécessaire de décrire les spécificités des risques agricoles. La première section montre que ce sont des risques peu ou pas contrôlables, la deuxième exprime le caractère systémique et multidimensionnel de ces risques.

#### 1.3.1 Des risques incontrôlables

La totale maîtrise des risques agricoles n'est pas envisageable pour au moins une raison majeure : la création relève d'une complexité et d'une force qui nous échappe. Le monde végétal et le monde animal sont si complexes qu'il est impossible de prévenir ou de traiter toutes les maladies ou tous les problèmes. De plus, nous n'avons aucun pouvoir sur les éléments climatiques.

Le producteur n'a pas, non plus, pouvoir sur le risque de marché. Dans l'exemple du prix du porc, il est possible de constater au moins deux variations importantes sur les prix : une hausse des prix en 2000 suite à la crise de l'Encéphalopathie Spongiforme Bovine et une chute des cours en 2001 causée par l'embargo de la fièvre aphteuse<sup>3</sup>. Ces deux variations semblent indépendantes des choix individuels ou collectifs des producteurs de porcs bretons.

Le fait que ces risques soient peu ou pas contrôlables montre l'importance pour les producteurs agricoles de disposer des outils financiers de gestion de risques adaptés.

#### 1.3.2 Des risques systémiques et multidimensionnels

Ces mêmes risques incontrôlables affectent souvent l'ensemble, ou un grand nombre, des agriculteurs quand ils se concrétisent. C'est pourquoi, il y a une forte corrélation entre les risques des agriculteurs. Par exemple, le coefficient de corrélation entre les rendements agricoles des producteurs de maïs du comté de Champaign (État de l'Illinois) est estimé à 80%. Dans la littérature

3. Souvent écrit sous le sigle FMD, *Foot and Mouth Disease*.

économique agricole anglosaxonne, ces risques sont appelés **risques systémiques** (*systemic risk*) (Miranda et Glauber, 1997, par exemple). Dans le monde agricole, cette composante systémique du risque est souvent prédominante. Les risques systémiques sont opposés aux **risques individuels ou idiosyncrasiques**<sup>4</sup> (*idiosyncratic risk*). De plus, comme le montre la Section 1.1, les risques agricoles sont des risques multidimensionnels qui intègrent le risque de prix, les risques de production et les risques sur les coûts de production. L'étude des risques systémiques et multidimensionnels est très importante dans le cadre d'une gestion financière des risques de l'entreprise agricole et est au cœur de la thèse.

*Quelque soient les performances ou les capacités des producteurs, ils ne peuvent ni individuellement ni collectivement maîtriser ces risques. Le problème du producteur est donc la mise en œuvre d'une gestion financière cohérente de son risque systémique et multidimensionnel.*

*Cette formulation générale est particulièrement vraie dans le cas des éleveurs de porcs bretons qui sont exposés à un niveau de risque particulièrement élevé. Le cas de l'éleveur de porc constitue une préoccupation majeure de la région Bretagne et s'inscrit dans la problématique de la thèse.*

---

4. Les risques agricoles sont dans la thèse considérés comme la somme de leurs composantes systémiques et de leurs composantes idiosyncrasiques. Un risque systémique correspond dans le texte à un risque qui a une composante systémique majeure.

## Chapitre 2

### Les réponses actuelles

La gestion financière des risques est un problème important du producteur agricole. Dans ce chapitre, sont exposées les réponses actuelles à ce problème ainsi que leurs intérêts et leurs limites. Comme toute entreprise, l'agriculteur doit appliquer la méthode générale de gestion de risques décrite dans une première partie. Les outils traditionnels de gestion en agriculture sont présentés dans la deuxième partie. La troisième partie développe les programmes étatiques des pays de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE). Enfin, les parties quatre et cinq s'intéressent plus particulièrement à ce que proposent aujourd'hui les assureurs et les marchés à terme.

#### 2.1 Méthode générale de gestion du risque

Le management du risque est l'application systématique de l'ensemble des techniques et méthodes qui permettent d'identifier, analyser, évaluer, traiter et maîtriser le risque (Hardaker et al., 1998). Le management du risque est incontournable quelque soit la nature ou la taille de l'entreprise. Il commence par une analyse du contexte. Il s'agit de définir les intervenants, les objectifs prioritaires et les capacités de l'entreprise. Il faut ensuite lister et définir l'ensemble des risques. Puis il faut les analyser un à un pour les évaluer par rapport aux capacités de l'entreprise à les supporter. Cela peut être une étape difficile car l'information est souvent incomplète. Les risques ne sont pas connus (exemple type du risque à long terme sur les OGM) ou évoluent rapidement. Si une évaluation rigoureuse est possible, le gestionnaire peut prendre des mesures 'optimales' au sens de modèles mathématiques. Les gestionnaires chercheront à la fois à réduire la fréquence des sinistres et leurs conséquences. S'il désire intervenir sur son risque, il peut tout d'abord le

conserver et le gérer par lui même (exemples d'un système d'alarme ou de l'épargne). Il peut également le partager ou le transférer (à un assureur par exemple). En plus de l'importance des risques, les décisions dépendront de la sensibilité aux risques des responsables. Une fois qu'elles sont prises, il est nécessaire de réappliquer cette méthodologie même dans un environnement stable car la mise en œuvre des solutions modifie, peut être, le contexte et la structure des risques. Cette méthode est illustrée sur la Figure 2.1.

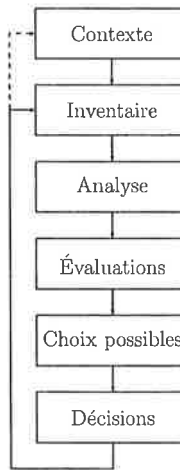


FIG. 2.1 – *Présentation d'une méthode de gestion des risques de l'entreprise*

## 2.2 Quelques outils traditionnels en agriculture

La notion de risques en agriculture n'est pas nouvelle, et quelques outils traditionnels peuvent être utilisés. Les deux premières sections rappellent l'intérêt des très vieux outils que sont l'épargne et la diversification. Les deux sections suivantes mentionnent les contrats de production et les coopératives.

### 2.2.1 L'épargne

L'épargne de précaution est sans doute la méthode la plus élémentaire d'une gestion de risques. Elle n'intervient pas sur l'aléa mais réduit, en cas de dommage, les conséquences. Mécanisme très simple, l'épargne n'en est pas moins difficile à initier et à maintenir. Elle est difficile à initier car il faut d'abord constituer son pécule pendant les bonnes années avant de pouvoir en bénéficier au cours des mauvaises. Elle est également difficile à maintenir car les agriculteurs, comme beaucoup de chefs d'entreprise, ont tendance, en cas de bénéfice, à investir plutôt qu'à épargner. *Via* la proposition d'une provision comptable innovante, l'épargne fait l'objet d'un chapitre de la thèse.

#### L'exemple du Canada

Les gouvernements peuvent encourager les producteurs à utiliser cet outil de base. Le Canada a fait ce choix au moyen du Compte de Stabilisation du Revenu Net<sup>1</sup> (CSRN). C'est un programme à participation facultative qui a été mis sur pied conjointement par les producteurs, le gouvernement du Canada et les provinces participantes. Il peut être utilisé pour beaucoup de productions, la liste de ces derniers étant différente suivant les provinces. Son but est d'aider les producteurs à stabiliser leurs revenus agricoles annuels sur une base individuelle. Les producteurs peuvent déposer des fonds chaque année dans leur compte de stabilisation d'un montant équivalent à un maximum de trois pour cent de leurs ventes nettes admissibles (VNA), et, toucher, en contrepartie, des contributions du gouvernement. Ils obtiennent aussi de l'État un intérêt de trois pour cent, en sus des taux d'intérêt réguliers qu'offrent les institutions financières. Durant les années de faibles revenus, les producteurs peuvent prélever la réserve réalisée antérieurement.

La principale critique concerne la justification des modalités de fonctionnement de ce compte de stabilisation. Il n'y a aucune contrainte qui impose au producteur que les dépôts et retraits soient en cohésion avec la variabilité de son revenu. Plus encore, le producteur qui souhaiterait l'utiliser pour stabiliser son revenu n'a pas la garantie de pouvoir le faire car le dépôt annuel est limité arbitrairement. Or, cette limite de trois pour cent de ses ventes nettes admissibles est insuffisante au regard de la variabilité des revenus agricoles. C'est pourquoi beaucoup d'agriculteurs canadiens considèrent ce compte de stabilisation comme un placement à taux bonifié.

---

1. *Net Income Stabilization Account (NISA)* [www.agr.gc.ca](http://www.agr.gc.ca)

### 2.2.2 La diversification des productions ou des activités

Une diversification des productions ou des activités permet de réduire le niveau de risque de l'entreprise. Quand un sinistre survient sur une production, les conséquences sont alors moindres sur le revenu de l'entreprise. Pourtant, comme le précisait la section 1.2.1, les producteurs tendent vers une spécialisation de leur production agricole. Ils gagneraient ainsi en productivité et en performance grâce une plus grande technicité. L'intérêt d'une diversification des productions semble donc limité pour l'agriculteur. Certains agriculteurs français s'engagent plutôt vers une diversification de leurs activités. L'activité agricole est alors complétée par une autre source de revenu (second emploi, gîte rural...).

### 2.2.3 Les contrats de production

Les contrats de production sont courants pour certaines productions (production maraîchère ou avicole). Dans les contrats de production mis en place, certaines clauses sont presque toujours présentes : le respect de normes physiques, qualitatives et technologiques, le suivi technique, le choix de la variété et l'utilisation de semences certifiées pour les légumes. De nouvelles clauses liées à la demande de traçabilité apparaissent aujourd'hui.

Le contrat de production comprend le plus souvent la réunion de deux engagements distincts au sein d'un même contrat. En premier lieu, le donneur d'ordre confie au producteur la mission de produire un produit qui doit répondre à un cahier des charges. En second lieu, le donneur d'ordre s'engage à acheter la production réalisée par le producteur en exécution du contrat. Le plus souvent, le prix est soit déterminé à l'avance, soit déterminable à partir d'un barème (*formula pricing*) ou du prix de marché à l'époque de la livraison<sup>2</sup>.

Ces contrats interviennent dans la gestion de risques du producteur. Ils augmentent fortement le risque de contre-partie parce que le producteur n'a plus qu'un client. Néanmoins ils permettent de réduire le risque de prix lorsque le donneur d'ordre assume tout ou partie de ce risque. De plus, par l'application stricte et certifiée par un tiers d'un cahier des charges, ils réduisent son risque de responsabilité.

---

2. Informations obtenues sur le site [www.hameau-guerard-et-associes.com](http://www.hameau-guerard-et-associes.com)

### 2.2.4 Les coopératives

Les agriculteurs, adhérents d'une coopérative<sup>3</sup>, se regroupent pour bénéficier d'une mise en commun de ressources financières dans le but de commercialiser leurs produits. La coopérative prolonge l'activité de production aux activités d'approvisionnement, de collecte, de transformation et de commercialisation. Elle est aussi garante des principes comme la libre adhésion, la solidarité, le pouvoir démocratique (*i.e.* un homme, une voix) et l'exclusivisme.

Les coopératives mettent en commun certains achats et ventes des producteurs dans le but de développer le pouvoir de négociation de leurs adhérents. La coopérative offre une garantie de débouchés pour les produits de l'agriculteur, et lui propose généralement un prix moyen court terme. Par ailleurs, certaines coopératives aident le producteur dans sa gestion du risque de production par la formation et le suivi technique.

Par ailleurs, la coopérative est une forme de coordination verticale. Elle opère souvent une transformation des produits agricoles (les coopératives laitières par exemple). À travers la coopérative, l'agriculteur devient en plus transformateur. Il opère ainsi une diversification ou extension de son activité qui peut avoir une incidence positive et/ou négative à la fois sur son revenu et sur son niveau de risque global.

## 2.3 L'assurance privée en France

Selon la Fédération Française des Sociétés d'assurance, le montant des cotisations perçues au titre de l'assurance des biens agricoles s'est élevé à 820 millions d'euros en 2000. La plupart de ces contrats ne couvrent pas les risques spécifiques agricoles et ils sont brièvement exposés dans la première section. La deuxième section donne un aperçu des contrats d'assurance proposés en France qui protègent le producteur agricole contre un dommage sur sa production.

### 2.3.1 L'assurance des risques communs aux entreprises

Les assureurs agricoles assurent les engins, les bâtiments et leurs contenus contre les risques classiques tels que le vol, l'incendie, les accidents. Une part

3. L'Alliance Coopérative Internationale (1995) définit la coopérative comme :

« une association autonome de personnes volontairement réunies pour satisfaire leurs aspirations et besoins économiques, sociaux et culturels communs, au moyen d'une entreprise dont la propriété est collective et où le pouvoir est exercé démocratiquement » (International Cooperative Alliance, 1995).



importante de l'assurance agricole concerne la responsabilité civile (Defrance et al., 2002). Les assurances de responsabilité civile intègrent les risques particuliers des agriculteurs tels que le risque de pollution ou d'accident causés par eux-mêmes ou par leurs animaux.

Par ailleurs, la protection sociale des agriculteurs constitue un autre domaine important l'assurance agricole. Comparé au régime général, les prestations sociales de base étaient très défavorables aux agriculteurs. Les modalités de cotisations et de prestations, fixées par la Mutualité Sociale Agricole, ont néanmoins nettement progressé ces quinze dernières années. Dans cette branche de l'assurance agricole, l'offre de contrats privés dit complémentaires est très importante que ce soit pour la maladie, la protection familiale, la retraite et la pension de veuvage.

### 2.3.2 L'assurance récolte

Il y a peu de contrats proposés par les assurance privées sur les risques de production, chiffre d'affaires ou marge en France. Les garanties récoltes qui existent proposent une indemnité financière en cas de grêle, de gel, d'incendie ou de tempête. Il existe également des garanties pour les éleveurs contre le risque de mortalité du bétail.

L'assurance grêle assure les productions céréalières et fruitières et couvre la perte de quantité (ou la perte qualitative) de l'année de survenance. Le sinistre est signalé dès la survenance, mais le dommage est constaté seulement au moment de la récolte. Par ailleurs, quelques assureurs français proposent des assurances sur les récoltes contre les risques de tempête et le gel. La survenance d'une grêle est généralement très localisée et n'est, de ce fait, pas un risque systémique. Ce risque relève en France comme de nombreux pays de l'assurance privée.

Une autre branche importante de l'assurance agricole concerne le risque de mortalité du bétail. Il peut s'agir d'assurer des animaux de valeur, de compétition ou de reproduction. Elle concerne de nombreuses espèces telles que les chevaux, les bovins, les ovins, les caprins, les porcins, et mêmes, les chiens et les chats. Une couverture particulière est proposée pour couvrir les accidents d'élevage en hors sol (élevages avicoles essentiellement).

C'est globalement tout ce que propose l'assurance privée agricole en France (Defrance et al., 2002). Il n'y pas de contrat sur le rendement ou sur le revenu. Ces mêmes limites ne sont pas propres à la France et se retrouvent dans les autres pays. La raison fondamentale provient des particularités des risques agricoles et notamment de leurs natures systémiques. La mutualisation, fon-

dée sur la loi des grands nombres<sup>4</sup>, est donc inopérante. C'est pourquoi, les pouvoirs publics mettent en œuvre des programmes dans lesquels ils prennent en charge tout ou partie du risque.

## 2.4 Les programmes agricoles dans l'OCDE

Ces programmes agricoles comprennent une grande diversité de contrats (Moreddu, 2000). Certains contrats sont des contrats d'assurance, d'autres y ressemblent, et d'autres encore sont des contrats financiers conçus pour aider la gestion de risques des producteurs. Ils existent grâce à l'intervention des pouvoirs publics qui interviennent de deux manières différentes. Ils participent soit au financement du contrat (paiement partiel de la prime, paiement des frais de gestion), soit à la gestion du contrat souvent *via* une «réassurance étatique». Le plus généralement, ils participent au financement *et* à la gestion.

La première section présente le Fonds National de Garantie des Calamités Agricoles proposé en France. La deuxième section présente le cas de l'Espagne. La troisième et dernière section développe les contrats proposés aux États Unis.

### 2.4.1 Fonds National de Garantie des Calamités Agricoles en France

Le Fonds National de Garantie des Calamités Agricoles (FNGCA) a été créé en France par la loi du 10 juillet 1964 (L. no 64-706, art. 2, JO 12 juillet 1964). Il est précisé dans que *« sont considérées comme calamités agricoles au sens de la présente loi, les dommages non assurables d'importance exceptionnelle dus à des variations anormales d'intensité d'un agent naturel, lorsque les moyens techniques de lutte préventive ou curative employés habituellement dans l'agriculture n'ont pu être utilisés ou se sont révélés inopérants. »*

Ce fonds public a été mis en place pour parer les lacunes de l'assurance privée. Les cotisations sont couplées avec l'assurance facultative tempête et incendie. C'est donc un système obligatoire dans le cadre d'un contrat facultatif qui permet d'inciter les agriculteurs à s'assurer contre ces risques.

---

4. La loi des grands nombres suppose que les aléas sont indépendants et identiquement distribués.

### 2.4.2 Exemple de l'Espagne

Un programme global d'assurance-récolte multi-périls a été mis en place en 1980. Il couvre un grand nombre de produits, y compris les fruits et légumes, et met en commun l'ensemble des recettes des contributions des agriculteurs et des subventions du gouvernement. Les agriculteurs peuvent choisir le niveau de couverture et le type de risques assuré (sécheresse, gel inondation, etc). La garantie porte sur le chiffre d'affaires à hauteur des coûts de production. Les primes varient selon les niveaux de risques régionaux et individuels et l'État intervient en subventionnant la prime et en réassurant le risque (Burgaz, 2000).

### 2.4.3 Description des principaux programmes américains

Dans cette section sont exposés quelques contrats qui sont proposés aux agriculteurs américains. Les garanties peuvent porter sur le revenu ou le rendement par acre. Après un tour d'horizon des différentes garanties proposées aux producteurs américains, la garantie offerte par chaque contrat sera explicitée.

Le *Multiple-Peril Crop Insurance* (MPCI) est le plus ancien contrat d'assurance disponible dans la plupart des États. Il offre une protection sur le rendement contre beaucoup de risques et pour un grand nombre de productions. Le contrat d'assurance *Income Protection* (IP) protège le producteur contre une baisse de chiffre d'affaires. La couverture porte sur les dimensions prix et rendement mais les risques qui font l'objet d'une indemnité sont plus restrictifs que le MPCI. Le *Crop Revenue Coverage* (CRC) est aussi un contrat sur le chiffre d'affaires. Il est plus étendu que le IP et offre une garantie contre les mêmes sources de risques que le MPCI. Il se différencie également du IP en garantissant un prix minimum (*the base price*). Le *Revenue Assurance* (RA) offre une couverture très proche du CRC ou du IP suivant les options choisies.

Le *Group Risk Plan* (GRP) et le *Group risk Income Plan* (GRIP) sont des contrats de couverture respectivement basés sur le rendement et le revenu moyen par acre du comté (*county*). Le dernier contrat mentionné dans cette section est le *Catastrophic Contract* (CAT) qui est la couverture minimale proposée.

### Multiple-Peril Crop Insurance

Le MPCCI indemnise la perte de rendement quand celui-ci tombe en dessous du niveau garanti (si le risque en cause est compris dans la garantie). Pour beaucoup de productions, la perte peut être causée par différents types d'intempéries et/ou de maladies inévitables. Cette perte financière est valorisée avec un prix fixé à la signature du contrat. L'équation du Résultat Net du MPCCI peut s'écrire de la manière suivante :

$$RN_{MPCCI} = \delta f_0 \times \max(\gamma y_0 - y_1, 0) - P_{MPCCI} \quad (2.1)$$

où  $RN$  représente l'indemnité nette du contrat,  $\delta f_0$  est le prix de la valorisation de la perte ( $\delta$  est un pourcentage choisi par l'assuré du prix projeté  $f_0$  (*projected price*)),  $\gamma$  est le niveau de couverture<sup>5</sup> et  $y_0$  et  $y_1$  sont respectivement le rendement espéré du producteur au semis et le rendement individuel obtenu à la récolte. Le  $P_{MPCCI}$  correspond à la valeur de la prime du contrat MPCCI. Le rendement espéré du producteur est noté APH (*Actual Production History*), il prend en compte les rendements antérieurs du producteur.

### Income protection

Le IP protège à la fois contre une baisse de chiffre d'affaires quand les prix et/ou le rendement baissent. Le niveau de couverture est basé sur le APH, le niveau de couverture et le prix projeté. Les risques couverts sont plus restrictifs que le MPCCI. Le résultat net devient (avec les mêmes notations) :

$$RN_{IP} = \max(\gamma f_0 y_0 - f_1 y_1, 0) - P_{IP} \quad (2.2)$$

où  $f_1$  est le prix du marché à la récolte et  $P_{IP}$  correspond à la valeur de la prime du contrat IP.

### Crop Revenue Coverage

Le CRC propose quant à lui une indemnité en cas de baisse de prix et/ou de rendement. Il se différencie du IP en garantissant un prix minimum et couvre globalement les mêmes risques que le MPCCI. Le résultat net du contrat CRC s'écrit (avec les mêmes notations) :

$$RN_{CRC} = \max(0, 95\gamma \max(f_0, f_1)y_0 - f_1 y_1, 0) - P_{CRC} \quad (2.3)$$

Bien que ce contrat propose une combinaison prix-rendement, il est clair que la base de ce contrat n'est pas le chiffre d'affaires.

5. Le paramètre  $\gamma$  peut prendre les valeurs 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 pour cent.

Rendement espéré du comté	40 bu./acre
Niveau de couverture	90%
<b>Rendement garanti <math>\gamma</math></b>	<b>36 bu./acre</b>
Protection maximale	\$420/acre (fixé par la RMA)
Niveau de couverture choisi	80% (de 50% à 90% de \$420)
Niveau de garantie	\$336/acre
Rendement obtenu (moyenne du comté)	30 bu.
Pourcentage de perte de rendement	16,7% (= (36 - 30)/36)
<b>Paieiment</b>	<b>\$56/acre (= 336 × 16,7%)</b>

TAB. 2.1 - Illustration du contrat GRP

### Des contrats financiers

Le *Group Risk Plan* (GRP) et le *Group Risk Income Protection* (GRIP) sont deux contrats<sup>6</sup> de couverture sur le rendement et le revenu. Ils se basent sur les rendements agrégés des comtés et non sur les rendements individuels.

Ils dépendent uniquement des rendements moyens du comté et des prix à terme. Le rendement individuel  $y_1$  n'intervient pas dans le calcul. Par conséquent, la prime n'est pas relative au APH du producteur et est donc indépendante de ses résultats antérieurs. La prime est établie à partir des rendements historiques moyens du comté (depuis 1962). Le contrat GRP propose une indemnité si le rendement moyen du comté  $\bar{y}_1$  est inférieur au rendement garanti et le contrat GRIP propose une indemnité si le revenu moyen est inférieur au revenu garanti. Le contrat GRP est illustré dans un exemple (TAB 2.1) et peut s'écrire de la manière suivante (avec les mêmes notations) :

$$RN_{GRP} = \delta F_0 \times \max(\gamma \bar{y}_0 - \bar{y}_1, 0) - P_{GRP} \quad (2.4)$$

où  $F_0$  est le prix à terme et les valeurs  $\bar{y}_0$  et  $\bar{y}_1$  sont respectivement le rendement moyen espéré du comté en début du contrat et le rendement moyen observé à la fin de contrat.

Quant au contrat GRIP il peut s'écrire (avec les mêmes notations) :

$$RN_{GRIP} = \gamma \max(\delta F_0 \bar{y}_0 - F_1 \bar{y}_1, 0) - P_{GRIP} \quad (2.5)$$

6. Edward W., Group Risk Plan and Group Risk Income Protection, Iowa State University, FM1850 March 2003.

où  $F_1$  correspond au prix du contrat à terme à la récolte<sup>7</sup>. Ces deux contrats sont intéressants parce qu'ils ciblent bien les préoccupations du producteur : son rendement et son revenu. Par contre, ils ne couvrent que la composante systémique des risques du producteur. Le producteur doit donc lui-même faire face aux aléas individuels qui perturbent son revenu (un risque de base). Ces contrats sont moins chers que les contrats basés sur le revenu ou le rendement individuel pour au moins trois raisons. Tout d'abord, dans le cas d'un contrat d'assurance, il y a un traitement individuel coûteux de chaque sinistre **avec souvent, en sus, la nécessité d'une expertise coûteuse**. Les coûts de gestion sont donc bien moindres. Également, le **risque couvert**<sup>8</sup> est très différent et n'a donc pas le même prix. Enfin, l'aléa moral est une troisième raison qui permet d'expliquer le coût plus élevé de l'assurance.

### L'assurance sur le bétail

Plusieurs programmes en cours aux États Unis permettent aux éleveurs de se couvrir contre le risque de prix<sup>9</sup> ou contre le risque de marge. Notons qu'il existe aussi un programme canadien original qui propose aux éleveurs une couverture contre les prédateurs<sup>10</sup>. Le premier contrat présenté concerne une garantie sur le prix pour les éleveurs de bovins et les éleveurs de porcs. Le deuxième concerne le programme de couverture sur la marge dédié aux producteurs de porcs.

Le *Livestock Risk Protection plan* (LRP) offre une garantie contre une baisse du prix du bétail<sup>11</sup>. Trois produits sont différenciés : le prix du bovin avant engraissement (*Fed Cattle*), le prix du bovin après engraissement (*Feeder Cattle*) et le prix de la carcasse de porc (*Swine*). Dans sa forme, le contrat est similaire à l'option de vente sur le prix et ne prend pas en compte ni les risques de rendement ni les risques de qualité. Ce contrat est subventionné par l'État à hauteur de 13%. **Le contrat sur les bovins après engraissement est disponible sur dix États aux États Unis et le contrat sur les bovins avant engraissement est disponible dans les trois États suivants : Illinois, Iowa et Nebraska.** Le même programme sur le porc est disponible uniquement dans l'Iowa.

Le *Livestock Gross Margin* (LGM) est un programme disponible dans l'Iowa pour couvrir les producteurs de porcs contre une baisse de leur marge. Il s'agit de la marge calculée sur une période de six mois à partir des prix

7.  $F_1 = f_1$  si l'échéance du contrat à terme la date de la récolte coïncident.

8. La variance des  $y_1$  des producteurs est plus importante que la variance de  $\tilde{y}_1$ .

9. [www.farmers-national.com/Insurance/Livestock/](http://www.farmers-national.com/Insurance/Livestock/)

10. [www.gov.nf.ca/agric/programs/agribus/liveins1.htm](http://www.gov.nf.ca/agric/programs/agribus/liveins1.htm)

11. [www.rma.usda.gov/policies/2004LRP.html](http://www.rma.usda.gov/policies/2004LRP.html)

de la carcasse de porc, des prix du maïs et des prix du soja. L'assureur qui propose cette garantie a besoin lui même de se couvrir sur les marchés à terme. Or, la loi dans l'État de l'Iowa ne le permettait pas. Nelson Maurice<sup>12</sup> explique que ce contrat innovant a été un élément moteur pour modifier la loi dans l'Iowa. L'originalité de ce programme est double. Premièrement, le contrat concerne le risque de marge. Deuxièmement, l'assureur qui intègre ce programme utilise les contrats à terme dans sa gestion du contrat.

### Les garanties catastrophes

Enfin, notons la présence d'une protection prise entièrement en charge par l'État, mis à part les \$100 de frais de gestion. C'est la plus faible protection du MPCI qui correspond à un niveau de couverture de 50%, avec le rendement valorisé à hauteur de 55% du prix projeté ( $\gamma = 0,50$  et  $\delta = 0,55$ ).

#### 2.4.4 Les limites du marché de l'assurance privée

Le nombre et l'importance des programmes soutenus par les pouvoirs publics mettent en évidence les limites de l'assurance. Il ne s'agit manifestement pas d'une volonté politique générale que de fortement soutenir la gestion des risques de l'agriculture. En 1996, au lancement du MPCI, la politique affichée aux États Unis était dite « libérale » et a tenté de céder le risque aux institutions privées. Les pouvoirs publics semblent plutôt soutenir la gestion des risques agricoles par nécessité. Les limites de l'assurance persistent car depuis, la nouvelle loi américaine, qui a été adoptée en mai 2002, marque une rupture complète avec l'orientation la loi *Freedom to Farm* de 1996 (Petit, 2002).

*Ainsi, bien que l'assurance soit capable de proposer des formes de contrat attractives, elle ne peut le faire notamment à cause du caractère systémique des risques agricoles.*

## 2.5 Les marchés à terme et options

Les marchés à terme et les options jouent un rôle essentiel dans la gestion des risques agricoles. Après une présentation succincte de ces contrats, la section suivante présente les principaux contrats cotés en France, en Europe et aux États Unis. Enfin la troisième et dernière section explicite les limites majeures de ces contrats.

12. Senior Underwriter Research and Development, Risk Management Agency, US.

### 2.5.1 Description de base

Le contrat à terme est une promesse de vente (achat) d'un produit où d'un actif financier appelé sous-jacent à une date ultérieure et pour un prix immédiatement fixé. Le contrat est négocié par un acheteur et un vendeur ou leurs représentants. Le titre de propriété n'est pas échangé au moment où le contrat est établi et il n'y a pas de transfert d'argent de l'acheteur vers le vendeur. Un opérateur a le choix entre remplir son contrat à l'échéance (livrer ou recevoir), ou dénouer sa position en rachetant un contrat s'il était vendeur, ou en vendant s'il était acheteur.

On distingue le contrat à terme (*Futures*), et le contrat à livraison différée (*Forward*) sous deux aspects : son formalisme et son dénouement. Le contrat à terme est un contrat très codé et standardisé, il s'échange sur une bourse de commerce (*Exchange*). Par contre, la rédaction du contrat à livraison différée est laissée à l'initiative des deux opérateurs engagés dans la transaction.

L'option est un contrat par lequel le porteur (ou souscripteur) a le droit, et non l'obligation, d'acheter (option d'achat *call*) ou de vendre (option de vente *put*) une quantité donnée de l'actif sous-jacent au prix d'exercice (*strike price*) à une date future moyennant le paiement immédiat d'une prime (Hull, 2000). Les stratégies simples des options sont illustrées sur la Figure 2.2.

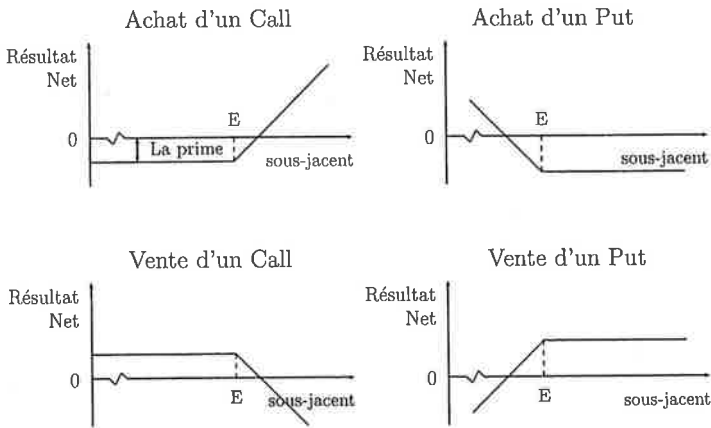


FIG. 2.2 – Les stratégies simples sur les options ( $E$  le prix d'exercice)



Les marchés à terme et les options sont utiles pour gérer les risques agricoles. Ils peuvent être utilisés directement par les producteurs, par les coopératives ou par d'autres intermédiaires financiers. Ils sont capables d'absorber de grandes variabilités et sont adaptés à la nature systémique des risques agricoles.

### 2.5.2 Les contrats cotés

Les contrats cotés sont généralement des contrats à terme sur le prix du produit agricole. En Europe, le Matif<sup>13</sup> propose des contrats à terme et des options sur le prix du blé (dont les caractéristiques sont données à titre d'exemple sur le Tableau 2.2), du maïs et du colza cotés à Paris. EuroNext.Liffe propose également des contrats sur le cacao, le café, le sucre et le blé fourragé cotés à Londres, et des contrats sur la pomme de terre et sur la viande de porc cotés à Amsterdam<sup>14</sup>. Le marché à terme de Hanovre<sup>15</sup> propose également des contrats à terme sur le prix du porc, du porcelet, des pommes de terre, de blé et de colza (tourteau et huile). Aux États Unis, il existe des contrats à terme sur les productions principales (prix du coton, des céréales, du lait et du beurre, prix de certaines viandes...). Il existe aussi des contrats à terme sur le prix des fertilisants et de l'énergie (chauffage des productions hors sol) qui peuvent être utilisés par les producteurs.

De nombreux dérivés climatiques apparaissent sur les marchés financiers, en particulier au États Unis. En Europe, Euronext.Liffe propose maintenant des contrats à terme sur la température de Londres, de Paris et Berlin. L'objectif d'Euronext à moyen terme est de lancer des contrats financiers sur ces indices de température sur cinq villes de France. Ces contrats financiers pourraient être utilisés par les producteurs agricoles pour réduire leurs risques.

Le Chicago Board of Trade a proposé sur la période 1995-2000 des contrats à terme sur le rendement agricole du maïs sur quatre États des États Unis. Ils complètent les contrats à terme sur le prix. Ce contrat est original parce que le sous-jacent n'est ni un actif financier, ni une matière première. C'est le rendement agricole moyen constaté sur la région de référence multiplié par un coefficient monétaire. Le Chicago Board of Trade a pour projet de coter de nouveau un contrat sur le rendement pour 2004.

En marge des marchés financiers, des entreprises privées proposent des contrats dérivés. Ce sont souvent des options, mais il peut s'agir de contrats plus originaux adaptés aux besoins de leurs clients. Les entreprises couvrent

13. Le MATIF est une filiale de EuroNext ([www.matif.fr](http://www.matif.fr)).

14. Informations obtenues sur le site [www.liffe-commodities.com/french/commodities.aspx](http://www.liffe-commodities.com/french/commodities.aspx)

15. Informations obtenues sur le site [www.wtb-hannover.de](http://www.wtb-hannover.de)

Contrat à terme sur le blé de meunerie	
Taille du contrat	50 tonnes
Qualité	Blé tendre de toutes origines, de <b>qualité saine, loyale</b> et marchande où : - poids spécifique : 76 kg/hl - teneur en humidité : 15 % - grains brisés : 4 % - grains germés : 2 % - teneur en impuretés : 2 %
Échéances	septembre (U), novembre (X), janvier (F), mars (H), mai (K), juillet (N)
Mode de cotation	Euro par tonne
Échelon minimum de cotation	0,25€ par tonne (12.50 € par contrat)
Livraison	livraison physique de la marchandise à l'échéance du contrat, Rouen, France.

TAB. 2.2 – Caractéristiques du contrat à terme sur le blé coté sur le Matif

généralement le risque lié à la commercialisation de ces contrats en se positionnant sur les contrats sous-jacents cotés. Elles jouent alors le rôle d'intermédiaire qui profite aux producteurs et aux marchés. En effet, elles fournissent aux producteurs des contrats plus adaptés et apportent de la liquidité aux marchés.

### 2.5.3 Les limites de ces contrats dans la gestion de risques

Les contrats financiers sont des outils incontournables dans la gestion des risques agricoles. Pourtant, l'accès aux marchés financiers est difficile et ces contrats ne répondent que partiellement à la nature des risques agricoles.

Comme il a été montré, seules certaines productions majeures font l'objet d'une cotation. De ce fait, tous les producteurs ne peuvent accéder aux marchés financiers pour gérer leurs risques. Toutefois, quand cela est possible, l'accès au marché est difficile pour beaucoup de producteurs pour deux raisons. Il nécessite quelques notions de finance et un suivi diligent. En effet, pour les contrats à terme, il peut y avoir chaque jour de cotation un appel de marge. Il sera alors nécessaire d'y répondre le jour même sous peine d'être exclu du marché.

De plus, même si les concepts des contrats à terme et des options sont

relativement simples, ils le sont moins dans le cadre de la gestion des risques agricoles. Premièrement, ils n'intègrent pas la composante individuelle du risque. L'utilisation de ces contrats génère un risque de base qui signifie que le producteur réalise inmanquablement une couverture incomplète. Ce risque de base réduit donc fortement l'intérêt des producteurs pour cet outil. Deuxièmement, la plupart des contrats financiers portent sur le prix alors que le risque est multidimensionnel. La notion de contrat à terme sur le rendement agricole est récente et va dans le sens d'une gestion financière multidimensionnelle. Néanmoins, ces contrats sont unidimensionnels et ne peuvent répondre directement au problème de l'agriculteur.

*Ainsi, bien que les contrats financiers soient capables de répondre à la nature systémique des risques agricoles, ils ne permettent ni de gérer la composante individuelle, ni d'intégrer le caractère multidimensionnel.*

## La problématique de la thèse

Le problème de l'entreprise agricole est donc la mise en œuvre d'une gestion financière cohérente de son risque multidimensionnel et systémique. Les outils traditionnels que sont l'épargne, la diversification des productions, les contrats de production et les coopératives sont limités et incomplets. Pour gérer ses risques financiers d'une manière cohérente, le producteur agricole a besoins d'outils financiers mieux adaptés et/ou complémentaires.

D'une part, l'assurance serait capable de proposer des contrats qui intégreraient le caractère multidimensionnel des risques agricoles. Seulement, la composante systémique forte du risque agricole l'empêche aujourd'hui de le faire. D'autre part, les marchés financiers sont capables de répondre à la nature systémique des risques agricoles mais ne permettent pas de gérer la composante individuelle et n'intègrent pas le caractère multidimensionnel.

Présenté de cette manière, il est possible d'observer la complémentarité de ces deux outils. Certains en déduisent que le producteur doit utiliser les contrats d'assurance et les contrats financiers. Cette solution présente au moins trois limites. Premièrement, elle ne résout en rien les difficultés du producteur pour accéder aux marchés. Deuxièmement, elle ne résout pas non plus le problème de l'assureur pour proposer un contrat d'assurance agricole sur un risque systémique. Enfin, si le contrat financier traite uniquement la composante systémique, le contrat d'assurance ne peut pas dissocier la composante individuelle de la composante systémique. Ainsi, même si le contrat d'assurance existe, il semble difficile pour le producteur de tirer pleinement profit de cette complémentarité. C'est pourquoi, la thèse se concentre plutôt sur le problème de l'assureur. Elle cherche donc à répondre à la question suivante : est-il possible à l'assureur d'utiliser la complémentarité des marchés financiers pour résoudre la difficulté liée à la composante systémique des risques agricoles ?

*Ainsi, le problème général est de concevoir des outils financiers adaptés aux producteurs agricoles pour gérer leurs risques. Le problème théorique au cœur de la thèse est d'une part la possibilité de construire des contrats finan-*

*ciers multidimensionnels et d'autre part la capacité d'un assureur à utiliser les marchés financiers pour céder la composante systémique. Le problème pratique est d'étudier l'application de ces méthodes dans le cas de l'éleveur de porcs.*

## Deuxième partie

### Analyse des risques et des outils actuels



# Chapitre 1

## Analyse descriptive de l'assurance et de la finance agricole

La diversité croissante des outils, méthodes et contrats proposés est à la fois une opportunité pour les agriculteurs et une difficulté pour le choix car la compréhension des engagements contractés est loin d'être évidente. La terminologie employée dans la littérature est souvent imprécise et prête à confusion.

L'objectif de ce chapitre<sup>1</sup> est de comparer la nature des contrats d'assurance et des contrats financiers, d'illustrer leurs impacts ainsi que de relever les éléments de convergence et divergence. L'intérêt de ce travail est de disposer de critères d'analyse facilitant la recherche théorique comme l'utilisation pratique des contrats de gestion de risques.

La première partie de ce chapitre présente la nature respective des contrats d'assurance et des contrats financiers. La deuxième partie illustre leurs différences dans le cas d'une gestion du risque prix d'un producteur agricole. La troisième et dernière partie montre, à l'aide d'exemples, que la terminologie est confuse et comment elle dessert à la fois les agriculteurs, les professionnels et la recherche.

---

1. Cette étude a fait l'objet d'une note de recherche dans *Économie Rurale*.



## 1.1 La nature des contrats d'assurance et des contrats financiers

Le risque est un concept largement utilisé au quotidien, il recouvre des approches différentes suivant les individus concernés. Rappelons que le risque est défini dans la thèse comme la conséquence néfaste (ou l'ensemble des conséquences néfastes) de l'événement aléatoire. L'analyse des contrats d'assurance et des contrats financiers requiert une distinction claire entre les événements aléatoires et leurs conséquences néfastes, qu'elles soient financières ou de toute autre nature. Dans certaines situations, la distinction est évidente. C'est le cas du risque d'incendie dans lequel l'événement aléatoire est bien distinct de la valeur des dommages liés à cet événement.

Mais il existe des situations où l'importance de la conséquence néfaste dépend du tirage de l'événement aléatoire. La situation observée sur les marchés financiers favorise l'ambiguïté des concepts d'aléa et de perte. Ainsi le risque de prix sur un marché est souvent assimilé à sa variabilité dans le temps. Or, si la notion de volatilité concerne indifféremment les variations à la hausse ou à la baisse, la notion de risque considère uniquement les variations qui lui sont défavorables. En effet, si l'agriculteur craint effectivement une baisse des prix, il espère au contraire une hausse.

### 1.1.1 Le contrat d'assurance

Un contrat d'assurance répond à des règles précises, au niveau national et international. Ces règles, codifiées depuis de nombreuses années, facilitent sa gestion entre les parties contractantes dans un monde incertain et garantissent aussi sa bonne fin. Déjà, Chaufton (1884) précisait :

« considérée dans ses effets immédiats, l'assurance est la compensation pécuniaire de certains effets du hasard qui détruisent ou diminuent le patrimoine de l'homme. Les effets prévus, mais non encore réalisés s'appellent risques. Réalisés, ils s'appellent sinistres ».

Il existe deux types de contrats d'assurance, l'assurance sur la vie (*e.g.* la santé, le décès et les rentes) et l'assurance dommage (*e.g.* incendie, vol, accident, responsabilité civile). L'analyse proposée dans la thèse traite des contrats d'assurance dommage.

Un contrat d'assurance est par nature une prise en charge d'un risque de l'assuré par un assureur. Il y a cession du risque contre paiement d'une prime. Le contrat d'assurance est fondé sur la définition (1) de l'événement aléatoire, (2) de la conséquence néfaste engendrée et (3) du mécanisme de

calcul du montant de l'indemnité. Il respecte en outre le principe indemnitaire qui stipule que l'indemnité ne peut être supérieure à la perte financière subie par l'assuré (Malâtre, 1998). C'est un principe légal fondamental et universel en assurance (Huang et al., 2002). Deux considérations d'ordre public sont à la base de ce principe, la crainte de sinistres volontaires et, le « danger des paris et de la spéculation » (Picard et Besson, 1982).

La conception d'un contrat d'assurance nécessite donc une évaluation de la conséquence néfaste, c'est à dire de la perte  $p$  de l'assuré, liée à l'occurrence d'un événement aléatoire. La définition de la perte  $p$  est cruciale car elle fonde le calcul du versement de l'indemnité. Par nature, le contrat d'assurance nécessite une gestion individualisée. En effet, non seulement l'occurrence de l'événement aléatoire doit être observée mais la perte doit être constatée (au minimum, la déclaration de l'assuré doit être acceptée par l'assureur).

Certains auteurs pensent que la nature du contrat d'assurance incorpore la mutualisation du risque. Ainsi, selon Chaufon (1884), « la compensation des sinistres s'opère par le paiement d'une indemnité qui est le produit des contributions que la science et l'expérience déterminent. Il existe ainsi entre les patrimoines une sorte de communication grâce à laquelle l'équilibre rompu dans l'un d'eux se rétablit ». La mutualisation du risque est certainement un fondement historique de l'assurance. Cependant, il s'agit d'une technique de gestion des contrats d'assurance, majeure certes, mais pas unique. Elle ne peut donc être considérée comme essentielle dans la caractérisation du contrat d'assurance.

### 1.1.2 Le contrat financier

La forme du contrat financier reste très libre. La famille des contrats financiers est donc large et s'enrichit régulièrement au gré de l'imagination et des besoins des acteurs. On peut distinguer les contrats financiers négociés sur des marchés centralisés et organisés du type Bourse de commerce, des contrats négociés sur les marchés de gré à gré. En effet, les paramètres des contrats négociés en Bourse sont standardisés afin de favoriser la liquidité des transactions et donc la recherche du juste prix. À l'inverse, les paramètres des contrats de gré à gré sont spécifiques afin de répondre aux besoins pratiques des contractants. Dans le cas agricole, ils concernent la qualité du sous-jacent, la date de l'échange, la quantité, le mode et le délai de paiement et les autres conditions d'environnement de la transaction. Très souvent d'ailleurs, les contrats de gré à gré font référence aux contrats standards négociés en Bourse. Les contrats négociés sur le marché de gré à gré sont de ce fait souvent appelés des produits dérivés.

Dans ce chapitre qui se veut illustratif de la situation du producteur agri-

cole, les contrats financiers étudiés seront limités au contrat à terme et à l'option de vente. Ces deux types de contrat présentent des variantes sur le marché à terme organisé et sur le marché de gré à gré. Cependant, ces variantes ne créent pas de problème particulier pour la suite du développement.

Comme la forme du contrat financier est libre, le concepteur peut anticiper des usages variés de la part de ses utilisateurs. Tout d'abord, il peut concevoir un contrat permettant la cession d'un risque ou son partage entre investisseurs. Les options relèvent de la technique de cession de risque contre paiement d'une prime financière. La cession du risque a un coût, le coût du risque augmenté du coût de transaction. Les contrats à terme par contre permettent la recherche d'une diversification du risque. Par exemple, un agriculteur disposant d'un stock de blé à la récolte craint une baisse du prix qui réduirait la valeur de son stock. Il peut immuniser son risque de prix en vendant un contrat à terme. Le risque sur le contrat à terme est en effet inverse de celui créé par la détention physique du stock.

La diversification du risque est une opportunité offerte aux acteurs économiques. Il n'y a pas de cession de risque entre un vendeur de risque et un acheteur, donc pas de valeur marchande du risque (Dusak, 1973). Il existe cependant des coûts de transaction liés à la nécessaire intermédiation entre les contractants et parfois aux systèmes de garantie de bonne fin des contrats.

Le contrat financier peut être utilisé avec des objectifs variés. Par exemple, le contrat à terme crée un risque pour son détenteur. Ce risque peut servir tout d'abord à annuler un autre risque. C'est son usage d'immunisation que recherchent de nombreux acteurs économiques. Il peut servir également à créer un risque dit utile pour son détenteur. C'est le cas du spéculateur qui trouve une utilité à prendre un risque en espérant un gain et en acceptant une perte financière éventuelle. Comme l'usage du contrat financier peut et parfois doit être large, le contrat n'est en général pas conçu de façon individualisée.

## 1.2 Illustration : le cas du producteur agricole

Cette partie cherche à illustrer, dans le cas agricole, la notion de perte causée par l'aléa sur le prix. Elle permet de visualiser les différences entre le contrat à terme, l'option de vente et l'assurance sur le prix.

La première section propose une modélisation simple de la situation de l'agriculteur. La section suivante distingue quatre situations différentes. La troisième section expose les différents contrats qui sont étudiés. La dernière section fait une description des quatre situations.

### 1.2.1 Paramétrisation

Le problème du producteur agricole est multidimensionnel comme évoqué dans la première partie. La paramétrisation proposée dans ce texte est limitée à deux dimensions, prix et quantité, afin de faciliter l'illustration pratique des contrats d'assurance et des contrats financiers.

$F$  et  $y$  représentent respectivement le prix et la quantité (rendement agricole) effectivement obtenus sur un cycle opérationnel (production et stockage éventuel). Le producteur considère, de plus, qu'il a une perte de prix si le prix obtenu est inférieur à un minimum  $F_z$ . De même, il considère qu'il a une perte de quantité si la quantité obtenue est inférieure à un minimum  $y_z$ . Le producteur constate en fin de cycle opérationnel la quantité obtenue  $y$  et le prix  $F$  offert par le marché pour livraison immédiate (le prix spot). Ce prix est considéré comme le prix de vente de la marchandise produite.

### 1.2.2 Les différentes situations possibles

Dans un monde limité à deux dimensions, quatre situations sont possibles en fin de cycle opérationnel :

**Situation 1 :** le prix de marché  $F$  est inférieur au prix minimum  $F_z$  et la quantité obtenue est inférieure à l'objectif de quantité minimum (donc  $F < F_z$  et  $y < y_z$ ).

**Situation 2 :** le prix de marché est inférieur au prix minimum et la quantité obtenue est supérieure à l'objectif de quantité minimum (donc  $F < F_z$  et  $y > y_z$ ).

**Situation 3 :** le prix de marché est supérieur au prix minimum et la quantité obtenue est inférieure à l'objectif de quantité minimum (donc  $F > F_z$  et  $y < y_z$ ).

**Situation 4 :** le prix de marché est supérieur au prix minimum et la quantité obtenue est supérieure à l'objectif de quantité minimum (donc  $F > F_z$  et  $y > y_z$ ).

La situation 1 est la moins favorable pour le producteur tandis que la situation 4 est la plus favorable. Les situations 2 et 3 sont intermédiaires. Les figures proposées illustrent des valeurs financières puisque chaque surface est le produit d'une quantité et d'un prix. La valeur financière associée à chaque case est proportionnelle à sa surface. La valeur  $\Phi$  est la case vide de valeur nulle. Le point  $A$  représente l'objectif de chiffre d'affaires minimum et le point  $B$  le chiffre d'affaires réalisé en dehors de toute technique de gestion du risque (cette surface est grisée sur chaque figure de ce chapitre).

### 1.2.3 Les techniques de gestion de risques

Comme indiqué en première partie, trois outils classiques de gestion du risque peuvent être utilisés par le producteur agricole, le contrat à terme, l'option de vente et l'assurance. Ces outils peuvent être appliqués en théorie à toute variable aléatoire, en particulier le prix de marché, le rendement agricole mais aussi au chiffre d'affaires, au coût moyen de production ou encore à la marge brute. Seul le risque de prix est pris en compte dans l'illustration des techniques de gestion du risque. Bien évidemment, il est possible de transposer les concepts proposés aux autres paramètres aléatoires.

**La gestion du risque prix par contrat à terme :** La technique d'utilisation du contrat à terme est la couverture simple de risque (*hedging*). La couverture consiste à prendre une position sur le marché à terme égale et inverse de la position en physique. Pour l'illustration, le producteur choisit le volume minimum de production  $y_z$  comme base de couverture de risque.

**La gestion du risque prix par achat d'options de vente :** L'utilisation des options de vente requiert également de la part du producteur le choix d'un volume de couverture. Pour l'illustration, et par souci d'homogénéité, le producteur choisit le volume minimum de production  $y_z$  comme base de couverture de risque. L'achat d'options de vente nécessite le paiement de primes au vendeur.

**La gestion du risque prix par le contrat d'assurance :** La perte liée à la baisse de prix est le produit de l'écart de prix ( $F_z - F$ ) par le volume de production effectif du producteur. Le contrat d'assurance est donc défini sur cette base. Autrement dit, le producteur assure son prix minimum  $F_z$  pour son volume de production. Il choisit par exemple une indemnité égale à la perte constatée et paie la prime d'assurance en conséquence.

### 1.2.4 Illustration des techniques de gestion de risques

L'objectif de cette partie est simplement de décrire et d'illustrer les outils de gestion de risques dans les quatre situations possibles.

