Cycles limites stochastiques et confineurs étude mathématique; intêret en biologie

Christine Jacob

▶ **To cite this version:**

Christine Jacob. Cycles limites stochastiques et confineurs étude mathématique; intêret en biologie. Mathematics [math]. 1987. English. NNT : . tel-02856869

HAL Id: tel-02856869
https://hal.inrae.fr/tel-02856869

Submitted on 8 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

THESE

présentée à

l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble

par
Christine JACOB

pour obtenir le grade de Docteur d'Etat es-sciences Mathématiques

CYCLES LIMITES STOCHASTIQUES ET CONFINEURS ETUDE MATHEMATIQUE; INTERET EN BIOLOGIE.

Thèse soutenue le 17 septembre 1987 devant la commission d'examen

A. Le Breton	President
D. Dacunha-Castelle	
J. Demongeot	
E. Jolivet	
Pham Dinh T.	Examinateurs
P. Priouret	
H. Tong	

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :
M. PAYAN Jean Jacques

Année Universitaire 1987 - 1988

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean-Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
LEBRETON Alain	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LHOMME Jean	Chimie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUNA Domingo	Mathématiques Pures
MACHE Régis	Physiologie Végétale
MASCLE Georges	Géologie
MAYNARD Roger	Physique du Solide
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (Biologie Végétale)
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
PIERRE Jean-Louis	Chimie Organique
RENARD Michel	Thermodynamique
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
ROSSI André	Biologie
SAXOD Raymond	Biologie Animale
SENGEL Philippe	Biologie Animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques Pures
SOUCHIER Bernard	Biologie
SOUTIF Michel	Physique
STUTZ Pierre	Mécanique
TRILLING Laurent	Mathématiques Appliquées
VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS de 2ème Classe

ADIBA Michel	Mathématiques Pures
ANTOINE Pierre	Géologie
ARMAND Gilbert	Géographie
BARET Paul	Chimie
BLANCHI J.Pierre	STAPS
BLUM Jacques	Mathématiques Appliquées
BOITET Christian	Mathématiques Appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUANDET J.François	Physique
BRUGAL Gérard	Biologie
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CERFF Rudiger	Biologie
CHIARAMELLA Yves	Mathématiques Appliquées
COURT Jean	Chimie
DUFRESNOY Alain	Mathématiques Pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GENIES Eugène	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences Nucléaires
GILLARD Roland	Mathématiques Pures
GIORNI Alain	Sciences Nucléaires
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo	Mathématiques Pures
GUIGO Maryse	Géographie
GUMUCHAIN Hervé	Géographie
GUITTON Jacques	Chimie

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

HACQUES Gérard	Mathématiques Appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HERAULT Jeanny	Physique
JARDON Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKHOVE Claude	Géologie
LONGEQUEUE Nicole	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physique
MANDARON Paul	Biologie
MARTINEZ Francis	Mathématiques Appliquées
NEMOZ Alain	Thermodymamique CNRS - CRTBT
OUDET Bruno	Mathématiques Appliquées
PECHER Arnaud	Géologie
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude	Sciences Nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PIBOULE Michel	Géologie
RAYNAUD Hervé	Mathématiques Appliquées
RICHARD Jean-Marc	Physique
RIEDTMANN Christine	Mathématiques Pures
ROBERT Gilles	Mathématiques Pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SAYETAT Françoise	Physique
SERVE Denis	Chimie
STOECKEL Frédéric	Physique
SCHOLL Pierre-Claude	Mathématiques Appliquées
SUBRA Robert	Chimie
VALLADE Marcel	Physique
VIDAL Michel	Chimie Organique
VIVIAN Robert	Géographie
VOTTERO Philippe	Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1ère Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1

PROFESSEURS de 2ème classe

BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	EEA. IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA.IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA.IUT 1
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PIERRE Gérard	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiéne et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puériculture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophtalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	O.R.L.	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital sud
COUDERC Pierre	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Cardiologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Pharmacologie	Faculté La Merci
HOLLARD Daniel	Hématologie	C.H.R.G.
LATREILLE René	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MICOUD Max	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Histologie	Faculté La Merci
PARAMELLE Bernard	Pneumologie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Neurologie	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie	C.H.R.G.
SARRAZIN Roger	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
STIEGLITZ Paul	Anestésiologie	C.H.R.G.
TANCHE Maurice	Physiologie	Faculté La Merci
VIGNAIS Pierre	Biochimie	Faculté La Merci

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAUROY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophtalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Je suis particulièrement reconnaissante envers le Professeur J. Demongeot pour notre longue, fructueuse et amicale collaboration sur les confineurs. Lors de nos discussions, j'ai admiré sa vivacité d'esprit, sa culture tant mathématique que biologique ainsi que sa gentillesse. J'en ai retiré un enrichissement qui dépasse de loin le cadre de ce travail. Je souhaite vivement que notre collaboration se poursuive malgré la distance qui nous sépare.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur P. Priouret pour les discussions fécondes que j'ai eu avec lui et qui nous ont permis de mener à bien ce travail sur les confineurs.

Je suis également particulièrement reconnaissante envers le Professeur Pham Dinh T. pour ses remarques pertinentes.

Je remercie vivement le Professeur Tong pour l'interêt qu'il a accordé à ce travail.

Je remercie en outre les Professeurs D. Dacunha-Castelle et E. Jolivet d'avoir accepté de participer à ce jury et le Professeur Le Breton de le présider.

J'associe à mes remerciements Mmes J. Picart, C. Penarguear et C. Ferreira pour avoir assuré avec compétence la frappe de ces travaux, ainsi que tous mes collègues du laboratoire de biométrie auprès desquels j'ai trouvé un environnement intellectuel et matériel ainsi qu'une ambiance gaie et amicale, sans lesquels ce travail n'aurait pu se faire.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

D'autres vont maintenant passer où nous passâmes,
Nous y sommes venus, d'autres vont y venir,
.....
Car personne ici bas ne termine et n'achève,
.....
Tout commence en ce monde et tout finit ailleurs.

(Victor Hugo. La Tristesse d'Olympio)

A mon père, Pierre Breillat.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 9

PREMIERE PARTIE : DETECTION DE RYTHMES. ARTICLES DE SYNTHESE ET VULGARISATION 23

CHAPITRE 1.
Apercu sur les séries chronologiques périodiques. 24

1. Introduction 25
2. Méthodes descriptives 28
   2.1. Tracé du profil temporel 28
   2.2. Analyse spectrale 31
      2.2.1. Exemples de processus à spectre discret 36
      2.2.2. Exemples de processus à spectre continu 40
   2.3. Analyse harmonique 44
3. Méthodes descriptives inferentielles 46
   3.1. Modèles à moyenne 47
      3.1.1. Whittaker et Robinson 47
      3.1.2. Modèle de Schuster 47
      3.1.3. Régression périodique 49
      3.1.4. Walker 49
      3.1.5. Walker-Hannan 49
      3.1.6. Cosinor 49
      3.1.7. Tong 50
   3.2. Modèles de type auto-régressif : A.R.M.A. et A.R.I.M.A. 52
4. Méthodes descriptives/explicatives : modèles aux équations differentielles. 56
Appendice. Analyse spectrale : quelques exemples 58

CHAPITRE 2.
Rhythmic egg release by *Heligmosomoides Polygyrus (=Nematospiroides Dubius)*, parasitic *Trichostrongylida* of the murine gut.I 64

Materials and Methods 65
Results 66

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

1.Egg density series. 66
1.a. Deterministic structure. 66
1.b. Random memory of the series. Analysis of residuals. 67
2. Faecal weight series. 68
2.a. Deterministic structure. 68
2.b. Analysis of the residuals of the series after elimination of the deterministic structure (trend and rhythms). 69
3. Relations between egg density and faecal weight series. 70
3.a. Series. 70
3.b. 12h periodicities. 70
3.c. Residuals. 71
4. Remarks. 72
5. Appendix : variability of the egg release phenomenon. 73
Discussion. 74

CHAPITRE 3 .
Statistical methods of detection of a periodic phenomenon in a short series. Example of application : a density series of Nematode eggs.II. 77

1. Smoothing methods. 78
1.1 Polynomial approach. 78
1.2. Frequency approach. 79
2. Regression methods. 81
2.1 Estimates of the periodic phenomenon. 81
2.1.a. Whittaker-Robinson's model. 82
2.1.b. Schuster's model. 82
2.1.c. Other models. 86
2.2. Confidence band of the periodic phenomenon. 87
2.3. Study of residuals. 88
i- Independence. 88
ii- Equidistribution. 90
iii- Normality. 91
2.4. Remarks on these models. 92
2.4.1. Repetitions. 92
2.4.2. "Random" periodicities. 92
3. Autocorrelations. 92
4. Discussion. 93
5. Appendix. 94
5.1. Whittaker-Robinson's model. 94

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

5.2. Schuster's model.....95
5.3. Multiple comparisons.....96
5.3.a. Multiple comparisons in Whittaker-Robinson's model.....96
5.3.b. Multiple comparisons in Schuster's model.....97

DEUXIEME PARTIE : CYCLES LIMITES STOCHASTIQUES A TEMPS DISCRET : DEFINITION ET MODELISATION. 100

CHAPITRE 1 .
Random oscillations modelling.....101

1. Introduction.....101
2. Definitions.....102
3. Models for markovian cycles.....105
4. Study of the cycle properties.....107
4.1. Stability property in the model (M4).....107
4.2. Self-exciting cycle.....109
5. Estimation of the cycle.....109
6. Example - the canadian lynx data.....111
7. Conclusion.....115

CHAPITRE 2 .
Study of the probabilistic properties of a periodic autoregressive model.118

1. Introduction.....118
2. Probabilistic properties of markov chains - definitions.....127
3. Probabilistic properties of the periodic model (M).....135
3.1. ϕ-irreducibility.....135
3.2. Continuity.....147
3.3. Subinvariant and invariant measures.....149
3.4 Recurrence.....152
3.5. Ergodicity.....164
3.6. Asymptotic stationarity.....170

TROISIEME PARTIE : CYCLES LIMITES STOCHASTIQUES A TEMPS QUELCONQUE ET CONFINEURS......176

CHAPITRE 1 .

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Confineurs : une approche stochastique des attracteurs. 177

0. Introduction..... 177
1. La notion d'attracteur..... 178
   1.1. Définition de la c-connexité..... 179
   1.2. Définitions des opérateurs bassin et limite..... 179
   1.3. Définition d'un attracteur..... 180
2. Approches stochastiques de la notion d'attracteur..... 181
   2.1. Premières définitions..... 182
   2.2. La notion de confineur..... 184
   2.3. Exemples de confineurs..... 209
   2.4. Comparaison des bassins de confinement..... 214
   2.5. Bifurcations..... 215
      2.5.1. Bifurcations géométriques..... 216
      2.5.2. Bifurcations temporelles..... 216
   2.6. généralisation..... 217

CHAPITRE 2 .
Stochastic limit cycles and confiners : definitions and comparative study in the case of markovian processes..... 219

1. Introduction..... 219
2. Stochastic cycles and pseudo-cycles..... 222
   2.1. Markovian cycles in discrete time..... 222
   2.2. Markovian cycles for any set of times T..... 223
   2.3. Extensions..... 224
   2.4. Stochastic pseudo-cycles..... 226
3. Stochastic limit sets..... 229
4. Confiners..... 231
5. Relations between a stochastic limit set and a confiner for a markovian process..... 236
6. Estimations..... 241
   6.1. Estimation of C and test of the cycle..... 242
   6.2. Estimation of the period..... 244
      6.2.1. Average surface..... 244
      6.2.2. One-way analysis of variance..... 244
Appendix..... 248

CHAPITRE 3 .

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Attracteurs et confineurs : du périodique au chaos. 267

0. Introduction. 267
1. La notion d'attracteur. 269
   1.1. Définition de la c-connexité. 270
   1.2. Définitions des opérateurs bassin et limite. 270
   1.3. Définition d'un attracteur. 271
2. la notion de confineur. 272
   2.1. Définition. 272
   2.2. Exemples de confineurs. 275
   2.3. Bifurcations. 276
   2.4. Estimation. 277
3. Conclusion. 282
Annexe. 288

CONCLUSION. 298

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

INTRODUCTION

Le temps intervient à tous les niveaux de l'équilibre dynamique de toute organisation biologique, à la fois par une évolution irréversible, caractérisée par un changement ou un vieillissement, et par un certain caractère répétitif plus ou moins régulier, état stationnaire ou état rythmique. L'étude d'un phénomène biologique doit, par conséquent, tenir compte de ses variations temporelles.

Des oscillations présentant un caractère plus ou moins aléatoire sont présentes dans tous les domaines de la Biologie, comme en Dynamique des populations, (Oster, 1974, Smith et Tuckwell, 1974, Pielou, 1974, May, 1974, Cushing, 1977, Tong, 1983), en Biochimie (Kazarinoff, 1974, Banks, 1975, Richter et Betz, 1976, Demongeot, 1983), en Epidémiologie et Parasitologie (Bartlett, 1956, Waltman, 1974, Anderson, 1976, Dietz, 1976, Kerboeuf et Jacob, 1983), en Neurologie (Cowan et Ermentrout, 1978), en Physiologie Végétale (Gumowski, 1980), et bien d'autres domaines encore (cf Pavlidis, 1973, Reinberg, 1977, Winfree, 1978, 1980, Cosnard, Demongeot et Le Breton, 1983, Jager et Murray, 1984 ou encore des revues telles que Chronobiologia, ou the Journal of Interdisciplinary cycle research).

Elles sont également présentes à tous les niveaux d'organisation, que ce soit

- chez les unicellulaires (amibes, levures de bière)
- chez les insectes
- chez l'homme (variation circadienne de concentration sanguine des hormones-corticoïdes, ACTH, insuline...-, et de substances non hormonales telles que le glucose, les acides aminés ou les catécholamines)
- ou encore à l'échelle des sociétés, animales (compétition entre espèces ou humaines (variations annuelles de variables socio-économiques)

(Demongeot, 1978).

Ainsi "l'étude des rythmes que présentent les constructions de la nature est tout à fait fondamentale. Ce n'est pas le propre de notre siècle d'avoir fait cette découverte. L'activité des civilisations appelées primitives, se déroulait toujours en conjonction étroite ave les rythmes cosmiques, végétaux, ani-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

maux" (Bruter, 1976,b). Par contre, c'est probablement le propre de notre époque d'avoir manifesté autant d'intérêt à l'étude de ces rythmes.

Selon le type de données que l'on doit traiter, le ou les rythmes sous-jacents pourront être considérés comme déterministes (au niveau d'une population) ou aléatoires (au niveau de l'individu), c'est-à-dire plus ou moins proches d'un rythme déterministe moyen. En présence de données temporelles, la première question qui se pose en général est celle de la détection de tels rythmes. Des méthodes classiques, soit purement descriptives, soit inférentielles peuvent être utilisées pour détecter ou estimer un ou plusieurs rythmes déterministes dans une série : lissages, méthodes de régression, autocorrélations, analyse spectrale. Toutes ces méthodes ont pour but, l'étude des caractéristiques non aléatoires du processus, premier moment pour les lissages et les méthodes de régression, moments d'ordre 2 dans le domaine temporel ou fréquentiel pour les autocorrelations et l'analyse spectrale.

Un certain nombre de modèles de régression sont analysés dans la littérature scientifique : modèles de Whittaker-Robinson, du Cosinor, de Tong, Walker, Walker-Hannan, Schuster... Parmi ceux-ci le modèle de Schuster qui estime une fonction périodique selon ses fréquences élémentaires, fait le lien avec l'analyse spectrale non paramétrique adaptée aux longues séries.

La description et l'approfondissement de la plupart de ces méthodes, grâce à un cas particulier comme celui des séries de ponte de Nématodes, ont fait l'objet de deux articles de synthèse et de vulgarisation (Jacob, 1980, 1983). Ces articles n'ont pas pour ambition d'être exhaustifs, mais plutôt d'évaluer la faculté de détection ou d'estimation des rythmes, des méthodes les plus connues. D'autres méthodes existent, qui n'ont pas été décrites dans ces articles, comme la démodulation complexe qui permet d'affiner l'estimation d'une période, ou l'analyse de variance non paramétrique qui peut être utilisée quelque soit la loi de distribution des données, ou encore l'analyse spectrale de type paramétrique basée sur les modèles ARMA, qui permet d'estimer des spectres sur de petits échantillons. Mais les modèles ARMA, de type linéaire, sont mal adaptés aux rythmes endogènes qui supposent une mémoire non linéaire. On pourra encore trouver quelques exemples de méthodes moins classiques dans l'article de revue de Pham Dinh (1983).

Au niveau de l'individu, le rythme possède en général une importante composante endogène (éventuellement synchronisée par un facteur périodique

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

exogène comme celui de l'alternance jour/nuit); cette composante présente des fluctuations aléatoires par rapport à un rythme déterministe moyen. Les modèles de régression précédents qui supposent les erreurs indépendamment et identiquement distribuées selon une loi Normale ne sont en général plus valides. Un nouveau test de détection de périodicité a été construit, supposant un modèle d'analyse de variance à un facteur avec erreurs stationnaires et ϕ-mélangeantes. Un nouvel estimateur de la période a été aussi obtenue à partir de la méthode du minimum de contraste, basé sur la surface moyenne du cycle aléatoire (Jacob, 1987-a).

L'ensemble des résultats obtenus par toutes ces méthodes peuvent suggérer des hypothèses concernant le fonctionnement du rythme lui-même (Kerboeuf, Jacob, 1983), et être l'étape préliminaire à une modélisation explicative du processus.
Par construction, une telle modélisation est triviale puisqu'elle ne contient que l'information déjà connue, mais pratiquement, elle "permet d'isoler ou d'accentuer certaines conséquences implicites, difficilement identifiables autrement", (Gumowski, 1981). Un grand nombre d'auteurs tente d'expliquer les oscillations observées à l'aide de modèles mathématiques représentant des dynamiques non linéaires et / ou à retard, à temps discret ou continu, à caractère déterministe ou stochastique. En général, la plus grande facilité d'emploi des modèles déterministes par rapport aux stochastiques, liée à une meilleure connaissance des méthodes analytiques de résolution, ainsi que la possibilité de caractériser le comportement asymptotique des trajectoires, ont conduit à une utilisation beaucoup plus répandue des modèles déterministes.
Ainsi, les outils topologiques de description du comportement asymptotique d'un système dynamique, comme les notions d'attracteur, de stabilité, de cycle limite, ou de bifurcation (Bruter, 1976-a), permettent, par le biais de simulations, de "cerner l'influence de facteurs déterminants dans l'apparition des oscillations" (Demongeot, 1978). Remarquons que l'intérêt particulier de tels outils en Biologie, provient également de l'existence d'attracteurs de faible dimension dans des systèmes à un nombre infini de degrés de liberté, comme l'ont prouvé les travaux récents de Constantin et al (1985). Cependant, "the equations obviously oversimplify the complex biological details of parasite life cycles and have inherent weaknesses due to their determinism, but they do provide a means of assessing the consequences of altering various rate parameters in the life cycle such as the adult parasité death rate. An obvious aim in such control programs, would be to move a population

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

death rate. An obvious aim in such control programs, would be to move a population parameter into the region of unstable parameter space, where small perturbation of the equilibrium population states lead to the parasitic disease". (Anderson (1976)). Ainsi, à cause du caractère intrinsèquement aléatoire du phénomène observé ou des paramètres d'influence associés, certains auteurs ont constaté la faiblesse des modèles déterministes par rapport aux stochastiques, en tant qu'outil explicatif (Barlett, 1956, May 1974, Parker, 1974, Smith et Tuckell, 1974, Anderson, 1976, Barra et al., 1979, Ricciardi 1980, Demongeot et al., 1987, a et b).

En effet, d'une manière générale, l'ajustement d'un modèle déterministe aux observations est valide lorsque le processus observé résulte de la moyenne de processus individuels d'une même population. Il l'est également au niveau d'un seul individu, lorsque le processus observé est presque déterministe, à condition que l'intervalle de temps d'étude soit fini. Le processus stochastique observé reste alors dans un petit voisinage de la trajectoire déterministe issue de la même valeur initiale (Friedlin et Wentzell, 1984). Par contre, sur un intervalle de temps infini, le processus stochastique peut visiter indéfiniment toute partie de l'espace (récurrence) même si le système déterministe associé possède un attracteur stable et même si l'aléa a une variance très faible (pourvu que son support soit suffisamment grand). Dans de tels cas, le processus s'éloigne une infinité de fois de l'attracteur. Cependant, il passe quand même beaucoup plus de temps au voisinage de l'attracteur stable que dans toute autre partie de l'espace. Mais, si le support du bruit est suffisamment petit, alors les trajectoires stochastiques issues du bassin d'attraction de l'attracteur stable, restent indéfiniment dans un voisinage de cet attracteur (Friedlin et Wentzell, 1984). De manière générale, un certain nombre de travaux théoriques émanant tant de physiciens que de probabilistes, étudient la convergence faible, lorsque l'aléa tend vers 0, de la probabilité invariante du processus (lorsqu'elle existe et est unique) vers les mesures invariantes pour le flot, associées au système déterministe et dont les supports sont les attracteurs. On montre, plus exactement, pour un système à temps continu, que la masse des attracteurs pour cette probabilité invariante tend vers 1, pour les attracteurs les "plus stables" et vers 0, pour les "moins stables". Et si de plus, un des attracteurs est hyperbolique et plus stable que tous les autres, alors il existe une et une seule mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen sur cet attracteur (mesure invariante pour le flot et ergodique), et la probabilité invariante du processus converge faiblement vers cette mesure. (Kifer, 1974, Friedlin et Wentzell, 1984, Eckmann et Ruelle, 1985). A temps discret,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

petit (sous certaines conditions, la probabilité invariante converge vers la mesure de S-R-B relative à l'attracteur considéré, lorsque l'aléa tend vers 0. (Lai-Sang Young, 1986).
En conclusion, lorsque le temps d'étude est infini, le modèle déterministe sera une bonne approximation du modèle stochastique dans le cas où l'aléa est à support borné et suffisamment petit et que le système déterministe associé possède un attracteur stable, ou bien dans le cas général d'un aléa quelconque, si on s'interesse seulement au temps de séjour du processus à chaque instant (caractérisé par la probabilité invariante lorsqu'elle existe) pourvu que celui-ci soit suffisamment proche de la mesure invariante du système déterministe, relative à l'attracteur étudié. Mais, le modèle déterministe n'est en général pas une bonne approximation, si on s'interesse à la structure temporelle de chaque trajectoire, puisqu'alors les trajectoires stochastiques, contrairement aux déterministes, peuvent s'éloigner une infinité de fois de l'attracteur stable.
Dans tous les cas, plus l'aléa introduit dans un système déterministe devient important, et plus le comportement asymptotique des trajectoires du processus diffère de l'attracteur associé. L'aléa intervient alors en général comme paramètre de bifurcation. C'est le cas, par exemple, d'un système ayant un point fixe stable faiblement attractant. Bruité de manière adéquate, le système présente des oscillations aléatoires (Jeffries, 1974). C'est également le cas de l'équation de Van der Pol bruitée : l'aléa modifie à la fois la période du cycle observé ainsi que sa structure géométrique (Demongeot et al, 1986). Dans de tels exemples, l'utilisation d'un modèle déterministe s'ajustant au mieux aux observations conduira à une interprétation erronée du mécanisme biologique sous-jacent.

Jusqu'à présent, il n'existait pas d'équivalent stochastique des notions d'attracteurs, de leur stabilité, ou encore de bifurcation, hormis des notions telles que celles de récurrence ou transience (Arnold et Kliemann, 1981), de stabilité stochastique (Kushner, 1967, Khasminskii, 1969, Arnold et Kliemann, 1981), d'ensemble asymptotiquement stable (Friedman,1976), de probabilité invariante (Tweedie, 1975, Barra et al., 1979), ou d'ensembles invariants (dits encore absorbants ou stochastiquement fermés) (Nummelin 1984, Kushner, 1978, Barra et al., 1979, Arnold et Kliemann, 1981). Dans le but d'établir un tel équivalent qui permette ainsi de modéliser plus fructueusement les phénomènes biologiques temporels à l'aide de processus plutôt qu'au moyen de systèmes déterministes, moins réalistes, on a tout d'abord défini mathématiquement ce que l'on entendait intuitivement par rythme

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

aléatoire. Une première définition a été donnée à temps discret en 1985 (Jacob, 1985-a). Cette définition a ensuite été étendue aux processus à temps continu (Jacob, 1987-a-b). Elle signifie que les trajectoires d'un processus possèdant un tel rythme appartiennent, à des décalages temporels près, à une bande périodique plus ou moins large selon que le rythme est plus ou moins éloigné d'un rythme déterministe (à la limite, pour un rythme déterministe, cette bande se réduit à la trajectoire périodique déterministe générée par ce rythme). Cette notion de rythme aléatoire, appelée par la suite (pseudo)-cycle stochastique, est une généralisation des cycles markoviens à temps discret définis par Doob (1953) et Orey (1971) : elle permet de définir comme cycles, des "comportements" qu'intuitivement on aimerait qualifier de tels, qu'ils soient à temps discret ou à temps continu, que le rythme existe en moyenne ou en variance, ou dépende éventuellement de l'espace comme c'est le cas d'objets géométriques dont la forme varie périodiquement avec le temps. On trouvera quelques exemples de tels processus dans Jacob (1987-a).

On construit aussi un modèle général de processus à temps discret possédant un tel rythme : le modèle est du type autoregressif non linéaire, à innovations périodiques, et "auto-excitant", c'est-à-dire qu'il crée lui-même son propre rythme de la même manière qu'un système biologique crée un rythme engodène (i.e l'équation de récurrence associée possède un cycle limite et en "moyenne", ce cycle n'est pas modifié par les innovations). Une première application de ce modèle a été réalisée sur une série de dynamique des populations celle du nombre annuel de captures de lynx canadiens. On étudie la stabilité du cycle, on estime ce cycle par un lissage et on montre que les simulations du modèle estimé "ressemblent"beaucoup plus à la série observée que celles du modèle classique associé (i.e à innovations apériodiques) (Jacob, 1985-a). Les propriétés probabilistes d'un tel modèle (markovien) comme l'irréductibilité, la récurrence, la continuité, l'ergodicité et la stationnarité asymptotique, ont été étudiées. On constate que la propriété d'irréductibilité est beaucoup plus difficile à obtenir dans un cycle compact que dans le cycle étendu à tout l'espace. Par contre, une fois cette hypothèse satisfaite, l'ergodicité et même l'ergodicité géométrique est presque immédiate pour un cycle compact contrairement au cas non compact (Jacob, 1985-b, 1986-a-b).

Cette notion de cycle stochastique permet de caractériser de manière temporelle les ensembles invariants, dans lesquels "the trajectories of the model keep being confined" (Barra et al., 1979). Représenté dans un espace

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

adéquat, dit espace des phases, comme l'espace "état x vitesse", le cycle a la forme d'un "anneau", troué en son centre, si le cycle concerne les moments d'ordre 1 du processus, et si la variance est suffisamment faible. Lorsque la période du cycle est infinie, on dit qu'il y a chaos [1] et les bords de l'anneau ont une dimension fractale. Les méthodes de calcul de la dimension des objets fractaux peuvent alors être utilisées pour estimer cette dimension (Cosnard et Mira, 1985, Mendès-France, 1983, Kwok, 1986). Des comportements chaotiques comme les attracteurs étranges, sont connus depuis longtemps dans les domaines de la physique et de la chimie. En Biologie, l'intérêt de ce type de phénomène a été jusqu'à présent moins évident. Cependant des domaines ont été récemment explorés, où des oscillations et du chaos peuvent exister : un système biochimique théorique avec une double rétroactivation (Goldbeter et al., 1984), le système d'agrégation des amibes Dictyostelium discoïdeum (Martiel et Goldbeter, 1986), le système glycolytique (Demongeot et Seydoux, 1979), et les systèmes d'entrainement cardiaque (Guevara et al., 1981, Coumel et al. 1980) et respiratoire (Demongeot, Baconnier et al., 1986).

La notion d'ensemble invariant, caractérisant le comportement asymptotique des trajectoires a ensuite été généralisée à celle d'ensemble limite stochastique (Jacob, 1985-a, 1987-a-b) puis à celle de confineur (Demongeot et Jacob, 1987 a et b). Ces deux approches sont différentes, puisque la première est basée sur le comportement asymptotique moyen de l'ensemble de la population, alors que la seconde est basée sur le comportement asymptotique individuel de chaque trajectoire. Cependant, dans le cas d'un ensemble invariant, fermé et récurrent, les deux notions coïncident. (Jacob, 1987-a-b). D'autres approches fondées sur d'autres types de convergence auraient également pu être envisagées (Demongeot et Jacob, 1987 a). Mais la notion de confineur définie ici, généralise et complète les notions partielles déjà existantes de stabilité stochastique, d'ensemble asymptotiquement stable, de probabilité invariante et d'ensemble invariant. Elle permet en particulier

[1] Note : le chaos signifie ici que les trajectoires appartiennent à un "tube" de frontières quasi-périodiques, i.e. possèdant un spectre ayant des raies infinies à des fréquences incommensurables. Si le tube est d'épaisseur nulle, et correspond donc à un phénomène déterministe (à un décalage aléatoire près du point initial), le processus est alors de type quasi-périodique; il ne peut donc être du type chaotique, au sens déterministe du terme puisqu'un tel phénomène possède un spectre continu. Un système déterministe chaotique appartiendra donc soit à un tube quasi-périodique d'épaisseur non nulle, (phénomène chaotique au sens stochastique du terme) soit à un tube constant, i.e "apériodique" ou "singulier", au sens stochastique du terme.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

de concilier les deux approches différentes entrevues par Barra et al. (1979), concernant le problème de la stabilité dans les systèmes stochastiques : "the stability problem for the stochastic equation $"dx = \varphi(x)dt + \psi(x)dw"$ likewise what happens for general stochastic dynamical systemes may be approached either by a stochastic extension of Lyapunov stability for possible equilibrium states with a suitable convergence criterion or as the analysis of possible invariant probability distribution on the state space". En particulier, cette notion coïncide avec la notion d'attracteur définie par Cosnard et Demongeot (1985) lorsque le système stochastique se réduit à un système déterministe dont seuls les points initiaux des trajectoires sont aléatoires, et elle se réduit à l'utilisation d'une probabilité invariante dans le cas d'un processus récurrent possèdant une telle probabilité. A l'instar des ensembles invariants caractérisés de manière temporelle par la période du cycle stochastique associé, on caractérise les confineurs par une période de description, qui coïncide naturellement avec celle du cycle dans le cas d'un ensemble invariant (Jacob, 1987-a). Lorsque la période est infinie, le confineur est dit de type chaotique. On définit également la notion d'isochron stochastique ainsi que celle de bifurcation géométrique ou temporelle permettant l'étude de la stabilité structurelle du système stochastique. On donne des idées d'estimation du confineur et de sa période dans le cas général. Les estimations utilisent des lissages par fonctions splines. On étudie empiriquement toutes ces notions à partir de simulations comme celles relatives à l'équation stochastique de Van der Pol qui permet de modéliser un certain nombre de phénomènes biologiques comportant des oscillations de "relaxation" (rythme cardiaque). On constate que la perturbation aléatoire introduite dans l'équation de Van der Pol est un paramètre de bifurcation à la fois temporelle et géométrique (cf ci-dessus) (Demongeot et al., 1987,a et b).

Notes :

1 - seules les deuxième et troisième parties sont tout à fait originales.

2 - les articles figurant dans cette thèse sont précédés dans les références bibliographiques d'une "*".

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANDERSON R.M. (1976). Some simple models of the population dynamics of Eucaryotic parasites - in Mathematical Models in Medicine - Lecture Notes in Biomathematics 11- ed. by J. Berger, W. Bühler, R. Repges, and P. Tautu. Springer Verlag, Berlin, 16-57.

ARNOLD L., KLIEMANN W. (1981). Qualitative Theory of Stochastic Systems. in : Probabilistic Analysis and Related Topics, Vol. 3- Ed. by A.T. Bharucha-Reid. Academic Press, New-York.

BANKS H.T. (1975). Modeling and Control in the Biomedical Sciences. Lectures Notes in Biomathematics. 6- ed by S. Levin, Springer-Verlag, Berlin.

BARRA M., BRUNI C., KOCH G. (1979). Deterministic and Stochastic Bounded Rate Models in Immunology - in Systems Theory in Immunology - Lecture Notes in Biomathematics 32 - ed. by C. Bruni, G. Doria, G. Koch, and R.Strom. Springer-Verlag, Berlin, 140-154.

BARTLETT M.S. (1956). Deterministic and stochastic models for recurrent epidemics. Proc. Third Berkely Symp. math. Statisti & Prob., 4, 81-109.

BRUTER C.P. (1976).(a) Interprétation géométrique des travaux de l'école thermodynamique. Bulletin du G.E.R.B., t8, 4, 131-151. Clermont-Ferrand.

BRUTER C.P. (1976).(b) Une classe de modèles dynamiques pour l'étude des rythmes biologiques. Bulletin du G.E.R.B., t8, 4, 153-169. Clermont-Ferrand.

CINQUIN P., COSNARD M., DEMONGEOT J., JACOB C. (1987). Attracteurs et confineurs. in : Traitement numérique des attracteurs étranges. ed. by M. Cosnard and C. Mira - editions du CNRS, 243-258.

COSNARD M., DEMONGEOT J., LE BRETON A. (1983). Rhythms in Biology and Other Fields of Application : Deterministic and Stochastic Approaches. Lecture Notes in Biomathematics 49. Springer-Verlag, Berlin.

CONSTANTIN P., FOIAS C., TEMAM R. (1985). Memoirs of the American Math. Society.

COUMEL P., LECLERCQ J.F. (1980). les troubles du rythme cardiaque. La recherche, 108, 122-132.

COSNARD M., DEMONGEOT J. (1985). Attracteurs : une approche déterministe.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

C.R. Acad. Sc. Paris, 300, no 15, 551-556.

COSNARD M., MIRA C. (1987). Traitement numérique des attracteurs étranges. Grenoble 20,21,22 Février 1985. Editions du CNRS.

COWAN J.D. , ERMENTROUT G.B. (1978). Some aspects of the "eigenbehavior" of neural nets in : Studies in Mathematical Biology. Vol 15, part I- ed by S. Levin - The Mathematical Association of America-USA, 67-117.

CUSHING J.M. (1977). Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics - Lecture Notes in Biomathematics 20- ed. by S. Levin, Springer-Verlag, Berlin.

DEMONGEOT J. (1978). Outils théoriques de la chronobiologie et de la chronomèdicine. Thèse - Université Scientifique et Médicale de Grenoble - Domaine de la Merci - La Tronche.

DEMONGEOT J., SEYDOUX F.J. (1979). Oscillations glycolytiques : modélisation d'un système minimum à partir des données physiologiques et modélculaires in : Elaboration et justification des modèles en Biologie. ed. par P. Delattre et M. Thellier. Maloine, Paris.

DEMONGEOT J. (1983). Systèmes dynamiques et champs aléatoires : application en Biologie fondamentale, Thèse, Grenoble.

DEMONGEOT J., BACONNIER P., EBERHARD A., PAN XINAN, COSNARD M., et PHAM DINH T. (1985). L'entrainement d'un oscillateur biologique : simulation par un modèle explicite, in : Actes du IV Séminaire de Biologie Théorique - ed. par G. Benchetrit et J. Demongeot. Editions du CNRS - Paris.

* DEMONGEOT J., JACOB C. (1987).(a) Confineurs : une approche stochastique des attracteurs. Rapport technique. Laboratoire de Biométrie - INRA-C.R. Jouy-en-Josas 78350.

DEMONGEOT J., JACOB C., (1987).(b) Confineurs : une approche stochastique des attracteurs. C.R. Acad. Sc. Paris, à paraître.

* DEMONGEOT J., JACOB C., CINQUIN P. (1987).(a) Attracteurs et confineurs : du periodic au chaos. in : Econométrie et Biométrie - ed.par J. Demongeot et P. Malgrange. Presses Universitaires de Dijon.IME 32.

DEMONGEOT J., JACOB C., CINQUIN P. (1987).(b) Attractors and confiners : from periodic to chaotic behaviors, in : Econometry and Biometry - ed. by J. Demongeot and P. Malgrange. Nijhoff, Amsterdam, à paraître.

DEMONGEOT J., COSNARD M., JACOB C. (1986). Attractors and confiners : deterministic and stochastic approaches, in : Dynamical systems : a renewal ap-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

proach - ed. by S. Diner, D. Fargue and G. Lochak - World Scientific Publishing, Singapour.

DIETZ K. (1976). The incidence of infections diseases under the influence of seasonal variations, in : Mathematical Models in Medicine. Lecture Notes in Biomathematics 11 - ed. by J. Berger, W. Bühler, R. Repges, and P. Tautu. Springer-Verlag, Berlin, 1-15.

DOOB J.L. (1953). Stochastic processes. Wiley, New-York.

ECKMANN J.P., RUELLE D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. Preprint IHES/P/85/15.

FREIDLIN M.I., WENTZELL A.D. (1984). Random Perturbations of Dynamical Systems. Springer-Verlag, New-York.

FRIEDMAN A. (1976). Stochastic Differential Equations and Applications. Academic Press, New-York.

GOLDBETER A., MARTIEL J.L., DECROLY O. (1984). From excitability and oscillations to birhytmicity and chaos in biochemical systems, in : Dynamics of Biochemical Systems - ed. by J. Ricard and A. Cornish-Bowden. Plenum Press, New-York.

GUEVARA M.R., GLASS L., SHRIER A. (1981). Phase locking, period-doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardic cells. Science, 214, 1350-1353.

GUMOWSKI I. (1980). Analysis of oscillatory plant transpiration. Inter. Interdisc. Cycle Res. Symp., Trier.

GUMOWSKI I. (1981). Sur la caractérisation des oscillations observées en sciences naturelles. Bulletin du G.E.R.B., Tome 13, no 3, 9-26.

* JACOB C. (1980). Aperçu sur les séries chronologiques périodiques, in : Biométrie et Temps, 88-127 - ed by Jolivet et al.

* JACOB C., KERBOEUF D. (1983). Statistical methods of detection of a periodic phenomenon in a short series. Examples of application : a density series of Nematod eggs II. Chronobiologia 10, 351-373.

* JACOB C. (1985) (a). Random Oscillations Modelling, in : Time Series Analysis : Theory and Practice 7, ed O.D. Anderson, North-Holland, Amsterdam New-York, 139-156.

JACOB C. (1985) (b). Probabilistic Properties of a General Cyclic Markovian Model in Discrete Time. Abstract. Fourteenth Conference on Stochastic Pro-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

cesses and their Applications. Stochastic Processes and their Applications 19, p. 17.

JACOB C. (1986) (a). Study of the Probabilistic Properties of a periodic autoregressive model. Proposé à Stochastic Processes and their Applications.

* JACOB C. (1986) (b). Study of the Probabilistic Properties of a periodic autoregressive model. Rapport Technique, INRA.

* JACOB C. (1987) (a). Stochastic limit cycles and confiners : definitions and comparative study in the case of Markovian processes. in : Spatial processes and spatial time series analysis. ed. par F. Droesbeke. Publications des Facultés Universitaires Saint-Louis, Bruxelles.

JACOB C. (1987) (b). Cycles limites stochastiques et confineurs pour processus markoviens. C.R. Acad. Sc. Paris, à paraitre.

JAGER W., MURRAY J.D. (1984). Modelling of Patterns in Space and Time. Lecture Notes in Biomathematics 55, Springer-Verlag. Berlin.

JEFFRIES C. (1974). Probabilistic limit cycles. Lecture Notes in Biomathematics 2, ed. by S. Levin. Springer-Verlag, Berlin, 123-131.

KAZARINOFF N.D. (1974). Oscillations in Biocemistry, in : Mathematical Problems in Biology. Lecture Notes in Biomathematics 2- ed. by S. Levin. Springer-Verlag, Berlin, 132-138.

* KERBOEUF D., JACOB C. (1983). Demonstration of rhythmic egg relase by *Heligmosomoides polygyrus (Nematospiroides dubuis)*, parasitic *trichostrongylida* of muring gut. I. Chronobiologia 10, 255-268.

KHASMINSKII R.Z. (1969). Stability of systems of differential equations with random disturbances of their parameters. Nauka. Moscou.

KIFER Y. (1974). On small random perturbations of some mooth dynamical systems. math. USRR Izvestija 8, 1083-1107.

KUSHNER H.J. (1967). Stochastic stability and control. Academic Press, New-York.

KUSHNER H.J. (1978). The concept of invariant set for stochastic dynamical systems and applications to stochastic stability, in : Stochastic Optimization and control. ed. by E. Karreman, Wiley, London.

KWOK YEUNG TSANG (1986). Dimensionality of Strange Attractors Determined Analytically. phys. Rev. Lett., 57, 12, 1390-1393.

MARTIEL J.L., GOLDBETER A. (1985). Oscillations, excitabilité et chaos

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

dans les systèmes biochimiques et cellulaires, in : Actes du IV Séminaire de Biologie Théorique - ed. par G. Benchetrit et J. Demongeot. Editions du CNRS, Paris.

MAY R.M. (1974). Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton University Press, Princeton.

MENDES-FRANCE M. (1983). Chaotic curves, in : Rhythms in Biology and other Fields of Application- ed. by M. Cosnard, J. Demongeot and A. Le Breton, Springer-Verlag, Berlin, 354-367.

NUMMELIN E. (1984). General irreducible Markov chains and non-negative operators. Cambridge University Press, Cambridge.

OREY S. (1971). Lecture Notes on limit theorems for Markov Chain Transition Probabilities. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, London.

OSTER G. (1974). The role of Age Structure in the Dynamics of Interacting Populations, in : Mathematical Problems in Biology. Lecture Notes in Biomathematics 2- ed. by S. Levin, Springer-Verlag, Berlin, 166-173.

PARKER R.A. (1974). Some consequences of stochasticizing an ecological system model, in : Mathematical Problems in Biology. Lecture Notes in Biomathematics 2- ed. by S. Levin, Springer-Verlag, Berlin, 174-183.

PAVLIDIS T. (1973). Biological oscillators : their mathematical analysis. Academic Press, New-York & London.

PHAM DINH T. (1983). Time series analysis and Biology, in : Rhythms in Biology and Other Fields of Application. lecture Notes in Biomathematics 49 - ed. by M. Cosnard, J. Demongeot and A. Le Breton, 368-387.

PIELOU E.C. (1974). Population and Community Ecology. Principles and Methods. Gordon and Breach Science Publishers, New-York.

REINBERG A. (1977). Des rythmes biologiques à la chronobiologie. Collection Discours de la Méthode. Gauthier-Villars.

RICCIARDI L.M. (1980). Stochastic equations in Neurobiology and population Biology, in : Vito Volterra Symposium on Mathematical Models in Biology. Lecture Notes in Biomathematics - ed. by C. Barigozzi, Springer-Verlag, Berlin, 248-263.

RICHTER O., BETZ A. (1976). Simulation of Biochemical Pathways and its Application to Biology and Medicine. lecture Notes in Biomathematics 11- ed. by J. Berger, W. Bühler, R. Repges, and P. Tautu. Springer-Verlag, Berlin, 180-197.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

SMITH C.E., TUCKWELL H.C. (1974). Some stochastic growth processes, in : Mathematical Problems in Biology. Lecture Notes in Biomathematics 2- ed. by S. Levin, Springer-Verlag, Berlin, 211-225.

TONG H. (1983). Threshold Models in Non-linear Time Series Aanalysis. lecture Notes in Statistics 21, Springer-Verlag, New-York.

TWEEDIE R.L. (1975). Sufficient conditions for ergodicity and statonarity of Markov chains on a general state space. Stoc. proc & Appl. 3, 385-403.

WALTMAN P. (1974). Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics. Lecture Notes in Biomathematics 1- ed. by S. Levin, Springer-Verlag, Berlin.

WINFREE A.T. (1978). Patterns of phase compromise in Biological cycles, in : Studies in Mathematical Biology, 15, part I- ed. by S. Levin. The Mathematical Association of America - USA, 266-294.

WINFREE A.T. (1980). The Geometry of Biological Time. Biomathematics. Springer-Verlag, New-York.

YOUNG L.S. (1986). Stochastic stability of hyperbolic attractors. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 6, 311-319.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

PREMIERE PARTIE

DETECTION DE RYTHMES - ARTICLES DE SYNTHESE ET VULGARISATION.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 1.

E. JOLIVET et al., éd.
Biométrie et Temps (1980) 88-127

APERCU SUR LES SERIES CHRONOLOGIQUES PERIODIQUES.

JACOB Christine

Institut National de la Recherche Agronomique,
78350 JOUY-EN-JOSAS.

RESUME

Cet article propose un aperçu sur les séries chronologiques périodiques : méthodes simplement descriptives, méthodes inférentielles et modèles aux équations différentielles. On fournit quelques exemples d'analyse spectrale.

SUMMARY

An overview on periodical time-series is given : descriptive methods, inferential methods and models derived from differential equations. Some spectral analysis examples are given.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

1.- INTRODUCTION

Notre objectif est de donner quelques aperçus sur chacune des principales méthodes d'analyse d'une série chronologique périodique. Un phénomène qui évolue au cours du temps selon des lois probabilistes est appelé processus stochastique. On note $x_\omega(t)$ ce processus — $x_\omega(t)$ est défini sur un ensemble $\Omega \times T$ où Ω est une population d'individus ω et T est un ensemble indexant le temps (de réels ou d'entiers positifs). L'observation du processus pour un individu ω donné est appelée réalisation. Elle peut être à temps continu (visualisation sur écran d'un électroencephalogramme) ou à temps discret (relevé biquotidien de la température d'un patient). Dans le cas discret, elle est appelée série chronologique. Dans le cas continu, les contraintes pratiques (recours à des calculateurs digitaux) imposeront une discrétisation de l'échelle des temps pour le traitement d'une réalisation. On notera $x(1), x(2), \ldots, X(N)$ une série à pas constant Δt.

$x_\omega(t)$ peut être plus ou moins aléatoire, dans le sens qu'il peut exister un phénomène déterministe sous-jacent au processus, expliquant une plus ou moins grande partie des fluctuations observées :

1. $x_\omega(t) = f(t)$. Le processus est déterministe : il est complètement déterminé par la fonction $f(t)$.

Exemple : $f(t) = a\cos(\lambda t+\phi)$; $f(t)$ est la structure du processus.

1 bis. $x_\omega(t) = f(t) + \varepsilon_\omega(t)$; $x_\omega(t)$ fluctue autour de $f(t)$.

2. $x_\omega(t) = f(t + d_\omega)$ où d_ω est un décalage temporel aléatoire par rapport à l'origine des temps.

Exemple : $x_\omega(t) = a\cos\left(\lambda\left[t + \frac{\phi\omega}{\lambda}\right]\right)$; $d_\omega = \frac{\phi\omega}{\lambda}$

2 bis. $x_\omega(t) = f(t + d_\omega) + \varepsilon_\omega(t)$.

3. $x_\omega(t)$ n'est pas structuré. Les fluctuations du processus sont dues à des liaisons probabilistes entre les variables aux différents instants.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Dans le cas général, même s'il existe une structure $f(t)$ (à un décalage éventuel aléatoire d_ω près, elle est inconnue, et pour connaître le déroulement au cours du temps, il faudrait connaître les lois de distribution des vecteurs $(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_m))$ (quels que soient les instants $t_1 < t_2 \ldots < t_m$). C'est impossible dans la pratique, aussi se limite-t-on aux deux premiers moments, l'espérance et l'auto-covariance, d'autant plus que ces deux moments suffisent pour caractériser la loi sous l'hypothèse de normalité (i.e. toute l'information est contenue dans ces moments). On supposera donc que les moments d'ordre 1 et 2 existent et on note $\mu(t) = Ex_\omega(t)$, l'espérance du processus à l'instant t, $C(t_1, t_2) = E(x_\omega(t_1) - \mu(t_1))(\overline{x_\omega(t_2) - \mu(t_2)})$, l'autocovariance aux instants t_1, t_2, $\sigma^2(t) = C(t,t)$, la variance, et $R(t_1, t_2) = \frac{C(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$, l'autocorrélation (i.e. l'autocovariance du processus réduit $\frac{x(t)}{\sigma(t)}$). C'est un nombre compris entre -1 et +1.

L'espérance au temps t définit la valeur moyenne du processus à cet instant :

1 et 1 bis. $\mu(t) = f(t)$. Le premier moment donne la structure.

2 et 2 bis. $\mu(t) = g(t) \neq f(t)$ où $g(t)$ dépend de la distribution de $d(\omega)$.
Exemple : $x(t) = a\cos(\lambda t + \phi_\omega)$. Si $\phi_\omega = 0$ ou π avec la même probabilité 1/2, alors $\mu(t) = 0$.

3. $\mu(t) = \mu$

Lorsque $\mu(t)$ dépend de t, $\mu(t)$ est appelé la tendance. Mais $\mu(t) = f(t)$, structure du processus, seulement dans le cas d'une structure déterministe (1 et 1 bis) ; la variance au temps t est une mesure de l'écart possible autour de la valeur moyenne à cet instant et l'autocorrélation mesure l'intensité des relations linéaires (et toutes les relations dans le cas gaussien (i.e. normal)) du processus à deux instants différents.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Normalité :on devra supposer la normalité des lois, chaque fois que l'on voudra faire des tests sur des séries de longueur insuffisante pour utiliser la propriété de normalité asymptotique des estimateurs (cf. § 3). D'un point de vue général, les écarts trop grands à la normalité auront deux conséquences, l'une au niveau de la validité des inférences pour des petites séries et l'autre relative à la puissance des moments d'ordre 1 et 2 comme outils descriptifs du processus.