#### Situation 1 : perte de prix et perte de quantité (figure 1.1)

La situation de l'agriculteur correspond au point  $B$ . Le chiffre d'affaires réalisé sur le marché physique correspond au rectangle (1). Ce chiffre d'affaires est inférieur à l'objectif correspondant au point  $A$  visé. La réduction de chiffre d'affaires correspond aux rectangles (2), (3) et (4).

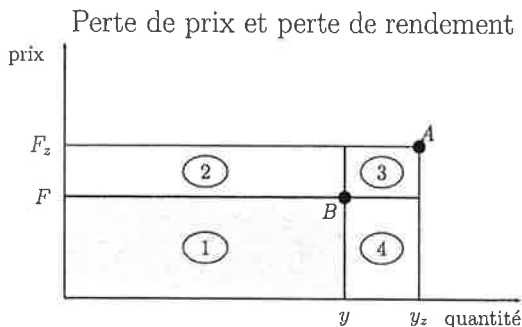


FIG. 1.1 – Situation 1

La couverture de risque prix à l'aide du contrat à terme permet à l'agriculteur de réaliser un gain financier correspondant aux rectangles (2) et (3). En effet, il réalise un gain dans les opérations de vente à terme, position de vente pour une valeur initiale de  $(F_z \times y_z)$  puis rachat de la position pour une valeur finale de  $(F \times y_z)$ , avec  $F < F_z$ . L'achat d'options de vente<sup>2</sup> permet également de réaliser un gain financier correspondant aux rectangles (2) et (3). En effet, la valeur intrinsèque des options achetées s'élève à  $(F_z - F) \times y_z$ .

Du point de vue de l'assurance, la perte financière causée par la baisse du prix est représentée par le rectangle (2), c'est à dire la perte de prix sur la production obtenue, ou encore  $(F_z - F) \times y$ . L'indemnité versée par l'assureur est égale au rectangle (2).

On observe que dans cette situation, la couverture par contrat à terme et l'option de vente fournissent au producteur un complément de revenu supérieur à l'indemnité, c'est à dire la perte assurée.

**Situation 2 : perte de prix et gain de quantité (figure 1.2)**

Le chiffre d'affaires réalisé sur le marché physique correspond aux rectangles (5) et (8) tandis que le chiffre d'affaires visé est représenté par les rectangles (5) et (6). Deux cas peuvent se produire. Dans le premier cas, le rectangle (8) est plus petit que le rectangle (6) ; le producteur subit alors une perte de chiffre d'affaires. Dans le second cas, le rectangle (8) est plus grand

2. La prime de l'option étant payée quelque soit le chiffre d'affaires final, elle représente un coût et n'est pas prise en compte dans le chiffre d'affaires.

que le rectangle (6) ; le producteur réalise alors un gain de chiffre d'affaires.

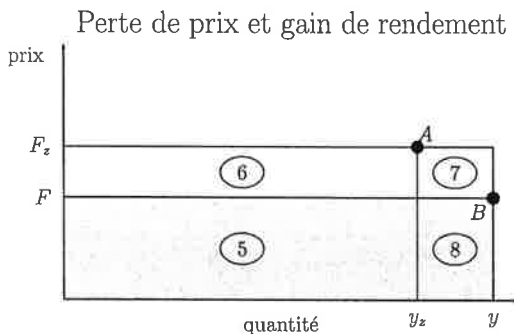


FIG. 1.2 – Situation 2

La couverture de risque prix à l'aide du contrat à terme permet à l'agriculteur de réaliser un gain financier correspondant au rectangle (6). En effet, il réalise un gain dans les opérations de vente à terme, vente de position pour une valeur initiale de  $(F_z \times y_z)$  puis rachat de la position pour une valeur finale de  $(F \times y_z)$ , avec  $F < F_z$ . L'achat d'options de vente permet également de réaliser un gain financier correspondant également au rectangle (6). En effet, la valeur intrinsèque des options achetées s'élève à  $(F_z - F) \times y_z$ . Du point de vue de l'assurance, la perte financière causée par la baisse du prix est représentée par les rectangles (6) et (7), c'est à dire la perte de prix sur la production obtenue, ou encore  $(F_z - F) \times y$ . L'indemnité versée par l'assureur est égale aux rectangles (6) et (7).

On observe que dans cette situation, la couverture par contrat à terme et l'option de vente fournissent au producteur un complément de revenu inférieur à l'indemnité, c'est à dire la perte assurée.

### Situation 3 : gain de prix et perte de quantité (figure 1.3)

Le chiffre d'affaires réalisé sur le marché physique correspond aux rectangles (9) et (10) tandis que le chiffre d'affaires visé est représenté par les rectangles (9) et (12). Deux cas peuvent se produire. Dans le premier cas, le rectangle (12) est plus grand que le rectangle (10) ; le producteur subit alors une perte de chiffre d'affaires. Dans le second cas, le rectangle (12) est

plus petit que le rectangle (10) ; le producteur réalise alors un gain de chiffre d'affaires.

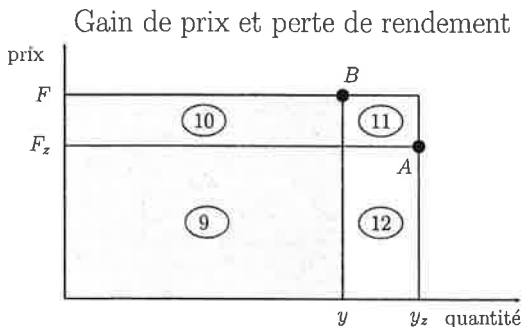


FIG. 1.3 - Situation 3

La couverture de risque prix à l'aide du contrat à terme fait réaliser à l'agriculteur une perte correspondant aux rectangles (10) et (11). En effet, il réalise une perte dans les opérations de vente à terme, vente de position pour une valeur initiale de  $(F_z \times y_z)$  puis rachat de la position pour une valeur finale de  $F \times y_z$ , avec  $F > F_z$ . L'achat d'options de vente ne fait réaliser ni gain ni perte au producteur (hors paiement de la prime d'option payée initialement). En effet, les options de vente ne prennent aucune valeur intrinsèque lorsque le prix de marché est supérieur au prix d'exercice. Aucune indemnité n'est payée par l'assureur parce que l'aléa sur le prix ne cause aucune perte.

On observe que dans cette situation, la couverture par contrat à terme ne fournit pas un résultat favorable au producteur. En effet, non seulement, il perd le chiffre d'affaires correspondant au rectangle (12) du fait d'un faible rendement, mais en plus il perd les rectangles (10) et (11). Au total, il ne conserve que le rectangle (9) pour couvrir ses coûts et réaliser une hypothétique marge.

**Situation 4: gain de prix et gain de quantité (figure 1.4)**

Le chiffre d'affaires réalisé sur le marché physique correspond aux rectangles (13), (14), (15) et (16) tandis que le chiffre d'affaires objectif est représenté par le rectangle (13).



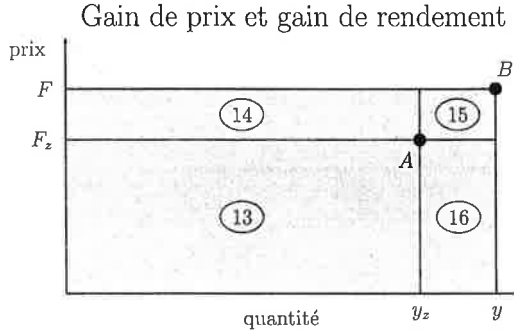


FIG. 1.4 – Situation 4

La couverture de risque prix à l'aide du contrat à terme fait réaliser à l'agriculteur une perte correspondant au rectangle (14). En effet, il réalise une perte dans les opérations de vente à terme, vente de position pour une valeur initiale de  $F_z \times y_z$  puis rachat de la position pour une valeur finale de  $F \times y_z$ , avec  $F > F_z$ . Comme dans la situation 3, le producteur ne tire profit ni de l'option ni du contrat d'assurance.

### 1.3 Analyse des convergences et des divergences des contrats de gestion de risques

La terminologie utilisée pour les contrats de gestion de risques est souvent imprécise par manque de repères discriminants. Il y a vingt ans, les marchés à terme étaient parfois cités comme des marchés de l'assurance. Plus récemment, le terme assurance est largement utilisé pour décrire les options sur le rendement agricole, les contrats sur les rendements moyens (Miranda, 1991) ou sur les index climatiques (Mahul, 2001b). Enfin, la gestion du risque par l'option est parfois assimilée à celle de l'assurance, c'est le cas en particulier de plusieurs programmes agricoles aux États-Unis. L'intérêt de cette analyse ne réside pas dans la qualification officielle des contrats par rapport à des règles de prudence mais plutôt dans la capacité à comprendre les avantages et les limites de chaque type de contrat, et donc à développer une recherche plus riche en la matière.

### 1.3.1 La cession du risque contre prime

Le premier critère de discrimination des contrats concerne la cession d'un risque contre paiement d'une prime entre le vendeur de risques et son acquéreur. La question a été posée initialement par Keynes (1930). Il tentait de montrer que les prix à terme sont biaisés à la baisse, c'est à dire cotés systématiquement à une valeur inférieure à l'anticipation des opérateurs. Ce biais serait donc le prix de cession du risque de la part des opérateurs vendeurs à terme (les producteurs détenteurs de risques sur le marché physique) aux opérateurs acheteurs à terme (les spéculateurs). La littérature sur l'efficacité des marchés donne depuis une autre forme à la question : est-ce que le contrat à terme donne une bonne anticipation du future prix spot? L'application de la théorie financière d'évaluation des actifs aux contrats à terme (Dusak, 1973) montre qu'il n'existe pas de prime théorique, donc pas de prime en pratique, associée à la position vendeur ou acheteur de contrat à terme car il n'y a pas de cession du risque.

Le contrat à terme n'est donc pas un contrat de cession de risques tandis que les options et les contrats d'assurance le sont, par construction et par usage. Selon ce premier critère, le contrat à terme se distingue donc aisément de l'option ou du contrat d'assurance. L'analyse des convergences et des divergences doit donc se concentrer sur les options et les contrats d'assurance.

### 1.3.2 L'analyse des contrats de cession de risques

#### Éléments de convergence

**Le caractère juridique des contrats :** Les options et les contrats d'assurance ont juridiquement une cause commune (la gestion du risque) et un objet commun (des flux financiers prévus selon la réalisation d'un événement incertain). De plus, les deux types de contrat sont aléatoires au sens des articles 1964 et 1104 du Code Civil. Le caractère aléatoire du contrat est lié au fait que les obligations des parties soient dépendantes de la réalisation d'un événement incertain.

**Le caractère onéreux du contrat :** il y a versement d'une prime lors de l'établissement du contrat : de l'assuré à l'assureur dans un cas, de l'acheteur au vendeur d'options dans l'autre.

**Le caractère compensatoire :** les deux contrats peuvent fournir une compensation en cas de situation néfaste. Cette situation correspond à un sinistre dans la terminologie de l'assurance dommage. Elle a une évolution défavorable du sous-jacent dans la terminologie du marché, si toutefois l'agent a acheté ce contrat pour se couvrir et non spéculer.

**La durée du contrat :** les deux contrats sont à durée déterminée. La durée du contrat est essentielle car le prix de cession du risque en dépend.

Les options et les contrats d'assurance disposent donc de plusieurs éléments de convergence, tant sur le plan juridique que sur le plan économique. Cependant, des éléments importants de divergence peuvent être relevés.

### Éléments de divergence

**La caractéristique de la protection offerte :** le contrat d'assurance dommage est un contrat d'indemnité. L'assureur ne pourra exécuter sa prestation et ne devra le faire que si l'assuré a subi un dommage. Le principe indemnitaire est essentiel au contrat parce qu'il participe à la définition de la prestation de l'assureur, donc à l'objet du contrat. Les options prévoient des flux financiers compensatoires sans relation explicite avec la perte réelle de l'agriculteur.

Les options basées sur des sous-jacents innovants comme le rendement agricole ou l'index climatique permettent d'illustrer ce fait. La valeur intrinsèque de l'option peut augmenter du fait de réalisations climatiques ou agronomiques agrégées. Par exemple, il peut survenir un déficit de pluviométrie sur une région. Dans ce cas, il n'est pas certain que l'agriculteur ait réellement une perte de rendement sur son exploitation, ou que sa perte soit supérieure au gain apporté par le contrat. Cependant, s'il détient une option sur la pluviométrie, il percevra la valeur intrinsèque acquise par ce contrat indépendamment de ses résultats.

**Le caractère individuel du contrat :** si l'objet commun aux deux types de contrat est bien le flux financier prévu selon la réalisation d'un événement incertain, le siège du risque varie pour l'option et pour l'assurance. Pour le contrat d'assurance, le siège du risque est la situation individuelle de l'assuré. C'est la situation finale réelle de l'assuré qui est prise en compte. On parle ainsi du caractère individuel du contrat d'assurance ; ce caractère est une conséquence directe du principe indemnitaire. Par opposition, l'option n'a pas ce caractère individuel. Les options ont un sous-jacent dont la quantité unitaire est précisée contractuellement. L'utilisateur doit donc choisir le nombre de contrats d'options susceptibles de lui apporter la couverture de risque espérée. Il peut alors apparaître un décalage entre la situation traitée initialement et la situation réelle finale. L'option n'est pas individualisée.

**La dimension du contrat :** le contrat d'assurance est multidimensionnel tandis que l'option est unidimensionnelle. Le contrat d'option sur le prix par exemple ne concerne que cette variable. Son usage nécessite de la

part de l'acheteur une hypothèse sur la quantité qu'il souhaite couvrir, c'est à dire sur le nombre de contrats qu'il achète. À l'inverse le contrat d'assurance est au minimum bidimensionnel, c'est à dire qu'il propose une gestion du risque de prix sur une quantité, elle aussi, aléatoire. Cette caractéristique est également une conséquence directe du principe indemnitaire du contrat d'assurance. Bien évidemment, s'il n'y a pas de risques sur la quantité, les deux contrats apparaissent très similaires mais cette apparence n'est que circonstancielle.

**Les normes comptables :** La prime d'assurance est enregistrée au niveau comptable comme une charge d'exploitation alors que la prime d'un contrat financier (une option par exemple) ne constitue pas une charge. De même, aux yeux de la fiscalité, l'achat d'un contrat financier ne peut être une charge déductible. En effet, le producteur peut l'utiliser indifféremment comme outil de couverture ou de spéculation. Le principe indemnitaire est donc, là encore, la caractéristique attendue du contrat d'assurance.

En définitive, les éléments de convergence portent sur les aspects juridiques des options et des contrats d'assurance, particulièrement sur leur cause et leur objet. Elle l'est également sur deux composantes importantes du contrat : le paiement d'une prime et le versement éventuelle d'une compensation. Ainsi, il est fréquent de voir juger les deux contrats comme équivalents au risque de base près. Cependant, le risque de base est unidimensionnel car il correspond au risque de prix entre le marché agrégé et le marché local du producteur sur une quantité unitaire. Il n'est donc pas suffisant pour justifier l'équivalence entre une option unidimensionnelle et un contrat d'assurance multidimensionnel.

Les éléments de divergence portent sur le risque traité et donc sur les différences de flux de compensation versés. Ces différences sont fondamentales pour les acteurs économiques concernés car le résultat des contrats d'assurance et des options sont en pratique très différents. Ces différences sont en fait illustrées dans les quatre figures de ce chapitre. Il est indispensable de reconnaître ces différences afin de choisir objectivement le type de risque que l'on souhaite gérer, de choisir sa stratégie de gestion et d'accepter d'en payer le juste prix.

## 1.4 Des contrats d'assurance ?

La description des contrats d'assurance et des contrats financiers a permis de préciser la nature de ces deux types de contrat. Cette première analyse

permet de mieux comprendre et différencier les travaux de recherche sur la gestion des risques agricoles.

L'objectif de cette dernière partie est donc de vérifier l'usage du mot assurance sur quelques exemples de contrats. Elle ne remet aucunement en cause leurs performances respectives dans la réduction de risque du producteur agricole. La première section réalise cette analyse sur le MPCCI (*Multiple-Peril Crop Insurance*). La deuxième section traite des dérivés climatiques. Enfin la troisième section montre qu'un contrat optimal<sup>3</sup> ne signifie en rien que le principe indemnitaire est respecté.

### 1.4.1 Le MPCCI

Le MPCCI est-il un contrat d'assurance? Au sens strict, non. En effet, la formule d'indemnisation est la suivante<sup>4</sup>:

$$\delta f_0 \times \max(\gamma y_0 - y_1, 0) \quad (1.1)$$

Si ce contrat prend en compte la perte de rendement réellement observée du producteur, sa valorisation est pré-déterminée à la souscription du contrat. L'indemnité n'est donc pas fonction du dommage financier causé par la baisse de rendement. Ainsi, il y a une probabilité non nulle que le contrat ne respecte pas le principe indemnitaire  $I(p) \leq p$  car  $f_1 \times \max(\gamma y_0 - y_1, 0)$  peut être strictement inférieur à l'indemnité proposée par le MPCCI si  $\delta f_0 > f_1$  et  $\gamma y_0 > y_1$ .

### 1.4.2 Les dérivés climatiques

La littérature emploie souvent le mot assurance pour décrire les dérivés climatiques (Turvey, 2001; Martin et al., 2001, par exemple). Mais, comme le confirme l'analyse juridique de Benton *et al* (1997), les dérivés climatiques ne sont pas des contrats d'assurance. La notion de perte financière agricole due à l'aléa climatique est absente dans la construction même du contrat. Ce contrat peut être indifféremment utilisé par un agriculteur ou par d'autres secteurs, comme le tourisme qui auront pourtant des pertes très différentes. Le non-respect du principe indemnitaire est la raison fondamentale qui prouve que ce ne sont pas des contrats d'assurance agricole (Paiva e Pona, 2001).

3. Un contrat optimal est une notion économique où le contrat vérifie un maxima mathématique. Par exemple, il peut maximiser l'espérance de l'utilité profit de l'acheteur en fonction de un ou plusieurs paramètre(s) du contrat.

4. Rappel du chapitre 2 Partie I (Équation 2.1)

### 1.4.3 Les contrats optimaux

De nombreux auteurs cherchent à construire des contrats plus performants à l'aide de la notion de contrat optimal. Certains pensent que ces contrats respectent naturellement le principe indemnitaire. Le raisonnement suivi est qu'un agent adverse au risque ne cherche pas à réaliser un profit mais à se couvrir. Est-ce pour autant qu'il respecte le principe indemnitaire? Si ce raisonnement est vrai au niveau agrégé il ne l'est pas en tous points et Huang (2002) en fait la démonstration. En soit, un contrat optimal n'est donc pas un contrat d'assurance.

*Les deux types de contrat ont donc leurs propres spécificités. Ils peuvent être tous deux utiles dans le cadre d'une gestion de risques agricoles. En effet, bien que ce ne soit pas des contrats d'assurance, les options et le MPCJ sont des contrats très communs. Il est donc clair que cette confusion terminologique dessert autant les producteurs que la recherche.*



## Chapitre 2

# Utilisation des outils de gestion de risques

Le chapitre précédent a décrit les deux types de contrat : les contrats financiers et les contrats d'assurance. Derrière ces deux titres se cache une grande variété de contrats, en particulier aux États Unis. De nombreux auteurs se sont intéressés à une utilisation performante de ces différents outils de gestion (Harwood et al., 1999). C'est pourquoi, dans ce chapitre, sont exposés les principaux résultats de leurs travaux.

Dans la première partie, l'utilisation des marchés à terme est présentée dans le cadre d'une gestion de risques agricoles à travers la notion du hedging. Les contrats d'assurance et les programmes étatiques sont les alternatives majeures aux marchés financiers et font l'objet de la seconde et dernière partie. Elle examine l'utilisation de ces contrats dans une gestion de risques du producteur.

### 2.1 Le hedging

Il existe une littérature abondante sur la notion de hedging sur les marchés de matières premières agricoles. Dans une première section, les bases historiques du hedging sont présentées à travers l'article de Johnson (1960). Ensuite, la présentation des développements du hedging s'inspire de deux articles. Le premier article, de Tomek et Peterson (2001), réalise une synthèse bibliographique et le second de Collins (1997) décrit quelques modélisations majeures. Les développements se sont faits dans trois directions principales. Premièrement, la recherche optimise le hedging en prenant en compte la perception qu'a le producteur de son risque (les fonctions d'utilités  $U$ ). Deuxièmement, le hedging s'affine en prenant en compte l'ensemble des choix et des



risques du producteur dans l'optimisation (le prix, la base, le rendement, la qualité et les coûts sont aléatoires). La troisième section explique comment les producteurs peuvent intégrer dans leur gestion plusieurs contrats qui sont corrélés avec leurs risques et réaliser un hedge multidimensionnel. Ces trois développements majeurs font respectivement l'objet des deuxième, troisième et quatrième sections. En marge des trois voies principales de recherche, les sections cinq et six présentent deux idées qui semblent pertinentes pour la thèse. La cinquième section mentionne le hedging en continu et la sixième intègre le contrat à terme sur le rendement agricole.

### 2.1.1 Les analyses historiques du hedging

Leland L. Johnson (1960) fait un point sur la théorie du hedging sur les contrats à terme de matières premières. Il applique la théorie de portefeuille au problème de la couverture de risques sur les marchés à terme.

Il distingue à l'époque deux types d'intervenants : les spéculateurs et les *hedgers*. Les spéculateurs chercheraient à réaliser un profit financier. Les *hedgers*, quant à eux, chercheraient à se couvrir contre un risque auquel ils font face.

Un opérateur, qui vend ou achète sur un marché physique, agit en contexte incertain quant au gain ou à la perte qu'il réalisera. Or, les variations du marché peuvent lui être fortement défavorables : l'opérateur assume donc un risque important. Il cherche, par une prise de position sur les marchés à terme, à minimiser ce risque ce qui s'appelle réaliser un '*hedge*'. Johnson reconnaît que la limite entre spéculateur et hedger est floue. En effet, l'opérateur qui détient un risque sur un marché physique tente généralement non seulement de couvrir son risque mais aussi de réaliser un profit. Depuis, Anderson et Danthine (1980) ont montré qu'une position optimale sur les marchés à terme intègre une composante de couverture et une composante de spéculation.

Johnson considère que la variance du profit est un reflet du niveau de risque. Dans ce cas, le hedge est la position sur le marché financier qui minimise cette variance.

### 2.1.2 La fonction d'utilité

Le hedging optimal intègre la perception du risque du producteur par la fonction d'utilité. Les articles supposent généralement que le producteur est adverse au risque. Les auteurs ne cherchent pas, comme Johnson, à minimiser la variance du risque global mais à maximiser l'utilité du profit ( $U(\pi)$ ) du producteur. La fonction d'utilité d'un agent adverse au risque est supposée concave, comme par exemple la fonction log.

### 2.1.3 Les paramètres de la maximisation

Holthausen<sup>1</sup> (1979) affine la notion du hedging pour le producteur agricole en ajoutant un paramètre à la maximisation. Pour lui, l'entreprise agricole a le choix du niveau de la production non aléatoire  $x$ , auquel on associe un coût de production déterministe  $c(x)$ .  $h$  est le nombre de contrats à terme achetés au prix  $b$ . Seul le prix  $p$  est aléatoire.

Il cherche la combinaison  $(x, h)$  qui maximise l'utilité du profit du producteur. Holthausen réalise donc la maximisation suivante :

$$\max_{x,h} E[U(\pi)] = \max_{x,h} \int_0^{\infty} U[p(x-h) + bh - c(x)]f(p)dp \quad (2.1)$$

où  $U$  est la fonction d'utilité,  $\pi$  le profit et  $f(p)$  est la fonction de densité du prix  $p$ . L'article montre ainsi l'influence de l'existence des contrats à terme sur le niveau de production que choisit le producteur.

Il est possible d'ajouter d'autres paramètres déterministes ou aléatoires à la maximisation. Le hedging peut ainsi prendre en compte par exemple l'aléa sur le rendement (Grant, 1985) ou l'aléa sur la base<sup>2</sup>. Le hedging défini par Moschini et Lapan correspond au producteur qui fait face à la fois à un risque de base et à un risque sur sa production (Moschini et Lapan, 1995; Lapan et Moschini, 1994). Ils observent que, si la volatilité du rendement agricole augmente, le *ratio* de couverture baisse sur les marchés à terme sur le prix. Mahul (2002), quant à lui, définit un hedging optimal en présence d'un modèle du risque de base plus général. Le contrat à terme utilisé ne correspond pas exactement à la production réalisée (*e.g.* production d'un maïs de caractéristiques différentes de celle du maïs standard). Le prix à terme et le prix spot ne coïncident pas à l'échéance, la base fait donc l'objet d'une modélisation plus complexe.

### 2.1.4 Le hedging multidimensionnel

Le hedging a aussi été étudié dans le cas où il existe plusieurs contrats financiers corrélés avec la production. Anderson et Danthine (1980) propose un hedging optimal (moyenne variance<sup>3</sup>) basé sur plusieurs contrats à terme. Ce modèle s'applique par exemple au producteur de porc dont le profit dépend du prix des intrants (maïs et soja) et du prix du porc. Un producteur

1. Dans le même temps, Feder *et al* (1980) ont réalisé des travaux analogues.

2. Risque présenté sur un marché à terme par le fait que le cours au comptant de l'instrument sous-jacent et son cours à terme ne varient pas de la même façon entre l'ouverture et la clôture d'une position. -Axone Financial Glossary-

3. Il maximise la fonction  $\bar{\pi} - \frac{1}{2}\lambda \text{var}(\bar{\pi})$  où  $\bar{\pi}$  est le profit (aléatoire) et  $\bar{\pi}$  est le profit espéré et  $\lambda$  désigne le degré d'aversion au risque de l'agent

de blé voudra peut-être compléter l'utilisation du contrat à terme sur le blé par un contrat à terme sur la farine. Enfin, le cas particulier d'un producteur de céréales qui dispose d'un contrat à terme sur le prix et d'un autre sur le rendement fera l'objet de la cinquième section.

Par ailleurs, Lapan *et al* (1991) montrent l'intérêt d'intégrer des options dans le cas où les prix du contrat à terme et de l'option sont biaisés. Dans l'hypothèse où il n'y a pas de biais, l'option est redondante dans le hedging par rapport au contrat à terme (Moschini et Lapan, 1995).

### 2.1.5 Le hedging en continu

Karp (1987) puis Martinez (1992) ont analysé algébriquement et numériquement un hedging en continu. Martinez analyse le modèle de Karp à l'aide des 'données maïs' du comté de Caroline du Nord qui concernent la période 1982-1987. La gestion en continu a un effet positif mais, d'après Martinez, le profit réalisé apparaît trop minime au vu de la complexité de la méthode.

Les conclusions empiriques de Martinez confirment les limites du hedging. Néanmoins, l'idée d'une gestion de risques en continu semble pertinente et sera explorée de nouveau dans le cadre de la thèse.

### 2.1.6 Le hedging avec le contrat à terme sur le rendement

Plus récemment, le hedging a intégré des contrats sur le rendement agricole. Avec l'ouverture de cotations, sur le Chicago Board of Trade, du contrat à terme et des options sur le rendement agricole, quelques auteurs se sont intéressés à ces nouveaux contrats. Par exemple, Mahul et Vermersh (2000) ont étudié le hedging de ces contrats pour gérer le risque de rendement de l'agriculteur. Il s'agit d'une approche symétrique au hedging sur le prix. Or, l'aléa sur le rendement comprend une composante systémique et une composante individuelle qui induit un nouveau risque de base. Ainsi, comme dans la gestion du risque de prix, le contrat à terme sur le rendement n'est pas parfaitement corrélé avec le rendement du producteur. Le hedging optimal de Mahul et Vermersch intègre ce nouveau risque de base, pour gérer le risque de rendement.

Vukina *et al* (1996,1998) et plus tard Nayak et Turvey (2000) utilisent à la fois les contrats à terme sur le prix et les contrats à terme sur le rendement (*the crop yield futures*). Ils montrent que le risque peut être bien mieux géré avec les deux contrats qu'avec seulement le contrat à terme sur le prix. En plus de la démonstration mathématique, ils montrent par un exemple simple

Date	Cash	Price Futures	Yield Futures
May		Sell 15 Dec. contracts @ \$2.40/bu	Sell 12 Jan. contracts @ 150 bu/acre
October	Harverst 62,500 bu (= 125 × 500) Sell corn @ \$2.60/bu	Buy 15 Dec. Contracts @ \$2.60/bu	Buy 12 Jan. @ 125 bu/acre
Result	\$162,500	-\$15,000	\$30,000
Revenue		\$177,500 $\frac{177,500}{500} = \$355/\text{acre}$	

TAB. 2.1 – Exemple de hedging d'un producteur de maïs (500 acres et un revenu espéré de \$180,000).

la pertinence de ce choix (exemple reproduit sur le Tableau 2.1). Dans le même esprit, Nayak et Turvey rajoutent des contrats à terme monétaires dans le hedging, parce qu'ils s'intéressent aux producteurs canadiens. Ces agriculteurs, qui se couvrent sur un contrat américain, peuvent être en effet affectés par une variation du taux de change.

Les résultats de Vukina *et al* et de Nayak et Turvey montrent donc l'utilité de raisonner sur plusieurs dimensions. La thèse poursuivra dans cette voie multidimensionnelle.

## 2.2 L'intégration des programmes dans une gestion de risques

Il existe, en dehors des contrats financiers cotés, de nombreux contrats agricoles qui sont basés sur le prix, le rendement ou encore le revenu. L'intégration de ces différents programmes dans la gestion de risques du producteur est complexe. La première section analyse quelques modélisations de l'utilisation optimale de ces contrats. La deuxième section présente brièvement quelques effets secondaires, induits par l'existence de ces contrats de couverture.

### 2.2.1 L'utilisation des programmes et contrats d'assurance

Quelques articles récents font une estimation de l'utilisation optimale des contrats d'assurance par les agriculteurs. Tout d'abord, Coble *et al* (2000) considèrent un producteur qui utilise à la fois les contrats à terme et les contrats MPC1, RI et CRC<sup>4</sup>. Ils mesurent l'influence des programmes américains sur le hedging. Leur étude porte sur les producteurs de maïs des comtés d'Iroquois, de Lincoln, de Douglas et de Pitt en Caroline du Nord aux États Unis. Ils concluent que les contrats d'assurance revenu tendent à réduire le niveau de couverture du producteur sur les marchés à terme. Par contre, les contrats sur le rendement tendent à augmenter le niveau de couverture sur les marchés à terme. Ces deux résultats montrent, une fois de plus, la pertinence d'une gestion multidimensionnelle et du contrat à terme sur le rendement.

Hard et Babcock (2001) comparent également différentes stratégies de couverture qui comprennent le CRC, RA, le hedging et les combinaisons possibles. Ils mesurent l'efficacité de chaque stratégie par rapport à un équivalent certain, et ce, pour plusieurs degrés d'aversion au risque et confirment ainsi les conclusions de Coble *et al* sur la préférence des contrats sur le revenu.

Gloy et Baker (2001, 2002) définissent la performance de différentes stratégies par rapport à l'actif sans risque, en appliquant la méthode de la dominance stochastique du premier et du second degré. La méthodologie est d'autant plus intéressante qu'elle s'applique à un agriculteur pluri-productions maïs et porc. Il cherche à repérer les stratégies de couverture sur le maïs et sur le porc qui sont meilleures que l'actif sans risque. Les stratégies étudiées comprennent le APH, le CRC, le GRP et les contrats à terme sur le maïs, le porc et l'aliment porc. En plus des résultats des articles précédents sur les céréales, l'efficacité du hedging sur le contrat à terme sur le porc ressort nettement. Cela rejoint de nouveau les conclusions de Coble. En effet, le risque de quantité est moindre pour la production de porc par rapport à la production de maïs. Cela explique que la couverture sur le prix du porc est plus efficace que sur le prix du maïs.

Certains auteurs abordent l'utilisation des programmes américains par la notion de demande. Quelques études sur la demande de contrats agricoles ont été réalisées par K. H. Coble, B.J. Goodwin, V.H. Smith et J. Vercamen. Cette notion est importante en économie mais ne fait pas l'objet de la thèse.

---

4. Tous les sigles de ce chapitre ont été explicités dans le chapitre 2 de la partie Problématique

### 2.2.2 Les effets secondaires

En présence de contrats de couverture, le comportement des agriculteurs change. Par exemple, dans la section précédente, Holthausen montre qu'en présence de contrats à terme, le producteur choisit de produire plus. Wu (1999) et Skees (2000) montrent que cela a causé une augmentation des surfaces cultivées. En effet, leurs présences encouragent la culture de surfaces plus risquées. Jusque là utilisées pour le foin et les pâturages, elles sont devenues des surfaces de cultures céréalières (aux US, Skees estime ce phénomène à 25 à 30 millions d'acres supplémentaires soit environ 15 millions d'hectares). Wu utilise des données du Nebraska et cible son analyse sur la consommation d'intrants chimiques par acre. Il observe que ces contrats incitent la culture de terres plus pauvres qui nécessitent plus de traitements chimiques. De même, Chambers et Qiggin (2002) modélisent le comportement des agriculteurs en présence d'un contrat sur le rendement moyen. Ils montrent qu'un producteur adverse au risque choisit alors de produire plus.

Les pouvoirs publics participent souvent à ces programmes. L'analyse de Meyer et Robison (1991), en marge de notre problème, constate l'évolution des prix de la terre comme l'évolution du niveau du risque en agriculture. Une contribution supplémentaire de l'État a pour effet d'augmenter le prix de la terre. Il s'agit d'une répartition des subventions entre les différents acteurs. Les effets secondaires sont bien sûr nombreux et, bien qu'ils soient importants, ne font pas partie de la problématique de la thèse.

*L'utilisation optimale des contrats financiers ou d'assurance n'est pas simple et fait donc l'objet d'une abondante littérature. Le hedging des contrats cotés est complexe parce qu'ils sont unidimensionnels d'une part et que le producteur fait face à un risque de base d'autre part. L'intégration des programmes l'est également car ils sont nombreux, parfois proches, et en concurrence avec les contrats cotés. Enfin, on peut noter que la présence de ces contrats interfère sur le comportement du producteur et sur son attitude face au risque. Après cette analyse de l'utilisation des outils de gestion par les producteurs, le chapitre suivant poursuit avec l'analyse des programmes et de leurs gestions.*



## Chapitre 3

# Analyse des programmes

L'analyse des programmes de couverture et des contrats d'assurance fait l'objet d'une abondante littérature. L'objectif de ce chapitre est de présenter les développements théoriques réalisés sur leurs tarifications et leurs difficultés de mise en œuvre. La première partie présente les différentes modélisations qui permettent de définir le montant de la prime de ces contrats. La deuxième partie décrit les contrats optimaux proposés dans la littérature. Enfin, la troisième et dernière partie s'intéresse aux problèmes de gestion de ces contrats.

### 3.1 La détermination du prix des contrats

Beaucoup d'éléments rendent difficile la détermination des prix des contrats. Cette partie considère, dans ses deux premières sections, les difficultés statistiques pour déterminer la distribution des risques agricoles. La première section analyse quelques modélisations des risques agricoles et la deuxième, le cas particulier de la distribution des rendements agricoles. La troisième section aborde le problème de la segmentation des exploitations agricoles. Les deux dernières sections analysent l'influence de deux problèmes majeurs de l'assurance agricole et de leurs influences sur le montant de la prime. Elles traitent respectivement de l'aléa moral et du risque systémique.

#### 3.1.1 Modélisation des risques agricoles

La modélisation des risques agricoles par les outils statistiques est essentielle pour mettre en œuvre une bonne tarification. L'étude peut porter sur une source de risque spécifique comme par exemple le gel, la grêle ou l'incendie (Vercamen et Pannell, 2000). Elle peut concerner le risque global



du producteur ou une de ces composantes. La littérature s'intéresse aussi beaucoup à l'étude statistique du rendement qui fera l'objet de la section suivante. L'analyse statistique de l'aléa sur les prix fait également l'objet d'une littérature très vaste, notamment à travers l'approche financière.

Cette sous-section présente l'analyse du risque de qualité, l'utilisation originale de processus stochastiques, et une modélisation alternative à l'approche financière du risque de prix.

### Le risque de qualité

La littérature économique agricole se consacre bien plus sur les risques de quantité et de prix, que sur le risque de qualité. En effet, ce risque est généralement plus difficile à définir et à mesurer. On notera néanmoins l'article de Huets et Ligon (1999) qui s'intéresse à la qualité des tomates sur des données de Californie. Ils définissent la mesure de la qualité d'une manière très simple : par le nombre de tomates déclassées. Le contrat d'assurance propose alors une indemnité sur cette base. On notera également l'article de Martin *et al* (2001) qui s'intéresse au risque de qualité sur le coton. Il établit une relation entre la qualité et la pluviométrie durant les semaines qui précèdent la récolte.

### Utilisation de processus stochastiques

Les processus stochastiques sont des outils majeurs en statistique. Ils peuvent avoir des applications diverses en agriculture. Hertzler (1991) propose quatre applications : les investissements de l'entreprise agricole, le hedge, le choix des intrants et l'évolution de la demande.

Les processus stochastiques peuvent être utilisés également pour déterminer le montant de la prime (Stokes *et al.*, 1997). Stokes (2000) montre les similitudes entre cette approche et les modèles financiers dont le prix d'un contrat dérivé est fonction de ses sous-jacents. Il définit de cette manière le prix des contrats CRC et IP qui sont fonctions de plusieurs variables aléatoires stochastiques (prix et rendement agricole).

Mais les processus stochastiques ont surtout des applications en finance pour modéliser l'évolution du prix. Cette approche financière est adaptée à de nombreux produits agricoles, et en particulier, ceux qui sont cotés sur un marché. L'analyse théorique de l'évolution des prix et de l'évaluation des actifs dérivés est importante et fera l'objet du chapitre suivant.

### Modélisation alternative du prix

Goodwin *et al* (2000) utilisent une modélisation du risque sur le prix pour déterminer le prix utilisé dans les programmes américains RA, IP et CRC. Dans ce cadre, il ne cherche pas à définir le processus du prix, mais uniquement sa densité à l'échéance, en fonction de la maturité. Ainsi, il définit la fonction de densité du prix par une loi paramétrique, et définit une modélisation de l'hétéroscédasticité en fonction de la maturité. Cette modélisation présente l'avantage de réaliser une estimation plus fine de la densité du prix à l'échéance que le modèle de Black and Scholes. Malgré cela, cette approche ne définit pas le processus stochastique du prix, qui permettrait de déterminer le portefeuille de réplcation d'un contrat dérivé.

#### 3.1.2 La distribution des rendements agricoles

Pour déterminer le prix des contrats sur le rendement agricole, il est important de connaître la distribution des rendements individuels notés  $Y_{it}$ . Il s'agit d'une distribution qui intègre les différentes années de récolte (temps  $t$ ) et les différents agriculteurs (individu  $i$ ). Cette sous-section explique, à partir d'éléments bibliographiques, que cette distribution ne suit pas une loi normale et mentionne quelques fonctions de densité alternatives. Deuxièmement, elle présente une formalisation de cette distribution multi-variée qui décompose ce risque en une composante temporelle systémique et une composante temporelle individuelle. Les éléments climatiques ayant une forte influence sur les rendements agricoles, cette sous-section explore dans un troisième temps les tentatives pour intégrer ces paramètres. Enfin, dans un quatrième temps, elle s'intéresse à la composante temporelle individuelle de cet aléa.

#### La question de la normalité de la distribution

Les rendements agricoles suivent-ils une loi normale? La littérature montre que les rendements ne suivent pas une loi normale (Moss et Shonkwiler, 1993; Just et Weninger, 1999; Ramirez *et al.*, 2001). Dans le cas des rendements agricoles du coton, du maïs et de l'avoine au Mississippi, Nelson (1990) observe un biais négatif. Il montre de plus que le choix de la distribution influence fortement l'estimation de la prime<sup>1</sup>. Un test montre alors qu'une distribution beta est plus adaptée que la loi normale. Par ce changement de distribution,

1. Nelson et Preckel (1989) proposent une loi beta comme alternative à la loi normale. Depuis, Ramirez (1994, 1997, 2000) propose plutôt une loi sinus hyperbolique inverse. Elle dérive d'une loi normale par la transformation sinus hyperbolique inverse suivante :

$$\sinh^{-1} [\Theta_i(Y_{it} - c_t)] / \Theta_i = \nu_{it}, \quad (i = 1, \dots, P) \quad (3.1)$$

l'auteur met en évidence que le montant de la prime estimé diminue significativement.

L'étude de la normalité des rendements agricoles fait appel à des méthodologies adaptées à une variable aléatoire indicée sur deux facteurs. Notons que ce problème, et le choix d'une distribution, est très important pour tarifier le contrat dans le cadre d'une mutualisation pluriannuelle des risques. Ces méthodologies ne sont néanmoins pas présentées dans cette section parce que notre approche est très différente et qu'aucune variable aléatoire multi-variée ne sera utilisée.

### Une formalisation de la distribution

Du fait de la composante systémique, les rendements moyens des producteurs évoluent d'une année sur l'autre. Le risque des producteurs intègre également une composante temporelle individuelle. C'est ce qu'exprime la modélisation suivante proposée par Just et Weninger (1999) :

$$Y_t = \sum_{i=1}^N a_{it} Y_{it} \text{ avec } \sum_{i=1}^N a_{it} = 1 \quad (3.2)$$

où  $Y_t$  est le rendement moyen de l'année pour une région donnée et  $a_{it}$  représente le poids relatif du producteur  $i$  qui, parmi les  $N$  producteurs, obtient l'année  $t$  un rendement  $Y_{it}$ . Le rendement individuel est modélisé comme suit :

$$Y_{it} = D_{it} + \delta_t + e_{it} \quad (3.3)$$

Il comprend une composante déterministe  $D_{it}$ , une composante systémique  $\delta_t$  et une composante aléatoire temporelle individuelle  $e_{it}$ . Dans ce modèle, la composante déterministe  $D_{it}$  est définie par  $E[Y_{it}]$ .  $Y_{it} = D_{it}$  devient la composante aléatoire du rendement due à l'agriculteur.  $\delta_t$  est égal à :

$$Y_t - \sum_{i=1}^N a_{it} D_{it} = Y_t - D_t$$

Ainsi, la composante temporelle individuelle  $e_{it}$  est égale à  $Y_{it} - D_{it} - \delta_t$ .

où  $\nu_{it}$  est une variable aléatoire gaussienne de paramètre  $\mu$  et  $\sigma$ , et où  $c_t$  et  $\Theta$  sont les paramètres de la transformation. Ses résultats montrent la performance de cette distribution par rapport aux loi normale, log-normale et beta.

D'autres auteurs préfèrent utiliser une fonction de densité non paramétrique calibrée par la méthode de Kernel. Récemment, Ker et Goodwin (2000) puis Ker et Coble (2003) ont analysé de cette manière la densité des rendements agricoles.

L'objectif général de l'étude de la distribution des rendements est de déterminer le prix des contrats de couverture. C'est pourquoi, les travaux de recherche analysent la distribution des  $Y_{it}$  et non pas les distributions respectives de  $\delta_t$  et de  $e_{it}$ . Ce modèle 'additif' est un exemple intéressant des modèles proposés dans la littérature. Il est présenté ici parce qu'il met en évidence la composante systémique et la composante individuelle. Il l'est aussi parce qu'il est similaire à la modélisation qui est retenue dans la thèse.

### Les paramètres climatiques

La relation entre le rendement et les aléas climatiques a été étudiée dans la perspective d'un hedge qui intègre les dérivés climatiques. Turvey (2001) fait une description des contrats climatiques disponibles dans l'Ontario, et tente d'établir une relation entre les indices de précipitation et de température et le rendement des producteurs. Le résultat de sa régression donne un  $R^2$  de 0,33 pour le maïs, de 0,27 pour le colza et de 0,31 pour le foin. Ces contrats, utilisés directement par un producteur, ne peuvent donc lui offrir une gestion de risques suffisante. Martin *et al* (2001) proposent des contrats basés sur le niveau de précipitation pour le coton. Ils constatent que la qualité de la production est très sensible aux précipitations pendant la floraison. Au niveau agrégé, il obtient une bonne relation entre cet indice et la perte de revenu. Néanmoins, le problème du risque de base subsiste fortement car cet indice englobe une vaste zone géographique.

Kaufmann et Snell(1997), quant à eux, proposent une modélisation multivariée qui intègre des variables climatiques, économiques, sociales, et techniques. Ils réalisent cette recherche sur les données des rendements maïs de l'ensemble des États-Unis pour les années 1969, 1974, 1978, 1982 et 1987. Leurs résultats semblent probants avec un  $R^2$  de 0,86.

L'étude de cette relation entre les index climatiques et le revenu des producteurs agricoles est très importante. Elle permet de déterminer si l'usage des dérivés climatiques est approprié. Ces quelques articles montrent des résultats très différents, mettant en évidence que cette analyse doit se faire au cas par cas.

### La composante temporelle individuelle $e_{it}$

Les auteurs qui étudient la loi statistique du rendement agricole pour déterminer une prime ne s'intéressent généralement pas à ce terme individuel pour un  $t$  fixé ( $f_t(e_{it})$ ). Par contre, les auteurs qui s'intéressent au risque de base dans le cas de contrats sur le rendement moyen se préoccupent de ce terme. Par exemple, Mahul, à plusieurs reprises, a considéré ce terme dans

le cas du hedge du contrat à terme et des options sur le rendement agricole cotés aux États Unis. Smith *et al* (1994) formalisent également ce terme dans le cas de la conception d'un contrat optimal sur le rendement.

Tous deux font l'hypothèse que  $e_i$  est indépendant de l'aléa systémique et que  $E[e_i] = 0$  avec  $e_{it} \in [e_{\max}, e_{\min}]$ . Par contre, ils ne font aucune hypothèse sur sa fonction de densité. Trois étudiants de l'EURO Institut d'Actuariat ont réalisé cette analyse sur des données de rendements agricoles français sur le blé d'hivers en Champagne (Bureau d'Études, 2001). Si les résultats confirment que le rendement agricole ne suit pas une loi normale, l'hypothèse de normalité de la composante temporelle individuelle était, dans beaucoup de cas, acceptable. Ce point est très important dans la construction théorique de la gestion du contrat d'assurance où il sera utilisé la fonction de densité conditionnelle de cette composante.

### 3.1.3 La segmentation des risques agricoles

D'une manière générale, le niveau de risques supporté par les assurés est hétérogène. Il est donc classique de réaliser une segmentation du portefeuille pour que le montant de la prime demandé à chacun corresponde à son niveau réel de risque. Dans les programmes américains, un coefficient correctif du taux de prime du comté est appliqué en fonction du rendement espéré (*Actual Production History* (APH)) et du niveau de couverture. La segmentation se fait donc à partir du comté de l'agriculteur et du rendement espéré.

Knight et Coble (1999) font une analyse des contrats qui se base sur le rendement espéré<sup>2</sup> dans 37 États des États Unis. Dans cet article, les auteurs étudient l'influence d'une subdivision du comté pour le calcul du taux de base sur le taux de prime du producteur. Ils montrent ainsi que ce choix a un effet significatif sur le calcul de la prime.

### 3.1.4 La sélection adverse et l'aléa moral

Il est généralement admis que le producteur en sait plus sur l'espérance de ses résultats que ne peut en apprendre l'assureur. Cette asymétrie d'information génère le problème de la sélection adverse qui a des conséquences négatives sur l'efficacité du marché de l'assurance. Makki et Somwaru (2001) réalisent une étude sur la sélection adverse et l'asymétrie d'information sur les programmes maïs et colza aux États Unis. Ils observent que le niveau de risque réel de l'agriculteur influe sur le *ratio* de couverture qu'il choisit.

2. Les programmes qui se basent sur le rendement espéré historique du producteur regroupent les contrats suivants : MPCI, GRP, CAT, CRC, IP, RA.

Les agriculteurs ayant des risques aggravés souscrivent les couvertures plus importantes. Face à l'asymétrie d'information, le niveau de couverture est donc considéré comme une information complémentaire. Les auteurs en déduisent l'avantage d'appliquer un taux de prime non linéaire, par rapport au *ratio* de couverture. Ils comparent ensuite leurs résultats, soient les taux dits compétitifs, avec les taux pratiqués pour l'ensemble des contrats. La forme de ces résultats est reproduite sur la figure 3.1.

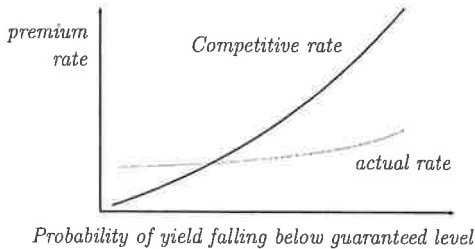


FIG. 3.1 – Actual and competitive premium rates (from Makki, 2001)

Arnott (1988) présente les bases de l'aléa moral. L'aléa moral surgit quand les états de la nature<sup>3</sup> et les actions des individus sont peu ou pas observables pour l'assureur. Seul le sinistre peut être constaté quand il survient. Dans le cas extrême, aucun mécanisme ne permet d'inciter l'assuré à révéler l'état de la nature ou à prendre des mesures de précaution. Ainsi, le contrat ne dépend ni de l'état de la nature, ni des actions de l'assuré. Ces contrats découragent alors l'individu de prendre ses précautions. L'article montre dans des cas simples comment l'aléa moral affecte la prime d'assurance si, toutefois, elle peut être définie.

Just *et al* (1999) cherchent à décomposer le profit du producteur, qu'il soit assuré ou non. Ils mesurent alors la contribution respective de l'aversion au risque des producteurs, des subventions et de l'asymétrie d'information. Bien que l'aversion au risque semble être la notion la plus présente dans la littérature économique agricole, Just *et al* observent que cette contribution est moindre que celles des subventions et de l'asymétrie d'information.

Pour contrer ces problèmes, certains auteurs proposent que les assureurs créent des contrats sur index<sup>4</sup>. En 1991, Miranda montre que ceux-ci per-

3. L'ensemble des événements sur lesquels le décideur n'a aucun contrôle.

4. Dans ce cadre, Wang (2000) réalise un travail original sur le découpage de ces zones

mettent de réduire l'aléa moral mais qu'ils ne couvrent alors que la composante systémique du risque de l'agriculteur. Le producteur se trouve alors face à un risque de base, comme pour l'achat d'un contrat financier. Skess *et al* (1997) considèrent, dans ce cadre, comment réaliser une mise en commun des risques entre les régions. Or, en plus de contredire le principe indemnitaire, les auteurs mettent en évidence que ces contrats sur index intègrent une forte composante systémique. Ils apportent donc une réponse efficace au problème de la sélection adverse et du hasard moral, mais ne résolvent en rien le problème de la gestion des risques systémiques présenté dans la section suivante.

### 3.1.5 Le risque systémique

La nature systémique des risques agricoles modifie le montant de la prime demandé par l'assureur qui opère la gestion de ces contrats par une mutualisation. Duncan et Myers (2000) proposent une modélisation globale de l'assureur et de l'assuré, chacun ayant sa propre aversion au risque. Il vérifie ensuite, en fonction de la covariance entre les risques des producteurs, si un point d'équilibre existe. S'il existe, il est défini par un niveau de couverture et par son prix. Dans son modèle, et pour un nombre d'assurés suffisant, le point d'équilibre existe toujours si les risques ne sont pas corrélés. Par contre, pour les risques systémiques, l'existence de ce point n'est pas garanti, même avec une infinité d'assurés<sup>5</sup>.

En 1999, Turvey *et al* font une analyse de la mutualisation au niveau de la réassurance. Ils calculent le montant de cette dernière pour un portefeuille d'assurés de différentes régions et de différentes productions. Même à ce niveau, le risque global reste important car les risques régionaux ne sont ni réellement indépendants, ni homogènes. La composante systémique implique que le réassureur détienne des réserves importantes et liquides pour y faire face.

Ces résultats indiquent que le caractère systémique tend à réduire le niveau de couverture et à augmenter la prime commerciale (pour financer des réserves suffisantes). Ce point est essentiel : il traduit que le mode de gestion de l'assureur induit une surprime. Beaucoup d'auteurs insistent sur les coûts élevés de l'assurance. Or, souvent, cela traduit l'importance du risque pris en charge. Ici, en plus de l'importance du risque, la technique de gestion entraîne un coût supplémentaire. Par exemple, le coût pour maintenir une

pour le *Group Risk Plan*. Ce découpage est difficile car les petites zones réduisent le risque de base mais augmentent la corrélation entre les rendements moyens des zones frontalières.

5. Ce résultat mathématique explique pourquoi les pouvoirs publics interviennent comme ultimes réassureurs.

réserve suffisante pour faire face aux sinistres est dans ce cas prohibitif. Ces résultats motivent le choix de la thèse, de gérer la composante systémique du risque par les marchés financiers.

### 3.2 La conception de contrats optimaux

Les contrats optimaux cherchent la meilleure réponse aux attentes des agriculteurs. Par exemple, Smith (1994) propose un contrat optimal sur le rendement moyen. Il maximise les paramètres  $\Phi_i$  et  $\alpha_i$  dans le contrat qui paie en retour la quantité suivante :

$$\max(\Phi_i(\alpha_i E[Y_i] - Y_i))$$

La forme de ce contrat est très proche de l'option de vente qui, deux ans plus tard, a été cotée au Chicago Board of Trade. On observe comme différence que, d'une part, les valeurs possibles des  $\alpha_i$  sont limitées par les prix d'exercice proposés et que, d'autre part, le nombre de  $\Phi_i$  est limité par la quotité. Cela correspond également au résultat de Mahul (1999, 2000), qui cherche la forme optimale d'un contrat sur le rendement régional moyen. Dans ce cadre, la conception de contrat optimal est très similaire à la notion de hedge optimal analysé dans le chapitre précédent.

En 2003, Mahul et Wright définissent un contrat optimal sur le revenu. Ils montrent premièrement que, si les contrats sont fonction du prix individuel et du rendement individuel, alors, le contrat optimal dépend uniquement du revenu individuel. Deuxièmement, ils montrent que ce n'est plus le cas si les contrats sont fonctions de prix et de rendements moyens. Ils donnent alors, dans ce second cas, une forme explicite du contrat optimal.

Hart *et al* (2001) proposent des contrats originaux pour les productions d'élevage. Ils proposent pour l'éleveur de porcs une option de type asiatique sur le revenu, ce dernier étant modélisé de la manière suivante :

$$m_H \times H_t - m_C C_{t-3} - m_S S_{t-3}$$

où  $m_H$  représente la masse moyenne de la carcasse de porc,  $H_t$  le prix du porc à l'instant  $t$ ,  $m_C$  la masse de maïs,  $C_{t-3}$  le prix du maïs trois mois plus tôt et de même pour le soja  $S$ . Cette modélisation est particulièrement intéressante pour les producteurs de porcs pour deux raisons. Premièrement, il prend en compte, certes d'une manière grossière, le revenu du producteur. Deuxièmement, l'option asiatique repose sur des prix moyens ce qui peut correspondre à la situation des éleveurs de porcs qui produisent en continu.



### 3.3 La gestion des contrats

Comme il a été précisé dans la problématique de la thèse, la notion de risque non assurable implique d'analyser le problème, non pas au niveau du producteur, mais de l'assureur. Skees and Barnett (1997) prônent un soutien des pouvoirs publics. Ils estiment que, pour l'économiste, la question n'est plus de savoir si le gouvernement doit s'impliquer dans la gestion des risques systémiques agricoles, mais plutôt de savoir qu'elle est la manière la plus efficiente.

A *contrario*, Thourot (Zurich Assurance) précise que, s'il y a des risques non assurables tels que le terrorisme, il faut être prudent dans le maniement de ce concept. Il constate la tendance à se tourner vers l'État pour lui demander de couvrir des risques dont l'amplitude paraîtrait excessive, parfois même après la survenance. Il encourage plutôt les assureurs à faire preuve de créativité pour être capables d'assurer les risques majeurs. Cette polémique sur la nécessité du soutien des pouvoirs publics montre l'importance du problème de l'assureur.

Miranda et Glauber (1997) estiment que la nature systémique est le problème majeur pour l'assurance agricole privée. Ils estiment que les problèmes d'asymétrie d'information et de l'aléa moral, qui affectent également ce secteur, sont relativement moindres. Ainsi, la solution ne peut venir uniquement d'un contrat sur index proposé par un assureur, parce qu'il repose alors sur un risque systémique. Miranda et Glauber estiment que seuls les assurances et les marchés financiers ensemble, avec leurs performances respectives peuvent fournir une solution au problème des risques agricoles dits non assurables. De même, Mahul explique à travers deux modélisations simples que la composante systémique peut être partiellement transférée aux marchés financiers (Mahul, 2001a).

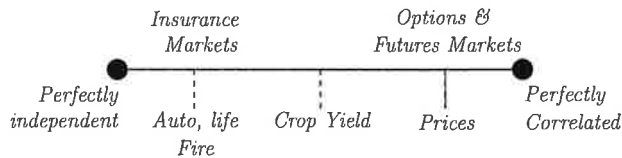


FIG. 3.2 – Un continuum des risques agricoles (de Miranda et al (1997))

Mason *et al* (2001) font une première analyse de la réassurance *via* les marchés financiers. Ses résultats montrent qu'ils ont un potentiel réel pour réduire le risque du réassureur (l'écart type est globalement divisé par deux

dans la simulation réalisée<sup>6</sup>). Ces résultats sont encourageants mais restent insuffisants.

*Ce chapitre montre les difficultés statistiques rencontrées pour établir le montant de la prime, en particulier pour établir la densité des rendements agricoles. Il explique également que l'aléa moral, la sélection adverse et la composante systémique génèrent une surprime. Les deux premiers incitent également l'assureur à ne pas construire de véritables contrats d'assurance basés sur le rendement individuel. C'est ainsi que certains chercheurs construisent des contrats optimaux similaires aux contrats financiers. Enfin, les éléments bibliographiques qui s'intéressent à la gestion des risques systémiques agricoles confirment la complémentarité de l'assurance et de la finance. L'objectif de la thèse est donc de poursuivre la recherche dans cette voie. C'est pourquoi, le chapitre suivant propose une analyse mathématique des marchés financiers.*

---

6. Ils réalisent une simulation du risque de la Risk Management Agency qui gère les conditions de réassurance des programmes de couverture agricole aux États Unis. Le hedge porte sur le risque global de l'assureur et non sur le risque des agriculteurs pris individuellement.



## Chapitre 4

# Analyse mathématique des marchés financiers

La modélisation de l'évolution du prix d'un actif financier est essentielle. Elle permet bien sûr de mieux anticiper l'évolution future de l'actif mais surtout de définir un prix pour les actifs dérivés, les principaux étant les contrats à terme et les options. Le modèle de Black and Scholes est présenté dans la première partie ainsi que le pendant 'pédagogique' de Cox-Ross-Rubinstein. La deuxième et dernière partie analyse quelques extensions majeures du modèle de Black and Scholes et en particulier le modèle à sauts proposé par Robert C. Merton en 1976.

### 4.1 L'approche classique de la modélisation des marchés financiers

Les modèles financiers intègrent depuis longtemps des processus stochastiques. Dès 1900, le mathématicien français Louis Bachelier modélise le prix du sous-jacent par un mouvement brownien standard<sup>1</sup> et déduit de son modèle le prix d'une option. La première section présente le modèle de Black and Scholes avec ses hypothèses. La deuxième section donne la formule du prix de l'option d'achat et le prix de l'option de vente. La troisième et dernière section présente le modèle simplifié de Cox-Ross-Rubinstein.

---

1. Il modélise l'évolution du prix du blé à l'instant  $t$  par l'équation  $S_t = S_0 + W_t$ . Bien qu'en réalité le prix du blé est strictement positif, le prix du blé  $a$  dans cette modélisation une probabilité  $P\{W_t < S_0\}$  strictement positive d'être inférieure à 0.

### 4.1.1 Le modèle de Black and Scholes

Le modèle de référence est le modèle de Black and Scholes (1973). Pour obtenir le prix de l'option, les auteurs font les hypothèses suivantes qu'ils appellent les conditions idéales :

- a) Le taux sans risque  $R$ , est constant quelque soit la maturité. La quantité  $r$  est définie par la relation  $r = \ln(1 + R)$  ( $(1 + R)^t = e^{rt}$ ).
- b) Le marché fonctionne en continu. Le prix de l'actif suit un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  constants (Équation 4.1). À l'échéance, le prix du sous-jacent suit une loi log-normale.
- c) Il n'y a pas de dividende pendant toute la durée de l'option.
- d) L'option est "européenne", elle ne peut être exercée qu'à l'échéance.
- e) Le marché est sans friction (il n'y a ni impôts, ni frais de transaction). Chaque titre est parfaitement divisible.
- f) La vente à découvert de titres est autorisée.

La modélisation du prix de l'actif s'appuie sur les travaux de Samuelson (1965) qui décrit le mouvement brownien géométrique de la manière suivante :

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.1)$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien ( $W_t = \mathcal{N}(0, t)$ )<sup>2</sup>. Nous utiliserons cette même base pour construire notre modèle. Dans ce cas le prix suit une loi log-normale (Figure 4.2).

### 4.1.2 La formule de Black and Scholes

La formule de Black and Scholes d'une option d'achat  $C$  est (Hull, 2000, Chapitre 11):

$$C = SN(d_1) - E \exp(-r\tau)N(d_2) \quad (4.2)$$

2. Soit  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique. On dit que  $W$  est un mouvement brownien si les 3 propositions suivantes sont satisfaites :

- i)  $P(W_0 = 0) = 1$ ,
- ii)  $\forall n \geq 2$  et  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ , on a :  
 $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sont indépendants,
- iii)  $\forall t, h \geq 0$   $W_{t+h} - W_t = \mathcal{N}(0, h)$ ,

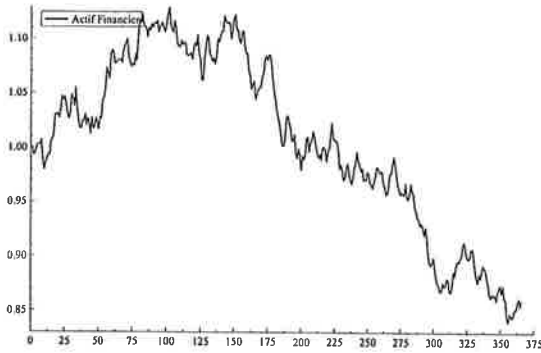


FIG. 4.1 - Simulation d'un mouvement brownien géométrique ( $S_0 = 1$ , 365 jours,  $\mu = 0,05$ ,  $\sigma = 0,32$ )

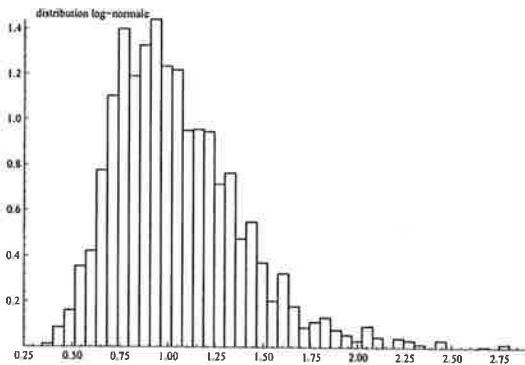


FIG. 4.2 - Distribution du prix dans le cas du modèle de Black and Scholes ( $\mu = 0,05$ ,  $\sigma = 0,32$ )

où

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans le cas d'une option de vente  $P$ , cette formule est la suivante :

$$P = E \exp(-r\tau)N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (4.4)$$

Le delta de l'option, noté  $\Delta$ , représente la variation de l'option lorsque le sous-jacent varie d'une unité monétaire. Il permet de définir la stratégie qui, en continu, permet de couvrir le risque lié à l'achat ou à la vente d'une option en prenant une position sur le sous-jacent. Il sont définis par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\partial}{\partial S}C = C_S = N(d_1) \quad \text{avec } \Delta \in ]0, 1[ \\ \Delta_P &= \frac{\partial}{\partial S}P = P_S = N(d_1) - 1 \quad \text{avec } \Delta \in [-1, 0[ \end{aligned}$$

### 4.1.3 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Six ans plus tard, Cox *et al.* (1979) proposent une approche simplifiée et pédagogique du modèle de Black and Scholes. Ce modèle, communément appelé CRR (Cox-Ross-Rubinstein), constitue la référence des modèles à temps discret. L'évolution de l'actif est étudié sur la période  $[0, T]$  divisé en  $T^*$  sous périodes égales. Si l'on veut par exemple modéliser sur une période de 3 mois, on peut retenir  $T^* = 91$  avec une unité égale à une journée. Le marché financier est réduit à deux actifs. L'actif sans risque  $B$  s'écrit :

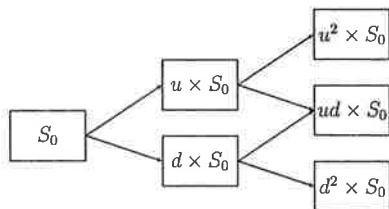
$$B_t = (1 + r)^t, \quad \forall t \leq T^* \quad (4.5)$$

Soit  $S$  l'actif risqué (l'action) et  $\xi_{t+1}$  le rapport entre  $S_{t+1}$  et  $S_t$  qui peut prendre les valeurs  $u$  ou  $d$  :

$$\xi_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t} \in \{u, d\} \quad (4.6)$$

pour tout  $t = t_1, t_2 \dots t_{T^*}$ , où  $d < 1 + r < u$  sont des nombres réels et  $S_0$  est strictement positif. Le CRR fait l'hypothèse que les  $\xi_t, t = t_1, t_2 \dots t_{T^*}$  sont indépendants sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et de même loi de probabilité :

$$\mathcal{P}\{\xi_t = u\} = p = 1 - \mathcal{P}\{\xi_t = d\} \quad \forall t = t_0, t_1 \dots t_{T^*-1} \quad (4.7)$$

FIG. 4.3 – Illustration du modèle CRR pour  $T^* = 2$ 

Cette approche simplifiée permet de mieux discerner les notions de probabilité risque-neutre et d'absence d'opportunité d'arbitrage<sup>3</sup> (Roger, 1996). Les aspects mathématiques de ces modèles de base sont développés dans de nombreux ouvrages de référence (Musielà et Rutkowski, 1997; Karatzas et Shreve, 1991; Hull, 2000; Lamberton et Lapeyre, 1997, par exemple). Le livre de Musielà et Rutkowski constitue, par son approche mathématique complète et claire, une référence majeure de la thèse.

## 4.2 Les extensions au modèle de Black and Scholes

L'hypothèse du modèle de Black and Scholes d'une distribution log-normale du prix de l'actif avec une volatilité constante n'est pas vérifiée. Ceci est également vrai sur les marchés à terme des productions agricoles. Par exemple, le test réalisé par Goodwind *et al* (2000) rejette<sup>4</sup> l'hypothèse de log-normalité des contrats à terme sur le maïs et le blé sur la base des cotations du Chicago Board of Trade (1889-1960). Ils observent que les caractéristiques de la distribution des données telles que le biais sont en contradiction avec la loi log-normale.

C'est pourquoi, quatre extensions majeures au modèle de Black and Scholes sont présentées dans cette section (Andersen et Andreasen, 2000). Les deux premières concernent respectivement l'approche de volatilité déterministe et

3. Par arbitrage, on entend la possibilité d'utiliser plusieurs marchés (avec des différences spéculatives entre les actions sur ces marchés). On suppose donc que les marchés sont équilibrés entre eux, on ne peut profiter de l'arbitrage: il faut que les marchés soient efficients (l'information circule bien et vite) et qu'ils fonctionnent correctement (répondant ainsi aux diverses spéculations sur des différences).

4. Test de normalité et log-normalité de Bera-Jarque



de volatilité stochastique. La troisième approche est le modèle des processus à sauts initié par Merton (1976) et la dernière est une modélisation plus récente de Bates (1996).

#### 4.2.1 Les modèles à volatilité déterministe

Pour beaucoup, il est clair que l'hypothèse de volatilité constante est fautive. De nombreux auteurs ont étudié les évolutions des prix comme séries temporelles et ont cherché à déterminer des cycles (Tomek et Peterson, 2001). Les modélisations de fonction de volatilité déterministe ont connu une certaine popularité parce qu'elles répondent d'une manière simple au problème (Dupire, 1994; Derman et Kani, 1994; Rubinstein, 1994). Néanmoins, cette réponse simple est restrictive et il semble que le modèle de volatilité stochastique offre une réponse plus générale.

#### 4.2.2 Les modèles à volatilité stochastique

Hull and White (1987,1988) proposent une modélisation où la volatilité suit un processus stochastique. Leur modèle est le suivant (1988) :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \mu dt + \sqrt{\sigma} dW^S \\ d\sigma &= a(b - \sigma)dt + \xi \sigma^\alpha dW^\sigma \end{aligned} \quad (4.8)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $\xi$  et  $\alpha$  sont des constantes réelles et  $W^S$  et  $W^\sigma$  sont deux browniens indépendants. La variable  $\sigma$  est dans ce modèle la volatilité instantanée de  $S$ . Hull dérive la solution explicite du prix de l'option européenne. Dans le cas où la volatilité et le prix de l'actif sont corrélés, il n'y a plus de résultats simples. Sauf cas particulier, une estimation du prix de l'option s'obtient alors par simulation (Heston, 1993).

Plusieurs propositions similaires ont été réalisées à la même époque. Il est possible de citer par exemple Louis Scott (1987) qui propose la modélisation suivante un peu plus intuitive :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW^S \\ d\sigma &= \beta(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \xi dW^\sigma \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec les notations précédentes et où  $\beta$  est une constante et  $\bar{\sigma}$  est la variance moyenne.

La volatilité stochastique permet d'introduire un biais par rapport à la log-normale de Black and Scholes qui s'ajuste mieux aux données constatées sur les marchés financiers.

4.2.3 Les processus à sauts

Merton (1976) constitue la référence des modélisations d'une action (ou contrat à terme) générée à la fois par des processus continus et non-continus. La motivation de Merton est différente de celle de Hull et White. Il rejette l'hypothèse que l'évolution du prix soit purement continue.

Le modèle de Merton considère un processus de sauts défini par un double processus. Le premier régit l'amplitude aléatoire du saut et le second la survenance aléatoire. La fonction d'impulsion  $Y$  produit un saut fini sur  $S$  (de  $S$  à  $Y \times S$ ). L'amplitude du saut est donc égale à  $(Y - 1)S$ . Comme  $S$  est positif ou nul, il résulte que  $Y \geq 0$ . Le saut est alors positif si  $Y > 1$  et négatif si  $0 \leq Y < 1$  et le saut est nul si  $Y = 1$ . La survenance du saut est régie par un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Le choix de la modélisation fait par Merton est d'ajouter au mouvement brownien géométrique le saut centré sur sa moyenne  $\lambda k dt$  (avec  $k = E(Y - 1)$ ) : soit le processus  $(Y - 1)d\pi - \lambda k dt$ . C'est une martingale<sup>5</sup> purement discontinue à variation finie. Le modèle de Merton est donc :

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dW + (Y - 1)d\pi$$

avec les notations habituelles.

La solution est donnée en utilisant les résultats de l'ouvrage de Klebaner (Klebaner, 1999, Sections 8.11 et 9.3). En effet, nous sommes dans un contexte de semi-martingale<sup>6</sup> :

D'où avec la notation  $dX = \frac{dS}{S}$  :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ X(t) - X(0) - \frac{1}{2} \langle X, X \rangle^c(t) \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s)) e^{\Delta X(s)}$$

$$\langle X, X \rangle^c(t) = [X, X]^c(t) = (dX^c)^2 = \sigma^2 t$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (\mu - \lambda k)dt + \int_0^t \sigma dW_t + \int_0^t (Y - 1)d\pi$$

5. Un processus stochastique  $M_t$  est une  $(\mathcal{F}^W)$  martingale si

- 1)  $\forall t \geq 0 \quad M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t^W, P)$  ( $\Leftrightarrow M_t$   $\mathcal{F}_t^W$ -mesurable et  $E[|M_t|] < +\infty$ )
- 2)  $\forall t, \forall h \geq 0 \quad E[M_{t+h} | \mathcal{F}_t^W] = M_t \quad P - pp$

6. Il s'agit d'une semi-martingale comme somme d'une martingale locale ( $\sigma dW$ ) et d'un processus à variations finies  $((\mu - \lambda k)dt + (Y - 1)d\pi)$ .

$$X(t) - X(0) = (\mu - \lambda k)t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1)$$

Par suite

$$S_t = S_0 \exp \left\{ (\mu - \lambda k - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1) \right\} \prod_{j=1}^{N(t)} (1 + Y_j - 1) e^{-\sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1)}$$

Finalement après simplification :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ (\mu - \lambda k)t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{j=1}^{N(t)} (Y_j) \quad (4.10)$$



FIG. 4.4 - Simulation d'un processus avec saut ( $S_0 = 1$ , 365 jours, modèle de Merton,  $\mu = 0,03$ ,  $\sigma = 0,21$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $Y \approx \log N(-0, 1; 0, 2)$ )

Il est fréquent dans la littérature de trouver une hypothèse de distribution log-normale sur  $Y$ . Merton lui-même explicite le prix de l'option d'achat dans ce cas particulier :

$$C_M(S, K, \tau, \sigma, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \tau} (\lambda \tau)^n}{n!} C(S, K, \tau, \sigma_n^2, r_n) \quad (4.11)$$

où  $C_M$  est la valeur d'un option d'achat par le modèle de Merton et  $C$  par le modèle de Black and Scholes,  $K$  est le prix d'exercice,  $\tau$  la maturité et

$$\begin{aligned} r_n &\equiv r + \frac{n}{\tau} \left( \mu + \frac{\delta^2}{2} \right) - \lambda k \\ \sigma_n^2 &\equiv \sigma^2 + \frac{n}{\tau} \delta^2 \\ \lambda' &\equiv \lambda(1+k) = \lambda e^{\mu + \frac{\delta^2}{2}} \end{aligned}$$

Ce résultat s'interprète aisément quand on considère chaque terme de la somme. Ils correspondent à la probabilité qu'il y ait  $n$  saut(s) multipliée par la valeur de l'option, sachant que  $S_T$  a réalisé  $n$  saut(s).  $S_T$  sachant  $n$  s'écrit :

$$S_T|n = S_0 \exp \left\{ (\mu - \lambda k)T + \sigma W_T - \frac{1}{2} \sigma^2 T \right\} \prod_{j=1}^n (Y_j) \quad (4.12)$$

La densité de  $S_T|n$  est une log-normale parce que c'est le produit de  $n+1$  variable(s) aléatoire(s) de densité log-normale. Les hypothèses de Black and Scholes sont donc vérifiées pour  $S_T|n$  quelque soit  $n$ . C'est pourquoi le prix de l'option de Merton reprend, dans chaque terme de la somme, la formule de Black and Scholes avec un changement de variables adapté.

Les travaux de Merton eux-mêmes ont connu de nombreuses extensions. Par exemple, Mercurio and Runggaldier (1993) proposent un modèle où les paramètres  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $Y$  sont des fonctions déterministes du temps .

Depuis, de nombreux travaux ont été réalisés pour tester et affiner le modèle et ses aspects mathématiques, définir le prix des options américaines ou développer les techniques d'estimation des paramètres. Zhang (1993,1994), a réalisé une thèse dont l'objet principal est d'évaluer le prix d'une option américaine pour le modèle de Merton par l'analyse numérique. Pham (1997) analyse le prix de l'option américaine dans un cadre plus général que celui de Merton. Il est également possible de considérer les travaux de Hanson et Westman (2002) qui s'intéressent à la densité du processus à sauts et proposent une méthodologie pour déterminer les paramètres.

Aase (1988) propose une approche mathématique de l'évaluation d'un actif contingent (ou produit dérivé) avec une volatilité déterministe et un processus à sauts. Il dérive de ce processus l'ensemble des mesures équivalentes  $P^*$ , telles que  $S^*$  est une martingale sur  $P^*$ . Cette mesure, contrairement au modèle de Black and Scholes n'est pas unique. Aase donne une expression explicite d'une transformation de la mesure  $L_T = dP^*/dP$  dans le modèle. Par cette transformation, il devient possible de définir le prix d'un actif contingent et son portefeuille de réplcation.

Hilliard et Reis (1999) réalisent un test du modèle avec sauts sur les contrats à terme agricoles. Ils utilisent les contrats à terme et les options sur le soja cotés sur le Chicago Board of Trade (CBOT) de juillet 1990 à juin 1992. Ils montrent que le modèle dérivé du modèle de Merton proposé par Bates (1991) est plus approprié que le modèle de Black and Scholes.

#### 4.2.4 Les modèles mixtes

Au vu de la littérature, Bates (1996, 2000) constitue la référence des modèles qui combinent volatilité stochastique et processus à sauts. Il s'intéresse à la capacité des modèles à anticiper des krachs boursiers comme celui du 26 septembre 1987. En 1996, il propose une modélisation du prix à terme et dérive le prix de l'option. Il teste ce modèle sur les données du Deutsche Mark (1984-1991). Cette modélisation est une combinaison du modèle de Hull and White généralisé et de celui de Merton. À la différence de Hull and White, le brownien géométrique et le brownien de la volatilité ne sont pas indépendants et Bates introduit une corrélation. Cette double extension au brownien géométrique permet une modélisation plus fine du biais constaté sur les contrats financiers. Cet affinement permet surtout de mieux déterminer le prix des options de vente *out of the money*<sup>7</sup> (OTM).

En 2000, il propose une modélisation plus sophistiquée qu'il analyse à l'aide du contrat S&P 500 coté sur le Chicago Mercantile Exchange (1983-1993). Il réalise en outre une comparaison entre les différentes modélisations : le modèle de Black and Scholes, des modèles à volatilité déterministe, des modèles à volatilité stochastique, et des modèles à volatilité stochastique et à sauts. Il en déduit la performance de cette dernière modélisation.

*Les modèles de Black and Scholes et de Merton seront utilisés dans le modèle de gestion de risques agricoles. Les modélisations plus avancées, en particulier celle de Bates, sont d'une part, complexes à mettre en œuvre d'un point de vue mathématique. Elles nécessitent, d'autre part, un nombre de données très important du contrat coté pour le paramétrer. Or, par manque de liquidité, le contrat à terme sur le rendement agricole ne peut fournir l'échantillon suffisant. C'est pourquoi, dans la thèse, seules les deux premières modélisations seront utilisées.*

---

7. C'est une option de vente où le prix d'exercice est inférieur au prix du sous-jacent.

**Troisième partie**  
**Développements théoriques**



## Chapitre 1

# Une provision comptable pour fluctuation du chiffre d'affaires

*And it came to pass at the end of two full years, that Pharaoh dreamed: and, behold, he stood by the river. And, behold, there came up out of the river seven well favoured kine and fatfleshed; and they fed in a meadow. And, behold, seven other kine came up after them out of the river, ill favoured and leanfleshed; and stood by the other kine upon the brink of the river. And the ill favoured and leanfleshed kine did eat up the seven well favoured and fat kine. So Pharaoh awoke. [...] Then Pharaoh sent and called Joseph, and they brought him hastily out of the dungeon: and he shaved himself, and changed his raiment, and came in unto Pharaoh. And Pharaoh said unto Joseph, I have dreamed a dream, and there is none that can interpret it: and I have heard say of thee, that thou canst understand a dream to interpret it. And Joseph answered Pharaoh, saying, It is not in me: God shall give Pharaoh an answer of peace. [...] And Joseph said unto Pharaoh, The dream of Pharaoh is one: God hath shewed Pharaoh what he is about to do. The seven good kine are seven years; and the seven good ears are seven years: the dream is one. And the seven thin and ill favoured kine that came up after them are seven years; and the seven empty ears blasted with the east wind shall be seven years of famine. [...] Now therefore let Pharaoh look out a man discreet and wise, and set him over the land of Egypt. Let Pharaoh do this, and let him appoint officers over the land, and take up the fifth part of the land of Egypt in the seven plenteous years. And let them gather all the food of those good years that come, and lay up corn under the hand of Pharaoh, and let them keep food in the cities. And that food shall be for store to the land against the seven years of famine, which shall be in the land of Egypt; that the land perish not through the famine. And the thing was good in the eyes of Pharaoh, and in the eyes of all his servants. Genesis 41:1-4,14-16,25-27,33-37 (King James version)*

Épargner pour faire face aux aléas futurs est depuis longtemps une mesure sage. Aujourd'hui, les provisions comptables sont un moyen de gérer certains risques de l'entreprise. L'entreprise agricole doit faire face à un risque sur



son chiffre d'affaires qui peut varier fortement d'une année sur l'autre. Il n'existe pas aujourd'hui de provisions sur le chiffre d'affaires. En effet, les autorités comptables et fiscales considèrent que ce dernier est entièrement sous la responsabilité du chef d'entreprise. Pourtant, ce risque a justifié en France quelques mesures qui cherchent à lisser le revenu du producteur. Cette contradiction apparente vient du fait que ces variations sont en partie indépendantes des qualités de gestionnaire et des capacités techniques du producteur. Par exemple, le producteur n'a aucun pouvoir sur la météorologie qui a pourtant un effet favorable ou défavorable sur ses résultats. Il arrive donc que l'ensemble des producteurs d'une filière subisse une perte.

L'État français a pris quelques mesures en faveur des producteurs comme par exemple la moyenne triennale et la déduction pour investissement. Le projet de loi de finances pour 2002 propose de favoriser la constitution d'une épargne professionnelle de précaution pour faire face aux aléas agricoles (Art. 72 D bis). Toutes ces mesures prises par l'État semblent répondre à un besoin intuitivement reconnu, mais n'ont pas de réels fondements techniques. C'est également le cas du Compte de Stabilisation du Revenu Net proposé aux agriculteurs canadiens dont les modalités de fonctionnement ne répondent pas à l'objectif (section 2.2.1 de la partie problématique (I)). C'est pourquoi, notre document tente de définir une technique de lissage qui prend en compte uniquement les variations du chiffre d'affaires sur lesquelles le chef d'entreprise n'a aucun contrôle. La technique de lissage passe par la définition d'une nouvelle provision<sup>1</sup> : *la provision pour fluctuation d'origine systémique du chiffre d'affaires*.

La première partie pose les bases de la modélisation. Sur cette base, la seconde partie propose une définition de la provision pour perte systémique du chiffre d'affaires. La troisième et dernière partie vise à montrer que cette provision respecte les conditions de fond de la comptabilité et de la fiscalité. Nous cherchons ainsi à prouver que la provision pour fluctuation du chiffre d'affaires pourrait s'inscrire dans une évolution du contexte réglementaire. En effet, il ne s'agit pas seulement de proposer une provision réglementée, mais une réelle provision comptable fiscalement déductible. Dans cette même partie, nous montrons également l'intérêt et les limites de cet outil.

## 1.1 Les bases de la modélisation

Cette première section définit tout d'abord la notion de risque systémique. Elle propose ensuite une mesure de la perte ou du gain systémique qui sert

---

1. Cette proposition a fait l'objet d'une publication dans la *Revue Française de comptabilité*.

de base à la construction de la provision pour perte systémique.

### 1.1.1 Les pertes et gains systémiques

Rappelons qu'un risque systémique est un risque qui affecte l'ensemble de la population concernée quand il se concrétise. Il est opposé au risque idiosyncrasique (assimilé dans le chapitre au risque individuel (indépendant)).

On appelle la *perte systémique* la perte causée par un risque systémique. On réalise un *gain systémique* supérieur ou égal à zéro dans le cas contraire.

### 1.1.2 Une mesure des pertes et gains systémiques sur le chiffre d'affaires

Avant de construire la provision pour fluctuations du chiffre d'affaires, il faut proposer une mesure des pertes et gains systémiques. On pose pour cela les paramètres suivants :

- Chaque année, il sera établi le **Chiffre d'Affaires unitaire<sup>2</sup> moyen Annuel** ( $CA_A$ ) pour l'ensemble des producteurs de la zone de production.
- On définit  $CA_M$  (le Chiffre d'Affaires Minimum) comme le seuil au-dessous duquel on considère que les producteurs de la filière subissent une perte sur leur chiffre d'affaires. Il peut être fixé par l'État ou déterminé à l'aide de calculs statistiques (e.g. le coût de revient historique moyen). Autrement dit, si  $CA_A$  est inférieur à  $CA_M$ , alors on considère que la filière réalise une perte. On supposera que le chiffre d'affaires moyen des producteurs est supérieur à  $CA_M$ .
- On appelle  $CA_H$  le Chiffre d'Affaires Historique moyen de la région et  $CA_{Hi}$  celui du producteur  $i$ .

Les producteurs d'une même filière ont des capacités techniques différentes et ne suivent pas tous les mêmes stratégies de production ou de commercialisation. Le rapport  $\frac{CA_{Hi}}{CA_H}$  permet de prendre en compte l'efficacité de chaque producteur.

Dans le cas où le chiffre d'affaires minimum moyen des producteurs ne serait pas atteint, on considère que le producteur  $i$  subit une *perte systémique unitaire* égale à :

$$p_i = \frac{CA_{Hi}}{CA_H} (CA_M - CA_A)$$

2. Rappelons que le chiffre d'affaires est rapporté à l'unité de production. À titre d'exemple, les producteurs de céréales considéreront le chiffre d'affaires à l'hectare et les producteurs de porcs (naisseurs-engraisseurs) considéreront le chiffre d'affaires par truie.

où  $p_i$  est une perte unitaire. Par exemple, s'il s'agit d'une production céréalière, il s'agit d'une perte à l'hectare. Dans le cas inverse, le producteur  $i$  réalisera un *gain systémique unitaire* égal à :

$$g_i = \frac{CA_{Hi}}{CA_H} (CA_A - CA_M)$$

La pertinence de cette mesure dépend de la taille de la région et de l'homogénéité de la situation des producteurs face aux aléas. En effet, cette mesure suppose que les conséquences des aléas sont uniformes (i.e. le taux de variation est le même pour tous les producteurs). Ce n'est pas le cas si la région est trop grande ou s'il s'agit de la réalisation d'un risque comme le gel ou les inondations, où le taux de sinistre peut être radicalement différent d'une exploitation à l'autre. Si cela s'avère nécessaire, il est possible de construire des mesures du risque systémique plus précises.

On peut noter que le montant de la perte systémique peut être différent du montant de la perte réelle du producteur. Le schéma suivant permet d'expliquer cette différence.

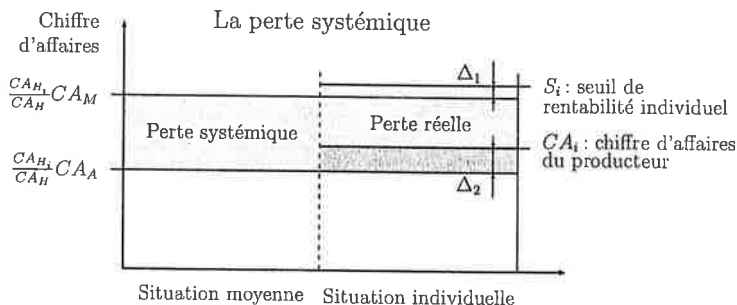


FIG. 1.1 - Écart entre la perte systémique et la perte réelle

La première différence ( $\Delta_1$ ) entre la perte systémique et la perte réelle provient de l'écart entre  $CA_M$  et le seuil de rentabilité individuel (ou point mort)  $S_i$  au-dessous duquel le producteur subit une perte. La mesure de la perte systémique, telle que nous l'avons définie, ne prend pas en compte cet écart. Pour le prendre en compte, il est nécessaire de définir un mode de calcul du coût de revient de la production valable pour chaque producteur. La mesure devient alors trop complexe pour l'intégrer efficacement en comptabilité.

La deuxième différence ( $\Delta_2$ ) est l'écart entre le chiffre d'affaires moyen annuel  $CA_A$  et chiffre d'affaires du producteur  $CA_i$ . En effet, même si tous ont subi une situation défavorable, tous les producteurs ne seront pas affectés de la même manière. Cet écart traduit le risque individuel du producteur qui, de fait, n'est pas pris en compte dans la mesure de la perte systémique.

## 1.2 La provision pour perte systémique sur le chiffre d'affaires

La provision résulte du montant des dotations, du montant des reprises et aussi de son fonctionnement. La première section définit les caractéristiques de la provision pour perte systémique sur le chiffre d'affaires et la deuxième propose un exemple chiffré de son calcul.

### 1.2.1 Les caractéristiques de la provision

À partir de la mesure des gains et des pertes systémiques présentée dans la partie précédente, la provision est définie de la manière suivante :

- La *dotation unitaire maximale aux provisions* sera de  $d = \beta \times g_i$  si la filière a réalisé un gain systémique.  
 $\beta$  est la valeur comprise entre 0 et 1 qui équilibre la provision sur le long terme. Cette valeur assure en fait que la provision constituée soit en moyenne finalement reprise.  $\beta$  sera calculé sur des bases statistiques réalisées à partir des prix historiques (en monnaie constante) et des rendements historiques (en productivité constante pour suivre l'évolution technique) sur plusieurs années et pour chaque région homogène de production.

La dotation est donc égale à :

$$\beta \times \text{Nbr Unités} \times (CA_A - CA_M)$$

- La *reprise unitaire maximale sur les provisions* sera de  $r = p_i$  si la filière a réalisé une perte systémique. La reprise est donc égale à :

$$\text{Nbr Unités} \times (CA_M - CA_A)$$

- Le *fonctionnement* de la provision :
  - Soit il s'agit d'un lissage pur. Le montant courant de la provision peut être négatif, en particulier à l'initiation du système.

- Soit il s'agit d'un lissage sous contrainte. La reprise de la provision n'est possible que si la provision a été constituée au préalable. Le montant courant de la provision est toujours supérieur ou égal à zéro. La provision fonctionne alors comme l'épargne.

### 1.2.2 Illustration du calcul de la provision

L'objectif de cette section est d'illustrer par un exemple le calcul de la dotation et de la reprise. On suppose que l'État a fixé le chiffre d'affaires minimum à l'hectare pour un producteur d'une céréale du grand ouest à  $CA_M = 1000 \text{ €/ha}$ .

On suppose que  $\beta = 0,80$ .

- si le résultat de l'année est de  $CA_A = 1020 \text{ €/ha}$  alors le producteur qui cultive 90 ha de blé pourra doter sa provision de  $d = 0,8 \times 90 \times (1020 - 1000) = 1440 \text{ €}$  ;
- si maintenant le résultat de l'année est de  $CA_A = 975 \text{ €/ha}$  alors le producteur qui cultive 90 ha de blé pourra réaliser une reprise de  $r = 90 \times (1000 - 975) = 2250 \text{ €}$ .

Un producteur peut par exemple choisir de suivre chaque année la limite à hauteur de 60%.

## 1.3 Analyse de cette provision

Cette provision est originale et ne s'inscrit pas dans le contexte réglementaire actuel (Collectif, 2001). Cette partie propose donc une analyse par rapport aux principes fondamentaux de la comptabilité et de la fiscalité. Elle considère également les aspects économiques et techniques de cette provision.

### 1.3.1 Les avantages

Dans un premier temps, cette section fait référence aux principes fondamentaux de la comptabilité et de la fiscalité pour montrer que cette provision pourrait s'inscrire dans une future évolution réglementaire. Dans un second temps, elle montre que cette provision offre au producteur agricole un outil simple de gestion de risques.

#### Le contexte comptable et fiscal

La provision pour fluctuation du chiffre d'affaires a pour but de donner une meilleure image de la situation réelle de l'entreprise et répond ainsi au

principe comptable de l'image fidèle. En effet, 'le Code de commerce cherche à assurer la sincérité et une image fidèle des comptes annuels' (Dufils et Lopater, 2000).

Une provision comptable doit être 'précise quant à sa nature, mais incertaine quant à sa réalisation' (Dufils et Lopater, 2000). Pour être fiscalement déductible, l'administration fiscale insiste sur le caractère probable et non éventuel de la provision (Cozian, 1998). La provision pour fluctuation du chiffre d'affaires est bien précise quant à sa nature, clairement définie et est également calculée sur de réelles bases statistiques.

De plus, la provision peut être constituée uniquement si des événements survenus ou en cours rendent la perte systémique prévisible à la date d'établissement de la situation (Dufils et Lopater, 2000). L'administration fiscale interprète cette condition avec rigueur car elle tient à rejeter toute provision qui serait fondée sur des faits postérieurs (Cozian, 1998). Dans le cas de la provision pour fluctuation du chiffre d'affaires, il n'y a pas de fait générateur au sens usuel. Pourtant, sans faire référence à un événement précis, la perte systémique est prévisible et le producteur détient toute l'information nécessaire pour l'évaluer. On élargit ainsi la notion de 'fait générateur' à la notion de 'situation génératrice'.

Par exemple, à la clôture de l'exercice  $N$ , rien ne permet de supposer que le climat sera défavorable pendant l'exercice  $N + 1$ . La comptabilité considèrera aujourd'hui qu'il n'y a pas de fait générateur. Pourtant il est certain que le climat est variable et il est certain qu'il sera cause de perte dans un ou plusieurs exercices à venir. Le fait générateur n'est pas le climat défavorable survenu pendant la saison de production mais le fait que le climat soit variable d'une année sur l'autre. C'est la 'situation génératrice' dans cet exemple. Comme, de plus, la provision ne se base sur aucun élément postérieur à l'exercice, il est possible de conclure que la provision respecte également les contraintes de fond de la comptabilité et de la fiscalité qui concernent le fait générateur.

L'administration fiscale est consciente que le revenu des producteurs est variable et qu'un bénéfice n'a de sens que s'il est calculé sur plusieurs années. Elle le prouve en créant des régimes spécifiques.

**La moyenne triennale :** c'est une disposition accordée aux producteurs agricoles sous certaines conditions. Le producteur paie l'impôt sur le tiers de la somme des bénéfices de l'année d'imposition et des deux années précédentes (Rouet, 2000). La moyenne triennale permet un lissage fiscal. De cette manière, l'administration fiscale reconnaît d'une manière implicite que la forte volatilité du chiffre d'affaires des producteurs agricoles est en bonne part indépendante de leurs compétences.

Il existe d'autres dispositions fiscales comme le système du quotient ou la Déduction Pour Investissement qui le confirment. Cependant cette méthode ne repose pas sur des bases techniques mais uniquement sur des considérations intuitives. Elle ne tient pas compte des spécificités des différentes branches agricoles. De plus, l'intérêt pour le producteur est limité car la moyenne triennale est liée à l'impôt et pas au résultat comptable.

**Provision pour hausse des prix :** cette disposition ne concerne pas directement les producteurs agricoles mais prouve néanmoins que l'administration fiscale tient compte des risques systémiques. Lorsque les cours sont en hausse, les entreprises pratiquent une provision pour hausse des prix qui concerne leur stock, laquelle est une provision à caractère fiscal. Le bénéfice nominal dégagé par la cession du stock existant peut se révéler illusoire si son renouvellement devient plus coûteux en raison de la hausse des prix. La provision pour hausse des prix a pour objet de faciliter l'autofinancement du coût de réapprovisionnement des stocks en période de hausse de prix (Cozian, 1998).

De même, les hausses des chiffres d'affaires agricoles sont illusoire parce que systématiquement suivies d'une période de baisse. La provision pour fluctuation du chiffre d'affaires permet donc de faciliter la gestion de l'entreprise et particulièrement le financement des outils de production.

**Provision pour égalisation :** Dans le cas des sociétés d'assurance, l'administration fiscale permet de constituer une provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralités afférentes aux opérations d'assurance. Après plusieurs années, les fluctuations se compensent, et la provision a permis d'égaliser les résultats annuels. Comme pour la provision pour fluctuation du chiffre d'affaires, il n'y a pas de fait générateur mais une 'situation génératrice'.

Ces quelques régimes spécifiques argumentent la proposition sur le plan fiscal. En fait, elle repose sur les mêmes accords de principe. L'objet de notre proposition est donc d'utiliser ces accords de principe pour construire un 'véritable' outil de gestion de risques.

### Un outil simple pour le producteur

Comme l'exemple le montre, les calculs nécessaires sont simples. De plus, cette provision peut s'appliquer à tous les producteurs quelque soit le type de production. Si le producteur a plusieurs activités agricoles, il répétera pour chacune la technique comptable. Aux chiffres de référence près, le calcul de

la provision reste le même quelque soit la production ou la structure de l'entreprise.

De plus, cette provision présente de nombreux avantages pour le producteur agricole. Bien utilisée, elle peut réduire de manière très significative les variations de revenu du producteur. Elle répond de plus à un besoin des producteurs qui souhaitent gérer eux-mêmes une partie de leurs risques. Ils conservent comme cela une certaine liberté d'action. Cette provision leur donne par ailleurs des *repères techniques* qu'ils n'ont pas aujourd'hui. Ils permettent de faire de cette provision pour risque systémique un outil de gestion de risques efficace.

### 1.3.2 Les limites et contraintes

La création de cette provision fournirait un outil très utile pour les producteurs agricoles. Néanmoins, elle ne peut complètement répondre à la problématique du producteur et entraîne des contraintes à la fois pour le producteur et le législateur.

#### Les limites du mécanisme

La provision pour fluctuation du chiffre d'affaires est un mécanisme de lissage. Elle donne un moyen pour le producteur de gérer par lui-même une partie de son risque. En aucun cas, elle ne permet de faire face à une catastrophe, qu'il s'agisse d'une très mauvaise année ou d'une crise particulièrement longue. Le but de cette provision est donc de gérer les fluctuations de chiffre d'affaires normales pour l'activité.

#### Le fonctionnement de la provision

Par ailleurs, la provision peut fonctionner de deux manières différentes : soit le montant courant de la provision est toujours positif et dans ce cas fonctionne comme l'épargne, soit il peut être également négatif. Le choix n'est pas neutre. Tout d'abord, le mécanisme d'épargne a un fonctionnement simple et sûr. Il présente néanmoins deux inconvénients. D'une part, il provoque une baisse artificielle des revenus agricoles, donc des recettes fiscales, pendant les premières années durant lesquelles le système s'amorce. En effet, ceux qui ont des bons résultats dotent leurs provisions et réduisent ainsi leurs résultats. De plus, ceux qui ont des mauvais résultats les conservent car ils ne peuvent reprendre la provision qu'ils n'ont pas encore constituée. D'autre part, ce mécanisme manque d'efficacité les premières années. Il s'agit d'un



réel problème car il est difficile de proposer au producteur un outil qui ne fonctionne pleinement qu'au bout de plusieurs années.

Pour remédier à ces deux difficultés, on peut envisager que la provision constituée soit parfois négative. La provision devient alors efficace dès la première année. De plus, elle n'affecte plus le bénéfice moyen agricole c'est-à-dire que cela neutralise l'effet sur les recettes fiscales. Mais cette solution présente un risque de dérive. La provision pourrait devenir fortement négative ou le rester pendant une longue période. Il y a deux raisons possibles : une erreur de l'estimation de  $\beta$  ou une catastrophe.

Pour à la fois appliquer cette technique plus avantageuse qu'une simple épargne et éviter les dérives, on peut introduire deux limites :

- on peut limiter le montant de la reprise pour éviter de grever la provision en cas de catastrophe ;
- on peut limiter également le montant courant de la provision pour éviter qu'elle ne devienne trop fortement négative.

### Une vision sur le long terme

Cette provision comporte aussi des limites particulières liées aux risques systémiques. Cette provision doit être intégrée dans une gestion de risques sur le long terme. Il faut donc que les choix du producteur soient cohérents d'une année sur l'autre (tous les changements devront être justifiés par des causes liées à l'entreprises agricole). Cette contrainte de la provision ne pose pas de difficulté car elle correspond au principe comptable de la permanence des choix et méthodes. Le producteur pourra choisir de suivre cette disposition à hauteur de 60%. Le choix de l'État sera par exemple de limiter l'écart de 10% d'une année sur l'autre et de 20% sur 3 ans.

### La trésorerie de l'entreprise

De plus, à chaque exercice, le producteur devra peut être réintégrer une somme importante ou encore créer une dette (si la provision peut être négative). Le producteur sera donc peut-être en difficulté si sa comptabilité et sa trésorerie ne sont pas en phase. En marge de l'aspect comptable, il est possible d'envisager une contrainte réglementaire et une garantie :

- si la provision est positive, le producteur a l'obligation de disposer en face de sa provision de placements liquides et à faibles risques ;
- si la provision est négative, l'État garantit l'accès au crédit.

### Les chiffres de référence

Des chiffres de référence tels que le chiffre d'affaires moyen annuel, le chiffre d'affaires historique moyen, le chiffre d'affaires minimum et le  $\beta$  sont nécessaires pour calculer le montant de la provision. Le producteur a besoin de connaître ces chiffres pour établir sa comptabilité. Le législateur doit donc garantir l'existence et la publication périodique de ces chiffres de référence auxquels la comptabilité pourra se référer. *A priori*, les différents chiffres d'affaires moyens annuels et les différents chiffres d'affaires historiques moyens, ne sont pas difficiles à obtenir. Par contre, le chiffre d'affaires minimum reste à définir. Techniquement, il est compris entre le coût de revient de la production et le chiffre d'affaires historique moyen. Pour le reste, des choix politiques peuvent être également pris en compte. Une fois cette valeur définie, l'État doit assurer le calcul des différents  $\beta$  sur des bases statistiques.

#### 1.3.3 Le coût de mise en œuvre

Le rôle de l'État est multiple dans cette proposition. Tout d'abord, il doit s'assurer l'existence et de la publication des chiffres de référence. Notons que ces chiffres sont peu coûteux parce que ce sont des valeurs agrégées et que ces chiffres sont souvent déjà disponibles (auprès d'organismes interprofessionnels par exemple). Ensuite, l'État peut garantir l'accès au crédit pour financer la trésorerie de l'entreprise dans le cas où le montant cumulé de la provision serait négatif. Cette garantie a un coût qui dépend essentiellement de la variabilité du chiffre d'affaires de la production et du choix par l'État du chiffre d'affaires minimum. Enfin, les pouvoirs publics peuvent décider d'adoindre à cette nouvelle provision des mesures incitatives qui ont un coût.

Ainsi, la provision pour perte systémique, appliquée dans sa forme la plus simple, est peu coûteuse. Le coût dépend donc essentiellement des choix politiques de garantir l'accès au crédit et/ou de coupler cette disposition de mesures incitatives.

*L'intérêt de cette provision est d'utiliser des outils simples. Il permet au gestionnaire de l'entreprise agricole de gérer des risques sur lesquels il n'a aucun contrôle et qui affectent directement son chiffre d'affaires. Avec la provision pour fluctuation du chiffre d'affaires, le risque systémique n'est certes pas supprimé, mais ses conséquences sont réellement réduites. L'entreprise agricole est alors moins sensible aux crises, et met en valeur les qualités de gestionnaire financier et les capacités techniques du chef d'entreprise. Les choix techniques et financiers pourront donc être faits sur des bases 'stabili-*

sées'.