Notre objectif est de tirer d'une (ou plus rarement de plusieurs) réalisation(s) d'un processus, des renseignements sur le phénomène théorique sous-jacent, renseignements de type descriptif ou de type explicatif), les premiers pouvant être l'étape préalable naturelle pour aboutir aux seconds.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2.- METHODES DESCRIPTIVES

2.1. Tracé du profil temporel.

La première étape dans l'analyse est le tracé graphique du profil temporel de la série observée (tracé de x(t) en fonction de t). Ce profil peut donner les premières indications relatives à une structure éventuelle (périodicités, tendances). Mais il doit être interprété avec précaution et n'autorise en général pas à prendre des décisions (elles seront prises à la suite de tests statistiques adéquats). En effet, ce qu'on y voit dépend :

- de l'échelle utilisée, échelle des temps et échelle des valeurs x(t) : avec l'échelle 1 (fig. 1 a), aucune tendance ne se dégage alors qu'avec l'échelle 2 (fig. 1 b) (abscisses comprimées et ordonnées dilatées par rapport à celles de la figure 1 a), une tendance périodique se dégage.

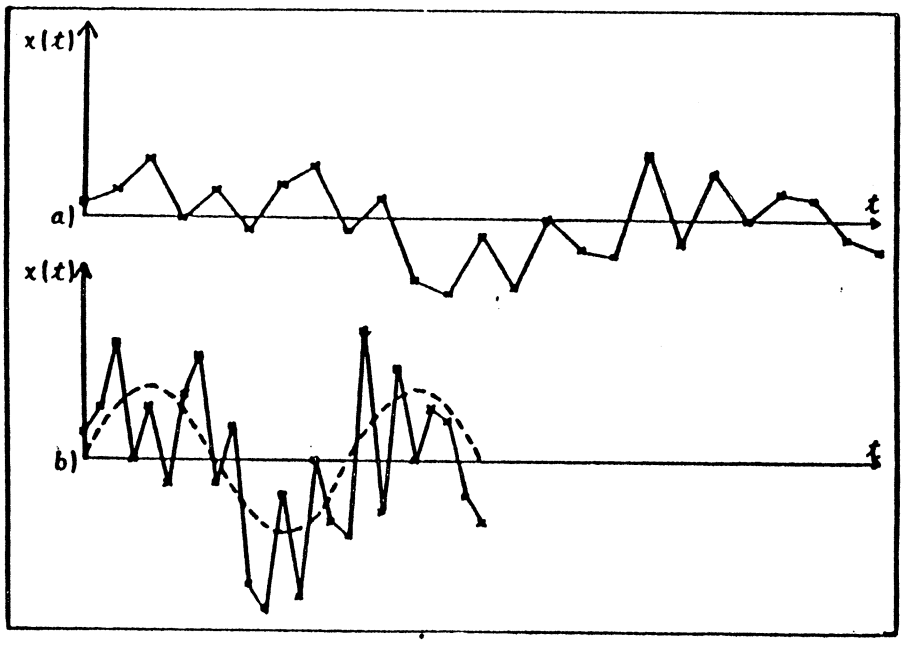


Fig. 1 : Profil temporel (»—«) de la même série observée x(t) selon deux échelles différentes (a) et b)).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- de l'échantillonnage utilisé

i) du pas d'échantillonnage. Exemple : soit un échantillonnage à pas constant $\Delta t=1$. La série observée a une périodicité de 4 alors que le processus théorique a une périodicité de 4/3. C'est l'effet "d'aliasing" (contamination des fréquences de la série). D'une manière générale, les rythmes du processus de fréquence $\lambda > F_e = \frac{2\pi}{2\Delta t}$ (i.e. de période $< 2\Delta t$), ne sont pas détectables sur la série observée et provoquent en plus, en interaction avec la fréquence d'échantillonnage Fe, des rythmes fictifs, de fréquence $\lambda_s = \pm\lambda - (2k)\ Fe$ ($k \in \mathbb{Z}$ ici $k = -1$)

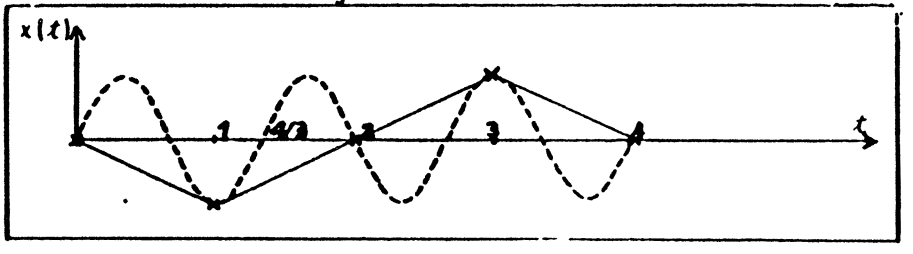


Fig. 2 : Profils temporels du processus théorique (---) et de la série observée associée (——*)*

ii) de la longueur de la série : ce que l'on peut prendre pour une tendance n'est que le début d'un phénomène périodique. (La plus grande période détectable est au plus N/2).

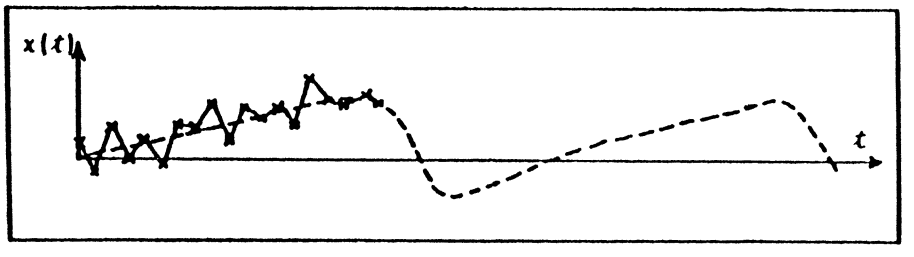


Fig. 3 : Profils temporels du processus théorique (---) et de la série observée associée (——*)*

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

iii) on peut faire apparaître (ou ressortir) une tendance générale ou une structure périodique sur une série très " bruitée ", en lissant la série observée sur un plus ou moins grand intervalle de temps I. (i.e. on étudie la série

$$y(t) = \frac{1}{I+1} \sum_{i=-I/2}^{I/2} x(t+i)$$

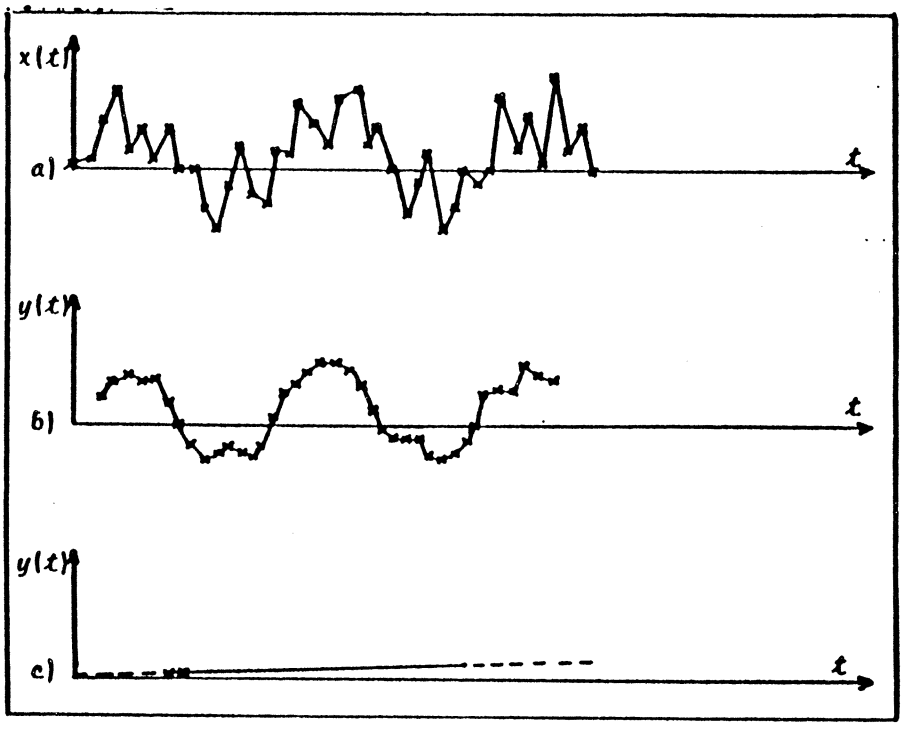


Fig. 4 : *Profils temporels :*

a) *de la série x(t) observée*

b) *de la série lissée avec I=4 : la périodicité ressort plus nettement*

c) *de la série lissée sur une période (I=16) : la tendance linéaire à la croissance apparaît*

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2.2. Analyse spectrale (et périodogramme).

Pour une recherche plus poussée (et plus objective) des périodicités (en particulier de celles non visibles à l'œil nu), on pourra utiliser les techniques de l'analyse spectrale. L'objectif de cette méthode est la décomposition du processus selon des sinusoïdes de fréquences fixes et de phases (et éventuellement d'amplitudes) aléatoires. Pour obtenir cette décomposition, on suppose que le processus est stationnaire ; la définition de la stationnarité stricte est la suivante : pour tout ensemble fini $t_1,\ldots,t_m$ et pour tout h, la loi conjointe de $x_\omega(t_1+h),\ldots x_\omega(t_m+h)$ est la même que celle de $x_\omega(t_1),\ldots, x_\omega(t_m)$. i.e. les propriétés probabilistes du processus sont invariantes au cours du temps. La stationnarité stricte implique la propriété de stationnarité faible relative aux moments d'ordre 1 et 2 :

$$\mu(t) = \mu \text{ et } C(t, t+\tau) = C(\tau) = C(-\tau)$$

où $\tau \in \mathbb{Z}$ si le processus est à temps discret et $\tau \in \mathbb{R}$, s'il est à temps continu).
Ce qui signifie une certaine stabilité du processus : il fluctue autour d'un niveau moyen μ constant avec une dispersion $\sqrt{C(0)}$ constante et sa fonction d'autocovariance ne dépend que de l'écart entre les deux instants considérés.
On sunposera seulement ici la stationnarité faible du deuxième ordre. On montre alors que pour tout fonction d'autocovariance $C(\tau)$ (supposée continue si $\tau \in \mathbb{R}$), il existe une fonction $F(\lambda)$, bornée, non décroissante telle que

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau}\, dF(\lambda) \qquad \text{si } \tau \in \mathbb{R}$$

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda\tau}\, dF(\lambda) \qquad \text{si } \tau \in \mathbb{Z}$$

où $e^{i\lambda\tau} = \cos\lambda\tau + i\sin\lambda\tau$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Cette représentation implique la représentation "spectrale" du processus lui-même,

$$x_\omega(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d\, Z_\omega(\lambda) \qquad \text{si } t \in \mathbb{R}^+$$

$$x_\omega(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda t}\, d\, Z_\omega(\lambda) \qquad \text{si } t \in \mathbb{N}$$

où $Z_\omega(\lambda)$ est une fonction aléatoire définie à partir de F telle que

$$E(d\, Z_\omega(\lambda)\, \overline{d\, Z_\omega(\mu)}) = 0 \qquad \text{si } \lambda \neq \mu,$$

$$= dF(\lambda) \qquad \text{si } \lambda = \mu$$

la fonction $F(\lambda)$ se décompose en général selon une composante discrète $Fd(\lambda)$ et une composante absolument continue $Fa(\lambda)$ possèdant une dérivée continue $f(\lambda) = \frac{dFa(\lambda)}{d\lambda}$.

La quantité $S(\lambda) = \lim_{d\lambda \to 0} \left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\right)$

est le spectre du processus à la fréquence λ et vaut :

$$S(\lambda) = \lim_{d\lambda \to 0} \left(\frac{dFd(\lambda)}{d\lambda} + \frac{dFa(\lambda)}{d\lambda}\right)$$

$$= \sum_{\nu \in \mathcal{V}} p_\nu \lim_{d\lambda \to 0} \frac{\lambda(\nu)}{d\lambda} + f(\lambda)$$

où $\lambda(\nu) = 1$ si $\lambda = \lambda_\nu$ et $\lambda(\nu) = 0$ sinon.

Pour $\lambda = \lambda_\nu$ $(\nu \in \mathcal{V})$ $\quad S(\lambda_\nu) = p_\nu \lim_{d\lambda \to 0} \frac{1}{d\lambda_\nu} + f(\lambda_\nu) = \infty$

et pour $\lambda \neq \lambda_\nu$ $(\nu \in \mathcal{V})$, $S(\lambda) = f(\lambda) < \infty$.

Le spectre possède donc des raies infinies en chaque valeur λ_ν de la composante discrète et permet ainsi de repérer celle-ci.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Remarque. Si $x_\omega(t)$ est réel, le spectre est pair :

$S(\lambda) = S(-\lambda)$, il suffit alors d'étudier $S(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$.

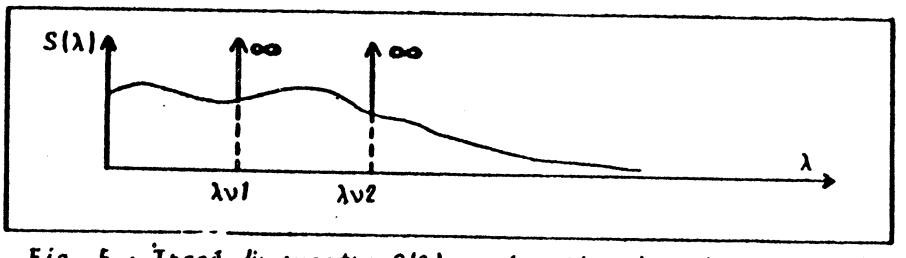


Fig. 5 : Tracé du spectre $S(\lambda)$ en fonction de λ ($\lambda \geq 0$)

$C(0) = \int dF(\lambda)$.

$= \sum p_\nu + \int f(\lambda)\, d\lambda$, est la puissance totale du processus. C'est la somme des puissances (p_ν ou $f(\lambda)\, d\lambda$) en chaque fréquence.

Remarque. Justification de l'étude du spectre $S(\lambda)$ pour la recherche des périodicités du processus :

soit $x_\omega(t) = z_{\omega_0} + \sum_{j>0} a_j \cos(\lambda_j t + \phi_{\omega j})$ - en utilisant la décomposition $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, on écrit

$x_\omega(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_{\omega j} e^{i\lambda_j t}$ (A) où $\lambda_0 = 0$; $\lambda_{-j} = -\lambda_j$ et

où $z_{\omega j} = \frac{a_j}{2} e^{i\phi_{\omega j}}$ et $z_{\omega -j} = \overline{z_{\omega j}}$ pour $j > 0$ - $x_\omega(t)$ est appelé processus pseudo-périodique.

Stationnarité du premier ordre :

$$\mu(t) = E z_{\omega_0} + \sum_{j \neq 0} E(z_{\omega j})\, e^{i\lambda_j t}$$

$\mu(t) = \mu \vee t$, si et seulement si $E z_{\omega j} = 0$ ($j > 0$), i.e.

$$E e^{i\phi_{\omega j}} = 0 \longleftrightarrow E \cos\phi_{\omega j} = 0 \text{ et } E \sin \phi_{\omega j} = 0 \qquad (B)$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

(par exemple, $\phi_{\omega j} = \phi_j$ ou $\phi_j + \pi$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$).

Alors $\mu(t) = \mu = E z_{\omega 0}$

Stationnarité du second ordre :

$$C(t, t-\tau) = \sum E \left| \overset{\circ}{z}_{\omega_j} \right|^2 e^{i\lambda_j \tau} +$$

$$+ \sum_{\substack{j \neq k \\ j \neq -k}} E \overset{\circ}{z}_{\omega_j} \overline{\overset{\circ}{z}_{\omega_k}} e^{i[\lambda_j t - \lambda_k (t-\tau)]} +$$

$$+ \sum_{j \neq 0} E(\overset{\circ}{z}_{\omega_j}^2) e^{i2\lambda_j t} \cdot e^{-i\lambda_j \tau} \quad \text{où } \overset{\circ}{z}\omega j = z\omega j - E\, z\omega j$$

$C(t, t-\tau) = C(\tau)$ si et seulement si,

i) $E \overset{\circ}{z}_{\omega_j} \overline{\overset{\circ}{z}_{\omega_k}} = 0 \quad j \neq k, j \neq -k$

i.e. cov $z_{\omega_j} z_{\omega_k} = 0$. les sinusoïdes $e^{i\varphi_{\omega_j}}$ et $e^{i\phi_{\omega_k}}$ $(j,k \neq 0)$

ne sont pas corrélées, mais attention !, cela ne signifie pas que les déphasages ϕ_{ω_j} et ϕ_{ω_k} ne le soient pas.

(cf. § 2.1.).

ii) $E\, z_{\omega_j}^2 = 0$ i.e. $E\, e^{2i\phi_{\omega j}} = 0 \qquad (j \neq 0)$

$\Longleftrightarrow E \cos 2\phi_{\omega_j} = 0$ et $E \sin 2\phi_{\omega_j} = 0$ (C)

(C) et (B) sont réalisés simultanément si ϕ_{ω_j} suit une loi uniforme sur un intervalle de longueur 2π, $[-\pi, +\pi]$ par exemple. (Tous les déphasages sont également possibles donc tous les décalages temporels par rapport à l'origine sont également possibles.)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

On a alors

$$C(\tau) = \sum_{j\neq 0} E\,|z_{\omega_j}|^2\, e^{i\lambda_j\tau} + E|z\omega o - \mu|^2$$

$$= 2 \sum_{j>0} E\,\left|z_{\omega_j}\right|^2 \cos \lambda_j\tau + E|z\omega o - \mu|^2$$

où $E\,|z_{\omega_j}|^2 = p_j = \frac{a_j^2}{4}$ est la puissance en λ_j et $E|z\omega o - \mu|^2 = p o$

Le spectre de $C(\tau)$ est discret et composé des mêmes fréquences λ_j (cf (A)) que le processus. La masse en λ_j est $p_j = E\,|z_{\omega_j}|^2 = a_j^2/4$ où a_j est l'amplitude en λ_j.

Réciproquement, on montre qu'à tout spectre discret, est associé un processus ayant des composantes discrètes aux mêmes fréquences.
On étudiera donc non pas les fonctions spectrales $dZ_\omega(\lambda)$, aléatoires, mais le spectre $S(\lambda)$ associé à la fonction d'autocovariance, entité non aléatoire. C'est la caractéristique du second ordre du processus dans l'espace des fréquences. Les fréquences λ_ν où le spectre est infini sont les composantes discrètes du processus. La différentielle

$$\lim_{d\lambda\to o} dF(\lambda) = \sum_{\nu\in V} p_\nu\, \lambda(\nu) + \lim_{d\lambda\to o} f(\lambda)\, d\lambda$$

$$= p_\nu \qquad \text{si } \lambda = \lambda_\nu$$

$$= 0 \qquad \text{si } \lambda \neq \lambda_\nu \;;\; \nu \in V$$

permet de connaître la puissance p_ν en chaque fréquence λ_ν de la composante discrète. ($p_\nu = \frac{a_\nu^2}{4}$)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2.2.1. Exemples de processus à spectre discret.

a) $x_\omega(t)$ est sinusoïdal de période $\mathcal{C}$

$$x_\omega(t) = z_{\omega_0} + a\cos(\lambda t + \phi_\omega) \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\mathcal{C}}$$

$$= \sum_{j=-1}^{+1} z_{\omega_j} e^{i\lambda_j t} \quad \text{où} \quad z_{\omega_j} = \frac{a}{2} e^{ij\phi_\omega} \qquad j \neq 0$$

z_{ω_0} est le niveau moyen de la sinusoïde observée relative à l'individu ω, ϕ_ω, le déphasage et ϕ_ω/λ, le décalage temporel par rapport à l'origine des temps. $\mu(t) = Ez_{\omega_0}$ est le niveau moyen du processus.

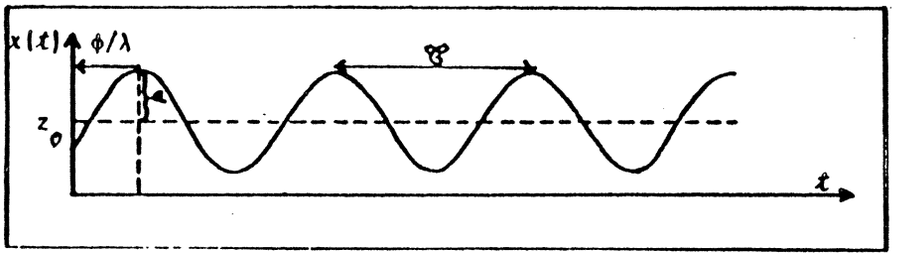


Fig. 6 : Profil temporel du processus sinusoïdal $x_\omega(t)$ pour un individu ω donné.

$C(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\lambda\tau + p_0$. Le spectre possède une raie en λ .

b) $x_\omega(t)$ est périodique de période $\mathcal{C}$.

$$x_\omega(t) = z_{\omega_0} + \sum_\nu a_\nu \cos(\lambda_\nu t + \phi_{\omega\nu}) \qquad \text{où} \quad \lambda_\nu = \frac{2\pi\nu}{\mathcal{C}}$$

$$= \sum_\nu z_{\omega_\nu} e^{i\lambda\nu t} \qquad \text{où} \quad z_{\omega_\nu} = \frac{a_\nu}{2} e^{i\phi_{\omega\nu}}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Exemple : $x_\omega(t)$ est somme de 2 sinusoïdes

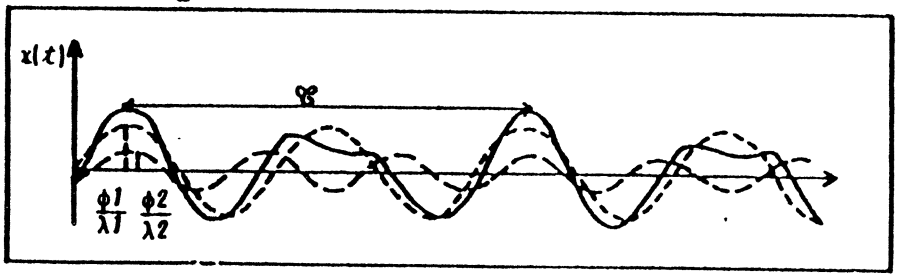


Fig. 1 : Profil temporel du processus périodique $x\omega(t)$ pour un individu ω donné.

le décalage temporel entre les 2 est $d = \phi_1/\lambda_1 - \phi_2/\lambda_2$.

Si ce décalage est constant (modulo $\mathcal{C}$) (i.e. ne dépend pas de ω), le processus est structuré. Sinon, le profil temporel du processus somme des deux sinusoïdes à chaque instant dépend de la valeur de d_ω, i.e. de l'individu ω.

Un processus périodique structuré est donc tel que pour tout couple de sinusoïdes de fréquences

$$\lambda_{\nu i} = \frac{2\pi\nu_i}{\mathcal{C}} \quad , \qquad \lambda_{\nu_j} = \frac{2\pi\nu_j}{\mathcal{C}} \quad ,$$

le décalage temporel est fixe (modulo π)-

On a donc $\dfrac{\phi_{\omega_i}}{\nu_i} = \phi_\omega + \theta_i$.

$$\frac{\phi_{\omega_j}}{\nu_j} = \phi_\omega + \theta_j \quad ; \quad \text{où } \phi_\omega \text{ suit une loi uniforme}$$

sur $(-\pi, +\pi)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$E\, z_{\omega\nu i}\ \overline{z_{\omega\nu j}} = \frac{a_{\nu_i} a_{\nu_j}}{4} E\, e^{i(\phi_{\omega_i} - \phi_{\omega_j})}$$

$$= \frac{a_{\nu_i} a_{\nu_j}}{4} E\, e^{i(\phi\omega(\nu_i - \nu_j) + K_{ij})}$$

$$= 0 \quad \text{car } E\, e^{ik\phi_\omega} = 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

les sinusoïdes $z_{\omega\nu i}$ et $z_{\omega\nu j}$ sont non corrélées mais les déphasages associés le sont. En conclusion, un processus périodique structuré est stationnaire du second ordre (si ϕ_ω suit une loi uniforme sur $[-\pi, +\pi]$).

$$C(\tau) = \sum_{\nu \neq 0} E|z_{\omega_\nu}|^2 e^{i\lambda_\nu \tau} + E|z\omega o - \mu|^2$$

$$= \sum_{\nu > 0} \frac{a_\nu^2}{2} \cos \lambda_\nu \tau + po$$

le spectre possède des raies aux fréquences $\frac{2\pi\nu}{\mathcal{T}}$, harmoniques de la fréquence fondamentale $\frac{2\pi}{\mathcal{T}}$.

Remarque . Si $x_\omega(t)$ est à temps discret et de période entière T, alors

$$x_\omega(t) = \sum_{-[T/2]}^{[T/2]} z_{\omega_\nu} e^{i\lambda_\nu t} \quad \text{où} \quad \lambda_\nu = \frac{2\pi\nu}{T}$$

et $[u]$ note la partie entière de u, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à u.

$$x_\omega(t) = z_{\omega_o} + \sum_{\nu=1}^{[T/2]} a_\nu \cos(\lambda_\nu t + \phi_{\omega_\nu})$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Conséquence : si $x(t)$ est une série observée ($t = 1 \ldots N$) d'un processus quelconque (périodique ou non, à temps continu ou discret) alors,

$$x(t) = z_0 + \sum_{\nu=1}^{[N/2]} a_\nu \cos(\lambda_\nu t + \phi_\nu).$$

La série observée peut être représentée exactement par

$[N/2]$ sinusoïdes de fréquences $2\pi\nu/N$ où $\nu = 1 \ldots [N/2]$.

c) Exemple particulier de processus pseudo-périodique.

Une moyenne de deux sinusoïdes de même amplitude (fixe) et de périodes voisines, est un processus sinusoïdal de période, la moyenne des deux périodes et d'amplitude fonction du temps, s'amortissant peu à peu, puis repartant et ainsi de suite. Un certain nombre de réactions biochimiques provoquent des oscillations de ce type.

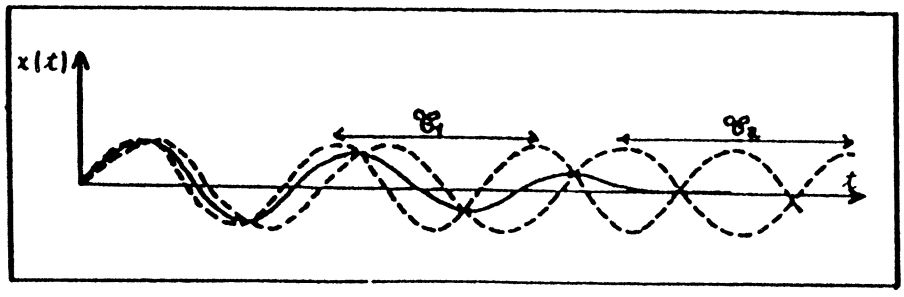


Fig. 8 : Oscillations périodiques (——) d'amplitude variant avec le temps. Le processus est la moyenne de deux processus sinusoïdaux (---) de même amplitude et de périodes voisines $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2.2.2. Exemples de processus à spectre continu

$$C(\tau) = \int e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \quad \text{et} \quad x_\omega(t) = \int e^{i\lambda t} z_\omega(\lambda)\, d\lambda.$$

a) Bruit blanc $\varepsilon_\omega(t)(t \in \mathbb{N})$: c'est un processus à temps discret tel que les $(\varepsilon_\omega(t))_{t\in\mathbb{N}}$ ont la même distribution centrée . $E\,\varepsilon_\omega(t) = 0$, et sont indépendants.

$\varepsilon_\omega(t)$ est stationnaire du second ordre.

$$E\,\varepsilon_\omega(t)\overline{\varepsilon_\omega(s)} = \sigma_\varepsilon^2\ \delta_{st} \quad \text{que l'on peut écrire}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda(t-s)}\, \frac{d\lambda}{2\pi}$$

par conséquent $\varepsilon_\omega(t)$ possède une densité spectrale constante égale à $\sigma_\varepsilon^2/2\pi$.
Notation : $\varepsilon_\omega(t) \sim$ I.D.$(0,\sigma_\varepsilon^2)$ (indépendamment distribués d'espérance nulle et variance σ_ε^2) si de plus $\varepsilon_\omega(t)$ est normal alors les $\varepsilon_\omega(t)$ sont I.N.D. $(0,\sigma_\varepsilon^2)$.

b) Somme de bruits blancs

Soit $x_\omega(t) = \sum_{j=-\infty}^{-\infty} a_j\, \varepsilon_\omega(t-j)$ où les $\varepsilon_\omega(t-j)$ sont des bruits blancs.

Alors on montre que

$dF_x(\lambda) = |\phi(e^{-i\lambda})|^2\, dF_\varepsilon(\lambda)$ où $\phi(z) = \sum_j a_j z^j$. $x_\omega(t)$ possède une densité spectrale $f_x(\lambda) = |\phi(e^{-i\lambda})|^2\, \sigma_\varepsilon^2/2\pi$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Estimations. En général, on ne dispose que d'une réalisation et l'hypothèse de stationnarité implique en quelque sorte que les N observations de la série peuvent être considérées comme des répétitions d'un même phénomène. On utilise alors les estimations temporelles à partir des N observations de la série. On suppose la série à pas constant.

La moyenne empirique est $M_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} x(t)$

La covariance empirique est

$$C_N(u) = \frac{1}{N-u} \sum_{t=1}^{N} (x(t)-M_N)(x(t+u)-M_N) \quad u \geq 0$$

Le spectre empirique est

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^{N} e^{i\lambda t} x(t) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi N} \left[\left[\Sigma \cos \lambda t . x(t) \right]^2 + \left[\Sigma \sin \lambda t . x(t) \right]^2 \right]$$

Propriétés des estimateurs (dans ce qui suit la condition $\Delta t \to 0$ est à considérer lorsque $x_\omega(t)$ est à temps continu).

- $E\, M_{\omega N} = \mu$. $M_{\omega N}$ est sans biais

$M_{\omega N} \xrightarrow[N \to \infty]{(\Delta t \to 0)} z_{\omega_o}$ où $E\, z_{\omega_o} = \mu$. (si $z_{\omega_o} = \mu$ alors $M_{\omega N}$ est un "bon" estimateur de μ).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- $E\, C_{\omega N}(u) = \frac{N-u}{N} C(u)$ $\qquad u \in \mathbb{N}$

$E\, C_{\omega N}(u) \xrightarrow[N \to \infty]{} C(u)$ $\quad C_N(u)$ est asymptotiquement sans biais et $C_{\omega N}(u) \xrightarrow[N \to \infty]{(\Delta t \to 0)} C(u)$ si le spectre n'a pas de composante discrète (sous l'hypothèse de normalité). Dans ce cas, $C_{\omega N}(u)$ est un bon estimateur de $C(u)$.

- si $x_\omega(t) = \Sigma_\nu z_{\omega\nu}\, e^{i\lambda\nu t} + \varepsilon_\omega(t)$
$t \in \mathbb{N}$ où $\varepsilon_\omega(t) \sim I.D(0,\sigma^2)$,

alors $EI_{\omega N}(\lambda_\nu) = \frac{P_\nu}{2\pi/N} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$ $\quad 2\pi/N = \frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi(j-1)}{N}$ $(j=1\ldots [N/2])$ est l'intervalle fréquentiel d'échantillonnage associée à la série. On pose $2\pi/N = d\lambda_N$.

$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$ est la densité spectrale de $\varepsilon_\omega(t)$, i.e. la densité spectrale de la composante continue de $x_\omega(t)$. On a donc

$EI_{\omega N}(\lambda_\nu) = \frac{dF_N(\lambda_\nu)}{d\lambda_N}$ $\forall\, \lambda_\nu$ et plus généralement

$$EI_{\omega N}(\lambda) \xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ (\Delta t \to 0)}]{} S(\lambda)$$

le spectre empirique est asymptotiquement sans biais.

Remarque.

$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda u}\, C_N(u)$ et $C_N(u) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda u}\, I_N(\lambda)\, d\lambda$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Le spectre empirique et la covariance empirique sont équivalents. On utilisera le premier dans le cas où le processus risque de possèder une composante discrète et le deuxième lorsque son spectre est continu (cf. § 3.2.).

$I_N(\lambda)$ est défini pour $\lambda \in [0,\pi]$ où π est la fréquence d'échantillonnage (de période 2). c'est la plus petite fréquence observable.

On a $I_{\omega N}(\lambda) \not\longrightarrow S(\lambda)$ car $\mathrm{var} I_{\omega N}(\lambda) \not\longrightarrow 0$. Pour pallier ceci (i.e. diminuer $\mathrm{var} I_{\omega N}(\lambda)$), on lisse ou on pondère $I_{\omega N}(\lambda)$ par une fonction dite fenêtre spectrale.

On appelle périodogramme de Shuster les $[N/2]$ valeurs $I_N(\lambda_j)$ où les λ_j sont les fréquences $2\pi j/N$ associées à la série observée

$$x(t) = \sum_{j=-[N/2]}^{[N/2]} z_j \, e^{i\lambda_j t}$$

On désigne aussi (sous le même nom) la quantité $\frac{8\pi}{N} I_N(\lambda_j)$ qui estime a_j^2 le carré de l'amplitude en λ_j. (cf. § 3.1.).

Dans la pratique, on peut utiliser en première approximation le périodogramme et s'il ne permet pas de mettre en évidence des périodes significatives (cf. § 3.1.), on utilisera le spectre lissé. Les périodes éventuellement détectées se traduiront par des pics prononcés sur la courbe du spectre lissé. On vérifiera que ces maximas relatifs correspondent à des pics du périodogramme.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Stationnarité. Il n'existe pas de test de stationnarité : en effet on peut toujours, au vu d'une seule série, supposer la stationnarité (et même la stationnarité stricte) du processus générateur. Reste à savoir si une telle hypothèse est légitime (vis à vis du phénomène biologique sous jacent). Par exemple, un phénomène circadien de décalage nul par rapport au synchronisateur nuit/jour, ne peut être supposé stationnaire du premier ordre. Un tel processus possède une tendance périodique circadienne.

2.3. Analyse harmonique (DEVILLE, 1974)

C'est une méthode qui s'adresse aux processus à structure déterministe. On dispose de N séries à pas constant, réalisations d'un même processus à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2(0,T)$ muni d'un produit scalaire $(x/y) = \int_0^T x(t)\, y(t)\, dt$. Il existe visiblement une structure commune à ces séries, structure que l'on voudrait expliquer à partir de fonctions élémentaires facilement interprétables représentant par exemple, l'une une tendance générale à la croissance, une autre un certain phénomène périodique etc...

On cherche donc la décomposition

$$x_\omega(t) = \sum_k z_{\omega k} f_k(t)$$

les fonctions $f_k(t)$ sont déterminées à partir de l'opérateur d'autocovariance C du processus. On montre que

$C = \sum_k \lambda_k (f_k \otimes f_k)$ (où $f_k \otimes f_k$ est le projecteur sur le sous espace de dimension 1 engendré par f_k :

$(f_k \otimes f_k)\, y = (y/f_k)_{L^2} f_k$.) - $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_k \ldots$ sont les valeurs propres positives décroissantes vers 0 de C, et $f_1, \ldots f_k$ sont les vecteurs propres associés. Les fonctions f_k sont orthonormées dans $L^2(T)$ - C est défini à partir de la matrice d'autocovariance $C(t, u) = \sum_k \lambda_k f_k(t) f_k(u)$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

On décompose alors le processus selon la base f_k,

$$x_\omega(t) = \sum_k (x_\omega / f_k)\, f_k(t)$$

où les $z_{\omega_k} = (x_\omega / f_k)$ sont des variables aléatoires non corrélées (et ne dépendant pas du temps). Les f_k sont les "harmoniques" du processus.

.Estimations et tests. Les estimations sont les estimations habituelles relatives à un $\mathcal{N}$ échantillon. Sous l'hypothèse de normalité des lois du processus, il existe des tests de l'hypothèse : "la fonction $f(t)$ donnée n'est pas une harmonique du processus". Le parallèle avec l'analyse spectrale est évident. Deux choses diffèrent essentiellement dans les deux méthodes :

i) l'une (l'analyse harmonique) s'adresse aux processus structurés à décalage temporel fixe, et l'autre aux processus (stationnaires), à décalage temporel aléatoire lorsqu'ils sont structurés.

ii) l'une trouve ses fonctions élémentaires de décomposition à partir de la matrice d'autocovariance du processus (mais ne donne pas leur expression analytique) et dans l'autre les fonctions sont les sinusoïdes $(e^{i\lambda t})_\lambda$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.- METHODES DESCRIPTIVES INFERENTIELLES

3.1. Modèles à moyenne.

On suppose (grâce, par exemple, aux méthodes descriptives du § 2)

$$x_\omega(t) = f_\theta(t+d_\omega) + z_\omega(t)$$

où d_ω est un décalage temporel éventuellement aléatoire. S'intéressant à la structure $f_\theta(t)$, on suppose d_ω fixé (par exemple nul) et on étudie $f_\theta(t)$, i.e. on estime les paramètres θ et on teste éventuellement leur nullité.

Exemple : 1. $x_\omega(t) = \mu + z_\omega(t)$ $\quad f(t)$ est constante

2. $x_\omega(t) = \mu + \sum_{j=1}^{m} a_j \cos(\lambda_j t + \phi_j) + z_\omega(t)$

où $\lambda_j = \frac{2\pi j}{\mathcal{C}}$ $\quad f(t)$ est une fonction périodique de période $\mathcal{C}$.

3. $x_\omega(t) = \mu + \phi(t) + z_\omega(t)$ où $\phi(t)$ est une fonction quelconque, par exemple une fonction périodique (non décomposée en sinusoïdes).

Estimations. Les estimations sont celles des moindres carrés (principe de la régression) : ce sont les valeurs qui minimisent la somme des carrés résiduels $\sum_t (z_\omega(t))^2$.

Tests. D'une manière générale :

- si le modèle est linéaire en fonction des paramètres, i.e. $f_\theta(t) = \theta g(t)$, et que les résidus $z_\omega(t)$ sont I.N.D.$(0, \sigma^2)$, on peut tester la nullité des paramètres avec des séries de longueur quelconque.

- si le modèle n'est pas linéaire et que les $z_\omega(t)$ sont I.D.$(0, \sigma^2)$ (normaux ou non) les tests sont asymptotiquement valables (plus la série est longue et plus fiables sont les tests).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Les principaux modèles sont (mais on peut en inventer d'autres, la liste n'est pas limitative !) :

3.1.1. Whittaker et Robinson. (suppose une série à pas constant $t = 1 \ldots N$).

Le modèle est $x_\omega(t) = \mu + \psi(t) + \varepsilon_\omega(t)$. Les $\varepsilon_\omega(t)$ sont I.N.D.$(0,\sigma^2)$ - $\psi(t)$ est supposé périodique de période p égale à un nombre entier de mesures. La forme analytique de $\psi(t)$ n'est pas précisée. On découpe la série en intervalles de longueur p et on regarde dans quelle mesure les valeurs de x dans ces intervalles peuvent être considérés comme des répétitions d'une même mesure. On peut tester la nullité simultanée des $\psi(j)$ $(j = 1 \ldots p)$ (i.e. il n'y a pas d'effet périodique) par le test de l'analyse de variance à un facteur. Dans la pratique, p est inconnu et on cherche à fixer sa valeur. La meilleure sera celle qui minimisera la somme des carrés résiduels $S^2(p) = \sum_t (\varepsilon_\omega(t))^2$.
On trace alors $S^2(p)$ en fonction de p. C'est le périodogramme de Wittaker et Robinson. On choisira comme période, la valeur p_o minimum donnant lieu à un test significatif (rejet de l'hypothèse testée) et telle que $2p_o$, $3p_o \ldots$ soient aussi des minimas (un phénomène périodique de période p est également périodique de période kp - k entier).
Une fois détectée la valeur de p, on tracera la courbe $\psi(j)$, $j = 1 \ldots p$. Ce peut être la point de départ d'une nouvelle analyse pour laquelle la forme analytique de ψ est précisée. Cette méthode est particulièrement adaptée pour détecter des phénomènes périodiques, par exemple du type pics, très différents de sinusoïdes. Les modèles suivants s'adressent au contraire à des modèles sinusoïdaux ou qui s'expriment en fonction d'un petit nombre de sinusoïdes.

3.1.2. Modèle de Shuster. (une série à pas constant $t = 1 \ldots N$). Le modèle est,

$$x_\omega(t) = \mu + \sum_{j=1}^{q} a_j \cos(\lambda_j t + \phi_j) + \varepsilon_\omega(t)$$

où les $\varepsilon_\omega(t)$ sont I.N.D.$(0, \sigma^2)$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$x_\omega(t) = \upsilon + \sum_{j=1}^{q} (b_j \cos \lambda_j t + c_j \sin \lambda_j t) + \epsilon_\omega(t).$$

avec $\lambda_j = \frac{2\pi kj}{N}$. $1 \leq kj \leq [N/2]$

les estimateurs sont

$$\hat{\upsilon} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x(t)$$

$$\hat{b}_j = \frac{2}{N} \sum_{1}^{N} x(t) \cos \lambda_j t$$

$$\hat{c}_j = \frac{2}{N} \sum_{1}^{N} x(t) \sin \lambda_j t$$

il existe un test de nullité de $a_j^2 = b_j^2 + c_j^2$.

Le périodogramme de Shuster

(graphe de $\hat{a}_j^2 = \hat{b}_j^2 + \hat{c}_j^2$ $(= \frac{8\pi}{N} I_N(\lambda_j))$ $j = 1 \ldots [N/2]$),

permet de repérer comme fréquences significatives du processus, non seulement les $\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$ mais aussi les fréquences $\lambda \in]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, associées à deux pics voisins du périodogramme (en λ_j et λ_{j+1}). Pour ces dernières, le modèle n'estime pas l'amplitude associée. C'est donc davantage une méthode de recherche des périodicités qu'une méthode d'ajustement à un modèle approprié.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.1.3. Régression périodique. C'est le modèle de Shuster, relatif à un $\mathcal{N}^2$ échantillon du même processus.

3.1.4. Walker. (modèle pseudo périodique de fréquences inconnues et quelconques). (Une série à pas constant $t = 1 \ldots N$).

$$x_\omega(t) = \mu + \sum_{j=1}^{q} a_j \cos(\lambda_j t + \phi_j) + \varepsilon_\omega(t)$$

où les $\varepsilon_\omega(t)$ sont I.N.D.$(0,\sigma^2)$. Les λ_j sont estimées par maximisation du spectre empirique. Les estimateurs des μ, $b_j = a_j \cos \phi_j$, $c_j = a_j \sin -\phi_j$ sont ceux de Shuster mais leurs propriétés sont asymptotiques (modèle non linéaire). Cette méthode est plus souple que celle de Shuster (permet l'ajustement à un modèle où les fréquences sont quelconques) mais les tests ne sont fiables que pour de longues séries.

3.1.5. Walker-Hannan. (modèle sinusoïdal de fréquence inconnue) (une série à pas constant $t = 1 \ldots N$)

$$x_\omega(t) = \mu + a\cos(\lambda t + \phi) + z_\omega(t)$$

où $z_\omega(t) = \sum_{j>0} a_j \varepsilon_\omega(t-j)$. Les $\varepsilon_{\omega(t-j)}$ sont des bruits blancs (pas nécessairement gaussiens) λ est inconnu et estimé.
Les tests sont asymptotiques.

3.1.6. Cosinor. Modèle relatif à une sinusoïde de fréquence λ connue. Il suppose soit,

i) plusieurs séries mesurées aux mêmes instants t_{ij}

ii) ou plusieurs séries mesurées chacune avec un pas constant Δt_i (non nécessairement identique d'une série à l'autre) et i telles que chacune contienne un nombre entier de périodes $T = 2\pi/\lambda$.

iii) ou une série découpée en intervalles de longueur T et vérifiant i) ou ii). Le modèle est,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$x_\omega(t_{ij}) = \mu + a_i \cos(\lambda t_{ij} + \phi_i) + \varepsilon_\omega(t_{ij})$$

$$= \mu + b_i \cos \lambda t_{ij} + c_i \sin \lambda t_{ij} + \varepsilon_\omega(t_{ij})$$

$$\varepsilon_\omega(t_{ij}) \sim \text{I.N.D.}(0, \sigma^2) \qquad i = 1 \ldots k,\ j = 1 \ldots n_i$$

b_i et c_i sont estimés pour chaque série i. On suppose alors que les estimations $\hat{b}_i$ et $\hat{c}_i$ sont les observations relatives à k variables indépendamment distribuées (vrai si les séries sont indépendantes), de loi normale (vrai si les $\varepsilon_{\omega ij}$ sont I.N.D.$(0, \sigma_i^2)$), de même espérance b et c (vrai si les séries sont les réalisations d'un même phénomène dans les mêmes conditions) de même matrice de variance covariance (vrai si on a i) ou ii)). On teste la nullité simultanée de b et c grâce au test de Fisher de l'analyse de variance relatif à la moyenne d'une population, et utilisant simplement le fait que les $\hat{b}_i$ et les $\hat{c}_i$ sont k observations d'une même loi normale. Ce qui permet d'avoir une région de confiance (ellipse) simultanée des deux paramètres et donc une région de confiance simultanée des paramètres a et ϕ.

3.1.7. Tong (1976). Le modèle est le même que celui du cosinor

$$x_\omega(t_{ij}) = \mu + a_i \cos(\lambda t_{ij} + \phi_i) + \varepsilon_\omega(tij).$$

où les $\varepsilon_{\omega ij}$ I.N.D.$(0, \sigma^2)$. $\quad i = 1 \ldots k,\ j = 1 \ldots n_i$.

Mais les instants de mesure t_{ij} sont quelconques. On estime série par série les paramètres b_i et c_i et on teste la nullité des paramètres moyens $b = \Sigma_i k_i b_i$, $c = \Sigma_i k_i c_i$ (où $\Sigma k_i = 1$) grâce aux estimateurs $\hat{b} = \Sigma k_i \hat{b}_i$, $\hat{c} = \Sigma k_i \hat{c}_i$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

qui suivent une loi normale d'espérance (b,c) et de matrice de variance covariance fonction des $\cos \lambda t_{ij}$ et $\sin \lambda t_{ij}$ (test d'analyse de régression). On obtient également une ellipse de confiance simultanée des paramètres b et c, donc de a et ϕ. Mais le test utilise davantage d'information que le test du cosinor (à savoir celle relative à la structure du modèle donnée par les $\cos \lambda t_{ij}$ et $\sin \lambda t_{ij}$) et est donc probablement meilleur que celui du cosinor. Par ailleurs, le test de Tong est plus souple, puisqu'il autorise des instants t_{ij} absolument quelconques.

Dans tous ces modèles, ϵ représente "l'erreur" au modèle et comprend à la fois les erreurs de mesure, les écarts dus à un modèle insuffisant ou inadéquat et les perturbations aléatoires dues à d'autres phénomènes. Les tests d'ajustement sont significatifs (i.e. rejet de l'hypothèse de nullité des paramètres du modèle) lorsque les variations dans la série dues au modèle choisi et estimé sont "suffisamment" importantes par rapport aux résidus $\epsilon(t)$. Pour les tests supposant des $\epsilon_\omega(t)$ I.N.D.$(0,\sigma^2)$, un faible écart à la normalité n'est pas grave (des lois unimodales très dissymétriques ou des lois bimodales représentent un fort écart à la normalité). Des tests de normalité existent (par exemple, test du χ^2 d'ajustement à une loi donnée).

Par contre une hétérogénéité des variances (que l'on pourra tester si non dispose de plusieurs séries) et une non indépendance des erreurs ne rendent pas fiables le test utilisé. Comment se rendre compte si les résidus sont indépendants ou non : s'ils sont systématiquement alternativement positifs et négatifs, c'est qu'il existe un phénomène de répulsion d'un instant à l'autre. Les $\epsilon_\omega(t)$ ne sont alors pas indépendants. De même, si on a des séries consécutives trop longues de valeurs positives (resp. négatives), les $\epsilon_\omega(t)$ subissent un phénomène d'entrainement. Les tests du run basés sur ce principe, permettent de tester leur indépendance. Si les $\epsilon_\omega(t)$ ne sont pas indépendants, c'est que,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

1. soit $\epsilon_\omega(t)$ est stationnaire mais possède une composante spectrale discrète :

$$\epsilon_\omega(t) = \sum_\nu z_{\omega\nu} e^{i\lambda_\nu t} + \epsilon^*_\omega(t)$$

alors

$$\text{cov}\epsilon_\omega(t)\epsilon_\omega(s) = E\epsilon_\omega(t)\overline{\epsilon_\omega(s)} = \sum_\nu E|z_{\omega_\nu}|^2 e^{i\lambda\nu(t-s)} + E\epsilon^*(t)\,\epsilon^*(s)$$

$\neq 0$ en général, à cause du premier terme.