*Toutefois, la provision pour fluctuation du chiffre d'affaires présente quelques limites. Pour fonctionner, l'État et le producteur doivent prendre des engagements importants et sur le long terme. De plus, cet outil ne peut faire face aux situations extrêmes. Pour compléter la gestion des risques financiers de l'entreprise agricole, il sera toutefois nécessaire d'intégrer d'autres outils comme, par exemple, les contrats financiers ou les contrats d'assurance. Le chapitre suivant explore donc la conception d'un contrat financier multidimensionnel, en particulier le contrat financier sur le chiffre d'affaires.*

## Chapitre 2

# Un contrat financier agricole

Les risques financiers de l'entreprise agricole sont par nature des risques composés, et tout particulièrement ceux qui concernent le chiffre d'affaires et la marge. Ils dépendent de paramètres unitaires comme le prix, le rendement, la qualité ou encore le coût complet de production.

L'objectif de ce chapitre<sup>1</sup> est de construire deux contrats dérivés multidimensionnels. Les cas présentés sont le contrat à terme et l'option sur le chiffre d'affaires, ce dernier étant le produit du prix et du rendement agricole. Ce chapitre est une première étape théorique de la résolution de la problématique en proposant une stratégie de gestion d'un risque multidimensionnel et systémique. Une sophistication de ce modèle sera présentée dans le chapitre 5 de cette même partie. Elle utilise des modélisations du marché financier plus élaborées comme celles qui sont décrites dans l'analyse mathématique des marchés financiers.

La première partie de ce chapitre propose une modélisation du marché financier. Cette modélisation sert également de base aux deux chapitres suivants. Cette partie définit aussi le premier contrat dérivé étudié, appelé contrat à terme sur le chiffre d'affaires. La seconde partie définit le portefeuille de réplication qui permet de définir la stratégie de gestion de ce contrat et présente une simulation de cette stratégie. La troisième et dernière partie utilise les bases de la première partie et la méthodologie de la seconde pour réaliser la gestion d'une option de vente sur le chiffre d'affaires.

---

1. Les développements théoriques réalisés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article accepté pour publication dans le *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.

## 2.1 Le contrat dérivé sur le chiffre d'affaires

L'objectif de cette partie est de définir le contrat dérivé sur le chiffre d'affaires. La première section pose tout d'abord le contexte de l'intermédiation financière. La deuxième section explicite le modèle financier qui comprend les contrats à terme sur le prix et sur le rendement, et une obligation dans le cadre classique du modèle de Black and Scholes. La troisième section définit le contrat dérivé et la quatrième en estime le prix.

### 2.1.1 Le contexte de l'intermédiation financière

Dans la littérature, le producteur accède généralement directement aux marchés financiers. Toutefois, quand il y a un intermédiaire, il permet surtout de regrouper les opérations et de réduire les coûts de transaction. La stratégie de gestion de ces contrats implique une gestion en continu. C'est pourquoi les résultats théoriques de ce chapitre concernent plutôt un intermédiaire financier capable de mettre en œuvre cette stratégie.

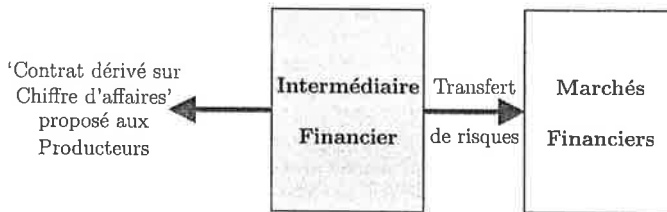


FIG. 2.1 – Illustration du contexte de l'intermédiaire financier

Comme présenté dans la Figure 2.1, l'intermédiaire financier fournit au producteur les contrats dérivés sur le chiffre d'affaires, soit le contrat à terme ou l'option. Le risque retenu par ces contrats est transféré au marché financier par l'intermédiaire financier. L'objectif principal de ce chapitre est de définir la stratégie de gestion qui permet ce transfert.

La relation entre le producteur et l'intermédiaire financier ne fait pas partie de l'étude. Mais une étude très similaire a été réalisée par Mahul (2003) sur cet aspect. Dans son modèle, le producteur obtient un prix  $p_i$  et un rendement  $y_i$  qui intègre un risque de base par rapport au prix agrégé  $p$

et au rendement agrégé  $y$  de la manière suivante :

$$p_i = \beta_1 + \alpha_1 p + \epsilon_1 \quad (2.1)$$

$$y_i = \beta_2 + \alpha_2 y + \epsilon_2 \quad (2.2)$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont deux aléas indépendants de moyenne nulle. À partir de ce modèle, le risque de base sur le chiffre d'affaires peut être calculé. L'article mentionné analyse dans ce cadre le bénéfice d'un contrat optimal  $J$  basé sur le prix agrégé et le rendement agrégé qui est alors de la forme :

$$J(p, y) = \beta_1 \alpha_1 (E[\bar{p}] - p) + \beta_1 \alpha_2 (E[\bar{y}] - y) + \beta_1 \beta_2 (E[\bar{p}\bar{y}] - py) \quad (2.3)$$

En remplaçant ce résultat dans le contexte des contrats à terme, on reconnaît la présence de contrats à terme sur le prix, sur le rendement, et sur le chiffre d'affaires. Il est donc particulièrement intéressant de noter que le hedge optimal du producteur ne dépend pas alors uniquement du contrat à terme sur le chiffre d'affaires. Ce contrat ne peut donc pas se substituer aux deux contrats sous-jacents dans la gestion de risques du producteur, à cause du risque de base. Néanmoins, il offre un outil utile et complémentaire au producteur.

### 2.1.2 Modélisation du marché financier

Le marché financier est composé d'une obligation et de deux contrats à terme.  $B_t$  est l'obligation zéro coupon avec  $t \in [0, T]$  où  $T$  est l'échéance et  $r$  le taux sans risque.  $F$  est le contrat à terme sur le prix et  $Y$  est le contrat à terme sur le rendement. Les termes  $W_t^F$  et  $W_t^Y$ ,  $t \in [0, T]$ , sont deux mouvements browniens unidimensionnels définis sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})^2$ . À l'échéance, le contrat à terme est proportionnel au rendement agricole moyen observé de la région de référence.

Les évolutions de  $F$  et  $Y$  sont supposées suivre deux mouvements browniens géométriques. Le modèle du marché financier peut donc s'écrire comme suit<sup>3</sup>:

2.  $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{\mathbf{W}_u | u \leq t\} = \mathcal{F}_t^F = \mathcal{F}_t^Y$  (Musielà et Rutkowski, 1997, Section 5.1)

3. Il peut s'écrire sous cette autre forme plus explicite :

$$F_t = F_0 \times \exp\left(\sigma_F W_t^F + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right)$$

$$Y_t = Y_0 \times \exp\left(\sigma_Y W_t^Y + \left(\mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right)t\right)$$

$$F_t = F_0 + \int_0^t \sigma_F F_u dW_u^F + \int_0^t \mu_F F_u du \quad (2.4)$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma_Y Y_u dW_u^Y + \int_0^t \mu_Y Y_u du \quad (2.5)$$

$$B_t = \exp(-r(T-t)) \quad (2.6)$$

où  $\mu_F$  et  $\mu_Y \in \mathbb{R}$  sont les paramètres déterministes de  $F$  et de  $Y$ ,  $\sigma_F > 0$  et  $\sigma_Y > 0$  sont les paramètres constants de la volatilité de  $F$  et de  $Y$ . L'évolution des prix de  $F$  et  $Y$  ne sont pas indépendants. C'est pourquoi, la quantité  $\delta = \text{cov}(W_u^F, W_u^Y)$  est introduite dans le modèle. A priori, cette covariance entre les deux mouvements browniens  $\delta$  est négative car il y a généralement une hausse des prix quand il y a une baisse de la production. Le covariance entre  $F$  et  $Y$  en  $t$  sera de  $\delta \sqrt{\sigma_F F_t \sigma_Y Y_t}$ . Quelque soit  $t$ , le coefficient de corrélation instantané<sup>4</sup> entre  $F$  et  $Y$  est  $\delta$  (Hull, 2000).

### La probabilité risque neutre

On définit  $W_t$  un mouvement brownien de dimension 2 de la manière suivante :

$$W_t = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} (W_t^F - \delta W_t^Y) \quad \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} (W_t^Y - \delta W_t^F) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_t^F \\ W_t^Y \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que  $W_t^F$  et  $(W_t^Y - \delta W_t^F) \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$  sont indépendants et que  $W_t^F$  et  $(W_t^Y - \delta W_t^F) \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$  suivent la loi normale  $\mathcal{N}(0, t)$ .

Par le théorème de Girsanov (Musiela et Rutkowski, 1997, section 10.2), le processus  $W_t^*$  est égal à :

$$W_t^* = W_t - \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\sigma_F}{\sqrt{1-\delta^2}} & 0 \\ \frac{-\delta \sigma_F}{\sqrt{1-\delta^2}} & \frac{\sigma_Y}{\sqrt{1-\delta^2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r - \mu_F \\ r - \mu_Y \end{pmatrix} (du) \quad (2.7)$$

$W_t^*$  est un mouvement brownien de dimension deux sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{P}^*$ .

### 2.1.3 Définition du contrat dérivé sur le chiffre d'affaires

Le contrat à terme sur le chiffre d'affaires est un contrat dérivé qui dépend de  $F$  et de  $Y$ , qui sont les contrats sous-jacents. À l'échéance ( $T$ ), son prix est déterminé par les prix de  $F$  et de  $Y$  et est égal à  $F_T \times Y_T$ .

4. La démonstration mathématique de ce résultat est proposé en Annexe B.

### 2.1.4 Le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires

Le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires est noté par  $\pi_t(F_T Y_T)$ . Il est égal à l'espérance actualisée de  $F_T \times Y_T$  à l'instant  $t$ , sous la mesure risque neutre.

Il est possible de rapprocher ce calcul des travaux de Janssen (1992) qui traitent la gestion Actif-Passif d'une banque ou d'une compagnie d'assurance. Dans son modèle, il calcule le quotient de deux mouvements browniens géométriques. Sur le plan mathématique, les calculs du quotient et du produit sont semblables. Ce calcul peut aussi se rapprocher des travaux de Stokes (1997, 2000) qui utilisent également le produit de deux mouvements browniens. Ce calcul est réalisé de nouveau ci-après car Stokes n'intègre pas le taux sans risque  $r$  (Stokes, 2000, note 7).

L'originalité se situe donc plutôt dans la finalité de ce calcul. Janssen en déduit une estimation de la probabilité de ruine d'une banque ou d'une compagnie d'assurance. Stokes en déduit, pour sa part, une estimation du prix du *Crop Revenue Coverage contract* (CRC). Dans ce chapitre, l'objectif est d'estimer le prix et de définir une stratégie de gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires.

**Proposition 2.1** À l'instant  $t$ , le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires  $\pi_t(F_T Y_T)$  est égal à :

$$\pi_t(F_T Y_T) = F_t Y_t \times \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y)(T - t)) \quad (2.8)$$

Ce contrat  $(\pi_t(F_T Y_T), t \in [0, T])$  suit un mouvement brownien géométrique avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \mu_\pi &= \mu_F + \mu_Y - r \\ \sigma_\pi &= \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta \sigma_F \sigma_Y} \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Démonstration :** À l'instant  $t$ , le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires est égal à l'espérance actualisée de  $F_T \times Y_T$  avec le taux sans risque  $r$  et la probabilité  $\mathbb{P}^*$  :

$$\pi_t(F_T Y_T) = B(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [F_T Y_T | \mathcal{F}_t]$$

Il est possible de vérifier que  $F_t$  et  $Y_t$  sont des processus d'Itô. Il est donc possible d'utiliser la formule d'Itô avec la fonction  $g$  définie par  $g(F_t, Y_t) = F_t \times Y_t$ . Pour simplifier la lecture de la démonstration, les dérivées partielles sont explicitées avant de décomposer la fonction  $g$  par la formule d'Itô :

$$\frac{\partial}{\partial F} g(F_u, Y_u) = Y_u ; \quad \frac{\partial}{\partial Y} g(F_u, Y_u) = F_u$$



$$\frac{\partial^2}{\partial F \partial Y} g(F_u, Y_u) = \frac{\partial^2}{\partial Y \partial F} g(F_u, Y_u) = 1 ; \quad \frac{\partial^2}{\partial F^2} g(F_u, Y_u) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} g(F_u, Y_u) = 0$$

Par la formule d'Itô, il résulte que :

$$\begin{aligned} g(F_T, Y_T) - g(F_t, Y_t) &= \int_t^T Y_u \times (\sigma_F F_u, 0) \cdot d\mathbf{W}_u^* + \int_t^T Y_u \times r F_u du \\ &+ \int_t^T F_u \times (\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u) \cdot d\mathbf{W}_u^* \\ &+ \int_t^T F_u \times r Y_u du \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T 1 \times \left\langle (\sigma_F F_u, 0), (\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u) \right\rangle du \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T 1 \times \left\langle (\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u), (\sigma_F F_u, 0) \right\rangle du \end{aligned} \quad (2.10)$$

Soit, après simplifications :

$$\begin{aligned} g(F_T, Y_T) - g(F_t, Y_t) &= \int_t^T F_u Y_u \left( \sigma_F + \delta \sigma_Y, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y \right) \cdot d\mathbf{W}_u^* \\ &+ 2 \int_t^T r Y_u F_u du \\ &+ \int_t^T \delta \sigma_F \sigma_Y F_u Y_u du \end{aligned} \quad (2.11)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [(F_T Y_T)^* | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [F_T Y_T \times \exp(-r(T-t)) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ F_T Y_T - \int_t^T r Y_u F_u du \middle| \mathcal{F}_t \right] \text{ sous la forme intégrale} \\ &= F_t Y_t + \int_t^T r Y_u F_u du + \int_t^T \delta \sigma_F \sigma_Y F_u Y_u du \text{ car } E[W] = 0 \\ &= F_t Y_t \times \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y)(T-t)) \end{aligned}$$

L'équation (2.8) est prouvée. Il est connu que le produit de deux mouvements browniens géométriques est un mouvement brownien géométrique. Ainsi, pour finir la démonstration, il reste à décrire les paramètres  $\mu_\pi$  et  $\sigma_\pi$  du contrat à terme sur le chiffre d'affaires. Soit  $B$  un brownien standard de dimension 1. Comme  $\pi_t(F_T Y_T)$  est un mouvement brownien géométrique, il résulte que :

$$\pi_t(F_T Y_T) = \pi_0(F_T Y_T) \exp\left(\sigma_\pi B_t + \left(\mu_\pi - \frac{1}{2}\sigma_\pi^2\right)t\right) \quad (2.12)$$

À partir de l'équation (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_t(F_T Y_T) &= \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y)(T - t)) F_t Y_t \\ &= \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y)(T - t)) \times F_0 \exp\left(\sigma_F W_t^F + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right) \\ &\quad \times Y_0 \exp\left(\sigma_Y W_t^Y + \left(\mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right)t\right) \\ &= \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y) T) \times F_0 Y_0 \\ &\quad \times \exp\left(\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta\sigma_F\sigma_Y} B_t\right) \\ &\quad \times \exp\left((\mu_Y + \mu_F - r)t - \frac{1}{2}(\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta\sigma_F\sigma_Y)t\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Par identification des termes  $B_t$  et  $t$  dans les équations (2.12) et (2.13), il résulte que :

$$\begin{aligned} \mu_\pi &= \mu_F + \mu_Y - r \\ \sigma_\pi &= \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta\sigma_F\sigma_Y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'équation (2.9) est ainsi démontrée. ■

## 2.2 La gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires

L'objectif de cette partie est de réaliser une analyse de la gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires. La première section propose une construction formelle de la stratégie de gestion en continue qui doit être mise en œuvre. La seconde réalise une simulation de cette stratégie pour illustrer la gestion du contrat. Enfin, la troisième section propose une analyse des coûts de transaction induits par la mise en œuvre de cette stratégie.

### 2.2.1 Construction formelle

Pour décrire la stratégie de gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires, il est nécessaire de construire son portefeuille de réplication. Un portefeuille est noté par une matrice colonne  $\begin{pmatrix} \alpha_F \\ \alpha_Y \\ \alpha_B \end{pmatrix}$  où  $\alpha_F$  est le nombre de

contrats à terme sur le prix,  $\alpha_Y$  est le nombre de contrats à terme sur le rendement et  $\alpha_B$  est le nombre d'unités d'obligations. La valeur  $e_t$  représente la quantité  $\exp((r + \delta\sigma_F\sigma_Y)(T - t))$ .

**Proposition 2.2** *Le portefeuille de réplication  $\Phi$  du contrat à terme sur le chiffre d'affaires est exprimé par :*

$$\Phi = \exp((r + \delta\sigma_F\sigma_Y)(T - t)) \cdot \begin{pmatrix} Y_u \\ F_u \\ -F_u Y_u \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

ou sous une forme littérale :

- $e_t Y_t$  contrats à terme sur le prix;
- $e_t F_t$  contrats à terme sur le rendement agricole;
- $-e_t F_t Y_t$  unités d'obligations;

**Démonstration :** Soit la fonction  $h$  définie par :  $h(F_t, Y_t, t) = \pi_t(F_T Y_T) = e_t F_t Y_t$ . Comme dans la proposition précédente, il est possible de décomposer  $h$  en utilisant la formule d'Itô, ce qui donne exactement l'équation (2.15). ■

Il est possible de vérifier que  $dV(\Phi) = \Phi \cdot (dF_u, dY_u, dB_u)$ . Il résulte que le portefeuille de réplication  $\Phi$  est autofinancé.

## 2.2.2 Illustration de la gestion du contrat

Une simulation est réalisée pour illustrer la stratégie de gestion pour la vente d'un contrat à terme sur le chiffre d'affaires. Elle utilise les deux contrats à terme  $F$  et  $Y$  qui sont simulés par deux mouvements browniens géométriques. Les valeurs initiales et les paramètres sont choisis à partir de résultats statistiques sur le maïs dans l'Iowa<sup>5</sup> (Nayak et Turvey, 2000) :  $F_0 = 2,2$  et  $Y_0 = 115$  avec de plus  $\sigma_F^2 = 0,030$   $\sigma_Y^2 = 0,027$  et  $\delta = \frac{-0,010}{\sigma_F\sigma_Y} = -0,351$ . Les autres paramètres sont définis arbitrairement  $\mu_F = 1\%$   $\mu_Y = 1,5\%$  et  $r = 5\%$ .

La méthode est testée sur neuf mois, une période qui correspond à l'horizon normal de travail pour un producteur. Les positions du marché sont ajustées une fois par semaine sur la simulation présentée sur le tableau 2.1.

Dans cette simulation, l'erreur relative est de :

$$\frac{205,33 - 205,77}{205,77} = -2,14 \times 10^{-3}$$

5. L'article donne un prix moyen de 2,2 \$/bu avec une variance de 0,13 et donne un rendement moyen de 114,41 bu/acre avec une variance de 395,70. La covariance entre le prix et le rendement est de -2,51.

semaine	$F_t$	$Y_t$	$\pi_t(F_T Y_T)$	Gains	Résultats
0	2,20	115,00	260,47	0,00	260,47
1	2,12	114,36	249,78	10,80	249,67
2	2,08	113,13	242,03	7,85	241,82
3	2,12	107,82	235,29	6,56	235,26
4	2,13	109,14	238,07	-2,73	237,99
5	2,15	111,49	245,40	-7,25	245,24
6	2,06	112,86	237,82	7,51	237,73
7	2,07	115,59	244,68	-6,79	244,52
8	2,01	118,80	244,20	0,34	244,18
9	2,00	121,52	248,42	-4,20	248,38
10	2,02	122,82	252,95	-4,46	252,84
11	1,94	124,97	247,45	5,38	247,46
12	1,93	130,16	255,75	-8,33	255,79
13	1,94	126,10	248,91	6,84	248,95
14	1,91	129,34	251,30	-2,43	251,38
15	1,88	126,44	241,71	9,73	241,65
16	1,80	126,28	231,05	10,72	230,93
17	1,79	123,05	224,18	6,94	223,98
18	1,82	120,85	223,48	0,69	223,30
19	1,84	118,34	220,67	2,81	220,49
20	1,83	122,12	226,69	-6,01	226,50
21	1,75	120,58	213,96	12,91	213,59
22	1,76	119,24	213,01	0,98	212,62
23	1,78	118,31	213,06	-0,02	212,64
24	1,72	120,06	208,84	4,16	208,48
25	1,72	119,04	206,41	2,47	206,01
26	1,66	115,25	192,90	13,78	192,23
27	1,68	111,14	188,05	4,82	187,41
28	1,74	107,37	188,18	-0,34	187,75
29	1,88	102,72	194,17	-6,61	194,35
30	1,89	100,75	191,94	2,24	192,11
31	1,87	100,41	189,24	2,74	189,37
32	1,90	100,99	193,08	-3,79	193,16
33	1,95	99,39	194,79	-1,75	194,90
34	1,94	100,90	196,83	-2,02	196,93
35	2,00	100,96	202,09	-5,22	202,14
36	2,04	104,58	213,63	-11,36	213,50
37	1,97	106,55	210,66	2,89	210,61
38	1,97	103,03	202,62	8,11	202,50
39	2,01	102,60	205,77	-3,13	205,63

TAB. 2.1 – Simulation de stratégie pour la vente du contrat à terme sur 39 semaines

Cette simulation permet de vérifier la convergence de cette stratégie. Un test sur 10 000 simulations donne une erreur de moyenne relative  $12 \times 10^{-3}$  et de variance 0,88. Quand les positions sont ajustées deux fois par semaine, la même simulation donne une erreur de moyenne relative  $9 \times 10^{-3}$  et de variance 0,45. La convergence en probabilité de la stratégie peut ainsi être observée.

### 2.2.3 Estimation des coûts de transaction

La stratégie de gestion continue génère un grand nombre de transactions, ce qui induit des coûts pour l'intermédiaire financier. L'objectif de cette section est de réaliser une estimation de ces coûts de transaction sur les deux contrats à terme.

Faisons l'hypothèse simplificatrice que ces coûts sont proportionnels au volume de transaction (les coefficients de proportionnalité sont notés respectivement  $a_F$  et  $a_Y$ <sup>6</sup>). Comme le volume de transaction est aléatoire, le coût de transaction est estimé par l'espérance (sous  $\mathbb{P}^*$ ) du volume de transaction multiplié par le coefficient  $a$ . Cette estimation est réalisée uniquement sur le contrat à terme, sur le rendement agricole. En effet, l'estimation pour le contrat à terme sur le prix sera *in fine* obtenue grâce à la symétrie en  $F$  et  $Y$  du problème.

À l'instant initial, l'intermédiaire financier achète  $F_{t_0}$  contrats sur le rendement agricole. Ensuite, il opère un ajustement des positions à chaque instant  $t_i$  avec  $i \in (0, \dots, n)$  et  $t_0 = 0 < \dots < t_i < \dots < t_n = T$ . L'écart en valeur absolue<sup>7</sup> entre  $F_{t_i}^*$  et  $F_{t_{i+1}}^*$  est noté  $\Delta_i$ ; il correspond au volume de transaction à l'instant  $t_i$ .

Ainsi, l'estimation des coûts de transactions sur  $Y_t$  noté  $C_Y$  s'écrit mathématiquement :

$$C_Y = a_Y \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ F_0 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \middle| \mathcal{F}_0 \right] \quad (2.16)$$

Dans une première étape, l'espérance de volume lors de l'ajustement de la position en  $t_i$ , notée  $E_i$ , est calculée :

$$E_i = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [\Delta_i | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ F_{t_i}^* \times \frac{\Delta_i}{F_{t_i}^*} \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

6.  $a_F$  et  $a_Y$  sont inévitablement différents parce que les unités de cotation de  $F$  (\$/bu) et de  $Y$  (\$/(bu/acre)) sont différentes.

7. L'écart est calculé en valeur absolue car quelque soit le montant et le sens de la transaction, les volumes de transaction et leurs coûts seront positifs.

Or

$$\frac{\Delta_i}{F_{t_i}^*} = \exp\left(\sigma_F W_{t_{i+1}-t_i}^{F^*}\right)$$

Les propriétés du mouvement brownien induisent donc que les variables aléatoires  $F_{t_i}^*$  et  $\frac{\Delta_i}{F_{t_i}^*}$  sont indépendantes. Il résulte que :

$$\begin{aligned} E_i &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [F_{t_i}^* | \mathcal{F}_0] \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ \frac{\Delta_i}{F_{t_i}^*} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= F_0 \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ \left| \exp\left(\sigma_F W_{t_{i+1}-t_i}^{F^*}\right) - 1 \right| \middle| \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned}$$

Notons que la quantité  $W_{t_{i+1}-t_i}^{F^*}$  est une variable aléatoire normale centrée de variance égale à  $\sigma_F^2(t_{i+1} - t_i)$ . Le lemme suivant permet de poursuivre les calculs (la démonstration de ce lemme est réalisée dans l'annexe A).

**Lemme 2.3** *Si  $x$  est une variable aléatoire normale centrée  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , alors l'espérance de  $|e^x - 1|$  est égal à  $\sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ .*

Il en résulte que :

$$E_i = \sigma_F \sqrt{t_{i+1} - t_i} F_0 \times e^{\frac{\sigma_F^2(t_{i+1}-t_i)}{2}} \quad (2.17)$$

La seconde et dernière étape consiste à utiliser le résultat précédent pour calculer  $C_Y$  (équation 2.16) :

$$\begin{aligned} C_Y &= a_Y \times \left( F_0 + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [\Delta_i | \mathcal{F}_0] \right) \\ &= a_Y \times \left( F_0 + \sum_{i=1}^n E_i \right) \\ &= a_Y \times \left( F_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_F \sqrt{t_{i+1} - t_i} F_0 \times e^{\frac{\sigma_F^2(t_{i+1}-t_i)}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

En supposant l'écart  $t_{i+1} - t_i$  est constant et en le notant  $\Delta_t$ ,  $C_Y$  devient :

$$C_Y = a_Y F_0 \times \left( 1 + \frac{T}{\sqrt{\Delta_t}} \sigma_F \times e^{\frac{\sigma_F^2 \Delta_t}{2}} \right)$$

Par symétrie,  $C_F$  vérifie l'équation :

$$C_F = a_F Y_0 \times \left( 1 + \frac{T}{\sqrt{\Delta_t}} \sigma_Y \times e^{\frac{\sigma_Y^2 \Delta_t}{2}} \right)$$

Avec  $a_F$  choisi égal à \$0,01/bu,  $a_Y$  choisi égal à \$0,50/(bu/acre)<sup>8</sup> et les mêmes paramètres que dans la simulation précédente (section 2.2.2), on obtient une espérance des coûts de gestion  $C$  égale à :

$$\begin{aligned} C &= 0,50 \times 2,2 \times \left( 1 + \sqrt{0,030} \times \frac{39/52}{\sqrt{1/52}} e^{\frac{0,030/52}{2}} \right) \\ &\quad + 0,01 \times 115 \times \left( 1 + \sqrt{0,027} \times \frac{39/52}{\sqrt{1/52}} e^{\frac{0,027/52}{2}} \right) \\ &= 4,30 \end{aligned}$$

Pour un chiffre d'affaires anticipé de \$253/acre, l'espérance des coûts de transaction est estimée (en  $t_0$ ) dans cet exemple à \$4,30/acre. Le résultat de ce calcul est de \$5,15/acre dans le cas d'une gestion bi-hebdomadaire.

Les coûts de transaction dépendent donc principalement de la fréquence des ajustements et des volatilités respectives de  $F$  et de  $Y$ . Dans l'exemple chiffré, le coût de transaction semble être quatre à cinq fois le taux pratiqué sur les marchés à terme.

## 2.3 L'option sur le chiffre d'affaires

À partir de ce contrat sur le chiffre d'affaires, il est possible de développer des options ou plus généralement toute une famille de contrats dérivés basée sur le prix de ce contrat. Cette partie présente successivement le prix de l'option sur le chiffre d'affaires, son portefeuille de réplication et une illustration de sa stratégie de gestion.

### 2.3.1 Le prix de l'option de vente

Le contrat à terme sur le chiffres d'affaires suit également un mouvement brownien géométrique (Proposition 2.2). Le prix de l'option est alors évalué par la formule de Black and Scholes en utilisant les paramètres donnés dans l'équation 2.9.

### 2.3.2 Le portefeuille de réplication

Comme le contrat à terme sur le chiffres d'affaires est un mouvement brownien géométrique, il est possible de répliquer l'achat ou la vente d'une

---

8. Le choix est basé sur des observations des coûts de transaction pratiqués sur les marchés.

option d'après les résultats de Black and Scholes. Le portefeuille de réplication d'une option de vente donné par Black and Scholes est le suivant :

- $\Delta$  actifs sous-jacents  $S$  où  $\Delta = \frac{\partial}{\partial S} P_t$ ;
- $e^{r(T-t)}(P_t - \Delta S_t)$  unités d'obligations;

De la Proposition 2.2 et du résultat précédent, il résulte que le portefeuille de réplication de l'achat d'une option de vente sur le chiffre d'affaires s'écrit :

$$\Phi_P = \Delta e_t \begin{pmatrix} Y_t \\ F_t \\ -F_t Y_t \end{pmatrix} + e^{r(T-t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_t - \Delta \pi_t(FY) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Illustration de la gestion de l'option de vente sur le chiffre d'affaires

La gestion de l'option de vente sur le chiffre d'affaires est illustrée sur la figure 2.2 et le tableau 2.2. Les valeurs des contrats à terme sur le prix et sur le rendement sont celles utilisées dans la première simulation (Tab 2.1). À l'instant 0, le prix de l'option est \$5.72 si le prix d'exercice est de \$240 par acre.

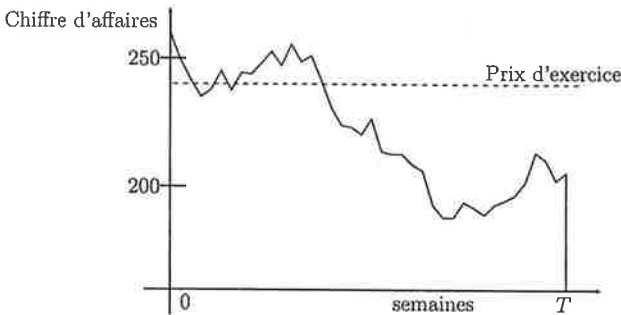


FIG. 2.2 - Illustration de la simulation

Un test sur 10 000 simulations donne une erreur de moyenne  $-5,5 \times 10^{-2}$  et de variance 4,5. Quand les positions sont ajustées deux fois par semaine, la même simulation donne une erreur moyenne de  $3,47 \times 10^{-2}$  et de variance 2,2. Cette erreur est plus importante que dans la simulation du contrat à terme, mais est très faible au regard de la volatilité du revenu.



Semaine	$F_t$	$Y_t$	Put	Gains	Résultats
0	2,20	115,00	5,72	0,00	5,72
1	2,12	114,36	8,31	2,35	8,08
2	2,08	113,13	10,75	2,38	10,46
3	2,12	107,82	13,33	2,49	12,95
4	2,13	109,14	12,06	-1,09	11,86
5	2,15	111,49	9,23	-2,86	9,00
6	2,06	112,86	11,94	2,60	11,60
7	2,07	115,59	9,23	-2,72	8,89
8	2,01	118,80	9,27	0,20	9,09
9	2,00	121,52	7,75	-1,39	7,70
10	2,02	122,82	6,32	-1,30	6,40
11	1,94	124,97	7,78	1,49	7,90
12	1,93	130,16	5,34	-2,57	5,33
13	1,94	126,10	7,04	1,69	7,01
14	1,91	129,34	6,19	-0,66	6,35
15	1,88	126,44	9,20	2,77	9,12
16	1,80	126,28	13,89	4,24	13,36
17	1,79	123,05	17,73	3,81	17,17
18	1,82	120,85	18,08	0,58	17,75
19	1,84	118,34	19,86	1,97	19,72
20	1,83	122,12	15,86	-4,02	15,70
21	1,75	120,58	24,73	8,11	23,81
22	1,76	119,24	25,49	0,96	24,77
23	1,78	118,31	25,46	0,17	24,94
24	1,72	120,06	29,07	3,65	28,59
25	1,72	119,04	31,30	2,39	30,98
26	1,66	115,25	44,30	12,86	43,84
27	1,68	111,14	49,30	4,97	48,81
28	1,74	107,37	49,38	-0,12	48,69
29	1,88	102,72	43,63	-6,36	42,33
30	1,89	100,75	46,06	2,45	44,78
31	1,87	100,41	48,97	2,95	47,73
32	1,90	100,99	45,35	-3,57	44,17
33	1,95	99,39	43,87	-1,52	42,64
34	1,94	100,90	42,04	-1,80	40,84
35	2,00	100,96	37,02	-4,99	35,85
36	2,04	104,58	25,72	-11,13	24,72
37	1,97	106,55	28,89	3,11	27,83
38	1,97	103,03	37,16	8,34	36,17
39	2,01	102,60	<b>34,23</b>	-2,91	<b>33,26</b>

TAB. 2.2 – Simulation de stratégie pour l'option de vente chiffre d'affaires sur 39 semaines

*Ainsi, le développement théorique de ce chapitre repose sur une modélisation du marché financier qui comprend un contrat à terme sur le prix, un autre sur le rendement et enfin une obligation. De plus, il définit une stratégie de gestion d'un intermédiaire financier pour un contrat à terme et une option sur le chiffre d'affaires. Les simulations illustrent ces stratégies et montrent, dans ce cadre théorique, leurs performances quand les ajustements sur le marché financier se font une à deux fois par semaine. Ce chapitre a présenté uniquement la gestion d'un risque multidimensionnel. Le chapitre suivant poursuit cette recherche en proposant un contrat financier sur un prix moyen.*



## Chapitre 3

# Un contrat dérivé sur le prix moyen

De nombreux producteurs doivent acheter ou vendre régulièrement un même produit agricole. Par exemple, un éleveur qui détient une petite capacité de stockage achète régulièrement des céréales pour l'alimentation animale. Également, les éleveurs de porcs ou de volailles qui ont un volume de production important vendent leurs produits finis toutes les semaines ou tous les mois. *In fine*, ils obtiennent sur une période (trimestre, semestre ou année par exemple) un prix d'achat ou de vente proche du prix moyen du marché sur la même période. C'est pourquoi ce chapitre s'intéresse à une couverture sur le prix moyen.

Depuis 2002, plusieurs États américains proposent aux éleveurs de bovins une garantie sur le prix moyen, nommée le *Livestock Risk Protection* (LRP). L'importance de ce programme témoigne de l'intérêt des éleveurs pour ce type de garantie. Ce contrat est proposé par des assureurs privés et est ré-assuré par le *Federal Crop Insurance Corporation*. Il n'est donc pas géré par des outils de gestion privés ; il est donc nécessaire de rechercher une autre solution. L'objectif de ce chapitre est donc de proposer un contrat dérivé sur le prix moyen pouvant être géré par des outils privés et adapté au producteur agricole, pour couvrir l'achat régulier ou la vente régulière sur un marché spot.

La première partie expose les contrats développés dans la littérature, leurs limites, et propose une alternative adaptée au problème du producteur agricole. Dans la seconde partie, le sous-jacent de ce contrat dérivé est modélisé. Dans la troisième, le portefeuille de réplcation du sous-jacent est défini. Dans la quatrième, l'estimation du prix du contrat dérivé est réalisée et dans la cinquième et dernière partie son portefeuille de réplcation est défini.

### 3.1 Construction d'un contrat dérivé sur le prix moyen

L'objectif de cette partie est tout d'abord d'exposer les options existantes sur le prix moyen. En particulier, celles qui apportent une solution satisfaisante quand elles peuvent être mises en œuvre. Leurs conditions d'existence n'étant pas toujours réunies sur les produits agricoles, un nouveau contrat est proposé. Enfin quelques propriétés de ce contrat dérivé sur le prix moyen sont développées.

#### 3.1.1 Les intérêts et limites des options asiatiques

L'éleveur souhaite couvrir les risques liés aux achats réguliers ou aux ventes régulières qu'il devra réaliser sur une certaine période (trois mois, six mois ou encore un an suivant l'horizon de travail du producteur). D'une manière équivalente, il souhaite obtenir une garantie sur le prix moyen spot (actualisé) sur cette même période.

Il est donc clair que l'option asiatique sur le prix spot (*Asian option* ou *average option*) est particulièrement intéressante. Rappelons que l'option asiatique se définit mathématiquement de la manière suivante (dans le cas d'une moyenne arithmétique) (Musielà et Rutkowski, 1997) :

$$\max \left( \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T S_t dt - K, 0 \right)$$

où  $S_t$  est le sous-jacent,  $K$  le prix d'exercice,  $T_0$  et  $T$  sont le début et la fin de la période de l'option.

Ce type d'option ne peut être envisagé pour le marché du porc. Premièrement, si les options asiatiques sur les actions, les indices ou les taux sont très populaires pour les institutions financières, ce n'est pas le cas pour les matières premières agricoles (Nielsen et Sandman, 1998). Deuxièmement, l'option asiatique sur le prix spot ne peut être répliquée sur son sous-jacent, le produit agricole. En effet, il est impossible de détenir un stock de produits agricoles périssables de la même manière qu'il est possible de construire un portefeuille d'actions. Enfin, cette option ne peut pas être répliquée non plus sur les contrats à terme. Le producteur qui souhaiterait acheter une option de vente asiatique ne peut, sauf cas fortuit, trouver une contre-partie<sup>1</sup>. Il devient alors difficile de trouver une contrepartie sur le marché de gré à gré. Cette possibilité devient complètement fortuite si le nombre des intervenants

<sup>1</sup>. Concrètement, les professionnels interviewés durant la thèse n'avaient pas connaissance d'échanges d'options asiatiques sur le marché du porc en Bretagne.

sur les marchés est limité. Compte tenu de cette limite pratique de l'option asiatique sur le prix spot, une autre solution doit être recherchée.

Une première solution consiste à prendre l'option asiatique sur le prix à terme, soit :

$$\max \left( \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T F_t dt - K, 0 \right)$$

Cette option peut être gérée en continu sur les contrats à terme et répond donc au problème pratique de faisabilité. Mais en considérant que le prix à terme reflète l'espérance du prix spot en  $T$ , alors cette « solution » ne prend en compte que le prix spot en  $T$ . La moyenne des prix spot sur la période n'est donc pas prise en compte. Cette alternative ne paraît donc pas adaptée au problème de l'éleveur.

Une autre solution consiste à prendre plusieurs contrats sur le prix sur les échéances  $T_i$ . Chaque contrat est noté  $F_i$ . En faisant l'hypothèse usuelle que  $S_{T_i} = F_i(T_i)$ , cette « solution » se rapproche de l'option asiatique sur le prix spot. Elle devient :

$$\max (Moy(F_i(T_i))dt - K, 0)$$

Cette « solution » se rapproche donc de la forme d'option idéale et peut être gérée sur les marchés à terme par un intermédiaire financier. C'est pourquoi, cette alternative est retenue et est définie dans la section suivante.

### 3.1.2 La définition d'un contrat dérivé sur le prix moyen

Pour définir un contrat dérivé, il faut choisir son sous-jacent, son échéance, et son prix d'exercice. Le sous-jacent choisi est le prix moyen géométrique actualisé<sup>2</sup> de  $n$  échéances et est noté  $S_t$ . Il existe plusieurs types de moyennes, la plus connue étant la moyenne arithmétique. Il existe également la moyenne harmonique et la moyenne géométrique, notée  $g$ , définie par la formule<sup>3</sup> ( $\forall i, a_i > 0$ ) :

$$g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

2. Le choix d'une moyenne géométrique s'inspire de la modélisation de l'évolution des prix à terme par des mouvements browniens géométriques. Il permet de simplifier les développements mathématiques.

3. La moyenne arithmétique des  $a_i$ , noté  $\bar{a}$ , se définit de la manière suivante :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ . La moyenne harmonique, noté  $h$ , se définit de la manière suivante ( $\forall i, a_i > 0$ ) :  $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$ . Par ailleurs, on peut montrer que, si toutes les valeurs des  $a_i$  sont positives, on a l'inégalité :  $h \leq g \leq \bar{a}$  (Tomassone et al., 1993).

La moyenne géométrique actualisée des  $n$  prix à terme existe parce que les prix sont strictement supérieurs à zéro.

Le prix moyen obtenu par le producteur est une moyenne arithmétique actualisée. Notons que  $S_t$  est une approximation de cette valeur. Ainsi, le risque de base du producteur doit être testé pour vérifier si la définition de ce contrat dérivé est satisfaisante. La section 2.4.1 de la partie applications et tests validera, à l'aide de ce test, la définition du contrat dérivé sur le prix moyen dans le cas de l'éleveur de porcs breton. La suite de ce chapitre fait l'hypothèse que ce risque de base est acceptable.

L'échéance du contrat correspond à l'échéance du  $i$ ème contrat à terme. Le prix d'exercice sera noté  $E$ .

### 3.1.3 Les propriétés de ce contrat dérivé

En considérant que le sous-jacent est la moyenne géométrique actualisée des  $n$  prix à terme, alors ce contrat dérivé devient une option simple d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $E$ .

Notons que ce chapitre utilise la même approche mathématique que dans le chapitre précédent. En effet, bien qu'il ne soit considéré qu'une seule dimension, le prix, le sous-jacent est composé de plusieurs contrats à terme. Ce chapitre utilise également le même schéma de gestion que dans le chapitre précédent (figure 3.1)

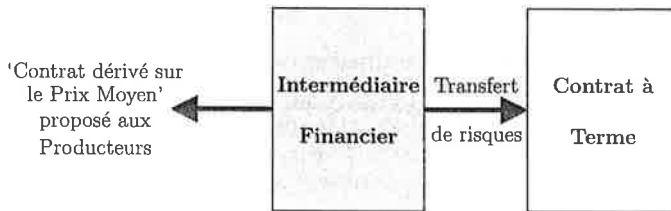


FIG. 3.1 – Illustration du contexte de l'intermédiaire financier

## 3.2 Modélisation du sous-jacent

On appelle  $S$  le sous-jacent du contrat dérivé et  $H_{it}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) les  $n$  contrats à terme entre 0 et  $T$  qui est l'échéance du  $i$ ème contrat<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Notons que les contrats à terme  $H_i$  sont les sous-jacents de  $S$ .

Les échéances respectives  $T_i$  des contrats sont croissantes en  $i$ . Comme les échéances des contrats sont différentes, la quantité  $\mathcal{T}_{i,t} = \min(T_i, t)$  est introduite. Les  $n$  contrats à terme sont modélisés par  $n$  mouvements browniens géométriques comme dans le modèle de Black and Scholes. Le vecteur des  $(\mu_i)_{i=1,\dots,n}$  des différents contrats est noté  $\mu$ . De même, le vecteur des  $(\sigma_i)_{i=1,\dots,n}$  des différents contrats est noté  $\sigma$ . Enfin, la matrice de covariance des browniens des  $n$  contrats est notée  $\Sigma$ . Le sous-jacent est défini comme le prix moyen géométrique actualisé. Ainsi le sous-jacent s'écrit en  $T$  :

$$S_T = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{H_{iT}} \quad (3.1)$$

où  $H_{it} = H_{iT_i} \times e^{r(t-T_i)}$  pour  $t \in [T_i, T]$ .

La matrice triangulaire inférieure  $\Gamma$  est définie à l'aide de la matrice de covariance par la relation  $\Sigma = \Gamma \Gamma^*$ <sup>5</sup> (Il est possible de montrer l'unicité de  $\Gamma$ ). Soit  $Z_t$ , le mouvement brownien standard de dimension  $n$  défini par la relation  $Z_t = \Gamma^{-1} \cdot (W_{\mathcal{T}_{i,t}}^i)_{i=1,\dots,n}$ <sup>6</sup>. Il résulte clairement que  $(W_{\mathcal{T}_{i,t}}^i)_{i=1,\dots,n} = \Gamma \cdot Z_t$ . Enfin, la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $\Gamma$  est notée  $\Gamma_i$ . Avec ces notations, la proposition suivante définit le prix de  $S_t$ .

**Proposition 3.1** *À l'instant  $t$ , le prix de  $S_t$  est égal à :*

$$S_t = e_t \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{H_{it}} \quad (3.2)$$

où  $e_t$  se définit de la manière suivante :

$$e_t = \exp \left( \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1, i < j}^n \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} (T_i - t) \right) \\ \times \exp \left( - \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{2n^2} \sigma_i^2 \Sigma_{ii} (T_i - t) \right)$$

#### Démonstration :

Le développement qui suit reprend la même démarche que dans la démonstration du prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires. Le mouvement

5.  $\Gamma^*$  représente la matrice transposée de  $\Gamma$

6. La matrice de covariance de  $Z_t$  se calcule à partir de la matrice de covariance de  $W_t$ , notée  $\Sigma$ , et de la matrice de transformation linéaire  $\Gamma$  par la relation  $\Gamma \Sigma \Gamma^*$ . Cette matrice est la matrice identité, ce qui prouve que  $Z_t$  est bien un mouvement brownien standard de dimension  $n$ .



brownien sous la probabilité risque neutre se définit comme suit :

$$Z_t^* = Z_t - \int_0^t \Gamma_i(ru - \mu) du$$

Par cette transformation linéaire,  $H_{iT}$  devient :

$$H_{iT} = H_{it} + \int_t^T \sigma_i H_{iu} \Gamma_i dZ_u^* + \int_t^T r H_{iu} du$$

où  $\Gamma_i dZ_u^*$  s'interprète comme le produit scalaire de la matrice ligne  $\Gamma_i$  et du vecteur  $dZ_u^*$ . Le prix du contrat dérivé  $S_t$  est défini par la relation suivante :

$$S_t = e^{r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [S_T | \mathcal{F}_t]$$

Pour simplifier la lecture de la démonstration, les dérivées partielles sont explicitées avant de décomposer la fonction  $g(S, t) = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{H_{it}}$  par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H_{it}} g(S, t) &= \frac{1}{n} \times \frac{g(S, t)}{H_{it}} \\ \frac{\partial^2}{\partial H_{it}^2} g(S, t) &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \times \frac{g(S, t)}{H_{it}^2} = -\frac{n-1}{n^2} \times \frac{g(S, t)}{H_{it}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial H_{it} \partial H_{jt}} g(S, t) &= \frac{1}{n^2} \times \frac{g(S, t)}{H_{it} H_{jt}} \end{aligned}$$

### 3.2.1 Première étape

Dans une première étape de la démonstration, les  $T_i$  sont tous égaux à  $T$ . Par la formule d'Itô, il résulte que :

$$\begin{aligned} g(S, T) - g(S, t) &= \sum_{i=1}^n \int_t^T \frac{1}{n} \times \frac{g(S, t)}{H_{it}} \Gamma_i H_{it} dZ_u^* + \int_t^T \frac{1}{n} \times \frac{g(S, t)}{H_{it}} \times r H_{it} du \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \int_t^T \frac{1}{n^2} \times \frac{g(S, t)}{H_{it} H_{jt}} \sigma_i \sigma_j \langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle H_{it} H_{jt} du \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_t^T -\frac{n-1}{n^2} \times \frac{g(S, t)}{H_{it}^2} \sigma_i^2 \langle \Gamma_i, \Gamma_i \rangle H_{it}^2 du \end{aligned}$$

Il est à noter que, par la définition de  $\Gamma$ ,  $\langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle = \Sigma_{ij}$ . Soit, après simplifications :

$$\begin{aligned} g(S, T) - g(S, t) &= \sum_{i=1}^n \int_t^T \frac{1}{n} \times g(S, t) \times \Gamma_i \cdot dZ_u^* + \int_t^T \frac{1}{n} \times g(S, t) \times r du \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \int_t^T \frac{1}{n^2} \times g(S, t) \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} du \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_t^T -\frac{n-1}{n^2} \times g(S, t) \sigma_i^2 \Sigma_{ii} du \end{aligned}$$

Il résulte que :

$$\begin{aligned} S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [g(S, T)^* | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [g(S, T) \times \exp(-r(T-t)) | \mathcal{F}_t] \\ &= \exp(-r(T-t)) \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [g(S, T) | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

$S_t$  devient :

$$\begin{aligned} S_t &= g(S, t) + E \int_t^T \frac{1}{n} \times g(S, t) \times r du \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n E \int_t^T \frac{1}{n^2} \times g(S, t) \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} du \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E \int_t^T -\frac{n-1}{n^2} \times g(S, t) \sigma_i^2 \Sigma_{ii} du \end{aligned} \quad (3.3)$$

La résolution de l'équation donne :

$$\begin{aligned} S_t &= \exp(-r(T-t)) \times g(S, t) \times \exp \left( (T-t) \left( r + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n -\frac{n-1}{n^2} \sigma_i^2 \Sigma_{ii} \right) \right) \\ &\times \exp \left( (T-t) \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} \right) \right) \\ &= g(S, t) \times \exp \left( \frac{1}{2} (T-t) \left( \sum_{i=1}^n -\frac{n-1}{n^2} \sigma_i^2 \Sigma_{ii} \right) \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{2} (T-t) \left( \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} \right) \right) \end{aligned}$$

### 3.2.2 Seconde étape

Les  $T_i$  ne sont plus égaux. Le premier terme de la décomposition d'Itô (en  $dZ_t^*$ ) demande une analyse préalable. Dans la première étape où les  $T_i$  sont égaux, ce terme s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \int_t^T \frac{1}{n} g(S, t) \sigma_i \Gamma_i \cdot dZ_u^*$$

Il devient :

$$\sum_{i=1}^n \int_t^{T_i} \frac{1}{n} g(S, t) \sum_{j=1}^n \sigma_i \Gamma_{ij} \cdot dZ_{\min(T_i, T_j)}^*$$

Considérons le fait que  $\Gamma$  soit triangulaire inférieur et que les échéances respectives  $T_i$  des contrats sont croissantes. On a donc  $\Gamma_{ij} = 0$  si  $i < j$ , et donc  $\forall i, j \quad \Gamma_{ij} \cdot dZ_{\min(T_i, T_j)}^* = \Gamma_i \cdot dZ_{T_i}^*$ . Le résultat de la formule de Itô devient :

$$\begin{aligned} g(S, T) - g(S, t) = & \sum_{i=1}^n \int_t^{T_i} \frac{1}{n} \times \frac{g(S, u)}{H_{iu}} \sigma_i \Gamma_i \cdot H_{iu} dZ_u^* \\ & + \int_t^{T_1} \frac{1}{n} \times \frac{g(S, u)}{H_{iu}} \times r H_{iu} du \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \int_t^{\min(T_i, T_j)} \frac{1}{n^2} \times \frac{g(S, u)}{H_{iu} H_{ju}} \sigma_i \sigma_j < \Gamma_i, \Gamma_j > H_{iu} H_{ju} du \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_t^{T_i} -\frac{n-1}{n^2} \times \frac{g(S, u)}{H_{iu}^2} \sigma_i^2 < \Gamma_i, \Gamma_i > H_{iu}^2 du \end{aligned} \quad (3.4)$$

Soit, après simplifications :

$$\begin{aligned} g(S, T) - g(S, t) = & \sum_{i=1}^n \int_t^{T_i} \frac{1}{n} \times g(S, u) \times \sigma_i \Gamma_i \cdot dZ_u^* + \int_t^T \frac{1}{n} \times g(S, u) \times r du \\ & + \sum_{i,j=1, i < j}^n \int_t^{T_i} \frac{1}{n^2} \times g(S, u) \times \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} du \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_t^{T_i} -\frac{n-1}{n^2} \times g(S, u) \times \sigma_i^2 \Sigma_{ii} du \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la même manière que dans la première étape,  $S_t$  devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [g(S, T)^* | \mathcal{F}_t] &= \exp(-r(T-t)) \times g(S, t) \times \exp(r(T-t)) \\ &\times \exp\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1, i < j}^n \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij}(T_i - t)\right) \\ &\times \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{2n^2} \sigma_i^2 \Sigma_{ii}(T_i - t)\right) \\ &= g(S, t) \times \exp\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1, i < j}^n \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij}(T_i - t)\right) \\ &\times \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{2n^2} \sigma_i^2 \Sigma_{ii}(T_i - t)\right) \end{aligned}$$

Ce qui vérifie l'équation 3.2 de la proposition 3.1. ■

**Proposition 3.2 (Une volatilité déterministe)** *L'évolution du prix de  $S_t$  correspond à un mouvement brownien géométrique où la volatilité est une fonction de  $t$ .*

$$dS_t = \sigma(t) S_t dB_t^* + r S_t dt \quad (3.6)$$

*De plus en notant  $\sigma_{T_1}(t)$  la matrice ligne composée des  $\sigma_i \times \mathbf{1}_{(t < T_1)}$  alors  $\sigma(t)$  vérifie l'équation suivante :*

$$\sigma(t) = \frac{1}{n} \sqrt{\sigma_{T_1}(t) \Sigma \sigma_{T_1}^*(t)} \quad (3.7)$$

**Démonstration :**

De l'équation 3.2 et de la définition de  $g(S, t)$ , il résulte que  $dS_t$  vérifie l'équation suivante :

$$dS_t = e_t \times dg(S, t) + de_t g(S, t) \quad (3.8)$$

De l'équation 3.5 il résulte par ailleurs :

$$\begin{aligned} dg(S, t) &= \frac{1}{n} g(S, t) \sum_{i=1, t < T_i}^n \Gamma_i dZ_i^* \\ &+ \frac{1}{n} g(S, t) \sum_{i=1}^n r dt \\ &+ \frac{1}{n^2} g(S, t) \sum_{i,j=1, i < j, t < T_i}^n \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} dt \\ &- \frac{n-1}{2n^2} g(S, t) \sum_{i=1, t < T_i}^n \sigma_i^2 \Sigma_{ii} dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

De même  $de_t$  s'écrit :

$$de_t = -\frac{1}{n^2}e_t \sum_{i,j=1, i < j, t < T_i}^n \sigma_i \sigma_j \Sigma_{ij} dt + \frac{n-1}{2n^2}e_t \sum_{i=1, t < T_i}^n \sigma_i^2 \Sigma_{ii} dt \tag{3.10}$$

À l'aide des équations 3.9 et 3.10, l'équation 3.8 devient :

$$dS_t = e_t \times g(S, t) \times \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1, t < T_i}^n \sigma_i \Gamma_i . dZ_t^* + r dt \right) \tag{3.11}$$

De plus, en utilisant la notation  $\sigma_{T_i}(t)$  alors :

$$\text{sum}_{i=1, t < T_i}^n \sigma_i \Gamma_i . dZ_t^* = \sigma_{T_i}(t) . \Gamma . dZ_t^*$$

Ainsi  $\sigma_{T_i}(t) . \Gamma_i$  est une matrice de transformation qui transforme le Brownien multidimensionnel  $Z_t^*$  en un brownien unidimensionnel unitaire  $B_t$ , auquel on associe la volatilité  $\sigma(t)$ , avec la relation <sup>7</sup> :

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \frac{1}{n^2} \sigma_{T_i}(t) . \Gamma . (\sigma_{T_i}(t) . \Gamma)^* \\ &= \frac{1}{n^2} \sigma_{T_i}(t) . \Gamma . \Gamma^* . \sigma_{T_i}^*(t) \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{\sigma_{T_i}(t) \Sigma \sigma_{T_i}^*(t)} \end{aligned}$$

Cette équation vérifie l'équation 3.7 de la proposition 3.1. ■

### 3.3 Le portefeuille de réplication du sous jacent

La définition du portefeuille de réplication du sous-jacent du contrat dérivé  $S_t$  par rapport à ses propres sous-jacents  $H_{it}$  est une étape nécessaire pour déterminer le portefeuille de réplication du contrat dérivé.

**Proposition 3.3 (Le portefeuille de réplication de  $S_t$ )** *Le portefeuille de réplication de  $S_t$  est donné par :*

- $\forall i = 1, \dots, n, \frac{1}{n} \times e_t \times \frac{g(S_t)}{H_{it}}$  contrat à terme  $H_i$  .

7. Ce résultat utilise les règles de base d'une transformation linéaire appliquée à une variable aléatoire gaussienne multidimensionnelle sur sa matrice de covariance (La matrice de covariance de  $Z^*$  est la matrice Identité de dimension  $n$ ).

**Démonstration :**

À partir de l'équation 3.11, il résulte que :

$$\begin{aligned} dS_t &= e_t \times g(S, t) \times \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1, t < T_i}^n \sigma_i \Gamma_i \cdot dZ_i^* + r dt \right) \\ &= e_t \times \frac{1}{n} \sum_{i=1, t < T_i}^n \frac{g(S, t)}{H_{it}} (H_{it} \times \sigma_i \Gamma_i \cdot dZ_i^* + r H_{it} dt) \\ &= e_t \times \frac{1}{n} \sum_{i=1, t < T_i}^n \frac{g(S, t)}{H_{it}} dH_{it} \end{aligned}$$

Cette dernière relation exprime le résultat de la proposition 3.3. ■

La partie suivante de ce chapitre réalise l'estimation du prix du contrat dérivé sur  $S_t$  et explicite la stratégie de gestion continue associée, qui est donnée par son portefeuille de réplication.

### 3.4 Le prix et le portefeuille de réplication du contrat dérivé

L'objectif de cette section est de définir d'une part le prix de le contrat dérivé sur le prix moyen géométrique et, d'autre part, définir son portefeuille de réplication.

#### 3.4.1 Le prix du contrat dérivé

La proposition 3.2 montre que le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique à volatilité déterministe. Soit  $\bar{\sigma}_t$ , la volatilité constante équivalente de  $S_t$  relative à l'échéance  $T$ . Par la définition même de cette volatilité, il résulte que :  $\int_t^T \sigma(t) S_t dB_t^* + \int_t^T r S_t dt$  est de même loi que  $\int_t^T \bar{\sigma}_t S_t dB_t^* + \int_t^T r S_t dt$ . Ces deux termes étant de même loi en  $T$ , le prix du contrat dérivé peut être indifféremment estimé à partir du premier ou second terme. Ce résultat permet de définir le prix du contrat dérivé à partir de la formule de Black and Scholes avec la volatilité constante équivalente (Lamberton et Lapeyre, 1997).

De l'équation 3.7 et de la définition précédente, le terme  $\bar{\sigma}_t$  s'écrit :

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \times \frac{1}{T-t} \times \sqrt{\Theta \cdot \Gamma_t \cdot \Gamma_t^* \cdot \Theta^*} \quad (3.12)$$

où  $\Theta$  est la matrice ligne des  $\sigma_i \sqrt{T_i - t}$  si  $t < T_i$  et 0 sinon.

### 3.4.2 Le portefeuille de réplication du contrat dérivé

Pour les mêmes raisons que pour l'évaluation du prix, le portefeuille de réplication du contrat dérivé correspond au portefeuille de réplication défini par Black and Scholes avec la volatilité  $\bar{\sigma}_t$ . Le portefeuille du contrat dérivé sur le prix moyen, notée  $P_t$ , se définit donc ainsi :

- $\bar{\Delta}$  actifs sous-jacents  $S_t$  où  $\bar{\Delta}$  est le delta de l'option de Black and Scholes avec  $\bar{\sigma}_t$  (section 4.1.2 de la partie III) ;
- $e^{r(T-t)}(P_t - \bar{\Delta}S_t)$  unités d'obligations.

Soit, à l'aide de la proposition 3.3 :

- $\forall i = 1, \dots, n, \bar{\Delta} \times \frac{1}{n} \times e_t \times \frac{g(S_t)}{H_{it}}, ;$
- $e^{r(T-t)}(P_t - \bar{\Delta}S_t)$  unités d'obligations.

## 3.5 Illustration de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen

Une simulation est réalisée dans cette partie pour illustrer la stratégie de gestion pour l'achat d'un contrat dérivé sur le prix moyen géométrique. Cette simulation utilise trois contrats à terme  $H_1, H_2, H_3$  qui sont simulés par trois mouvements browniens géométriques. Les valeurs initiales et les paramètres sont choisis à partir de résultats statistiques sur les contrats à terme sur le porc coté sur le marché à terme de Amsterdam (Euronext). Les valeurs initiales choisies sont les valeurs des contrats à terme aux échéances respectives de mai 2002, juin 2002 et avril 2002 à la date du 1<sup>er</sup> janvier 2002<sup>8</sup>. Ces paramètres sont compilés sur le tableau 3.1.

La stratégie est simulée sur une période de six mois, le prix moyen étant la moyenne géométrique des prix à terme des trois dernières échéances. Par exemple, le contrat est souscrit le 1<sup>er</sup> janvier et les 3 échéances qui intègrent la moyenne sont alors celles de avril, mai et juin. Dans les simulations, les positions sur les marchés à terme sont ajustées une fois par semaine. Pour illustrer la stratégie de gestion, le résultat d'une simulation est présenté sur le tableau 3.2. Le prix d'exercice du contrat dérivé choisi est de 1,200€ /kg et la quotité choisie est de 1000. Le prix initial du contrat dérivé est estimé à  $6,130 \times 10^{-3}$ € /kg, soit 6,130€ par contrat.

Dans cette simulation, l'erreur de la stratégie est de :

$$60.315 - 45.584 = 14,731$$

8. Il semble que, pour l'éleveur de porcs, un prix moyen sur six mois, voir un an, aurait plus de sens dans sa gestion de risques. Mais une moyenne sur trois mois offre une meilleure lisibilité des résultats et suffit dans le cadre de cette illustration.

Paramètres des Browniens géométriques

	$H_{avr}$	$H_{mai}$	$H_{juin}$
Valeurs initiales (janv 2002)	1,310	1,340	1,358
$\mu$	-0,340	-0,175	-0,144
$\sigma$	0,214	0,165	0,181

Matrice de covariance des Browniens

$H_{avr}$	1		
$H_{mai}$	0,968	1	
$H_{juin}$	0,869	0,862	1

TAB. 3.1 – Paramètres de la simulation de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen.

Semaine	$H_{avr}$	$H_{mai}$	$H_{juin}$	$S_t$	$P_t$	gain	résultat
0	1.310	1.340	1.358	1.334	6.130	0.000	6.130
1	1.298	1.293	1.304	1.297	9.880	3.574	9.704
2	1.285	1.275	1.264	1.273	12.998	3.559	13.262
3	1.292	1.293	1.272	1.284	10.351	-1.785	11.477
4	1.329	1.351	1.310	1.328	4.542	-6.791	4.687
5	1.322	1.364	1.306	1.328	3.987	0.082	4.768
6	1.322	1.308	1.237	1.287	7.576	3.205	7.974
7	1.350	1.300	1.231	1.291	6.265	-0.379	7.595
8	1.387	1.320	1.252	1.317	3.147	-2.979	4.616
9	1.418	1.315	1.267	1.331	1.864	-0.839	3.778
10	1.412	1.316	1.268	1.329	1.470	0.113	3.890
11	1.401	1.322	1.255	1.323	1.271	0.294	4.184
12	1.386	1.333	1.252	1.321	0.914	0.119	4.303
13	1.338	1.309	1.222	1.287	1.812	1.047	5.350
14	1.339	1.291	1.221	1.282	1.372	0.409	5.759
15	1.287	1.255	1.175	1.237	4.403	2.387	8.146
16	1.293	1.275	1.197	1.253	1.073	-2.412	5.734
17	1.294	1.274	1.207	1.257	0.110	-0.152	5.582
18	1.295	1.268	1.182	1.247	0.158	0.120	5.702
19	1.297	1.258	1.151	1.233	0.344	0.248	5.950
20	1.298	1.240	1.132	1.221	0.621	0.487	6.437
21	1.299	1.217	1.091	1.199	3.680	1.675	8.112
22	1.300	1.153	1.033	1.156	39.186	16.345	24.457
23	1.301	1.154	1.027	1.155	41.502	2.315	26.772
24	1.303	1.155	0.999	1.145	52.411	10.909	37.681
25	1.304	1.156	0.940	1.123	75.777	23.366	61.046
26	1.305	1.157	0.981	1.140	60.315	-15.462	45.584

TAB. 3.2 – Simulation de stratégie pour le contrat dérivé sur 26 semaines avec une quantité égale à 1000.



Soit une erreur unitaire de  $1,4731 \times 10^{-2}$  €/Kg. Un test effectué sur 10 000 simulations donne une moyenne des erreurs de  $1,30 \times 10^{-3}$  et un écart type de  $6,72 \times 10^{-3}$  sur cette moyenne. Comparée au prix initial du contrat dérivé sur le prix moyen, l'erreur de la stratégie pourrait paraître importante. La figure 3.2 permet de visualiser d'une autre manière la performance de la stratégie. On notera, comme dans le cas de la simulation présentée sur le tableau 3.2, que l'erreur est plus importante quand le prix à l'échéance de  $S_T$  est proche du prix d'exercice.

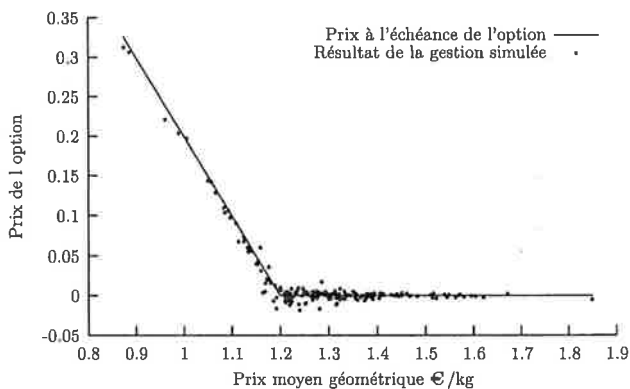


FIG. 3.2 – Résultat de 200 simulations de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen.

Ce chapitre, sur le contrat dérivé sur le prix moyen, propose une stratégie de gestion pour un intermédiaire financier qui propose ce contrat dérivé aux producteurs agricoles. Les simulations réalisées avec les paramètres des contrats à terme sur le porc, montrent de plus que la stratégie donne une erreur faible quand les ajustements sont réalisés une fois par semaine.

Ces deux derniers chapitres, traitant respectivement du chiffre d'affaires et du prix moyen géométrique, ont uniquement présenté la gestion de risques par des contrats financiers adaptés. Le chapitre suivant poursuit la recherche en traitant de la deuxième spécificité des risques agricoles. Il insère les notions de risques systémiques et de risques individuels, et réalise la gestion d'un contrat d'assurance agricole.

## Chapitre 4

# Un contrat d'assurance agricole

Peut-on gérer un contrat d'assurance sur le rendement agricole<sup>1</sup>?

Comme la partie problématique le mentionne, Miranda et Glauber (1997) pensent que le caractère systémique des risques agricoles est l'obstacle le plus important à l'émergence de l'assurance. Ainsi, le but de la stratégie proposée dans ce chapitre est de surmonter l'obstacle suivant : la gestion d'un risque *systémique et multidimensionnel*.

La problématique a montré que les risques systémiques agricoles posent de réelles difficultés à la relation producteur-assureur. De même, la relation producteur-marchés financiers souffre du décalage entre le marché et la situation réelle du producteur (risque de base). Pour surmonter ces deux difficultés, le modèle théorique développé dans ce chapitre intègre le *producteur*, l'*assureur* et le *marché financier* (figure 4.1). L'assureur vend un contrat d'assurance à l'agriculteur et utilise les marchés financiers pour transférer la composante systémique.

La première partie du texte pose les bases de la modélisation pour construire le contrat d'assurance sur le rendement agricole. La seconde partie réalise une estimation du prix de ce contrat d'assurance. Dans la troisième partie, le portefeuille de réplication du contrat d'assurance est construit à partir de cette estimation. La quatrième et dernière partie présente une simulation.

### 4.1 Les bases du modèle

Cette partie introduit les bases de la modélisation. La modélisation du marché financier est la même que dans le chapitre précédent. La première

1. Le développement proposé dans ce chapitre a fait l'objet d'une communication au *Seventh International Congress on Insurance: Mathematics & Economics* à Lyon le 5 juin 2003.

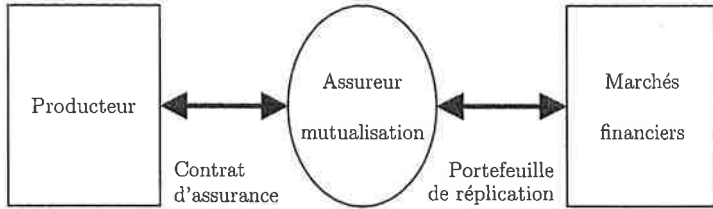


FIG. 4.1 – Schéma de gestion du contrat d'assurance

section décrit la perte financière causée par le rendement agricole qui permet de définir l'indemnité proposée par le contrat d'assurance. La deuxième introduit une mesure du risque systémique et du risque individuel. Enfin, la troisième section introduit une décomposition du temps en deux périodes pour la gestion du contrat.

#### 4.1.1 Le contrat d'assurance

L'indemnité du contrat d'assurance sur le rendement agricole sera fonction de la perte financière éventuelle subie par le producteur à cause du faible rendement. Le producteur  $j$  subit une perte de rendement, si le rendement obtenu  $y_j$  est inférieur au seuil  $y_0$ , considéré ici comme le minimum acceptable. La valeur financière de cette perte  $p$  est égale à  $P_j \times \max(y_s - y_j, 0)$  où  $P_j$  est le prix unitaire de la production à la fin de la période de production (en  $T$ ). Ainsi, le concept de *perte de rendement agricole* intègre à la fois l'aléa sur le prix et l'aléa sur le rendement (Cordier et Guinvarc'h, 2002a).

Le contrat d'assurance est défini par sa fonction d'indemnité  $I(p)$  supposée croissante. Le principe indemnitaire impose que  $0 \leq I(p) \leq p$ . Le portefeuille d'assurés est supposé homogène et uniformément réparti sur la région de référence du contrat à terme sur le rendement. Le modèle fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'aléa moral.

#### 4.1.2 La mesure du risque systémique

L'assureur a besoin de pouvoir estimer l'aléa systémique de son portefeuille. Il est fait l'hypothèse que cette estimation en  $T$  peut être réalisée à partir des deux quantités définies précédemment :  $F_T$  et  $Y_T^2$ . Le modèle

2. La valeur  $Y_T$  est une donnée agrégée qui permet de faire une approximation des densités des  $y_j$ . C'est ainsi que l'assureur réalise une estimation du risque systémique de

suppose que cette mesure du risque systémique est exacte.

### 4.1.3 Une décomposition du temps

La gestion du risque sur la période 0 à  $T$  peut être décomposée en deux périodes. L'instant  $T - \varepsilon$ , qui précède  $T$  d'une quantité  $\varepsilon$  très petite, est la charnière entre la période qui va de 0 à  $T - \varepsilon$  et celle qui va de  $T - \varepsilon$  à  $T$ . Le modèle suppose qu'en  $T - \varepsilon$  seul le couple  $(F_T, Y_T)$  est connu. À cet instant, les résultats individuels  $(P_j, y_j)$  ne sont pas connus. Il le sont uniquement en  $T$ , ce qui permet de calculer les pertes individuelles  $p_j$ . La « limite à gauche » de  $T - \varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 est appelée  $T^-$ . Par la continuité de  $F$  et de  $Y$  nous obtenons que  $(F_T, Y_T) = (F_{T^-}, Y_{T^-})$ . Enfin en  $T$ , l'ensemble des pertes individuelles  $p_j$  sont connues.

Le but de la première étape est de construire un contrat financier  $X^j$  acheté en  $t = 0$  qui en  $T^-$  vaut exactement  $Pr^j(F_T, Y_T)$ . Cette quantité correspond à l'espérance mathématique du montant de l'indemnité  $j$  sachant  $(F_T, Y_T)$ . Il s'agit d'un contrat dérivé défini par ses deux sous-jacents (le contrat à terme sur le rendement et le contrat à terme sur le prix) et par son prix à l'échéance  $(Pr^j(F_T, Y_T))$ . La deuxième étape construit un contrat d'assurance instantané qui va de  $T^-$  à  $T$  de durée  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). La prime  $Pr^j$  est alors déterminée en fonction de  $F_T$  et  $Y_T$  ( $Pr^j(F_T, Y_T)$ ) et coïncide avec le prix de l'actif  $X^j$  en  $T^-$ . Il s'agit d'un contrat d'assurance standard, sans composante systémique, qui a une durée très courte ( $\varepsilon$ ). La composante systémique a été préalablement supprimée par le contrat financier  $X^j$ .

À  $t = 0$ , l'assuré souscrit un contrat d'assurance qui, si nécessaire, lui fournit une indemnité à l'échéance  $T$  qui dépend de sa perte. Mais c'est uniquement la vision du producteur assuré. L'assureur vend à l'agriculteur un contrat financier  $X^j$  (à  $t=0$ ), dont la valeur à l'échéance ( $T - \varepsilon$ ) permet le financement de la prime du contrat d'assurance instantané (figure 4.2).

## 4.2 Estimation du prix du contrat d'assurance

Cette partie a pour objectif l'estimation de la prime du contrat d'assurance. La première section décrit la fonction de densité conditionnelle qui permet d'estimer l'espérance des indemnités en fonction de  $(F_T, Y_T)$ . La seconde présente le calcul du prix à l'instant  $t$  de ce contrat d'assurance.

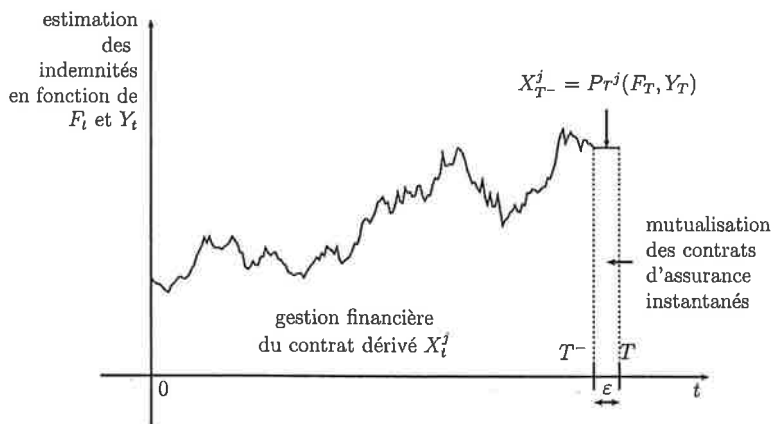


FIG. 4.2 – Décomposition de la gestion du contrat d'assurance rendement

#### 4.2.1 La fonction de densité conditionnelle des pertes

La variable aléatoire  $p_j^t$  égale à  $P_j \times (y_s - y_j)$  est connue en  $T$ .  $p_j^t$  prolonge  $p_j$ , la fonction de perte du producteur  $j$ , pour les valeurs négatives de  $P_j \times (y_s - y_j)$ . La fonction de densité conditionnelle  $f^j$  de  $p_j^t$  dépend de  $F_T$  et de  $Y_T$  ( $f_{F_T, Y_T}^j$ ). Comme l'assureur est capable de mesurer le risque systémique de son portefeuille à partir du couple  $(F_T, Y_T)$ ,  $f^j$  est donc la formalisation mathématique de cette hypothèse. De plus,  $f^j$  est supposée connue et deux fois dérivable en  $F_T$  et  $Y_T$ .

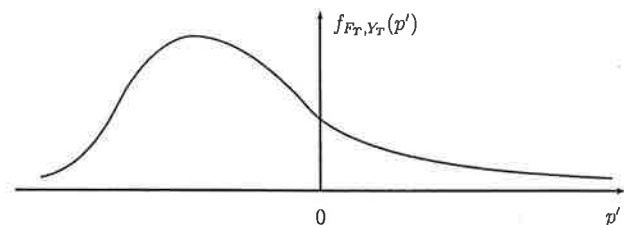


FIG. 4.3 – Illustration de la fonction de densité conditionnelle

Cette fonction permet le calcul de l'espérance mathématique de la somme des indemnités en fonction des résultats  $F_T$  et  $Y_T$ , et peut s'écrire comme suit :

$$\mathbb{E}_{F_T, Y_T}[I(p_j)] = \int_0^{+\infty} f_{F_T, Y_T}^j(p'_j) I(p'_j) dp'_j = \int_0^{+\infty} f_{F_T, Y_T}(p_j) I(p_j) dp_j$$

### 4.2.2 Le prix du contrat dérivé

Le contrat dérivé  $X^j$  est égal à  $\mathbb{E}_{F_T, Y_T}[I(p_j)]$  en  $T$ , c'est-à-dire  $P_T^j(F_T, Y_T)$ . Pour simplifier l'écriture, la fonction  $g$  est définie de la manière suivante :

$$g(F, Y, j) = \mathbb{E}[I(p_j)|F, Y]$$

Par les propriétés de  $f$  nous obtenons que  $g$  est  $C^2$  sur  $F$  et  $Y$ . Le but de cette section est de définir le prix de  $X^j$  en  $t$ . À chaque instant, la valeur de  $X^j$  en  $t$  est égale à l'espérance mathématique actualisée de  $g(F_T, Y_T, j)$  en  $t$  sous la probabilité risqué neutre. Elle s'écrit :

$$X_t^j = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\exp(-r(T-t))g(F_T, Y_T, j)|\mathcal{F}_t] = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[g(F_T, Y_T, j)|\mathcal{F}_t] \quad (4.1)$$

**Proposition 4.1** *Le prix de l'actif  $X^j$  en  $t$  est égal à :*

$$\begin{aligned} e^{r(T-t)} X_t^j &= g(F_t, Y_t, j) + \mathbb{E} \int_t^T g'_F r F_u du + \mathbb{E} \int_t^T g'_Y r Y_u du \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T g''_{FF} \sigma_F^2 F_u^2 du + \mathbb{E} \int_t^T g''_{FY} \delta \sigma_F \sigma_Y F_u Y_u du \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T g''_{YY} \sigma_Y^2 Y_u^2 du \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Démonstration :**

De la formule d'Itô appliquée à la fonction  $g$ , il résulte que :

$$\begin{aligned}
 g(F_T, Y_T, j) - g(F_t, Y_t, j) = & \int_t^T g'_t du \\
 & + \int_t^T g'_F(\sigma_F F_u, 0). dW_u^* + \int_t^T g'_F r F_u du \\
 & + \int_t^T g'_Y(\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u). dW_u^* \\
 & + \int_t^T g'_Y r Y_u du \\
 & + \int_t^T g''_{FY} \langle (\sigma_F F_u, 0), (\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u) \rangle du \\
 & + \frac{1}{2} \int_t^T g''_{FF} \langle (\sigma_F F_u, 0), (\sigma_F F_u, 0) \rangle du \\
 & + \frac{1}{2} \int_t^T g''_{YY} \langle (\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u), \\
 & \quad (\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u) \rangle du \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Soit, après quelques simplifications :

$$\begin{aligned}
 g(F_T, Y_T, j) - g(F_t, Y_t, j) = & g(F_t, Y_t) + \int_t^T g'_F r F_u du + \int_t^T g'_Y r Y_u du \\
 & + \int_t^T g'_F(\sigma_F F_u, 0). dW_u^* \\
 & + \int_t^T g'_Y(\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u). dW_u^* \\
 & + \frac{1}{2} \int_t^T g''_{FF} \sigma_F^2 F_u^2 du + \int_t^T g''_{FY} \delta \sigma_F \sigma_Y F_u Y_u du \\
 & + \frac{1}{2} \int_t^T g''_{YY} \sigma_Y^2 Y_u^2 du \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 X_t^j &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[g(F_T, Y_T, j) | \mathcal{F}_t] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[g(F_T, Y_T, j) - g(F_t, Y_t, j) + g(F_t, Y_t, j) | \mathcal{F}_t] \\
 &\quad \text{on peut extraire } g(F, Y, t, j) \\
 &= e^{-r(T-t)} g(F_t, Y_t, j) + e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[g(F_T, Y_T, j) - g(F_t, Y_t, j) | \mathcal{F}_t]
 \end{aligned}$$

Par l'équation (4.4) et le fait que  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[W_t^* | \mathcal{F}_t] = 0$ , l'équation (4.2) de la proposition (4.1) est vérifiée ■

### 4.2.3 Le prix du contrat d'assurance

Le prix du contrat d'assurance en  $t$  est égal à la prime aléatoire  $P\tau^j(F_T, Y_T)$  actualisée en  $t$  du contrat d'assurance instantané. La prime pure<sup>3</sup> du contrat d'assurance souscrit à l'instant  $t$  est donc égale à  $X_t^j$ .

## 4.3 La technique de gestion

La technique de gestion se décompose en deux opérations distinctes sur deux périodes. La première section traite de la première période qui va de 0 à  $T^-$  et la seconde section de la seconde période qui va de  $T^-$  à  $T$ .

### 4.3.1 De 0 à $T^-$

$X^j$  est un actif contingent complexe et spécifique. D'un point de vue pratique, sa cotation sur un marché n'est pas envisageable. C'est pourquoi, nous construisons son portefeuille de réplication. Un portefeuille financier s'exprime à l'aide d'une matrice  $\begin{pmatrix} \alpha_F \\ \alpha_Y \\ \alpha_B \end{pmatrix}$  où  $\alpha_F$  est le nombre de contrats à terme sur le prix,  $\alpha_Y$  est le nombre de contrats à terme sur le rendement et où  $\alpha_B$  est le nombre d'unités d'obligations.

**Proposition 4.2** *Le portefeuille de réplication  $\Phi$  de  $X^j$  est donné par :*

$$\Phi = e^{-r(T-t)} \begin{pmatrix} g'_F \\ g'_Y \\ -g'_F F_u - g'_Y Y_u \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

**Démonstration :**

---

3. La prime pure correspond au coût estimé du risque. La prime payée par l'assuré est appelée prime commerciale; elle correspond à la somme de la prime pure, des frais de gestion, des taxes et de la rémunération de l'assureur.



De l'équation (4.2), il résulte que :

$$\begin{aligned}
 e^{r(T-t)} (X_T^j - X_t^j) &= g(F_T, Y_T, j) - e^{r(T-t)} X_t^j \\
 &= g(F_T, Y_T, j) - g(F_t, Y_t, j) - \int_t^T g'_t du \\
 &\quad - \int_T^t g'_F r F_u du - \int_T^t g'_Y r Y_u du - \frac{1}{2} \int_t^T g''_{FF} \sigma_F^2 F_u^2 du \\
 &\quad - \int_t^T g''_{FY} \delta \sigma_F \sigma_Y F_u Y_u du - \frac{1}{2} \int_t^T g''_{YY} \sigma_Y^2 Y_u^2 du \\
 &= \int_t^T g'_F(\sigma_F F_u, 0) . d\mathbb{W}_u^* \\
 &\quad + \int_t^T g'_Y(\delta \sigma_Y Y_u, \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y_u) . d\mathbb{W}_u^* \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Avec l'équation (2.7) du chapitre 2, il résulte que :

$$\begin{aligned}
 e^{r(T-t)} (X_T^j - X_t^j) &= \int_t^T g'_F \sigma_F F_u dW^F + \int_t^T g'_F \mu_F F_u du \\
 &\quad + \int_t^T g'_Y \sigma_Y Y_u dW^Y + \int_t^T g'_Y \mu_Y Y_u du \\
 &\quad - \int_t^T \tau(g'_F F_u + g'_Y Y_u) du \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Cette équation est une expression mathématique du portefeuille de répliation  $\Phi$  donné dans la proposition 4.2. ■

Par cette stratégie, l'assureur réplique l'actif  $X^j$ . En  $T^-$ , le prix de  $X^j$  est égal à la prime d'assurance  $P_T^j(F_T, Y_T)$ .

### 4.3.2 De $T^-$ à $T$

De  $T^-$  à  $T$  l'assureur met en commun les risques des assurés. Comme  $F_T$  et  $Y_T$  sont connus, les variables aléatoires  $p^j$  sont indépendantes et identiquement distribuées (IID) où leur densité est notée  $f_{F_T, Y_T}$ . Pour un portefeuille de  $N$  assurés, il résulte que :

$$E \left[ \sum_{j=1}^N I(p_j) \middle| F_T, Y_T \right] \stackrel{\text{IID}}{=} \sum_{j=1}^N E[I(p_j) | F_T, Y_T] = \sum_{j=1}^N P_T^j(F_T, Y_T) + \tilde{\varepsilon}_N$$

La variance du résidu  $\tilde{\varepsilon}_N$  peut être estimée par la loi des grands nombres sachant que les hypothèses du modèle impliquent que  $E[\tilde{\varepsilon}_N] = 0$ . Ces deux

étapes permettent, dans ce cadre théorique, de gérer ce contrat d'assurance sur le rendement agricole. La partie suivante illustre ce modèle par quelques simulations.

## 4.4 Simulations

Dans cette partie, il est réalisé une simulation de la méthode sur un cas simple. Il est nécessaire de faire des hypothèses sur la fonction d'indemnité  $I$  et sur la fonction de densité conditionnelle des pertes  $p$ .

Le cas simulé suppose une indemnité de la forme  $I(p) = \alpha p$  avec un rendement minimum  $y_0^j$  et qu'il n'y a pas de risque de base. Le prix payé au producteur pour sa production est donc égal à  $F_T$ . De plus, la relation entre  $y_j$  et  $Y_T$  est supposée être la suivante :

$$y_j = \beta_j Y_T + \gamma_j \zeta \quad (4.8)$$

où  $\zeta$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Si  $0 < y_j < y_0^j$ , la perte<sup>4</sup>  $p$  s'écrit alors :

$$p = F_T(y_0 - y_j)$$

Il résulte de l'équation 4.8 et de la définition de  $p$  que la fonction de densité conditionnelle des pertes  $p$ , dans son domaine de définition  $[0, y_0^j]$ , est la loi normale d'espérance  $F_T(y_0 - Y_T)$  et d'écart type  $F_T \gamma_j$ .

Avec ces hypothèses, le prix du contrat peut être calculé. La section suivante réalise au préalable les calculs de la fonction  $g$  et de ses dérivées partielles.

### 4.4.1 Les calculs préalables

À partir des résultats précédents, il résulte le calcul suivant de la fonction  $g(F, Y, j) = E[I(p)|F, Y, j]$  :

---

4. Il en résulte les bornes suivantes sur  $\zeta$  :

$$\kappa^j = \frac{-\beta_j Y_T}{\gamma_j} < \zeta < \frac{y_0^j - \beta_j Y_T}{\gamma_j} = \eta^j$$

$$\begin{aligned}
g(F, Y, j) &= \int_{\kappa^j}^{\eta^j} F\alpha(y_0^j - \beta_j Y - \gamma_j \zeta) f(\zeta) d\zeta \\
&= F\alpha(y_0^j - \beta_j Y) \int_{\kappa^j}^{\eta^j} f(\zeta) d\zeta \\
&\quad + F\alpha\gamma_j \int_{\kappa^j}^{\eta^j} -\zeta f(\zeta) d\zeta \\
&= F\alpha(y_0^j - \beta_j Y) (N(\eta^j) - N(\kappa^j)) \\
&\quad + F\alpha\gamma_j (f(\eta^j) - f(\kappa^j)) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

où la fonction  $f$  représente la densité de la loi normale et  $N$  la fonction de répartition. Les dérivées partielles première et seconde de  $g$  sont réalisées dans cette section parce qu'elles sont nécessaires au calcul du prix du contrat dérivé et de la stratégie de gestion de ce contrat.

$$\frac{\partial g}{\partial F} = \alpha(y_0^j - \beta_j Y) (N(\eta^j) - N(\kappa^j)) + \alpha\gamma_j (f(\eta^j) - f(\kappa^j)) \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial Y} &= F\alpha(y_0^j - \beta_j Y) \times \left(-\frac{\beta_j}{\gamma_j}\right) (f(\eta^j) - f(\kappa^j)) \\
&\quad + F\alpha(-\beta_j) (N(\eta^j) - N(\kappa^j)) \\
&\quad + F\alpha\gamma_j \times \left(-\frac{\beta_j}{\gamma_j}\right) (-\eta^j f(\eta^j) - (-\kappa^j) f(\kappa^j)) \\
&= -F\alpha\beta_j (N(\eta^j) - N(\kappa^j)) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F^2} = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F \partial Y} = -\alpha\beta_j (N(\eta^j) - N(\kappa^j)) \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} &= -F\alpha\beta_j \times \left( \left(-\frac{\beta_j}{\gamma_j}\right) f(\eta^j) - \left(-\frac{\beta_j}{\gamma_j}\right) f(\kappa^j) \right) \\
&= F\alpha\beta_j \times \frac{\beta_j}{\gamma_j} (f(\eta^j) - f(\kappa^j)) \tag{4.14}
\end{aligned}$$

### 4.4.2 Le prix de ce contrat d'assurance

À partir de l'équation 4.2 qui définit le prix du contrat d'assurance et les dérivées partielles calculées juste avant, le prix du contrat d'assurance devient :

$$\begin{aligned}
 e^{r(T-t)} X_t^j = & g(F_t, Y_t, j) \\
 & + \mathbb{E} \int_t^T r \alpha (y_0^j - \beta_j Y) (N(\eta_u^j) - N(\kappa_u^j)) \\
 & + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T \alpha \gamma_j (f(\eta_u^j) - f(\kappa_u^j)) F_u du \\
 & - \mathbb{E} \int_t^T r \alpha \beta_j (N(\eta_u^j) - N(\kappa_u^j)) F_u Y_u du \\
 & - \mathbb{E} \int_t^T \delta \sigma_F \sigma_Y \alpha \beta_j (N(\eta_u^j) - N(\kappa_u^j)) F_u Y_u du \\
 & + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T \alpha \beta_j \times \left( \frac{\beta_j}{\gamma_j} \right) (f(\eta_u^j) - f(\kappa_u^j)) F_u \sigma_Y^2 Y_u^2 du \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Soit, après simplification :

$$\begin{aligned}
 e^{r(T-t)} X_t^j = & g(F_t, Y_t, j) \\
 & + \mathbb{E} \int_t^T r g(F_u, Y_u, j) du \\
 & - \alpha \beta_j r \mathbb{E} \int_t^T (N(\eta_u^j) - N(\kappa_u^j)) F_u Y_u du \\
 & - \alpha \beta_j \delta \sigma_F \sigma_Y \mathbb{E} \int_t^T (N(\eta_u^j) - N(\kappa_u^j)) F_u Y_u du \\
 & + \frac{1}{2} \alpha \beta_j \times \left( \frac{\beta_j}{\gamma_j} \right) \mathbb{E} \int_t^T (f(\eta_u^j) - f(\kappa_u^j)) F_u \sigma_Y^2 Y_u^2 du \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

### 4.4.3 Résultats des simulations

Les simulations sont réalisées avec les mêmes paramètres du marché financier que les simulations du chapitre 2. Les paramètres du rendement agricole du producteur  $j$  de l'équation 4.8 choisis sont :  $\beta_j = 1$  et  $\gamma_j = 20^5$ . Les paramètres choisis du contrat d'assurance sont :  $\alpha_0 = 0.8$  et  $y_0 = 110$ . La durée du contrat est de 39 semaines et les positions sont ajustées chaque semaine.

5. Ces chiffres s'interprètent comme un portefeuille de producteurs assurés obtenant en moyenne le rendement du comté ( $\beta_j = 1$ ) et ayant des aléas individuels importants (leurs écarts types  $\gamma_j$  sont à mettre en relation avec  $Y_0 = 115$ ).

Le prix du contrat est estimé à 12,19 \$ par acre. Le résultat d'une simulation est présenté sur le tableau 4.1 et donne une erreur de -2,04, soit une erreur relative de :

$$\frac{22,41 - 24,45}{12,19} = -0,16$$

Les résultats des 10 000 simulations aléatoires donnent une erreur moyenne de  $1,6 \cdot 10^{-4}$  et un écart type de l'erreur de la stratégie de 1,12, soit un coefficient de variation de 10%. Miranda et Glauber précisent que, pour les contrats d'assurance récolte, les dix premiers assureurs ont obtenu des coefficients de variation allant de 67% à 130%. *Le coefficient de variation de 10% est donc très faible* et semble être dans la norme des contrats d'assurance dommages (de 5% à 15%).

Enfin, deux graphiques sont proposés pour illustrer les résultats. Le premier présente la distribution des  $X_i^j$ , et le second présente la distribution de l'erreur de cette stratégie.

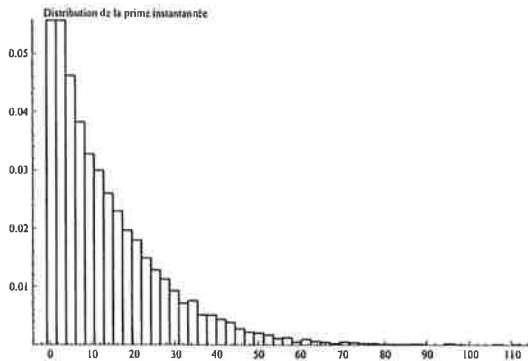


FIG. 4.4 – Distribution de la prime du contrat d'assurance instantané (\$).

*La stratégie théorique proposée dans ce chapitre montre que, si les hypothèses sont acceptables, il est possible de gérer un contrat d'assurance sur le rendement agricole. Les simulations réalisées donnent un coefficient de variation du coût du contrat tout à fait compatible avec les pratiques de l'assurance.*

*Le chapitre suivant affine le cadre théorique en ajoutant des sauts dans le modèle du marché financier.*

semaine	$F_t$	$Y_t$	$X_t^2$	Gains	Résultats
0	2,20	115,00	<b>12,19</b>	0,00	<b>12,19</b>
1	2,26	114,75	12,60	0,48	12,67
2	2,30	112,37	14,38	1,95	14,62
3	2,37	110,77	15,92	1,70	16,32
4	2,41	107,10	19,26	3,60	19,92
5	2,46	107,87	18,91	-0,37	19,55
6	2,48	112,46	15,20	-4,51	15,04
7	2,59	111,65	16,51	1,38	16,42
8	2,57	111,23	16,70	0,38	16,80
9	2,56	110,18	17,45	0,99	17,80
10	2,49	116,72	12,01	-6,81	10,99
11	2,47	118,97	10,45	-1,62	9,37
12	2,47	116,44	11,98	1,66	11,03
13	2,44	116,19	11,96	0,15	11,18
14	2,47	112,26	14,92	3,02	14,20
15	2,51	106,56	20,29	5,29	19,48
16	2,51	103,62	23,42	3,38	22,86
17	2,42	105,62	20,45	-3,19	19,68
18	2,38	104,93	20,84	0,58	20,25
19	2,31	107,25	17,93	-3,15	17,10
20	2,24	112,39	13,16	-5,57	11,54
21	2,15	115,48	10,49	-2,90	8,63
22	2,05	116,25	9,51	-0,88	7,75
23	2,16	111,92	12,92	3,18	10,93
24	2,20	111,71	13,28	0,46	11,39
25	2,25	108,28	16,39	3,11	14,50
26	2,31	107,57	17,47	1,18	15,69
27	2,35	105,90	19,41	2,04	17,72
28	2,37	104,99	20,56	1,28	19,00
29	2,37	107,09	18,35	-2,27	16,73
30	2,33	110,22	15,02	-3,56	13,17
31	2,30	109,56	15,40	0,53	13,70
32	2,26	111,12	13,76	-1,62	12,07
33	2,26	109,51	15,12	1,47	13,54
34	2,28	106,77	17,83	2,71	16,26
35	2,31	103,78	21,25	3,38	19,64
36	2,43	99,54	27,66	5,99	25,63
37	2,33	102,00	23,46	-4,37	21,26
38	2,28	100,06	25,41	2,03	23,30
39	2,29	<b>100,92</b>	<b>24,45</b>	-0,88	<b>22,41</b>

TAB. 4.1 - Simulation de stratégie du contrat d'assurance sur 39 semaines

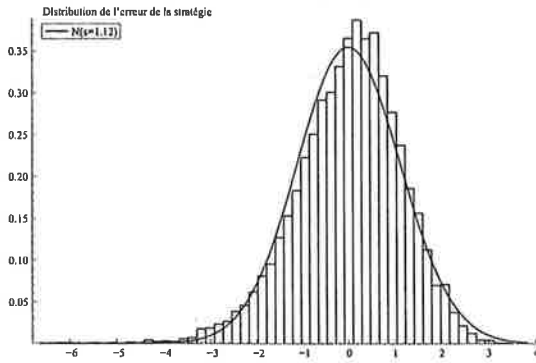


FIG. 4.5 – Distribution de l'erreur de la stratégie de gestion (\$).

## Chapitre 5

# Ajout de sauts dans le modèle du marché financier

Comme l'analyse des marchés financiers le mentionnait, Hilliard et Reis (1999) ont réalisé une étude sur les contrats à terme et les options sur le soja cotés sur le Chicago Board of Trade. Cette étude montre que le modèle dérivé du modèle de Merton proposé par Bates (1991) est plus approprié que le modèle de Black and Scholes. C'est pourquoi, le modèle de Merton est introduit dans la modélisation des risques agricoles.

La première partie présente le nouveau modèle du marché financier et définit la mesure risque neutre. La deuxième définit le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires. La troisième et dernière présente la stratégie de gestion de ce contrat et montre sa convergence en probabilité.

### 5.1 Le nouveau modèle du marché financier

Cette partie présente le nouveau modèle du marché financier établi à partir des travaux de Merton. La première section donne les nouvelles équations différentielles. La seconde donne deux remarques préalables qui faciliteront les démonstrations de ce chapitre. La troisième et dernière section calcule la probabilité risque neutre.

#### 5.1.1 Les nouvelles équations différentielles

Le nouveau modèle du marché financier utilise les trois contrats définis dans le chapitre 2 ( $B_t, F_t, Y_t$ ). L'obligation est modélisée de la même manière ( $B_t = e^{-r(T-t)}$ ). Par contre, les contrats à terme sur le prix et sur le rendement



suivent le modèle de Merton et s'écrivent comme suit :

$$dF_t = (\mu_F - \lambda_F k_F) F_t dt + \sigma_F F_t dW_t^F + (U^F - 1) F_t dN^F \quad (5.1)$$

$$dY_t = (\mu_Y - \lambda_Y k_Y) Y_t dt + \sigma_Y Y_t dW_t^Y + (U^Y - 1) Y_t dN^Y \quad (5.2)$$

où  $\lambda_F$  et  $\lambda_Y$  sont les intensités des poissos  $N^F$  et  $N^Y$  et où  $k_F = E(U^F - 1)$  et  $k_Y = E(U^Y - 1)$ .  $U^F - 1$  et  $U^Y - 1$  représentent les impulsions.  $\mu_F$  et  $\mu_Y \in \mathbb{R}$  sont, comme dans la précédente modélisation, les paramètres déterministes de  $F$  et de  $Y$ ,  $\sigma_F > 0$  et  $\sigma_Y > 0$  sont les paramètres constants de la volatilité de  $F$  et de  $Y$ .  $\delta = \text{cov}(W_u^F, W_u^Y)$  permet d'introduire une relation entre les deux prix<sup>1</sup>. L'amplitude des sauts  $U^F$  et  $U^Y$  ainsi que leurs survenances sont dans ce modèle indépendantes.

Le mouvement Brownien de dimension 2, noté  $\mathbf{W}_t$ , est défini de la même manière que dans la précédente modélisation à partir de  $W^F$  et de  $W^Y$  par la transformation :

$$\mathbf{W}_t = \begin{pmatrix} W_t^F \\ \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}(W_t^F - \delta W_t^Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_t^F \\ W_t^Y \end{pmatrix}$$

### 5.1.2 Deux remarques préalables

Les deux remarques suivantes sur le processus de Poisson et sur l'indépendance entre les aléas permettent de faciliter le développement de ce chapitre.

**Remarque 5.1 (Résultat sur le processus de Poisson)** *Si  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  alors, pour tout  $t > 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  :*

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

On a en particulier :

$$E(N_t) = \lambda t, \quad \text{Var}(N_t) = \lambda t.$$

De plus, pour  $s > 0$

$$E[s^{N(t)}] = e^{\lambda t(s-1)} \quad (5.3)$$

**Remarque 5.2 (Indépendance des tribus)** *La nouvelle tribu  $\mathcal{T}$  de l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  est engendrée par  $(\mathbf{W}_t)_{t \geq 0}$  (notée  $\mathcal{F}_t$ ), deux processus de Poisson de paramètres  $\lambda_F$  et  $\lambda_Y$ ,  $(N_t^F)_{t \geq 0}$  et  $(N_t^Y)_{t \geq 0}$ , et deux suites*

<sup>1</sup> Il n'y a plus de relation simple entre  $\delta$  et la corrélation entre  $F_t$  et  $Y_t$  depuis l'ajout des sauts.

$(U_i^F)_{i \geq 1}$  et  $(U_i^Y)_{i \geq 1}$  de variables indépendantes équidistribuées, à valeur dans  $[0, +\infty[$  ( $\mathcal{F} \otimes N^F \otimes N^Y \otimes U^F \otimes U^Y$ ). Dans ce chapitre, le modèle fait l'hypothèse que les tribus engendrées respectivement par  $\mathcal{F}_t$ ,  $(N_i^F)_{i \geq 0}$ ,  $(N_i^Y)_{i \geq 0}$ ,  $(U_i^F)_{i \geq 1}$  et  $(U_i^Y)_{i \geq 1}$  sont indépendantes. Il résulte entre autre que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) \right] \\ &= \exp(\lambda_F t (\mathbb{E}[U_j^F] - 1)) \text{ en utilisant l'équation (5.3)} \\ &= e^{\lambda_F k_F t} \end{aligned} \quad (5.4)$$

### 5.1.3 La probabilité risque neutre

Dans le modèle de Merton, la méthode d'évaluation par arbitrage ne peut fonctionner. De plus, la probabilité risque neutre n'est pas unique. La proposition suivante choisit dans cet ensemble la probabilité décrite dans la proposition suivante.

**Proposition 5.3**  $F_t^*$  et  $Y_t^*$  sont des martingales sous la probabilité  $P^*$  associée à la transformation suivante de  $W_t$  :

$$W_t^* = W_t - \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\sigma_F}{\sqrt{1-\delta^2}} & 0 \\ -\frac{\delta \sigma_F}{\sqrt{1-\delta^2}} & \frac{\sigma_Y}{\sqrt{1-\delta^2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r - \mu_F \\ r - \mu_Y \end{pmatrix} (du) \quad (5.5)$$

**Démonstration :**

La transformation 5.5 est la même que dans le modèle précédent (équation 2.7), il est donc clair que  $W_t^*$  est un Brownien standard de dimension 2. Il reste à vérifier que  $F_t^*$  et  $Y_t^*$  sont des martingales sur  $P^*$  :

$$\begin{aligned} F_t^* &= e^{-rt} F_t \\ &= e^{-rt} F_0 \exp \left( (\mu_F - \lambda_F k_F - \frac{1}{2} \sigma_F^2) t + \sigma_F W_t^F \right) \times \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) \\ &= e^{-rt} F_0 \exp \left( (\mu_F - \frac{1}{2} \sigma_F^2) t + \sigma_F W_t^F \right) e^{-\lambda_F k_F t} \times \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Soit, avec le changement de variable associée à  $\mathbf{W}_t^*$ :

$$\begin{aligned} F_t^* &= e^{-rt} F_0^* \exp\left(\sigma_F \mathbf{W}_t^{1*} - \left(\frac{1}{2}\sigma_F^2 - r\right)t\right) e^{-\lambda_F k_F t} \times \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) \\ &= F_0^* \exp\left(\sigma_F \mathbf{W}_t^{1*} - \frac{1}{2}\sigma_F^2 t\right) e^{-\lambda_F k_F t} \times \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Par l'équation (5.4), il vient que  $\mathbb{E}_{P^*}[e^{-\lambda_F k_F t} \times \prod_{j=1}^{N(t)} (U_j^F) | \mathcal{F}_0] = 1$ . Il résulte donc que  $\mathbb{E}_{P^*}[F_t^* | \mathcal{F}_t, t = 0] = F_0^*$ . Ainsi,  $F_t^*$  est une martingale sur  $P^*$ . La démonstration pour  $Y_t^*$  est similaire. ■

Ainsi, le modèle du marché financier devient avec la notation  $dN = \begin{pmatrix} dN_F \\ dN_Y \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} dF \\ dY \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} F \\ Y \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_F F & 0 \\ \delta \sigma_Y Y & \sqrt{1 - \delta^2} \sigma_Y Y \end{pmatrix} d\mathbf{W}_t^* + \begin{pmatrix} (U^F - 1)F \\ (U^Y - 1)Y \end{pmatrix} dN \quad (5.8)$$

## 5.2 Le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires

Cette section cherche à déterminer le prix du contrat à terme sous les nouvelles hypothèses du marché financier. Il est donné dans la proposition suivante.