2. soit $\epsilon_\omega(t)$ possède une tendance : le modèle supposé de $x_\omega(t)$ est inadéquat ou incomplet :

$$\epsilon_\omega(t) = g(t) + \epsilon^*_\omega(t)$$

et donc $E\epsilon_\omega(t)\overline{\epsilon_\omega(s)} = g(t)\,g(s) + \ldots.$

$\neq 0$ en général

3. $\epsilon_\omega(t)$ est stationnaire à densité spectrale mais $\epsilon_\omega(t)$ est à mémoire :

$$\epsilon_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, \epsilon^*(t-j)$$ où les $\epsilon^*(t-j)$ sont des bruits blancs.

Il faudra donc choisir entre ces trois possibilités (en étudiant de plus près le spectre de $\epsilon(t)$ par exemple).

3.2. Modèles de type autorégressifs = ARMA et ARIMA (une série à pas constant $t = 1 \ldots N$).

Les modèles ARMA (autoregressive moving average) sont relatifs à des processus stationnaires à densité spectrale (donc non structurés) et qui possèdent une mémoire à plus ou moins long terme. On utilise cette mémoire à des fins prévisionnelles.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Les modèles ARIMA (autoregressive integrated moving average) s'adressent à des processus possèdant une tendance ou des périodicités. Ce sont en fait des ARMA appliqués au processus "détendancé" et "dépériodicisé".
Ces modèles sont des modèles prévisionnels mais non explicatifs : on quantifie la mémoire du processus sans chercher à l'expliquer.
Un modèle ARMA (p,q) a la forme suivante

$$x_\omega(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j\, x_\omega(t-j) + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_\omega(t-j)$$

où les $\varepsilon_\omega(t-j)$ sont des bruits blancs I.D.$(0, \sigma^2)$ et indépendants des $x_\omega(t)$.
Soit : $\phi(B)\, x_\omega(t) = \Theta(B)\varepsilon_\omega(t)$ où B est l'opérateur retard $Bx_\omega(t) = x_\omega(t-1)$ et $\phi(B) = 1 - a_1 B \ldots - a_p B^p$; et $\Theta(B) = 1 + b_1 B \ldots + b_q B^q$.
Si le polynôme $\phi(B)$ n'a pas de zéro de module ≤ 1, alors $\phi(B)^{-1}$ existe et

$$x_\omega(t) = \phi(B)^{-1}\, \Theta(B)\varepsilon_\omega(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, \varepsilon_\omega(t-j)$$

$x_\omega(t)$ est une somme infinie de bruits blancs. D'une manière générale, on montre que tout processus faiblement stationnaire à spectre continu peut être représenté par un

$$MA(\infty) = \sum_j \psi_j\, \varepsilon(t-j) \qquad \left(\text{avec } \sum \psi_j^2 < \infty\right),$$

i.e. comme une somme dénombrable de bruits blancs non corrélés. Parallèlement, on a vu que tout processus faiblement stationnaire dont le spectre est discret peut-être représenté par une somme dénombrable de sinusoïdes non corrélées.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Estimations et tests. On utilise la fonction d'autocorrélation empirique $R_N(u)$ (bonne estimation car $x_\omega(t)$ est à densité spectrale. cf. § 2.2.) pour étudier la série et tenter de définir les valeurs p et q. Il existe des procédures d'estimations et de tests du modèle.
En fait, ce qui nous intéresse ici, ce sont les modèles ARIMA relatifs à des processus possèdant une tendance ou des périodicités. Le principe de ces modèles est de se ramener à des ARMA en éliminant la tendance et les périodicités du processus grâce aux principes suivants :

1. si $x_\omega(t)$ est périodique de période S entière

$$x_\omega(t) = \sum_\nu z_{\omega\nu} e^{i2\pi\nu t/S} + \epsilon_\omega(t),$$

alors $x_\omega(t)$, $x_\omega(t-S)$,..., $x_\omega(t-kS)$ sont semblables, i.e. forment une série non périodique. On étudiera donc, non pas la série $x(t)$, mais la série $(x(t-S))_{k\in\mathbb{N}}$; l'opérateur B^S tel que $B^S x_\omega(t) = x_\omega(t-S)$ joue un rôle privilégié. De même que l'opérateur différence

$$\begin{aligned}\nabla_S x_\omega(t) &= (1 - B^S)\, x_\omega(t) \\ &= x_\omega(t) - x_\omega(t-S) \\ &= \Sigma_\omega(t) - \Sigma_\omega(t-S)\end{aligned}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2. si $x_\omega(t)$ possède une tendance linéaire $at + b$, $x_\omega(t) = at + b + \varepsilon_\omega(t)$. Alors l'opérateur $\nabla x_\omega(t)$ (analogue discret de la différentielle $dx_\omega(t)$) permet d'éliminer cette tendance :

$$\nabla x_\omega(t) = x_\omega(t) - x_\omega(t-1)$$
$$= a + \varepsilon_\omega(t) - \varepsilon_\omega(t-1)$$

Plus généralement, l'opérateur ∇_S^D enlève la périodicité S et la tendance polynomiale de degré D. Le modèle ARIMA est alors un modèle ARMA relatif au processus extrait $\nabla_S^D x_\omega(t)$.

Exemple. $$\phi(B^S)\, \nabla_S^D\, x_\omega(t) = \Theta(B^S)\varepsilon_\omega(t)$$

les modèles ARIMA s'adressent donc aux modèles généraux (non stationnaires si $f(t) \neq 0$),

$$x_\omega(t) = \underbrace{f(t)}_{\substack{\text{tendance} \\ \text{éventuellement} \\ \text{périodique}}} + \underbrace{\sum_\nu z_{\omega\nu}\, e^{i\lambda_\nu t}}_{\substack{\text{périodicités} \\ \text{aléatoires}}} + \underbrace{x_\omega^*(t)}_{\substack{\text{composante} \\ \text{stationnaire} \\ \text{à spectre} \\ \text{continu}}}$$

et permettent de faire de la prévision à court terme sur ces processus.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

4.- METHODES DESCRIPTIVES/EXPLICATIVES : MODELES AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Mentionnons pour finir les modèles aux équations différentielles (à temps continu). Les fluctuations du processus sont supposées dues principalement à une structure déterministe $f(t)$, supposée ici périodique, que l'on tente d'expliquer en fonction des principaux facteurs d'influence du système

$$x_\omega(t) = f(t) + \epsilon_\omega(t).$$

Ces méthodes relèvent essentiellement de la théorie des "systèmes dynamiques" dont le principe général est le suivant: soit le vecteur

$$\vec{f}(t) = (f_1(t),\ldots, f_k(t))$$

(par exemple les f_i sont des concentrations chimiques ou bien $\vec{f}(t)$ est le vecteur

$$(f(t), \frac{df^{(t)}}{dt} ,\ldots, \frac{df^{(k-1)}(t)}{dt^{k-1}})$$

lorsqu'on s'intéresse à un processus univariate). Connaissant les conditions initiales $f_i(t_0)$ ainsi que les vitesses d'évolution $df_i(t)/dt$ à chaque instant t, il s'agit de trouver l'état du système, i.e. les valeurs $f_i(t)$. Cela se traduit par un système d'équations :

$$\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \vec{F}(t, \vec{f}(t), p)$$

où p est un ensemble de paramètres caractéristiques du système.

Toute solution $\vec{f}(t)$ est appelée trajectoire. On recherchera les solutions périodiques, i.e. les trajectoires fermées sur elles-mêmes. Elles seront stables ou instables selon que le phénomène lui-même est stable ou instable (i.e. donne naissance à de nouvelles situations pour un petit écart des paramètres p ou des conditions initiales). L'étude des solutions d'un tel système et de leur stabilité en fonction des paramètres peut-être fait par la simulation et permet de connaître des situations difficilement réalisables ou de les prévoir.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Exemple : soit $\vec{f}(t) = c(t)$ (JOHNSSON A., KARLSSON H.G. (1972)) supposée vérifier l'équation $\frac{dc(t)}{dt} = -k\, c(t - d)$

les solutions périodiques sont de la forme

$$c(t) = A(t) \cos(\lambda t + \phi).$$

Estimations : on dispose d'une série. Les estimations des paramètres du modèle sont les valeurs qui minimisent la somme des carrés résiduels

$$\sum_t (x_i(t) - f_i(t))^2 \qquad (\text{ici } i = 1)$$

Si le modèle $f(t)$ trouvé est linéaire en fonction des paramètres, des tests de nullité de ceux-ci seront valables pour de petits échantillons (sous l'hypothèse que les

$$\varepsilon_\omega(t) = x_\omega(t) - f(t), \text{ sont I.N.D.}(0, \sigma^2).$$

En guise de conclusion, comparons brièvement ces trois types de modèles :

i) les modèles à moyenne
ii) les ARIMA et
iii) les modèles des systèmes dynamiques.

Les modèles i) et iii) s'adressent à des processus ayant une structure déterministe $f(t)$ et s'intéressent uniquement à cette structure dans un but soit purement descriptif (i) soit explicatif (iii). On suppose généralement que les écarts au modèle, $\varepsilon_\omega(t)$ sont I.N.D$(0, \sigma^2)$ ce qui permet d'utiliser ces modèles à des fins prévisionnelles (si σ^2 est suffisamment faible), la mémoire du processus étant alors contenue dans sa structure. Les modèles ii) ont une optique plutôt opposée. Ils s'adressent à des processus à structure (aléatoire ou non) dont la mémoire à tout instant (après élimination de la structure) est décrite par une somme de bruits blancs et utilisée ainsi à des fins prévisionnelles. Les "résidus" sont mis ici en évidence.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

APPENDICE. ANALYSE SPECTRALE : Quelques exemples.

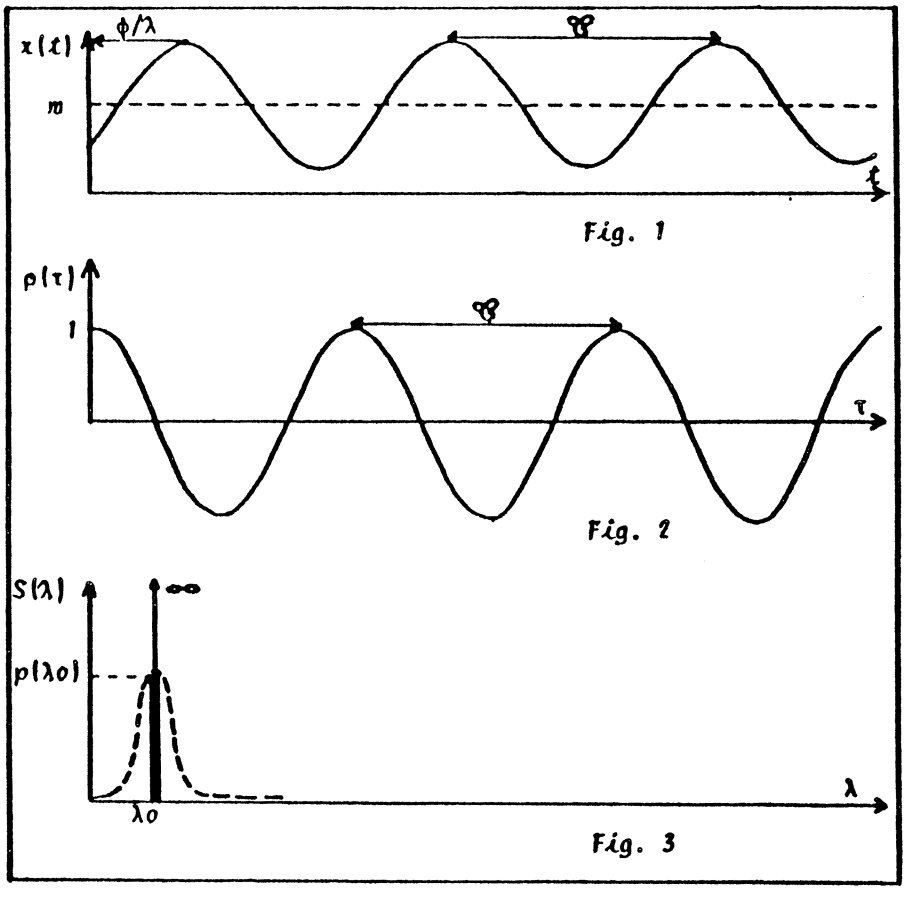


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

1) $x_\omega(t)$ est sinusoïdal de période $\mathcal{T}$:

$x_\omega(t) = m + a \cos(\lambda_o t + \phi_\omega)$ où $\lambda_o = 2\Pi/\mathcal{T}$

Fig. 1 : Profil temporel pour un individu ω

Fig. 2 : Fonction d'autocorrelation ($\rho(\tau) = \cos \lambda_o \tau$)

Fig. 3 : —— : spectre $S(\lambda)$: raie infinie en λ_o

—— : spectre de puissance ($p_o = \frac{a_o^2}{4}$ en λ_o)

--- : estimation du spectre de puissance

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

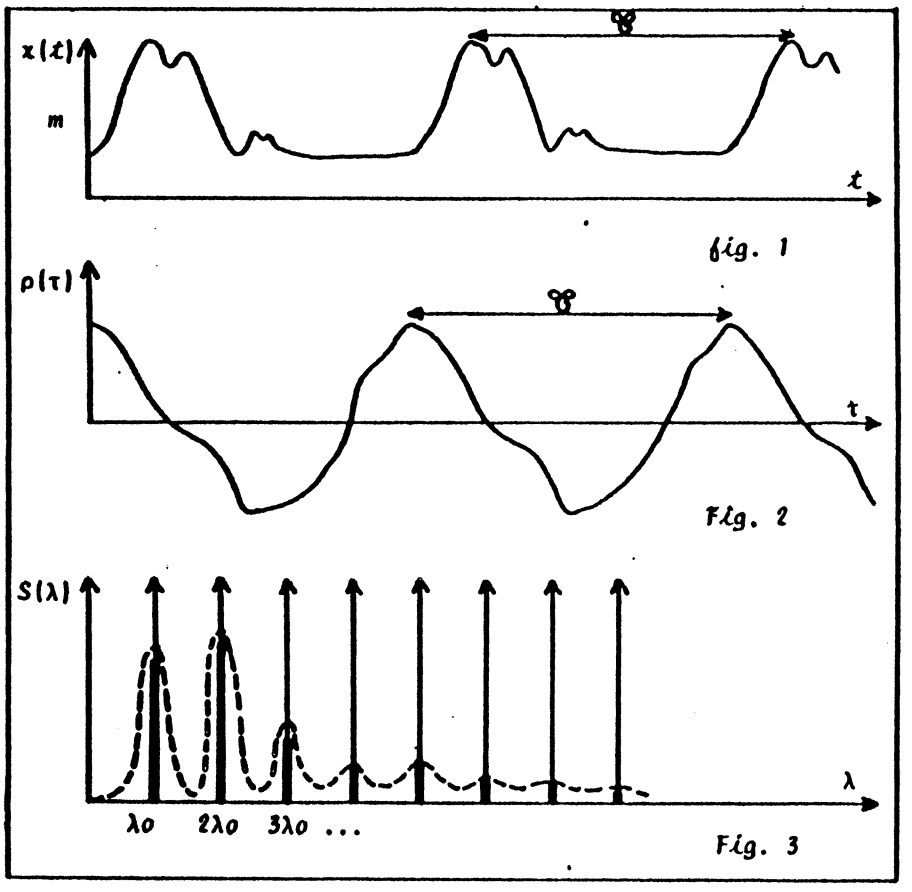


fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

2) $x_\omega(t)$ est périodique de période τ

$x_\omega(t) = \mu + \Sigma\, a_k \cos(k\lambda_o t + \phi_{\omega k})$ où $\lambda_o = 2\Pi/\tau$

Fig. 1 : profil temporel pour un individu ω.

Fig. 2 : fonction d'autocorrélation

$$\rho(\tau) = \left[2\Sigma \frac{a_k^2}{4} \cos k\lambda_o\tau\right] / 2\Sigma \frac{a_k^2}{4}$$

Fig. 3 : —— : spectre $S(\lambda)$

—— : spectre de puissance ($a_k^2/4$ en $k\lambda_o$)

--- : estimation du spectre de puissance

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

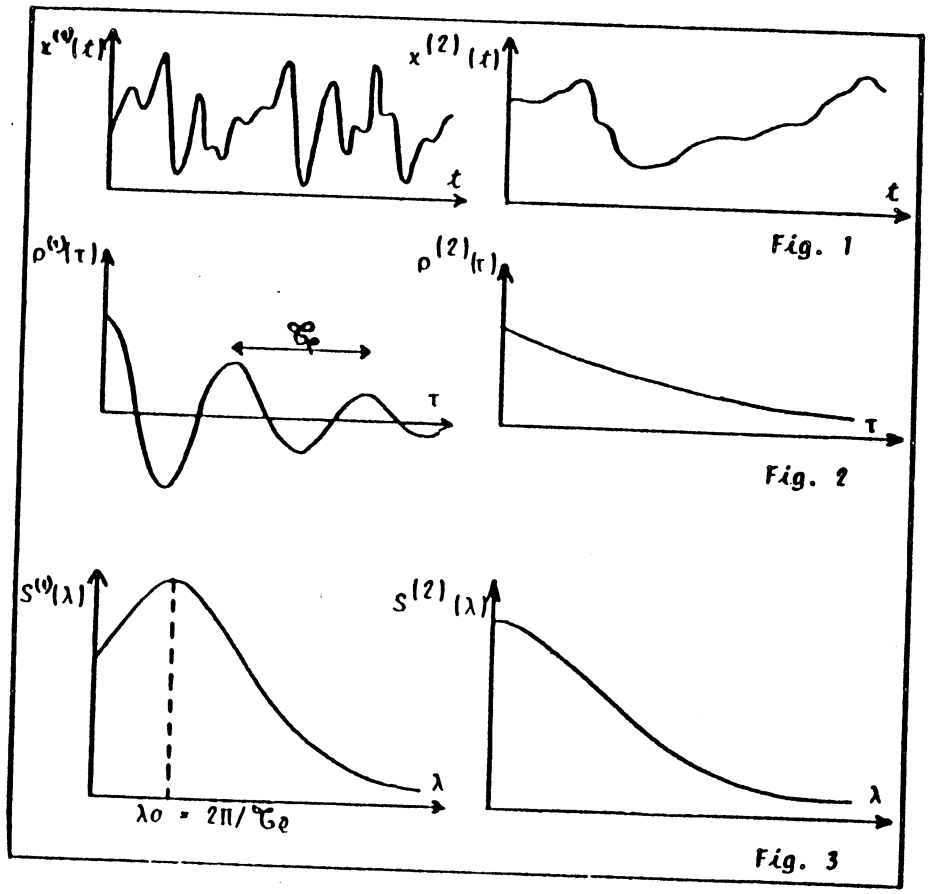


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

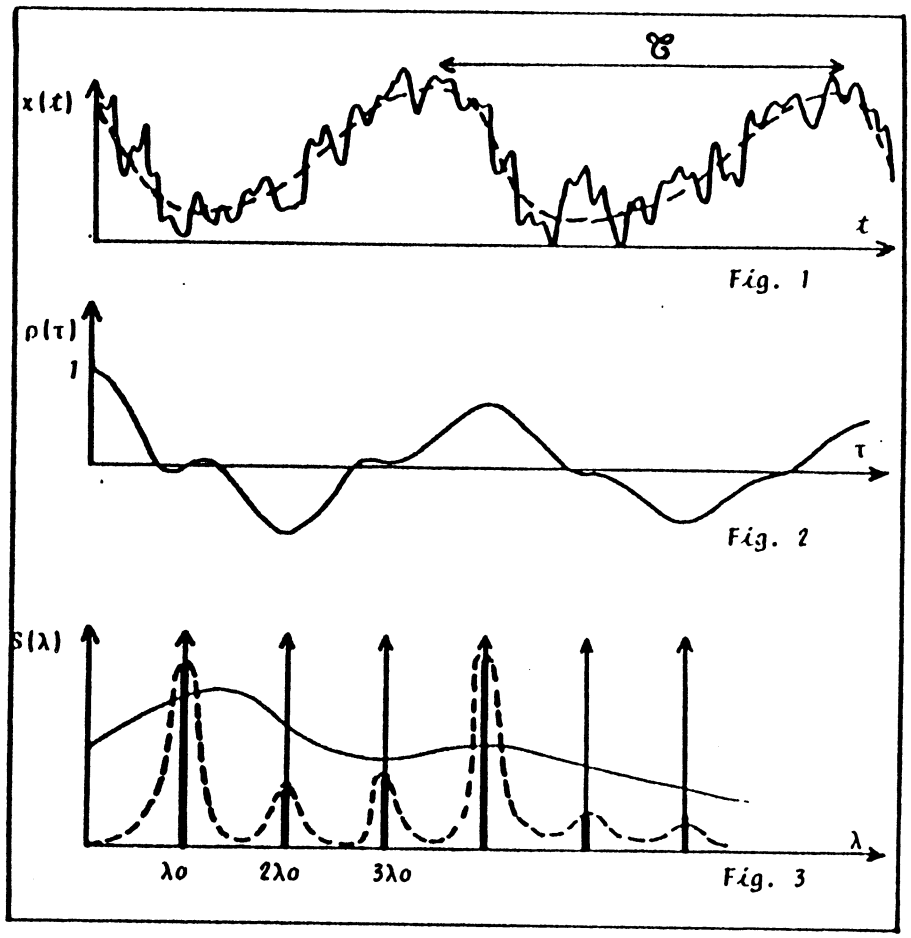
3) $x_\omega(t)$ ne possède aucune périodicité.

Fig. 1 : profils temporels pour deux processus différents

Fig. 2 : fonctions d'autocorellation

Fig. 3 : spectres $S(\lambda) = f(\lambda)$ (densité spectrale)
les spectres de puissance sont nuls.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008



1) $x_\omega(t)$ possède une périodicité $\mathcal{T}$

$x_\omega(t) = \mu + \Sigma\, a_k \cos(k\lambda o t + \phi_{\omega k}) + z_\omega(t)$ où $\lambda o = 2\Pi/\mathcal{T}$

Fig. 1 : profil temporel pour un individu ω

------ : phénomène périodique sous-jacent

Fig. 2 : fonction d'autocorrelation

Fig. 3 : —— : spectre $S(\lambda) = f(\lambda)$ + raies infinies en $\lambda o, 2\lambda o, 3\lambda o, \ldots$

—— : spectre de puissance ($pk = \frac{a_k^2}{4}$ en $k\lambda o$)

--- : estimation du spectre de puissance.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

5.- BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON T.W. (1958), *The statistical analysis of time series*. Wiley, N.Y.

BOX G.E.P., JENKINS G.M. (1970) *Time series analysis Forecasting and control*. Holden-Day, San Francisco.

BRUTE J.C. (1976) Interprétation géométrique des travaux de l'école thermo-dynamique de Bruxelles. *Bull. Gr. et. rythmes biol.*, T8, 131-151.

DEMONGEOT J. (1978) *Outils théoriques de la chronobiologie et de la chronomédecine*. Thèse - Université scientifique et médicale de Grenoble.

DEVILLE J.C. (1974) Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique. *Annales de l'INSEE*, 15, 7-96.

GRENANDER U., ROSENBLATT M. (1957) *Statistical analysis of stationary time series*. Wiley, New-York.

HANNAN E.J. (1970) *Multiple time series*. Wiley, New-York.

HANNAN E.J. (1973) The estimation of frequency. *J. Appl. Prob.*, 10, 510-519.

JENRICH R.I. (1969) Asymptotic properties of non linear least squares estimators. *The Annals of Math. Stat.*, Vol. 40, 2, 633-643.

JOHNSSON A., KARLSSON H.G. (1972) A feedback model for biological rytms. *J. Theor. Biol.* 36, 153-174.

KOOPMANS L.M. (1974) *The spectral analysis of time series*. Academic Press. New-York.

LAUREC A. (1979) *Analyse des données et modèles prévisionnels en écologie marine*. Thèse. Marseille.

MINATO. P. *Recherche des périodicités*. INRA-C.N.R.Z. (non publié).

PHAM DINH T. (1975) *Introduction à l'analyse statistique des séries temporelles*. Cours D.E.A. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

TONG Y.L. (1976) Parameter estimation in studying circadian rythms *Biometrics*, 32, 85-94.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

VAN CAUTER E., HUYBERECHTS S. (1973) Problems in the statistical analysis of biological time series ; the cosinor test and the periodogramm. *J. Interdiscipl., Cycle Res.*, Vol. 4, 1, 41-57.

WALKER A.M. (1971) On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals. *Biometrika*, 58, 1, 21-36.

WALKER A.M. (1973) On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals. *Adv. Appl. Prob.*, 5, 217-241.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 2.

RHYTHMIC EGG RELEASE BY *HELIGMOSOMOIDES POLYGYRUS* (= *NEMATOSPIROIDES DUBIUS*), PARASITIC *TRICHOSTRONGYLIDA* OF THE MURINE GUT. I

DOMINIQUE KERBOEUF * CHRISTINE JACOB **

Station de Pathologie Aviaire et de Parasitologie
*Centre de Recherches de Tours-Nouzilly, I.N.R.A., Monnaie **

Laboratoire de Biométrie
*I.N.R.A. - C.N.R.Z., Domaine de Vilvert, Jouy-en-Josas, France ***

The existence of various rhythms in parasites has been known for a long time and has been demonstrated in numerous species. Human parasites have naturally been studied to the greatest extent and for the longest time and these results showed the periodic nature of protozoan multiplications (*Plasmodium*, trypanosomes). Other types of rhythms have been studied since then and four major classes are now accepted (HAWKING[3]):

- cell division rhythms (*Plasmodium*)
- migration rhythms within the host's body (*microfilaria*)
- discharge rhythms of infective elements (schistosomes)
- migration rhythms in the digestive tract (*Hymenolepis sp.*).

Thus, these rhythms exist in a number of parasitic families and in genera with very different cycles. In zooparasitic nematodes, relatively little work has been done, with the exception of the *filariae* which are parasitic for humans. The largest number of studies involved pinworms for which it was shown that egg output was intermittent (MC ARTHUR[7]; CRAM[1]; VAN DER GULDEN[12]; LEWIS and SHAVA[6]). The biology of these parasites in which eggs are often released after migration of the worm to the anal region is quite different from that of other groups. It is thus difficult to determine the intermittent nature of actual egg production.

Key-words: Egg output rhythm; Faecal output rhythm; Heligmosomoides polygyrus; *Mouse intestine; Statistical correlations.*

Received April 27, 1982.
Chronobiologia *10*, 255, 1983.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Other nematode families have apparently been the subject of only one study (LEWIS and SHAVA[4]). A peak of egg production by *Heligmosomoides polygyrus* was demonstrated between 19[00] and 00[00], corresponding to optimum activity of the mouse, and a second peak between 01[00] and 09[00]. The phenomenon was not analyzed in more detail.

These fluctuations are studied in detail in the present work. The experimental system included mice infected by *H. polygyrus* and placed in an experimental setting enabling the different fluctuations occurring in a given period to be precisely measured.

MATERIALS AND METHODS

Animals. Male Swiss CD1 mice weighing approximately 25 g at the moment of infection were used. They were orally infected with 200 third-stage larvae of *Heligmosomoides polygyrus*. These mouse parasites inhabit the small intestine, the most of them being fixed in the duodenal part. They have a spiral shape and their cuticule includes ridges so that they are tightly wrapped around the intestinal villosities.

The animals infected themselves by ingestion of third-stage larvae living in the external medium and issued from eggs excreted in the faeces by infected mice. There is no self-infection. The infective larvae were obtained from a culture as previously described (KERBOEUF[5]). They had been stored for 8 weeks at 4 °C before use. Autopsy performed 90 days after infection revealed the presence of a mean of 170 adult males in the gut.

Measurement of egg output. Experiments were performed at the Nouzilly station between 6 and 9 March, 1978 and between 20 and 23 March of the same year. The first measurement in each series was performed at 15[00].

The quantity of rejected eggs was determined by placing the mice in an automatic faecal recovery unit, designed and built in the laboratory (MAILLARD[6]). The instrument was programmed to cover one complete cycle in 24 h. Faecal matter emitted by a group of 10 mice could be recovered in 1-h fractions and collections continued for 3 complete consecutive days. Moist filter papers were placed in each recovery container in order to conserve parasitic elements.

Egg counts were carried out within 12 h after the excretion of faeces. During this span faeces were kept at 4 °C to prevent the development of the parasites. The eggs are able to survive without any damage in such conditions because they are surrounded with a shell which preserves them from the variations of the external medium.

The animals were studied about 10 weeks after infection. During this period they were maintained in artificial light (day from 09[00] to 17[00], night from 17[00] to 09[00]) at 21 °C. Food and water were provided *ad libitum* throughout the entire 24-h cycle.

Collected faecal matter was removed daily and the contents of each 1-h fraction were stored in individual vials. The weight of faecal matter in each fraction was determined.

The density (d) or concentration of parasite eggs, expressed on a per-gram faecal matter basis, was determined using a modified Mc Master technique. Faeces were diluted in a dense solution of magnesium sulfate (d = 1.20) in the proportion of 1 g faecal matter/24 ml. When the quantity of faecal matter

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

was inferior to 1 g, a volume of 24 ml was nevertheless used, whatever the weight.

Statistics. The temporal structure of the egg release phenomenon and that of the faecal weight were statistically analyzed in order to define deterministic components due to a soft trend or to rhythms and random component. The main statistical methods employed were smoothing methods, regression methods (Whittaker-Robinson's and Schuster's models), and the study of autocorrelations of the series, which are all fully described in another paper (JACOB and KERBOEUF[1]). We then attempted to clarify the different components of the egg release phenomenon in relation to intestinal transit, by the means of the study of cross-correlations between the two series. They lead to the evaluation of the (linear) relationships between the two phenomena. These relationships are either instantaneous or have varying delays *.

RESULTS

The series studied (S3) involved a 3-day period with hourly sampling, thus 72 observations. Variables measured were hourly faecal output and density (concentration) of parasite eggs/h/g faecal matter. These results were compared to a 4-day experimentation (S4) though this lacked two values of the egg density variable resulting from zero values of faecal weight.

1. EGG DENSITY SERIES

1.a. *Deterministic structure* (Figs 1.a, 1.b)

The series S3 presented a considerable variability with two peaks in the middle of the series, but no apparent periodicity. All the statistical analyses (smoothing, regression, autocorrelations) underline the significance of the 12-h cycle and of no other, the 24-h cycle being present only as the repetition of the 12-h cycle.

The variance of this 12-h cycle explains only about 30% of the total variability of the phenomenon. The results obtained with series S4 were identical. The only difference was that the series revealed a trend which required its elimination before the statistical analyses (remark: in view of the importance of the 12-h periodic phenomenon detected in S3, the missing values from S4 were estimated using this periodicity as repetition of the phenomenon).

Thus, only the 12-h periodicity was retained. The plot of its estimation according to the Whittaker-Robinson's model shows an excretion peak at the third point in series S3 (corresponding to egg excretion from 17^{00} to 18^{00} and from 05^{00} to 06^{00}). This was followed by a decrease and then a larger and wider peak with maxima at the 8^{th} and more so at the 10^{th} measurement point (corresponding to excretion between 00^{00} and 01^{00} and 12^{00} and 13^{00}). The third small peak was observed at the 12^{th} point. In this case, the autocorrelation series of the periodic phenomenon does not have a statistical meaning because of the deterministic nature of the phenomenon. The series may, however, be considered as indicative of the relations among the various instants of the

* The autocorrelation of order k or the crossed correlation of order k are indicated by $\rho(k)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

phenomenon. The autocorrelation series indicates a positive influence with a 1-h shift ($\rho(1) = 0.50$) and a greater negative influence of the phenomenon on itself with a 6-h delay ($\rho(6) = -0.67$).

The periodic phenomenon of series S4 presented the same characteristics, the only difference being that the first peak was observed at the 4th point and not at the 3rd.

Remark on the trend: it is perhaps due to an approximate 8-day rhythm detected with statistical significance in three analogous series of 42 measurements sampled every 2 days (Kerboeuf and Jacob, unpublished).

1.b. *Random memory of the series. Analysis of residuals.*

This memory was studied in the series from which the deterministic structure was subtracted (trend for S4 and 12-h cycle for the 2 series).

According to the statistical analysis results, we concluded on the independence of the residuals but not their equidistribution: the variances at the

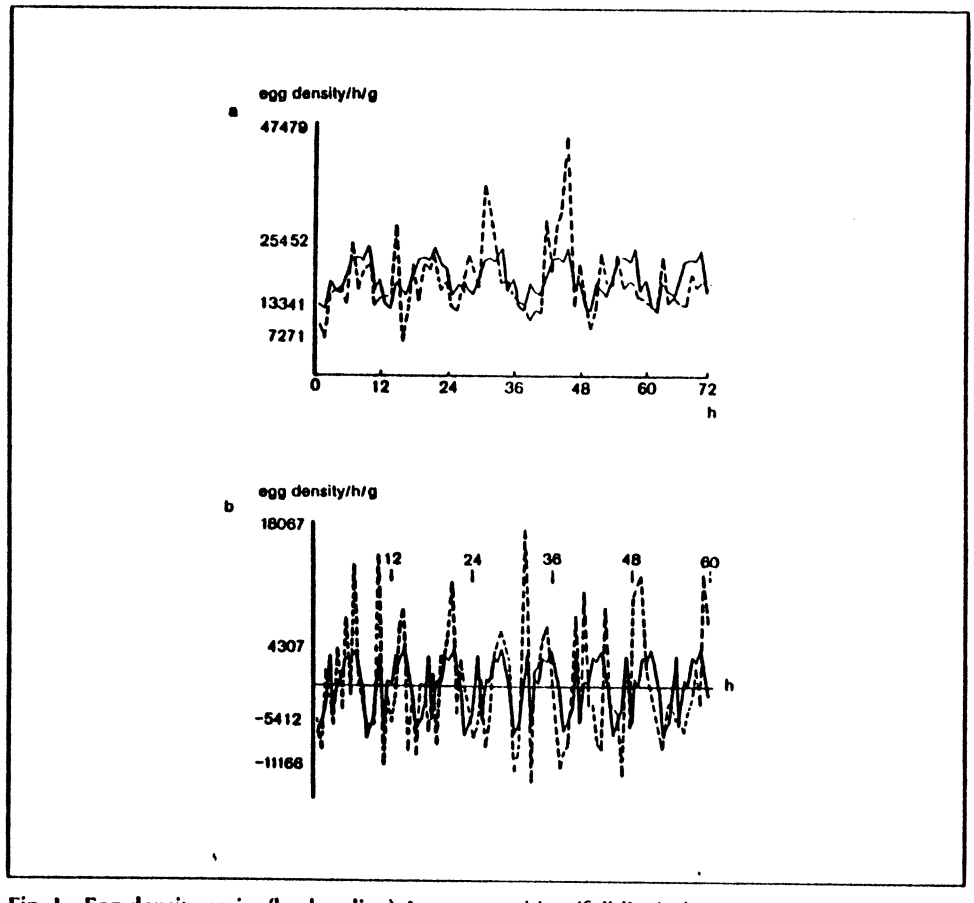


Fig. 1 - Egg density series (broken line). In superposition (full line), the periodic phenomenon of period 12 estimated in the Whittaker-Robinson's model (the horizontal axis represents time in hours). 1.a. series S3; 1.b. detrended series S4.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

i	residual variance $\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}(xij-\hat{i})^2$	standard deviation	$\hat{i}=\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}xij$	coefficient of variation (SD/$\hat{i}$)
1	2971841.9	1723.9	16250	0.106
2	13121007.0	3622.3	18590	0.195
3	42346667.0	6507.4	30480	0.213
4	38668584.0	6218.4	24720	0.251
5	8789140.5	2964.6	20700	0.143
6	33862876.0	5819.2	31220	0.186
7	65075617.0	8066.9	38080	0.212
8	34983844.0	5914.7	32670	0.181
9	26173899.0	5116.0	32750	0.156
10	103508950.0	10173.9	47480	0.214
11	7948484.1	2819.3	21990	0.128
12	11776306	3431.7	23640	0.145

Tab. 1 - Statistical characteristics of the 12 instants of the periodicity (egg density series N = 72).

different instants of the cycle are heterogeneous (Tab. 1). The ratio variance/mean increases with increasing mean because of the variability of measurement errors which is added to that of the law iself that is supposed of Poisson type (cf. appendix).

2. FAECAL WEIGHT SERIES

2.a. *Deterministic structure* (Figs 2.a, 2.b)

Graphically represented, series S3 presented an important variability, but a certain 24-h cycle could be seen.

Besides a trend the statistical analyses of the series revealed a 12-h rhythm with a high degree of significance as well as a genuine 24-h rhythm in addition to that due to the repetition of the 12-h one:

The graphic plot of the 24-h phenomenon estimated in the Whittaker-Robinson's model showed that this was not simply the repetition of the 12-h phenomenon. The multiple comparison test of the hypothesis 'the 24-h periodicity is the repetition of the 12-h one', in this model, shows rejection of this hypothesis. The 24-h rhythm could be decomposed into sinusoids (Schuster model) and contained not only harmonics of the 12-h entity, but also true harmonics of the 24-h phenomenon, whose amplitudes were equal to or greater than those of the 12-h rhythm (Tab. 2). The series of autocorrelations showed a very pronounced 24-h periodicity. Finally, the series of autocorrelations of the residuals of the Whittaker-Robinson's model for the 12-h phenomenon also showed a very pronounced 24-h periodicity (Figs 3.a, 3.b).

Analogous results were obtained with series S4, the periodicities being there even more significant.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

We thus studied these two periodicities, especially that of 12-h, after eliminating the trend (estimated with the modified moving average of length 24), as well as its relations with that of the egg density series (see § 3. below).

The graphic representation of this periodic phenomenon estimated in the Whittaker-Robinson's model had the same form for series S3 and S4. Peaks were observed at measurements 1, 5, 8. The variance of this phenomenon explains about one-third of the total variance of the detrended phenomenon.

The 'autocorrelations' of this rhythm indicated a positive influence with a 1-h shift ($\rho(1) = 0.32$ for S3 and 0.26 for S4) and a certain negative influence of the rhythm on itself with a 6-h delay ($\rho(6) = -0.41$ for S3 and -0.30 for S4).

2.b. *Analysis of the residuals of the series after elimination of the deterministic structure (trend and rhythms).*

These are the residuals of the Whittaker-Robinson's model for the 24-h periodicity (and applied to the detrended series) (Fig. 3.b).

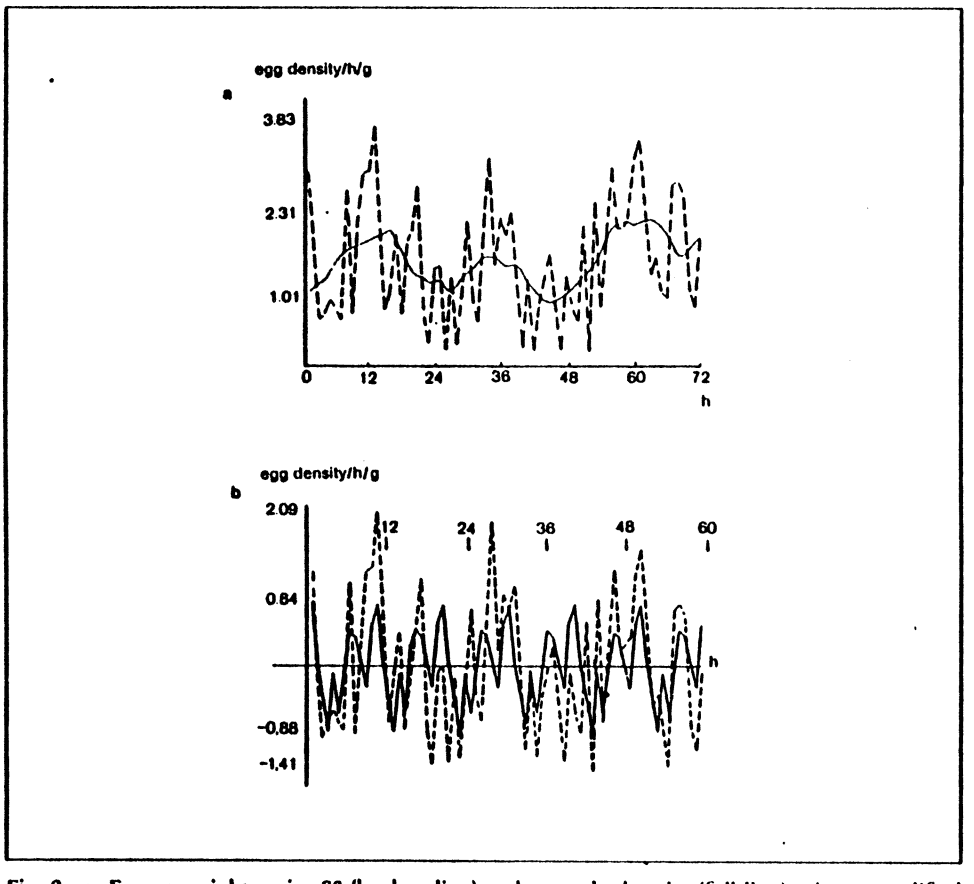


Fig. 2 - a. Faeces weight series S3 (broken line) and smoothed series (full line) using a modified moving average of length 12; b. Detrended faeces weight series S3 (broken line). In superposition (full line), the periodic phenomenon of period 12 estimated in Whittaker Robinson's model (the horizontal axis represents time in hours).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

12-h rhythm		24-h rhythm	
frequency	amplitude	frequency	amplitude
$2\pi \frac{1}{12}$	0.4412	$2\pi \frac{1}{24}$	0.5361
$2\pi \frac{2}{12}$	0.3536	$2\pi \frac{3}{24}$	0.3297
$2\pi \frac{3}{12}$	0.3309	$2\pi \frac{5}{24}$	0.1539
$2\pi \frac{5}{12}$	0.2318	$2\pi \frac{9}{24}$	0.2581
		$2\pi \frac{11}{24}$	0.1978

Tab. 2 - Spectral decomposition of the 12-h and genuine 24-h rhythms (faeces weight series N = 72).

According to the statistical analysis results, we concluded on the independence and normal equidistribution of the residuals. Their variance was found to be 0.2599 for S3 (standard deviation 0.5098) and 0.2380 for S4 (standard deviation 0.4879). The balance used for faecal weight determinations gave results to the nearest 0.01 mg. The variability of residuals may thus be due to the eventual presence of alimentary debris in faecal matter or from unpredictable temporal variability of faecal excretion.

3. RELATIONS BETWEEN EGG DENSITY AND FAECAL WEIGHT SERIES

3.a. *Series (after eventual elimination of the trend)* (Fig. 4.a)

In addition to a 12-h periodicity due to that of egg density, the crossed correlations of the egg and faecal series showed for S3 and S4 instantaneous relations ($\rho(0) = -0.25$), as well as relations with a 4-5-h or 6-h shift ($\rho(4,5,6) = -0.25$ for S3 and -0.27 for S4). Specific analyses for the 12-h rhythms and for residuals enable one to determine if these relations involve the rhythms or the residuals.

3.b. *12-h periodicities*

The 12-h periodicities of the two phenomena did not have the same graphical form; however, both exhibited the same form of memory with a 1-h and especially a 6-h shift, corresponding to intestinal transit. This influence with a 6th delay is more important for the egg concentration series than for that of faecal weight, thus signifying that intestinal transit had a greater influence on the first series than on the second. The series of crossed 'correlations' between the two rhythms indicates no instantaneous relation, and a negative faecal correlation with egg concentration, with a 4-h delay for S3 ($\rho(4) = -0.72$) and a 4-5-h delay for S4 ($\rho(5) = -0.54$) (this negative correlation is identical to that of egg rhythm with that of faeces, with an 8-h delay resulting from the 12-h periodicity of the two phenomena).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.c. *Residuals (after elimination of deterministic structure, eventual trend and rhythms, for each series)* (Fig. 4.b)

The series of crossed correlations presented no particular structures: for the small shifts, only ρ(o) was significantly non-zero (ρ(0) = −0.28 for S3 and −0.24 for S4).

This result may be interpreted in terms of measurement error or in biological terms. Concerning the first, the dilution technique may have been responsible. When faecal weight was less than 1g, the material was more highly diluted in relation to weights greater than 1 g. Thus, the real number of eggs would be increasingly underestimated with increasing weights (aggregates of eggs remaining at the bottom of the dense solution would have escaped counting). In biological terms, this result would signify that eggs would be increasingly more scattered in 1 g of faeces with increasing faecal weight. Thus,

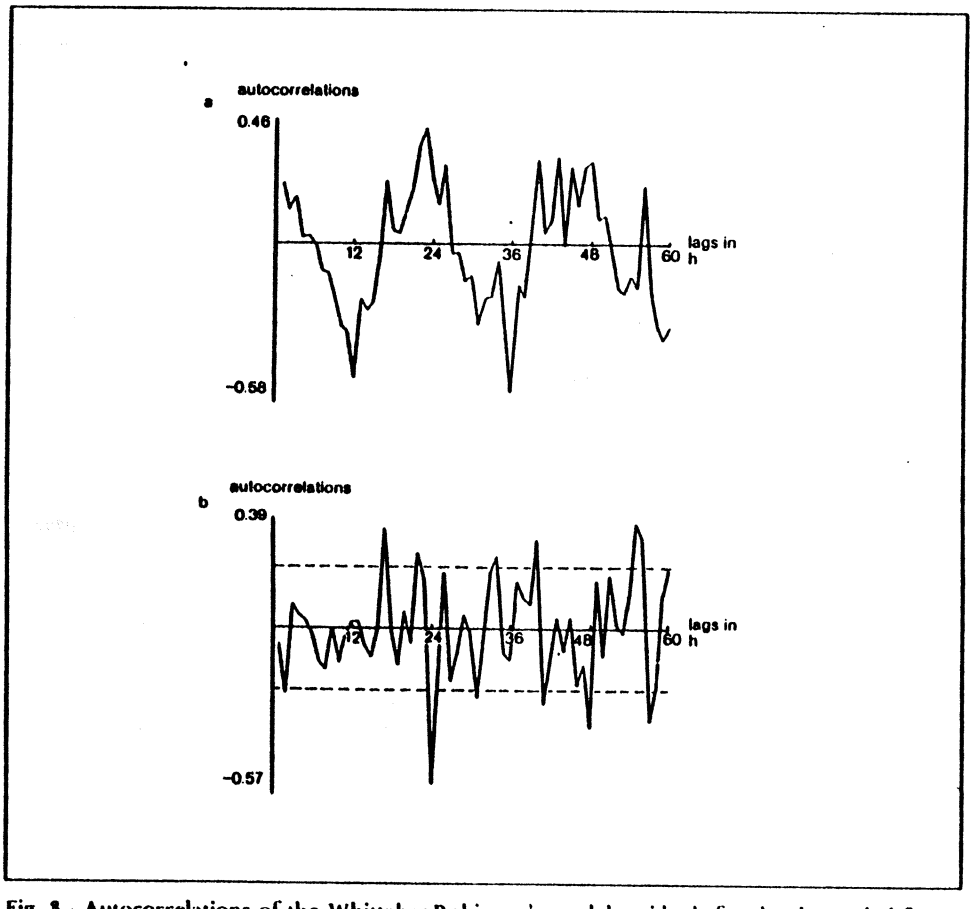


Fig. 3 · Autocorrelations of the Whittaker-Robinson's model residuals for the detrended faeces weight series S3 (the horizontal axis represents lags in hours). a. The model concerns the 12-h periodicity; b. The model concerns the 24-h periodicity. Only correlations for little lags which are widely superior in absolute value to $1.96/\sqrt{72}$ (dotted line) can be considered as significantly non zero (for an approximate 5% level).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

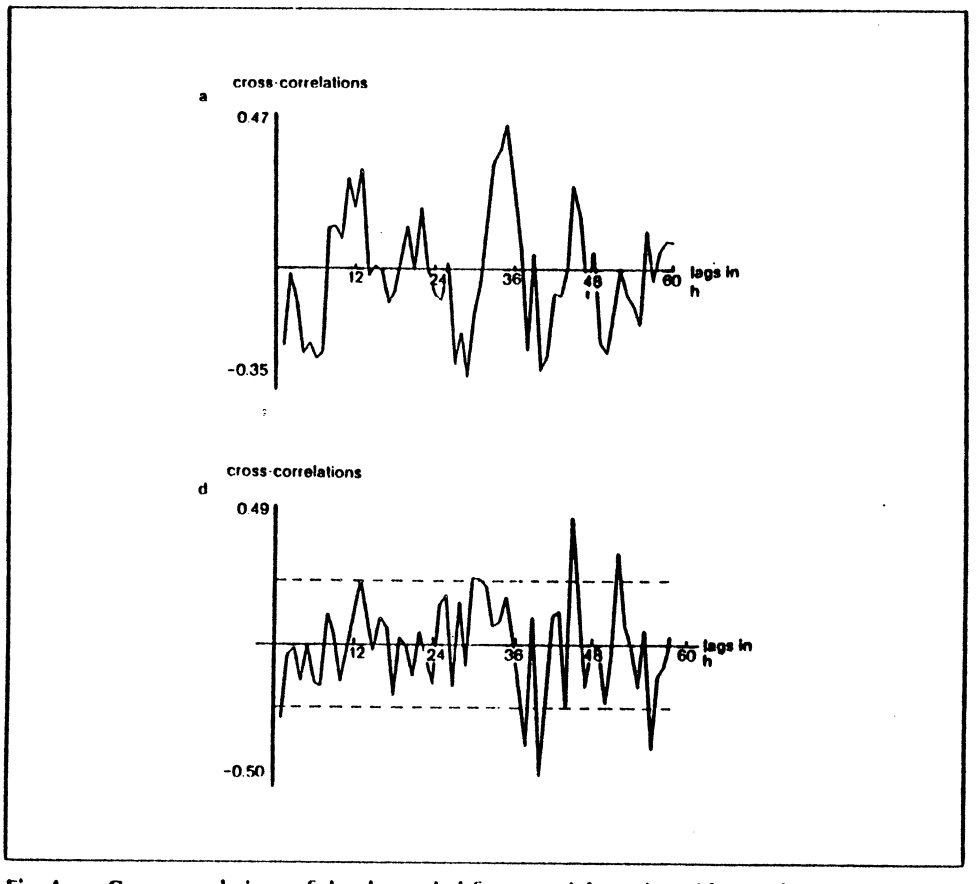


Fig. 4 - a. Cross-correlations of the detrended faeces weight series with egg density one (S3); b. Cross-correlations of the Whittaker-Robinson's model residuals relative to the 24-h periodicity for the detrended faeces weight series, with Whittaker-Robinson's model residuals relative to the 12-h periodicity for the egg density series (S3). Only correlations for little lags which are widely superior in absolute value to $1.96/\sqrt{72}$ (dotted line) can be considered as significantly non zero (for an approximate 5% level). The horizontal axis represents lags in hours.

the total number of eggs would be relatively constant, i.e. would fluctuate less than faecal weight. There would be in this case a certain inertia or constancy in egg excretion.