**Proposition 5.4** *À l'instant  $t$ , le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires  $\pi_t(F_T Y_T)$  est égal à :*

$$\begin{aligned} \pi_t(F_T Y_T) &= F_t Y_t \times \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y)(T - t)) \\ &= e_t F_t Y_t \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $e_t = \exp((r + \delta \sigma_F \sigma_Y)(T - t))$ .

**Démonstration :**

Du fait de l'indépendance entre les browniens et les sauts, l'équation différentielle stochastique relative au produit  $F_t Y_t$  s'écrit (avec  $B$  Brownien stan-

dard unidimensionnel) :

$$\frac{d(FY_t)}{F_t Y_t} = \underbrace{(2r + \delta\sigma_F\sigma_Y)dt + \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta\sigma_F\sigma_Y}dB}_{\text{pour la partie continue}} + \underbrace{(U_t^F - 1)dN_F + (U_t^Y - 1)dN_Y - (\lambda_F k_F + \lambda_Y k_Y)dt}_{\text{pour la partie discontinue}} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} F_t \times Y_t &= F_0 Y_0 \exp\left(\left(2r + \delta\sigma_F\sigma_Y - \frac{1}{2}(\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta\sigma_F\sigma_Y)\right)t\right) \\ &\times \exp\left(\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_Y^2 + 2\delta\sigma_F\sigma_Y} B_t\right) \\ &\times \prod_{i=1}^{N^F(t)} (U_i^F) \times \prod_{j=1}^{N^Y(t)} (U_j^Y) \times \exp(-(\lambda_F k_F + \lambda_Y k_Y)t) \quad (5.11) \end{aligned}$$

On note  $\pi_t(F_T Y_T)$  le prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires à la date  $t$ .

$$\pi_t(F_T Y_T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F_T Y_T | \mathcal{F}_t]$$

D'où, avec l'équation (5.11), l'espérance devient :

$$\begin{aligned} \pi_t(F_T Y_T) &= \underbrace{F_t Y_t \exp((r + \delta\sigma_F\sigma_Y)(T-t))}_{\text{partie continue}} \\ &\times \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ \prod_{i=1}^{N^F(t)} (U_i^F) \times \exp(-\lambda_F k_F t) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\times \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ \prod_{j=1}^{N^Y(t)} (U_j^Y) \times \exp(-\lambda_Y k_Y t) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (5.12) \end{aligned}$$

Le résultat précédent et l'équation (5.4) permettent de prouver l'équation (5.10) de la proposition ■

### 5.3 La gestion du contrat à terme

Ce contrat à terme sur le chiffre d'affaires est bien sûr un contrat dérivé. Il est donc important de savoir si ce contrat peut être géré à partir de ses sous-jacents. La proposition suivante répond à cette interrogation.

**Proposition 5.5** *La stratégie qui intègre en permanence le portefeuille suivant converge en probabilité vers  $F_T Y_T$ .*

- $e_t Y_t$  contrats à terme sur le prix;
- $e_t F_t$  contrats à terme sur le rendement agricole;
- $-e_t F_t Y_t$  unités d'obligations.

où  $e_t = \exp((r + \delta\sigma_F\sigma_Y)(T - t))$ .

### Démonstration :

En pratique, il est impossible de détenir en continu  $e_t Y_t$  contrats sur le prix ou  $e_t F_t$  contrats sur le rendement. Les positions sur les marchés ne peuvent être ajustées qu'un nombre limité de fois ( $n$ ) entre  $0 = t_0$  et  $T = t_n$ . Le portefeuille est donc statique dans chaque intervalle de temps entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ). Le calcul élémentaire suivant de  $\pi_{t_{i+1}}(F_T Y_T)$  permet de décomposer l'erreur.

$$\pi_{t_{i+1}}(F_T Y_T) = e_{t_i} F_{t_i} Y_{t_i} \quad (5.13)$$

$$+ e_{t_i} (F_{t_{i+1}} - F_{t_i}) Y_{t_i} \quad (5.14)$$

$$+ e_{t_i} F_{t_i} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \quad (5.15)$$

$$+ (e_{t_i} e^{r(t_{i+1}-t_i)} - e_{t_i}) F_{t_i} Y_{t_i} \quad (5.16)$$

$$+ (e_{t_{i+1}} - e_{t_i} e^{r(t_{i+1}-t_i)}) F_{t_i} Y_{t_i} \quad (5.17)$$

$$+ e_{t_i} (F_{t_{i+1}} - F_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \quad (5.18)$$

$$+ (e_{t_{i+1}} - e_{t_i}) (F_{t_{i+1}} - F_{t_i}) Y_{t_i} \quad (5.19)$$

$$+ (e_{t_{i+1}} - e_{t_i}) F_{t_i} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \quad (5.20)$$

$$+ (e_{t_{i+1}} - e_{t_i}) (F_{t_{i+1}} - F_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \quad (5.21)$$

L'algorithme introduit à chaque étape une erreur par rapport au résultat de la proposition précédente. La ligne (5.13) correspond à la valeur exacte du portefeuille en  $t_i$ . Les lignes (5.14), (5.15) et (5.16) correspondent, quand à elles, à la stratégie explicitée dans la proposition (5.5). Les termes des lignes (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) et (5.21) génèrent l'erreur théorique de cette stratégie. La démonstration consiste donc à montrer que l'erreur converge en probabilité vers zéro.

La démonstration complète de la convergence ligne par ligne ne présente pas de réelles difficultés. La difficulté porte principalement sur la convergence en probabilité de la somme des lignes (5.17) et (5.18) vers zéro. Cette démonstration partielle est réalisée à l'aide du terme  $A_n$  défini de la manière

suivante :

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{e_{t_i}(F_{t_{i+1}} - F_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})}_{B_i} + \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(e_{t_{i+1}} - e_{t_i}e^{r(t_{i+1}-t_i)})F_{t_i}Y_{t_i}}_{C_i} \quad (5.22)$$

$A_n$  est la somme de  $A_n^c$ , la partie continue, et de  $A_n^d$ , la partie discontinue.  $A_n^c$  convergent si les  $\frac{B_i^c + C_i}{t_{i+1} - t_i}$  convergent en probabilité vers zéro. Par contre, pour que les  $A_n^d$  convergent, il suffit que les  $B_i^d$  convergent en probabilité vers zéro parce que le nombre de saut(s)  $N(T)$  est toujours fini.

La limite du deuxième terme  $C_i$  est déduite directement de la définition de  $e_t$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left[\frac{C_i}{t_{i+1} - t_i}\right] = -\delta\sigma_F\sigma_Y \quad (5.23)$$

Le premier terme nécessite un calcul préalable :

$$\begin{aligned} \frac{F_{t_{i+1}} - F_{t_i}}{F_{t_i}} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mu_F - \lambda_F k_F) F_u du + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_F F_u dW_u^F \\ &\quad + \sum_{N_{t_i}}^{N(t_{i+1})} (U_j^F - 1) \\ &\cong (\mu_F - \lambda_F k_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma_F \sqrt{t_{i+1} - t_i} W_1^F \\ &\quad + 1_i^F \cdot (U_j^F - 1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Il est possible d'écrire  $1_i^F \cdot (U_j^F - 1)$  car, si les  $t_i$  sont à intervalles réguliers, on a pour  $n$  suffisamment grand  $1_i^F = N(t_{i+1}) - N_{t_i} \in (0, 1)$ . Il résulte pour la partie continue :

$$\begin{aligned} B_i^c &\cong (\mu_F - \lambda_F k_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2)(\mu_Y - \lambda_Y k_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2)(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\quad + (\mu_F - \lambda_F k_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2)(t_{i+1} - t_i)^{\frac{3}{2}} \sigma_Y W_1^Y \\ &\quad + (\mu_Y - \lambda_Y k_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2)(t_{i+1} - t_i)^{\frac{3}{2}} \sigma_F W_1^F \\ &\quad + \sigma_F \sqrt{t_{i+1} - t_i} W_1^F \sigma_Y \sqrt{t_{i+1} - t_i} W_1^Y \end{aligned} \quad (5.25)$$

Il résulte que seul le quatrième terme est de degré inférieur ou égal à 1 en  $(t_{i+1} - t_i)$  et ne tend donc pas vers zéro, ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left[\frac{B_i^c}{t_{i+1} - t_i}\right] = \sigma_F \sigma_Y \mathbb{E}[W_1^F W_1^Y] = \delta\sigma_F\sigma_Y \quad (5.26)$$

d'où, avec l'équation 5.23, il résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[A_n^c] = 0 \quad (5.27)$$

Poursuivons la démonstration avec la composante discontinue :

$$\begin{aligned} B_i^d \cong & (\mu_F - \lambda_F k_F - \frac{1}{2} \sigma_F^2)(t_{i+1} - t_i) 1_i^F (U_j^Y - 1) \\ & + (\mu_Y - \lambda_Y k_Y - \frac{1}{2} \sigma_Y^2)(t_{i+1} - t_i) 1_i^Y (U_j^F - 1) \\ & + \sqrt{(t_{i+1} - t_i)} \sigma_F W_1^F 1_i^Y (U_j^F - 1) \\ & + \sqrt{(t_{i+1} - t_i)} \sigma_Y W_1^Y 1_i^F (U_j^Y - 1) \\ & + 1_i^Y \cdot (U_j^F - 1) \times 1_i^F \cdot (U_j^Y - 1) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Les quatre premiers termes convergent en probabilité vers zéro. Le dernier terme converge, car la probabilité que plusieurs sauts soient dans le même intervalle  $[t_i, t_{i+1}[$ , tend vers zéro. Grâce à l'indépendance des survenances et les propriétés de la loi de Poisson il résulte en effet que  $P(N_{t_{i+1}-t_i}^F > 0 \cap N_{t_{i+1}-t_i}^Y > 0) \approx \mathcal{O}(t_{i+1} - t_i)^2$ . Ainsi, il existe toujours  $n_0$  tel que pour  $n > n_0$  on ait  $1_i^Y \cdot 1_i^F = 0$  quelque soit  $i$ . C'est ainsi que les  $A_n$  convergent en probabilité vers zéro, ce qui termine la démonstration. ■

*Ces résultats sont particulièrement intéressants. En effet, alors que pour de l'option du modèle de Merton il n'existe pas de stratégie qui converge, la stratégie liée au contrat à terme sur le chiffre d'affaires converge. Elle s'explique par la linéarité de  $\pi_t(F_t, Y_t)$  en  $F_t$  et  $Y_t$  et par l'indépendance de la survenance des sauts de  $F_t$  et de  $Y_t$ . Il serait donc possible et intéressant d'étendre cette étude pour mesurer la perturbation sur la gestion d'une option et du contrat d'assurance dû à l'ajout des processus à sauts.*

*Après l'affinement théorique proposé dans ce chapitre, le chapitre suivant discute de l'intérêt et des limites de l'ensemble des concepts théoriques de la thèse que sont : la provision comptable, le contrat à terme et l'option sur le chiffre d'affaires, l'option sur le prix moyen et le contrat d'assurance rendement.*

## Chapitre 6

# Discussion de l'approche théorique

Comme le mentionne la problématique, le problème central est la capacité d'un assureur à utiliser les marchés financiers pour céder la composante systémique du risque agricole. Le développement théorique s'est efforcé de répondre à cette problématique. L'objectif de cette discussion de l'approche théorique est de décrire les avancées et les limites de cette approche et d'introduire les applications de la partie suivante. La première partie développe les perspectives que ce modèle suggère et la deuxième liste les limites prévisibles de cette étude.

### 6.1 Les potentiels de ces développements théoriques

L'objectif de cette partie du chapitre est de présenter les perspectives de ces développements théoriques. Tout d'abord, cette approche est originale comme le montre la première section et elle donne un résultat inhabituel comme le montre la deuxième. La troisième et dernière section présente les perspectives qui se dessinent pour les intermédiaires financiers, les assureurs et les producteurs.

#### 6.1.1 Une approche originale

Tout d'abord, la proposition d'une provision pour perte systémique est originale dans son concept, dans sa formulation et, paradoxalement, dans sa simplicité. L'approche des développements théoriques sur les contrats financiers et d'assurance est originale par la combinaison de trois idées peu



développées dans la littérature. Elle s'intéresse d'abord à la technique de gestion de l'intermédiaire financier ou de l'assureur qui commercialise un contrat adapté à l'agriculteur. Force est de constater, qu'à l'inverse, la littérature se focalise sur la situation du producteur. La deuxième idée s'inspire des travaux de Vukina *et al* (1996,1998) et, plus tard, de Nayak et Turvey (2000). En effet, peu d'auteurs utilisent à la fois le contrat à terme sur le prix et sur le rendement agricole dans leurs modèles. La troisième idée consiste, dans le cas de la gestion d'un contrat d'assurance agricole, à transférer la composante systémique aux marchés financiers.

À l'inverse, les auteurs sont très imaginatifs sur la forme des contrats. Ce modèle ne cherche donc pas à construire des contrats encore plus originaux, mais cherche simplement la rigueur dans leurs formulations et leurs appellations : « assurance » ou « finance ».

### 6.1.2 Une avancée théorique

Dans les conditions idéales, cette stratégie permet à l'intermédiaire financier ou à l'assureur de gérer un risque systémique multi-dimensionnel sans conserver de risque pour lui même. C'est un résultat fort, nouveau et qui répond à la problématique. Sur les hypothèses de travail, les simulations confirment cette approche et montrent la convergence de la stratégie proposée.

Le chapitre qui ajoute les processus à sauts dans la modélisation des contrats financiers est intéressant dans le cas du contrat à terme sur le chiffre d'affaires. Ainsi, il est remarquable que la stratégie converge également dans ce cas particulier.

### 6.1.3 Quelques perspectives se dessinent

Avant même de discuter les hypothèses et les limites de ce modèle, cette section présente quelques perspectives qui se dessinent à travers ce modèle.

Tout d'abord, ces stratégies peuvent offrir des perspectives aux intermédiaires financiers et aux assureurs. Si un intermédiaire financier construit le contrat à terme ou l'option sur le chiffre d'affaires, il réalise une réelle transformation financière des risques. Elle représente pour lui une opportunité commerciale. De même, le contrat dérivé sur le prix moyen offre de réelles perspectives dans le cas de l'élevage et, en particulier, de l'élevage porcin en Bretagne. Ce modèle représente également une réelle perspective à l'assureur qui cherche l'équilibre sinistres sur primes chaque année. Elle est essentielle car aujourd'hui, l'assureur n'obtient pas cet équilibre dans le cas des risques systémiques agricoles, pas même dans le cadre d'une gestion multi-annuelle.

Cette approche ouvre également des perspectives aux institutions internationales qui développent des outils pour les pays en développement. Ces implications potentielles, ont fait l'objet d'une communication (Cordier et Guinvarc'h, 2002b). Elles ne sont pas reprises ici parce qu'elles ne répondent pas à la problématique de la thèse.

De plus, ce modèle ouvre indirectement de réelles perspectives à l'agriculteur. Tout d'abord, il permet d'envisager l'élargissement de la gamme de produits de couverture qu'il pourra utiliser. Par ailleurs, la littérature explique que le risque conservé par l'assureur du fait de la composante systémique entraîne une surprime défavorable aux producteurs. Ainsi, toutes choses étant égales par ailleurs, la capacité de l'assureur à gérer ce risque permet en théorie de supprimer ou, en pratique, de réduire cette surprime.

Cependant, le passage de la théorie à la pratique présente quelques difficultés. Elles sont développées dans la partie suivante.

## 6.2 Les difficultés d'une mise en œuvre

À ce stade de l'étude, il est impossible de prétendre que ces modèles sont applicables sous cette forme. Or, ils ont une vocation pratique. L'objectif de cette partie est donc de mentionner leurs limites, d'entrevoir les difficultés qu'ils génèrent et d'ouvrir des pistes de recherches appliquées. La première section présente les limites liées aux marchés financiers. La deuxième traite des limites qui concernent la modélisation du portefeuille d'assurance. Enfin, la troisième aborde les limites liées aux différentes spécificités des productions.

### 6.2.1 Les limites du marché financier

La première limite concerne la complétude des marchés financiers. La deuxième porte sur la modélisation de l'évolution du prix de l'actif et la troisième se réfère à l'intermédiaire financier.

La première limite de cette stratégie, et la plus importante, concerne l'existence des contrats à terme sous-jacents, en particulier sur le rendement agricole. Après un échec commercial du contrat à terme sur le rendement qui s'est arrêté en 2000, le Chicago Board Of Trade propose de relancer 2004 un nouveau contrat sur le rendement maïs. C'est une quotation *quasi* expérimentale. À moyen terme, seules les productions les plus importantes en volume peuvent espérer pouvoir introduire un contrat sur le rendement. Néanmoins, il serait logique de penser que la mise en œuvre de ce modèle pourrait aider les contrats à terme sur le rendement à trouver une liquidité suffisante. Cette

stratégie contraint en effet l'intermédiaire financier ou l'assureur à prendre régulièrement une position sur ce marché. En effet, la position à prendre sur le contrat à terme ne dépend pas uniquement du prix ou d'une variation de prix de ce contrat. Elle est également fonction du contrat à terme sur le prix. Ainsi, la volatilité du contrat à terme sur le prix génère une certaine liquidité sur le contrat à terme sur le rendement<sup>1</sup>. De plus, un autre phénomène peut intervenir en faveur de ce contrat si ce modèle est mis en œuvre. Le contrat à terme sur le rendement capterait, en sus de son utilisation directe, l'intérêt des producteurs pour le contrat à terme sur le chiffre d'affaires, l'option et également les contrats d'assurance. Il est impossible de mesurer cette influence mais elle devrait être très positive. Toutefois, cette limite invite à rechercher et étudier des alternatives. Ce pourrait être des contrats de gré à gré sur le rendement ou encore des contrats sur indices climatiques.

La seconde limite porte sur la modélisation du marché financier. Il est clair que le modèle de Black and Scholes est insuffisant pour modéliser l'évolution des prix des contrats à terme agricoles. Ces hypothèses, bien que traditionnelles, ont été utilisées dans ce modèle comme une étape nécessaire de cette recherche originale. Dans ce cadre, les résultats sont particulièrement intéressants avec une convergence assurée de la stratégie. Une modélisation plus fine du marché financier, comme dans le cas du modèle de Merton, introduit une erreur dans la stratégie de gestion. L'étude de cette erreur pourrait donc faire l'objet d'une recherche complémentaire, en particulier dans le cas de l'option sur le chiffre d'affaires.

La troisième limite porte sur l'intermédiaire financier. Dans beaucoup de cas, l'agriculteur accède aux marchés financiers par un courtier ou une coopérative. Cet intermédiaire traditionnel informe, facilite l'accès aux marchés financiers et permet, par la concentration de la demande de contrats, de réduire les coûts de transactions. Mais le modèle et les contraintes des marchés financiers impliquent bien plus de l'intermédiaire financier. Il doit être capable de réaliser une réelle transformation financière en mettant en œuvre la stratégie de gestion continue. De plus, il a été montré que l'erreur est d'autant plus faible que les positions sont ajustées régulièrement. Si on met en relation cette idée avec la quotité imposée sur les marchés financiers, il résulte que l'intermédiaire doit être capable de vendre un volume suffisant de contrats dérivés ou de contrats d'assurance.

---

1. Le volume de transaction sur le contrat à terme sur le rendement est estimé dans la section 2.2.3 en fonction de la volatilité du contrat à terme sur le prix et de la fréquence des ajustements.

### 6.2.2 Les limites du modèle liées au portefeuille d'assurance

La limite majeure liée au portefeuille d'assurance est l'hypothèse d'absence d'aléa moral, d'antisélection et d'asymétrie de l'information. Selon Miranda et Glauber, ce risque est moindre que la composante systémique mais est tout de même important. Le modèle ne le prend pas en compte mais pourrait néanmoins, d'une certaine manière, en faciliter le contrôle. En effet, par une meilleure gestion du risque systémique, le modèle réduit le flou entre les risques systémiques, les risques individuels et l'aléa moral. De plus, le modèle n'impose pas de contrainte particulière sur la fonction d'indemnité  $I(p)$  du contrat. Le modèle donne donc une meilleure visibilité et offre la possibilité de choisir un  $I(p)$  qui minimise cet aléa moral.

La mesure du risque systémique est réalisée par la fonction de densité conditionnelle. Cette densité dépend des prix à l'échéance de  $F_T$  et de  $Y_T$ . Ce sont deux variables qui permettent une bonne approximation de la mesure du risque systémique. Le modèle suppose pourtant que cette mesure soit exacte, ce qui invite à une recherche complémentaire sur l'erreur de cette mesure. Par contre, le modèle permet d'anticiper le comportement de l'erreur liée à la mutualisation (la variance de  $\varepsilon_N$ ). Cette erreur traduit simplement la nécessité de détenir un portefeuille homogène suffisamment grand pour construire un contrat d'assurance.

Il est clair que le montant de la prime du contrat d'assurance dépend des prix des contrats à terme. Le montant de la prime est donc variable d'une année sur l'autre. Cependant, si la souscription est précoce (l'instant 0), la prime devrait être stable. En effet, plus la date de souscription est précoce, moins les marchés ne disposent d'informations sur les résultats en  $T$ , plus les anticipations du marché sont proches de la valeur moyenne historique actualisée. Une souscription précoce présente aussi l'intérêt pour l'assureur de limiter l'asymétrie d'information.

La technique de gestion du contrat d'assurance nécessite la double compétence finance et assurance. Cette approche profile donc une combinaison future des savoir-faire des banques et des assurances.

### 6.2.3 Les spécificités des différentes productions

Le modèle considère principalement un risque prix-quantité. Il fait abstraction du risque de qualité, risque important des productions maraîchères et fruitières par exemple. Il ne prend pas en compte non plus le risque lié aux prix des intrants, risque important pour l'élevage hors sol par exemple. Si ce modèle est restrictif quand à son application directe, notons néanmoins

que l'approche utilisée est souple et s'adapte à ces différentes spécificités. Ce modèle a donc besoin, soit d'être généralisé en intégrant ces dimensions supplémentaires, soit d'être adapté aux particularités des productions. Il est donc intéressant d'adapter ce modèle à l'éleveur de porcs en Bretagne.

*L'approche originale de la thèse permet d'établir un résultat pertinent sur la capacité d'un intermédiaire financier ou d'un assureur à gérer un risque systémique multidimensionnel. Ce modèle ouvre ainsi de nombreuses perspectives à l'intermédiaire financier, à l'assureur et aux producteurs. Les principales limites de ce modèle sont tout d'abord liées aux marchés financiers et en particulier à l'existence du contrat à terme sur le rendement. Elles sont liées également au portefeuille d'assurés, notamment à l'aléa moral. Enfin, ce modèle concerne essentiellement un risque prix-quantité et n'intègre pas les dimensions complémentaires. C'est pourquoi, comme le montre cette discussion, il est possible de poursuivre la construction des modèles pour surmonter ces différentes limites. En ce qui concerne la thèse, elle s'attache également à adapter cette approche dans le cas de l'éleveur de porc.*

*Ainsi, la partie suivante propose un test de ce modèle sous cette forme dans le cas du producteur de maïs de l'Illinois. Elle présente également différentes extensions de ce modèle pour le producteur de porcs Breton et réalise les tests nécessaires.*

**Quatrième partie**  
**Applications et tests**



# Chapitre 1

## Test sur les données maïs de l'Illinois

Le but de ce chapitre est de réaliser plusieurs tests de la méthode théorique sur les céréales. Les risques du producteur de céréales comportent les propriétés proches du modèle théorique avec un aléa sur le prix et sur le rendement. En particulier, les tests permettront de vérifier si la gestion de l'option sur le chiffre d'affaires et le contrat d'assurance rendement par une entité privée sont envisageables. Ce chapitre s'intéresse au maïs parce qu'un **contrat à terme sur le rendement de cette production a été coté sur le CBOT pendant les années 1995–2000. L'État de l'Illinois est choisi pour deux raisons. Premièrement, le rendement maïs de cet État était coté et les données ont pu être obtenues. Deuxièmement, une visite à l'Université de Urbana-Champaign a permis d'obtenir les rendements historiques de cet État.**

Ce chapitre réalise ainsi deux types de tests. La première partie propose un test de la fonction conditionnelle des rendements agricoles de l'Illinois. Il dérive le prix du contrat d'assurance instantané, et le compare à la prime calculée sur les données réelles. Dans la seconde partie, les tests sont liés aux marchés financiers, sous les hypothèses de Black and Scholes. Elle teste la gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires, l'option et la gestion du contrat d'assurance.

### 1.1 Test du prix du contrat d'assurance instantané

Dans cette partie, l'objectif est de construire un modèle empirique qui permet de calculer le prix du contrat d'assurance instantané du producteur  $j$  (noté  $Pr^j(F_T, Y_T)$ ). Il est déduit du modèle théorique défini dans le chapitre



4 de la partie développement théorique (III). La première section réalise une description des données sur les rendements agricoles historique de l'Illinois. La deuxième section décrit les tests effectués et pose leurs limites. La troisième et dernière présente et commente les résultats.

### 1.1.1 Les données rendements de l'Illinois

Cette section réalise une description des données qui seront utilisées dans cette partie. La première sous-section décrit les informations obtenues. Pour que les rendements agricoles des années 1970 ou 1980 puissent être comparés aux rendements agricoles d'aujourd'hui, la deuxième sous-section réalise une projection des rendements agricoles. Enfin, la troisième sous-section réalise, par une analyse statistique, une description des données rendements agricoles projetés des producteurs de l'Illinois.

#### Description des données

L'*University of Illinois Endowment Farm Division* gère depuis 30 ans une base de données sur l'ensemble des exploitants agricoles. Elle contient tous les éléments de gestion depuis la production jusqu'à la commercialisation des productions réalisées. L'extrait de cette base obtenu concerne les rendements agricoles sur le maïs (et le soja) pour cet État américain de 1972 à 2002. Il donne pour chaque année le rendement moyen de l'État et de chacun des 102 comtés. Il informe sur le nombre d'exploitations de chaque comté. Cette information donne une estimation de l'importance relative de chaque comté dans la production de maïs de l'État.

L'extrait de cette base de données contient de plus les rendements individuels pour quatre comtés et sur les années 1972 à 1999 (Adams, La Salle, Champaign et Lincoln). Il ne contient pas d'informations complémentaires qui donneraient une indication sur l'importance relative des exploitations. Pour réaliser un test complet, il serait nécessaire d'obtenir un échantillon représentatif des rendements individuels, et qu'il soit réparti d'une manière homogène sur l'État. Il semble évident que ces conditions idéales ne sont pas remplies.

#### Projection des données

Les rendements agricoles augmentent globalement du fait des progrès techniques. Un taux de projection est calculé à partir des rendements de l'État sur la période 1973–2002. Le taux, obtenu par une régression exponentielle des rendements agrégés de l'État, est de  $e^{0,0121}$  soit un taux annuel de

## 1.1. TEST DU PRIX DU CONTRAT D'ASSURANCE INSTANTANÉ 157

1,22%. Tous les rendements individuels et ceux des comtés sont projetés sur cette base sur l'année de référence 2002.

### Statistiques descriptives des données

Le rendement agricole projeté moyen des producteurs de l'Illinois est de 144,95 bushels par acre sur la période allant de 1972 à 2002. La variabilité des rendements annuels moyens de l'État, notés  $Y_t$ , est forte avec un écart type sur cette même période de 20,23. Ces variations reflètent le niveau de la composante systémique du risque sur le rendement agricole. Les risques sur le rendement agricole des producteurs de maïs de l'Illinois sont donc des risques systémiques souvent considérés comme non assurables.

Notons également que les 4417 exploitations de la base de données sont réparties de manière très inégale sur les différents comtés<sup>1</sup>. Pour preuve, quatorze comtés détiennent moins de dix exploitations et huit en contiennent plus de cent. Ainsi, l'importance relative de chaque comté doit être prise en compte et est définie dans les calculs par son nombre d'exploitations.

Les rendements moyens annuels des 102 comtés, notés  $Y_{it}$ , sont fortement corrélés aux rendements moyens annuels de l'État. Les corrélations des comtés sont comprises entre 0,51 et 0,94 (avec le premier décile à 0,69 et le dernier décile à 0,91). La corrélation moyenne des comtés est de 0,84. La dispersion des rendements des comtés est représentée par un diagramme « boîtes à moustaches » (*box-plot*) sur la figure 1.1.

Ce diagramme permet tout d'abord de visualiser les fortes variations des rendements annuels moyens de l'État, avec des cas extrêmes comme les années 1983 ou 1988. Il montre l'importance de l'amplitude des rendements annuels moyens des comtés, de 96 bu/acre en moyenne (ou 60 bu/acre entre le premier et dernier décile). En effet, les conditions de production (sol, climat) sont inégales à l'intérieur même de l'État. Enfin, cette amplitude est variable, comme le confirme par exemple la différence d'amplitude entre 2001 et 2002. Ces différences peuvent s'expliquer par des événements locaux (climat, parasite...) ou par des sensibilités locales différentes face à un même aléa.

De plus, les rendements annuels des exploitations, notés  $Y_{jt}$ , sont également corrélés aux rendements moyens annuels de l'État. Pour l'illustrer, analysons le cas du comté de Champaign<sup>2</sup>. Champaign contient 131 exploi-

1. Deux cartes sont proposées dans l'annexe F. Elles permettent de visualiser les rendements moyens des comtés de l'Illinois pour les années 2001 et 2002.

2. Champaign fait partie des quatre comtés où les données individuelles sur les rendements agricoles des exploitations sont renseignées. Les comtés Adams, La Salle et Clinton contiennent respectivement 40, 146 et 62 exploitations.

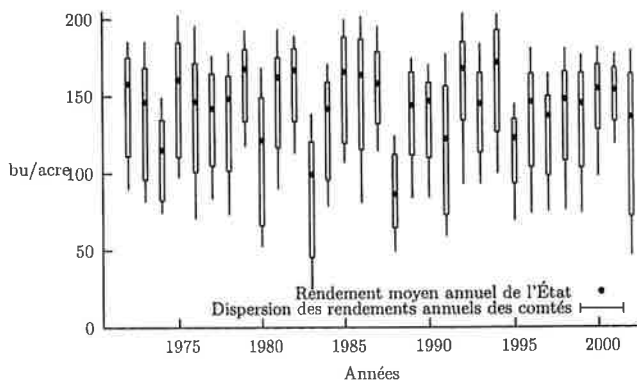


FIG. 1.1 – Box-plot de la dispersion des rendements agricoles annuels moyens des comtés (minimum, premier décile, dernier décile et maximum).

tations et le rendement moyen projeté de ce comté est de 153,21 bushels par acre avec un écart type de 27,89. Le coefficient de corrélation entre les rendements moyens annuels du comté ( $Y_{it}$ ) et les rendements moyens annuels de l'État ( $Y_t$ ) est de 0,90.

Les corrélations entre les rendements annuels des exploitations ( $Y_{jt}$ ) et les rendements moyens annuels de l'État ( $Y_t$ ), sont comprises entre 0,54 et 0,94 (avec le premier décile à 0,66 et le dernier décile à 0,90). La moyenne de ces corrélations est de 0,81. La dispersion des rendements des exploitations du comté de Champaign par rapport aux rendements moyens annuels de l'État est représentée par un diagramme sur la figure 1.2.

Cette figure permet d'abord de visualiser la bonne corrélation entre les rendements annuels des exploitations et les rendements moyens annuels de l'État. Elle illustre également que les exploitations du comté de Champaign ont une performance supérieure à la moyenne de l'État, bien que cet avantage semble se réduire. Enfin, les remarques réalisées dans le cas des rendements annuels moyens de des comtés se vérifient également à l'échelle des exploitations du comté de Champaign.

Ces graphiques mettent en évidence qu'il est impossible de prévoir plusieurs mois à l'avance la distribution des rendements agricoles de la récolte future. Il est donc intéressant de tester la fonction de densité conditionnelle

## 1.1. TEST DU PRIX DU CONTRAT D'ASSURANCE INSTANTANÉ 159

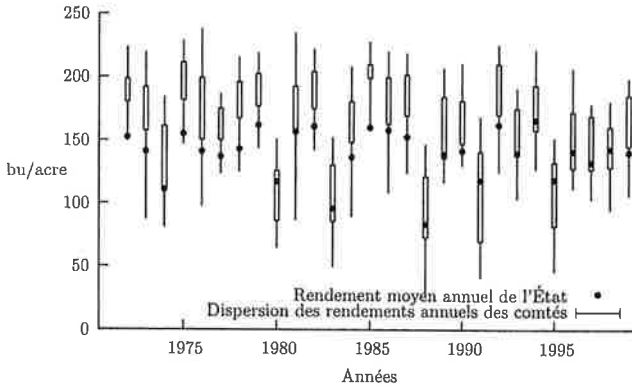


FIG. 1.2 - Box-plot de la dispersion des rendements agricoles annuels des exploitations du comté de Champaign (minimum, premier décile, dernier décile et maximum).

proposée dans le cadre du contrat d'assurance instantané.

### 1.1.2 Description des tests

Le but de cette section est de décrire les tests réalisés sur le prix du contrat d'assurance instantané. Ils permettent de vérifier l'efficacité du modèle de la prime du contrat d'assurance instantané. Ne disposant pas d'un échantillon représentatif des producteurs de l'État d'Illinois, il n'est pas possible de faire un test complet de l'estimation de la prime du contrat instantané. Un test sera néanmoins réalisé avec les données individuelles disponibles. Un autre test utilisera, au lieu des rendements individuels, les rendements des comtés. Ce test ne correspond pas à un réel contrat d'assurance mais à un contrat de type GRP parce qu'il fait référence aux données agrégées des comtés (chapitre 3 de la partie II). Ces deux contrats sont, bien sûr, très différents pour le producteur agricole. Ce test sera néanmoins très intéressant parce que la gestion de ces contrats est similaire.

La première section présente le test relatif à la fonction de densité conditionnelle et la deuxième présente le test sur la prime du contrat d'assurance instantané.

### La fonction de densité conditionnelle

D'une manière semblable à la simulation proposée dans la partie théorique, la modélisation suivante du rendement du comté  $i$  est proposée :

$$Y_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it}Y_t + \gamma_{it}\zeta_{it} \quad (1.1)$$

où  $Y_t$  est le rendement moyen projeté de l'année pour l'État,  $\alpha_{it}$  représente la composante déterministe du rendement projeté  $Y_{it}$ ,  $\beta_{it}$  représente la sensibilité au risque systémique et  $\gamma_{it}$  la volatilité de la composante idiosyncrasique du comté. Les paramètres  $\alpha_{it}$  et  $\beta_{it}$  sont estimés par une régression linéaire entre  $Y_t$  et  $Y_{it}$ <sup>3</sup>. Enfin, le terme  $\zeta_{it}$  représente l'aléa idiosyncrasique du comté. De même pour un producteur  $j$ , on a :

$$Y_{jt} = \alpha_{jt} + \beta_{jt}Y_t + \gamma_{jt}\hat{\zeta}_{jt} \quad (1.2)$$

Comme dans la partie théorique, les termes  $\hat{\zeta}_{it}$  et  $\hat{\zeta}_{jt}$  sont supposés suivre une loi normale centrée réduite.  $\gamma_{it}$  étant l'écart type des  $Y_{it} - \alpha_{it} - \beta_{it}Y_t$ ,  $\hat{\zeta}_{it}$  est estimé de la manière suivante :

$$\hat{\zeta}_{it} = \frac{Y_{it} - \alpha_{it} - \beta_{it}Y_t}{\gamma_{it}} \quad (1.3)$$

Un premier test consiste donc à vérifier l'hypothèse de normalité<sup>4</sup> sur les  $\hat{\zeta}_{it}$ , puis sur les  $\hat{\zeta}_{jt}$ .

### La prime du contrat d'assurance instantané

Le cas simulé suppose une indemnité de la forme  $I(p) = \lambda p$ , où la perte  $p$  est égale à  $P \times \max(y_{j0} - y_j, 0)$  et où  $\lambda$  est une constante dans l'intervalle  $[0, 1]$  (principe indemnitaire oblige). Le rendement minimum  $y_{j0}$  est fonction des rendements antérieurs de chaque producteur dans le même esprit que le APH (*Actual Production History*) utilisé dans les programmes américains. Il est construit d'une manière homogène aux résultats des équations 1.1 et 1.2 et s'écrit :

$$y_{j0} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}y_0 \quad (1.4)$$

3. Les valeurs  $\alpha_{it}$ ,  $\beta_{it}$  et  $\gamma_{it}$  sont, dans les tests, estimées par une régression linéaire sur les dix années précédentes. Par ailleurs, les rendements individuels  $Y_{jt}$  ne sont pas toujours renseignés (les producteurs ne produisent pas forcément du maïs tous les ans). Pour éviter des valeurs abhéroentes sur  $\alpha_{jt}$ ,  $\beta_{jt}$  et  $\gamma_{jt}$ , elles sont estimées sur les dix années précédentes dès lors qu'au moins six valeurs de  $Y_{jt}$  sont fournies.

4. Le test de normalité utilisé est le test d'Anderson-Darling présenté dans l'annexe C.

À partir de l'équation (4.9) de la partie développement théorique, il résulte en  $T$  :

$$g(F, Y, j) = F\alpha\gamma_{jt}(\eta^j(N(\eta^j) - N(\kappa^j)) + f(\eta^j) - f(\kappa^j)) \quad (1.5)$$

où  $\eta^i$  représente la quantité  $\frac{y_{i0} - \alpha_i - \beta_{it}Y}{\gamma_{it}}$  et  $\kappa^i$  représente la quantité  $\frac{-\alpha_i - \beta_{it}Y}{\gamma_{it}}$ . Cette valeur de  $g$  est calculée pour chaque  $i$  dans le cas des comtés et pour chaque  $j$  dans le cas des rendements des agriculteurs. Le test consiste à comparer, pour chaque année, la valeur estimée et la valeur observée de l'indemnité  $I$  soit :

$$I_{\text{estimée}} = \sum_i a_i g(F, Y, i) \quad (1.6)$$

et

$$I_{\text{observée}} = \sum_i a_i P \times \max(y_{i0} - y_i, 0) \quad (1.7)$$

où le facteur de pondération  $a_i$  permet de prendre en compte le poids relatif de chaque comté. Il correspond au nombre de fermes sur le comté divisé par le nombre de fermes de l'État. Dans le cas des rendements des producteurs, les  $a_j$  sont égaux à 1 car il n'y a pas d'information complémentaire, comme par exemple la surface cultivée<sup>5</sup>.

### 1.1.3 Résultats des tests et commentaires

Cette section présente les résultats du test de normalité et du test de la prime du contrat d'assurance instantané.

#### Résultats du test de normalité

Les tests de normalité sont réalisés par année sur les  $\hat{\zeta}_{it}$  et sur les  $\hat{\zeta}_{jt}$ . Comme le montre les résultats présentés sur les tableaux 1.1 (102 valeurs) et 1.2 (339 valeurs), les  $\hat{\zeta}_{it}$  et les  $\hat{\zeta}_{jt}$  ne suivent pas toujours une loi normale.

Les tests de normalité donnent six résultats positifs sur neuf pour les rendements des comtés et un seul résultat positif pour les rendements individuels. L'hypothèse de normalité est donc rejetée, au moins pour les rendements individuels. Notons également que la moyenne et l'écart type de  $\hat{\zeta}_i$  sont dans un

5. Dans d'une étape intermédiaire dans le cas des rendements des comtés, ce test a été réalisé sans introduire le facteur de pondération  $a_i$ . En introduisant ce facteur, l'écart entre l'indemnité estimée et l'indemnité observée a fortement diminué. Il semble donc que cette limite de la base de données sur les rendements individuels soit très importante. Ainsi, en complétant la base de données, les résultats établis à partir des rendements individuels sur la normalité de  $\hat{\zeta}_{it}$  et sur le prix du contrat d'assurance instantané peuvent être améliorés.

année	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
$Y_t$ projetés	172	123	146	137	148	145	155	154	136
moyenne $\zeta_{it}$	0,01	-0,23	-0,25	-0,19	-0,10	-0,24	0,29	0,31	-0,37
écart type	0,90	1,06	1,39	0,86	1,09	1,13	1,25	1,10	1,95
Asymétrie	0,46	-0,026	-1,41	0,072	0,077	-0,53	1,15	0,054	0,410
probabilité	0,215	0,453	0,000	0,464	0,857	0,021	0,000	0,067	0,060
loi normale	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>	non	non	<b>oui</b>	<b>oui</b>

TAB. 1.1 – Test de normalité sur les  $\hat{\zeta}_i$  (rendements des comtés).

année	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
$Y_t$ projetés	172	123	146	137	148	145	155	154	136
moyenne $\zeta_{it}$	-1,20	-1,51	-1,18	-1,17	-0,78	-0,84	-0,77	-0,63	-1,01
écart type	2,82	2,52	1,82	2,18	1,38	1,46	1,40	1,57	1,81
probabilité	0,000	0,000	0,003	0,000	0,106	0,003	0,027	0,001	0,029
loi normale	non	non	non	non	<b>oui</b>	non	non	non	non

TAB. 1.2 – Test de normalité sur les  $\hat{\zeta}_j$  (rendements individuels des agriculteurs).

intervalle assez large autour de leurs valeurs supposées respectivement 0 et 1 (figure 1.3). De plus, comme l'asymétrie est tantôt positive, tantôt négative, il semble difficile de définir une densité plus adaptée que la loi normale. La loi normale sera donc néanmoins utilisée pour poursuivre les tests. Les tests suivants devront donc vérifier que ce choix permet d'obtenir des résultats acceptables.

### Résultat des tests de l'estimation de la prime instantané

Bien que l'hypothèse de normalité ne soit pas recevable dans le cas des rendements individuels des producteurs, le deuxième test est réalisé en utilisant la fonction  $g$ . Les résultats annuels (avec  $y_0 = 135^6$ ) sont présentés sous forme graphique pour les cas des comtés et des agriculteurs individuels sur les figures 1.4 et 1.5. Le second test est également présenté sur le tableau 1.3. L'erreur de l'indemnité estimée peut être visualisée sur les figures par la distance entre le point et la bissectrice. On observe ainsi que l'erreur semble faible dans le cas des rendements individuels et très faible dans le cas des rendements des comtés. Ces résultats sont particulièrement intéressants car

6. Cette valeur est choisie arbitrairement. Elle a été choisie légèrement inférieure au rendement moyen projeté de 144 bushels par acre.

1.1. TEST DU PRIX DU CONTRAT D'ASSURANCE INSTANTANÉ 163

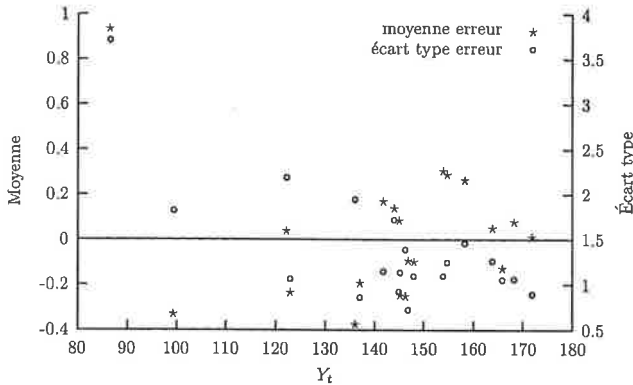


FIG. 1.3 - Analyse de l'erreur  $\zeta_i$  par rapport à  $Y_t$  (1983-2002).

ils montrent que les estimations de la prime instantanée en fonction de  $F_T$  et  $Y_T$  sont proches des valeurs calculées sur les données.

année	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
$Y_t$	172	123	146	137	148	145	155	154	136
prix act	2,44	2,12	2,74	2,16	3,28	2,68	2,75	2,19	1,96
$I$ estimée	72,67	5,33	20,79	8,58	69,22	19,26	27,57	15,00	14,51
$I$ calculée	96,57	8,98	32,42	6,34	91,17	16,16	28,82	13,98	7,36

TAB. 1.3 - Comparaison de l'indemnité estimée et de l'indemnité observée dans le cas des agriculteurs individuels  $y_0 = 135$ .

Le paramètre  $y_0$  étant très important dans ce modèle, la figure 1.6 représente ce même test dans le cas où  $y_0 = 100$  qui est différent du  $y_0 = 135$  la figure 1.5. Cette figure 1.6 utilise, par ailleurs, une échelle logarithmique pour visualiser, non pas l'erreur absolue, mais l'erreur relative de l'estimation de la prime instantanée des agriculteurs. Elle permet de voir premièrement que l'erreur relative est plus importante que dans le cas où  $y_0 = 135$ . Comme l'erreur absolue n'est pas plus importante, l'erreur relative augmente parce que les indemnités sont bien plus faibles. Elle permet également de constater que l'erreur relative est globalement stable autour de la bissectrice, exceptée pour les très petites valeurs de l'indemnité.



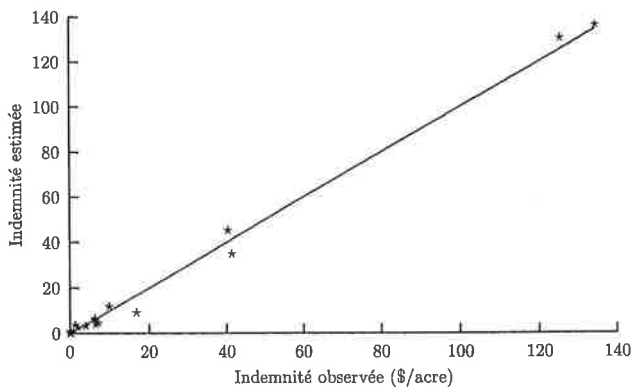


FIG. 1.4 – Comparaison dans le cas des comtés  $y_o = 135$  (1982-2001).

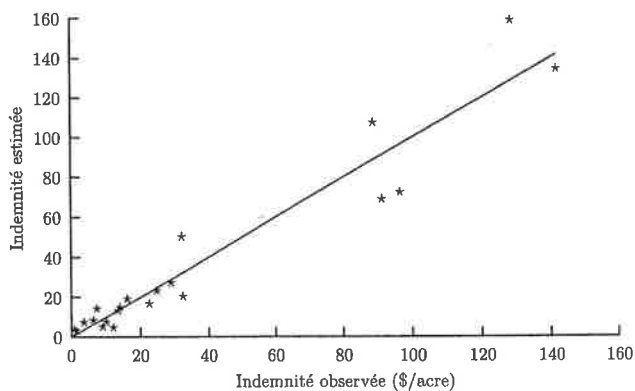


FIG. 1.5 – Comparaison dans le cas des agriculteurs individuels  $y_o = 135$  (1982-1999).

1.1. TEST DU PRIX DU CONTRAT D'ASSURANCE INSTANTANÉ 165

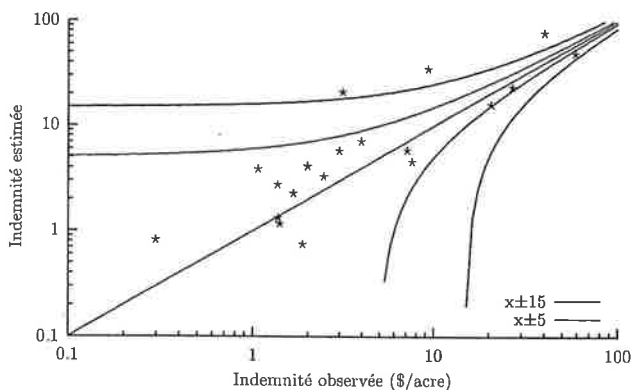


FIG. 1.6 - Comparaison dans le cas des agriculteurs individuels  $y_0 = 100$  (1982-1999).

Il est également intéressant de considérer l'évolution de l'erreur en fonction de  $y_0$ . En effet, si  $y_0$  est petit, le contrat d'assurance couvre l'assuré uniquement en cas de catastrophes. Ce test, dont les résultats sont reproduits sur le tableau 1.4 dans le cas des rendements individuels, montrent que l'écart type de cette erreur est stable.

$y_0$	105	110	115	120	125	130	135	140	145
moy $I$	12,6	15,4	18,7	22,6	27,1	32,3	38,2	45,2	53,2
éc type $I$	19,1	22,3	26,0	30,1	34,6	39,2	44,1	48,9	53,5
moy erreur	2,54	2,40	2,08	1,60	0,92	0,01	-1,14	-2,77	-4,78
éc type er	10,6	11,1	11,5	11,9	12,1	12,3	12,5	12,9	13,3

TAB. 1.4 - Les écarts types de l'indemnité et de l'erreur de l'estimation dans le cas des agriculteurs individuels (1982-1999).

Tout d'abord, il est particulièrement intéressant de constater que l'erreur de l'estimation de l'indemnité sur les comtés est très faible. Il est tout aussi encourageant de voir que l'erreur, dans le cas des rendements individuels, est raisonnable alors même que l'échantillon n'est pas représentatif et ne donne aucune information complémentaire sur le producteur. Par exemple, un facteur de pondération  $a_j$ , correspondant par exemple à la surface cultivée, permettrait d'améliorer les résultats. Malgré l'hypothèse de normalité

des  $\zeta$ , les résultats sont pertinents et permettent de conclure que l'approche proposée dans le développement théorique est satisfaisante.

Par ailleurs, l'erreur absolue de ce modèle semble stable par rapport au choix de  $y_0$ . Cela implique que l'erreur relative obtenue sera d'autant plus importante que  $y_0$  est faible. Ainsi, en l'état, le test ne permet pas de valider cette méthodologie dans le cas d'une assurance catastrophe.

## 1.2 Tests de la gestion de ces contrats sur les marchés financiers

L'objectif de cette seconde partie est de tester la gestion financière des différents contrats étudiés. Il s'agit du contrat à terme sur le chiffre d'affaires, de l'option de vente sur le chiffre d'affaires et du contrat d'assurance sur le rendement. La première section décrit les données du Chicago Board of Trade utilisées dans les tests. La deuxième section réalise une description détaillée des trois séries de tests à réaliser. Enfin, la troisième section présente et commente les résultats.

### 1.2.1 Les données du CBOT

Les données du Chicago Board of Trade utilisées sont les cotations du contrat à terme sur le prix du maïs et du contrat à terme sur le rendement maïs de l'Illinois sur la période 1995–2000. Les cotations concernent cinq échéances du contrat à terme sur le rendement<sup>7</sup> et trente cinq échéances sur le prix<sup>8</sup>. La valeur d'une cotation sur le prix correspond au prix de mille bushels (unité de masse utilisé aux États Unis) et la valeur d'une cotation sur le rendement correspond au rendement de 10 acres.

Les échéances les plus liquides pour le contrat à terme sur le rendement sont janvier 1997 et janvier 1998 avec respectivement 42 et 140 contrats échangés. On note également que le taux  $R$  utilisé en 1996 est de 5,14% et, celui utilisé en 1997 est de 5,20% (Source : *Econstat, US treasury Instrument*).

### 1.2.2 Description des tests

Les trois séries de tests concernent respectivement la gestion du contrat à terme sur le chiffre d'affaires, l'option de vente et le contrat d'assurance

7. septembre 1996, janvier 1997, septembre 1997, janvier 1998, septembre 1998, janvier 1999 et janvier 2000.

8. mars mai, juin, juillet, septembre, novembre et décembre de chaque année.

rendement. Ils sont réalisés en utilisant exactement les stratégies présentées dans la partie théorique. Les paramètres du test sont estimés sur les contrats à terme de l'année précédente, et sont présentés sur le tableau 1.5<sup>9</sup>. La méthode d'estimation des paramètres d'un mouvement brownien géométrique à partir de cotations est supposée connue (Hull, 2000). Grâce à leur équivalence, la covariance instantané entre les deux mouvements browniens est estimée par le coefficient de corrélation entre  $F_t$  et  $Y_t$  (cf Annexe B). La première série de tests considère l'échéance de janvier 1997 pour le rendement, et l'échéance du 19 décembre 1996 pour le prix. La deuxième série considère respectivement les échéances de janvier 1998 et du 19 décembre 1997. Les échéances des contrats à terme sur le chiffre d'affaires sont donc fixées au 19 décembre 1996 pour la première série et 19 décembre 1997 pour la deuxième. Les ajustements des positions sont réalisés chaque jour de cotation, au cours de clôture.

	paramètres $F_t$		paramètres $Y_t$		Corrélation	Taux
	$\mu_F$	$\sigma_F$	$\mu_Y$	$\sigma_Y$	$\rho$	$r$
éch 19 déc 1996	0,07	0,268	-0,06	0,0556	-76,68%	5,07
éch 19 déc 1997	-0,082	0,244	-0,019	0,0580	-93,15%	5,02

TAB. 1.5 – Les paramètres estimés du marché financier utilisés dans les tests.

Pour le contrat d'assurance, les paramètres choisis sont les paramètres estimés du comté de Champaign donnés dans le tableau (estimation réalisée dans le cadre de la partie précédente de ce chapitre).

Champaign	1996	1997
$y_{i0}$ avec $y_0 = 135$	141,88	141,28
$y_{i0}$ avec $y_0 = 120$	123,60	123,83
$\alpha$	80%	80%
$\beta_i$	1,22	1,23
$b_i$	-22,67	-23,71
$\gamma_i$	14,39	14,39

TAB. 1.6 – Les paramètres du comté de Champaign, Illinois.

9. Les paramètres utilisés sont estimés sur les contrats de l'année précédente pour approcher les conditions réelles.

### 1.2.3 Résultats des tests et commentaires

Pour faciliter la lecture, les résultats des trois tests sont, tout d'abord, présentés sous forme graphique pour l'échéance du 19 décembre 1997. La figure 1.7 représente l'évolution du prix du contrat à terme sur le chiffre d'affaires et le résultat de la stratégie de gestion associée. La valeur initiale correspond à l'espérance d'un chiffre d'affaires par acre de \$382,61. Au final, le contrat à terme sur le chiffre d'affaires donne un résultat de \$319,28 et la stratégie un résultat de \$314,44. L'erreur de cette stratégie est donc de \$4,84, soit une erreur relative de 1,26% par rapport à la valeur initiale. Ce graphique permet également de visualiser l'évolution de l'erreur au cours du temps. Il semble que son évolution soit régulière et quasi indépendante de l'évolution de  $F_t$  ou de  $Y_t$ . Ainsi cette erreur provient probablement de l'erreur d'estimation des paramètres des sous-jacents et/ou de leurs variations d'une année sur l'autre.

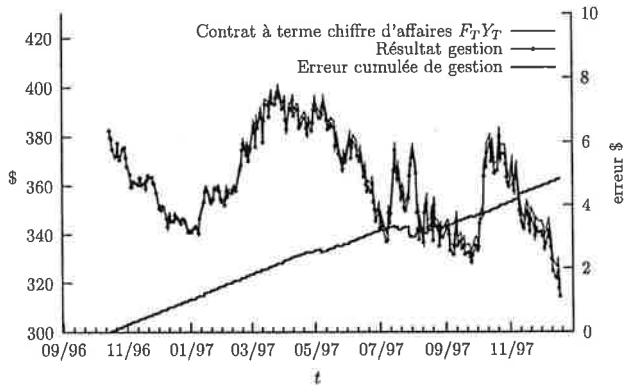


FIG. 1.7 – Test de la stratégie de gestion du chiffre d'affaires (19 déc 1997).

La figure 1.8 donne le résultat de la gestion de l'option de vente sur le chiffre d'affaires avec un prix d'exercice par acre de \$350. La valeur initiale de l'option est de \$10,22 et sa valeur finale est de \$30,71. Le résultat de la stratégie est de \$26,54 soit une erreur de \$4,16. Comme le modèle théorique l'anticipait, l'erreur est plus importante. L'erreur créée entre deux ajustements de positions est irrégulière et peut être très importante (jusqu'à \$0,30 dans le test présenté ; soit une erreur quotidienne maximale de 3% par rapport

au prix initial de l'option). Deux variables permettent de l'expliquer : l'écart de prix du sous jacent entre les deux ajustements et également le gamma de l'option. La régression retenue (parmi les regressions de degré inférieur ou égal à trois, logiciel MINITAB) entre l'erreur  $\epsilon$  et ces deux variables donne l'équation suivante avec un  $R^2$  de 90,4% :

$$\epsilon = 87619\gamma_P + 2881\gamma_P\Delta_{FY} - 4689\gamma_P\Delta_{FY}^2 + 0,0011$$

où  $\gamma_P$  est le gamma de l'option de vente et  $\Delta_{FY}$  l'écart de prix du sous-jacent entre les deux ajustements successifs de positions. Ce résultat est illustré sur la figure 1.9. Ainsi, il est possible de mieux contrôler l'erreur si la fréquence des ajustements peut varier en fonction de  $\gamma_P$  et de  $\Delta_{FY}$ .

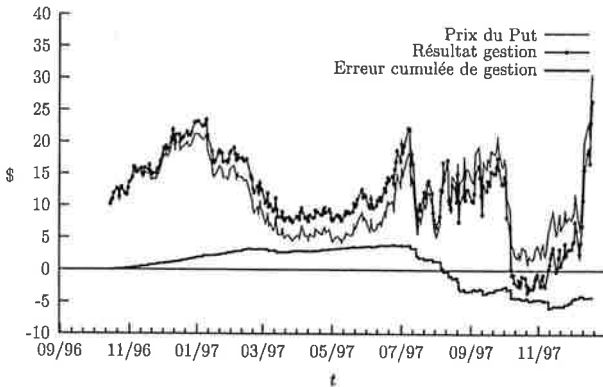


FIG. 1.8 – Test de la stratégie de gestion de l'option de vente sur le chiffre d'affaires avec un prix d'exercice de \$350 (19 déc 1997).

La stratégie de gestion du contrat d'assurance est présentée sur la figure 1.10 où les paramètres utilisés sont ceux du compté de Champaign (tableau 1.6). La valeur initiale de ce contrat, noté  $X_t$  dans la partie théorique, est de \$18,31 et sa valeur à l'échéance est de \$26,05. Le résultat de la stratégie de gestion de ce contrat donne un résultat de \$26,68, soit une erreur de \$0,64. Il peut être observé que l'erreur est bien moins importante que dans le cas de l'option<sup>10</sup>.

10. Il serait bien sûr intéressant d'étudier la dérivée seconde de  $X_t$  par rapport aux sous-

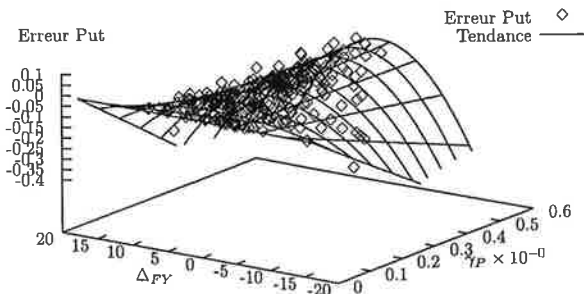


FIG. 1.9 – Estimation de l'erreur quotidienne de la stratégie de gestion de l'option en fonction de l'écart de prix du sous-jacent et du gamma de l'option ( $E = 3.5 \times 10^6$ ).

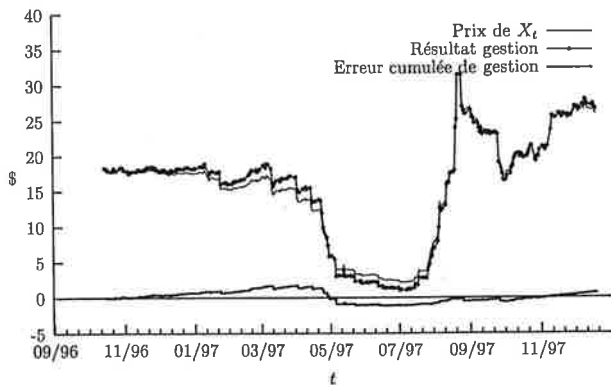


FIG. 1.10 – Test de la gestion du contrat d'assurance sur le rendement avec  $y_0 = 135(\text{bu}/\text{acre})$ .

Les tableaux 1.7 et 1.8 synthétisent les résultats des différents tests pour l'échéance de 19 décembre 1997 et l'échéance du 19 décembre 1996. Ils montrent des résultats encourageants alors que le contrat sur le rendement du Chicago Board of Trade n'a pas eu la liquidité nécessaire. Les stratégies de gestion financières énoncées dans la partie théorique sont donc pertinentes à la fois pour le contrat à terme sur le chiffre d'affaires, l'option, et le contrat d'assurance sur le rendement.

	FY	Put		Assurance	
		E=350	E=320	$y_0 = 135$	$y_0 = 120$
Prix initial	382,21	10,23	2,19	18,31	2,85
Prix échéance	319,28	30,71	0	26,05	5,62
Rés stratégie	314,44	26,55	-0,48	26,68	5,05
Erreur	4,84	4,16	0,48	-0,64	0,57

TAB. 1.7 - Résultats des différentes stratégies de gestion (éch 19 déc 1997).

	FY	Put		Assurance	
		E=350	E=300	$y_0 = 135$	$y_0 = 120$
Prix initial	404,16	8,46	3,60	8,72	0,10
Prix échéance	408,36	0	0	10,08	1,03
Rés stratégie	406,74	3,17	0,51	11,7	0,55
Erreur	1,62	-3,17	-0,51	-1,71	0,45

TAB. 1.8 - Résultats des différentes stratégies de gestion (éch 19 déc 1996).

Les résultats des tests du prix du contrat d'assurance instantané et des stratégies de gestions financières prouvent que les différentes stratégies de gestions théoriques sont acceptables. Les tests donnent ainsi un résultat très important : la gestion d'un contrat d'assurance sur le rendement agricole par une entité privée est envisageable. Notons par ailleurs que ces résultats peuvent encore s'améliorer. Tout d'abord, un échantillon de données sur les rendements individuels plus représentatif et mieux fourni donnera certainement de meilleurs résultats. De plus, ces tests sont des applications directes des résultats théoriques qu'une analyse empirique complémentaire permettrait d'affiner. Ces tests pourront être également complétés

jacents  $F_t$  et  $Y_t$  et de le comparer avec le gamma de l'option. Cette étude permettrait peut être de donner une explication mathématique au fait que l'erreur soit moindre dans le cas de la gestion du contrat d'assurance



*d'une étude sur les coûts de gestion et d'une autre sur la demande de ces contrats. Pour le contrat d'assurance il est important d'étudier l'importance de l'aléa moral en fonction de ses paramètres ( $\lambda$  et  $y_0$ ).*

*Les tests réalisés dans ce chapitre concernent uniquement le cas des producteurs de céréales qui ont accès à un contrat à terme sur le rendement. La méthodologie et les résultats théoriques de la thèse ont d'autres applications. En particulier, le chapitre suivant développe quelques applications pour l'éleveur de porcs Breton.*

## Chapitre 2

# Applications aux éleveurs de porcs

Les résultats de la partie théorique s'appliquent également à l'éleveur de porcs breton. L'objectif de ce chapitre est de proposer des applications en matière de lissage, de contrats financiers et de contrats d'assurance. La première partie de ce chapitre s'intéresse au contexte de l'éleveur de porcs. La deuxième définit un lissage de la marge systémique en application du chapitre 1 de la partie développement théorique (III). La marge étant un risque important de l'éleveur de porcs, une option sur la marge est tout d'abord étudiée dans la troisième partie. Ensuite, le contrat dérivé sur le prix moyen du porc est testé en application du chapitre 3 de la partie développement théorique (III). La cinquième et dernière partie traite de l'assurance sur le chiffre d'affaires ou sur la marge.

### 2.1 Contexte de l'éleveur de porcs Breton

L'objectif de cette partie est de présenter le contexte de l'éleveur de porcs. La première section présente la vie d'un porc d'élevage standard et les principaux chiffres technico-économiques majeurs de la filière. Les éleveurs de porcs représentent une population diverse, c'est pourquoi la deuxième section présente une typologie des producteurs. La troisième section propose une description des principaux risques financiers du producteur de porcs. La quatrième et dernière section présente les marchés à terme potentiellement utiles à la gestion financière de l'éleveur ou à une intermédiation financière.

### 2.1.1 La vie du porc

La vie d'un porc « standard » dans un élevage est résumé sur la figure 2.1. Son alimentation se compose essentiellement de céréales (e.g. maïs, colza, blé). Notons, par ailleurs, quelques chiffres clés de la filière porcine. Une

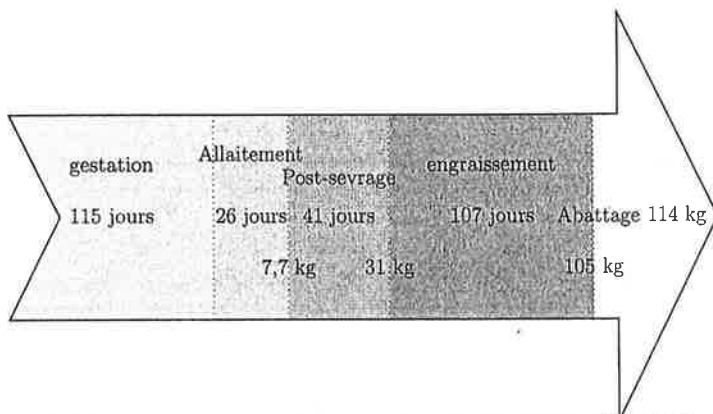


FIG. 2.1 – La vie d'un porc d'élevage de la saillie fécondante à l'abattage.

truie bretonne produit en moyenne 19,9 porcelets par an et elle consomme en moyenne 1366 kg d'aliment par an. De plus, l'Indice de Consommation technique (IC) d'un porc en post-sevrage est de 1,65 kg d'aliment consommé pour un kg de croissance et celui d'un porc à l'engraissement est de 2,82. Le Taux de Viande Maigre (TVM) est un indice de qualité important. En Bretagne, la norme est de 54 kg par quintal. Il est exprimé en kg de viande maigre par quintal de carcasse. Notons enfin que le prix de l'aliment représente environ 60% du prix de revient d'un porc.

### 2.1.2 Une description des producteurs

La Bretagne compte 8545 sites d'élevages soit 8029 éleveurs en 2001. La production bretonne représente la moitié de la production française (environ 13 millions de têtes sur les quelques 26 millions produit en France et les 200 millions en Europe). 82% des porcs sont produits dans un élevage naisseur-engraisseur ce qui représente le taux le plus élevé d'Europe. Il semble que ce système garantit le meilleur état sanitaire possible, en réduisant les flux entre

les élevages, et donc le transfert des maladies. Outre les élevages naisseurs-engraisseurs, il y a en Bretagne 727 sites d'élevages naisseurs et 3832 sites d'élevages engraisseurs.

En Bretagne, le groupement de producteurs est l'outil d'organisation privilégié. Ces groupements concentrent 97% de la production régionale. Les cinq principaux groupements sont, en quantité de porcs produits, Cooperl, Coopagri, Prestor, Arco, Coop Léon Treger Landivisiau et concentrent à eux seuls plus de la moitié de la production bretonne.

Ilari *et al* (2003) et Gourmelen *et al* (2003) proposent une typologie des producteurs de porcs français, utile pour notre étude. Celle-ci s'organise selon quatre groupes présentés sur le tableau 2.1. Pour les producteurs de porcs de type 1, le porc est un moyen de valoriser la production céréalière. Les exploitations de type 2 sont spécialisées dans le porc, l'atelier porcine est de très grande taille. Les exploitations de type 3 sont de petites tailles. Le porc est l'activité principale mais l'exploitation produit également des bovins. Enfin, les exploitations de type 4 sont diversifiées et ont des ateliers porcins de taille moyenne (600 porcs pour 30% de la marge brute). L'activité principale est le bovin et/ou le lait. Ils produisent également du fourrage et des céréales.

type	effectif	cheptel	autres activités	statut	activité	Total
1	5370	16%	grandes cultures, polyculture-élevage	individuel	naisseur, naisseur/engraisseur, engraisseur	20-1000
2	3530	49%	spécialisée porc	forme sociétaire	naisseur/engraisseur	>1000
3	4130	10%	spécialisée porc, spécialisée bovin, orientée herbivore	individuel	naisseur, engraisseur	<300
4	6250	26%	spécialisée bovin, orientée herbivore, orientée granivore	individuel, GAEC, forme sociétaire	naisseur/engraisseur, engraisseur	100-1000
Total	19280	13,3 millions de têtes				

TAB. 2.1 – Une typologie des producteurs de porcs français (Ilari *et al.*, 2003).

Les producteurs de porcs synchronisent leur production par bandes. Cette division de leur production permet de limiter les risques sanitaires entre les bandes. Cela leur permet également de vendre périodiquement (toutes les une

à trois semaines) leur production par lot homogène et compatible avec une efficacité logistique. C'est ainsi que les producteurs de porcs obtiennent sur un trimestre, un semestre ou une année, un prix unitaire proche de la valeur moyenne du marché sur la même période.

### 2.1.3 La typologie des risques

L'objectif de cette section est de présenter les risques du producteur de porcs breton. La première sous-section présente les risques sur les coûts de production. La deuxième traite du risque de prix sur le porc ou risque de marché.

#### Les risques sur le coût de production

Le risque sur le coût de production est principalement lié au prix des aliments comme le montrent les résultats technico-économiques des élevages porcins en Bretagne (ITP, 2001). Les coûts des aliments et les coûts de revient sont représentés sur la figure 2.2 et donnent un coefficient de corrélation de 0,987. Contrairement aux Pays Bas, la Bretagne n'a pas, dans son histoire récente, été victime d'une catastrophe sanitaire généralisée. Il semble que ce soit le principal mode de production naisseur-engraisseur qui permettrait de limiter ces crises sanitaires. C'est pourquoi, il est possible de considérer que le risque sur le coût moyen de production est assimilable au risque sur le prix des aliments.

Les risques liés au prix des aliments peuvent se concrétiser de plusieurs manières en fonction du mode d'approvisionnement du producteur. Par exemple, beaucoup de producteurs achètent l'aliment régulièrement. D'autres produisent et stockent eux-mêmes tout ou partie des céréales nécessaires à leur production de porcs. Enfin, ils peuvent acheter à la récolte et stocker durant l'année. Dans ce cas, le risque sur le prix des aliments intervient surtout au moment de la récolte ou de la soudure. D'autres producteurs ont des contrats de livraison à prix garanti avec leur coopérative. Quelque soit le mode d'approvisionnement, le risque sur le prix des aliments est très important pour l'éleveur.

#### Le risque de prix

Le prix de référence en Bretagne est obtenu sur le Marché du Porc Breton. Ce marché est basé sur le principe de confrontation de l'offre et de la demande par un système d'enchères électroniques dégressives (marché au cadran). Le Marché du Porc Breton est le seul marché électronique en Europe.

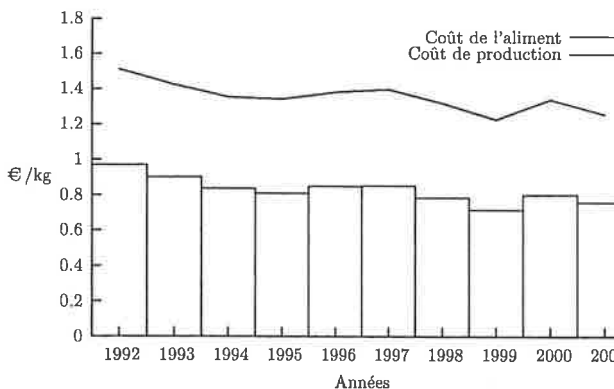


FIG. 2.2 – La relation coût de production et coût des aliments (en Bretagne).

Il se déroule deux fois par semaine (lundi et jeudi) pour un volume moyen hebdomadaire de 60 000 porcs. Le Marché du Porc Breton est le marché de référence en France et l'un des principaux indicateurs européens du prix du porc.

Le Marché du Porc Breton vend les porcs par lot. Leurs caractéristiques, taux de viande maigre et gamme de poids de la carcasse, sont établies et certifiées par Uniporc Ouest. Le prix coté correspond à un lot de qualité standard : le poids de la carcasse se situe entre 75 et 100 kg et le TVM est de 54. Le prix d'un lot ayant des caractéristiques différentes se calcul à partir du prix de référence. Une bonification ou une pénalité, définie à partir d'une grille établie par les professionnels, est ensuite ajoutée au prix de référence.

Les éleveurs produisent par bandes et vendent d'une manière régulière sur le marché. Ce mode de fonctionnement permet au producteur d'obtenir chaque année un prix proche du prix moyen annuel. Néanmoins, comme le montre la figure 2.3, le prix annuel du porc est très volatil. Ce constat introduit la section suivante qui traite des marchés à terme potentiellement utiles pour le producteur de porcs.

#### 2.1.4 Les marchés à terme utiles à l'éleveur de porcs

Plusieurs contrats à terme peuvent être utiles pour le producteur de porcs. La première section présente brièvement les contrats à terme relatifs aux prix

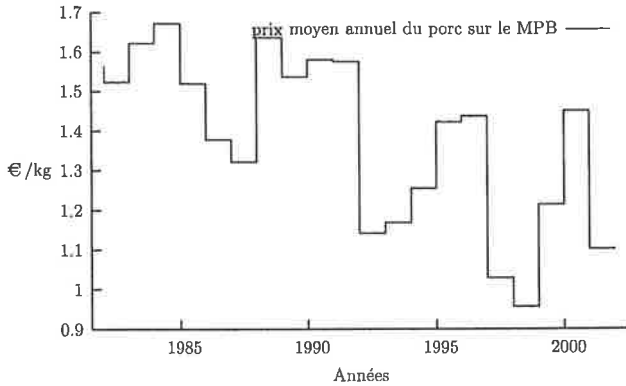


FIG. 2.3 – Évolution du prix moyen annuel de base au Marché du Porc Breton

des intrants alimentaires. La deuxième traite des contrats à terme sur le porc disponibles en Europe.

### Les contrats à terme sur les aliments

Le porc est nourri essentiellement à partir de céréales, qui représentent donc une composante majeure du coût alimentaire. Dans le chapitre 3 de la partie Analyse (II), le modèle de Hart *et al* (2001) est présenté. Les auteurs modélisent le coût de production du porc à l'aide du prix à terme du maïs et du prix à terme du soja et montrent l'intérêt d'inclure les contrats à terme sur les intrants.

Les contrats à terme sur les céréales cotées sur le EuroNext-Liffe (à Paris ou Londres<sup>1</sup>) ou également sur le marché à terme de Hanovre<sup>2</sup> sont donc potentiellement intéressants pour le producteur de porcs breton. Citons par exemple le blé, le maïs, le colza, le tourteau ou l'huile de colza qui peuvent entrer dans la composition de l'alimentation du porc.

1. [www.liffe-commodities.com/french/commodities.aspx](http://www.liffe-commodities.com/french/commodities.aspx)

2. [www.wtb-hannover.de](http://www.wtb-hannover.de)

### Les marchés à termes européens sur le porc

Tout d'abord, le marché à terme de Hanovre propose un nouveau contrat à terme sur le prix du porcelet (depuis décembre 2002). Ce contrat intéresse principalement les élevages naisseurs et les élevages engraisseurs qui représentent 18% des élevages bretons.

Ensuite, il existe deux contrats à terme sur le prix de la carcasse de porc. L'un est à Amsterdam (Euronext<sup>3</sup>) et l'autre à Hanovre. Le Marché à terme d'Amsterdam est un marché à terme où il y a seulement 2% de livraison. Il propose une échéance par mois et la quotité du contrat est de 10 tonnes par contrat. Le marché à terme de Hanovre ouvre une échéance par semaine et la quotité du contrat est de 8 tonnes par contrat. Les faits montrent que seules les échéances relatives à la dernière semaine du mois obtiennent une liquidité non nulle. En 2002, le Marché à terme de Amsterdam a réalisé un volume de transaction de 4 551 contrats et le marché à terme de Hanovre 32 328 contrats<sup>4</sup>. Le marché de Hanovre paraît donc bien plus liquide que celui de Amsterdam.

On observe des différences sur la définition du sous-jacent pour les deux contrats à terme européens. Alors que la gamme de poids de référence du Marché du Porc Breton est comprise entre 75 et 100 kg, elle est de 75 à 95 sur le marché à terme de Amsterdam et de 85 à 100 sur le marché à terme de Hanovre. De même, le TMV du Marché du Porc Breton est de 54 kg par quintal et sur le marché à terme de Amsterdam, il est de 56 sur le marché à terme de Hanovre. Ainsi, en *sus* des différences géographiques, les sous-jacents de Hanovre et de Amsterdam ne correspondent pas aux standard du porc en Bretagne. Les contrats à terme européens ne peuvent donc pas répondre directement aux besoins de gestion de risque des producteurs de porcs bretons.

Après cette analyse du contexte de l'éleveur de porcs breton, la partie suivante propose un outil de gestion de risques utile, simple et efficace : le lissage.

---

3. [www.aex.nl/aex.asp?taal=en](http://www.aex.nl/aex.asp?taal=en)

4. Le rapport entre le volume de contrats échangés sur le marché à terme et la production physique donne une indication de la liquidité du marché à terme. Les calculs donnent pour 2002 un rapport de 0,027 sur le contrat de Amsterdam et de 0,073 sur celui de Hanovre. À valeur de comparaison, le volume de contrats à terme sur le prix du maïs sur le Chicago Board of Trade est 8,5 fois la production des États Unis. Ces chiffres montrent que les liquidités sur les deux marchés à terme européens sur le porc sont faibles.



## 2.2 Test de la provision

La provision pour perte systémique sur le chiffre d'affaires a fait l'objet du chapitre 1 de la partie théorique. Cette étude peut s'appliquer à l'éleveur de porcs breton. Les coûts de production ayant également une forte composante systémique, la provision pour perte systémique sera étudiée dans le cas de la marge de l'éleveur de porcs au lieu du chiffre d'affaires. La première section rappelle quelques résultats de cette provision. La seconde propose un test de la provision pour producteur de porcs. La troisième et dernière partie propose, à cause de contraintes réglementaires, une solution alternative.

### 2.2.1 Rappels conceptuels

Rappelons tous d'abord que cette provision pour fluctuation de la marge systémique a une justification comptable et économique. En effet, les marges fluctuent fortement indépendamment des choix des chefs d'entreprises. Rappelons également que les montants des dotations ou des reprises de la provision pour perte systémique sont déterminés à partir de chiffres de référence régionaux. Les chiffres de référence sont supposés être les chiffres publiés par les EDE et la Chambre d'Agriculture de Bretagne en collaboration avec l'Institut Technique du Porc (2001).

Rappelons également que, suivant la sensibilité de l'entreprise au risque systémique, le producteur peut choisir un coefficient<sup>5</sup> (noté  $\varsigma$ ) qu'il appliquera sur les montants des dotations et des reprises. Le choix du producteur se limite à ce coefficient, ce qui permet de réduire les dérives et les comportements opportunistes, courants dans l'estimation des dotations de provisions. En effet, une fois le coefficient  $\varsigma$  choisi, les montants des dotations et des reprises sont déterminés indépendamment du producteur.

La provision pour perte systémique permet une gestion comptable et fiscale. Le développement théorique mentionnait un dernier aspect : la trésorerie de l'entreprise. En effet, il est possible de joindre une contrainte pour le producteur et une garantie :

- si le montant courant de la provision est positif, le producteur a l'obligation de disposer en face de sa provision de placements liquides et à faible risque ;
- si le montant courant de la provision est négatif, l'accès au crédit est garanti au producteur.

---

5. Ce coefficient est considéré comme un choix long terme en accord avec le principe comptable de la permanence des méthodes.

Enfin, rappelons que la partie théorique introduit un coefficient  $\beta$  qui intervient dans le calcul des dotations. Ce coefficient a pour objectif de maintenir l'équilibre sur le long terme entre les montants des dotations et les montants des reprises.

### 2.2.2 Test de la provision pour le producteur de porcs

Conscient de l'importance de l'aléa sur le coût de production et celui de l'aléa sur le prix du porc pour le producteur de porcs, il est proposé une provision sur la marge systémique. La forte corrélation entre les prix des aliments et le prix de revient permet de définir la marge aléatoire systémique de la manière suivante :

$$M = P - C_A - C_s$$

où  $M$  représente la marge systémique,  $P$  le prix du porc,  $C_A$  le coût alimentaire et  $C_s$  les coûts subsidiaires supposés constants. Ces valeurs sont des moyennes régionales supposées être publiques. La marge du producteur est différente de la marge systémique, du fait de son modèle de production, de commercialisation et d'un aléa individuel.

$$M_i = M + \zeta_i$$

où  $M_i$  est la marge du producteur  $i$  et  $\zeta_i$  est la composante individuelle aléatoire supposée suivre une loi normale de paramètre  $\mu_i$  et  $\sigma_i$ .

Pour illustrer cette provision dans le cas de l'éleveur de porcs, les paramètres  $\mu_i$  et  $\sigma_i$  sont choisis respectivement égaux à -0,02 et 0,05. Par hypothèse, le  $\beta$  est de 0,7 et le producteur a choisi le coefficient  $\zeta$  égal à 1. La figure 2.4 permet de visualiser une simulation réalisée avec ces paramètres.

Ce lissage, comme premier outil de gestion de risque, serait très intéressant pour les producteurs de porcs. La provision mettrait en valeur les principes comptables mais les règles comptables et fiscales ne permettent pas aujourd'hui de la constituer. La Région Bretagne peut initier et défendre cette idée, mais une modification effective de ces règles comptables implique une négociation au niveau national, voire international. Cette contrainte implique la recherche d'une alternative.

### 2.2.3 Un lissage alternatif

La région Bretagne n'a pas pouvoir sur la réglementation comptable et fiscale. Par contre, elle a certainement moyen de favoriser un lissage de la trésorerie pour le producteur de porcs. Par exemple, on peut imaginer que la Région propose un programme de lissage de trésorerie défini sur les mêmes

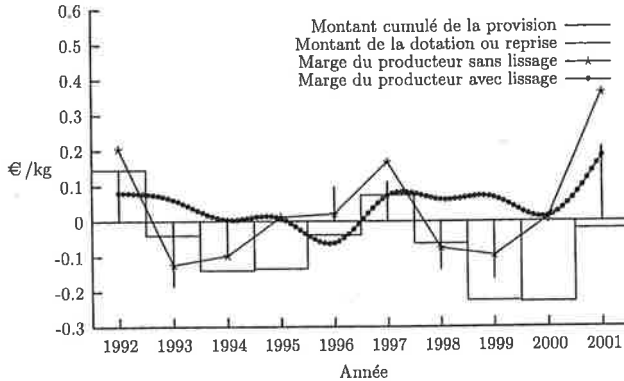


FIG. 2.4 - Simulation de la provision

bases que la provision. De la même manière que le montant courant de la provision peut être soit positif, soit négatif le producteur réalisera soit un placement, soit un emprunt.

Dans ce programme, la Région peut intervenir sur plusieurs aspects. Tout d'abord elle peut définir les modalités d'entrée et de sortie de ce programme et également les modalités qui permettraient de changer le coefficient  $\zeta$ . Elle peut chercher à développer un partenariat entre l'interprofession et une ou plusieurs entité(s) financière(s) pour initier et pérenniser un tel programme. Elle peut aussi, en vertu de l'article L 4221-1 du code général des collectivités territoriales, participer financièrement pour inciter les producteurs à intégrer un tel programme. Par exemple, comme dans le programme de lissage canadien, offrir une bonification de taux à la fois pour le placement et l'emprunt.

Au delà de ces quelques suggestions pratiques, la construction de la provisions pour perte systémique sur la marge constitue une réelle base de travail pour construire un programme de lissage sur la marge des producteurs de porcs. Ce programme de gestion est simple, efficace et interne à l'entreprise. Cette simplicité et le fait que, contrairement au lissage canadien, le producteur a uniquement le choix du coefficient  $\zeta$  limiteront les dérives, dans le cas où la Région fournirait une incitation financière.

## 2.3 Une option sur la marge du producteur de porcs

Comme mentionné dans la partie précédente, le risque de marge est un risque important pour le producteur de porcs breton. Cette partie propose une première analyse de la construction d'une option sur la marge. La première section estime le prix de cette option. La seconde propose une méthode d'évaluation numérique du prix de cette option sur la marge.

### 2.3.1 Évaluation du prix de l'option sur la marge

Afin de pouvoir définir le prix de cette option, la première sous-section propose une modélisation de la marge. La deuxième sous-section réalise l'évaluation mathématique.

#### Modélisation de la marge

Le modèle proposé est un modèle similaire au modèle de Hart *et al* (2001) qui définit le prix du porc à partir du prix à terme et le coût de production à partir des prix des aliments. Le coût alimentaire est défini à partir du prix du maïs et du colza. L'équation de la marge devient :

$$M = \alpha_H H - \alpha_C C - \alpha_R R - \alpha_0 \quad (2.1)$$

où  $M$  est la marge au kg définie pour le contrat,  $H$  représente le prix du Porc (*Hog*),  $C$  représente le prix du maïs (*Corn*),  $R$  représente le prix du tourteau de colza (*Rapeseed*).  $\alpha_H$ ,  $\alpha_C$ ,  $\alpha_R$  et  $\alpha_0$  sont les paramètres de la modélisation de la marge.

#### Le prix d'une option de vente

Considérons une nouvelle fois un modèle de marché financier où les prix à terme suivent des mouvements browniens géométriques. Ces contrats s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} H_t &= H_0 \times \exp\left(\sigma_H W_t^H + \left(\mu_H - \frac{1}{2}\sigma_H^2\right)t\right) \\ C_t &= C_0 \times \exp\left(\sigma_C W_t^C + \left(\mu_C - \frac{1}{2}\sigma_C^2\right)t\right) \\ R_t &= R_0 \times \exp\left(\sigma_R W_t^R + \left(\mu_R - \frac{1}{2}\sigma_R^2\right)t\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Où  $W_t^H$ ,  $W_t^C$  et  $W_t^R$  ont une matrice de covariance  $\Sigma$ . On obtient sous la mesure risque neutre :

$$\begin{aligned} H_t &= H_0 \times \exp\left(\sigma_H W_t^{*H} + -\frac{1}{2}\sigma_H^2 t\right) \\ C_t &= C_0 \times \exp\left(\sigma_C W_t^{*C} + -\frac{1}{2}\sigma_C^2 t\right) \\ R_t &= R_0 \times \exp\left(\sigma_R W_t^{*R} + -\frac{1}{2}\sigma_R^2 t\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Soit  $X$  l'option de vente sur la marge :

$$X_T = (E - M)^+ = \max(E - \alpha_H H + \alpha_C C + \alpha_R R + \alpha_0, 0)$$

où  $E$  est le prix d'exercice. Le prix de cette option  $\pi_0(X)$  est déterminé par  $E_{P^*}[X_T^* | \mathcal{F}_0]$ .

$$\begin{aligned} E_{P^*}[X_T^* | \mathcal{F}_0] &= \int_{I_D} E^* dI \\ &+ \int_{I_D} H_0 \times \exp\left(\sigma_H W_T^{*H} - \frac{1}{2}\sigma_H^2 t\right) dI \\ &- \int_{I_D} C_0 \times \exp\left(\sigma_C W_T^{*C} - \frac{1}{2}\sigma_C^2 t\right) dI \\ &+ \int_{I_D} R_0 \times \exp\left(\sigma_R W_T^{*R} - \frac{1}{2}\sigma_R^2 t\right) dI \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $D$  est l'ensemble des valeurs  $(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$  telles que  $M^* \leq E^*$ . Il est possible d'estimer le prix de  $X_t$  par une méthode numérique. La section suivante propose une évaluation numérique du prix de cette option qui est réalisée sur le logiciel Ox.

### 2.3.2 Évaluation numérique du prix de l'option sur la marge

Cette évaluation est établie par une méthode d'approximation numérique de l'espérance mathématique de l'équation 2.4. Elle est réalisée sur le logiciel Ox (Doornik, 2001). La première sous-section développe la méthodologie utilisée pour l'évaluation numérique. La deuxième définit les paramètres de la modélisation de la marge du producteur de porcs breton et les paramètres des contrats à terme. La troisième et dernière sous-section donne les résultats et quelques commentaires de cette évaluation numérique pour différents prix d'exercice sur la marge.

### Méthodologie de l'évaluation numérique

La méthode numérique est utilisée pour estimer le prix de cette option à partir de l'équation 2.4. Notons qu'il s'agit d'une intégrale, qui peut donc s'approximer par une somme de Riemann. Elle peut s'écrire pour une fonction continue  $h(x)$  de la manière suivante :

$$\lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \sum_i h(x_i) \Delta_i = \int f(x) dx$$

où  $\Delta_i$  (supposé constant) est la distance de l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Notons  $g$  la fonction continue suivante :

$$g(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R}) = (E - M)^+ \quad (2.5)$$

où  $M$  désigne la fonction  $M(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$  définie à partir des équations 2.1 et 2.3, et où  $(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$  est une variable aléatoire normale centrée de dimension 3. On note  $f_{\Sigma,t}(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$  sa fonction de densité à l'instant  $t$  sachant sa matrice de covariance  $\Sigma^6$ .

Il est choisi d'utiliser la même discrétisation pour  $W_T^{*H}$ ,  $W_T^{*C}$  et  $W_T^{*R}$  en les notant respectivement  $w_i$ ,  $w_j$  et  $w_k$ . Cette discrétisation comprend  $n$  points à intervalles réguliers ( $\Delta_w$ ) compris entre une valeur minimale et une valeur maximale opposées (i. e.  $w_0 = -w_n$ , à cause de la symétrie de la loi normale). Soit  $h$  une fonction continue définie de la manière suivante :

$$h(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R}) = g(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R}) \times f_{\Sigma,t}(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$$

Alors, l'évaluation numérique du prix de l'option sur la marge correspond à la somme suivante :

$$\hat{X}_t = \sum_{i,j,k} h(w_i, w_j, w_k) \times \Delta_w^3 \quad (2.6)$$

### Les paramètres de la marge et des contrats financiers

Les paramètres de modélisation de la marge sont établis à partir des chiffres publiés par les EDE et la Chambre d'Agriculture de Bretagne en

6. La densité  $f_{\Sigma,t}(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$f_{\Sigma,t}(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(-\frac{T-t}{2} (W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R}) \Sigma^{-1} (W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})^*\right)$$

où  $|\Sigma|$  désigne le déterminant de  $\Sigma$  et où  $(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})^*$  correspond à la matrice transposée de  $(W_T^{*H}, W_T^{*C}, W_T^{*R})$ .

collaboration avec l'Institut Technique du Porc (2001)<sup>7</sup>.

#### Paramètres de la marge

$\alpha_0$	$\alpha_H$	$\alpha_C$	$\alpha_R$
0,530	1	2,685	1,035

Les paramètres du modèle du marché financier sont établis à partir respectivement des cotations du contrat à terme sur le porc de Hanovre<sup>8</sup> et des contrats maïs et colza sur EuroNext<sup>9</sup>. La méthode d'estimation des paramètres est la même que celle utilisée dans le chapitre précédent pour les paramètres des contrats à terme du Chicago Board of Trade (section 1.2.2). Ces paramètres sont présentés sur le tableau 2.2.

#### Paramètres des Browniens géométriques

	Porcs $H$	Colza $R$	Maïs $C$
Valeurs initiales	1,42	0,167	0,253
$\mu$	-0,163	0,080	-0,336
$\sigma$	0,176	0,060	0,120

#### Matrice de covariance instantané des Browniens

Porcs	1		
Colza	-0,141	1	
Maïs	0,440	0,2242	1

TAB. 2.2 – Paramètres de la simulation de la gestion de l'option sur la marge.

Dans les exemples de calculs réalisés,  $w_i$ ,  $w_j$  et  $w_k$  sont discrétisés par 30 points à intervalles réguliers compris entre -2 et 2. L'approximation de l'intégrale est donc réalisée sur  $30^3 = 9000$  points.

7. Les paramètres du modèle sont calculés à partir des informations suivantes. Le poids moyen de la carcasse est de 90 kg. L'indice de consommation technique est de 1,66 pour un porc en post sevrage de 7 kg à 25 kg et l'indice de consommation est de 2,81 pour un porc en engraissement de 25 kg à 112,8 kg (par hypothèse les 112,8 kg vifs correspondent au 90 kg de carcasse). On définit le coût alimentaire à partir du prix du maïs et du tourteau de soja (respectivement 70 % et 27 % du coût de l'alimentation). Le coût de production du porcelet correspond, dans ce modèle, au prix d'alimentation annuel d'une truie (1366 kg) divisé par le nombre de porcelets produits par an soit 19,9. La différence moyenne entre les coûts alimentaires et les coûts de revient est de 0,530 €/kg, avec un écart type de 0,015. Ces résultats permettent d'accepter l'hypothèse que cette différence est constante. À cette constante, est ajoutée la base moyenne de 0,220 €/kg par rapport au marché à terme de Hanovre.

8. [www.wtb-hannover.de/content/index\\_en.shtml?t2&en](http://www.wtb-hannover.de/content/index_en.shtml?t2&en)

9. [www.liffe-commodities.com/french/commodities.aspx](http://www.liffe-commodities.com/french/commodities.aspx)

### Résultats de l'évaluation numérique et commentaires

Les résultats sont présentés pour un prix d'exercice allant de -50 centimes d'euro à 10 centimes d'euro le kilo. Pour plus de lisibilité des résultats, la quotité du contrat est de 1 kg par contrat et le prix de l'option est exprimé en centimes d'euro. Toujours par une approche numérique, il serait possible

prix d'exercice (€)	-0,50	-0,20	-0,10	-0,05	0	0,05	0,10
prix du Put (centimes)	0,08	2,56	5,23	7,04	9,18	11,63	14,37

TAB. 2.3 – Résultat du prix de l'option de vente sur la marge du porc

de poursuivre cette analyse, et définir une stratégie de gestion de ce contrat. Il serait également intéressant d'introduire dans ce modèle le prix moyen du porc pour mieux répondre à la problématique de l'éleveur de porcs.

## 2.4 Test du contrat dérivé sur le prix moyen

L'objectif de cette partie est de tester la stratégie de gestion continue qui est définie dans le chapitre 3 de la partie développement théorique. Par l'étude du risque de base sur le prix moyen entre le marché à terme de Hanovre et le Marché du Porc Breton, la première section valide la définition de ce contrat. Cette partie permet également de vérifier la faisabilité de ce contrat. Ainsi, la deuxième section décrit les tests à réaliser sur la gestion continue du contrat et la troisième section présente et commente les résultats des tests.

### 2.4.1 Le risque de base sur le prix moyen géométrique actualisé

Le risque de base est un risque potentiel pour l'éleveur breton susceptible de rendre la couverture de risque inopérante. De plus, comme les exploitations porcines produisent des bandes de manière *quasi* continue. Le risque de base étudié doit être le risque de base sur un prix moyen.

L'étude du risque de base sur le prix moyen est également nécessaire pour valider l'usage d'un contrat dérivé sur le prix moyen (contrat dérivé décrit dans le chapitre 3 de la partie développements théoriques). Le contrat dérivé est utile pour l'éleveur de porcs breton uniquement s'il y a une bonne corrélation entre le prix moyen spot et le prix moyen utilisé dans la définition de ce contrat.



L'objectif est d'analyser cette corrélation dans le cas où le contrat dérivé sur le prix moyen défini sur les contrats à terme de Hanovre<sup>10</sup>. Cette analyse est également enrichie de l'étude du risque de base sur le prix moyen arithmétique actualisé.

Dans l'étude réalisée, les prix moyens sont calculés sur une période de trois mois avec d'une part les prix de clôture du Marché du Porc Breton (moyenne arithmétique) et, d'autre part, trois échéances des contrats à terme de Hanovre (la moyenne géométrique puis la moyenne arithmétique). Rappelons que le contrat à terme sur le porc a une échéance par mois. Ainsi, si la période est de trois mois, le prix moyen du contrat dérivé est établi uniquement sur trois valeurs. C'est pourquoi, une durée de trois mois semble être une durée minimale. De plus, le risque de base sur le prix moyen est *a priori* d'autant plus stable que la période est longue. Ainsi, si le risque de base est acceptable sur cette période de trois mois, il le sera *a fortiori* sur une période plus longue.

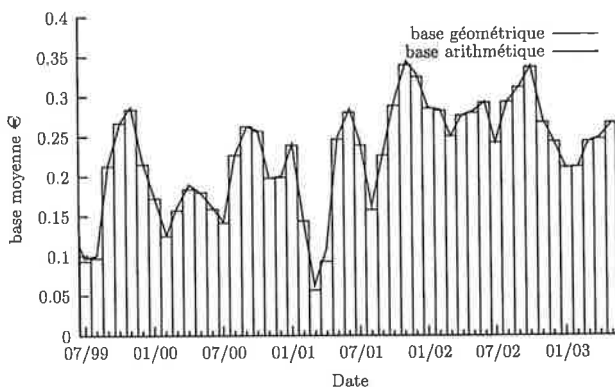


FIG. 2.5 – La base entre la moyenne géométrique actualisée du prix d'Hanovre et du prix moyen MPB

Les tests montrent que le risque de base sur le prix moyen est très inférieur au risque de prix sur le marché du porc breton. La base a un écart type de 0,065 contre un écart type de 0,227 pour la même période sur le Marché du Porc Breton. Le coefficient de corrélation entre le prix moyen arithmétique

10. Une même étude pourrait être réalisée avec les contrats à terme de EuroNext.

	Base géom	Base arith	Différence
Moyenne	0,230	0,232	$-2,2 \cdot 10^{-3}$
Écart type	0,065	0,064	$7 \cdot 10^{-4}$

TAB. 2.4 – *Les caractéristiques de la base du contrat dérivé sur le prix moyen (1999–2003)*

actualisé du Marché du Porc Breton et le prix moyen géométrique actualisé de Hanovre sur 3 mois est de 0,96. Par ailleurs, les résultats montrent que les caractéristiques de la base sur le prix moyen géométrique sont sensiblement les mêmes que celles sur le prix moyen arithmétique. Ainsi, il est possible de considérer indifféremment soit un contrat financier sur le prix moyen arithmétique actualisé ou sur le prix moyen géométrique actualisé (sur trois mois). L'hypothèse utilisée dans le chapitre 3 de la partie développements théoriques est donc acceptable dans le cas de l'éleveur de porcs breton. La stratégie de gestion continue de ce contrat dérivé est testée dans les sections suivantes.

### 2.4.2 Description des tests

La stratégie du contrat dérivé sur le prix moyen géométrique est réalisée sur les contrats à terme sur le porc de Hanovre. Cette stratégie est testée sur une maturité de six mois et sur le prix moyen des trois dernières échéances mensuelles. Les prix d'exercice choisis sont respectivement 1,000€, 1,150€, 1,250€, 1,300€, 1,350€ et 1,450€. Le contrat dérivé est testé sur deux échéances, celles de juin et de septembre 2002.

Les données utilisées sont celles du marché à terme de Hanovre. Les paramètres des mouvements browniens géométriques sont estimés, avec les mêmes méthodes que dans la section 1.2.2, sur les trois contrats sur les échéances de janvier, février et mars 2002. Les paramètres obtenus sont reportés sur le tableau 2.5. Les mêmes paramètres seront utilisés pour les tests sur l'échéance de juin et sur l'échéance de septembre. La quotité choisie du contrat est de 10 000.

### 2.4.3 Résultats des tests et commentaires

Les principaux résultats sont donnés sur le tableau 2.6. Ils montrent que l'erreur de la stratégie est faible relativement au montant de la prime. La figure 2.6 permet de visualiser la performance du test de la gestion du contrat dérivé dans le cas de l'échéance de septembre et d'un prix d'exercice de 1,250€.

## Paramètres des Browniens géométriques

	$H_1$	$H_2$	$H_3$
Valeurs au 3 déc 2001 (éch. juin 2002)	1,335	1,355	1,352
Valeurs au 2 jan 2002 (éch. sept 2002)	1,360	1,348	1,344
$\mu$	-0,340	-0,175	-0,144
$\sigma$	0,214	0,165	0,181

## Matrice de covariance instantané des Browniens

$H_1$	1		
$H_2$	0,985	1	
$H_3$	0,971	0,988	1

TAB. 2.5 – Paramètres de la simulation de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen.

prix d'exercice	éch. juin			éch. septembre		
	prix initial	résultat	erreur	prix initial	résultat	erreur
1,000	1	0	0	4	0	2
1,150	37	0	12	67	0	-7
1,250	174	0	50	233	0	-28
1,300	314	0	70	382	0	-16
1,350	515	31	56	582	0	-11
1,450	1104	1031	121	1140	157	35

TAB. 2.6 – Résultat de la stratégie de gestion du contrat dérivé sur le prix moyen du porc.

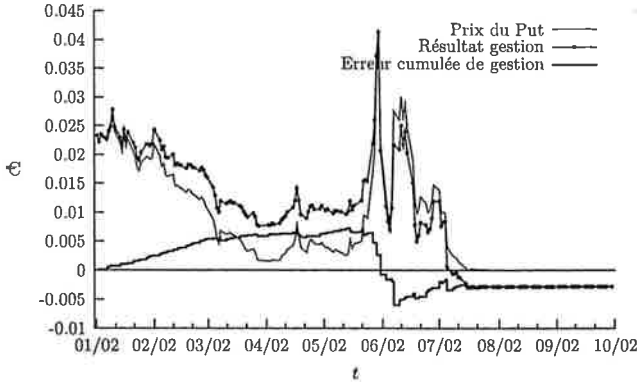


FIG. 2.6 – Test du contrat dérivé sur le prix moyen du porc (l'échéance septembre 2002 et un prix d'exercice de 1,250€).

Ces résultats montrent la performance de la stratégie de gestion continue du contrat dérivé sur le prix moyen. La mise en œuvre d'un tel contrat est donc envisageable.

## 2.5 L'assurance chiffre d'affaires et marge

Il existe en France des contrats d'assurance pour l'éleveur de porcs, mais uniquement sur la mortalité du bétail<sup>11</sup>. Cette section propose une discussion sur la possibilité de construire des contrats d'assurance sur le chiffre d'affaires ou sur la marge. Comme pour beaucoup de risques agricoles, les risques de l'éleveur de porcs comprennent une composante idiosyncrasique et une composante systémique. Comme la partie théorique l'a montré, la condition pour qu'il puisse exister un contrat d'assurance est que l'assureur puisse céder aux marchés financiers la composante systémique. Cette condition est vérifiée dans le cas de l'éleveur de porcs.