4. REMARKS

When the same analyses were performed on the log transformed variables, they showed the existence of a 12-h rhythm for egg concentrations to an even more significant degree. In addition, the values of autocorrelations and crossed correlations did not change. The relations among different variables at different times may thus be considered as linear.

We analyzed egg concentration and not total egg number, since the latter was too dependent on faecal weight. This would not enable conclusions to be drawn concerning the laying phenomenon itself. The total egg series only

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

shows that larger quantities of eggs are emitted with increasing quantities of faecal matter.

The series analyzed being the average of a batch of 10 mice, we considered only deterministic rhythms (fixed amplitudes and frequencies) which were the averages of individual rhythms fluctuating to different degrees with time.

5. APPENDIX: VARIABILITY OF THE EGG RELEASE PHENOMENON

The variance of 38 countings of the same faecal matter sample was 2.168.845 (standard deviation 1472.7) and the coefficient of variation was 1472.7/7555.9 = 0.195. This variance represents at a given time:

i. variability due to observation methods: the total number of eggs (n) in a sample with volume v = 0.3 ml of dense solution may be considered, for v small in relation to total volume (V) of dense solution (V = 24 ml·α if α is faecal weight), as the realization of a Poisson variable of parameter:

$$\lambda v = \frac{v}{V} N$$

where N is the total number of eggs contained in volume V.

ii. the biological variability of the laying phenomenon itself: as a result of its biological nature, N may be considered as a Poisson variable of parameter λV, (i.e. of mean and variance λV). The measured variable of egg density per g of faecal matter [(V/αv)n] is thus subjected to two types of Poisson variability sources at a given moment. Its mean and its variance are:

$$E^N\left(\frac{V}{\alpha v} n\right) = \frac{V}{\alpha v} E^N(n)$$

$$= \frac{N}{\alpha}$$

$$\text{and } E\left(\frac{V}{\alpha v} n\right) = \frac{EN}{\alpha} \frac{\lambda V}{\alpha}$$

$$\text{var}\left(\frac{V}{\alpha v} n\right) = \frac{V^2}{\alpha^2 v^2} \cdot \left[\frac{v}{V}\left(1 + \frac{v}{V}\right) \text{var } N\right]$$

$$= \left(1 + \frac{V}{v}\right) \text{var}\left(\frac{N}{\alpha}\right) = \left(1 + \frac{V}{v}\right) \frac{\lambda V}{\alpha}$$

(we utilize the fact that n is distributed according to a Poisson law of parameter λv = (v/v)N, with N, Poisson variable) where N/α is the real variable of egg density per g faeces calculated from the total number of eggs (N) in the total faecal weight. Thus, the variability of the measured egg density [(variable (V/αv)n] is increasingly greater than that of N/α with increasing V/v. This also shows that the measured variable is not truly a Poisson variable since its variance (1 + V/v) (λV/α) is not equal to its mean λV/α.

The variability of residuals integrates, in addition to the above variabilities, temporal biological variability (unrelated to the 12-h rhythm) of egg excretion, i.e. the temporal variability of λV.

The coefficients of variation of the residuals are on the same order of magnitude as that of the 38 countings. Thus, the residuals represent above all the first two types of variability.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

DISCUSSION

The presence of rhythms in egg release of nematodes is a very important point to define. The determination of the density of eggs/g of faecal matter is used in the diagnosis of parasitoses of the digestive tract, indirectly furnishing the size of the worm population in the infected host. It thus becomes important to determine the magnitude of daily fluctuations, and the eventual relationship between these variations and those of host activities or intestinal transit. These difficulties have been mentioned by ROBERTS et al.[10] and by SPEDDING[11]. The latter demonstrated important variations in daily egg production in strongyle infected sheep, but could not relate them to a determined rhythm. The present results confirm a large variability in egg output. The largest value observed was 6.5 times higher than the smallest. Statistical analysis showed a 12-h rhythm and argued against the existence of a circadian rhythm. In addition, results obtained allow to specify the egg excretion cycle. The analysis demonstrated that the egg production phenomenon has two influences on itself. The first is positive and occurs with a 1-h delay. It is possible that the egg mass corresponding to the peak of excretion was not completely evacuated in the 1-h period and continued into the following hour. Alternatively, it is possible that all the mice did not excrete at the same time. The second influence is negative with a 6-h delay, i.e. a peak of excretion was followed by a highly reduced egg output 6-h later.

The origin of this rhythm remains to be determined. It is known that rodent activity is cyclic, including rest and activity periods within a 24-h cycle. It may thus be asked if rhythmic egg production is at the level of the parasite, related to an irregularity in production or release of eggs or, on the contrary, is at the level of host activity, reflected primarily by fluctuations in intestinal transit.

In studies on *Aspiculuris tetraptera*, PHILLIPSON[9] suggested that if egg production by female parasites was a constant phenomenon, and the only factor of variation was faecal production, then there would have been an inverse relationship between the quantity of faecal matter emitted and the egg concentration. The opposite was shown by the author, i.e. the number of eggs/g of faeces was higher at the moment of the peak of faecal excretion. The author formulated an hypothesis according to which increased alimentary absorption by the mouse would stimulate laying by the parasite by increasing food flow, intestinal peristalsis or eventually the general activity of the animal. Our statistics show a 12-h rhythm both for faecal matter and egg production. In contrast to eggs, faecal output also presents an independent 24-h rhythm which is not the repetition of the 12-h rhythm. There is thus a circadian rhythm for this phenomenon.

As in the case of eggs, there are two types of influences of faecal excretion on itself. One is positive with a 1-h delay, and the other is negative with a 6-h delay. The first may be interpreted as for eggs: incomplete excretion in 1-h or non-simultaneous excretion by the 10 mice. The second is undoubtedly related to an irregularity in alimentary consumption. The absence of ingestion would be shown by a decreased excretion 6-h later, corresponding to murine intestinal transit (DUCLUZEAU et al.[3]). There thus exists a certain number of similarities between the two phenomena even though faecal and egg production peaks do not coincide and plots do not have the same form in the two

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

cases. The same 12-h period exists, as does the same memory form with 1- and especially 6-h delays. The latter, corresponding to the delay in intestinal transit, is an apparent demonstration of the influence of transit on the two phenomena, with a more pronounced effect on egg production than on faecal output. It is similar to that described by DUCLUZEAU et al.[2] for bacterial spores.

The interactions between the two phenomena remain to be defined. In contrast to the observation of PHILLIPSON[3], the present results show the existence of a negative correlation between faecal and egg rhythms with a 4-5 h delay, or between eggs and faeces with an 8-h delay as a result of the 12-h periodicity of the two phenomena. The results are insufficient for a determination of the origin of these two rhythms. That of faeces could be due to the parasitism or, inversely, that of egg excretion could be due to the faecal rhythm. The latter case seems biologically more probable. If verified, it will become necessary to determine if this influence of faecal quantity acts by simple dilution or concentration of eggs or if it may modify parasite reproduction. Finally, it is possible that the parasite has its own rhythm. In this case, it would be important to determine if it is host-independent or if different parasite species have particular rhythms.

SUMMARY

Heligmosomoides polygyrus is a strongyle parasite of the murine small intestine. The existence of a daily rhythm of parasite egg production was sought. Two series of measurements were analyzed, one lasting 3 days, the other 4. Variables measured were faecal weight emitted hourly and the density of parasite eggs/h/g faecal matter. Results show a very significant rhythm of egg production, with a 12 h period and variable amplitude. A peak of excretion was recorded between 05^{00} and 06^{00} and another between 17^{00} and 18^{00}, followed by a greater peak corresponding to egg release between 00^{00} and 01^{00} or 12^{00} and 13^{00}. There also exists a negative influence of the phenomenon on itself: a peak of production is followed by a highly reduced excretion 6-h later. The analysis of faecal production showed the existence of a 12-h cycle and of a 24-h cycle independent of the former. As in the case of egg production, the same negative influence of faecal production on itself was observed with a 6-h delay. The peaks of faecal matter and egg excretions do not coincide but there are certain similarities between the two phenomena. Crossed correlations between the faecal production and egg production series show instantaneous relations or those with a 4-5 or 6 h delay. This is consistent with an effect of faecal production, thus intestinal transit, on egg excretion, but this remains to be confirmed by subsequent work.

REFERENCES

1. CRAM E. B.: Studies on oxyuriasis, summaries and conclusions · Amer. J. Dis. Child. *65*, 46-59, 1943.
2. DUCLUZEAU R., BELLIER M., RAIBAUD P.: Transit digestif de divers inoculums bactériens introduits *per os* chez des souris axéniques et holoxéniques (conventionnelles): effet antagoniste de la microflore du tractus gastro-intestinal · Zbl. Bakt. Parasit.-Kde (I. Abt. Orig.) *213*, 533-548, 1970.
3. HAWKING F.: Circadian and other rhythms of parasites · Advanc. Parasit. *13*, 123-182, 1975.
4. JACOB C., KERBOEUF D.: Statistical methods for detection of a periodic phenomenon in short series. Study of density series of Nematode eggs · Chronobiologia (In press).
5. KERBOEUF D.: The effects of time and temperature of storage of the infectivity of third stage larvae of *Heligmosomoides polygyrus (Nematospiroides dubius)*. I. Effects on the development to the adult stage in mice · Ann. Rech. vet. *9*, 153-159, 1978.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

6. LEWIS J.W., SHAVA F.H.M.: Rhythmic egg deposition by intestinal nematodes of laboratory mice · Parasitology 75 (2), 1977.

7. MCARTHUR W.P.: Threadworms and pruritus ani · J. roy. Army med. Cps 55, 214-216, 1930.

8. MAILLARD J.: Collecteur automatique de fèces de souris · Sci. Techn. Anim. Lab. 2, 155-159, 1977.

9. PHILLIPSON R.F.: Intermittent egg release by *Aspiculuris tetraptera* in mice · Parasitology 69, 207-213, 1974.

10. ROBERTS F. H. S., O'SULLIVAN P. J., RIEK R.F.: The significance of faecal egg counts in the diagnosis of parasitic gastro-enteritis of cattle · Aust. vet. J. 27, 17-18, 1951.

11. SPEDDING C.R.W.: Variation in the egg content of sheep faeces within one day · J. Helminth. 26, 71-86, 1952.

12. VAN DER GULDEN W. J. L.: Diurnal rhythm in egg production by *Syphacia muris* · Exp. Parasit. 21, 344-347, 1967.

Requests for reprints should be addressed to:

DOMINIQUE KERBOEUF
Station de Pathologie Aviaire et de Parasitologie
Centre de Recherches de Tours-Nouzilly
I.N.R.A.
37380 Monnaie, France

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 3 .

STATISTICAL METHODS OF DETECTION OF A PERIODIC PHENOMENON IN A SHORT SERIES. EXAMPLE OF APPLICATION: A DENSITY SERIES OF NEMATODE EGGS - II

CHRISTINE JACOB * DOMINIQUE KERBOEUF **

Laboratoire de Biométrie
*I.N.R.A. - C.N.R.Z., Domaine de Vilvert, Jouy-en-Josas **

Station de Pathologie Aviaire et de Parasitologie I.N.R.A.
*Centre de Recherches de Tours-Nouzilly, Monnaie, France ***

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Using the example of the treatment of a series of density of nematode eggs, we give a survey of the main methods of detection of a periodic phenomenon in a short series x(1), . . . , x(N) (where N is about 100).

These methods may be ranked into 3 groups:

1. *Smoothing methods* which are intended to give a graphic representation of periodicity.

2. *Regression methods* which fit to the data a parametric periodic function; the estimated period is then that providing the best fitting.

3. *Study of the series autocorrelations* which exhibit the same periodicities as the initial series.

The two former methods (smoothing and regression) concern the first order characteristics of the studied process (i.e. mean at each time), while the third one concerns second-order characteristics (autocorrelations). In all the cases the purpose is to study the non-random characteristics of the process, i.e. those which are independent of random disturbances (or 'noise'), particular to the observed series.

The purpose of these methods is to find periodicities, not to explain them. They can only contribute to explain them through the hypotheses that their results suggest.

The series studied includes 72 observations carried out at regular intervals (every hour, series of 3 days). The observed variable is the density of eggs of nematode parasites/hour and /gram of mice faeces (average calculated on a group of 10 mice) (KERBOEUF and JACOB[1]).

Key-words: Autocorrelations; Periodogram; Regression; Rhythm; Smoothing methods; Spectrogram; Statistics.

The first part has been published in Chronobiologia *10*, 255-268, 1983.

Received April 27, 1982.

Chronobiologia *10*, 351, 1983.

I. SMOOTHING METHODS

When the series is very noisy (i.e. including large and apparently impredictable variations from one time to another), its graphic representation does not show any periodicity. Smoothing methods, by smoothing the series, that is by 'levelling' the random disturbances, allow to point out the underlying deterministic structure, rhythms or trend. There are two main different approaches to estimate this deterministic structure, one is a polynomial approach which assumes that the deterministic structure is locally polynomial (on short intervals of time), and the other is a frequency approach which eliminates in the series all the variations more rapid than the deterministic structure, that is, of higher frequencies. These 2 approaches amount to smoothing methods by means of moving averages.

I.1. *Polynomial approach* (KENDALL and STUART[12])

For this approach we must assume that x(t) can be decomposed according to the deterministic structure which is to be studied, D(t), and a white noise ε(t) [the ε(t) are supposed to be I.I.D. $\mathcal{N}(0, \delta^2)$, (Identically and Independently Distributed according to the Normal law $\mathcal{N}$ of expected mean zero and of variance δ^2)]:

$$x(t) = D(t) + \varepsilon(t) \quad t = 1 \ldots N$$

and we assume that, for each t, D(t) can be represented in the interval (t−K, t+K) by a polynomial of degree d, that is

$$D(t+u) = \sum_{j=0}^{d} b_j(t)\, u^j \text{ for } |u| \leq K.$$

The unknown parameters $b_j(t)$ are estimated by minimizing the residual variance $\sum_{u=-K}^{+K} \varepsilon(t+u)^2$, in the model $x(t+u) = \sum_{j=0}^{d} b_j(t)\, u^j + \varepsilon(t+u)$ $u = -K, \ldots, +K$.

The estimates have the form

$$\hat{b}_j(t) = \sum_{u=-K}^{+K} a_{u_j}\, x(t+u)$$

where the coefficients a_u are such that

$$\sum_{-K}^{+K} a_u = 1 \text{ and } a_{-u} = a_u \quad u = 1 \ldots K$$

the a_u depends on d and K. Little values are chosen for d (d = 1, 2 or 3) and then K is chosen according to the variation of the deterministic structure which has to be of degree d in each interval (t−K, t+K) − As $D(t) = \hat{b}_0(t)$ (for u = 0); we will choose as estimate of D(t), $\hat{D}(t) = \hat{b}_0(t) = \sum_{-K}^{+K} a_u\, x(t+u)$.

For example, if d = 1 and any K

$$\hat{b}_0(t) = \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{+K} x(t+u)$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

it is the simple moving average. If

$d = 3$ and $K = 2$

$$\hat{D}_t(t) = -\frac{3}{35}x(t-2) + \frac{12}{35}x(t-1) + \frac{17}{35}x(t) + \frac{12}{35}x(t+1) - \frac{3}{35}x(t+2).$$

For higher values of K, the computation is more complicate and has been simplified by using iterated moving averages with K not too big. Spencer's 15-point formula is of this type and fits locally cubic deterministic structures. The result is an approximation of the least-squares estimates. As nowadays, thanks to computers, the simplification is not as important as in the past, it is generally better to use the least-squares estimates.

1.2. *Frequency approach* (BLOOMFIELD[3])

If, in addition to D(t) and ε(t), the series possesses other variations such as rhythms, more 'rapid' than the deterministic structure D(t) to be studied, the previous model is not valid any more, unless the moving average $\sum_{-K}^{+K} a_u\, x(t+u)$ removes up these rhythms.

In this approach we will consider all the different variations of the series as rhythms and the method will consist in the estimation of the particular variation D(t) by eliminating all the others of higher frequency. A trend will be considered as a periodic phenomenon of period $> N/2$ [that is, of (angular) frequency $< 2.\frac{2\pi}{N}$], and ε(t) as a sum of rhythms with very short periods (i.e. with very high frequencies).

The obtained estimate has the form of a weighted moving average too, and is called filtered series. Its coefficients a_u are generally found by the least-squares method in the frequency domain (BLOOMFIELD[3]). They are

$$a_u = \frac{a'_u}{\sum_{-K}^{+K} a'_u} \quad \text{where } a'_u = \frac{\sin u\omega_c}{\pi u} \cdot \frac{\sin u\omega_k}{u\omega_K}, \text{ for } u \neq 0$$

where $\omega_k = 2\pi/(2K+1)$

and ω_c is a given threshold frequency. Elimination is total for frequencies $\omega \geq \omega_c + \omega_K$, partial for frequencies $\omega_c - \omega_K < \omega < \omega_c + \omega_K$, and null for frequencies $\omega < \omega_c - w_K$. The size of the interval where the elimination is partial depends on the number 2K+1 of coefficients a_u.

Remark

i. the usual moving average $\frac{1}{2K+1}\sum_{-K}^{+K} x(t+u)$ which estimates deterministic structure locally linear on intervals (t−K, t+K), eliminates frequencies of type $k.\frac{2\pi}{2K+1}$ (k integer and $\neq 2K+1$), but no frequencies ω of type $k.\frac{2\pi}{2K+1} < \omega < (k+1)\frac{2\pi}{2K+1}$.

To eliminate frequencies of type $\frac{2\pi}{2K}$, we will use the modified moving average

$$\hat{D}(t) = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{2}x_{t-K} + \sum_{+K-1}^{-K+1} x_{t+u} + \frac{1}{2}x_{t+K}\right)$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

it is the result of 2 consecutive moving averages the first of length 2K, and the second of length 2. More generally, the moving averages found by the first method (§ I.1.) do not correspond to filtered series, that is, they cannot eliminate all the frequencies higher than a certain threshold frequency ω_c. Therefore, filtered series are smoother than the moving averages of the first method (more disturbances are eliminated) and in presence of unknown variations, this method is more exact because it can be used on series of a more general type.

ii. the problem considered here is the *estimation* of a deterministic structure in order to detect mainly a periodicity. If we only have to *remove up* (and not to detect) a trend or a rhythm, we can directly use differencings: for example, first order differencing $x_t - x_{t-1}$ removes up linear trends of the type at+b (t = 1 . . . N) and nearly completely more general deterministic structure D(t) such that $D(t) \simeq D(t+1)$; T^{th} order differencing $x_t - x_{t-T}$ removes up periodic phenomenon of period T. Differencings are also weighted moving averages.

Applications and results (Fig. 1)

We have used the simple (or modified) moving averages which eliminate locally linear trend and the filtered series:

1. on 13 consecutive observations (K=6) to show a possible trend (or cycles of great period):

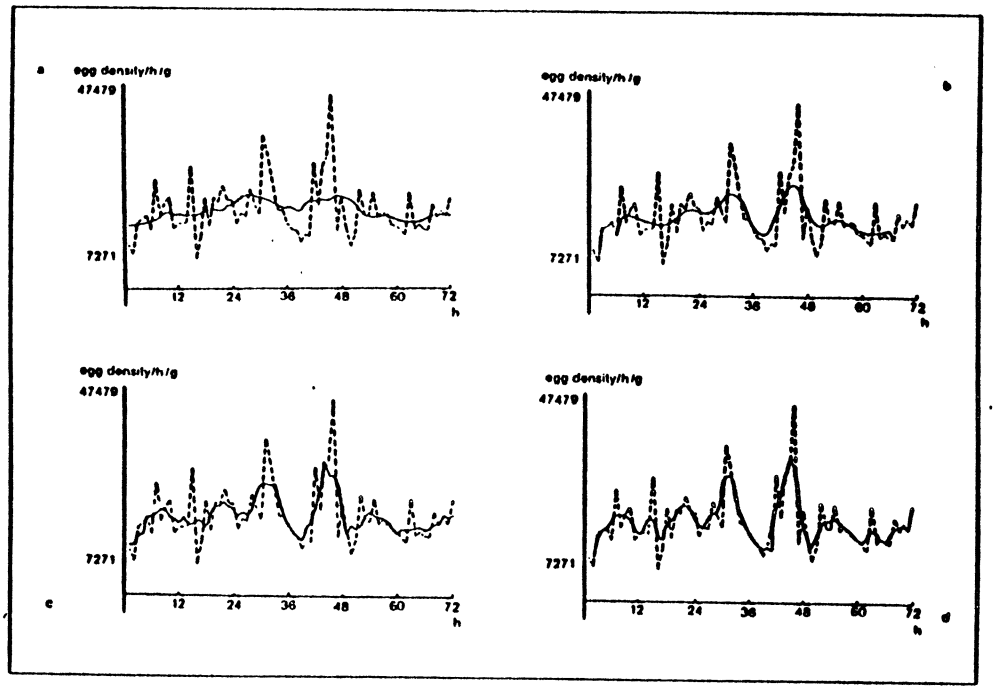


Fig. 1 - Egg density series (N = 72) and smoothed series: a. using a modified moving average of length 12; b. using a filter of length 13 and of threshold frequency $\omega_c = 0.5$; c. using a moving average of length 5; d. using a filter of length 5 and of threshold frequency $\omega_c = 1.0372$. The horizontal axis represents the time in hours.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

– using modified moving averages, frequencies k $\frac{2\pi}{12}$ (=k.0524) were eliminated;

– using filtered series, with $\omega_n = 0.500$, frequencies $\omega \geq 0.5 + \frac{2\pi}{13} = 0.983$ (corresponding to a period T = 6.4) were totally eliminated of the series, while frequencies ω such that $0.017 < \omega < 0.983$ were partially eliminated.

2. on 5 consecutive observations (K=2) to eliminate rapid disturbances:

– using moving averages, frequencies k $\frac{2\pi}{5}$ (=k 1.256) were eliminated;

– using filtered series with $\omega_n = 1.0372$, frequencies $\omega \geq 1.0372 + \frac{2\pi}{5} = 2.293$ (corresponding to a period T = 2.7) were totally eliminated and the frequencies ω such that $-0.781 < \omega < 2.293$ were partially eliminated.

The smoothed series on 13 observations did not show any marked trend, except two slight 'humps' in the middle of the series. The smoothed series on 5 observations showed 6 cycles of apparently constant period T = 72/6 = 12, and of extremely variable amplitude from one cycle to another (two main peaks in the middle of the series corresponding to the 2 'humps' of the trend).

Conclusion

Filtered series and moving averages have the same general form. The only main difference is that the former is smoother than the latter. Therefore, in order just to detect periodicities, the moving averages which are very simple to use are sufficient.

II. REGRESSION METHODS (JACOB[10], ANDERSON[2], SCHEFFE[11])

II.1. *Estimates of the periodic phenomenon.*

These methods assume a model with a deterministic periodic mean, of type

$$x(t) = f_1(t) + \varepsilon(t)$$

where $f_1(t)$ is a given parametric function which represents the unknown periodic phenomenon of period T (unknown) and $\varepsilon(t)$ measures the deviation of this function from the data. Generally, the $\varepsilon(t)$ are assumed to be I.I.D. $\mathcal{N}(0, \delta^2)$, identically and independently distributed according to the normal law of expected mean zero and of variance δ^2. Residuals $\varepsilon(t)$ then represent the measure errors. Parameter estimates, for fixed T, are least-squares estimates, obtained by minimizing the residual variance $\Sigma\, \varepsilon(t)^2$. The $f_1(t)$ is fitted to the data for different values of T and the value which provides the 'best' fitting is chosen as estimate of the theoretical period: considering on the one hand that a periodic phenomenon of period T is also of period 2T, 3T ... and on the other hand that the larger is T, the smaller is the residual variance (at the limit, in a model including as much parameters as observations, residuals are zero), we will choose as estimate of the unknown period the smallest value T leading to a significant test and such that the residual variances at 2T, 3T, ..., are also minima.

This type of model assumes a single or predominant rhythm. If it is not the case, the $\varepsilon(t)$ will be no more independent and the tests will be no more

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

valid (§ II.3.). Therefore we have to verify this hypothesis: in particular, we have to test, if necessary, that periodicities 2T, 3T ... are the only repetitions of the T one.

Once the period T is estimated, we can plot the graphic $f_i(t)_{i=1\ldots T}$ giving the shape of the periodic phenomenon. Moreover, the computation of a confidence band of the theoretical phenomenon allows to show how much this estimation is reliable (§ II.2.). This may be the starting point of a modelling of this phenomenon.

II.1.a. The Whittaker-Robinson's model (it assumes a constant step series, $t = 1, \ldots, N$).

It is the most common model since it does not assume any analytical form for $f_i(t)$. It only assumes $f_i(t) = f_i(t+T)$ and T integer. The model, therefore, can be written:

$$x_{ij} = f_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1 \ldots T \\ j = 1 \ldots n_i \end{matrix}$$

where n_i is the number of observations for the i^{th} instant of the period. The model includes T unknown parameters, $f_i = f_i(i)$, $i = 1 \ldots T$. Estimates and tests are those of an one-way layout analysis of variance (§ V.). The graphic plot of the residual variance

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$$

as a function of $T(T = 2, \ldots, N/2)$, called Whittaker-Robinson's periodogram, allows to point out relative minima and the tests allow to check that these minima are significant (i.e. that the associated periodicity is significant). Once the period T is chosen, we can verify that the periodicities 2T, 3T ... are the only repetitions of the T one by the means of a multiple comparison test (§ V.).

II.1.b. Schuster's model (it assumes a constant step series $t = 1, \ldots, N$).

This model constitutes a link with non-parametric spectral analysis methods which are appropriate to long series: it is based on the fact that any periodic phenomenon of period T may be decomposed in a sum (finished or not) of frequency sinusoïd, the basic frequency $2\pi/T$, and its harmonic $k.2\pi/T$ (k integer). Schuster's method attempts to identify these frequencies among all the frequencies of type

$$k.\frac{2\pi}{N} \quad (k = 1, 2, \ldots, [N/2])$$

called Fourier's frequencies. These frequencies are characterized by the fact that they independently contribute to the total variation of the series (i.e. the total variation of the series due to periodic effect is the sum of variances $A_k^2/2$ due to each Fourier's frequency $k\,\frac{2\pi}{N}$ of amplitude A_k). Decomposition of the series variation according to these frequencies allows to 'unmix' the various frequencies involved in the series structure by transforming them into independent sinusoïds. This allows to distinguish several different periodicities, of equivalent amplitudes, which could not otherwise be located on the observed series (smoothed or not) or on the Whittaker-Robinson's periodogram.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

The graphic plot of A_k^2 according to $k.2\pi/N$ frequencies (called Schuster's spectrogram) allows to detect, thanks to its peaks, the frequencies which are liable to be involved in the process structure. However, as far as the various spectogram values are independent, the ones from the others (when the phenomenon is a simple white noise without any periodicity), the spectrogram exhibits an erratic shape with not necessarily significant peaks. Hence the latter will have to be interpreted with caution: a periodicity of period N/j (j integer) characterized on the spectrogram by peaks at the frequencies

$$\frac{2\pi j}{N}, 2.\frac{2\pi j}{N}, \ldots, k.\frac{2\pi j}{N} \ldots,$$

will only be kept if it is considered as significant for the test of significance of the coefficients a_k and b_k in the model:

$$x(t) = \mu + \sum_k a_k \cos k.\frac{2\pi j}{N}.t + b_k \sin k.\frac{2\pi j}{N}.t + \varepsilon(t) \quad (A_k^2 = a_k^2 + b_k^2)$$

where $\varepsilon(t) \sim$ I.I.D. $\mathcal{N}(0, \delta^2)$

Once the period T is estimated, we can test that periodicities 2T, 3T ... are the only repetitions of the T one by means of the F test relative to hypothesis of nullity of the proper periodicities 2T, 3T ... (§ V.).

Remarks

i. periods corresponding to the analyzed Fourier's frequencies are periods N, N/2, N/3, ..., 2. Period N gives the trend of the series which besides may be only a piece of periodic phenomenon of period higher than N/2. The interval between two consecutive frequencies is 1/N. It is all the more small as N is large. Generally, the unknown theoretical frequency will be comprised between two Fourier's frequencies:

$$\frac{2\pi k}{N} < \frac{2\pi}{T} < \frac{2\pi(k+1)}{N}$$

and will be characterized on the spectrogram by two consecutive peaks (at $\frac{2\pi k}{N}$ and $\frac{2\pi(k+1)}{N}$) (the same for its harmonics). Hence it is advisable, in order to locate better the theoretical period:

- to carry out in addition a Whittaker-Robinson's analysis;
- to make another Schuster's analysis, truncating the series with N_o observations such that $N_o = T.j$ (j integer) where T is the supposed period;
- to estimate directly the unknown frequency $\lambda = 2\pi/T$, in Walker's model (see the following section) with $\lambda_o = \frac{2\pi k}{N}$ as initial estimate;

ii. if the process has a periodicity of frequence λ, the spectrogram may exhibit factitious peaks at Fourier's frequencies the nearest of frequencies $\lambda + \frac{(2k+1)}{N}\pi$; (BLOOMFIELD[3]). One may suppress these peaks applying a window (or 'taper') to the series x(1) ... x(N), which rounds off the angles of the natural window (equal to 1 by 1, ..., N, and 0 for $t < 1$ and $t > N$) cause of these

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

nuisance peaks. In that case tests are no more so reliable. In practice it is therefore generally sufficient to analyse the spectrogram of the observed series (taking into account for the interpretation these nuisance phenomena).

Remark

The analyzed series is that of an egg density/gram of faeces and /hour, and hence has a real meaning only at discontinuous intervals of 1 h. Schuster's model [the periodic mean f(t) of which is a continuous function of the time] is only appropriate here as a model for detection of periodicities and not as a fitting model. It may be interpreted, if necessary, as moving average of the egg density p(τ) at each time

$$f(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} p(\tau)\, d\tau.$$

We studied it here (graphic plot, confidence bands) mainly with a pedagogical purpose.

Results of the Whittaker-Robinson's and Schuster's methods

– the Whittaker-Robinson's periodogram indicates two minima relative to periods 12 and 24 (Fig.2a). Associated statistics of significance test for periodic effect are:

$F_{11,46} = 2.260$ (significant at 0.02) for period 12

and

$F_{23,46} = 2.541$ (significant at 0.005) for period 24

– The Schuster's spectrogram exhibits a largely predominant peak at $6.\frac{2\pi}{72}$ (period 12), small peaks at $\frac{2\pi}{72}$ (trend), $4.\frac{2\pi}{72}$ (period 18) and $9.\frac{2\pi}{72}$ (period 8), and factitious peaks at $21.\frac{2\pi}{72}$ (period 3.429) and $33.\frac{2\pi}{72}$ (period 2.182), (Fig. 2b). Tests relative to the corresponding periodic phenomenon show that only the periodicity of 12 is the most significant:

$F_{3,51} = 3.036$ (significant at 0.0075) for period 12 with the 3 main harmonics 12/72, 24/72, 30/72;

$F_{12,39} = 2.084$ (significant at 0.05) for period 12 with all the harmonics;

$F_{24,27} = 2.430$ (significant at 0.005) for period 24 with all the harmonics;

$F_{30,51} = 2.550$ (significant at 0.005) for period 24 with the 9 main harmonics 6/72, 9/72, 12/72, 15/72, 21/72, 24/72, 27/72, 30/72;

$F_{2,69} = 2.975$ (not significant at 0.05) for trend;

$F_{6,63} = 1.245$ (not significant at 0.05) for period 18;

$F_{4,67} = 1.589$ (not significant at 0.05) for period 8;

$F_{2,69} = 2.506$ (not significant at 0.05) for period 3.429;

$F_{2,69} = 2.546$ (not significant at 0.05) for period 2.182.

We will therefore conclude only about a periodicity for 12 h: as a matter of fact we may wonder here whether a proper periodicity for 24 h may exist, which is not a repetition of the 12 h periodicity. The response is negative both because of the complementary results of Whittaker-Robinson's and Schuster's methods and of the results of the other methods:

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

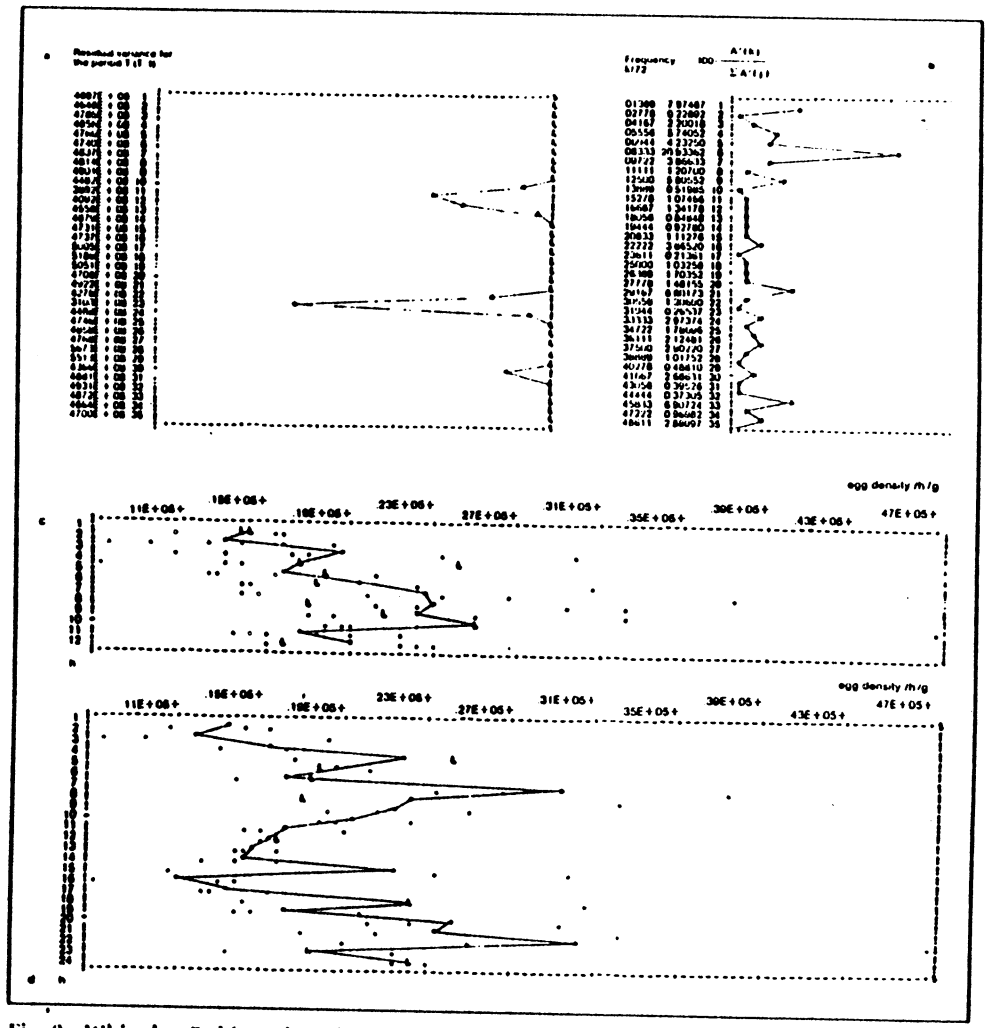


Fig. 2 · Whittaker-Robinson's and Schuster's analyses of the egg density series (N = 72): a. Whittaker-Robinson's periodogram: graph of the residual variances for each period T = 2, ..., 36; b. Schuster's spectrogram: percentage of the variance $100 \cdot \frac{A^2(k)}{\sum_i A^2(j)}$ · relative to each frequency k/72; c. Whittaker-Robinson's estimate of the periodicity 12 and observed data (.) in each period; d. Whittaker-Robinson's estimate of the periodicity 24 and observed data (.) in each period.

i. the multiple comparison test of nullity of $(f_i - f_{i+12})$, i = 1 . . . 12, in the Whittaker-Robinson's model, shows no rejection of this hypothesis:
the level α of the Scheffe's test (§ V) satisfies the following inequality

$$13\ 119^2 \geq 12.F_{\alpha,12,48} \cdot \frac{2}{3} \cdot 31029800$$

or $F_{\alpha,12,48} \leq 0.69$. Therefore $\alpha < 0.50$;

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

ii. graphic plot of the 24 h periodic phenomenon estimated in the Whittaker-Robinson's model, seems to be the repetition of the 12 h one (Fig. 2.c,d);

iii. amplitudes of the proper harmonics of the 24 h periodic phenomenon (i.e. which are not also harmonics of the 12 h one) are negligible relatively to the fundamental frequency $2\pi/12$, and associated statistics of test of nullity of this proper periodicity of 24 h shows no rejection of this hypothesis comparatively to the test of periodicity 12 (Tab. 1).

$F_{12,47} = 2.248$ significant at 0.025%

iv. smoothed series of length 12 does not show any cycle of period 24 h (§ I.).

v. residuals autocorrelations for the Whittaker-Robinson's and Schuster's model, relative to the 12 h period, do not exhibit any periodicity of period 24 (cf. § II.3.).

The graphic plot of this periodic phenomenon estimated in the Whittaker-Robinson's model allows to imagine the laying rhythm (KERBOEUF and JACOB[11]).

II.1.c. *Other models.*

Cosinor, Tong's, Walker-Hannan's models also involve a mean of the sinusoidal type but they assume that period T is almost known and only allow to check it by means of proper tests. They can therefore be used for circadian phenomena (to test periods around 24 h) provided that they are almost *sinusoids*. The advantage of Walker-Hannan's model is that it assumes residuals with autoregressive random memory

$\varepsilon(t)$ is of the type $\sum_{j=0}^{p} a_j \xi_{s-j}$

where the ξ_s are I.I.D. $\mathcal{N}(0, \delta^2)$ but tests are only reliable for long series.

	k	frequency k/24	amplitude
12 h rhythm	2	0.08333	4372.1
	4	0.16667	1106.7
	6	0.25000	971.34
	8	0.33333	1647.8
	10	0.41667	1566.5
	12	0.50000	926.91
genuine 24 h rhythm	1	0.04167	1417.6
	3	0.12500	2302.7
	5	0.20833	1007.9
	7	0.29167	2492.6
	9	0.37500	1628.0
	11	0.45833	2511.2

Tab. 1 - Spectral decomposition by the Schuster's method of the 12 h and genuine 24-h rhythms for the egg density series.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Walker's model may include several periodicities, decomposed according to their basic frequency and a few harmonics. Here frequencies are unknown and are estimated at the same time as the other model parameters. Initial estimates of these frequencies have to be supplied so that the minimization algorithm of residual squares converges. They can be obtained by means of a preliminary Schuster's analysis. As far as the model is not linear as a function of the frequencies, the estimator statistical properties are asymptotic (i.e. are only valid when N is large enough, for example N = 100, 200 or more according to the noise relative importance). Therefore in some cases this model allows to improve Schuster's analysis.

Any other model of type

$$x(t) = f(t) + \varepsilon(t)$$

may be designed, where f(t) will depend on unknown parameters to be estimated. It must be mentioned that if the model is linear as a function of the parameters, the estimator statistical characteristics are valid whatever N, therefore for short series. On the contrary, if it is not linear, the characteristics are asymptotic (only valid if N is large enough).

Results

Because of the periodic phenomenon form it was not possible to use a sinusoid model. We tried Walkers's model using as initial frequencies those detected by the Schuster's model: $\frac{2\pi}{12}$, 2. $\frac{2\pi}{12}$, 4. $\frac{2\pi}{12}$, 5. $\frac{2\pi}{12}$. But the estimating algorithm did not converge (too important noise).

II.2. *Confidence 'band' of the periodic phenomenon* (SCHEFFE[11]) (§ V.).

When the periodic phenomenon is estimated (using one of the previous models), a confidence 'band' of this phenomenon may be computed. This 'band' indicates, as its name implies, the confidence that may be granted to the estimated phenomenon, taking into account that chosen model (i.e. assuming that the chosen model actually represents reality). This confidence 'band' is calculated by means of the simultaneous confidence intervals of parameters determined in a single way by the model according to Scheffe's method. In the case of Whittaker-Robinson's model, one may also find simultaneous confidence intervals of $f_1, \ldots, f_r$ by Student's method. Generally, calculation of the band is valid whatever the value of N if the model is linear as a function of the parameters. Otherwise it is only valid if N is large enough. In all cases the band width increases as the sample size or the number of parameters of the model decrease and at the same time as the residual variance.

Results (Fig. 3)

Confidence bands were calculated at a 90% or more than 90% level by Scheffe's method and also Student's method for the Whittaker-Robinson's model. This method, which takes into account the heterogeneity of variances in the 12 'populations' (corresponding to the 12 observation times defining periodicity), is the most suitable here (see section II.3.). Bands are very wide mainly because residual variance is rather high. Therefore, the localizations of the different peaks of the periodic phenomenon are not so reliable and have to

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

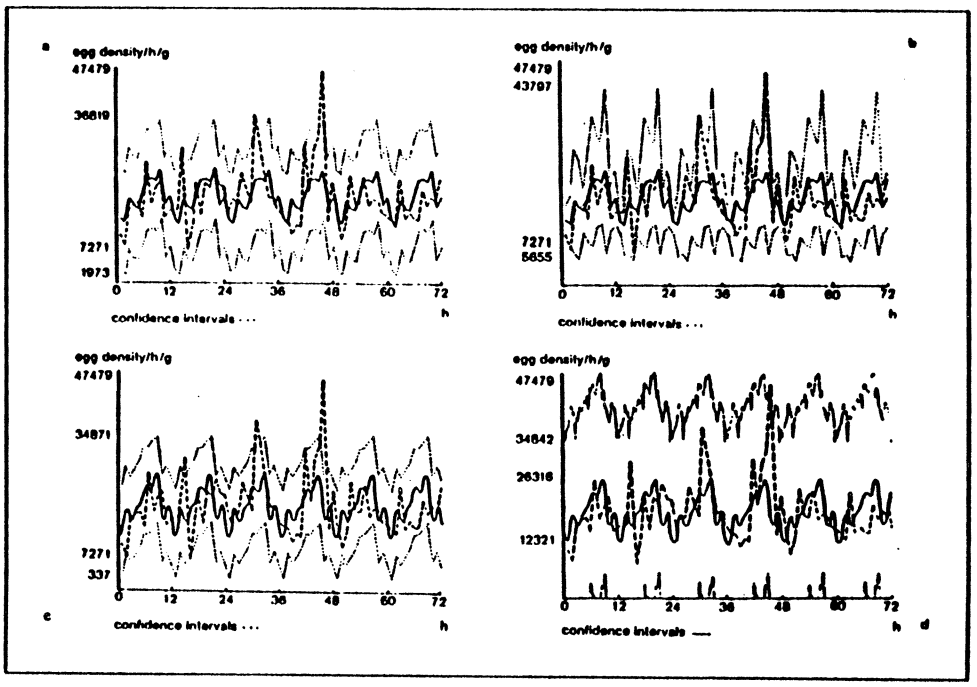


Fig. 3 - a. Egg density series (N = 72). In superposition, 90% simultaneous confidence intervals (Scheffe's method) of the periodic phenomenon of period 12 (*Whittaker-Robinson's* model); b. Egg density series (N = 72). In superposition, 90% simultaneous confidence intervals (Student's method) of the periodic phenomenon of period 12 (*Whittaker-Robinson's* model); c. Egg density series (N = 72). In superposition, 90% simultaneous confidence intervals (Scheffe's method) of the periodic phenomenon of period 12 (*Schuster's* model); d. Egg density series (N = 72). In superposition, more than 90% confidence band (Scheffe's method) of the periodic phenomenon of period 12 (*Schuster's* model).

be confirmed by results relative to other similar experiments (KERBOEUF and JACOB[11]).

Remark

The confidence band of the Schuster's model calculated at a more than 90% level is therefore much wider than the others, and too much wide to be useful.

II.3. *Study of residuals*

All the classical regression models (i.e. the previous ones except Walker-Hannan's model) assume the independence, equidistribution and normality of residuals. If these conditions are not met (especially the former two), tests are not reliable.

i. The independence

Non independence may result:

– either from the choice of a bad period. This can occur especially when the real period is not an integer number of times the observation instants;

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

– either from the fact that the analytical form of f(t) is not adapted (for example, f(t) does not include enough harmonics, which is generally the case with Cosinor and Tong's models which consist of a single sinusoid);
– either from the fact that the series includes one trend or other periodicities;
– or from the fact that the studied process possesses an autoregressive random memory. Only the Walker-Hannan's model takes this memory into account. Independence of residuals may be tested using a non parametric run test (GIBBONS[9]) (assuming that they are identically distributed). If this hypothesis is rejected, autocorrelations of residuals will be studied in detail (§ III.). Those which are significantly not zero allow to detect a process memory, the origin of which (random or deterministic, see above) will have to be checked.

Results

– *Independence and equidistribution* (run tests)

	Observed significance level		
	RUNUD (run up and down)	RUNMED (median run)	median
Whittaker-Robinson's model	0.0770	0.4062	−1043.16
Schuster's model	0.1962	0.4062	−550.96

Runmed tests show that the hypothesis of independence and equidistribution of residuals is not rejected in both models. This is a little less marked for Runud tests. Here both models are equivalent.

To conclude, that is to accept the hypothesis of independence or that of equidistribution or both hypotheses, it is better to do complementary analyses, as the study of autocorrelations of residuals and the test of equality of variances (§ ii.).

– *Autocorrelation*
– *Graphic examination* (see Figs 4.a, b.)

Whittaker-Robinson's model

Values range from −0.45 to 0.37. The autocorrelation series has not the periodic aspect of the autocorrelation series of the observed series (see § III.). However, a large peak is observed for the lag of 12.[$\rho(12) = -0.39$] which shows that it remains perhaps a memory of 12 relative to the periodic phenomenon. Other peaks are observed at the following lags: 17, 25, 31, 36, 48.

Remark

$\rho(12)$ was identical for the log transformed series. This slight subsisting periodicity was thus not due to heterogeneity of variances (see § ii.).

Schuster's model

The autocorrelation function has a more erratic form (ranging from −0.45 to 0.53) which might be due to a white noise. We observe a few small peaks common to Whittaker-Robins's model, the main difference concerns $\rho(12)$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

which is here almost equal to zero. Therefore this model seems more appropriate than the Whittaker-Robinson's (i.e. accounts more for periodicity), as far as residuals are more 'whitened' in this model.

– *Significance test.*

Only first autocorrelations which are widely greater in absolute value to $1.96/\sqrt{72} = 0.23$ can be considered as significant (at a 5% maximum approximate level).

Since residuals are not observed but estimated in a model relative to N observations and including a number of unknown parameters, the level of reject relative to the value $1.96/\sqrt{N}$ will have to be considered as theoretically smaller than 5%. Despite this remark, there is a single significant autocorrelation in Whittaker-Robinson's model $|\rho(12)|$ and no significant autocorrelation in Schuster's model.

ii. Equidistribution

Regression models assume that residuals are distributed at each time t according to the same normal law $\mathcal{N}(0, \delta^2)$ of zero mean and δ^2 variance. Nullity of expectations and equality of variances would only be checked using periods as repetitions, that is to say, assuming that the process recur identically from one period to another. We will then use tests of the one-way layout analysis of variance for the equality of expectations and those of Bartlett or Hartley for the equality of variances (DAGNELIE[8], SNEDECOR and COCHRAN[11]).