Rappelons tout d'abord que la composante prix est très importante dans les risques sur le chiffre d'affaires ou sur la marge de l'éleveur de porc par rapport au risque sur le rendement ou sur la qualité. Cette particularité de

11. Ces contrats existent mais sont peu répandus. Il semble qu'ils soient jugés trop chers ou trop contraignants par les éleveurs.

l'élevage, et notamment de l'élevage porcin, a été présentée dans les sections 1.1.3 et 2.2.1 de la première partie. De même, l'aléa sur les coûts de revient est fortement corrélé aux prix des intrants (cf section 2.3). Ainsi, la composante systémique des risques de l'éleveur de porcs peut être approximée à partir des prix du porc et des prix des intrants. Rappelons enfin que les contrats à terme sur les prix du porc et des intrants existent (cf section 2.1.4).

Cette analyse permet de conclure que l'assureur a la possibilité de transférer la composante systémique du risque d'un contrat d'assurance pour l'éleveur de porcs aux marchés financiers.

Comme la composante idiosyncrasique des risques des éleveurs de porcs est très faible, la construction de contrats financiers adaptés est pertinente. C'est pourquoi, elle constitue la majeure partie des développements de ce chapitre. L'assurance permettrait alors de compléter et diversifier l'offre d'outils de gestion de risques pour les producteurs de porcs breton en prenant en compte la composante (faible) idiosyncrasique.

*Ce présent chapitre montre donc le potentiel d'innovation des contrats financiers et des contrats d'assurances pour la gestion de risque de l'éleveur de porcs breton. Le lissage proposé est un outil simple et efficace et la Région peut favoriser la création d'un tel programme. De plus, il est possible de construire des contrats financiers innovants tels qu'une option sur la marge, un contrat dérivé sur le prix moyen ou encore des contrats d'assurance sur le chiffre d'affaires ou la marge. Le test du contrat dérivé sur le prix moyen est particulièrement intéressant. Enfin, il sera possible également de construire des contrats d'assurance sur le chiffre d'affaire ou sur la marge du producteur de porc breton.*

## Cinquième partie

### Conclusion



## Conclusion

La thèse montre qu'il est possible de gérer les risques de l'entreprise agricole par de nouveaux outils de gestion privés.

Les développements théoriques et les tests sur les données des marchés à terme montrent le potentiel pour un intermédiaire financier de proposer des contrats financiers adaptés aux producteurs. Le contrat à terme et l'option sur le chiffre d'affaires permettent d'offrir aux producteurs agricoles un outil de gestion multidimensionnel. Les développements théoriques montrent également que les assureurs peuvent, si les marchés à terme nécessaires existent, gérer des contrats d'assurance sur des risques qui intègrent une forte composante systémique. Les tests sur les données de l'Illinois montrent que la stratégie proposée laisse un faible risque résiduel à l'assureur. En particulier, ce dernier résultat est un résultat majeur pour plusieurs raisons. Sur le plan théorique, il est nouveau. En effet, la littérature montre généralement les limites de la technique de mutualisation et en déduit que le contrat d'assurance agricole ne peut exister sans l'intervention des pouvoirs publics (Skees et al., 1997). Sur le plan pratique, les enjeux financiers de l'assurance agricole sont très importants pour les agriculteurs, les assureurs et les pouvoirs publics.

Il est également possible de mettre en œuvre un outil de gestion complémentaire simple et efficace : le lissage par une provision comptable. En effet, le document justifie la création d'une provision pour perte systémique sur le chiffre d'affaires tant sur le plan économique que sur les plans comptable et fiscal.

De plus, et compte tenu des spécificités de la filière porcine, plusieurs outils sont proposés à l'éleveur de porcs. Le lissage de trésorerie proposé serait utile pour les producteurs de porcs et techniquement réalisable. La stratégie de l'option sur le prix moyen du porc est également validée pour le producteur de porc breton et l'intermédiaire financier. Ces applications à l'éleveur de porcs ouvrent des perspectives à la fois pour les producteurs de porcs bretons et pour les intermédiaires financiers.

S'il est maintenant établi que les risques agricoles pourraient être gérés par des outils de gestion privés, des travaux complémentaires peuvent être



réalisés. Il serait intéressant de considérer la demande des producteurs agricoles et l'aléa moral pour pouvoir définir les contrats les plus adaptés. Il serait également utile de poursuivre la recherche pour analyser si, dans certains cas, les contrats à terme climatiques peuvent être une alternative satisfaisante aux contrats à terme sur le rendement pour l'assureur. Par ailleurs, les développements appliqués réalisés dans la thèse peuvent être affinés, par exemple en utilisant des jeux de données plus complets. De nombreux développements appliqués peuvent encore être réalisés, notamment pour de nouvelles productions.

Dans une perspective où les risques agricoles augmentent et où les pouvoirs publics se retirent de la gestion des risques agricoles, il semble important de réfléchir à une mise en œuvre de telles solutions. Enfin, ces résultats posent de nouveau la question de l'intervention des pouvoirs publics dans la gestion des risques agricoles et de la nécessité d'un soutien financier aux producteurs.

## Bibliographie

- AASE, K. K. (1988). « Contingent Claim Valuation When the Security Price Is a Combination of an Itô Process and a Random Point Process ». *Stoch. Process. Appl.*, 28:185-220.
- ANDERSEN, L. et ANDREASEN, J. (2000). « Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing ». *Review of Derivatives Research*, 4:231-262.
- ANDERSON, R. W. et DANTHINE, J.-P. (1980). « Hedging and Joint Production: Theory and Illustrations ». *Journal of Finance*, 35(5):487-498.
- ARNOTT, R. J. et STIGLITZ, J. E. (1988). « The Basic Analytics of Moral Hazard ». *Scandinavian Journal of Economics*, 90(3):383-413.
- BABUSIAUX, C. (2000). « L'assurance récolte et la protection en agriculture ». Rapport Technique, Ministère de l'agriculture et de la pêche et Ministère de l'économie des finances et de l'industrie.
- BACHELIER, L. (1900). Theory of Speculation. Dans COOTNER, P., éditeur, *The Random Character of Stock Market Prices*, pages 17-78. MIT Press, 1964, Cambridge, MA.
- BARTHELEMY, B. (2000). *Gestion de Risques: Méthode d'optimisation globale*. Editions d'Organisation, Paris.
- BATES, D. S. (1996). « Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options ». *The Review of Financial Studies*, 9(1):69-107.
- BATES, D. S. (2000). « Post-'87 crash fears in the S&P 500 Futures Option Market ». *Journal of Econometrics*, 94(1-2):181-238.
- BENTON, D., DEVINE, P., et JARVIS, P. (1997). « Credit Derivatives Are Not Insurance Products ». *International Financial Law Review*, pages 29-31.
- BLACK, F. et SCHOLES, M. (1973). « The Pricing of Option and Corporate Liabilities ». *Journal of Political Economy*, 81:637-659.
- BUREAU D'ÉTUDES (2001). « Les Assurances Agricoles ». Master's thesis, EURIA, Université de Bretagne Occidentale, Brest.

- BURGAZ, F. J. (2000). « Gestion des Risques en Matière de Revenu ». Dans *Atelier sur la Gestion des Risques en Matière de Revenu ; Session 4 : Systèmes d'assurance*, pages 1-14, Paris. OECD.
- CHAMBERS, R. G. et QUIGGIN, J. (2002). « Optimal Producer Behavior in the Presence of Area-Yield Crop Insurance. ». *American Journal of Agricultural Economics*, 84(2):320-334.
- CHAUFONT, A. (1884). *Les assurances : leur passé, leur présent, leur avenir au point de vue rationnel, technique et pratique, moral, économique et social, financier et administratif, légal, législatif et contractuel. Etudes théoriques et pratiques sur l'assurance sur la vie...*, volume Tome 1er. Librairie A. Marescq Ainé, A. Chevalier-Marescq, Paris.
- COBLE, K. H., HEIFNER, R. G., et ZUNIGA, M. (2000). « Implication of Crop Yield and Revenue Insurance for Producer Hedging ». *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 25(2):432-452.
- COLLECTIF (2001). *Plan Comptable Général*. Edition Dunod, Paris.
- COLLINS, R. A. (1997). « Toward a Positive Economic Theory of Hedging ». *American Journal of Agricultural Economics*, 79(2):488-499.
- CORDIER, J. E. et GUINVARC'H, M. V. (2002a). « Assurance et Finance pour une Gestion du Risque Agricole : Une Approche Descriptive et Comparative ». *Economie Rurale*, 272(Novembre-Décembre):108-117.
- CORDIER, J. E. et GUINVARC'H, M. V. (2002b). « Innovation en assurance et finance agricole : Implications potentielles aux pays en développement ». Dans *Matières premières et développement*, pages 1-15, Grenoble. GAMMAP, Université Pierre Mendès-France. [www.upmf-grenoble.fr/upmf/recherche/gammap.htm](http://www.upmf-grenoble.fr/upmf/recherche/gammap.htm).
- CORDIER, J. E., GUINVARC'H, M. V., et MOUCHET, C. (2002). « Gestion des Risques Systémiques Agricoles : une Provision pour Fluctuation du Chiffre d'Affaires ». *Revue Française de Comptabilité*, 341:35-38.
- COX, J. C., ROSS, S. A., et RUBINSTEIN, M. (1979). « Option Pricing: A Simplified Approach ». *Journal of Financial Economics*, 7(3):229-263.
- COZIAN, M. (1998). *Précis de Fiscalité des Entreprises*. Edition Litec, Paris, 22e édition.
- DEFRANCE, G., BUBISE, P., et LE ROUX, P. (2002). « Les assurances de l'agriculture ». *L'Argus de l'Assurance*, 6799(supplément):1-25.
- DERMAN, E. et KANI, I. (1994). « Riding on a Smile ». *RISK*, 7(February):32-39. à compléter.
- DOORNIK, J. A. (2001). *Ox an Object-Oriented Matrix Programming Language*. Timberlake Consultants Ltd, London.
- DUFILS, P. et LOPATER, C. (2000). *Mémento Pratique Français Lefebvre*. Editions Francis Lefebvre, Paris.

- DUNCAN, J. et MYERS, R. J. (2000). « Crop Insurance under Catastrophic Risk ». *American Journal of Agricultural Economics*, 82(4):842-855.
- DUPIRE, B. (1994). « Pricing with a Smile ». *RISK*, 7(January):18-20. à compléter.
- DUSAK, K. (1973). « Futures Trading and Investor Returns: An Investigation of Commodity Market Risk Premiums ». *Journal of Political Economy*, 81(6):1387-1406.
- FEDER, G., JUST, R. E., et SCHMITZ, A. (1980). « Futures Markets and the Theory of the Firm under Price Uncertainty ». *The Quarterly Journal of Economics*, XCIV(2):317-328.
- GLOY, B. A. et BAKER, T. G. (2001). « A comparison of Criteria for Evaluating Risk Management Strategies ». *Agricultural Finance Review*, 2001(Spring):37-56.
- GLOY, B. A. et BAKER, T. G. (2002). « The Importance of Financial Leverage and Risk Aversion in Risk Management Strategy Selection ». *American Journal of Agricultural Economics*, 84(4):1130-1143.
- GOODWIN, B. K., ROBERTS, M. C., et COBLE, K. H. (2000). « Measurement of Price Risk in Revenue Insurance: Implication of Distributional Assumptions ». *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 25(1):195-214.
- GOURMELEN, C., TEFFÈNE, O., et RIEU, M. (2003). « Typologie d'élevage porcins français obtenant de faibles coûts de production ». Dans *Journées Recherche Porcine*, pages 195-200.
- GRANT, D. (1985). « Theory of the Firm with Joint Price and Output Risk and a Forward Market ». *American Journal of Agricultural Economics*, 67(3):630-635.
- GUINVARC'H, M. V., CORDIER, J., et JANSSEN, J. (2003). « Management of Agricultural Crop Insurance Contracts: a Theoretical Strategy ». Dans *Seventh International Congress on Insurance: Mathematics & Economics*, pages 1-12, Lyon, France.
- GUINVARC'H, M. V., JANSSEN, J., et CORDIER, J. E. (2004). « Agricultural Finance: Revenue Futures Contract ». *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, pages 1-15.
- HANSON, F. B. et WESTMAN, J. J. (2002a). « Applied Stochastic Processes and Optimal Control: A Practical Introduction to Modeling with Jump-Diffusion Process, Analysis and Computation ». Book draft, University of Illinois, Chicago. [ftp://www.math.uic.edu/pub/Hanson/SIAMbook/stocbook.pdf](http://www.math.uic.edu/pub/Hanson/SIAMbook/stocbook.pdf).
- HANSON, F. B. et WESTMAN, J. J. (2002b). « Jump-Diffusion Stock Return

- Models in Finance: Stochastic Process Density with Uniform-Jump Amplitude». Dans *15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 1–7, South Bend, Indiana, USA. University of Notre Dame. [http://www.nd.edu/~mtns/papers/19046\\_4.pdf](http://www.nd.edu/~mtns/papers/19046_4.pdf).
- HANSON, F. B. et WESTMAN, J. J. (2002c). « Stochastic Analysis of Jump-Diffusions for Financial Log-Return Processes ». Dans *Proceedings of Stochastic Theory and Control Workshop*, pages 169–184, University of Kansas, New York. Springer-Verlag. <ftp://www.math.uic.edu/pub/Hanson/KU01/ku02hwfnweb.pdf>.
- HARDAKER, B. J., HUIRNE, R. B. M., et ANDERSON, J. R. (1998). *Coping with Risk in Agriculture*. CAB International, New York.
- HART, C. E. et BADCOCK, B. A. (2001). « Ranking of Risk Management Strategies Combining Crop Insurance Products and Marketing Positions ». Rapport Technique 01 -WP 267, Iowa State University. <http://www.card.iastate.edu/>.
- HART, C. E., BADCOCK, B. A., et HAYES, D. J. (2001). « Livestock Revenue Insurance ». *Journal of Futures Markets*, 21(6):553–580.
- HARWOOD, J., HEIFNER, R. G., COBLE, K. H., PERRY, J., et SOMWARU, A. (1999). « Managing Risk in Farming: Concepts, Research and Analysis. ». Rapport Technique 774, Economic Research Service, U.S. Department of Agriculture, Washington, DC 20036–5831.
- HERTZLER, G. (1991). « Dynamic Decisions under Risk: Application of Itô Stochastic Control in Agriculture ». *American Journal of Agricultural Economics*, 73(4):1126–1137.
- HESTON, S. L. (1993). « A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options ». *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343.
- HILLIARD, J. E. et REIS, J. A. (1999). « Jump Processes in Commodity Futures Prices and Options Pricing ». *American Journal of Agricultural Economics*, 81(2):273–286.
- HOLTHAUSEN, D. M. (1979). « Hedging and the Competitive Firm under Price Risk ». *The American Economic Review*, 69:989–995.
- HUANG, J.-c., TZENG, L. Y., et WANG, C.-c. (2002). « Can an Optimal Insurance Contract Violate Principle of Indemnity? ». Dans *Financial Crisis and Financial Distress*, pages 1–12, Taipei, Taiwan. NTU International Conference on Finance. <http://www.fin.ntu.edu.tw/~conference2002/proceeding/11-1.pdf>.
- HUETH, B. et LIGON, E. (1999). « Producer Price Risk and Quality Measurement ». *American Journal of Agricultural Economics*, 81(3):512–524.

- HULL, J. C. (2000). *Options, Futures, Other Derivatives*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, fourth edition.
- HULL, J. C. et WHITE, A. D. (1987). « The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities ». *Journal of Finance*, 42(2):281-300.
- HULL, J. C. et WHITE, A. D. (1988). « An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility ». *Advances in futures and options research*, 3:27-61.
- ILARI, E., DARIDAN, D., FRAYSSE, J.-L., et FRAYSSE, J. (2003). « Typologie des exploitations française ayant des porcs : méthodologie, analyse statistique et premiers résultats ». Dans *Journées Recherche Porcine*, pages 187-194.
- INTERNATIONAL COOPERATIVE ALLIANCE (1995). « Statement on the Cooperative Identity ». *ICA News*, 5/6.
- JANSSEN, J. (1992). « Modèle Stochastiques de Gestion d'Actif-Passif pour les Banques et les Assurances ». Dans *Transactions of the 24th international congress of actuaries*, pages 131-140, Montreal. ICA- ACI.
- JOHNSON, L. L. (1960). « Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures ». *Review of Economic Studies*, 27:139-151.
- JUST, R. E., CALVIN, L., et QUIGGIN, J. (1999). « Adverse Selection in Crop Insurance: Actuarial and Asymmetric Information Incentives ». *American Journal of Agricultural Economics*, 81(4):834-849.
- JUST, R. E. et WENINGER, Q. (1999). « Are crop yields Normally distributed? ». *American Journal of Agricultural Economics*, 81(2):287-304.
- KARATZAS, I. et SHREVE, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2e édition.
- KARP, L. S. (1987). « Methods for Selecting the Optimal Dynamic Hedge when Production is Stochastic ». *American Journal of Agricultural Economics*, 69:647-657.
- KAUFMANN, R. K. et SNELL, S. E. (1997). « A biophysical Model of Corn Yield: Integrating Climatic and Social Determinants ». *American Journal of Agricultural Economics*, 79(1):178-190.
- KER, A. P. et COBLE, K. H. (2003). « Modeling Conditional Yield Densities ». *American Journal of Agricultural Economics*, 85(2):291-304.
- KER, A. P. et GOODWIN, B. K. (2000). « Nonparametric Estimation of Crop Insurance Rates Revisited ». *American Journal of Agricultural Economics*, 82(2):463-478.
- KLEBANER, F. C. (1999). *Introduction to Stochastic Calculus with Application*. Imperial College Press.

- KNIGHT, T. O. et COBLE, K. H. (1999). « Actuarial Effects of Unit Structure in the U.S. Actual Production History Crop Insurance Program ». *Journal of Agricultural and Applied Economics*, 31(3):519-535.
- LAMBERTON, D. et LAPEYRE, B. (1997). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. ellipses, Paris.
- LAPAN, H. et MOSCHINI, G. (1994). « Futures Hedging Under Price, Basis, and Production Risk ». *American Journal of Agricultural Economics*, 76(3):465-477.
- LAPAN, H., MOSCHINI, G., et HANSON, S. D. (1991). « Production, Hedging, and Speculative Decisions with Options and Futures Markets ». *American Journal of Agricultural Economics*, 73(1):66-74.
- LI, D.-f. et VUKINA, T. (1998). « Effectiveness of Dual Hedging with Price and Yield Futures ». *The Journal of Futures Markets*, 18(5):541-561.
- MAHUL, O. (1999). « Optimum Area Yield Crop Insurance ». *American Journal of Agricultural Economics*, 81:75-82.
- MAHUL, O. (2000). « Optimum Crop Insurance under Joint Yield and Price Risk ». *The Journal of Risk and Insurance*, 67(1):109-122.
- MAHUL, O. (2001a). « Managing Catastrophic Risk through Insurance and Securitization ». *American Journal of Agricultural Economics*, 83(3):656-661.
- MAHUL, O. (2001b). « Optimal Insurance Against Climatic Experience ». *American Journal of Agricultural Economics*, 83(3):593-604.
- MAHUL, O. (2002). « Hedging in Futures and Options Markets with Basis Risk ». *The Journal of Futures Markets*, 22(1):59-72.
- MAHUL, O. et VERMERSCH, D. (2000). « Hedging Crop Risk with Yield Insurance Futures and Options ». *European Review of Agricultural Economics*, 27(2):109-126.
- MAHUL, O. et WRIGHT, B. D. (2003). « Designing Optimal Crop Revenue Insurance ». *American Journal of Agricultural Economics*, 85(3):580-589.
- MAKKI, S. S. et SOMWARU, A. (2001). « Asymmetric Information in the Market for Yield and Revenue Insurance ». Rapport Technique TB - 1892, Economic Research Service / USDA.
- MALÂTRE, L. (1998). Le Principe Indemnitaire de l'Assurance de Dommages. Dans *Encyclopédie de l'assurance*, pages 789-805. Economica, Paris.
- MAQUET, Y. L. (1994). *Le Risk Management des PME: Guides pratique & Tableau de bord*. Bruylant, Bruxelles.
- MARTIN, S. W., BARNETT, B. J., et COBLE, K. H. (2001). « Developing and

- Pricing Precipitation Insurance». *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 26(1):261-274.
- MARTINEZ, S. M. et ZERING, K. D. (1992). « Optimal Dynamic Hedging Decisions for Grain Producers ». *American Journal of Agricultural Economics*, 74(4):879-888.
- MASON, C., HAYES, D. J., et LENCE, S. H. (2001). « Systemic Risk in US Crop and Revenue Insurance Programs ». Rapport Technique WP 266, Iowa State University. [www.card.iastate.edu](http://www.card.iastate.edu).
- MERCURIO, F. et RUNGALDIER, W. J. (1993). « Option Pricing for Jump-Diffusion: Approximations and Their Interpretation ». *Mathematical Finance*, 3(2):191-200.
- MERTON, R. C. (1976). « Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous ». *Journal of Financial Economics*, 3(1):125-144.
- MEYER, J. et ROBISON, L. J. (1991). « The Aggregate Effect of Risk in the Agricultural Sector ». *American Journal of Agricultural Economics*, 73(1):18-24.
- MIRANDA, M. J. (1991). « Area-Yield Crop Insurance Reconsidered ». *American Journal of Agricultural Economics*, 73(2):233-242.
- MIRANDA, M. J. et GLAUBER, J. W. (1997). « Systemic Risk, Reinsurance, and the Failure of Crop Insurance Markets ». *American Journal of Agricultural Economics*, 79:206-215.
- MOREDDU, C. (2000). « Approches pour la Gestion des Risques en Matière de Revenu dans les Pays de l'OCDE ». Rapport Technique ARG/CA/APM/IRM(2000)1, OCDE.
- MOSCHINI, G. et LAPAN, H. (1995). « The Hedging Role of Options and Futures under Joint Price, Basis, and Production Risk ». *International Economic Review*, 36(4):1025-1049.
- MOSS, C. B. et SHONKWILER, S. J. (1993). « Estimating Yield Distributions with a Stochastic Trend and Nonnormal Errors ». *American Journal of Agricultural Economics*, 75(4):1056-1062.
- MUSIELA, M. et RUTKOWSKI, M. (1997). *Martingale Methods in Financial Modelling*. Applications of Mathematics. Springer, Berlin.
- NAYAK, G. N. et TURVEY, C. G. (2000). « The Simultaneous Hedging of Price Risk, Crop Yield Risk and Currency Risk ». *Canadian Journal of Agricultural Economics*, 48:123-140.
- NELSON, C. H. (1990). « The Influence of Distribution Assumptions on the Calculation of Crop Insurance Premia ». *North Central Journal of Agricultural Economics*, 12(January 1990):71-78.



- NELSON, C. H. et PRECKEL, P. V. (1989). « The Conditionnal Beta Distribution as a Stochastic Production Function ». *American Journal of Agricultural Economics*, 71(2):370-378.
- NIELSEN, A. J. et SANDMAN, K. (1998). « Asian Exchange Rate Options under Stochastic Interest Rates: Pricing as a Sum of Delayed Payment Options ». Rapport Technique, EconPapers.
- PAIVA E PONA, R. (2001). « Les Dérivés Climatiques : des Parapluies Financiers ? ». Rapport Technique, Université Paris 2. <http://www.u-paris2.fr/mja/memoires/depaiva.htm>.
- PETIT, M. (2002). « La nouvelle loi agricole américaine. Quelle leçons tirer du revirement idéologique qu'elle illustre ? ». *Paysans*, 276 (novembre-décembre).
- PHAM, H. (1997). « Optimal Stopping, Free Boundary, and American Option in a Jump-Diffusion Model ». *Applied Mathematics & Optimization*, 35:145-164.
- RAMIREZ, O. A. (1997). « Estimation and Use of a Multivariate Parametric Model for Simulating Heteroskedastic, Correlated, Nonnormal Random Variables: The Case of Corn Belt Corn, Soybean, and Wheat Yields ». *American Journal of Agricultural Economics*, 79(1):191-205.
- RAMIREZ, O. A., MISRA, S., et FIELD, J. (2001). « Are Crop Yields Normally Distributed? ». Rapport Technique, American Agricultural Economics Association, Chicago. [http://agecon.lib.umn.edu/cgi-bin/pdf\\_view.pl?paperid=2483](http://agecon.lib.umn.edu/cgi-bin/pdf_view.pl?paperid=2483).
- RAMIREZ, O. A. et MOSS, C. B. (1994). « Estimation and Use of the Inverse Hyperbolic Sine Transformation to Model Non-Normal Correlated Random Variables ». *working paper*, 21:289-304.
- RAMIREZ, O. A. et SOSA, R. (2000). « Assessing the Financial Risks of Diversified Coffee Production Systems: An Alternative Nonnormal CDF Estimation Approach ». *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 25(1):267-285.
- ROGER, P. (1996). *L'Évaluation des Actifs Financiers - Modèles à Temps Discret*. De Boeck Université, Paris, Bruxelles.
- ROUET, F. (2000). *Guide des Bénéfices Agricoles*. Groupe Edition Législative, Paris.
- RUBINSTEIN, M. (1994). « Implied Binomial Trees ». *Journal of Finance*, 49:771-818.
- SAMUELSON, P. A. (1965). « Rational Theory of Warrant Price ». *Industrial Management Review*, 6:13-33.
- SCOTT, L. O. (1987). « Option Pricing When the Variance Changes Ran-

- domly: Theory, Estimation, and an Application». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(4):419-438.
- SKEES, J. R. (2000). « The Potential Influence of Risk Management Programs on Cropping Decisions ». Rapport Technique, Department of Agricultural Economics, University of Kentucky.
- SKEES, J. R., BLACK, R. J., et BARNETT, B. J. (1997). « Designing and Rating an Area Yield Crop Insurance Contract ». *American Journal of Agricultural Economics*, 79(2):430-438.
- SMITH, V. H., CHOUINARD, H. H., et BAQUET, A. E. (1994). « Almost Ideal Area Yield Crop Insurance Contract ». *Agricultural and Resource Economics Review*, 23(1):75-83.
- STOKES, J. R. (2000). « A Derivative Security Approach to Setting Crop Revenue Coverage Insurance Premiums ». *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 25(1):159-176.
- STOKES, J. R., NAYDA, W. I., et ENGLISH, B. C. (1997). « The Pricing of Revenue Insurance ». *American Journal of Agricultural Economics*, 29(2):439-451.
- TOMASSONE, R., DERVIN, C., et MASSON, J.-P. (1993). *Biométrie: Modélisation de phénomènes biologiques*. Masson, Paris.
- TOMEK, W. G. et PETERSON, H. H. (2001). « Risk Management in Agricultural Markets: a Review ». *The Journal of Futures Markets*, 21(10):953-985.
- TURVEY, C. G. (2001). « Weather Derivative for Specific Event Risk in Agriculture ». *Review of Agricultural Economics*, 23(2):333-351.
- TURVEY, C. G., NAYAK, G. N., et SPARLING, D. (1999). « Reinsuring Agricultural Risk ». *Canadian Journal of Agricultural Economics*, 47:281-291.
- VERCAMEN, J. et PANNELL, D. J. (2000). « The Economics of Crop Hail Insurance ». *Canadian Journal of Agricultural Economics*, 48:87-98.
- VUKINA, T., LI, D.-f., et HOLTHAUSEN, D. M. (1996). « Hedging with Crop Yield Futures: A Mean Variance Analysis ». *American Journal of Agricultural Economics*, 79(4):1015-1025.
- WANG, H. H. (2000). « Zone-Based Group Risk Insurance ». *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 25(2):411-431.
- WU, J. (1999). « Crop Insurance, Acreage Decision, and Nonpoint-Source Pollution ». *American Journal of Agricultural Economics*, 81(2):305-320.
- ZHANG, X. (1993). « Options Américaines et modèles de diffusion avec sauts ». *Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 317(1):857-862.

- ZHANG, X. (1994). « *Analyse Numérique des Options Américaines dans un Modèle de Diffusion avec Sauts* ». PhD thesis, CERMA - Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. <http://pastel.paristech.org/documents/disk0/00/00/01/49/>.

## Sixième partie

### Annexes



## Annexe A

### Démonstration du Lemme 2.3

Cette annexe présente la démonstration du lemme 2.3 de la partie développements théoriques. Il est énoncé de nouveau ci-après :

**Lemme A.1** *Si  $x$  est une variable aléatoire normale centrée  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , alors l'espérance de  $|e^x - 1|$  est égal à  $\sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ .*

**Démonstration :**

Considérons le cas où  $x \geq 0$ . Il résulte que  $|e^x - 1| = e^x - 1$ . L'espérance sur  $[0, +\infty[$  devient :

$$\begin{aligned} E[e^x - 1 | x \geq 0] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (e^x - 1) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}} dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x - \sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ce dernier résultat peut s'écrire grâce à la relation suivante :

$$-\frac{x^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} = -\frac{x^2 - 2\sigma^2 x + (\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(\sigma^2)^2}{2\sigma^2} = -\frac{(x - \sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}$$

Par le changement de variable<sup>1</sup>  $y = \frac{x - \sigma^2}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - 1$ , il résulte que :

$$\begin{aligned} E[e^x - 1 | x \geq 0] &= \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma^2 dy - \frac{1}{2} \\ &= \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1. Il résulte alors que  $dx = \sigma^2 dy$  et que les bornes sont  $-\frac{1}{\sigma}$  et  $+\infty$

En notant  $N(y)$  la fonction cumulative de la loi normale centrée réduite, l'espérance sur  $[0, +\infty[$  devient :

$$\begin{aligned} E[e^x - 1 | x \geq 0] &= \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} [N(y)]_{-\frac{1}{\sigma^2}}^{+\infty} - \frac{1}{2} \\ &= \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} (1 - N(-\frac{1}{\sigma^2})) - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

De même si  $x < 0$ , on a  $|e^x - 1| = 1 - e^x$  et l'espérance sur  $] -\infty, 0[$  devient :

$$\begin{aligned} E[1 - e^x | x < 0] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (1 - e^x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

Par le même changement de variable  $y = \frac{x}{\sigma} - 1$ , il résulte que :

$$\begin{aligned} E[e^x - 1 | x \geq 0] &= \frac{1}{2} - \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{\sigma^2}}^{-\frac{1}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \\ &= \frac{1}{2} - \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} [N(y)]_{-\frac{1}{\sigma^2}}^{-\frac{1}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2} - \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} (N(-\frac{1}{\sigma^2})) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

L'espérance de  $|e^x - 1|$  est égal à la somme des deux espérances qui viennent d'être calculées. Il résulte donc :

$$E[e^x - 1] = \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} (1 - N(-\frac{1}{\sigma^2})) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}} (N(-\frac{1}{\sigma^2})) = \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

Ce résultat termine la démonstration ■

## Annexe B

### Une analyse temporelle du marché financier

Le but de cette annexe est d'établir la relation entre la covariance des deux mouvements browniens ( $\delta$ ) du modèle financier (chapitre 2 partie III) et le coefficient de corrélation des deux contrats. Au delà du résultat lui-même, déjà donné dans la littérature (Hull, 2000), cette démonstration permet de mieux percevoir la relation introduite par  $\delta$  entre  $F_t$  et  $Y_t$ , dont les équations sont ré-explicitées ci-dessous :

$$F_t = F_0 \times \exp\left(\sigma_F W_t^F + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right)$$

$$Y_t = Y_0 \times \exp\left(\sigma_Y W_t^Y + \left(\mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right)t\right)$$

Les variances de  $F_t$  et de  $Y_t$  sont fonctions du temps. La corrélation est donc calculée en un instant donné  $t$  et est notée  $\rho(F_t, Y_t)$ . Elle se définit par le quotient  $\frac{\text{cov}(F_t, Y_t)}{\sqrt{\text{var}(F_t)\text{var}(Y_t)}}$ . La démonstration commence par le calcul de  $\text{var}(F_t)$  :

$$\begin{aligned} \text{var}(F_t) &\stackrel{\text{def}}{=} E\left[\left(F_0 \times \exp\left(\sigma_F W_t^F + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right) - E[F_t]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(F_0 \times \exp\left(\sigma_F W_t^F + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right) - F_0 \times \exp(\mu_F t)\right)^2\right] \\ &= F_0^2 \times e^{2\mu_F t} \times E\left[\left(\exp\left(\sigma_F W_t^F - \frac{1}{2}\sigma_F^2 t\right) - 1\right)^2\right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{var}(F_t) = F_0^2 \times e^{2\mu_F t} \times E \left[ \exp \left( 2\sigma_F W_t^F - 2\frac{1}{2}\sigma_F^2 t \right) \right. \\ \left. - 2 \exp \left( \sigma_F W_t^F - \frac{1}{2}\sigma_F^2 t \right) + 1 \right] \end{aligned}$$

Par la formule d'Itô, on a la relation :

$$E[\exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)] = 1$$

La variance devient :

$$\begin{aligned} \text{var}(F_t) &= F_0^2 \times e^{2\mu_F t} \times E \left[ \exp(2\sigma_F W_t^F - \frac{1}{2}(2\sigma_F)^2 t) \times \exp(\sigma_F^2 t) \right. \\ &\quad \left. - 2 \exp \left( \underbrace{\sigma_F W_t^F - \frac{1}{2}\sigma_F^2 t}_{-1} \right) + 1 \right] \\ &= F_0^2 e^{2\mu_F t} \times (e^{\sigma_F^2 t} - 1) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Par symétrie du problème, on obtient de même :

$$\text{var}(Y_t) = Y_0^2 e^{2\mu_Y t} \times (e^{\sigma_Y^2 t} - 1) \quad (\text{B.2})$$

Pour estimer la covariance entre  $F$  et  $Y$  en 0 et sur la durée  $h$ , le calcul de  $E[F_t Y_t]$  est réalisé :

$$\begin{aligned} E[F_t Y_t] &= E \left[ F_0 \exp \left( \sigma_F W_t^F + \left( \mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2 \right) t \right) \times Y_0 \exp \left( \sigma_Y W_t^Y + \left( \mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \right) t \right) \right] \\ &= E[F_0 Y_0 \exp(\mu_F t + \mu_Y t) \times \exp(\sigma_F W_t^F + \sigma_Y W_t^Y - \left( \frac{1}{2}\sigma_F^2 + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \right) \times t)] \\ &= F_0 Y_0 \exp(\mu_F t + \mu_Y t + \delta\sigma_F\sigma_Y t) \\ &\quad E \left[ \underbrace{\exp(\sigma_F W_t^F + \sigma_Y W_t^Y - \left( \frac{1}{2}\sigma_F^2 + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 + \delta\sigma_F\sigma_Y \right) \times t)}_{=1} \right] \\ &= F_0 Y_0 \times \exp(\mu_F t + \mu_Y t + \delta\sigma_F\sigma_Y t) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, la covariance devient :

$$\begin{aligned} \text{var}(F_t, Y_t) &= E[F_t Y_t] - E[F_t]E[Y_t] \\ &= F_0 Y_0 \times \exp(\mu_F h + \mu_Y h) (\exp(\delta\sigma_F\sigma_Y t) - 1) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, à l'aide des équations B.1, B.2 et B.4, le coefficient de corrélation  $\rho(F_t, Y_t)$  en 0 se calcule donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho(F_t, Y_t) &= \frac{F_0 Y_0 \times \exp(\mu_F h + \mu_Y h) (\exp(\delta \sigma_F \sigma_Y t) - 1)}{\sqrt{F_0^2 e^{2\mu_F t} (e^{\sigma_F^2 t} - 1) \times Y_0^2 e^{2\mu_Y t} (e^{\sigma_Y^2 t} - 1)}} \\ &= \frac{\exp(\delta \sigma_F \sigma_Y t) - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_F^2 t} - 1)(e^{\sigma_Y^2 t} - 1)}} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La figure B.1 illustre ce résultat avec les mêmes paramètres<sup>1</sup> que dans le chapitre 2 partie III. Ce résultat est très utile pour estimer  $\delta$ . En effet, la

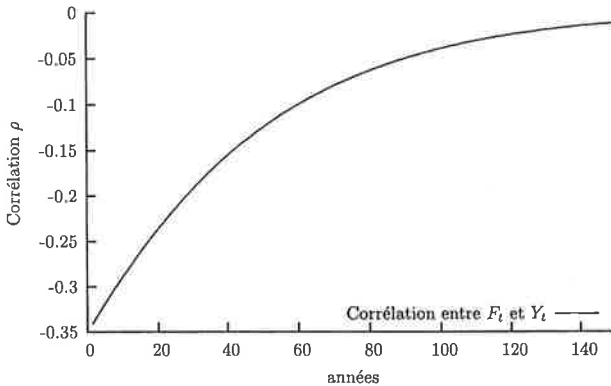


FIG. B.1 - Corrélation entre  $F_t$  et  $Y_t$  en fonction du temps  $h$

limite à droite de la corrélation quand  $h$  tend vers 0 donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \rho(F_t, Y_t) = \delta$$

Pour déterminer le coefficient  $\delta$  des données des contrats à terme cotés, il est donc équivalent de déterminer le coefficient de corrélation instantané. Le graphique permet également de voir que la croissance du coefficient de corrélation  $\rho(F_t, Y_t)$  est lente.

1.  $F_0 = 2,2$  et  $Y_0 = 115$  avec de plus  $\sigma_F^2 = 0,030$ ,  $\sigma_Y^2 = 0,027$  et  $\delta = -0,351$ . De plus, les taux respectifs sont  $\mu_F = 1\%$ ,  $\mu_Y = 1,5\%$  et  $r = 5\%$ .



## Annexe C

### Le test de normalité d'Anderson-Darling

À partir d'un échantillon de données, le test statistique d'Anderson-Darling permet de déterminer le caractère normal d'une distribution. Il consiste à comparer la distribution théorique  $F_0(x)$  à la distribution expérimentale  $F(x)$  en calculant la statistique suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(x) - F_0(x)]^2 w(x) dF(x)$$

où  $w(x)$  est une fonction de pondération.

Le cas standard d'Anderson-Darling correspond à la fonction de pondération suivante :

$$w(x) = \frac{1}{F_0(x)[1 - F_0(x)]}$$

qui permet de donner plus d'influence aux faibles et fortes fréquences. Avec

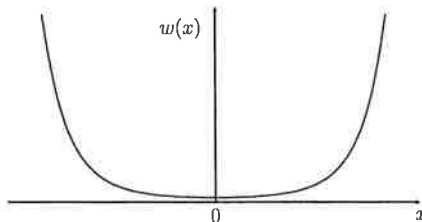


FIG. C.1 - La fonction de pondération du test d'Anderson-Darling

216 ANNEXE C. LE TEST DE NORMALITÉ D'ANDERSON-DARLING

MINITAB, logiciel d'analyse statistique, le graphique obtenu est un diagramme des probabilités normales en fonction des données. L'hypothèse de normalité est acceptée si la probabilité  $P$  est supérieure au seuil 0,05. Il existe d'autres tests de normalité comme le test de Kolmogorov-Smirnov et de Shapiro-Wilk, également disponibles sur MINITAB mais qui ne semblent pas être plus significatifs.

## Annexe D

### Lexique Anglais–Français

<b>Actual Production History (APH)</b>	le rendement espéré du producteur
<b>Asian option</b>	l'option asiatique
<b>Basket option</b>	l'option sur portefeuille
<b>Call option</b>	d'achat
<b>County</b>	comté
<b>Exchange</b>	bourse de commerce, marché financier
<b>Feeder Cattel</b>	bovin après engraissement
<b>Fed Cattel</b>	bovin avant engraissement
<b>Forward</b>	contrat à livraison différée
<b>Futures</b>	contrat à terme
<b>Idiosyncratic risk</b>	risque individuel, idiosyncrasique ou indépendant
<b>Livestock insurance</b>	assurance sur l'élevage
<b>Market price</b>	risque de marché
<b>Net Income Stabilization Account (NISA)</b>	Compte de Stabilisation du Revenu Net
<b>Projected price</b>	prix projeté
<b>Put option</b>	de vente
<b>Strike price</b>	prix d'exercice
<b>Systemic risk</b>	risque systémique
<b>Yield crop</b>	rendement agricole



# Annexe E

## Liste des publications

### E.1 Articles

Guinvarc'h, M. V., Janssen, J., et Cordier, J. E. (2003). « Agricultural Finance: Revenue Futures Contract ». *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, à paraître.

Cordier, J. E. et Guinvarc'h, M. V. (2002). « Assurance et Finance pour une Gestion du Risque Agricole : Une Approche Descriptive et Comparative ». *Économie Rurale*, 272(Novembre-Décembre):108-117.

Cordier, J. E., Guinvarc'h, M. V., et Mouchet, C. (2002). « Gestion des Risques Systémiques Agricoles : une Provision pour Fluctuation du Chiffre d'Affaires ». *Revue Française de Comptabilité*, 341:35-38.

### E.2 Communications

Guinvarc'h, M. V., Cordier, J., et Janssen, J. (2003). « Management of Agricultural Crop Insurance Contracts: a Theoretical Strategy ». Dans *Seventh International Congress on Insurance: Mathematics & Economics*, 12 pages, Lyon, France.

Cordier, J. E. et Guinvarc'h, M. V. (2002). « Innovation en assurance et finance agricole : Implications potentielles aux pays en développement ». Dans *Matières premières et développement*, 15 pages, Grenoble. GAMMAP, Université Pierre Mendès-France.





## Annexe F

# Cartes des rendements agricoles de l'Illinois

Les deux cartes suivantes permettent de visualiser les rendements moyens des comtés de l'Illinois pour les années 2001 et 2002 (*cf* section 1.1.1 de la partie Applications et tests).

### Illinois Corn Production by County Crop Yield in Bushels per Acre, 2001

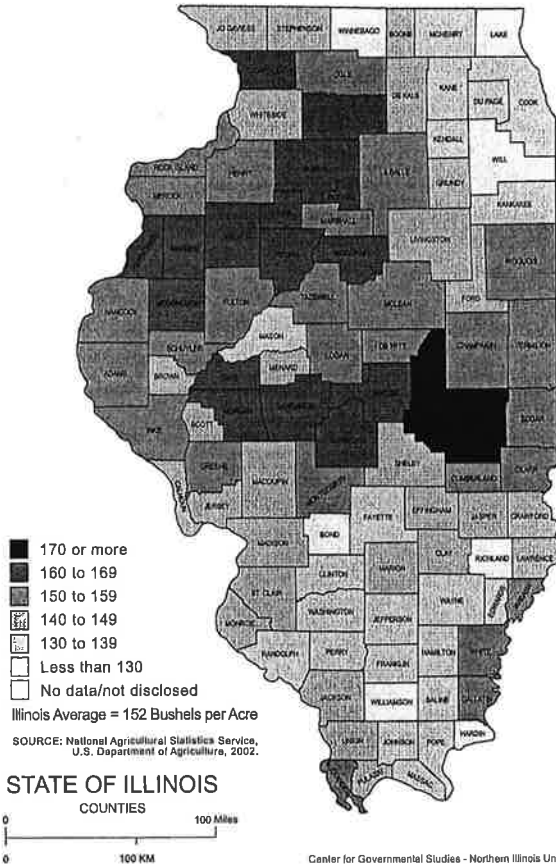


FIG. F.1 – Carte des rendements agricoles de l'Illinois en 2001. Carte obtenue sur le site [www.illinoisatlas.com](http://www.illinoisatlas.com)

### Illinois Corn Production by County Crop Yield in Bushels per Acre, 2002

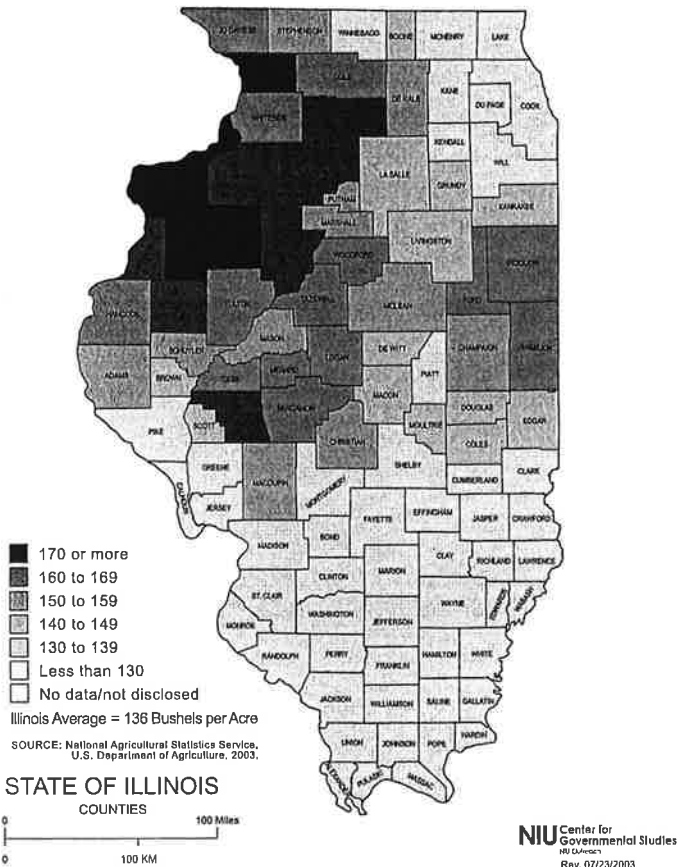


FIG. F.2 – Carte des rendements agricoles de l'Illinois en 2002. Carte obtenue sur le site [www.illinoisatlas.com](http://www.illinoisatlas.com)



## Table des figures

2.1	Présentation d'une méthode de gestion des risques de l'entreprise	16
2.2	Les stratégies simples sur les options . . . . .	27
1.1	Situation 1 . . . . .	41
1.2	Situation 2 . . . . .	42
1.3	Situation 3 . . . . .	43
1.4	Situation 4 . . . . .	44
3.1	Actual and competitive premium rates (from Makki, 2001) . . .	65
3.2	Un continuum des risques agricoles . . . . .	68
4.1	Simulation d'un mouvement brownien géométrique . . . . .	73
4.2	Distribution du prix dans le cas du modèle de Black and Scholes ( $\mu = 0,05$ , $\sigma = 0,32$ ) . . . . .	73
4.3	Illustration du modèle CRR . . . . .	75
4.4	Simulation d'un processus avec saut . . . . .	78
1.1	Écart entre la perte systémique et la perte réelle . . . . .	86
2.1	Illustration du contexte de l'intermédiaire financier . . . . .	96
2.2	Illustration de la simulation . . . . .	107
3.1	Illustration du contexte de l'intermédiaire financier . . . . .	114
3.2	Résultat de 200 simulations de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen. . . . .	124
4.1	Schéma de gestion du contrat d'assurance . . . . .	126
4.2	Décomposition de la gestion du contrat d'assurance rendement	128
4.3	Illustration de la fonction de densité conditionnelle . . . . .	128
4.4	Distribution de la prime du contrat d'assurance instantané (\$).	136
4.5	Distribution de l'erreur de la stratégie de gestion (\$). . . . .	138

1.1	Box-plot de la dispersion des rendements agricoles annuels moyens des comtés (minimum, premier décile, dernier décile et maximum). . . . .	158
1.2	Box-plot de la dispersion des rendements agricoles annuels des exploitations du comté de Champaign (minimum, premier décile, dernier décile et maximum). . . . .	159
1.3	Analyse de l'erreur $\hat{\xi}_t$ par rapport à $Y_t$ (1983–2002). . . . .	163
1.4	Comparaison dans le cas des comtés $y_o = 135$ (1982–2001). . . . .	164
1.5	Comparaison dans le cas des agriculteurs individuels $y_o = 135$ (1982–1999). . . . .	164
1.6	Comparaison dans le cas des agriculteurs individuels $y_o = 100$ (1982–1999). . . . .	165
1.7	Test de la stratégie de gestion du chiffre d'affaires (19 déc 1997). . . . .	168
1.8	Test de la stratégie de gestion de l'option de vente sur le chiffre d'affaires avec un prix d'exercice de \$350 (19 déc 1997). . . . .	169
1.9	Estimation de l'erreur quotidienne de la stratégie de gestion de l'option en fonction de l'écart de prix du sous-jacent et du gamma de l'option ( $E = 3.5 \times 10^6$ ). . . . .	170
1.10	Test de la gestion du contrat d'assurance sur le rendement avec $y_o = 135$ (bu/acre). . . . .	170
2.1	La vie d'un porc d'élevage de la saillie fécondante à l'abattage. . . . .	174
2.2	La relation coût de production et coût des aliments (en Bretagne). . . . .	177
2.3	Évolution du prix de base au MBP . . . . .	178
2.4	Simulation de la provision . . . . .	182
2.5	La base entre la moyenne géométrique actualisée du prix d'Ha-novre et du prix moyen MPB . . . . .	188
2.6	Test du contrat dérivé sur le prix moyen du porc (l'échéance septembre 2002 et un prix d'exercice de 1,250€). . . . .	191
B.1	Corrélation entre $F_t$ et $Y_t$ en fonction du temps $h$ . . . . .	213
C.1	La fonction de pondération du test d'Anderson-Darling . . . . .	215
F.1	Carte des rendements agricoles de l'Illinois en 2001. Carte ob-tenu sur le site <a href="http://www.illinoisatlas.com">www.illinoisatlas.com</a> . . . . .	222
F.2	Carte des rendements agricoles de l'Illinois en 2002. Carte ob-tenu sur le site <a href="http://www.illinoisatlas.com">www.illinoisatlas.com</a> . . . . .	223

## Liste des tableaux

2.1	Illustration du contrat GRP . . . . .	24
2.2	Caractéristiques du contrat à terme sur le blé coté sur le Matif	29
2.1	Exemple de hedging d'un producteur de maïs . . . . .	55
2.1	Simulation de stratégie pour la vente du contrat à terme sur 39 semaines . . . . .	103
2.2	Simulation de stratégie pour l'option de vente chiffre d'affaires sur 39 semaines . . . . .	108
3.1	Paramètres de la simulation de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen. . . . .	123
3.2	Simulation de stratégie pour le contrat dérivé sur 26 semaines avec une quotité égale à 1000. . . . .	123
4.1	Simulation de stratégie du contrat d'assurance sur 39 semaines	137
1.1	Test de normalité sur les $\hat{\zeta}_i$ (rendements des comtés). . . . .	162
1.2	Test de normalité sur les $\hat{\zeta}_j$ (rendements individuels des agri- culteurs). . . . .	162
1.3	Comparaison de l'indemnité dans le cas des agriculteurs indi- viduels. . . . .	163
1.4	Les écarts types de l'indemnité et de l'erreur de l'estimation dans le cas des agriculteurs individuels (1982-1999). . . . .	165
1.5	Les paramètres estimées du marché financier utilisés dans les tests. . . . .	167
1.6	Les paramètres du comté de Champaign, Illinois. . . . .	167
1.7	Résultats des différentes stratégies de gestion (éch 19 déc 1997). 171	
1.8	Résultats des différentes stratégies de gestion (éch 19 déc 1996). 171	



2.1	Une typologie des producteurs de porcs français (Ilari et al., 2003). . . . .	175
2.2	Paramètres de la simulation de la gestion de l'option sur la marge. . . . .	186
2.3	Résultat du prix de l'option de vente sur la marge du porc . . .	187
2.4	Les caractéristiques de la base du contrat dérivé sur le prix moyen (1999-2003) . . . . .	189
2.5	Paramètres de la simulation de la gestion du contrat dérivé sur le prix moyen. . . . .	190
2.6	Résultat de la stratégie de gestion du contrat dérivé sur le prix moyen du porc. . . . .	190