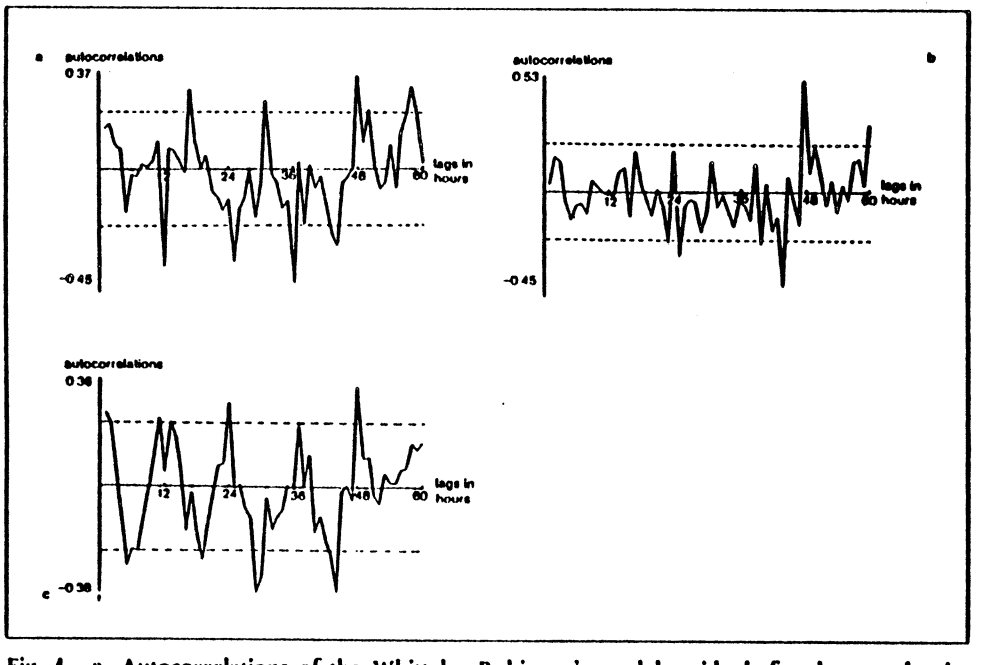


Fig. 4 - a. Autocorrelations of the Whittaker-Robinson's model residuals for the egg density series (N = 72); b. autocorrelations of the Schuster's model residuals for the egg density series (N = 72); c. autocorrelations of the egg density series (N = 72).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

The test of nullity of the expectations allows to check that the model used actually represents the unknown periodic phenomenon.

Remark

For Whittaker-Robinson's model, according to the definition of estimates of parameters $f_1, \ldots, f_r$ of the periodic phenomenon, averages of residuals are zero. In case of heterogeneity of variances, they would be stabilized by transforming previously the data [for example, by a logarithmic transformation (DAGNELIE[4])]. Generally, equidistribution may be tested (at the same time as independence) using a run test. This test, however, cannot separate the two hypotheses.

Results

Tests of equality of variances in Whittaker-Robinson's model
(Tab. 1) (KERBOEUF and JACOB[11]).

The Hartley's test which is equal to 34.83 is at the limit of the reject of the variance equality hypothesis (we reject at a 5% level but not at a 1% one). However the variances seem very different and the ratio δ_i^2/f_i is here as larger as the mean f_i is larger because the variability is due both to the laying process distribution law that we can consider as of Poisson type, and to the measure errors[11]. If the distribution law of the variable was only of Poisson type, the ratio δ_i^2/f_i would be constant.

Taking into account all the previous results relative to the study of independence and equidistribution of residuals, we can conclude that they are independent but distributed with heterogeneous variances which are increasing at the same time as the periodic effect.

To make sure, we carried out once again the analyses of Whittaker-Robinson and Schuster on data logarithmically transformed (in order to stabilize variances). Results were identical and even more significant for the previously detected periodicity of 12 (§ II.1.a. and b.).

iii. Normality (DAGNELIE[4])

A small deviation from normality does not affect the results of tests of nullity of the parameters in the regression models. Normality may be tested, in the case of a given theoretical distribution, using the Kolmogorov's non-parametric test (valid whatever the size of the series), or in the general case, using tests of significance of the Fisher's coefficients of skewness and kurtosis and the examination of the histogram of the empirical distribution of residuals.

Results

The histogram of the empirical distribution of residuals of the Whittaker-Robinson's model exhibits a slight skewness as compared to normal distribution (skewness characteristic of a Poisson's law). The values of the Fisher's coefficients are

SKE = 1.17 KUR = 2.10.

They are significantly not zero (at an approximate 5% level).
These results are not surprising, the observed process depending on the laying process that we can consider as of Poisson type, together with the measure errors[11].

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

II.4. *Remarks on these models.*

II.4.1. *Repetitions.*

These models are generally used for a single series but they may of course be applied to several observed series of the same process (in identical experimental conditions) provided that they are synchronized.

II.4.2. *'Random' periodicities.*

The above mentioned regression methods assume that the periodic phenomenon is quite deterministic, i.e. checks that whatever t, $f(t) = f(t+T)$. In practice, periodicity is more or less random. For example, T slightly varies around an average value T_0 (for the circadian phenomena, $T_0 = 24$ h), or for t fixed, $f(t+kT)$ slightly varies around an average value $f_0(t)$. If these variations, which are generally detectable, graphically by smoothing the series, have some interest for the biological study of this phenomenon, they would have to be taken into account in the model,

– either by putting $f(t) = f_t$, $t = 1, \ldots, N$, with constraints of type $f_t - f_{t+T}$ minimum (corresponding to T fixed and f(t) random) (AKAIKE[1]);

– either by putting $f(t) = f_0(t) + \varepsilon_f(t)$ and/or $T = T_0 + \varepsilon_T(t)$.

Much more random pseudo-periodicities (with a period and an amplitude depending on past values of the process) are present. These pseudo-periodicities may be directly integrated into models of nonlinear autoregressive type (threshold models or models with exponential coefficients (TONG[1], OZAKI[1]).

The choice of the type of periodicity (fixed, random) and of the model depends both on the type of observed phenomenon and on the finesse of the study to be reached. In the first case (where $f(t) = f_0(t) + \varepsilon_f(t)$ and/or $T = T_0 + \varepsilon_T(t)$), if the study concerns the population, individual variations (represented by ε_f and ε_T) will be eliminated using a regression model with deterministic periodicity.

III. AUTOCORRELATIONS

The autocorrelation of order k measures the intensity of the (linear) relationships of the process with itself, with a temporal lag of k instants of measure. The autocorrelation function $\rho(k)$ ($k = 1, 2, \ldots$) is characterized by the fact that it possesses rhythms with the same periods as the observed series. Therefore if the series possesses a periodicity of period T, the autocorrelation function will exhibit peaks at T, 2T, 3T.

But if there are several periodicities, they cannot be distinguished neither on the observed series nor on the autocorrelation series. They need to be unmixed by the means of spectral analysis: thus we can test nullity of a given periodicity in the Schuster's model which must include all the suspected frequencies. Non-parametric spectra which are only a smoothing of Schuster's spectrogram are adapted only to long series ($N \geq 1000$) and are not consistent (their variance does not converge to 0 as the series length tends to infinity) when rhythms are of deterministic type. Parametric spectra estimated in an autoregressive model (BOX and JENKINS[4]) are adapted to short series because

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

they depend only on a few parameters, those of the chosen autoregressive model. But there is no test of significance of the spectral peaks and as for the non parametric spectra, they are not consistent in presence of deterministic rhythms. They can therefore be used only for descriptive purposes, the advantage being that no nuisance peaks are present, as in the Schuster's spectrogram.

When there is no rhythm, the autocorrelations allow to measure the size of the autoregressive memory of the process: assuming that the series is relative to a white noise, their autocorrelations are approximately, for large N, I.I.D. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$. In that case, autocorrelations have an erratic aspect, and, as for spectrogram peaks, would have to be interpreted with caution. The only autocorrelation widely superior, in absolute value, to $1.96/\sqrt{N}$, could be considered as significant, at a maximum approximate 5% level).

Remark

In order to estimate the autocorrelation, because of the small number N of observations, we have chosen the unbiased estimation

$$r(k) = \frac{N}{N-k} \cdot \frac{\sum_{1}^{N-k} x(t)\, x(t+k)}{\sum_{1}^{N} x(t)^2}$$

But from the point of view of the quadratic mean error between the estimate and the real value, it is not necessarily the best (PHAM DINH [4]). In other respects, the (unbiased or biased) estimates are all the more unsuitable as k is large relatively to N. Moreover, the unbiased estimate is equal to the biased one, multiplied by a factor N/N–k. Therefore, the larger is k, the larger is the difference between the 2 estimates. For example, if $k \simeq N/2$, the ratio N/N–k is equal to 2, and if $k \simeq 0.9\ N$, the ratio is equal to 10. The tests are therefore only reliable for little lags ($k < N/4$).

Results (Fig. 4.c.)

The series autocorrelation function has a regular, periodic shape of period 12 (we enumerated 4 cycles for 48 eggs). This graphic corroborates the results of Whittaker-Robinson's and Schuster's methods (§ II.).

IV. DISCUSSION

The conclusions relative to the structure of the analyzed series were not so easy to draw. We had to compare attentively all the results of the different methods to be able, for example, to accept or not a given periodicity. We had also to compare these results to results relative to an analogous series of 4 days. Finally, simplifying a little, we can draw the following conclusions.

Schuster's and Whittaker-Robinson's methods carried out together seem to be the most resourceful for detecting a deterministic periodic phenomenon in this type of series (short series including a single or predominant periodicity). These methods indicate not only the periodicity, but also the shape of the periodic phenomenon. They have to be completed by an analysis of the residuals.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Smoothing methods which are only descriptive allow to bring out a pseudo-periodicity. As for the autocorrelation series, it may allow to detect a memory and to characterize it (autoregressive random memory or deterministic memory due to a periodicity or to a trend). Thus it improves the independence tests (run).

It may be added that generally analyses are all the more precisely interpreted as the noise is small enough as compared to the periodic phenomenon and the number of observations is large enough (i.e. both the number of measurements per cycle and the number of cycles in the experimentation interval are large enough).

V. APPENDIX

V.1. The Whittaker-Robinson's model.

The Whittaker-Robinson's model is

$$x_{ij} = f_i + \varepsilon_{ij}, \qquad \begin{matrix} i = 1 \ldots T \\ j = 1 \ldots n_i \end{matrix} \qquad \sum_{i=1}^{T} n_i = N$$

the ε_{ij} are assumed I.I.D. $\mathcal{N}(0, \delta^2)$.
The least-squares estimates of the parameters f_i are

$$\hat{f}_i = x_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \; i = 1 \ldots T.$$

The test F of the hypothesis $H_0 : f_1 = f_2 = \ldots = f_T$, which means there is no periodicity T, compares the variance due to the periodic effect, MSP, to the residual variance MSE:

$$F = \frac{MSP}{MSE} = \frac{\sum_i n_i (x_{i.} - x_{..})^2/(T-1)}{\sum_{ij}(x_{ij} - x_{i.})^2/(N-T)}$$

where $x_{..} = \frac{1}{N} \sum_{ij} x_{ij}$

F is a Snedecor variable with T−1 and N−T degrees of freedom. We reject the hypothesis H_0 with an error probability α when MSP is big enough with respect to MSE, that is when

$$F \geq F_{\alpha,\, T-1,\, N-T}$$

where $F_{\alpha,\, T-1,\, N-T}$ is such that $P(F_{T-1,\, N-T} \geq F_{\alpha,\, T-1,\, N-T}) = \alpha$.

(in practice, we choose $\alpha \leq 0.05$).

Remark

When T or N vary, the degrees of freedom of F vary and therefore the test severity varies: the test is more and more severe (i.e. we reject more and more easily) with increasing T, or increasing N or both increasing N and T. In the case of a non-rejection this does not necessarily mean that there is no

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

periodicity T but only perhaps that we have not enough repetitions of this periodicity in the series or that the period T is too short, to be able to distinguish it. We can decide H_o only if the observed level $P(F_{T-1,\ N-T} \geq F)$ is much more greater than α or if results of other methods allow to decide H_o. When H_o is rejected, we can test for example that the periodicity 2T is the only repetition of the T one, by the means of the Scheffe's multiple comparison tests in the model relative to the periodicity 2T (§ V. 3.a.).

V.2. The Schuster's model.

The Schuster's model is

$$x_t = \mu + \sum_{k=1}^{K} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}\right) + \varepsilon_t,\ t = 1 \ldots N$$

where $T = N/j$ (j integer), and K is such that $Kj \leq N/2$.
The ε_t are assumed I.I.D. $\mathcal{N}(0, \delta^2)$.
The parameter $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ is the amplitude of the k^{th} sinusoid.
The least-squares estimates of the parameters μ, a_k, b_k are

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} x_t = \bar{x}.$$

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} x_t \cos \frac{2\pi k}{T} t$$

$$\hat{b}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} x_t \sin \frac{2\pi k}{T} t.$$

The test F of the hypothesis H_o : $A_k^2 = 0$, $k = 1 \ldots K$ (that means there is no periodicity T) compares the variance due to the periodic effect, MSP, to the residual variance MSE:

$$F = \frac{MSP}{MSE} = \frac{(N/2) \sum_k (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) / (q_T - 1)}{\left[\sum_t (x_t - \bar{x})^2 - (N/2) \sum_k (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2)\right] / (N - q_T)}$$

where $q_T = 2K+1$ is the number of parameters, μ, a_k, b_k, $k = 1 \ldots K$.
F is a Fisher-Snedecor variable with $q_T - 1$ and $N - q_T$ degrees of freedom. We reject the hypothesis H_o with a α level when $F \geq F_{\alpha,\ q_T-1,\ N-q_T}$.
where $F_{\alpha,\ q_T-1,\ N-q_T}$ is such that $P(F_{q_T-1,\ N-q_T} \geq F_{\alpha,\ q_T-1,\ N-q_T}) = \alpha$.

Remark

The Whittaker-Robinson's remark about the test severity is still valid for this model. When H_o is rejected, we can test for example that the periodicity 2T is the only repetition of the T one: using the fact that the $\hat{A}_k^2$ are independent the ones from the others, we test the hypothesis of nullity of the proper frequencies of the periodicity 2T with an usual F test:

$$H_o : A_{2h+1} = 0,\ h = 1 \ldots H \text{ where } 2H+1 \leq K$$

$$F = \frac{(N/2) \sum_h (\hat{a}_{2h+1}^2 + \hat{b}_{2h+1}^2) / 2H}{MSE / (N - q_{2T})}$$

F is a Fisher-Snedecor variable with 2H and $N - q_{2T}$ degrees of freedom.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

V.3. *The multiple comparisons.*

Scheffe's theorem:

Let $\psi_1, \ldots, \psi_q$, a set of estimable functions in a one-layout statistical model. Then, the probability is $(1-\alpha)$ that simultaneously, for all ψ_i, $\hat{\psi}_i - (q.F_{\alpha,q,N-r}.\hat{\delta}^2_{\hat{\psi}_i})^{1/2} \leq \psi_i \leq \hat{\psi}_i + (q.F_{\alpha,q,N-r}.\hat{\delta}^2_{\hat{\psi}_i})^{1/2}$

where $\hat{\psi}_i$ is the least-squares estimate of ψ_i, $\hat{\delta}^2_{\hat{\psi}_i}$ is its estimated variance with N−r degrees of freedom, and $F_{\alpha,q,N-r}$ is the value of the Fisher-Snedecor variable $F_{q,N-r}$, such that

$$P(F_{q,N-r} \geq F_{\alpha,q,N-r}) = \alpha$$

Thus, we obtain either simultaneous confidence intervals of $\psi_1, \ldots, \psi_q$ with probability $(1-\alpha)$, when the ψ_i are not all null, or a test of the hypothesis $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_q = 0$. In this case, we will reject H_0 with a level α if

$$|\hat{\psi}_{i_M}| \geq (q.F_{\alpha,q,N-r}.\hat{\delta}^2_{\hat{\psi}_{i_M}})^{1/2}$$

where $\hat{\psi}_{i_M}$ is the maximum value of $\hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_q$.

Consequences

Let us assume that the periodicity T has been accepted:

V.3.a. *Multiple comparisons in the Whittaker-Robinson's model.*

1. *The simultaneous confidence intervals of* $f_1, \ldots, f_T$ with probability $1-\alpha$ are

$$]\hat{f}_i - (T.F_{\alpha,T,N-T}.\frac{MSE}{n_i})^{1/2},\ \hat{f}_i + \ldots[$$

ii. We can *test that the periodicity 2T is only the repetition of the period T*, by the means of the previous multiple comparison test in the model relative to the periodicity 2T: let $\psi_i = f_i - f_{i+T}$, $i = 1 \ldots T$. We reject the hypothesis H_0 : $\psi_1 = \ldots = \psi_T = 0$, with a level α if

$$|\hat{\psi}_{i_M}| \geq T.F_{\alpha,T,N-2T}.MSE\ (\frac{1}{n_{i_M}} + \frac{1}{n_{i_M+T}}).$$

iii. *Student's method.*

If the T residual variances relative to the T instants of the periodicity are heterogeneous, we can build simultaneous confidence intervals of the f_i, from the variables $(x_i - f_i) / \hat{\delta}_{\bar{x}_i}$ which are independent and distributed according to the Student law with $n_i - 1$ degrees of freedom: the probability is $1-\alpha$, that simultaneously all f_i, $i = 1 \ldots T$, belong to the intervals

$$]\hat{f}_i - T_{\alpha_*/2,n_i}\ (\frac{MSE_i}{n_i})^{1/2},\ \hat{f}_i + \ldots[\qquad \text{equal to,}$$

$$]\hat{f}_i - (F_{\alpha_*,1,n_i-1}.\frac{MSE_i}{n_i})^{1/2},\ \hat{f}_i + \ldots[\ ,$$

where $MSE_i = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - x_{i.})^2$ is the estimate of $\hat{\delta}^2_{\bar{x}_i}$ and the level α_* is such that $(1-\alpha_*)^T = 1-\alpha$ or $\alpha = 1-(1-\alpha)^{1/T}$, and $T_{\alpha_*/2,n_i-1}$ is the positive value of the Student variable T_{n_i-1} such that $P(|T_{n_i-1}| \geq T_{\alpha_*/2,n_i-1}) = \alpha_*$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Remark

Comparison of the 2 types of confidence intervals (Scheffe's method and Student's method).

There is no general rule to compare $F_{\alpha,1,N-T}.T$ with $F_{\alpha_s,1,n_i-1}$. For example, we take T = 12, N = 72, n_i = 6 and α = 0.05 (then α_s = 0.0043) we find $F_{0.05,1,60}.12 \simeq 22.8$ and $F_{0.0043,1,5} \simeq 22.8$.

In this case, the values are equal. Therefore, the 2 types of confidence intervals are equivalent if the variances are equal. But in this case the variances are better estimated by MSE than by MSE_i and the Scheffe's method is more reliable than the Student's one. It is the inverse if the variances are heterogeneous.

V.3.b. *Multiple comparisons in the Schuster's model.*

According to the Scheffe's multiple comparisons method, we can build simultaneous confidence intervals either of the T parametric functions

$$f_i = \mu + \sum_k \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} .i + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} .i\right),\ i = 1 \ldots T$$

or of the parameters μ, a_k, b_k. In this latter case, we obtain a confidence band of the periodic phenomenon

$$f(t) = \mu + \sum_k \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} .t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} .t\right).$$

i. *confidence intervals of* $f_1, \ldots, f_T$.

The simultaneous confidence intervals of $f_1, \ldots, f_T$ with probability $(1-\alpha)$ are

$$\left[\hat{f}_i - (T.F_{\alpha,T,N-q}.\hat{\delta}_i^2)^{1/2},\ \hat{f}_i + \ldots\right]$$

where

$$\hat{f}_i = \hat{\mu} + \sum_k \left(\hat{a}_k \cos \frac{2\pi k}{T} .i + \hat{b}_k \sin \frac{2\pi k}{T} .i\right)$$

$$\hat{\delta}_i^2 = \frac{MSE}{N} \sum_{t=1}^{N} \left[1+2 \sum_k \cos \frac{2\pi k}{T} (t-i)\right]^2.$$

ii. *confidence band of f(t).*

The confidence band is constructed from the simultaneous confidence intervals of the parameters μ, a_k, b_k (with a probability level α) and has a probability level more than $1-\alpha$:

$$\left[\hat{\mu}_m + \sum_k \left(\hat{A}_{k_m} \cos \frac{2\pi k}{T} t + \hat{B}_{k_m} \sin \frac{2\pi k}{T} t\right),\ \hat{\mu}_M + \sum_k \left(\hat{A}_{k_M} \cos \frac{2\pi k}{T} t + \hat{B}_{k_M} \sin \frac{2\pi k}{T} t\right)\right]$$

where $\hat{A}_{k_m} = \hat{a}_{k_m}$ when $\cos \frac{2\pi k}{T} t > 0$

$= \hat{a}_{k_M}$ when $\cos \frac{2\pi k}{T} t < 0$

and the same for the other coefficients, with $[\hat{\mu}_m, \hat{\mu}_M]$, $[\hat{a}_{k_m}, \hat{a}_{k_M}]$, $[\hat{b}_{k_m}, \hat{b}_{k_M}]$, the Scheffe's simultaneous confidence intervals of the parameters:

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$[\hat{\mu}_m, \hat{\mu}_M] = [\hat{\mu} - (q_1 F_{\alpha,q_1,N-q_1} \cdot \hat{\delta}^2_{\hat{\mu}})^{1/2}, \hat{\mu} + \ldots]$$

$$[\hat{a}_{k_m}, \hat{a}_{k_M}] = [\hat{a}_k - (q_1 F_{\alpha,q_1,N-q_1} \cdot \hat{\delta}^2_{\hat{a}_k})^{1/2}, \hat{a}_k + \ldots]$$

$$[\hat{b}_{k_m}, \hat{b}_{k_M}] = [\hat{b}_k - (q_1 F_{\alpha,q_1,N-q_1} \cdot \hat{\delta}^2_{\hat{b}_k})^{1/2}, \hat{b}_k + \ldots]$$

and $\hat{\delta}^2_{\hat{\mu}} = \frac{1}{N}$ MSE, $\hat{\delta}^2_{\hat{a}_k} = \frac{2}{N}$ MSE; $\hat{\delta}^2_{\hat{b}_k} = \frac{2}{N}$ MSE.

In that case, the probability of the band cannot be controlled and therefore, if it is too much high, the band will be particularly large and will not bring any information.

SUMMARY

Using the example of the statistical treatment of a series of density of nematode eggs, we give here a survey of the main methods of detection of a periodic phenomenon in a short series. The purpose of these methods, which may be ranked into 3 groups: smoothing methods, regression methods, autocorrelations, is to study non random characteristics of the process. We detected in this series and estimated a rhythm of period 12 h. We concluded that the regression methods are the most resourceful for detecting a deterministic periodic phenomenon but that it is useful to confirm the results using the other methods.

REFERENCES

1. Akaike H.: Seasonal adjustment by a bayesian modelling · J. Time Series Analysis *1*, 1-14, 1980.
2. Anderson T. W.: The statistical analysis of time series. Wiley, N.Y. 1958; pp. 704.
3. Bloomfield P.: Fourier analysis of time series · an introduction. Wiley, N.Y. 1975; pp. 257.
4. Box G. E. P., Jenkins G. M.: Time series analysis, forecasting and control. Holden-Day, San Francisco. 1970; pp. 553.
5. Box G. E. P., Pierce D. A.: Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models · J. Amer. statist. Ass. *65*, 332, 1509-1526, 1970.
6. Dagnelie P.: Theorie et méthodes statistiques. Ed. J. Duculot, Gembloux, 1969; Vol. 1, pp. 451; Vol. 2, pp. 378.
7. Dunnet C. W.: Multiple comparison methods. Proceedings of the 3rd Hungarian Biometrics Conference, Budapest, 13-15 april, 1981.
8. Gibbons J. D.: Non parametric statistical inference. Mac-Graw-Hill, 1971; pp. 306.
9. Hannan E. J.: The estimation of frequency · J. appl. Probabil. *10*, 510-519, 1973.
10. Jacob C.: Aperçu sur les séries chronologiques périodiques. Biometrie et Temps, Société Française de Biométrie. Ed. INRA, France 1980; pp. 88-127.
11. Jenrich R. I.: Asymptotic properties of nonlinear least-squares estimators · Ann. math. Statist. *40*, 633-643, 1969.
12. Kendall M. G., Stuart A.: Time series. Griffin, London, 1973; pp. 197.
13. Kerboeuf D., Jacob C.: Demonstration of rhythmic egg release by *Heligmosomoides polygyrus* (*Nematospiroides dubius*), parasitic *trichostrongylida* of murine gut. I. · Chronobiologia *10*, 255-268, 1983.
14. Koopmans L. M.: The spectral analysis of time series. Academic Press. N.Y., 1974; pp. 366.
15. Ozaki T.: The statistical analysis of perturbed limit cycle processes using non linear time series models · J. Time Series Analysis *3*, 29-41, 1982.
16. Pham Dinh T.: Introduction à l'analyse statistique des séries temporelles. Cours DEA statistiques. Université scientifique et médicale de Grenoble, 1975; pp. 121.
17. Scheffe H.: The analysis of variance. Wiley, N.Y. 1959; pp. 477.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

18. SNEDECOR G. W., COCHRAN W. G.: Statistical methods. The Iowa State University Press; 1967; pp. 593.

19. TONG Y. L.: Parameter estimation in studying circadian rhythms · Biometrics *32*, 85-94, 1976.

20. TONG H., LIM K. S.: Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data · J. roy. statist. Soc.B. *42*, 245-292, 1980..

21. VAN CAUTER E., HUYBERECHTS S.: Problems in the statistical analysis of biological time series; the cosinor test and periodogram · J. interdiscipl. Cycle Res. *4*, 41-57, 1973.

22. WALKER A. M.: On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals · Biometrika *58*, 21-36, 1971.

23. WALKER A. M.: On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals · Advanc. appl. Probabil. *5*, 217-241, 1973.

Requests for reprints should be addressed to:

CHRISTINE JACOB
I.N.R.A. - C.N.R.Z.
Domaine de Vilvert
78350 Jouy-en-Josas, France

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

DEUXIEME PARTIE

CYCLES LIMITES STOCHASTIQUES A TEMPS DISCRET.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 1

TIME SERIES ANALYSIS: Theory and Practice 7
O.D. Anderson (editor)
© Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1985

RANDOM OSCILLATIONS MODELLING

Christine Jacob

Laboratoire de Biométrie du Centre de Recherches Zootechniques,
F78350 Jouy-en-Josas, France

The intuitive idea of a cyclic trajectory (or, more generally, of a stochastic cycle) is defined mathematically. The object of these definitions is to directly characterize the random oscillations of each trajectory of the process, without using definitions of a deterministic type which concern either a series from which the noise has been eliminated (limit cycle) or the averaged process behaviour (mean, autocorrelations, spectra). We also define the stability and self-exciting properties of a stochastic cycle. We then construct and study a general time series model for such a cycle.

1. INTRODUCTION

The object of this paper is to try to study "random oscillations" in discrete time series directly. Up to now, these oscillations have generally been modelled by either the periodic regression model or the autoregressive model. The periodic regression model fits a periodic function to the series and studies the characteristics (amplitudes and frequencies of the different harmonics) of this periodic function. In this model, the residuals represent the deviation of the random oscillations from the deterministic rhythm. This model is adequate if the rhythm is assumed exogeneous, that is, imposed on the biological system by external conditions : for example, the annual rhythms of plants and animals are due to the earth's annual revolution around the sun.

If the rhythm is endogeneous, that is, created by the biological system itself - which is the case in most biological rhythms - then, in order to make the process random memory explicit, nonlinear autoregressive models with limit cycles are used (Tong, 1980 ; Ozaki, 1980). The limit cycle is supposed to represent the oscillations of the system. But this method has important drawsbacks, mainly :

1) In order to measure the quality of the fitting, we have to calculate the deviations between the random oscillations and the limit cycle ; which, for this model, are not represented by the residuals. So, how can these deviations be calculated ?

2) If the deterministic difference equation has 2 limit cycles, which limit cycle is supposed to best represent the random oscillations ?

There exist intermediate models such as the periodic linear autoregressive models (Jones and Brelsford, 1967 ; Pagano, 1978), which are linear autoregressive models with periodic coefficients. These explain the random memory of processes with a periodic probabilistic structure such as exogeneous rhythms ; but they cannot explain endogeneous rhythms - in particular self-exciting cycles (see § 3.2.).

So we tried to model the random oscillations themselves without using methods of a deterministic type (periodic regression, limit cycle). First we have to define mathematically the intuitive idea of random oscillations, and then we look for models satisfying the definition. We restrict ourselves here to endogeneous rhythms, so we study non linear autoregressive models. We will show that, generally,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

classical models cannot have random oscillations, even if they have a limit cycle. Then, we will have to define a new general model for such oscillations.

2. DEFINITIONS

The oscillations we are studying are constant period oscillations. That is, their periods are independent of the process state. These oscillations are the stochastic equivalent, in discrete time, of limit cycles - solutions of equations $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \alpha x = 0$, where the damping force $f(x)\dot{x}$ is non linear and the restoring force αx is linear (Ozaki, 1980 ; Pavlidis, 1973). In the deterministic case, the process returns to the same value after a time lag equal to the period d, and the sequence $(x_1, \ldots, x_d)$ defines the cycle. In the stochastic case, the process does not necessarily return to quite the same value : it moves inside an interval C_j, and the sequence $(C_1, \ldots, C_d)$ will define a stochastic cycle (figure 1).

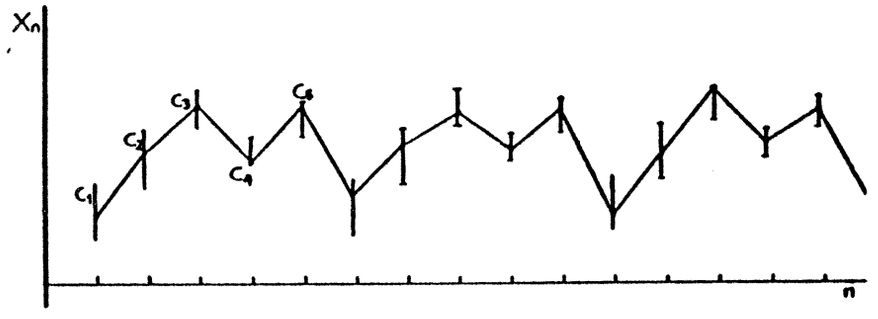


Fig. 1 : Cyclic trajectory. The cycle is a defined by the sequence $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$

We suppose $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a process taking values in some arbitrary space $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$, and has a probability measure $P_n(X_1, \ldots, X_n)$ for all n. We define a trajectory cycle, a stochastic cycle and a markovian cycle in the following way.

Definition 2.1 : Definition of a trajectory cycle

A trajectory of the process X_n is cyclic (or periodic) if there exist d sets $C_1, \ldots, C_d \in \mathcal{F}$ $(d>1)$ such that :

i) two of them (at least) are disjoint

ii) the observations sequences

(A) $(X_{1+(\ell-1)d}, \ldots, X_{\ell d}) \in (C_1, \ldots, C_d) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$

iii) d is the smallest such positive integer.

When the C_j are each reduced to a single point, this defines a deterministic periodic trajectory.

Definition of a stochastic cycle

We suppose here that the initial instant of the mathematical process is also that

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

for the studied biological phenomenon. Otherwise, the following condition D which concerns the initial law of the process has no meaning.

Definition 2.2 : if there exist d sets $C_1, \ldots, C_d \in \mathcal{F}$ such that :

i) 2 of them (at least) are disjoint (if $d \geq 2$)

ii) (B) $P_{n+1}(X_{n+1} \in C_{jo+n+1} | X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = 1$
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (C_{jo+1}, \ldots, C_{jo+n})$, $\forall n \geq 1$

where the sequence $(C_{jo+1}, \ldots, C_{jo+n})$ is defined as the periodic sequence

$C_{jo+1}, C_{jo+2}, \ldots, C_d, C_1, \ldots, C_{jo+1}, \ldots, C_d, \ldots, C_1, \ldots, C_j$, with $n = kd - j_o + j$,

iii) d is the smallest such positive integer

then the sequence $C = (C_1, \ldots, C_d)$ is a stochastic cycle for the process if $d>1$, and a singular set if $d=1$.

This definition means that if the initial state X_1 belongs to the cycle, then the trajectory is cyclic.

If, in addition, X_n is h-markovian, that is $\mathcal{X}_n = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-(h-1)})$ is markovian, then :

$$(B) \Longleftrightarrow \begin{cases} (C_1)\ P_{n+1}(\mathcal{X}_{n+1} \in \mathcal{C}_{jo+n+1} | \mathcal{X}_n = x) = 1 \quad \forall\ x \in \mathcal{C}_{jo+n}, \quad \forall\ n \geq h \\ \quad \text{where } \mathcal{C}_j \text{ is defined as the sequence } = (C_j \times C_{j-1} \times \ldots \times C_{j-h+1}) \\ (D)\ P_{m+1}(X_{m+1} \in C_{jo+m+1} | X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = 1 \\ \quad \forall\ x_1, \ldots, x_m \in C_{jo+1}, \ldots, C_{jo+m}\ , \forall\ m < h \end{cases}$$

This last condition (D) concerns the initial law of the process.

Because of the stationarity property, we will restrict ourselves here to markov chains with temporally homogeneous transition probabilities. And because the initial instant of the measured process is not always the initial instant of the biological phenomenon itself, we will no longer assume (D).

So, suppose now $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a markovian chain on $(\mathcal{E}^h, \mathcal{F}^h)$ with transition probabilities $P(x, B) = P(\mathcal{X}_{n+1} \in B \,|\, \mathcal{X}_n = x)$, and x_o denotes the initial state. The definition of a markovian cycle is then :

Definition 2.3 : definition of a markovian cycle

A sequence $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_d)$ of set $\mathcal{C}_j \in \mathcal{F}^h$ is a markovian cycle of length d (if $d>1$) or a singular set (if $d=1$) for the process $\mathcal{X}_n$ if

i) 2 of them (at least) are disjoint (if $d \geq 2$)

ii) (C_2) $P(x, \mathcal{C}_{jo+n+1}) = 1\ \forall\ x \in \mathcal{C}_{jo+n}$, $\forall\ n$, where
$\mathcal{C}_j = (C_j \times C_{j-1} \times \ldots \times C_{j-(h-1)})$

iii) d is the smallest such positive integer.

This last relation can be written in an equivalent way according to :

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$(C_3)\quad \begin{cases} P(\mathcal{X}_{n+1} \in \mathcal{C}_{j+1} \mid \mathcal{X}_n = x,\ \phi_n = j \pmod d) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{C}_j,\ \forall n \\ P(\mathcal{X}_{n+1} \in \mathcal{C}_{j+1} \mid \mathcal{X}_n = x,\ \phi_n = k \pmod d) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}_j,\ k \neq j,\ \forall n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 1 \\ \phi_0 = j_0 \text{ with } j_0 \in (1,\ldots,d). \end{cases}$$

The system runs cyclically through the sets of states $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_d,\mathcal{C}_1,\ldots$ the cycle has d different phases which are sequentially $(1,2,\ldots,d)$. The variable ϕ_n represents the markovian memory of the cycle phase at instant n.

In order to have cycles as narrow as possible (minimal cycles), we must add the following condition : If the process has two cycles $(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_d)$ and $(\mathcal{C}'_1,\ldots,\mathcal{C}'_{d'})$, then they are completely disjoint, that is $\bigcup_{j=1}^{d} \mathcal{C}_j \cap \bigcup_{j=1}^{d'} \mathcal{C}'_j = \emptyset$. If we do not use the phase memory, the relation $P(x, \mathcal{C}_{j+1}) = 1\ \forall x \in \mathcal{C}_j$, $\forall j \pmod d$, defines a "stationary" cycle of length d if and only if the $\mathcal{C}_j$ are all disjoint. Orey's définition (1971), as well as the cyclically moving classes defined by Doob (1953), correspond to that case. Otherwise, suppose $\mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_m \neq \emptyset$; then, if $\mathcal{X}_n \in \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_m$, we must have $\mathcal{X}_{n+\ell} \in \mathcal{C}_{k+\ell} \cap \mathcal{C}_{m+\ell}$, $\forall \ell = 1,2\ldots$. So, from time n, the cycle $(\mathcal{C}_j)_{j=1,\ldots,d}$ can be reduced to the intersections $(\mathcal{C}_{k+\ell} \cap \mathcal{C}_{m+\ell})_{\ell=1,\ldots,d}$, if those are assumed to be disjoint and not empty. The assumption that the $\mathcal{C}_j$ are all disjoint is a very restrictive condition. It becomes more restrictive with smaller h and shorter sampling interval Δ between two measuring instants. In the limit, as Δ tends to 0, when $h = 1$, the C_j must tend to a single point, (x_j). This implies that this assumption prevents us from defining a stochastic cycle in continuous time (with the C_j not reduced to a single point), as would be analogous to the Orey's definition in discrete time.

Definition 2.4 : markovian cycle properties

Here, d is any positive integer ; and, for $d = 1$, the cycle is just a singular set.

2.4.1. Stochastic limit cycle and stability property.

Suppose $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_d)$ is a markovian cycle for the process $\mathcal{X}_n$. $\mathcal{C}$ is an almost sure (a.s.) stochastic limit cycle if there exists x_0 such that the probability $P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \mid \mathcal{X}_0 = x_0)$ tends to 1 when n tends to ∞. This assumption can be too strong ; so we also define a $(1-\varepsilon)$ a.s. limit cycle when the limit of $P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \mid \mathcal{X}_0 = x_0)$ as n tends to ∞ is greater or equal to $1-\varepsilon$, where ε is a small positive constant. The set $\{x_0 \in \mathcal{X} : \lim_n P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \mid \mathcal{X}_0 = x_0) = 1$ (resp. $\geq 1-\varepsilon$)$\}$ is called the stability domain of the cycle. If this set is a neighbourhood of the cycle (for the topology of $\mathcal{X}^h$), the cycle is called stable. This definition is the stochastic equivalent of Tong's definition for deterministic

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

limit cycles (Tong and Lim, 1980).

2.4.2. Self-exciting cycle

A self-exciting cycle is a cycle created by the biological system itself and not modified overall by the random innovation. The cycle $\mathcal{C}$ is a self-exciting cycle if and only if

$$\begin{cases} \text{i) the process from which the innovation has been eliminated, has a deterministic limit cycle } x = (x_1, \ldots, x_d) \text{ having the same period } d \text{ as the stochastic cycle.} \\ \text{ii) } (x_1, \ldots, x_d) \in (\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_d) \text{ and } E(\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_n = x_j) = x_{j+1} \quad \forall\, j \pmod d. \end{cases}$$

3. MODELS FOR MARKOVIAN CYCLE

3.1. If the process has no innovation, the general model for the markovian process $\mathcal{X}_n$ is

(M1) $X_{n+1} = f(\mathcal{X}_n)$

with a given initial law for $\mathcal{X}_o$. Then the process $\mathcal{X}_n$ has a cycle $\mathcal{C}$ if either f has a limit cycle x, or f has a "chaotic" (or "pseodo") periodicity. In the first case, $\mathcal{C}_j = (x_j)$; and, in the second, the C_j are not reduced to one point. (If $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, then C_j is an interval of $\mathbb{R}$).

3.2. If the process has an innovation, the usual autoregressive model is

(M2) $X_{n+1} = f(\mathcal{X}_n) + \varepsilon_{n+1}$

with ε_{n+1}, a stationary white noise independent of $\mathcal{X}_n$, which takes values in Ω_ε . Then, the only possible cycles for this model presuppose that $\Omega_\varepsilon \subset \bigcap_j \bigcap_{x \in \mathcal{C}_j} C_{j+1} - f(x)$ where $C_{j+1} - f(x)$ denotes the set $\{c : c+f(x) \in C_{j+1}\}$.

Proof : An arbitrary sequence $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_d)$ $(d>1)$, where at least 2 of them are disjoint, is a cycle, if $\mathcal{X}_n$ satisfies condition (C_j), that is,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{X}_{n+1} \in \mathcal{C}_{j+1} | \mathcal{X}_n = x, \phi_n = j(d)) &= P(X_{n+1} \in C_{j+1} | \mathcal{X}_n = x, \phi_n = j(d)) \\ &= P(\varepsilon_{n+1} \in C_{j+1} - f(x)) \\ &= 1 \quad \forall\, x \in \mathcal{C}_j, \ \forall\, j \pmod d. \end{aligned}$$

This is possible if and only if $\Omega_\varepsilon \subset \bigcap_j \bigcap_{x \in \mathcal{C}_j} C_{j+1} - f(x)$. This condition is not possible if $\Omega_\varepsilon = (-\infty, +\infty)$ (Tong and Wu, 1982, were aware of this condition) and is possible when Ω_ε is a finished interval, if $\bigcap_j \bigcap_{x \in \mathcal{C}_j} C_{j+1} - f(x) \neq \emptyset$. This last condition is a very restrictive one. So we are led to build another general model for random oscillations. Intuitively, in order to have random oscillations, ε_{n+1} will have to be chosen in such a way that X_{n+1} will take a value in C_{j+1}, if $\mathcal{X}_n$ was in $\mathcal{C}_j$.

That is, the innovation will depend in a certain manner on the value of $\mathcal{X}_n$. In

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

biology, it can be interpreted as a "regulation noise". A general model satisfying definition 2.3, that is, which admits a markovian cycle is :

$$(M3)\quad \begin{cases} X_{n+1} = f(\mathcal{X}_n) + \sum_j 1_{\mathcal{C}_j}(\mathcal{X}_n)\, 1_j(\phi_n \pmod d)\, \varepsilon_{n+1,j+1} \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 1 \\ \mathcal{X}_0 \in \mathcal{C}_{j_0} \ ; \ \phi_0 = j_0 \ ; \ j_0 \in (1, \ldots, d). \end{cases}$$

$1_{\mathcal{C}_j}(\mathcal{X}_n)$ and $1_j(\phi_n \pmod d)$ are indicator functions ; when $\mathcal{X}_n$ is in $\mathcal{C}_j$ and $\phi_n = j \pmod d$, the innovation is $\varepsilon_{n+1,j+1}$. The $\varepsilon_{n+1,j+1}$ are stationary white noises, taking values in $\Omega_{j+1} = \bigcap_{x \in \mathcal{C}_j} C_{j+1} - f(x)$, and are assumed to be independent for all n and j, and independent of $\mathcal{X}_n$. The stationarity of the $\varepsilon_{n+1,j+1}$ implies the stationarity of the transition probabilities of the process satisfying this model ; and $(\mathcal{X}_n, \phi_n)$ is a markovian process.

It is interesting to note that, for a given initial phase ϕ_0, the probabilistic structure of the innovation is periodic, which implies a periodic structure for the process $\mathcal{X}_n$ as well. The trajectories will then be not only periodic in "mean" (the series running cyclically through the sets $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_d, \mathcal{C}_1, \ldots$), but also in "variance" (the lengths of the $\mathcal{C}_j$ as well as the variances of the $\varepsilon_{n,j}$ being not necessarily all the same). Processes with a periodic probabilistic structure have been modelled for example by means of linear autoregressive models with periodic coefficients. In these models, the oscillations are not created by the system itself, as in model (M3), but are created by the periodicity of the model. Moreover the noise structure of these models does not allow the oscillations to stay in a bounded cyclic band such as $(C_1, \ldots, C_d, C_1, \ldots)$. For these two reasons, model (M3) is the most suitable for the modelling of self-exciting cycles.

In the following, we suppose $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, and that the C_j and Ω_j are intervals of $\mathbb{R}$: $C_{j+1} = (a_{j+1}, b_{j+1})$ and $\Omega_{j+1} = (a_{j+1} - f(x)_m, b_{j+1} - f(x)_M)$, where $f(x)_m = \min_{x \in \mathcal{C}_j} f(x)$ and $f(x)_M = \max_{x \in \mathcal{C}_j} f(x)$.

A particular case of this model is when $d = 1$, $C_1 = (-\infty, +\infty)$ and f is bounded. Then $\Omega_1 = (-\infty, +\infty)$ and the model is reduced to the usual aperiodic model (M2) (with $\Omega_\varepsilon = (-\infty, +\infty)$). The probabilistic structure of this model has been studied by Doukhan and Ghindes (1980). Another particular case is when $C_j = (x_j)$ and $\varepsilon_{n+1,j+1} = (x_{j+1} - f(x_j))$. Then the trajectories are the deterministic cycle $(x_1, \ldots, x_d)$ which is the limit cycle of f if $f(x_j) = x_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, d)$.

Remark on the existence of the model

For a given stochastic process $\mathcal{X}_n$, supposed to satisfy the model (M3), the form of the function f depends on the noise, or conversely, the noise depends on f. This can be easily seen in the previous particular case.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

i) if the Ω_j are known, f will exist if $\mathcal{L}(C_j) \geq \mathcal{L}(\Omega_j)$ $(j = 1, \ldots, d)$, where $\mathcal{L}(I)$ notes the length of the inverval I. That means that the range of $\varepsilon_{n,j}$ values must not be greater than the length of C_j.

ii) if f is known, Ω_{j+1} will exist if $\mathcal{L}(C_{j+1}) \geq f(x)_M - f(x)_m$.

A more general model would include several cycles and the possibility for the process to begin outside the cycle :

$$(M4)\quad \begin{cases} X_{n+1} = f(\mathcal{X}_n) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{dk} 1_{\mathcal{C}_j^k}(\mathcal{X}_n)\, 1_j(\phi_{n,k} \pmod d)\, \varepsilon_{n+1,j+1,k} \\ \qquad + 1_{(\cup \mathcal{C}^k)^c}(\mathcal{X}_n)\, \varepsilon_n \\ \phi_{n+1,k} = \phi_{n,k} + 1 \quad \forall\ k = 1, \ldots, K \\ \mathcal{X}_0 \in \mathcal{C}_{j_0}^k \ ;\ \phi_{0;k} = j_0 \end{cases}$$

where ε_{n+1} is a white noise taking values in $(-\infty, +\infty)$, independent of $\mathcal{X}_n$, and independent of the $\varepsilon_{n+1,j+1,k}$. The K cycles are assumed completely disjoint. In most applications, the model (M3) will be sufficient. So, except for the stability property study, we will restrict our attention to this model.

4. STUDY OF THE CYCLE PROPERTIES

4.1. Stability property in the model (M4) (K=1)

Lemma 1. If the process $\mathcal{X}_n$ is geometrically ergodic up to the entry time into the cycle, then the cycle is an a.s. stable limit cycle in the model (M4), and its stability domain is $\mathcal{X}^h$.

Proof : We have to prove that $P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} | \mathcal{X}_0 = x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \forall\ x_0 \in \mathcal{C}^c$. Denote $P_{x_0}(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C}) = P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} | \mathcal{X}_0 = x_0) = P_{x_0}(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}_{n-1} \in \mathcal{C}) + P_{x_0}(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}_{n-1} \notin \mathcal{C})$.

$$P_{x_0}(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}_{n-1} \in \mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{d} P_{x_0}(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}_{n-1} \in \mathcal{C} \cap \phi_{n-1} = k)$$

$$= \sum_k \int P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} | \mathcal{X}_{n-1} = x,\ \phi_{n-1} = k)\, g_{x_0,n-1,k}(dx)$$

where $g_{x_0,n-1,k}(dx)$ denotes the probability law of $(\mathcal{X}_{n-1}, \phi_{n-1})$ conditional to the starting value x_0. The right member of the previous equation is also

$$\sum_k \int_{\mathcal{C}_k \cap (\phi_{n-1}=k)} P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C}_{k+1} | \mathcal{X}_{n-1} = x,\ \phi_{n-1} = k)\, g_{x_0,n-1,k}(dx) = P_{x_0}(\mathcal{X}_{n-1} \in \mathcal{C})$$

because of the cycle property (def. 2.3). We use now the fact that $\mathcal{X}_n$ is markovian up to the entry time in the cycle :

$$P_{x_0}(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}_{n-1} \notin \mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}^c} P(\mathcal{X}_n \in \mathcal{C} | \mathcal{X}_{n-1} = x)\, \frac{g_{x_0,n-1}(dx)}{P_{x_0}(\mathcal{X}_{n-1} \notin \mathcal{C})} \cdot P_{x_0}(\mathcal{X}_{n-1} \notin \mathcal{C})$$

where $g_{x_0,n-1}(dx)$ is the density law of $\mathcal{X}_{n-1}$ conditional on the initial state

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

x_0. Denote $p_n = P_{x_0}(\mathfrak{X}_n \in \mathcal{C})$ and

$q_n = \int_{\mathcal{C}^c} P(\mathfrak{X}_n \in \mathcal{C} | \mathfrak{X}_{n-1} = x) \frac{g_{x_0,n-1}(dx)}{P_{x_0}(\mathfrak{X}_{n-1} \notin \mathcal{C})}$.

If we suppose $\mathfrak{X}_n$ ergodic up to the entry time into the cycle, then

$$\frac{g_{x_0,n-1}(dx)\, 1_{\mathcal{C}^c}(dx)}{P_{x_0}(\mathfrak{X}_{n-1} \notin \mathcal{C})}$$

which is the density law of $\mathfrak{X}_{n-1}$, restricted to $\mathcal{C}^c$ and conditional on the starting point x_0, tends to an invariant density law when n tends to ∞. Then q_n tends to a certain q. So we have

$$p_n = p_{n-1} + q_n(1 - p_{n-1}) = p_{n-1}(1-q_n) + q_n$$

and writing $q_n = q + \alpha_n$, where $\alpha_n \to 0$ when $n \to \infty$, we get

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1}(1-q) + q + \alpha_n(1 - p_{n-1}) \\ &= p_{n-2}(1-q)^2 + q(1-q) + q + \alpha_{n-1}(1-q)(1 - p_{n-2}) + \alpha_n(1 - p_{n-1}) \\ &\vdots \\ &= p_{n-(n-1)}(1-q)^{n-1} + q \sum_{i=0}^{n-2} (1-q)^i + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m+1}(1-q)^{m-1} (1 - p_{n-m}) \\ &= (1-q)^{n-1} (p_1 - 1) + 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{n-\ell}(1-q)^{\ell} (1 - p_{n-\ell-1}) \end{aligned}$$

using the definition of the model, $q = \int_{\mathcal{C}^c} P(\epsilon_n \in C - f(x)) \frac{g_{x_0,n-1}(dx)}{P_{x_0}(\mathfrak{X}_{n-1} \notin \mathcal{C})}$.

$C - f(x) \subset (-\infty, +\infty)$, the space of ϵ_n. Then $P(\epsilon_n \in C - f(x)) > 0$ for all $x \in \mathcal{C}^c$, which implies that $(1-q) < 1$. Then $(1-q)^{n-1} \to 0$, when n tends to ∞, and the quantity $\left| \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{n-\ell}(1-q)^{\ell} (1-p_{n-\ell-1}) \right| \leq \min(q, 1-q)(1-(1-q)^n)/q$, $\to [\min(q,1-q)]/q < 1$ So this quantity has a limit which is not necessarily equal to 0 ; which implies that p_n does not necessarily tend to 1. For that, the α_j must satisfy certain assumptions. For example, if we suppose that $|\alpha_j| < a\rho^j$ where $0 < \rho < 1$ (geometric ergodicity), then

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{n-\ell}(1-q)^{\ell}(1-p_{n-\ell-1}) \right| &\leq a \sum_{0}^{n-1} \rho^{n-\ell} (1-q)^{\ell} \\ &= a\, \rho^n \sum_{0}^{n-1} \left(\frac{1-q}{\rho}\right)^{\ell} \\ &= \begin{cases} a\, \rho^n . n & \text{if } \rho = 1 - q \\ a\, \rho \dfrac{((1-q)^n - \rho^n)}{1-q-\rho} & \text{if } \rho \neq 1 - q \end{cases} \end{aligned}$$

which tends to 0 - and then $p_n \to 1$ with a convergence rate function of q (which depends on x_0). Thus the stability property comes from both the fact that we have, at every time, the same positive probability q of entering into the

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

cycle, and from a particular ergodicity. (Note : sufficient conditions for ergodicity can be found in Tweedie's paper (1975), for general markov chains, or in Doukhan and Ghindes's thesis (1980) for nonlinear autoregressive models.).

4.2. Self-exciting cycle

Lemma 2. If $\mathfrak{X} =]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$ (with α and β finished or not) and if f is continuous on $[\alpha,\beta]$, then a necessary and sufficient condition for a self-exciting cycle is $E\,\varepsilon_{n,j} = 0$, $\forall\, j = 1,\ldots, d$. $(d \geq 1)$.

Proof: We have to prove that def. 2.4.2 (i and ii) is equivalent to $E\,\varepsilon_{n,j} = 0$. We prove here that $E\,\varepsilon_{n,j} = 0$ implies i (or rather, that non i implies $E\,\varepsilon_{n,j} \neq 0$, for some j). The other implications are immediate.

Suppose $h = 1$ (the proof is similar for $h > 1$) ; and suppose that f has neither a deterministic cycle nor singular point (cycle of period 1) except perhaps in α or β. So, as f is continuous, f must satisfy either (1) or (2) that follow :

$f(x) > x$, $\forall\, x \in]\alpha,\beta[$ (1)

$f(x) < x$, $\forall\, x \in]\alpha,\beta[$. (2)

Suppose (1), for example. Then, if 0 belongs to Ω_j, for all j, $X_{n+1} = f(\mathfrak{X}_n)$ belongs to $\mathfrak{X}$ (3), which implies that $f(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X}$ (4). The relations (1) and (4) imply that $f(\beta) = \beta$, while the relations (1) and (3) imply that $X_{n+1} > X_n$. Moreover f is continuous. Then, as f has no singular point except β, f satisfies :

$$f(x) \xrightarrow[x \uparrow x_o]{} x_o, \quad \forall\ x_o \neq \beta.$$

So, $(X_n)_n$ is an increasing sequence such that the difference $X_{n+1} - X_n$ tends to 0 as n tends to ∞ only when X_n tends to β. So X_n tends to β as n tends to ∞ whatever the initial state x_o. But, if x_o belongs to C_{j_o}, then $X_{kd} = f^{(kd)}(x_o)$ belongs also to C_{j_o}, for all k, because of the j_o cycle property. This implies that β belongs to C_{j_o}, for all j_o. This result is incompatible with the assumption that at least two different C_j are disjoint. So we cannot suppose that 0 belongs to Ω_j for all j, which implies that we cannot suppose $E\,\varepsilon_{n,j} = 0$, for all j.

This last condition, $E\,\varepsilon_{n,j} = 0$, for all j, means that such an innovation does not maintain the cycle. For example, if f is linear, the only possible cycles suppose at least one Ω_j entirely positive (or negative). This Ω_j compensates for the natural damping of the oscillations.

5. ESTIMATION OF THE CYCLE

We will assume here that f and d are known or already estimated. We do not need the model to estimate the cycle. The model will be used to estimate the order

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

h of the autoregression, which allows us to build the $(\mathcal{C}_j)_j$ from the $(C_j)_j$. Suppose we have an infinite length cyclic series with no experimental error. The only noise is the regulation noise of the system. Then, if the C_j are closed intervals of $\mathbb{R}$,

$$C_j = [\inf_k X_{j+kd}, \sup_k X_{j+kd}] \qquad (5.1)$$

where k is such that $j+kd \geq T$, the time of entry into the cycle.

On the other hand, if the observations include an error term, the model will be from instant T

$$X_{n+1} = f(\mathcal{X}_n) + \Sigma 1_{\mathcal{C}_j}(\mathcal{X}_n)\, 1_j\, (\phi_n(\mathrm{mod}\ d))\, \varepsilon_{n+1,j+1}$$

$$Y_{n+1} = X_{n+1} + \eta_{n+1}$$

where Y_{n+1} is the observation and η_{n+1} is the unknown experimental error. We have to estimate the $(C_j)_j$ through the series $(Y_n)_n$. We can do that either by smoothing the series $(Y_n)_n$ by means of a moving average for example, and then estimating the C_j as in the non-errored case (5.1), either by smoothing the C_j built directly from the $(Y_n)_n$, or by smoothing the cyclic continuous band built from $(C_1, \ldots, C_d)$. This last estimation can be done by cutting the series according to intervals of length d, superposing all these pieces of series and then smoothing the resulting observed band, using a non parametric estimation in 2 dimensions.

In every case, the smoothing partially eliminates the experimental error, but can change the shape of the theoretical cycle. However the last method has three main advantages : i) it does not depend too much on d which can be very big. The first two methods estimate d different parameters whereas the last one estimates the cyclic band as a whole ; ii) it is the only possible method in continuous time ; iii) it is also the only method if the sampling is not at regular time intervals.

We suppose in this paragraph that T is known and the series infinite ; although, in practice, that is rarely the case the case. Then we can find the C_j by a sequential method of estimation. Suppose that $N = m+kd$ is the length of the series, and that the sequential intervals of estimation are of the form $I_k = [m+kd, N]$, where $k = 0,1,\ldots, K-2$. Then the estimates of the C_j will be the values $\hat{C}_{j,k_o}$, such that the criterion $\mathcal{S}_{k_o} = \sum_{j=1}^{d} \mathcal{L}(C_{j,k_o}) / \sum_{j=1}^{d} \mathcal{L}(C_{j,k_{O-1}})$ is significantly less than 1, while $\mathcal{S}_{k_{O+1}}$ is not significantly less than 1.

In the following example, we will not use such a criterion ; but, rather, do empirical estimations -for we have not yet studied its probability law.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

6. EXAMPLE - THE CANADIAN LYNX DATA

We have applied this cyclic model to the series of the annual records of the number of canadian lynx trapped in the years 1821 to 1934 in the Mackenzie River district of North-West Canada. This series, which consists of 114 data points, presents random oscillations (fig. 2). These are created by the biological system itself, that is, probably by a predator-prey system. Many authors (see, in particular, Campbell and Walker, 1977 ; Tong, 1977; Tong and Lim, 1980 ; Haqqan and Ozaki, 1981 & 1982) have tried to model this series. Here, we try to explain the observed self exciting random oscillations with a cyclic nonlinear autoregressive model of the type (M3), assuming d and f known. The average period of the oscillations is about 9.5 years. In fact, the five first cycles have an average period of about nine years and the six others, a period of ten years. We have chosen d=10. We have first estimated the $(C_j)_j$ from a smoothing of the $(C_j)_j$ calculated from the data. For this smoothing, we have used an ordinary moving average of length 3. Because of the variation of the period value, the resulting band was very wide ; so, we have then restricted our estimation to the six last cycles (64 years) (fig. 2).

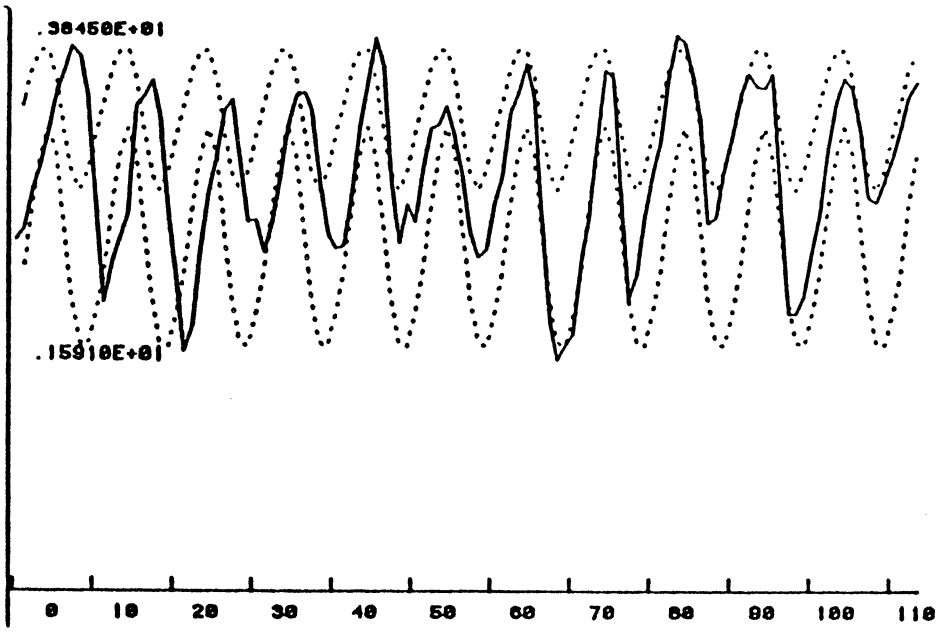


Fig. 2. The observed series (114 data points from 1821 to 1934) , with the estimated cyclic band calculated from the last 64 data points (dotted).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

We have then estimated the unknown function f by means of a Threshold model (TAR). As Tong (1980) pointed out, this model has the advantage of approximating any general function f provided that f is uniformly continuous in the cycle. But Ozaki (1981) claimed that TAR cannot give a good approximation to non linear random vibrations for two reasons. The first is that the introduction of constant terms is not natural in vibrations because 0 must be a singular point. The second is that the TAR fitted for the lynx data (Tong 1980) has no limit cycle for certain initial values. But these two reasons are not really valid. First, we can find TAR models with a zero singular point and a limit cycle. For example

$X_{n+1} = 0.5 - 0.2\, X_n$ if $X_n < 0$

$X_{n+1} = -0.8\, X_n$ if $X_n \geq 0$

has the following limit cycle : (-0.4762, 0.5952) . Second, the stability domain of a limit cycle generally consists only of a part of the space ; and, certainly, this is the case in Biology.

For the estimation of f, we have supposed that the variances of the $\epsilon_{n,j}$ were all the same, which implies that the AIC procedure is the same in the cyclic model (M3) as in the usual model (M2). We used Tong's normalized AIC (Tong and Lim, 1980) for TAR models. NAIC was minimized automatically according to Rosenbrock's algorithm (Kuester and Mize, 1973). The value of NAIC was -3.2396 and the associated fitted model was the following :

$$X_n = 0.55482 + 1.1253\, X_{n-1} - 0.17800\, X_{n-2} - 0.04059\, X_{n-3} - 0.10811\, X_{n-4} + 0.17325\, X_{n-5} - 0.32182\, X_{n-6} + 0.28476\, X_{n-7} - 0.073248\, X_{n-8} + \epsilon_n^1, \quad X_{n-2} \leq 3.3858$$

$$X_n = 2.3836 + 1.5116\, X_{n-1} - 1.1857\, X_{n-2} - 0.093339\, X_{n-3} + \epsilon_n^2, \quad X_{n-2} > 3.3858$$

where var $\epsilon_n^1 = 0.015776$; var $\epsilon_n^2 = 0.068419$. The estimated threshold function has a limit cycle of period 10 years (fig. 3).

We then simulated this TAR model with two gaussian white noises ϵ_n^1 and ϵ_n^2, and the cyclic TAR model with truncated gaussian white noises $\epsilon_{n,j}^1$ and $\epsilon_{n,j}^2$ with the same variances as ϵ_n^1 and ϵ_n^2 . These variances are very small. However the TAR series is not cyclic according to def. 2.3 (fig. 4), whereas the cyclic TAR series looks quite similar to the observed series (fig. 5).

The residual variance of the difference between the observed series and the simulation is much less for the cyclic TAR (0.18951) than for the TAR (0.56245). Moreover the autocorrelations of the cyclic TAR simulation is cyclic and quite similar to the observed autocorrelations, which is not so for the TAR simulation (fig. 6, 8, 9). The damping of the oscillations that we see in the figures is only due to the usual biased estimator we have used. (See the graphic plot of the unbiased estimator in fig. 7).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

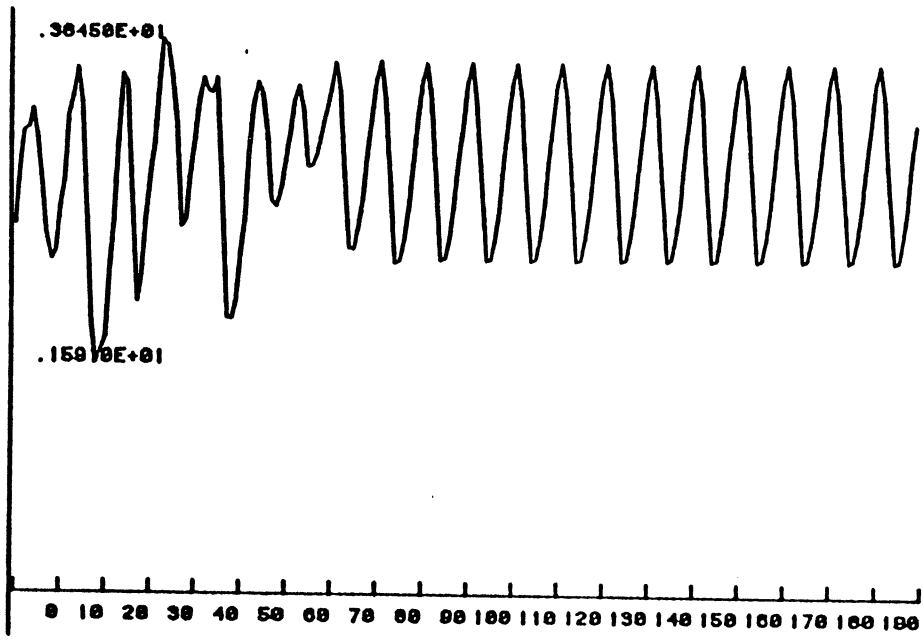


Fig. 3. The last 64 points from the observed series followed by the deterministic limit cycle of the TAR function.

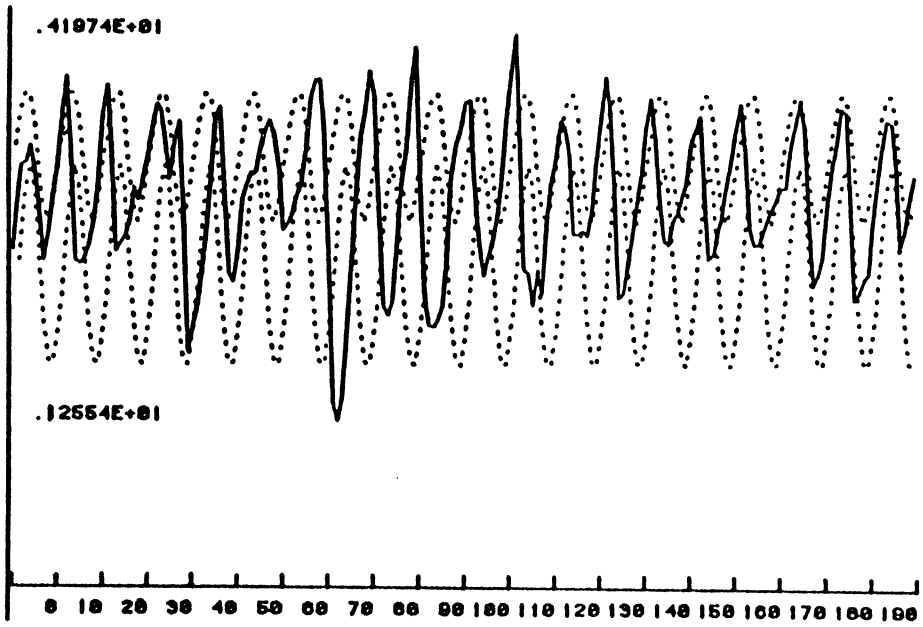


Fig. 4. A simulated series from the TAR model.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

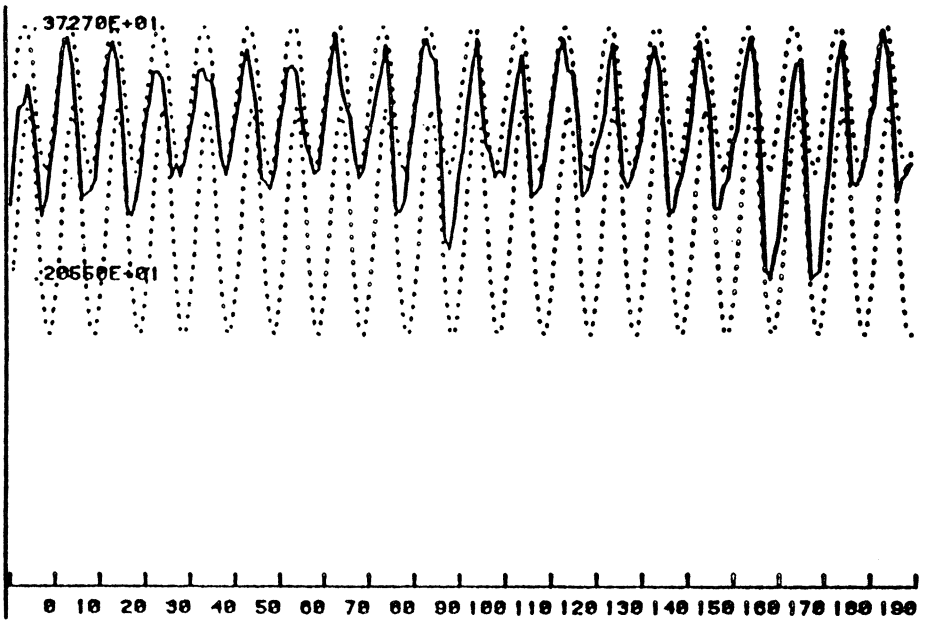


Fig. 5. A simulated series from the cyclic TAR model.

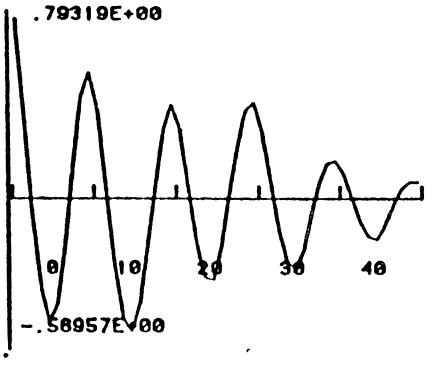


Fig. 6. The autocorrelations of the observations (biased estimator)

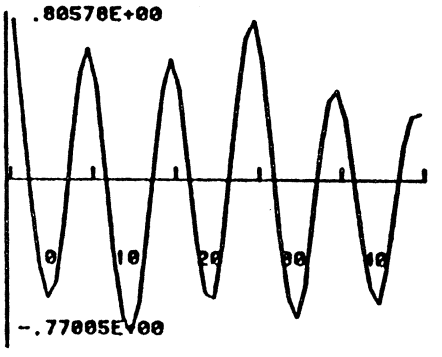


Fig. 7. The autocorrelations of the observations (unbiased estimator)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

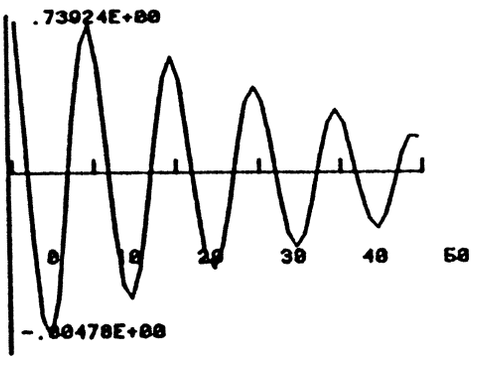


Fig. 8. The autocorrelations of the cyclic TAR simulation (biased estimator)

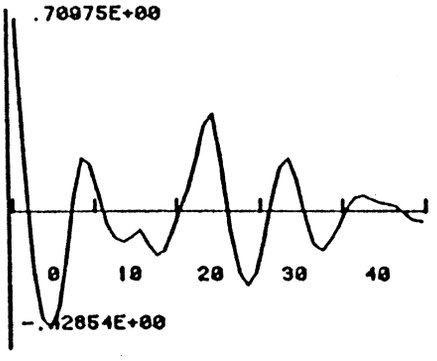


Fig. 9. The autocorrelations of the TAR simulation (biased estimator)

Note. The function $\dot{f}$ could be estimated using other types of models like, for example, non linear threshold models (Ozaki, 1981) or exponential models (Ozaki, 1982). But it would not change the conclusion which depends essentially on the noise structure.

7. CONCLUSION

The estimation of the cycle $\mathfrak{C}$ allows us to make long-lead forecasts, which take into account the system regulation noise, for we know that the future values must belong to the stochastic cycle of the process. Tong and Wu's forecasts (1982) also used the periodicity of the memory of the process, but in a different apparent manner. However, their predictions are found to be cyclic according to def. 2.3 (fig. 10). The cyclic band $(C_1, \ldots, C_d)$ is then a generalisation of their method which unfortunately cannot be applied to models other than threshold ones. Moreover, the cyclic model allows us to simulate cyclic trajectories. For example, this can be used to study the structural stability of the stochastic cycle ; that is, to study the changes or the vanishing of the cycle when f is slightly changed.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

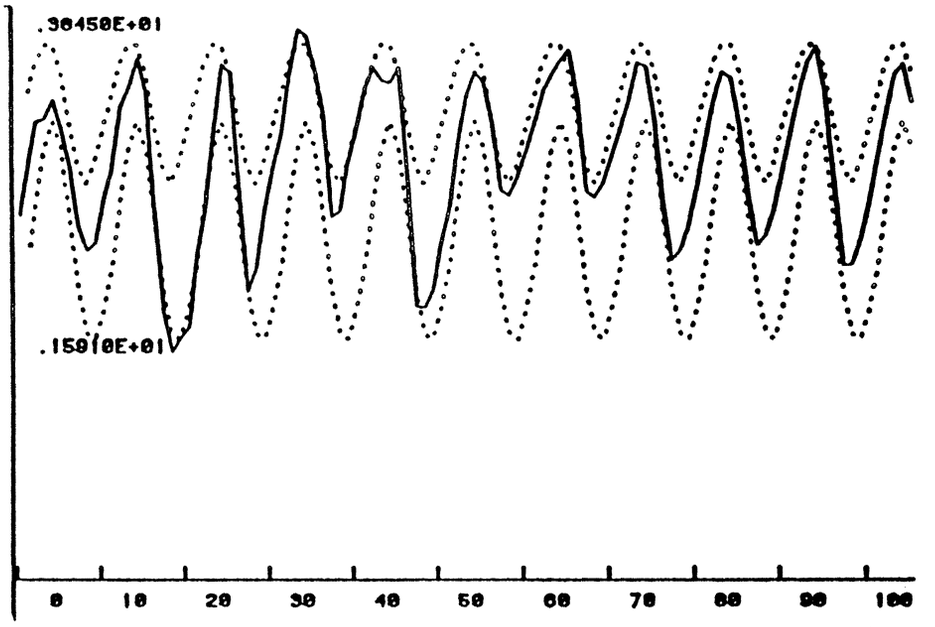


Fig. 10. The last 64 points from the observed series followed by Tong and Wu's predictions (42 values)

The author is grateful to Dr J. Demongeot for his fruitful comments.

REFERENCES

CAMPBELL, M.J. and WALKER, A.M. (1977). A survey of statistical work on the Mackenzie River series of Annual Canadian Lynx trappings for the years 1821-1934, and a new analysis. *J. Roy. Statist. Soc. A 140*, 411-431.

DOOB, J.L. (1953). *Stochastic processes*. New-York, Wiley.

DOUKHAN P. and GHINDES M. (1980). Etude des processus $X_n = f(X_{n-1}) + \varepsilon_n$. Thèse de 3ème cycle. Université Paris Sud, Département de Mathématique, Orsay, France.

GUMOWSKI, I. and MIRA, C. (1980). *Dynamique chaotique*. Editions Cepadues, Toulouse.

HAGGAN, V. and OZAKI, T. (1981). Modelling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrika 68*, 189-196.

HAGGAN, V. and OZAKI, T. (1980). Amplitude-dependent exponential AR model fitting for non linear random vibrations. In *Time Series*. Ed. O.D. Anderson, North Holland, Amsterdam & New-York, 57-71.

JONES, R.H. and BRELSFORD, W.M. (1967). Time series with periodic structure. *Biometrika 54*, 403-408.

KUESTER, J.L. and MIZE, J.H. (1973). *Optimization techniques with fortran*.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

McGraw Hill Book Company.

OREY, S. (1971). Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, London.

OZAKI, T. (1980). Non linear time series models for non linear random vibrations. *J. Appl. Prob. 17*, 84-93.

OZAKI, T. (1981). Non linear threshold autoregressive models for nonlinear random vibrations. *J. Appl. Prob. 18*, 443-451.

OZAKI, T. (1982). The statistical analysis of pertubed limit cycle processes using nonlinear time series models. *J. Time Series Analysis* 3, 29-41.

PAGANO, M. (1978). On periodic and multiple autoregressions. *Annals of Statistics 6*, 1310-1317.

PAVLIDIS, T. (1973). *Biological oscillators : their mathematical analysis*. Academic Press, New-York & London.

TONG, H. (1977). Some comments on the canadian lynx data. *J. Roy. Statist. Soc. A 140*, 432-436.

TONG, H. and LIM, K.S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *J.R. Statist. Soc. B 42*, 245-292.

TONG, H. (1980). A view on non linear time series building. In *Time Series*. Ed. O.D. Anderson, North Holland, Amsterdam & New-York, 41-56.

TONG, H. and WU, Z.M. (1982). Multi-step ahead forecasting of cyclical data by threshold autoregression. In *Time Series Analysis : Theory and Practice 1*. Ed. O.D. Anderson, North-Holland, Amsterdam & New-York, 733-753.

TWEEDIE, R.L. (1975). Sufficient conditions for ergodicity and stationarity of markov chains on a general state space. *Stoch. Proc. & Appl. 3*, 385-403.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 2 .

STUDY OF THE PROBABILISTIC PROPERTIES OF A PERIODIC AUTOREGRESSIVE MODEL

Christine JACOB

Laboratoire de Biométrie, INRA-CRJ, 78350 JOUY-EN-JOSAS

September 1, 1987

1 INTRODUCTION

Deterministic cycles are the fact of non linear phenomena and can be modelled either by delay models or by non linear models such as non conservative and non linear differential systems with a non linear damping force alternatively positive and negative, in continuous time, or non linear difference equations, in discrete time.

Oscillations are present in each domain of Biology and at each organization level. These oscillations are generally stochastic ones, more or less far from a deterministic cycle. If the observed process is the average of the individuals of a population, then a deterministic model can be used to model the theoretic average process. Then, the observed process is equal to this theoretic average process plus an error representing the observed random fluctuations around the theoretic process. But, if the observed process concerns a single individual and if the random fluctuations are intrinsec to the phenomena (for example, they are due to a stochastic environment), then the previous method is no more valid and some random terms must be introduced directly in the deterministic

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

model.

The simplest stochastic model which can be built according to a difference equation of the type $x_{n+1} = f(x_n)$, where x_n takes values in a group E, is the following one : $x_{n+1} = f(x_n).\varepsilon_{n+1}$, where ε_{n+1} represents the new random fluctuations at time n, independent of the past, and "." denotes the group operation in E.

It has been proved that this model is aperiodic, when $\{\varepsilon_n\}_n$ is a white noise, i.e when the ε_n are identically and independently distributed (Doukhan and Ghindès, 1980). In order for the model to be intrinsically periodic, that is, for the process to stay in the cyclic band generated by the set $C_1 \times ... \times C_d \subset E^d$ (Jacob, 1985), the noise $\{\varepsilon_n\}$ must have a periodic structure as in the following model :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n).\sum_{j=1}^{d} 1_{C_j}(x_n)\varepsilon_{n+1,j+1} \\ x_o \in \bigcup_j C_j \end{cases}$$

where $\sum_j 1_{C_j}(x_n)\varepsilon_{n+1,j+1}$ denotes $\varepsilon_{n+1,j+1}$, for $x_n \in C_j$; $j = 1,...,d-1$; and $\varepsilon_{n+1,1}$, for $x_n \in C_d$. In this model, the $\{\varepsilon_{n,j}\}_n$ are white noises with probability laws F_j, mutually independent for different values of j, and taking values in spaces $\Omega_j \subset E$. $\{x_n\}$ is then a markovian chain with homogeneous transition probabilities. The sets Ω_j are built in such a way that the sequence $C_1,...,C_d$ is a markovian cycle for $\{x_n\}$, which means that $\{x_n\}$ satisfies :

$$P(x_{n+1} \in C_{j+1} \mid x_n = x) = 1, \text{ for all } x \in C_j,\ j = 1,...,d\ ,$$

where $j+1$ is taken modulo d (Orey, 1971), that is

$$P(f(x).\varepsilon_{n+1,j+1} \in C_{j+1}) = 1, \text{ for all } x \in C_j,\ j = 1,...,d$$

or

$$F_{j+1}(f(x)^{-1}.C_{j+1}) = 1, \text{ for all } x \in C_j, \text{ for all } j$$

which is satisfied if

$$\Omega_{j+1} \subset f(x)^{-1}.C_{j+1}, \text{ for all } x \in C_j$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

that is

$$\Omega_{j+1} \subset \bigcap_{x \in C_j} f(x)^{-1}.C_{j+1}, \text{ for all } j \ ,$$

where $f(x)^{-1}$ denotes the inverse of $f(x)$ for the group operation in E.

In such a model, the C_j must be disjointed (Jacob, 1985). In reality, it is rarely the case. Therefore, a "phasing" variable φ_n must be introduced in the model, in such a way that the variable $z_n = (x_n, \varphi_n)$ is markovian with homogeneous transition probabilities and has a markovian cycle of the type $C_1 \times 1$, $C_2 \times 2$, ..., $C_d \times d$. The class of equivalent sets $C_1 \times ... \times C_d$, $C_2 \times ... \times C_d \times C_1$, ... obtained by cyclic permutation of $C_1 \times ... \times C_d$, is then a stochastic pseudo-cycle for $\{x_n\}$ (Jacob, 1986) ; the model is therefore :

$$(M) \begin{cases} x_{n+1} &= \sum_j 1_{C_j \times j}(x_n, \varphi_n)(f_j(x_n).\varepsilon_{n+1,j+1}) \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + 1 \text{ (mod d)} \\ (x_o, \varphi_o) &\in \bigcup_j C_j \times j \end{cases}$$

where, $\{\varepsilon_{n,j}\}_n$ is a white noise with probability law F_j, independent of $\{\varepsilon_{n,j'}\}_n$ for $j' \neq j$, and taking values in $\Omega_j = \bigcap_{x \in C_{j-1}} f_{j-1}(x)^{-1}C_j$, and where the f_j are applications from E to E ; $j = 1, ..., d$ (the subscripts $j-1$ and $j+1$ are taken modulo d).

Remark :

$$\Omega_j \subset \bigcap_{x \in C_{j-1}} f_{j-1}(x)^{-1}.C_j$$

is equivalent to

$$(1)\ f_{j-1}(x).\Omega_j \subset C_j, \text{ for all } x \in C_{j-1}$$

or, if C_j is a closed set, to

$$(2)\ f_{j-1}(C_{j-1}).\Omega_j \subset C_j$$

(1) implies that card $\Omega_j \leq$ card C_j,

(2) implies that card $f_{j-1}(C_{j-1}) \leq$ card C_j.

Moreover, suppose that the identity element e of E is in Ω_j. Then, (2) implies $f_{j-1}(C_{j-1}) \subset C_j$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Conversely, suppose that $f_{j-1}(C_{j-1}) = C_j$. Then, (2) implies $C_j.\Omega_j \subset C_j$, which implies, if C_j is compact, that $\Omega_j = \{e\}$. This corresponds to a deterministic model, except to a random initial phasing. If the C_j are each reduced to a single point c_j, the trajectories are all periodic according to the deterministic cycle $c_1, ..., c_d$. If it is not the case, the trajectories are chaotic, but remains in the periodic "band", generated by $C_1, ..., C_d$.

We will suppose here that E is a locally compact topological group, which implies that the group operation is continuous and that there exists a left invariant measure λ which is unique. λ satisfies $\lambda(aA) = \lambda(A)$ for any $A \subset E$, $a \in E$. Moreover, E is supposed σ-compact, which implies that λ is a σ-finite measure on E.

Let $\mathcal{B}(E)$ be the borelian σ-field on E, and let

$$Z = \bigcup_{j=1}^{d} C_j \times j$$

$\{z_n\}$ takes values in Z. The σ-field $\mathcal{F}$ on Z is generated by the sets

$$A = \bigcup_{j=1}^{d} A_j \times j$$

where $A_j \in \mathcal{B}(E) \cap C_j$ ($\overline{A} = \bigcup_j (\overline{A_j} \cap C_j) \times j$, $\mathring{A} = \bigcup_j \mathring{A}_j \times j$ and $A^c = \bigcup_j (A_j^c \cap C_j) \times j$).

We put on $\mathcal{F}$ the following measure φ : let $A \subset \mathcal{F}$, with $A = \bigcup_j A_j \times j$, then :

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_{C_j}(A_j)$$

where $\lambda_{C_j}(A_j) = \lambda(A_j \cap C_j) = \lambda(A_j)$ (because $A_j \subset C_j$).

Note : if there exists j such that $C_j \neq E$, then λ do not need to be the left invariant measure on E, it must be only a positive σ-finite measure on E.

Z is a locally compact topological space. Moreover, if $C_j = E$, for all j, it is a group for the following operation : let $z = (x, j) \in Z$ and $z' = (x', j') \in Z$, $z.z' = (x.x', j + j' \pmod d)$, the idéntity element is (e, d), and each element z of Z has an inverse $(x^{-1}, d - j)$.

In addition, if E is a metric space, Z is also a metric space for the following metric : let $y = (x, j) \in C_j \times j$ and $z = (x', j') \in C_{j'} \times j'$, then $d(y, z)$ is defined by :

$$d(y, z) = d_E(x, x') + | j - j' |$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

where d_E denotes the metric on E.

λ being a σ-finite measure for each j, we can decompose F_j according to a measure absolutely continuous with respect to λ_{Ω_j} and a measure ν_j orthogonal to λ_{Ω_j} (Radon-Nikodym-Lebesgue theorem, Dacunha-Castelle and Duflo, 1983) :

$$F_j = \psi_j \lambda_{\Omega_j} + \nu_j$$

Suppose that $\lambda(\Omega_j)$ is positive, then

- If ψ_j is not λ-a.s. identically null on Ω_j, we say that F_j has an absolutely continuous component with respect to λ (assumption (P.A.C)). Under this assumption, there exists an open set $B_j \subset \Omega_j$ (for the relativized topology in Ω_j) and $b > 0$ such that $F_j \geq b\lambda_{B_j}$ $(\lambda(B_j) < \infty)$.

- Moreover, if ψ_j is λ-a.s. positive on Ω_j, F_j is dominant with respect to λ_{Ω_j} (assumption (D)).

- And in addition, if $\nu_j(\Omega_j) = 0$, F_j is equivalent to λ_{Ω_j} (assumption (AC)), (D) and (AC) are some particular cases of (P.A.C.).

- If ψ_j is λ-a.s. identically null, the F_j is orthogonal to λ_{Ω_j} and $F_j = \nu_j$.

When $\lambda(\Omega_j) = 0$, then $F_j = \nu_j$ and F_j is orthogonal to λ.

We give now some particular examples of the general cyclic model (M).

- <u>Model 1</u>

  Suppose that $C_j = E$, for all j. Then $\Omega_j = E$, for all j.

  A particular case is when the probability laws F_j are all identical and the same for the functions f_j. Then the model is reduced to the aperiodic model $x_{n+1} = f(x_n).\varepsilon_{n+1}$ studied by Doukhan and Ghindès (1980).

- <u>Model 2</u>

  $f_j(x) = a_{j+1}$, for all $x \in C_j$, for all j.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- Model 3

$C_j = \{a_j\}$ and $\Omega_j = \{e\}$, for all j.

This model is a particular case of model 2.

In this case, $F_j = \delta_e$.

Example :

$x_n = a\cos(\lambda n + \alpha)$, where α is a random phasing.

Then, $x_{n+1} = x_n \cos\lambda - a \sin\lambda \sin\cos^{-1}(x_n/a)$.

$\{x_n, x_{n+1}\}$ is markovian and $C_j = a_j \times a_{j-1}$, where $a_j = a\cos\lambda_j$, for all j.

If there exists d finite such that $\lambda(j+d) = \lambda j + 2m\Pi$, for all j, i.e. if $d = \frac{2m\Pi}{\lambda} = mT$, where $\lambda = \frac{2\Pi}{T}$, then the chain is periodic.

If $m = 1$, the periodicity of the discrete cycle coïncides with the periodicity T of the continuous process $x_t = a\cos(\lambda t + \alpha)$.

If there do not exist such a finite integer value d, that is if T is not a rational number, then the chain is chaotic.

- Model 4

$E = \mathrm{R}^p$, λ is the Lebesgue measure on R^p and

$$x_n = (X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-(p-1)})$$

with $X_i \in \mathrm{R}$, for all i and

$$X_{n+1} = f'(x_n) + \sum_j 1_{C_j \times j}(x_n, \varphi_n)\varepsilon'_{n+1,j+1}$$

(Jacob, 1985).

Denote $C_j = C_j \times C_{j-1} \times ... \times C_{j-(p-1)}$. Let $A \subset C_j$ and $x \in \mathrm{R}^p$ and denote $A = A_j \times A_{j-1} \times ... \times A_{j-(p-1)}$, and $x = (x_1, ..., x_p)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

In this case,

$$\sum_j 1_{C_j \times j}(x_n, \varphi_n) f_j(x_n) = \begin{pmatrix} f'(x_n) \\ X_n \\ X_{n-(p-2)} \end{pmatrix}.$$

and for $A_j \subset C_j$ and $z = (x, j-1) \in C_{j-1} \times (j-1)$, the transition probability law is

$$F_j(f(x)^{-1}A_j) = F'_j(f(x)^{-1}A_j) 1_{A_{j-1} \times \ldots \times A_{j-(p-1)}}(x_2, \ldots, x_p)$$

where F'_j is the probability law of $\varepsilon'_{n,j}$, with support Ω'_j.

In particular, for $A_j = A_j \times C_{j-1} \times \ldots \times C_{j-(p-1)}$, $F_j(f(x)^{-1}A_j) = F'_j(f(x)^{-1}A_j)$.

Therefore, conditions on F_j are replaced by conditions on F'_j. For example, $F_j \ll \lambda_{\Omega_j}$ implies that $F'_j \ll \lambda_{\Omega'_j}$, and $F_j \perp \lambda_{\Omega_j}$ implies that $F'_j \perp \lambda_{\Omega'_j}$.

The following chapter II is an abstract of the main classical probabilistic properties definitions of a Markov chain in discrete time. All these definitions can be found in Orey (1971), Tweedie (1975), Nummelin (1984), Revuz (1984), Rosenblatt (1971), etc... Then the study of these probabilistic properties for the cyclic model (M), can be found in chapter III. Most of the propositions are the equivalent of the propositions relative to the aperiodic case (Doukhan and Ghindhès, 1980). When applied to model 1 or to model 2, the conditions found are weaker than in the general cyclic case where the difficulty results mainly from the fact that the C_j are not groups, in general. In the particular case of the aperiodic model, the conditions are reduced to Doukhan and Ghindhès conditions. For further details concerning the aperiodic model, the reader can report himself to Doukhan and Ghindhès thesis. The methods used are based on the Markov and cycle properties. When it is possible, they used in addition the group properties in E and the invariance properties of λ. Moreover, some analytical tools used by Doukhan and Ghindhès, as the following Loomis' lemma, are also employed :

Lemma (Loomis, 1963, p 118)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

If $\varphi \in L^1(d\lambda)$, the application $\Psi : E \to \mathbb{R}$ defined by

$$\Psi(t) = \int | \varphi(t^{-1}u) - \varphi(u) | \lambda(du)$$

is a continuous function of t, for $t = e$.

The following applications result from this lemma :

1. the application $g : E \to \mathbb{R}$ defined by $g_A(t) = \varphi\lambda(t^{-1}A)$ is a uniformly continuous function of t, for all $A \subset E$. This implies that $\varphi\lambda(\Omega \cap t^{-1}A)$ is a uniformly continuous function of t, whenever Ω and $A \subset E$, and $\varphi \in L^1(d\lambda)$.

2. the application $\lambda(tA \cap B)$ is a uniformly continuous function of t, for all A and $B \subset E$.

Proof

1.

$$g_A(t) - g_A(t') = \int_A (\varphi(t^{-1}u) - \varphi(t'^{-1}u))\lambda(du)$$

$$| g_A(t) - g_A(t') | \leq \int | \varphi(t^{-1}u) - \varphi(t'^{-1}u) | \lambda(du)$$

Then, put $v = t'^{-1}u$;

$$| g_A(t) - g_A(t') | = \int | \varphi(t^{-1}t'v) - \varphi(v) | \lambda(dv)$$

which implies

$$| g_A(t) - g_A(t') | \leq \Psi(t'^{-1}t)$$

But, when $t' \to t$, $t'^{-1}t \to e$ and $\Psi(t'^{-1}t) \to \Psi(e) = 0$. Therefore, g_A is continuous.

Now,

$$\varphi\lambda(\Omega \cap t^{-1}A) = \int_A \varphi(t^{-1}u) 1_\Omega(t^{-1}u) \lambda(du)$$

is of the previous form, and therefore, is a continuous function of t, whenever $\varphi \in L^1(d\lambda)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2. From 1, we deduce that the function $\lambda(tA \cap B)$ is a continuous function of t, whenever $1_B \in L^1(d\lambda)$, i.e. $\lambda(B) < \infty$.

But, suppose now that $\lambda(B) = \infty$. Then, let

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \lambda(tA \setminus B) - \lambda(B \setminus tA) \\ &= \int 1_A(t^{-1}u)\lambda(du) - \int 1_B(u)\lambda(du) \end{aligned}$$

$g_1(t)$ is continuous as the difference of 2 continuous functions.

Let

$$\begin{aligned} g_2(t) &= 2\lambda(tA \setminus B) + 3\lambda(tA \cap B) - \lambda(B \setminus tA) \\ &= 2\int 1_A(t^{-1}u)\lambda(du) + \int 1_B(u)\lambda(du) \end{aligned}$$

$g_2(t)$ is continuous.

Then

$$g_2(t) - g_1(t) = \lambda(tA \setminus B) + 3\lambda(tA \cap B)$$

is continuous.

But

$$\lambda(tA) = \lambda(tA \cap B) + \lambda(tA \setminus B) = \lambda(A)$$

is continuous.

Therefore,

$$2\lambda(tA \cap B) = g_2(t) - g_1(t) - \lambda(tA)$$

is continuous.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2 PROBABILISTIC PROPERTIES OF MARKOV CHAINS - DEFINITIONS

Let $\{x_n\}$ be a Markov chain taking values in some arbitrary space $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ with temporally homogeneous transition probabilities

$$P^n(x, A) = P(x_n \in A \mid x_0 = x),\ x \in \mathcal{X},\ A \in \mathcal{F}$$

where for fixed $A \in \mathcal{F}$, $P^n(., A)$ is a measurable function on $\mathcal{X}$, and for fixed $x \in \mathcal{X}$, $P^n(x, .)$ is a probability measure on the σ-field $\mathcal{F}$.

Suppose φ is a non-trivial σ-finite measure on $\mathcal{F}$, and denote $\mathcal{F}_\varphi^+$ for the set $\{A \in \mathcal{F} : \varphi(A) > 0\}$.

$\{x_n\}$ is φ-irreducible if $P_x(\bigcup_n x_n \in A) > 0$, for all $x \in \mathcal{X}$, and $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$.

φ-irreducibility means that the chain has a positive probability to move into any set $A \in \mathcal{F}$ with positive φ-measure, starting from any point $x \in \mathcal{X}$. Then, the state space cannot be reduced to some smaller space.

For the definition of φ-irreducibility, we can use also the potential of the transition P,

$$G_u(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n P^n(x, A)$$

This series converges for all u such that $0 \leq u < 1$: $G_u(x, A) \leq u/(1-u)$ and $G_u(x, A) \leq 1$, for $u = 1/2$.

For $A \in \mathcal{F}$, let

$$\overline{A} = \bigcup_n \{x : P^n(x, A) > 0\} = \{x : G_{1/2}(x, A) > 0\}$$

then, φ-irreducibility can be expressed also according to the following way : $\overline{A} = \mathcal{X}$, for all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$.

Nummelin (1984) gave another equivalent formulation of φ-irreducibility : P is φ-irreducible if the whole state space $\mathcal{X}$ is φ-communicating, that is, if every $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ is attainable from all $x \in \mathcal{X}$ (i.e $P^n(x, A) > 0$, for some $n \geq 1$).

Under the assumption of φ-irreducibility, the following dichotomy holds : either,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

i) for every $x \in \mathcal{X}$ and every $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$,

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) = \infty \text{ (i.e. } G_1(x, A) = \infty)$$

ii) it is possible to find a partition $\{A_j\}$ of $\mathcal{X}$ such that, for every $x \in \mathcal{X}$, and every $A \in \mathcal{F}$ with $A \subset A_j$ for some j

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) < \infty \text{ (i.e. } G_1(x, A) < \infty)$$

Any chain satisfying (1.1) is called (1)-recurrent. If $\{x_n\}$ is non-recurrent, $\{x_n\}$ is called transient.

A markov chain is φ-recurrent (or Harris recurrent) if

$$P_x(\bigcup_n x_n \in A) = 1, \text{ for all } x \in \mathcal{X} \text{ and } A \in \mathcal{F}_\varphi^+$$

This is equivalent to the following equality

$$\lim_n F_n(x, A) = 1, \text{ for all } x \in \mathcal{X} \text{ and } A \in \mathcal{F}_\varphi^+ ,$$

where

$$F_n(x, A) = \sum_{i=1}^{n} {}_A P^i(x, A) = \sum_{i=1}^{n} P_x(x_i \in A, x_{i-1} \notin A, ..., x_1 \notin A)$$

(1)-recurrence means that the chain has a positive probability to attain any set A with positive φ-measure, an infinite number of times, starting from any $x \in \mathcal{X}$, as φ-recurrence means that this probability is one.

$\{x_n\}$ is called uniformly recurrent if $F_n(x, A) \to 1$ when $n \to \infty$, uniformly in x, for all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, i.e the number of steps for reaching any set A do not depend on the starting point x.

A σ-finite non trivial measure μ on $\mathcal{F}$ is called subinvariant for $\{x_n\}$ if it satisfies the subinvariant equations

$$(1.2) \quad \mu \geq \mu P$$

where μP designs the measure defined by

$$\mu P(A) = \int_x \mu(dy) P(y, A), A \in \mathcal{F}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

For φ-irreducible chain, some subinvariant measure always exists. Moreover, if $\{x_n\}$ is recurrent, this solution is unique (up to constant multiples) and satisfies (1.2) with equality for all $A \in \mathcal{F}$ (μ is invariant). If this unique solution is a finite measure, $\{x_n\}$ is called ergodic (or positive recurrent). Denote the unique invariant probability measure by Π.

If $\{x_n\}$ is uniformly recurrent, then $\{x_n\}$ has an invariant probability measure and $\{x_n\}$ is geometrically ergodic (Orey, 1971).

We have the following convergence results for ergodic chains :

1. If $\{x_n\}$ is (recurrent) and ergodic,

$$(1.3) \quad \lim_n P^n(x, A) = \Pi(A), \text{ for all } x \notin N(A)$$

where $N(A)$ is a φ-null set, if $\{x_n\}$ is aperiodic, and

$$(1.4) \quad \lim_n \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} P^{n+k}(x, A) = \Pi(A), \text{ for all } x \notin N(A)$$

if $\{x_n\}$ is periodic (Tweedie, 1974).

2. If $\{x_n\}$ is φ-recurrent and ergodic (or Harris ergodic), then

$$\lim_n \| P^n(x, .)\nu(dx) - \Pi(.) \| = 0$$

for all initial probability ν, if the chain is aperiodic, and

$$\lim_n \| \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \int P^{n+k}(x, .)\nu(dx) - \Pi(.) \| = 0$$

for all initial probability ν, if the chain is periodic (Orey, 1971), where $\| m \|$ denotes the total variation norm : $\| m \| = \int m(dx)$.

Remarks :

. This results hold for all initial probability ν, and therefore for $\nu(dx) = \delta_x$; then (1.3) and (1.4) hold for all $x \in \mathcal{X}$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

. These convergence theorems can be considered also as an extension of Von Neumann's ergodic theorem (1931) (Conze, 1974) :

Let T be a contraction of an Hilbert space H. Then,

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} T^k f = \overline{f}$$

exists for all $f \in H$, and the application $f \to \overline{f}$ is the orthogonal projection of H on the subspace of invariant vectors $H_t = \{f \in H : Tf = f\}$.

If $\dim H_t = 1$, the system is called ergodic.

Then, let $H = L^2(dM)$ where $M = G_{1/2}(x, .)$ for some $x \in \mathcal{X}$, and let T defined on $L^2(dM)$ by :

$$Tf(y) = \int \frac{P(x, dy)}{dM(y)} f(x) dM(x)$$

The density $\frac{P(x, dy)}{dM(y)}$ exists because $P(x, .)$ is absolutely continuous with respect to M, by definition of M.

T is also defined on $L^1(dM)$ and it can be easily proved that T is a contraction on $L^1(dM)$. But unfortunately, T is not in general a contraction on $L^2(dM)$.

Anyway, suppose that Von Neumann's theorem can be extended to $L^1(dM)$. Then, we have the following result :

$$\frac{1}{n} \sum_{k} \int \frac{P^k(x, .)}{dM(.)} f(x) dM(x) \to \overline{f} \ ,$$

where $\overline{f}$ satisfies

$$\int \frac{P(x, .)}{dM(.)} \overline{f}(x) dM(x) = \overline{f}(x)$$

In particular, if $f = \frac{d\nu}{dM}$, where ν is any probability on $\mathcal{X}$ such that $\nu \ll M$ (for example, if $\{x_n\}$ is φ-irreducible, then $\{x_n\}$ is M-irreducible and $\varphi \ll M$; then $\nu \ll \varphi$ implies $\nu \ll M$ (see chapter III, § 4) and if there exists an unique positive

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

invariant function f (up to a multiplicative constant), then there exists an unique invariant probability $\Pi \ll M$ and the theorem implies that,

$$\frac{1}{n}\sum_k \int_X P^k(x, A)d\nu(x) \to \Pi(A), \text{ for all } A \in \mathcal{F}$$

(under the assumption (AC), if Π is an invariant probability, then $\Pi \ll \varphi$, which implies $\Pi \ll M$ (proposition 3.2)).

Direct proof of this convergence theorem, with $f \in L^1(dM)$ can be found in Foguel (1969).

3. If $\{x_n\}$ is uniformly φ-recurrent, then the chain is geometrically ergodic, that is, there exists $0 < \rho < 1$ such that,

$$\| \int P^n(x, .)\nu(dx) - \Pi(.) \| \leq a\rho^n$$

for all initial probability ν, in the aperiodic case, and

$$\| \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} \int P^{n+k}(x, .)\nu(dx) - \Pi(.) \| \leq a\rho^n$$

for all initial probability ν, in the periodic case (Orey, 1971).

Particular cases :

1. If $\{x_n\}$ is stationary, then there is an invariant probability defined by $\Pi(A) = P(x_n \in A)$, $A \in \mathcal{F}$. Moreover, if (x_n) is φ-irreducible, then the chain is ergodic (in the general frame of stationary processes, this coresponds to transitivity).

2. If $\{x_n\}$ has a positive recurrent state "a" such that all the states lead to it a.s., then,

$$\Pi(A) = \frac{1}{E_a(T_a)} E_a(\sum_{n=1}^{T_a} 1_{(x_n \in A)}$$

(Dacunha-Castelle, Duflo, 1983), where T_a is the time between 2 instants of passing through a.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Harris ergodicity means that any trajectory is representative of all the states and that the probability to belong to any set, at any time, can be estimated when the time is sufficiently large, thanks to the invariant probability. Then, the assumptions of φ-recurrence and ergodicity allow to make estimations with any single trajectory, by using convergence theorems of the type,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n g(x_p, x_{p+1}) = \int g(x,y)\Pi(dx)P(x,dy) = E_{\Pi \times P} g(x,y)$$

(Dacunha-Castelle, Duflo (1983)).

Remark

In the case of aperiodicity, Harris ergodicity means both asymptotic stationarity and independence with respect to initial conditions, i.e the chain is strongly mixing :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{A \in \mathcal{F}^n, B \in \mathcal{F}^0} | P(A \cap B) - P(A)P(B) | = 0$$

(Orey, 1971, p.23. Rosenblatt, 1971, p.207).

In most applications of Markov chains, the state space is equipped with a topology. In order for the topology to be associated with the Markov chain in a reasonable way, one must impose some continuity condition on the transition probabilities of the chain.

We say that the transition law $\{P(x,.)\}$ is strongly continuous (or strongly Feller) if, for every $A \in \mathcal{F}$, $P(x,A)$ is a continuous function in x. $\{P(x,.)\}$ is strongly continuous if and only if $\int P(x,dy)g(y)$ is a continuous bounded function of x whenever g is a bounded measurable function on $\mathcal{X}$.

The transition law $\{P(x,.)\}$ is weakly continuous (or Feller), if for each bounded continuous function g on $\mathcal{X}$, $\int P(x,dy)g(y)$ is a countinuous bounded function of x. We will denote $Pg(x)$ for $\int P(x,dy)g(y)$.

Examples

1. $x_n = x$, where x is any random variable on $\mathcal{X}$. $\{x_n\}$ is markovian with homogeneous transition probabilities $dP(x,y) = \delta_x(y)$. $\{x_n\}$ is then weakly continuous $(Pg(x) = g(x))$, stationary, but not irreducible, because $P(x_n \in A \mid x_0 = x) = 1$, if $x \in A$, and 0, otherwise.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2. $x_n = a\cos(\lambda n + \alpha)$ with fixed frequency $\lambda = \frac{2\Pi}{T}$. Then,

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n \cos\lambda - a\sin\lambda \sin\cos^{-1}(x_n \mid a) \\ x_0 &= a\cos\alpha \\ x_1 &= a\cos(\lambda+\alpha) \end{cases}$$

- Suppose a is constant and $\alpha \in \Theta$.

  Then $X_n = \{x_n, x_{n+1}\}$ is markovian with homogeneous transition probabilities $dP(x,y) = \delta_x(.)$, where $x \in \mathrm{R}^2$. Then $\{x_n\}$ is weakly continuous. The state space is

$$\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha\in\Theta} \bigcup_n a\cos(\lambda n + \alpha)$$

  Any trajectory passes anywhere if for every α, $\alpha_0 \in \Theta$, and $m \in \mathrm{N}$, there exists $n \in \mathrm{N}$ such that $\cos(\lambda n + \alpha_0) = \cos(\lambda m + \alpha)$, i.e. $n = m + \frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda} + kT$, for some $k \in \mathrm{N}$.

  Then if $T = n_1/n_2 \in \Theta$, and if $\alpha = l\lambda \pmod{2\pi}$, $l \in \mathrm{N}$, for all $\alpha \in \Theta$, $\mathcal{X}$ is a countable space and the chain is φ-recurent, when φ is the discrete measure on $\mathcal{X}$.

  Moreover, it is periodic with period $d = hT$ where h is the smallest integer such that $hT \in \mathrm{N}$.

  Then, every state is positive recurrent and there exists an invariant probability Π defined by :

$$\Pi(x) = \frac{\text{number of states equal to } x \text{ in a period}}{d}$$

- Suppose a is a random variable.

  $a = g(x_n, x_{n-1})$ for all n, and then $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$.

  Therefore $X_n = (x_n, x_{n-1})$ is markovian with homogeneous transition probabilities. But the chain is no more φ-irreducible.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3. $\{x_n\}$ is a stationary white noise with a probability law F. $\{x_n\}$ is markovian with homogeneous transition law F.

Morevoer, as ${}_A P^n(x, A) = F(A)(1 - F(A))^{n-1}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_A P^n(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A)(1 - F(A))^{n-1} = 1$$

if $F(A) > 0$.

Therefore $\{x_n\}$ is φ-recurrent and even uniformly φ-recurrent for $\sum_{n=1}^{N} {}_A P^n(x, A)$ do not depend on x, where φ is such that $\varphi(A) > 0$ implies $F(A) > 0$, that is $\varphi \ll F$.

Moreover $Pg(x) = \int F(dy)g(y)$ is constant for all x, and all g.

Then $\{x_n\}$ is strongly continuous.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3 PROBABILISTIC PROPERTIES OF THE PERIODIC MODEL (M)

We will suppose that d is a finite positive integer. To simplify the notations, we will suppose that $f_j = f$, for all j. Otherwise, we must read $f_j(x)$ instead of $f(x)$, when $x \in C_j$.

Note

In the following, the condition, "$\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j) > b$" (which is used under (D)) can be replaced by the weaker condition "$\psi_j \lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) > b$".

3.1 Φ-IRREDUCIBILITY

Proposition 1.1

Under the assumption (D), a sufficient condition for $\{z_n\}$ to be φ-irreducible is the following one :

For every $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$,

$$(1.1.1)\begin{cases} \text{for all } k \in (1,...,d), \text{ there exist } l \in \mathbf{N} \text{ and a sequence} \\ I_{j-1} \subset C_{j-1},\ I_{j-2} \subset C_{j-2},\ ...,\ I_{k+1-ld} \subset C_{k+1} \text{ such that,} \\ \lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0, \text{ for all } x \in I_{j-1} \\ \lambda(\Omega_{j-1} \cap f(x)^{-1}I_{j-1}) > 0, \text{ for all } x \in I_{j-2} \\ ... \\ \lambda(\Omega_{k+1} \cap f(x)^{-1}I_{k+1-ld}) > 0, \text{ for all } x \in C_k \end{cases}$$

Remark

Under the assumption (PAC), $\{z_n\}$ is φ-irreducible if condition (1.1.1) is satisfied with B_j instead of Ω_j.

Proof

Let $A = A_j \times j \subset C_j \times j$, with $\lambda(A_j) > 0$ and $z = (x_0, k) \in C_k \times k$. There exists $m = j - k + ld$ with $l \in \mathbf{N}$, such that $z_m \in C_j \times j$, when $z_0 = z \in C_k \times k$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Thanks to the cycle's and Bayes' properties, we have,

$$P(z_m \in A \mid z_0 = z) = \int_{C_{j-1}} F_j(f(x)^{-1}A_j) G_{z,m-1}(dx) ,$$

where $G_{z,m-1}$ denotes the conditional law of x_{m-1}, knowing $z_0 = z$.

Then

$$G_{z,m}(A_j) = \int_{C_{j-1}} F_j(f(x)^{-1}A_j) G_{z,m-1}(dx)$$

The right member of this equality is positive if there exists $I_{j-1} \subset C_{j-1}$ such that, $G_{z,m-1}(I_{j-1}) > 0$ and $F_j(f(x)^{-1}A_j) > 0$, for $G_{z,m-1}$ - almost every $x \in I_{j-1}$ - which is satisfied under hypothesis (D) if, $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0$ for all $x \in I_{j-1}$.

The reasoning is the same for $G_{z,m-1}(I_{j-1})$.

At the end, we must have, $G_{z,1}(I_{k+1-ld}) > 0$, for all $z \in C_k \times k$. But, $G_{z,1}(I_{k+1-ld}) = F_{k+1}(f(x_0)^{-1}I_{k+1-ld})$, which is positive, under the assumption (D) if $\lambda(\Omega_{k+1} \cap f(x_0)^{-1}I_{k+1-ld}) > 0$, for all $x_0 \in C_k$.

Examples

Under the assumption (D), $\{z_n\}$ is φ-irreducible in models 1 (see proposition 2 p. 16 [3], for the aperiodic case), and 2.

Proof

- **Model 1**

  $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) = \lambda(A_j)$, which is positive for all $x \in E$. Then $I_{j-1} = E$ and in the same way, I_{j-2}, ..., I_{k+1-ld} are all equals to E.

- **Model 2**

  $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) = \lambda(A_j)$, which is positive for all $x \in C_{j-1}$. Then, as previously, $I_{j-1} = C_{j-1}$, $I_{j-2} = C_{j-2}$, ..., $I_{k+1} = C_{k+1}$.

Proposition 1.1 do not inform about the analytical form of f which leads to φ-irreducibility. The following proposition, which is a particular case of proposition 1.1,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

attempts to give this information and is quite similar to Doukhan and Ghindès' results ([3] p. 43) in the aperiodic case, which suppose that f is a contracting function.

Proposition 1.2

The set of following conditions is a sufficient condition for φ-irreducibility of $\{z_n\}$:

- (1.2.1) $f(C_{j-1}) = C_j$ and f is continuous on C_{j-1}, for all j.
- (1.2.2) For all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$, $j = 1, ..., d$,
  1. $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1} A_j) > 0$, for all $x \in A_{j-1}$, under the assumption (D) (respectively, $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) > 0$, for all $x \in A_{j-1}$, under the assumption (PAC)). (where $A_{j-1} = \{x \in C_{j-1} : f(x) \in A_j\} = f^{-1}(A_j)$).
  2. C_j is an accumulation point for the sequence $\{f^{-ld}(A_j)\}_{l \in \mathbf{N}}$ (that is $\lambda(\Omega_j)$ is an accumulation point in $\mathbf{R}^+$ for the sequence $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1} f^{-ld}(A_j))_{l \in \mathbf{N}}$, for every $x \in C_{j-1}$).

Proof

Suppose (D) holds, the proof is similar for the assumption (PAC).

Let $A = A_j \times j \subset C_j \times j$, and $z = (x_0, k) \in C_k \times k$. For all $m = j - k + ld$, with $l \in \mathbf{N}$, sufficiently large, $z_m \in C_j \times j$, when $z_0 \in C_k \times k$. According to proposition 1.1, φ-irreducibility holds if (1.1.1) is satisfied.

Now, by (1.2.2.1), we have $I_{j-1} = A_{j-1}$, $I_{j-2} = A_{j-2}$, ..., $I_{k+1-ld} = A_{k+1-ld}$, where $A_{j-l} = f^{-l}(A_j)$, for all $l \in \mathbf{N}$.

At the end, $\lambda(\Omega_{k+1} \cap f(x)^{-1} A_{k+1-ld})$ will be positive for all $x \in C_k$, if (1.2.2.2) holds (1.2.2.2 is applied to $\{f^{-ld}(A_{k+1})\}$ because $\lambda(A_{k+1-ld}) > 0$, for all $n \in \mathbf{N}$, thanks to the continuity of f).

Examples

1. Under the assumptions (D) (resp (PAC)) and (1.2.1), condition (1.2.2.1) is satisfied for all open set $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$, if there exists a neighborhood

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\mathcal{V}(e)$ of e such that $\mathcal{V}(e) \subset \Omega_j$ (resp. $\mathcal{V}(e) \subset B_j$). This supposes the C_j not relatively compact (see Introduction) (Then under these assumptions and (1.2.2.2) φ-irreducibility in the open sets is satisfied).

2. Let $E = \mathrm{R}$. Suppose that f satisfies (1.2.1) and that f^{-d} has at least a fixed point in C_j, for all j. (which is satisfied, if the C_j are all compact). Then, if the C_j are not all compact, condition (1.2.2.) cannot be satisfied if $\left|\frac{df^{-d}(x)}{dx}\right| < 1$, for all $x \in C_j$, for some j, such that C_j is not compact.

3. model 3 satisfies conditions (1.2.1) and (1.2.2). Therefore the chain, solution of model 3, is φ-irreducible.

<u>Proof</u>

1. Suppose (D).

   Thanks to condition (1.2.1), for all $x \in A_j$, there exists $u \in A_{j-1}$, such that $x = f(u)$. Then, for all $u \in A_{j-1}$, $e \in f(u)^{-1}A_j$. Suppose A_j is open. Then, there exists a neighborhood of e, $\mathcal{V}'(e) \subset f(u)^{-1}A_j$. But $\mathcal{V}(e) \subset \Omega_j$. Then, $\mathcal{V}(e) \cap \mathcal{V}'(e) = \mathcal{V}''(e) \subset \Omega_j \cap f(u)^{-1}A_j$, which implies that, $\lambda(\Omega_j \cap f(u)^{-1}A_j) \geq \lambda(\mathcal{V}''(e)) > 0$, for all $u \in A_{j-1}$, and therefore, $F_j(f(u)^{-1}A_j) > 0$, for all $u \in A_{j-1}$.

   The proof is similar, under (PAC).

2. Let x_j be a fixed point for f^{-d} in C_j, that is $f^{-d}(x_j) = x_j$ and let $A_j \ni x_j$. Then, if there exists j such that $\left|\frac{df^{-d}}{dx}(x)\right| < 1$, for all $x \in C_j$, $f^{-d}(A_j) \overset{\subset}{\neq} A_j$ and $x_j \in f^{-d}(A_j)$. By iteration, $f^{-ld}(A_j) \to x_j$, when $l \to \infty$.

3. Immediate.

Let the following assumption,

(OI) : φ-irreducibility in the open sets. That is $G_u(z, G) > 0$, for all open set $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$ and $z \in Z$, and $u > 0$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Proposition 1.3

Under the assumptions (OI), (D) (resp. (PAC)) a sufficient condition for $\{z_n\}$ to be φ-irreducible, is the following one : for every $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, with $A = A_j \times j$,

$$(1.3.1)\begin{cases} \text{there exists an open set } O_{j-1} \subset C_{j-1} \text{ such that } \lambda(O_{j-1}) > 0 \\ \text{and } \lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0, \text{ for all } x \in O_{j-1} \\ (\text{resp. } \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0, \text{ for all } x \in O_{j-1}) \end{cases}$$

Proof

We have to prove that $G_u(z, A) > 0$ $(0 < u \leq 1)$ for all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, and all $z \in Z$.

Let $A = A_j \times j \subset C_j \times j$. We can suppose $\lambda(A_j) < \infty$ and $\lambda(B_j) < \infty$.

$$\begin{aligned} G_u(z, A) &= \sum_{n=1}^{\infty} u^n P^n(z, A) \\ &= u \int G_u(z, dy) P(y, A) + uP(z, A) \end{aligned}$$

Therefore, $G_u(z, A) \geq u \int_{C_{j-1}} G_u(z, dx \times (j-1)) F_j(f(x)^{-1}A_j)$.

The second member of this inequality is positive if there exists an open set $O_{j-1} \subset C_{j-1}$ such that $\lambda(O_{j-1}) > 0$, $F_j(f(x)^{-1}A_j) > 0$, for all $x \in O_{j-1}$, and if (OI) holds.

Under the assumption (D), $F_j(f(x)^{-1}A_j) > 0$ if $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0$.

And under the assumption (PAC), $F_j(f(x)^{-1}A_j) \geq b\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)$.

Then $F_j(f(x)^{-1}A_j)$ is positive if $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)$ is positive.

Examples

Under the assumptions of (PAC) (resp. (D)) and of continuity of f on each C_j, condition (1.3.1) is satisfied in model 1 (with $f(E) = E$ under (PAC)) (see proposition 8 p 19 [3] for the aperiodic case) and in model 2 (with $B_j = \Omega_j$ under (PAC) which implies in this case that the Ω_j are supposed bounded).

Proof

- **Model 1**

  Suppose (PAC) holds.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

If f is continuous on each C_j, $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)$ is a continuous function of x (see introduction).

Therefore, if $\int \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)\lambda(dx)$ is positive, there exists an open set $O_{j-1} \subset C_{j-1}$ with $\lambda(O_{j-1}) > 0$, such that $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0$, for all $x \in O_{j-1}$ ($O_{j-1} = \{x : \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j) > 0\}$).

Now, it must be proved that for all $A_j \subset C_j$ with $\lambda(A_j) > 0$, $\int \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)\lambda(dx)$ is positive.

$$\begin{aligned}\int_{C_{j-1}} \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)\lambda(dx) &= \int_{C_{j-1}} \int_{\Omega_j} 1_{B_j}(v) 1_{f(x)^{-1}A_j}(v)\lambda(dv)\lambda(dx) \\ &= \int 1_{B_j}(v)\lambda(dv)\lambda(C_{j-1} \cap f^{-1}(A_j v^{-1}))\end{aligned}$$

If $C_j = E$, for all j, $f(E) = E$ and f is continuous on each C_j, $\lambda(C_{j-1} \cap f^{-1}(A_j v^{-1})) = \lambda(f^{-1}(A_j v^{-1}))$ is positive for all $v \in E$, if $\lambda(A_j) > 0$.

Therefore, $\int \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)\lambda(dx)$ is positive, for all $A_j \subset C_j$ with $\lambda(A_j) > 0$.

Suppose now that (D) holds, then $\lambda(\Omega_j \cap f(x)^{-1}A_j) = \lambda(A_j)$, for all $x \in E$.

- **Model 2**

$$\begin{aligned}\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j) &= \lambda(a_{j-1}^{-1}.C_j \cap a_{j-1}^{-1}A_j) \\ &= \lambda(A_j) > 0\end{aligned}$$

for all $x \in C_{j-1}$.

Let the following assumption :

(H) each set $A \in \mathcal{B}(E)$ such that $\lambda(A) > 0$ is of second category (which implies that $\mathring{A} \neq \emptyset$) and supp $\lambda = E$.

Proposition 1.4

If the assumptions (H) and (OI) are satisfied, then the chain is φ-irreducible.

Proof

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Let $A_j \subset C_j$ such that $\lambda(A_j) > 0$. Then there exists a non empty and open set $O_j \subset C_j$, O_j satisfies $\lambda(O_j) > 0$. Therefore, $G_u(z, A_j \times j) \geq G_u(z, O_j \times j) > 0$.

Propositions 1.3 and 1.4 use hypothesis (OI). The following proposition allows to obtain this hypothesis.

Let G be an open set $\in \mathcal{F}_\varphi^+$. Let $I(G) = \{z \in Z : G_u(z, G) > 0\}$, and denote $J = I(G)^c$.

(OI) is satisfied if $I(G) = Z$ for all $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$.

Proposition 1.5

If for all open set $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$, $I(G)$ is open and non empty, and if the following relations (R) hold, then (OI) is satisfied.

$$\text{(R) } f(B_j).\Omega_{j+1} \subset B_{j+1}, \text{ for all } j \Rightarrow \begin{cases} B_j = \emptyset & \text{for all } j \\ \text{or} & \\ B_j = C_j & \text{for all } j \end{cases}$$

(see p. 22 [3] for the aperiodic case).

Proof

- We prove first that J is an absorbing set, i.e. that $G_u(z, J^c) = 0$, for all $z \in J$, or $P^n(z, J^c) = 0$, for all n and $z \in J$.

  In fact, we prove that $G_u(z, I(G)) > 0 \Rightarrow z \in I(G)$.

  Let $G_u(z, I(G)) > 0$. There exists n such that $P^n(z, I(G)) > 0$.

$$\begin{aligned} G_u(z, G) &\geq \sum_{m>n} u^m P^n(z, G), \ (0 < u < 1) \\ G_u(z, G) &\geq \sum_{m>n} u^m \int_Z P^n(z, dy) P^{m-n}(y, G) \\ G_u(z, G) &\geq u^n \int_{I(G)} P^n(z, dy) G_u(y, G) \end{aligned}$$

  But $G_u(y, G) > 0$ for all $y \in I(G)$, and $P^n(z, I(G)) > 0$.

  Then $G_u(z, G) > 0$, which implies $z \in I(G)$.

- Then, we prove that $G_u(z, J^c) = 0$, for all $z \in J \Leftrightarrow P(z, J) = 1$, for all $z \in J$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

We proved previously that

$z \in J \Rightarrow G_u(z, I(G)) = 0$, i.e. $P^n(z, J) = 1$, for all n.

Conversely, let $P(z, J) = 1$, for all $z \in J$.

Then we prove recurrently that $P^n(z, J^c) = 0$ for all $z \in J$, i.e. $G_u(z, J^c) = 0$, for all $z \in J$:

$$P^n(z, J^c) = \int_J P^{n-1}(y, J^c) P(z, dy) + \int_{J^c} P^{n-1}(y, J^c) P(z, dy)$$

But $P^{n-1}(z, J^c) = 0$, for all $z \in J$.

Consequently,

$$\begin{aligned} P^n(z, J^c) &= \int_{J^c} P^{n-1}(y, J^c) P(z, dy) \\ &\leq P(z, J^c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- We prove now that, if (G) is an open set of $\bigcup_j E \times j$, then $P(z, J) = 1$, for all $z \in J \Leftrightarrow f(J_j)\Omega_{j+1} \subset J_{j+1}$ (where J_j denotes the trace of $J \cap (C_j \times j)$, on C_j).

  Let $z = (x, j) \in C_j \times j \cap J$

  $P(z, J) = F_{j+1}(f(x)^{-1} J_{j+1})$

  $P(z, J) = 1$, for all $z \in J \Leftrightarrow \Omega_{j+1} \subset f(x)^{-1} J_{j+1}$, for all $x \in J_j$.

  If J_{j+1} is closed, this is equivalent to $f(J_j)\Omega_{j+1} \subset J_{j+1}$

  (if J_{j+1} is not closed, $\Omega_{j+1} \subset \bigcap_{x \in J_j} f(x)^{-1} J_{j+1} \Leftrightarrow f(J_j)\Omega_{j+1} \subset J_{j+1}$, for $\bigcap_{x \in J_j} f(x)^{-1} J_{j+1}$ can be empty).

- Finally, if there exists j such that $I(G)_j \neq \emptyset$, i.e. $J_j \neq C_j$, and if relations (R) hold, then $I(G) = Z$.

Examples

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Relations (R) hold in models 1, 2 and in the following case : $f(C_j) = C_{j+1}$, and $e \in \Omega_j$, for all j ; and there exists j_0 such that $B_{j_0} = \emptyset$ or C_{j_0}.

Proof

Denote (R') for $f(B_j)\Omega_{j+1} \subset B_{j+1}$, for all j.

- **Model 1**

$$f(B_j)\Omega_{j+1} = E \quad \text{if } B_j \neq \emptyset$$
$$= \emptyset \quad \text{if } B_j = \emptyset$$

Then relations (R') imply that $B_j = E$, for all j, if $B_j \neq \emptyset$ for some j ; and consequently, $B_j = \emptyset$, for all j, if $B_j = \emptyset$, for some j.

- **Model 2**

$$f(B_j)\Omega_{j+1} = C_{j+1} \quad \text{if } B_j \neq \emptyset$$
$$= \emptyset \quad \text{if } B_j = \emptyset$$

Then, relation (R') imply that $B_j = C_j$ for all j, or $B_j = \emptyset$, for all j.

- $f(C_j) = C_{j+1}$, $e \in \Omega_j$; for all j ; and there exists j_0 such that $B_{j_0} = \emptyset$ or C_{j_0}.

Relations (R') imply that, $f(B_{j_0}).e \subset B_{j_0+1}$.

If $B_{j_0} \neq C_{j_0}$, then $B_{j_0+1} = C_{j_0+1}$, and $B_j = C_j$, for all j.

If $B_{j_0} = \emptyset$, as $f(B_{j_0-1}) \subset B_{j_0}$, then $B_{j_0-1} = \emptyset$, and $B_j = \emptyset$, for all j.

Consequently, in models 1 and 2, $I(G) \neq \emptyset$ implies $I(G) = Z$, (and then $I(G)$ is an open set in model 1).

In proposition 1.5, it was assumed that there existed j such that $I(G)_j \neq \emptyset$, and that $I(G)$ was open. The following propositions 1.6 and 1.7 give some sufficient conditions for $I(G)$ to be open and not empty.

Proposition 1.6

$I(G)$ is an open set in the following cases :

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- (1.6.1) P is strongly continuous.
- (1.6.2) P is weakly continuous and E is metric.
- (1.6.3) P is weakly continuous and P^n is regular, for all n, that is, $P^n(z,G) = \sup_\varphi P^n\varphi(z)$, where φ is continuous and satisfies $0 \leq \varphi \leq 1_G$. (see proposition 11 p. 21 [3] for the aperiodic case).

Proof

- Suppose (1.6.1) holds.

  By definition of $I(G)$, $I(G)$ is an open set if $G_u(z,G)$ is a continuous function of z. $G_u(z,G) = \sum_n u^n P^n(z,G)$.

  But $P(z,G) = P1_G(z)$ and by (1.6.1), $P(z,G)$ is continuous. By recurrence,

  $$P^n(z,G) = \int P(z,dy)P^{n-1}(y,G)$$

  is also continuous. Then $G_u(z,G)$ is continuous.

- Suppose (1.6.2) holds.

  Here $Pg(z)$ is continuous and bounded, for all g continuous and bounded. Then, we approach 1_G by continuous and bounded functions.

  Let $G = \bigcup_j G_j \times j$. $G_j = \bigcup_m F_{mj}$ where the F_{mj} form an increasing sequence of closed sets :

  $$F_{mj} = \left[\bigcup_{x \notin G_j} B(x, \frac{1}{m})\right]^c$$

  Then $G = \bigcup_m F_m$ where $F_m = \bigcup_j F_{mj} \times j$. Z is metric. We define a sequence of bounded and continuous functions h_m which tend to 1_G according to the following way :

  $$h_m(y) = \frac{d(y,G^c)}{d(y,G^c) + d(y,F_m)}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

– for $y \in F_m$,

$$| h_m(y) - 1_G(y) | = 0$$

– for $y \in G \setminus F_m$,

$$| h_m(y) - 1_G(y) | = \left| \frac{1}{1 + \frac{d(y,F_m)}{d(y,G)}} - 1 \right| \to 0, \text{ when } F_m \to G$$

– for $y \in G^c$,

$$| h_m(y) - 1_G(y) | = 0$$

$h_m(y)$ is continuous and bounded. The sequence $\{h_m\}_m$ is increasing : $1_G(y) = \lim_m \nearrow h_m(y)$.

Consequently, $P^n(z,G) = P^n 1_G(z) = \lim_m \nearrow P^n h_m(z)$.

$P^n h_m$ is a continuous and bounded function. Moreover,

$$I(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(G) ,$$

where $I_n(G) = \{z \in Z : P^n(z,G) > 0\}$. $I(G)$ is open if for all $z \in I(G)$, there exists a neighborhood of z which is included in $I(G)$.

Let $z \in I(G)$: there exists n such that $P^n(z,G) > 0$. But

$$P^n(z,G) = \lim_m \nearrow P^n h_m(z)$$

Consequently, there exists m such that $P^n h_m(z) > 0$. But $P^n h_m(z)$ is continuous. Then there exists a neighborhood of z, $\mathcal{V}(z)$ such that for all $y \in \mathcal{V}(z)$, $P^n h_m(y) > 0$. Then $P^n(y,G) > 0$ which implies $y \in I(G)$. Then $\mathcal{V}(z) \subset I(G)$. $I(G)$ is an open set.

- Under assumption (1.6.3), the proof is the same as under assumption (1.6.2).

Proposition 1.7

Now, $I(G) \neq \emptyset$, in the following case : (1.2.1) holds and there exists a neighborhood $\mathcal{V}(e)$ of e such that, $\mathcal{V}(e) \subset \Omega_j$ (if (D) holds) or $\mathcal{V}(e) \subset \mathcal{B}_j$ (if (PAC holds). (1.6.4.)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Proof

We follow the proof of example 1 of proposition 1.2.

Let $G = A_j \times j$ be an open set with $\lambda(A_j) > 0$, and suppose (PAC) holds. We have : $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) > 0$, for all $x \in A_{j-1}$ and A_{j-1} is an open set such that $\lambda(A_{j-1}) > 0$ (see example 1 of proposition 1.2). Then, $\lambda(B_{j-1} \cap f(x)^{-1} A_{j-1}) > 0$, for all $x \in A_{j-2}$, and A_{j-2} is an open set such that $\lambda(A_{j-2}) > 0$. Finally, $\lambda(B_{k+1} \cap f(x)^{-1} A_{k+1-ld}) > 0$, for all $x \in A_{k-ld}$ and A_{k-ld} is an open set such that $\lambda(A_{k-ld}) > 0$. Therefore, for all $k \in (1, ..., d)$, $I(G)_k \supset \bigcup_l A_{k-ld}$.

Remarks

1. We saw in proposition 1.1 that model 1 was φ-irreducible, under (D). Here, it is proved that, if in addition f is continuous on each C_j, $f(E) = E$, and if every open set G is attainable (i.e. $I(G) \neq \emptyset$, for all open set G), which is satisifed, for example, if $\mathcal{V}(e) \subset B_j$, then model 1 is φ-irreducible under (PAC). (see p. 23 [3] for the aperiodic case).

2. Except the case of the particular model 2, φ-irreducibility is generally more difficult to obtain in a compact cycle than when $C_j = E$, for all j, because the group properties are lost when $C_j \neq E$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.2 CONTINUITY

Proposition 2.1

Under the assumption (AC), if f is continuous on each C_j, the chain is strongly continuous. (see prop. 2 p. 25 [3] for the aperiodic case).

Proof

Let g be a measurable and bounded function from Z to R such that $\|g\|_\infty = M$. $\int_Z P(z,dy)g(y) \leq M$, for all $z \in Z$. Therefore Pg is a bounded function.
Now, we prove that Pg is continuous. Let z and $z' \in C_j \times j$; $z = (x,j)$, $z' = (x',j)$

$$Pg(z) - Pg(z') = \int_{C_{j+1}\times(j+1)} [P(z,dy) - P(z',dy)]g(y)$$

$$\begin{aligned} | Pg(z) - Pg(z') | &\leq M \int_{C_{j+1}} | \psi_{j+1}(f(x)\dot{}^{-1}u) - \psi_{j+1}(f(x')\dot{}^{-1}u) | \lambda(du) \\ &\leq M \int_{f(x')C_{j+1}} | \psi_{j+1}(f(x)\dot{}^{-1}f(x')r) - \psi_{j+1}(r) | \lambda(dr) \end{aligned}$$

or $| Pg(z) - Pg(z') \leq M\Psi(f(x')f(x)^{-1})$. Therefore, continuity of Pg results from the fact that f and Ψ are continuous and that $\Psi(e) = 0$ (cf Introduction).

Proposition 2.2

If f is continuous on each C_j, then, the chain is weakly continuous (see prop. 4 p. 26 [3] for the aperiodic case).

Proof

Let g be a continuous and bounded function from Z to R such that $\|g\|_\infty = M$. Pg is bounded (see previous proposition). Let z and $z' \in C_j \times j$; $z = (x,j)$, $z' = (x',j)$.

$$Pg(z) - Pg(z') = \int_{C_{j+1}} F_{j+1}(f(x)\dot{}^{-1}du)g_j(u) - \int_{C_{j+1}} F_{j+1}(f(x')\dot{}^{-1}du)g_j(u)$$

Let $v = f(x)\dot{}^{-1}u$ and $v' = f(x')\dot{}^{-1}u$. Then,

$$\begin{aligned} Pg(z) - Pg(z') &= \int_{f(x)^{-1}C_{j+1}} F_{j+1}(dv)g_j(f(x)v) \\ &- \int_{f(x')^{-1}C_{j+1}} F_{j+1}(dv')g_j(f(x')v') \end{aligned}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Then, as $\Omega_{j+1} \subset f(x)^{-1}C_{j+1}$, for all $x \in C_j$,

$$| Pg(z) - Pg(z') | \leq \int_{\Omega_{j+1}} F_{j+1}(dv) \mid g_j(f(x)v) - g_j(f(x')v) \mid$$

Let $\epsilon > 0$. There exists a compact K such that $F_{j+1}(K^c) < \frac{\epsilon}{4M}$. g is uniformly continuous on a compact neighborhood of $f(x)K$. Therefore, there exists a neighborhood $\mathcal{V}(x)$ such that, for all $v \in K$, for all $x' \in \mathcal{V}(x)$, $| Pg(f(x)v) - Pg(f(x')v) | < \frac{\epsilon}{2}$. Then, if $x' \in \mathcal{V}(x)$,

$$\begin{aligned} | Pg(z) - Pg(z') | &\leq \int_{K^c} F_{j+1}(dv) \mid g_j(f(x)v) - g_j(f(x')v) \mid \\ &+ \int_K F_{j+1}(dv) \mid g_j(f(x)v) - g_j(f(x')v) \mid \\ &\leq 2M\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.3 SUBINVARIANT AND INVARIANT MEASURES

Suppose that $\{z_n\}$ is φ-irreducible. Let μ be a subinvariant measure (it always exists (Tweedie, 1975)). Denote by μ_j, the restriction of μ on C_j.

Proposition 3.1

1. If F_j and λ_{Ω_j} are not orthogonal ((PAC) holds), then μ_j and λ_{C_j} are not orthogonal (i.e. μ is not orthogonal to φ).

2. $\lambda_{\Omega_j} \ll F_j$ do not imply in general that $\lambda_{C_j} \ll \mu_j$. (see prop. 3 p. 27 [3] for the aperiodic case).

Proof

1. Suppose that $\mu_j \perp \lambda_{C_j}$. Then, there exists $A_j \subset C_j$ such that $\mu_j(A_j) = 0$, and $\lambda_{C_j}(A_j^c) = 0$. μ is subinvariant, i.e. for all $A \subset \mathcal{F}$, $\mu(A) \geq \int \mu(dz)P(z, A)$. In particular, for $A = A_j \times j$,

$$\mu_j(A_j) \geq \int_{C_{j-1}} \mu_{j-1}(dx) F_j(f(x)^{-1} A_j)$$

$\mu_j(A_j) = 0$ implies that $F_j(f(x)^{-1} A_j) = 0$, μ_{j-1}-a.s. But μ_{j-1} cannot be null because μ is non trivial : suppose that $\mu_{j-1}(C_{j-1}) = 0$. Then, as,

$$\mu_{j-1}(C_{j-1}) \geq \int_{C_{j-2}} \mu_{j-2}(dx) = \mu_{j-2}(C_{j-2}) ,$$

$\mu_{j-2}(C_{j-2}) = 0$, and by recurrence, $\mu_j(C_j) = 0$, for all j, which is in contradiction with the fact that μ is non trivial. Therefore μ_{j-1} is not null and then, there exists $x \in C_{j-1}$ such that $F_j(f(x)^{-1} A_j) = 0$. But, $\lambda_{C_j}(A_j^c) = 0$, which implies, $\lambda(f(x)^{-1} C_j \setminus f(x)^{-1} A_j)^c = 0$. $\Omega_j \subset f(x)^{-1} C_j$ implies then, $\lambda_{\Omega_j}(f(x)^{-1} A_j)^c = 0$.

Therefore $F_j \perp \lambda_{\Omega_j}$.

2. Suppose $\lambda_{\Omega_j} \ll F_j$ and $\mu_j(D_j) = 0$, for some $D_j \subset C_j$

$$\mu_j(D_j) \geq \int_{C_{j-1}} \mu_{j-1}(dx) F_j(f(x)^{-1} D_j)$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Therefore, $F_j(f(x)^{-1}D_j) = 0$ for some $x \in C_{j-1}$.

But $\lambda_{\Omega_j} \ll F_j$, which implies $\lambda_{\Omega_j}(f(x)^{-1}D_j) = 0$, or $\lambda(\Omega_j \setminus (f(x)^{-1}D_j)^c) = 0$.

But $\Omega_j \subset f(x)^{-1}C_j$, and generally, $\Omega_j \neq f(x)^{-1}C_j$.

Then, when $\Omega_j \neq f(x)^{-1}C_j$, it cannot be deduced from $\lambda(\Omega_j \setminus (f(x)^{-1}D_j)^c) = 0$, that $\lambda(f(x)^{-1}C_j \setminus (f(x)^{-1}D_j)^c) = 0$, i.e. $\lambda_{C_j}(D_j) = 0$.

remark

$\Omega_j = f(x)^{-1}C_j$ in models 1 and 2.

Proposition 3.2.

If μ is invariant, then, $F_j \ll \lambda_{\Omega_j}$ ((AC) holds) implies $\mu_j \ll \lambda_{C_j}$ for all j. (i.e $\mu \ll \varphi$).

Proof

Suppose $F_j \ll \lambda_{\Omega_j}$ and $\lambda 1_{C_j}(D_j) = 0$, for some $D_j \subset C_j$.

$$\lambda_{C_j}(D_j) = \lambda 1_{f(x)^{-1}C_j}(f(x)^{-1}D_j)$$

But, $\Omega_j \subset f(x)^{-1}C_j$, for all $x \in C_{j-1}$.

Then, $\lambda_{f(x)^{-1}C_j}(f(x)^{-1}D_j) = 0$ implies $\lambda_{\Omega_j}(f(x)^{-1}D_j) = 0$.

But $F_j \ll \lambda_{\Omega_j}$. Then, $F_j(f(x)^{-1}D_j) = 0$, for all $x \in C_{j-1}$. Moreover,

$$\mu_j(D_j) = \int_{C_{j-1}} \mu_{j-1}(dx) F_j(f(x)^{-1}D_j)$$

Therefore, $\mu_j(D_j) = 0$.

Théorème 11 (p 33 [3])

If Z is a compact topological space, any weakly continuous transition probability defined on Z, has an invariant probability.

Corollary 3.1.

If Z is compact (that is, d is finite and the C_j are all compact), and if f is a continuous function on each C_j, then the chain has an invariant probability (see corollary 12 p 33 [3] for the aperiodic case).

Proof

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

If f is continuous, the transition probability is weakly continuous (prop. 2.2).

Theorem (Orey, 1971, p. 31)

A uniformly φ-recurrent chain has an invariant probability (cf § 4).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.4 RECURRENCE

Let μ be a fixed subinvariant measure for $\{z_n\}$, and $\mathcal{F}_\mu = \{A \in \mathcal{F} : 0 < \mu(A) < \infty\}$. Suppose $\{z_n\}$ is φ-irreducible. The set $\mathcal{F}_\mu$ is useful to discriminate between recurrent and transient chains :

Lemma 2.1 (Tweedie, 1975, p. 388)

Either $\{z_n\}$ is 1-recurrent (i.e $G_1(z, A) = \infty$, for all $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$), or $\{z_n\}$ is transient : $G_1(z, A) < \infty$, for every $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}_\mu$.

remark : denote by $G_{1,n}$, $\sum_1^n P^i(z, A)$. Then, $\lim_n G_{1,n}$ exists in $\overline{\mathrm{R}}$ for all z and A.

Consequences

i) If there exist $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ such that $G_1(z, A) < \infty$, then the chain is transient.

ii) If there exist $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}_\mu$ such that $G_1(z, A) = \infty$, then the chain is 1-recurrent.

iii) If $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$ and if for all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, there exist $z \in Z$ such that $G_1(z, A) = \infty$, then the chain is 1-recurrent. (iii implies ii).

remark : if μ is not orthogonal to φ, then $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$. In particular, if $\mu \ll \varphi$, then $\mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}_\varphi^+$, which is the case under (AC), when μ is invariant (proposition 3.2). Under (PAC), μ is not orthogonal to φ, and under (D), $\varphi \ll \mu$ in models 1 and 2 (proposition 3.1), which implies $\mathcal{F}_\varphi^+ \subset \mathcal{F}_\mu^+$, where $\mathcal{F}_\mu^+ = \{A \in \mathcal{F} : 0 < \mu(A)\}$.

If the chain is strongly continuous, then every compact set has finite μ-measure (Lemma 4.1 Tweedie, 1975, p. 393), which implies that under (AC) and continuity of f on each C_j (proposition 2.1), every relatively compact set which belongs to $\mathcal{F}_\varphi^+$, belongs also to $\mathcal{F}_\mu$, in models 1 and 2.

Therefore, under (AC) and continuity of f on each C_j, if the chain is φ-irreducible, and if there exist $z \in Z$ and a relatively compact set $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ such that $G_1(z, A) = \infty$, then the chain is 1-recurrent in models 1 and 2.

Proof

Suppose that $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ = \emptyset$, which implies that $\mathcal{F}_{\mu_j} \cap \mathcal{F}_{\lambda 1_{C_j}}^+ = \emptyset$; for all j ; let j and $A_j \subset C_j$ such that $\mu(A_j) > 0$ and $\mu(A_j^c) = 0$.

μ is a σ-finite measure, which implies that there exists a sequence A_{jn} of sets in C_j such

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

that $A_j \subset \bigcup_n A_{jn}$ and $\mu_j(A_{jn}) < \infty$, for all n.

Let $A'_j = \bigcup_{n \in M} A_{jn} \cap A_j$, where $M = \{n : \mu_j(A_{jn}) > 0\}$; $\mu_j(A'_j) > 0$ and $\mu_j(A'^c_j) = 0$.

As $A_{jn} \cap A_j \in \mathcal{F}_{\mu_j}$, for all $n \in M$, we have $\lambda(A_{jn} \cap A_j) = 0$, for all $n \in M$ and therefore $\lambda(A'_j) = 0$.

Then $\lambda_{C_j} \perp \mu_j$. This is true for all j. Therefore $\mu \perp \varphi$.

Now, if $\mu \ll \varphi$, then $\mu(A) > 0$ implies $\varphi(A) > 0$ and therefore $\mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}^+_\varphi$.

1-sets allow also to discriminate between recurrence and transience.

Let $\mathcal{F}^+_M = \{A \in \mathcal{F} : M(A) > 0\}$, where M is a probability measure on $\mathcal{F}$ such that $\{z_n\}$ is M-irreducible and such that

(1) $M(A) = 0$ implies $M\{z : G_{1/2}(z, A) > 0\} = 0$.

Such a measure always exists if the chain is φ-irreducible for some φ, and it satisfies $\varphi \ll M$ (because $M(A) = 0 \Rightarrow M(\bar{A}) = 0$ and $M(\overline{A}) = 0 \Rightarrow \bar{A} \neq Z \Rightarrow \varphi(A) = 0$, because the chain is φ-irreducible).

This implies $\mathcal{F}^+_\varphi \subset \mathcal{F}^+_M$. We can take $M(.) = G_{1/2}(z, .)$ (Tweedie, 1974). This measure M satisfies :

(2) $supp.M = Z$, and then, if Z is of second category, $supp.M$ is of second category under the relativized topology, i.e it cannot be expressed as a countable union of sets whose closures have empty interiors.

(3) $M(suppM) = 1$

(4) M is regular, that is $M(A) = \sup\{M(\mathcal{F}) : A \supset closed\mathcal{F}\}$, for every $A \in \mathcal{F}$.

Theorem 1 (Tweedie, 1974 p. 843) and definitions (Pollard and Tweedie, 1976)

There is an $R \geq 1$ and a class $C_R \subset \mathcal{F}^+_M$ such that for each $A \in C_R$, the radius of convergence of $G_z(x, A)$ is R, for almost all z. R is defined by

$$R = \sup\{r > 0 \ ; \ G_r(z, A) < \infty \text{ for some } z \in Z \text{ and } A \in \mathcal{F}^+_M\}$$

If there exist $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}^+_M$ such that $G_R(z, A) < \infty$, the chain is called R-transient, and we take

$$C_R = \{A \in \mathcal{F}^+_M : G_R(z, A) < \infty, \text{ for some } z \in Z \text{ (and then, for all } z \notin N)\}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Otherwise, we call $\{z_n\}$ R-recurrent, and we take,

$$C'_R = \{A \in \mathcal{F}_M^+ : G_r(z, A) \text{ has radius of convergence } R, \text{ for some } z \in Z \text{ (and then, for all } z \notin N')\}$$

If $\{z_n\}$ is R-recurrent, $G_R(z, A) = \infty$, for every z and $A \in \mathcal{F}_M^+$.

Members of C_r or C'_R are called R-sets. N and N' are M-null sets. For $R = 1$, $N = \emptyset$ and $N' = \emptyset$.

Theorem 1' (Pollard and Tweedie, 1976, p. 276)

If the chain has a weakly continuous composent, and if M is regular and the support of M is of second category, then, every relatively compact member of $\mathcal{F}_M^+$ is an R-set.

Definition (Pollard and Tweedie, 1976, p. 276)

$P(z, .)$ has a weakly continuous component if there is a family of measures $T(z, .)$ for which,

i) $P(z, .) \geq T(z, .) \geq 0$, for all $z \in Z$

ii) $Tg(z)$ is lower-semi-continuous for each bounded l.-s.-c. function g.

iii) $T(z, .)$ is M-irreducible (i.e $M(A) > 0$ implies $\sum_n 2^{-n} T^n(z, A) > 0$, for every $z \in Z$).

These theorems mean that if $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ is relatively compact, then, $G_R(z, A) < \infty$, for all $z \notin N$ in the R-transience case or $G_R(z, A) = \infty$, for all $z \in Z$, and $G_r(z, A) < \infty$, for all $r < R$, $z \notin N'$, in the R-recurrence case.

Moreover, if $R > 1$, then $\{z_n\}$ is r-transient for all $r < R$, and in particular, for all relatively compact set $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, $G_1(z, A) < \infty$, for all $z \notin N''$, where $M(N'') = 0$.

And if $R = 1$, in the case of the 1-transience, $G_1(z, A) < \infty$, for all $z \in Z$.

Proposition 2.3. (Tweedie, 1974, p. 844) says that if z_n is $r-$transient with $r = 1$, then there exists a partition $K = \{K_j\}_j$ of Z such that $G_1(z, K_j) < \infty$, for all $z \in Z$, for all j.

But we cannot deduce that K_j is an R-set, if $R > 1$, i.e that $G_R(z, K_j) < \infty$ for almost all z, in the case of R-transience, or $G_R(z, K_j) = \infty$, for all z and $G_r(z, K_j) < \infty$, for all $r < R$, for almost all z, in the case of R-recurrence.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

The problem here is that we do not know if $R > 1$ or $R = 1$, or what is the set N''. Therefore, under the assumptions of theorem 1', the chain will be 1-recurrent, if there exist $A \in \mathcal{I}_\varphi^+$ relatively compact and a M-positive set $D \in \mathcal{I}$ such that $G_1(z, A) = \infty$, for all $z \in D$.

Corollary

Suppose that Z is of second category. Under the assumptions (D), φ-irreducibility and continuity of f on each C_j, if there exist $A \in \mathcal{I}_\varphi^+$ relatively compact and $D \in \mathcal{I}_\varphi^+$ such that $G_1(z, A) = \infty$, for all $z \in D$, then the chain is 1-recurrent, in models 1 and 2.

Proof

Define $T(z,.) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j \lambda_{\Omega_j}(f(z)^{-1}.) 1_{C_{j-1}}(z)$.

Under (D), $T(z,.)$ is equivalent to $\sum_j \lambda_{C_j}(.) 1_{C_{j-1}}(z)$, for all $z \in Z$.

Take M proportional to $G_{1/2}^{(T)}(z,.)$ for some z, where $G_{1/2}^{(T)}(z,.) = \sum_n 2^{-n} T^n(z,.)$. M satisfies (1), (2), (3) and (4). Moreover, as $T(z,.)$ is equivalent to $\sum \lambda_{C_j}(.) 1_{C_{j-1}}(z)$, the measures defined by $G_{1/2}^{(T)}(z,.)$ are all equivalent (have the same null sets). Then $M(A) > 0$ implies that $G_{1/2}^{(T)}(z, A) > 0$, for every $z \in Z$, i.e $T(z,.)$ is M-irreducible.

$T(z,.)$ is also weakly continuous, if f is continuous on each C_j (proposition 2.2).

Finally, $D \in \mathcal{I}_\varphi^+$ implies $D \in \mathcal{I}_M^+$.

Therefore assumptions of theorem 1' are satisfied, and this one can be applied.

Remark : we saw in the remark following Tweedie's lemma 2.1 that in the case of models 1 and 2, 1-recurrence results from the assumptions of (AC), continuity of f on each C_j and existence of a relatively compact set $A \in \mathcal{I}_\varphi^+$ and one $z \in Z$ such that $G_1(z, A) = \infty$. Corollary of theorem 1' allows to obtain 1-recurrence in models 1 and 2 with a less stringent condition for distributions F_j (assumption (D) instead of (AC)).

Now, the following proposition uses Tweedie's lemma 2.1.

Proposition 4.1

Suppose $\{z_n\}$ is φ-irreducible.

Under the assumption (PAC), a sufficient condition for the chain to be φ-recurrent is

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

the following one :

For every $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$,

$$(4.1.1)\quad \begin{cases} \text{there exists } z \in Z \text{ and } I_{j-1} \subset C_{j-1} \text{ such that} \\ f(I_{j-1}) \text{ is compact, } \lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j) \text{ is positive,} \\ \text{for all } x \in I_{j-1} \text{ and } G_1(z, I_{j-1} \times (j-1)) = \infty \end{cases}$$

Proof

Under (PAC), $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$. Then, we are going to prove that, for every $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, there exists $z \in Z$ such that $G_1(z, A) = \infty$. Therefore, according to Tweedie's lemma 2.1, the chain will be 1-recurrent.

Then, let $A = A_j \times j \in \mathcal{F}_\varphi^+$.

$$P^{n+1}(z, A) = \int_{C_{j-1}} P^n(z, dx \times (j-1)) F_j(f(x)^{-1}A_j)$$

If (PAC) holds, $F_j(f(x)^{-1}A_j) \geq b\lambda(B_j \cap f(x)^{-1}A_j)$.

The function $g(u) = \lambda(B_j \cap u^{-1}A_j)$ is continuous (see introduction), and is positive for all $u \in f(I_{j-1})$ (condition 4.1.1).

Therefore, if $f(I_{j-1})$ is compact, we have, $a = \inf\{g(u) : u \in f(I_{j-1}\quad)\} > 0$, which implies $P^{n+1}(z, A) \geq abP^n(z, I_{j-1} \times (j-1))$, or $G_{1,n}(z, A) \geq abG_{1,n}(z, I_{j-1} \times (j-1))$, for all n.

Consequently, $G_1(z, A) = \infty$, and the chain is 1-recurrent. φ-recurrence results then from proposition 4.2.

Examples

Under the assumption (D), and the following assumption : "there exist $z \in Z$ and $D = \bigcup D_j \times j \in \mathcal{F}$ with $f(D_j)$ relatively compact and $G_1(z, D_j \times j) = \infty$, for all j", the chain is φ-irreducible and φ-recurrent in models 1 (see proposition 8 p. 38 [3] for the aperiodic case) and 2.

Proof

Suppose (D) and that the chain satisfies model 1. It was proved in the examples of proposition 1.1, that the chain was φ-irreducible.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Now, let $A = A_j \times j \subset \mathcal{F}_\varphi^+$.

$$P^{n+1}(z, A) \geq \int P^n(z, dx \times (j-1))\psi_j \lambda(f(x)^{-1} A_j)$$

The function $g(u) = \psi_j \lambda(u^{-1} A_j)$ is a continuous function of u, and is positive for all $u \in E$, under (D), whenever A_j with $\lambda(A_j) > 0$. Therefore, let $D_{j-1} \subset C_{j-1}$ such that $f(D_{j-1})$ is relatively compact. Then $a = \inf\{g(u) : u \in f(D_{j-1})\} > 0$, and therefore, $G_{1,n}(z, A) \geq a G_1(z, D_{j-1} \times (j-1)) = \infty$.

The proof is the same for model 2.

Proposition 4.2

Under the assumption (PAC), if the chain is φ-irreducible and 1-recurrent, then it is φ-recurrent (see Lemma 4 p. 36 [3] for the aperiodic case).

Proof

The following result is used :

Lemma 2.2 (Tweedie, 1975, p. 388).

Let $\{x_n\}$ be a Markov chain taking values in $(x, \mathcal{F})$. If $\{x_n\}$ is 1-recurrent, then for any $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, there is a φ-null set $N(A)$ such that $F(x, A) \equiv 1$, for all $x \notin N(A)$; if $\mathcal{F}$ is countably generated, there is a φ-null set N such that $N(A) \subset N$ for all A (remark : if E is metric, then $\mathcal{F}$ is countably generated).

To prove the proposition, it is sufficient to prove $F(x, A) = 1$, for all $x \in N(A)$.

We have

$$\begin{aligned} F(x, A) &\geq 1 - P_x(\bigcap_{j=1}^{n} x_j \in A^c \cap N(A)), \text{ for all } x \in N(A) \\ &\geq 1 - P_x(\bigcap_{j=1}^{n} x_j \in N(A)) \ ([3] \text{ p.36}) \end{aligned}$$

And then, it is sufficient to prove that $P_x(\bigcap_{j=1}^{n} x_j \in N(A)) \to 0$, when $n \to \infty$.

We apply this, to our cyclic chain $\{z_n\}$. Let denote $N = N(A)$.

$N = \bigcup_{j=1}^{n} N_j \times j$, $\varphi(N) = 0 \Leftrightarrow \lambda(N_j) = 0$, for all j.

The assumption (PAC) means that : $F_j = \varphi_j \lambda_{\Omega_j} + \nu_j$, with $\nu_j(\Omega_j) < 1$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Consequently, $F_j(\mathcal{N}_j) = \nu_j(\mathcal{N}_j) \leq \nu_j(\Omega_j) < 1$.

Suppose $z \in C_d \times d$ and $n = ld + j$

$$P_z(\bigcap_{m=1}^{n} z_m \in \mathcal{N})$$
$$= \int_{\mathcal{N}_{j-1} \times \mathcal{N}_{j-2} \times \ldots} P(z_n \in \mathcal{N}_j \mid z_{n-1} = y_1).P_z(z_{n-1} = dy_1, \ldots, z_1 = dy_{n-1})$$

But $P(z_n \in \mathcal{N}_j \mid z_{n-1} = y_1) = F_j(f(x_1)^{-1}\mathcal{N}_j) = \nu(f(x_1)^{-1}\mathcal{N}_j) < \nu(\Omega_j)$ (where $y_1 = (x_1, (j-1))$). Then,

$$P_z(\bigcap_{m=1}^{n} z_m \in \mathcal{N}) < P_z(\bigcap_{m=1}^{n-1} z_m \in \mathcal{N}).\nu(\Omega_j)$$

By recurrence we obtain :

$$P_z(\bigcap_{m=1}^{n} z_m \in \mathcal{N}) < \prod_{m=1}^{n} \nu(\Omega_{m \pmod d})$$

where

$$\prod_{m=1}^{n} \nu(\Omega_{m \pmod d}) = \left(\prod_{m=1}^{d} \nu(\Omega_m)\right)^l . \prod_{m=1}^{j} \nu(\Omega_m)$$

tends to 0 when n tends to ∞.

And then, $F(z, \mathcal{A}) = 1$, for all $z \in \mathcal{N}$.

Let the following assumption :

(OR) : for every open set $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$, and for all $z \in Z$, $G_1(z, G) = \infty$

Remark : (OR) $\Rightarrow$ (OI)

Proposition 4.3

Under the assumptions (H) and (OR), the chain is φ-irreducible and φ-recurrent.

Proof

Let $\mathcal{A} = \mathcal{A}_j \times j \in \mathcal{F}_\varphi^+$. There exists an open set $O_j \subset \mathcal{A}_j$ such that $\lambda(O_j) > 0$. Consequently, $G_1(z, \mathcal{A}_j \times j) \geq G_1(z, O_j \times j) = \infty$, and therefore, the chain is φ-irreducible and 1-recurrent. φ-recurrence follows from proposition 4.2.

The following proposition supposes a condition of the same type that condition (4.1.1).

Proposition 4.4

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Under the assumptions (OR), (PAC) and the following assumption (4.4.1), the chain is φ-irreducible and φ-recurrent :

For all $A \in \mathcal{I}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$,

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} \text{there exists an open set } O_{j-1} \subset C_{j-1} \\ \text{with } \lambda(O_{j-1}) > 0, \text{ and } c > 0 \text{ such that,} \\ \lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) > c, \text{ for all } x \in O_{j-1} \end{cases}$$

Proof

We prove in the same way as proposition 1.3, that, for all $u > 0$,

$$G_{u,n}(z, A) \geq bu \int_{C_{j-1}} G_{u,n}(z, dx \times (j-1)) \lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) ,$$

which implies, under (4.4.1), that, $G_u(z, A) \geq bucG_u(z, O_{j-1} \times (j-1))$.

Then φ-irreducibility and 1-recurrence result from (PAC) and (OR), and φ-recurrence follows from proposition 4.2.

Corollary

Under the assumptions (OR), (PAC), f continuous on each C_j, (1.3.1) and E metric, the chain is φ-irreducible and φ-recurrent.

Proof

Suppose (PAC) holds. It is sufficient to prove that the assumptions "f continuous on each C_j", E metric and (1.3.1) imply (4.4.1).

It can always be assumed that the set O_{j-1} in (1.3.1) is relatively compact. Then, if E is metric, $O_{j-1} = \bigcup_n K_n$, where the sets K_n form an increasing sequence of compact sets. $K_n = \bigcap_{x \notin O_{j-1}} B(x, \frac{1}{n})^c$. Therefore, there exists K_n with $\lambda(K_n) > 0$ such that $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) > 0$, for all $x \in K_n$. As f is continuous, $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j)$ is a continuous (and positive) function of x. Then, it attains its minimum on K_n, that is, there exists $c > 0$ such that, $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) \geq c$, for all $x \in K_n$.

Let $x_0 \in \delta K_n$ (where $\delta K_n = K_n \setminus \mathring{K}_n$), and let $\epsilon > 0$, with $\epsilon < c$. Then, there exists a neighborhood $\mathcal{V}(x_0)$ of x_0 such that $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) > c - \epsilon$, for all $x \in \mathcal{V}(x_0)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

And then, there exists a neighborhood $\mathcal{V}(K_n) \subset O_{j-1}$ of K_n such that $\lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) > c - \epsilon$, for all $x \in \mathcal{V}(K_n)$. Now, $K_n = \bigcap_m O_m$, where the sets $\{O_m\}$ form a decreasing sequence of open sets. $O_m = \bigcup_{x \in K_n} B(x, \frac{1}{m})$. Therefore, there exists O_p such that $K_n \subset O_p \subset \mathcal{V}(K_n)$. Then O_p and $c - \epsilon$ satisfy (4.4.1).

Examples

Under the assumptions (OR), (PAC), continuity of f on each C_j and E metric, the chain is φ-irreducible and φ-recurrent in models 1 (with $f(E) = E$) (see proposition 11 p. 40 [3] for the aperiodic case), and 2 (with $B_j = \Omega_j$).

Proof

see examples of proposition 1.3, as well as the previous corollary.

From now on, we suppose that E is metric.

Let $R_z = \{(y, j) \in Z$, for all $\epsilon > 0$, $G_1(z, B_{C_j}(y, \epsilon) \times j) = \infty\}$, where $B_{C_j}(y, \epsilon) = B(y, \epsilon) \cap C_j$.

(OR) is satisfied if $R_z = Z$, for all $z \in Z$.

Proposition 4.5

1. If there exist $z \in Z$ and a compact $K \subset Z$ such that $G_1(z, K) = \infty$, then $R_z \neq \emptyset$.
2. If f is continuous on C_j, for all j, then $f(R_{z,j-1})\Omega_j \subset R_{z,j}$ where $R_{z,j} = trace_{C_j}(R_z \cap C_j \times j)$ (see proposition 14 p. 41 [3] for the aperiodic case).

Proof

1. See Doukhan P. and Ghindès M. p. 41 [3].
2. Let $B(a, \epsilon) \subset C_{j-1}$ and $B(f(a)s_j, 2\epsilon') \subset C_j$, where $s_j \in \Omega_j$, and $\epsilon < \epsilon'$.

   Let $z \in C_k \times k$, and $n = (j - k) + ld$.

   Recall that $G_{z,n}(A_j) = P(x_n \in A_j \mid z_0 = z)$

   We prove that

$$(1)\ G_{z,n+1}(B(f(a)s_j, 2\epsilon')) \geq F_j(B(s_j, \epsilon)) G_{z,n}(B(a, \epsilon))$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

which implies,

$$(1')\ G_1(z, B(f(a)s_j, 2\varepsilon')) \geq F_j(B(s_j, \varepsilon))G_1(z, B(a, \varepsilon))$$

Moreover, as $s_j \in \Omega_j$, $F_j(B(s_j, \varepsilon))$ is positive, and therefore, if $G_1(z, B(a, \varepsilon)) = \infty$, (1') implies that $G_1(z, B(f(a)s_j, 2\varepsilon') = \infty$, that is, when $a \in R_{z,j-1}$, then $f(a)s_j \in R_{z,j}$, i.e. $f(R_{z,j-1})s_j \subset R_{z,j}$.

So, we have to prove (1).

$$G_{z,n+1}(B(f(a)s_j, 2\varepsilon')) = \int P^n(z, dy \times (j-1))P((y,(j-1)), B(f(a)s_j, 2\varepsilon'))$$

But $P((y, j-1), B(f(a)s_j, 2\varepsilon') = F_j(B(f(y)^{-1}f(a)s_j, 2\varepsilon'))$

Morevoer, if f is continuous on C_{j-1}, $d(y,a) \leq \varepsilon \Rightarrow d(f(y), f(a)) \leq \varepsilon'$.

But, $d(x, f(y)^{-1}f(a)s_j) \leq d(x, s_j) + d(f(y), f(a))$, therefore, if $d(y,a) \leq \varepsilon$ and if $d(x, s_j) \leq \varepsilon$, $d(x, f(y)^{-1}f(a)s_j) \leq \varepsilon + \varepsilon'$, that is, $B(s_j, \varepsilon) \subset B(f(y)^{-1}f(a)s_j, \varepsilon + \varepsilon')$ when $y \in B(a, \varepsilon)$.

Consequently,

$$\begin{aligned} G_{z,n+1}(B(f(a)s_j, 2\varepsilon') &\geq \int_{B(a,\varepsilon)} P^n(z, dy \times (j-1)) \\ &\quad F_j(B(f(y)^{-1}f(a)s_j, \varepsilon + \varepsilon')) \\ &\geq F_j(B(s_j, \varepsilon))G_{z,n}(B(a, \varepsilon)) \end{aligned}$$

Proposition 4.6

If Z is of second category, (AC) holds, the chain is φ-irreducible, f is continuous on each C_j and $\{z : R_z \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}_\varphi^+$, then the chain is 1-recurrent in models 1 and 2.

Proof

We use the corollary following Tweedie's proposition 2.3.

Proposition 4.7

Suppose the chain is φ-irreducible. If there exists $z \in Z$ such that $R_z \neq \emptyset$, if f is continuous on each C_j and if relations (R) holds, then the chain is 1-recurrent.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Proof

$R_z \neq \emptyset$, f continuous on each C_j and (R) hold, imply $R_z = Z$. Then there exists $A \in \mathcal{F}_\mu$ such that $G_1(z, A) = \infty$. 1-recurrence follows then from Tweedie's lemma 1.2.

Examples

Suppose (PAC) (resp. (D)). If every open set $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$ is attainable (i.e $I(G) \neq \emptyset$, for all $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$), if f is continuous on each C_j and if there exist $z \in Z$ and a compact $K \in Z$ such that $G_1(z, K) = \infty$, then the chain is φ-recurrent in models 1 (with $f(E) = E$, under (PAC)) and 2.

Remark : we obtain here some sufficient conditions for recurrence, similar to those found in the examples of proposition 4.1, by other methods than only Markov ones.

Proof

According to propositions 1.5 and 1.3, the chain is φ-irreducible, and according to proposition 4.5 and 4.7, it is 1-recurrent. φ-recurrence results then from proposition 4.2.

Proposition 4.8

Under the assumption (PAC), a sufficient condition for $\{z_n\}$ to be φ-irreducible and uniformly φ-recurrent, is the following one :

for all $A_j \times j \in \mathcal{F}_\varphi^+$, for all $k \in (1, ..., d)$,

$$(4.8.1) \quad \begin{cases} \text{(1.1.1) holds with } I_{j-n} \text{ satisfying} \\ \lambda(B_{j-n} \cap f(x)^{-1} J_{j-n}) > \varepsilon_{J_{j-n}}, \\ \text{for all } x \in J_{j-n},\ n = 1, ..., j - k + ld + 1 \end{cases}$$

Proof

φ-irreducibility results from proposition 1.1.

The following Orey's proposition is used :

Proposition 6.1 (Orey, 1971, p. 29)

Let $\{x_n\}$ be a Markov chain taking values in $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ with homogeneous transition probabilities.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

If for every $A \in \mathcal{I}_\varphi^+$, there exist $n > 0$ and $\varepsilon > 0$ such that $F_n(x, A) > \varepsilon_n$, for all $x \in \mathcal{X}$, then, $\{x_n\}$ is uniformly φ-recurrent.

Let $z = (x_0, k)$ and $\mathcal{A} = \mathcal{A}_j \times j$.

There exists $m = j - k + ld$ such that $z_m \in C_j \times j$.

$$\begin{aligned} P^m(z, \mathcal{A}) &= \int_{C_{j-1}} F_j(f(x)^{-1}\mathcal{A}_j) G_{z,m-1}(dx) \\ &\geq b\varepsilon_{\mathcal{A}_j} P^{m-1}(z, J_{j-1} \times (j-1)) \end{aligned}$$

By iterating, we obtain, $P^m(z, \mathcal{A}) \geq b^m \varepsilon_{\mathcal{A}_j} \varepsilon_{J_{j-1}} \ldots \varepsilon_{J_{j-m+1}}$.

Let denote $\varepsilon_{\mathcal{A},m} = b^m \varepsilon_{\mathcal{A}_j} \varepsilon_{J_{j-1}} \ldots \varepsilon_{J_{j-m+1}}$.

For $j > k$, and $n \geq j - k$, $F^n(z, \mathcal{A}) \geq P^{j-k}(z, \mathcal{A}) \geq \varepsilon_{\mathcal{A},j-k}$.

And, for $j \leq k$, and $n \geq d + j - k$, $F^n(z, \mathcal{A}) \geq P^{d+j-k}(z, \mathcal{A}) \geq \varepsilon_{\mathcal{A},d+j-k}$.

Then according to Orey's proposition, the chain is uniformly φ-recurrent.

Examples

Under the assumption (D), the chain is φ-irreducible and uniformly φ-recurrent in the model 2.

Proof

The chain is φ-irreducible according to proposition 1.1 : (1.1.1) holds with $J_{j-1} = C_{j-1}$, ..., $J_{j-k+ld+1} = C_{k+1}$.

Moreover, $F_j(f(x)^{-1}\mathcal{A}_j) \geq \psi_j \lambda(\Omega_j \cap a_{j-1}^{-1}\mathcal{A}_j)$ which is a positive function, for all $x \in C_{j-1}$.

Put $\varepsilon_{\mathcal{A}_j} = \psi_j \lambda(\Omega_j \cap a_{j-1}^{-1}\mathcal{A}_j)$, and then (4.8.1) is satisfied.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.5 ERGODICITY

Let μ be a fixed subinvariant measure for $\{z_n\}$ (with μ taken to be the invariant measure Π if $\{z_n\}$ is ergodic).

Lemma 2.3 (Tweedie, 1975, p. 390)

If the chain is 1-recurrent, then

- either, it is ergodic, i.e. for all $A \in \mathcal{F}$, $\lim \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = \Pi(A)$, for all $z \notin N(A)$, where $\varphi(N(A)) = 0$ (when $\mathcal{F}$ is countably generated, $N(A) \subset N$ for all $A \in \mathcal{F}$, where $\varphi(N) = 0$ (Lemma 2.2 (Tweedie, 1975, p. 388)))
- or, $\lim \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = 0$, for all $z \in Z$, $A \in \mathcal{F}_\mu$.

Remarks

1. according to proposition 4.2, under (PAC), 1-recurrence is equivalent to φ-recurrence (i.e. $N(A) = \emptyset$, for all $A \in \mathcal{F}$) and therefore, ergodicity is equivalent to Harris ergodicity.
2. $\lim_n \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A)$ do not always exist in $\overline{\mathrm{R}}$, when the chain is non-ergodic.

Consequences

Suppose the chain is 1-recurrent.

- If there exist $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}_\mu$ such that $\lim \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = 0$, we cannot deduce that the chain is non ergodic or ergodic, for in the case of ergodicity, $\Pi(A)$ can be null. But, as we saw in the remark following Tweedie's lemma 2.1 (§ 4), if f is continuous on each C_j, if (AC) holds, if the chain is 1-recurrent and if there exist a relatively compact set $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ and $z \in Z$ such that $\lim \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = 0$, then a chain which satisfies model 1 or 2, is non ergodic.
- If there exist $z \in Z$ and $A \in \mathcal{F}_\mu$ such that $\overline{\lim} \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$, (or $\underline{\lim} \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$, which implies $\overline{\lim} \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$), then the chain is ergodic, and consequently, $\overline{\lim} \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = \underline{\lim} \frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = \Pi(A)$, for all $z \notin N(A)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- If $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$ (cf § 4), and if for all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$, there exists $z \in Z$ such that $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$, then the chain is ergodic.

Remarks : according to the remark following Tweedie's lemma 2.1, we have the following results :

Under (PAC), $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$.

And, under (AC) and continuity of f on each C_j, if the chain is φ-irreducible, and if there exist $z \in Z$ and a relatively compact set $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ such that $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$, then the chain is 1-recurrent and ergodic in models 1 and 2. $\left(\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0 \text{ implies } \overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) = \infty\right)$.

Proposition 5.1

Under the assumption (PAC), a sufficient condition for a φ-irreducible chain to be φ-recurrent and ergodic, is the following one :

For all $A \in \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$,

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} \text{there exist } z \in Z \text{ and } J_{j-1} \subset C_{j-1} \text{ such that} \\ f(J_{j-1}) \text{ is compact, } \lambda(B_j \cap f(x)^{-1} A_j) \text{ is positive,} \\ \text{for all } x \in J_{j-1}, \text{ and } \overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, J_{j-1} \times (j-1)) > 0 \end{cases}$$

Proof

Under (PAC), $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$. Then, let $A \in \mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$. We prove in the same way as proposition 4.1 that $P^{i+1}(z, A) \geq aP^i(z, J_{j-1} \times (j-1))$, for all $i \in \mathbb{N}$, and therefore $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$, which implies $G_1(z, A) = \infty$.

Then, φ-recurrence results from proposition 4.1, and ergodicity, from Tweedie's lemma 2.3.

Examples

Under the assumption (D) and the following assumption : there exist $z \in Z$ and $D \in \mathcal{F}$ with $D = \bigcup_j D_j \times j$, such that for all j, $f(D_j)$ is relatively compact, and $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, D_j \times j) > 0$, then the chain is φ-irreducible, φ-recurrent and ergodic in

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

models 1 (see proposition 3 p. 52 [3] for the aperiodic case) and 2. (for the proof, see the examples following proposition 4.1).

Let the following assumption,

(OE), for all $z \in Z$ and all open set $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$, $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, G) > 0$.

Remark : (OE) $\Rightarrow$ (OR) $\Rightarrow$ (OI).

Proposition 5.2

Under the assumptions (H), (PAC) and (OE), the chain is φ-irreducible and Harris ergodic.

Proof

We prove in the same way as for proposition (4.3), that for all $A = A_j \times j \in \mathcal{F}_\varphi^+$, $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) > 0$. φ-irreducibility and φ-recurrence follow from proposition 4.3. Moreover, assumption (PAC) implies $\mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+ \neq \emptyset$. Then, according to Tweedie's lemma 2.3, the chain is ergodic.

Proposition 5.3

Under the assumptions (D) (resp. (PAC)), (OE) and (1.3.1), the chain is φ-irreducible and Harris ergodic.

Proof

φ-irreducibility results from proposition 1.3.

Let $A \in \mathcal{F}_\mu \cap \mathcal{F}_\varphi^+$ with $A = A_j \times j$, and let O_{j-1} satisfy (1.3.1). We have,

$$P^{i+1}(z, A) \geq \int P^i(z, dx \times (j-1)) F_j(f(x)^{-1} A_j)$$

Therefore

$$\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, A) \geq \int \overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, dx \times (j-1)) F_j(f(x)^{-1} A_j)$$

The second member of this inequality is positive if (1.3.1) and (OE) are satisfied. Then 1-recurrence results from Tweedie's lemma 2.1 and ergodicity, from Tweedie's leamma 2.3. Finally, φ-recurrence is satisfied according to proposition 4.2.

Examples

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Under the assumptions (PAC) (resp. (D)), continuity of f on each C_j and (OE), then models 1 (with $f(E) = E$, under (PAC)) (see proposition 6 p. 54 [3] for the aperiodic case) and 2 (with $B_j = \Omega_j$ for this model) are Harris ergodic.

Proof

Continuity of f on each C_j, together with $f(E) = E$, under (PAC) for model 1, imply (1.3.1) in these models (see the examples following proposition 1.3).

Let $E_z = \left\{(y,j) \in Z : \text{for all } \varepsilon > 0,\ \overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z, B(y,\varepsilon) \times j) > 0\right\}$.

(OE) holds if $E_z = Z$, for all $z \in Z$.

Proposition 5.4

1. If there exist $z \in Z$ and a compact $K \subset Z$ such that $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z,K) > 0$, then $E_z \neq \emptyset$.

2. If f is continuous on each C_j, then, $f(E_{z,j-1})\Omega_j \subset E_{z,j}$, for all j. (where $E_{z,j} = trace_{C_j}(E_z \cap C_j \times j)$). (see proposition 8 p. 54 [3] for the aperiodic case).

Proof

We follow the proof of proposition 4.5.

Consequences

Proposition 5.5

Suppose the chain is φ-irreducible. If there exists $z \in Z$ such that $E_z \neq \emptyset$, if f is continuous on each C_j and if relations (R) hold, then the chain is ergodic.

Proof

$E_z \neq \emptyset$, f continuous on each C_j and (R) hold, imply $E_z = Z$. Then there exists $A \in \mathcal{F}_\mu$ such that $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z,A) > 0$, which implies $G_1(z,A) = \infty$.

Then, 1-recurrence and ergodicity result respectively from Tweedie's lemma 1.2 and 2.3.

Examples

Suppose (PAC) (resp. (D)). If every open set $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$ is attainable (i.e. $I(G) \neq \emptyset$, for all $G \in \mathcal{F}_\varphi^+$), if f is continuous on each C_j and if there exist $z \in Z$ and a compact $K \subset Z$ such that $\overline{\lim}\frac{1}{n} G_{1,n}(z,K) > 0$, then the chain is Harris ergodic in models 1 (with

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$f(E) = E$ under (PAC)) (see proposition 10 p. 55 [3] for the aperiodic case) and 2 (for the proof, see the examples following proposition 4.7).

Remark : we have obtained here some sufficient conditions for ergodicity similar to those found for the examples of proposition 5.1, by other methods, than only Markov ones.

Theorem (Tweedie, 1983)

Let $\{x_n\}$ be a Markov chain with homogeneous transition probabilities, and taking values in $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ where $\mathcal{X}$ is a locally compact, separable, complete and metric space. Suppose that $\{x_n\}$ is weakly continuous, that there exists a measure φ and a compact set A with $\varphi(A) > 0$ such that,

i) $\{x_n\}$ is φ-irreducible

ii) there exists a non negative continuous function $g : \mathcal{X} \to \mathrm{R}$ satisfying

$$(1)\ g(x) \geq 1 \text{ for } x \in A$$

and for some $\delta > 0$,

$$(2)\ E[g(x_{n+1}) \mid x_n = x] \leq (1 - \delta)g(x),\ x \in A^c$$

then, $\{x_n\}$ is geometrically ergodic.

Applying this theorem to our cyclic model, we obtain the following result :

Corollary

Suppose E is separable, complete and metric. Suppose also that $e \in \Omega_j$, for all j.

If $\{z_n\}$ is φ-irreducible, then a sufficient condition for $\{z_n\}$ to be geometrically ergodic, is the following one :

for all j, f is continuous on C_j, and there exist $\delta > 0$, a compact set $A_j \subset C_j$ and $a_j \in \mathring{A}_j$ such that $d_E(a_{j+1}, f(x)) \leq (1 - \delta)d_E(a_j, x) - \delta - c_{j+1})$, for all $x \in C_j \setminus A_j$, for all j, where $c_{j+1} = E(d_E(e, \varepsilon_{n+1,j+1}))$.

Proof

Z is L.C.S., complete and metric. $\{z_n\}$ is φ-irreducible and weakly continuous (proposition 2.2).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Let $z = (x, j) \in C_j \times j$, and $g(z) = d((a_j, j), z) + 1 = d_E(a_j, x) + 1$. $g(z) \geq 1$, for all $z \in Z$; then (1) is satisfied.

Now,

$$\begin{aligned} E[g(z_{n+1}) \mid z_n = z] &= E[d_E(a_{j+1}, x_{n+1}) + 1 \mid z_n = z] \\ &= E[d_E(a_{j+1}, f(x) + \epsilon_{n+1,j+1}) + 1] \\ &\leq d_E(a_{j+1}, f(x)) + E d_E(e, \epsilon_{n+1,j+1}) + 1 \\ &\leq d_E(a_{j+1}, f(x)) + c_{j+1} + 1 \end{aligned}$$

Then (2) is satisfied if,

$$d_E(a_{j+1}, f(x)) + c_{j+1} + 1 \leq (1 - \delta)(d_E(a_j, x) + 1)$$

i.e.

$$d_E(a_{j+1}, f(x)) \leq (1 - \delta) d_E(a_j, x) - c_{j+1} - \delta \ ,$$

for all $x \in C_j \setminus A_j$.

Example

If Z is compact, that is the C_j are all compact sets and d is finite, then if f is continuous on each C_j and if the chain is φ-irreducible, it is geometrically ergodic (it is sufficient to take $A_j = C_j$, for all j and $g(z) = 1$, for all $z \in Z$).

Remark : corollary 3.1 proved that if Z is compact and if f is continuous on each C_j, then the chain has an invariant probability. Moreover, if the chain is φ-irreducible, then it is ergodic. Under the same assumptions, Tweedie's theorem proves not only ergodicity but geometric ergodicity.

In conclusion, φ-irreducibility is much more difficult to obtain in general in a compact cycle than when some C_j are not compact. But, once it is satisfied, ergodicity, and even geometric ergodicity are nearly immediate in compact cycles, contrary to non-compact ones.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

3.6 ASYMPTOTIC STATIONARITY

Let $\{z_n\}$ be φ-recurrent and ergodic. Then, $\{z_n\}$ satisfies :

$$\lim_n \| \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \int P_z^{n+k}(.)\nu(dz) - \Pi(.) \| = 0 \ ,$$

for all initial probability ν, where $\| \ \|$ is the norm of the total variation. (theorem 7.1 p. 30, Orey, 1971).

$\{z_n\}$ is called asymptotically stationnary if

$$\lim_m \| \int P_z^m(.)\nu(dz) - \Pi(.) \| = 0$$

for some ν. (if $d = 1$, this is satisfied, according to Orey's theorem 7.1).

Proposition 6.1

If $\{z_n\}$ is φ-recurrent and ergodic, then a necessary and sufficient condition for $\{z_n\}$ to be asymptotically stationary is that φ_0 has a uniform probability law on $\{1, ..., d\}$.

Proof

Intuitively, it is clear.

Suppose then, that $\{z_n\}$ is φ-recurrent and ergodic, that is, $A_n(.,j) \to \Pi(.,j)$, when $n \to \infty$ (for the total variation norm), where

$$A_n(dv, j) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \int_{C_{j-(n+k)}} P(x_{n+k} = dv, \varphi_{n+k} = j \mid x_0 = v_0, \varphi_0 = j - (n+k)) \nu(dv_0, j - (n+k))$$

We have,

$$\begin{aligned} & \nu(dv_0, j - (n+k)) \\ = \ & P(x_0 = dv_0 \mid \varphi_0 = j - (n+k)) P(\varphi_0 = j - (n+k)) \\ = \ & P_{j-(n+k)}(dv_0) P_{\varphi_0}(j - (n+k)) \end{aligned}$$

(notation) and,

$$P(x_m = dv_m, \varphi_m = j \mid x_0 = v_0, \varphi_0 = j - m)$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$
\begin{aligned}
&= P(x_m = dv_m \mid x_0 = v_0, \varphi_m = j) P(\varphi_m = j \mid x_0 = v_0, \varphi_0 = j - m) \\
&= P(x_m = dv_m \mid x_0 = v_0, \varphi_m = j) \\
&= \int_{C_{j-1}} P(x_m = dv_m \mid x_{m-1} = v_{m-1}, \varphi_{m-1} = j - 1) \\
&\quad P(x_{m-1} = dv_{m-1} \mid x_0 = v_0, \varphi_{m-1} = j - 1)
\end{aligned}
$$

Denote

$$
P(dv_m \mid v_{m-1}, j - 1) = P(x_m = dv_m \mid x_{m-1} = v_{m-1}, \varphi_{m-1} = j - 1)
$$

Then, by iteration,

$$
\begin{aligned}
&P(x_m = dv_m \mid x_0 = v_0, \varphi_m = j) \\
= &\int_{C_{j-1}} P(dv_m \mid v_{m-1}, j - 1) \int_{C_{j-2}} P(dv_{m-1} \mid v_{m-2}, j - 2) \ldots \\
&\int_{C_{j-(m-1)}} P(dv_2 \mid v_1, j - (m - 1)) P(x_1 = dv_1 \mid x_0 = v_0, \varphi_1 = j - (m - 1))
\end{aligned}
$$

Then,

$$
\begin{aligned}
&P(x_m = dv_m \mid \varphi_0 = j - m) \\
= &\int_{C_{j-m}} P(x_m = dv_m \mid x_0 = v_0, \varphi_m = j) P(x_0 = dv_0 \mid \varphi_0 = j - m) \\
= &\int_{C_{j-1}} P(dv_m \mid v_{m-1}, j - 1) \ldots \\
&\int_{C_{j-(m-1)}} P(dv_2 \mid v_1, j - (m - 1)) \int_{C_{j-m}} P(dv_1 \mid v_0, j - m) . P_{j-m}(dv_0)
\end{aligned}
$$

Let

$$
O_j \circ \mu(.) = \int_{C_{j-1}} P(. \mid v, j - 1) \mu(dv)
$$

Therefore,

$$
P(x_m = dv_m \mid \varphi_0 = j - m) = \{O_j \circ O_{j-1} \circ \ldots \circ O_{j-(m-1)} \circ P_{j-m}\}(dv_m)
$$

Then,

$$
A_n(dv, j)
$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\int_{C_{j-(n+k)}} P(x_{n+k} = dv \mid x_0 = v_0, \varphi_0 = j-(n+k))$$
$$P_{j-(n+k)}(dv_0)P_{\varphi_0}(j-(n+k))$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\int_{C_{j-(n+k)}} P(x_{n+k} = dv \mid \varphi_0 = j-(n+k))P_{\varphi_0}(j-(n+k))$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} O_j \circ O_{j-1} \circ \ldots \circ O_{j-(n+k-1)} \circ P_{j-(n+k)}(dv)P_{\varphi_0}(j-(n+k))$$

Therefore,

$$A_n(dv, j)$$
$$= \frac{1}{d}[O_j \circ \ldots \circ O_{j-(n-1)} \circ P_{j-n}(dv)P_{\varphi_0}(j-n)$$
$$+ O_j \circ \ldots \circ O_{j-(n-1)} \circ O_{j-n} \circ P_{j-(n+1)}(dv)P_{\varphi_0}(j-(n+1))$$
$$+ \vdots$$
$$+ O_j \circ \ldots \circ O_{j-(n+d-2)} \circ P_{j-(n+d-1)}(dv)P_{\varphi_0}(j-(n+d-1))]$$

Let $O_{(n)} = O_j \circ \ldots \circ O_{j-(n-1)}$

$$A_n(dv, j)$$
$$= \frac{1}{d}[O_{(n)} \circ P_{j-n}(dv)P_{\varphi_0}(j-n)$$
$$+ O_{(n)} \circ O_{j-n} \circ P_{j-(n+1)}(dv)P_{\varphi_0}(j-(n+1))$$
$$+ \vdots$$
$$+ O_{(n)} \circ O_{j-n} \circ \ldots \circ O_{j-(n+d-2)} \circ P_{j-(n+d-1)}(dv)P_{\varphi_0}(j-(n+d-1))]$$

But $A_n \to \Pi$, for all initial law ν.

Then, let $P_{j-(n+d-1)}(dv)$ be any probability law on $C_{j-(n+d-1)}$, and,

$$P_{j-n} = O_{j-n} \circ \ldots \circ O_{j(n+d-2)} \circ P_{j-(n+d-1)}$$
$$P_{j-(n+1)} = O_{j-(n+1)} \circ \ldots \circ O_{j(n+d-2)} \circ P_{j-(n+d-1)}$$
$$\vdots$$
$$P_{j-(n+d-2)} = O_{j-(n+d-2)} \circ P_{j-(n+d-1)}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Thus,

$$\begin{aligned} & A_n(dv, j) \\ = \; & \frac{1}{d}[O_{(n)} \circ O_{j-n} \circ \ldots \circ O_{j-(n+d-2)} \circ P_{j-(n+d-1)}(dv) \\ & (P_{\varphi_0}(j-n) + P_{\varphi_0}(j-(n+1)) + \ldots + P_{\varphi_0}(j-(n+d-1)))] \\ = \; & \frac{P(x_{n+d-1} = dv \mid \varphi_0 = j-(n+d-1))}{d} \end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned} & P(x_{n+d-1} = dv, \varphi_{n+d-1} = j) \\ = \; & P(x_{n+d-1} = dv \mid \varphi_0 = j-(n+d-1)).P_{\varphi_0}(j-(n+d-1)) \end{aligned}$$

Therefore, for n sufficiently large

$$P(x_{n+d-1} = dv, \varphi_{n+d-1} = j) \simeq d\Pi(dv, j).P_{\varphi_0}(j-(n+d-1))$$

Consequently, the limit of $P(x_{n+d-1} = dv, \varphi_{n+d-1} = j)$ do not depend on n, when n tends to infinity, if and only if the $P_{\varphi_0}(k)$ are all equal to $\frac{1}{d}$. In this case, $P(x_{n+d-1} = dv, \varphi_{n+d-1} = j) \to \Pi(dv, j)$.

Examples

$C_j = \{a_j\}$ with $f(a_j) = a_{j+1}$ for all j. $\Omega_j = \{e\}$

The rhythm is deterministic except to a random phasing φ_0.

$$\begin{aligned} & A_n(a_j, j) \\ = \; & \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P(x_{n+k} = a_j, \varphi_{n+k} = j \mid x_0 = a_{j-(n+k)}, \varphi_0 = j-(n+k)). \\ & \nu(a_{j-(n+k)}, j-(n+k)) \\ = \; & \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_{\varphi_0}(j-(n+k)) \\ = \; & \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P(\varphi_{n+k} = j) \end{aligned}$$

Then, the chain is stationnary (and not only asymptotically stationnary) if φ_{n+k} (or φ_0) has a uniform probability law on $\{1, \ldots, d\}$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] CONZE, J.P. (1974). Systèmes topologiques et métriques en théorie ergodique. in : Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IV. Lecture notes in Mathematics 480. Springer-Verlag-Berlin, 97-187.

[2] DACUNHA-CASTELLE, D. ; DUFLO, M. (1983). Probabilités et statistiques- tome 2- problèmes à temps mobile. Masson, Paris.

[3] DOUKHAN, P. ; GHINDES, M. (1980). Etude des processus $X_n = f(X_{n-1}) + \epsilon_n$. Thèse de 3ème cycle. Université Paris-Sud, Departement de Mathématique, Orsay, France.

[4] FOGUEL, S.R. (1969). The ergodic theory of Markov processes. Van Nostrand Mathematical Studies, London.

[5] JACOB, C. (1985). Random Oscillations Modelling. In : Time Series Analysis : Theorey and Practice 7- ed : O.D. Anderson- North-Holland - Amsterdam, 139-156.

[6] JACOB, C. (1987). Stochastic limit cycles and confiners : definitions and comparative study in the case of Markovian processes. ed par F. Droesbeke- Publications des Facultés Universitaires Saint-Louis- Bruxelles.

[7] LOOMIS, L.H. (1963). An introduction to abstract harmonic analysis. Van Nostrand Company - Princeton.

[8] NUMMELIN, E. (1984). General irreducible Markov chains and negative operators - Cambridge University Press - Cambridge.

[9] OREY, S. (1971). Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies - London.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

[10] POLARD, B.P. , TWEEDIE, R.L. (1976). R-theory for Markov Chains on a Topological State space.II. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 34, 269-278.

[11] REVUZ, D. (1984). Markov chain. North-Holland - Amsterdam.

[12] ROSENBLATT, M. (1971). Markov processes. Stucture and asymptotic behavior. Springer-Verlag - Berlin.

[13] TWEEDIE, R.L. (1974). R-Theory for Markov chains on a general state space I : Solidarity properties and R-recurrent chains. The Annals of Probability, vol 2, no 5, 840-864.

[14] TWEEDIE, R.L. (1975). Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space. Stochastic Processes and their Applications, 3, 385-403.

[15] TWEEDIE, R.L. (1983). Criteria for rates of convergence of Markov chains, with application to querring and storage theory. in : Probability, Statistics and Analysis (ed : J.F.C. Kingman and G.E.H. Reuter). Cambridge University Press - Cambridge.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

TROISIEME PARTIE

CYCLES LIMITES STOCHASTIQUES A TEMPS QUELCONQUE ET CONFINEURS.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 1.

CONFINEURS : UNE APPROCHE STOCHASTIQUE DES ATTRACTEURS.

J. DEMONGEOT
TIM 3 - IMAG
B.P. 68

38402 ST MARTIN D'HERES CEDEX

C. JACOB
INRA-CR-JOUY-EN-JOSAS
Laboratoire de
Biométrie
78350 JOUY-EN-JOSAS

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

0. INTRODUCTION ET RESUME

On définit l'analoque stochastique, que l'on appellera confineur, de la notion d'attracteur d'un système dynamique déterministe. On rappelle d'abord la définition générale de l'attracteur (Cosnard et Demongeot(1985)) (§I). Celle-ci utilise la caractéristique essentielle qui semble intuitivement être le propre d'un attracteur, à savoir l'invariance par la double opération qui consiste d'abord à rechercher son bassin d'attraction, puis l'ensemble limite de celui-ci. La définition est alors fondée sur cette propriété d'invariance assortie d'une condition double de maximalité pour la c-connexité de Ruelle-Bowen, et de minimalité pour l'inclusion. Cette définition a le double avantage, d'une part, de généraliser les définitions déjà existantes et d'autre part, d'être de type algorithmique, et de permettre ainsi de localiser plus facilement tout attracteur dont la localisation n'est pas a priori triviale. On développe ensuite la notion de confineur relative à un processus stochastique, à partir de nouveaux concepts comme la densité et le bassin de confinement, et la c-connexité stochastique (§II). Comme en déterministe, l'outil de base sera l'ensemble des points d'accumulation d'une trajectoire

et la définition s'appuiera sur l'algorithme de recherche du confineur à partir des propriétés de ν-invariance de ν-maximalité pour la c-connexité stochastique, puis de ν-minimalité vis-à-vis de l'intersection, où ν désigne une mesure positive et σ-finie sur l'espace d'état. Le bassin de confinement sera défini à des ensembles de mesure ν_*-négligeable près, où ν_* est une mesure positive et σ-finie sur l'espace d'etat, liée au processus. Le confineur élémentaire défini à partir des caractéristiques asymptotiques du processus, ne dépendra pas de tels ensembles ν_*-négligeables mais seulement d'ensembles ν-négligeables. S'il possède de plus une propriété de minimalité totale pour l'inclusion, il est alors parfaitement défini (c'est le cas de confineurs qui sont des ensembles discrets d'états).
On définira également la notion d'isochron stochastique qui permet de localiser les points de départ de flots de trajectoires en phase, ainsi que les notions de bifurcation géométrique ou temporelle qui désignent tout changement intervenant dans la topologie ou la description temporelle des confineurs, induit par un changement de valeur d'un paramètre de la dynamique.

1. LA NOTION D'ATTRACTEUR (Cosnard et Demongeot (1985).

Soit T l'ensemble temporel (égale à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$), X, l'espace d'état supposé métrique et compact et f_t, un semi-flot continu de XxT vers X, c'est-à-dire que $f_{t+t'}(x) = f_t \circ f_{t'}(x)$ et $f_t(x)$ est une fonction continue de t et de x, qui représente l'état à l'instant t de la trajectoire issue de x.
Le concept d'attracteur est fondé sur L(x), ensemble limite de la trajectoire issue de x, c'est-à-dire, ensemble des points d'accumulation de la trajectoire $\{f_t(x)\}_{t\in T}$, lorsque t tend vers l'infini :
$L(x) = \{\xi \in X : \forall \varepsilon > 0, \forall t \in T, \exists s \geq t, f_s(x) \in B(\xi,\varepsilon)\}$, où $B(\xi,\varepsilon)$ désigne la boule de centre ξ et de rayon ε. On utilise la notion de c-connexité de Ruelle-Bowen, pour exprimer la cohésion mutuelle des points de L (x): elle exprime dans ce cas que l'on

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

peut, à partir d'un point de L(x), visiter tout autre point de L(x) en utilisant une portion de trajectoire qui l'amène aussi près que l'on veut de cet autre point. De manière plus générale et plus rigoureuse, nous allons maintenant donner les définitions de la c-connexité, des opérateurs bassin et limite, et enfin celle d'attracteur.

1.1. Définition de la c-connexité

On dit que x est chaîné à y ($x \to y$), s'il existe $t(x,y) > 0$, tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_N \geq t(x,y)$ et $z_1, \ldots, z_{N+1}$ dans X, avec $z_1 = x$, $z_{N+1} = y$ et $d\left(f_{t_i}(z_i), z_{i+1}\right) \leq \epsilon$, pour tout $i = 1, \ldots, N$.

On appelle coeur de X (noté C(X)) l'ensemble des points x vérifiant : $x \to x$. La relation d'équivalence de Ruelle-Bowen est alors définie sur C(X) par : $xRy \iff x \to y$ et $y \to x$.

Une partie D de X est dite c-connexe, si D est dans C(X) et si D/R ne contient qu'une seule classe d'équivalence (i.e. pour tout couple de points (x,y) de DxD, on a : $x \to y$ et $y \to x$). On démontre sans peine que L(x) est c-connexe.

1.2. Définition des opérateurs bassin et limite

On définit les opérateurs bassin B et limite L sur l'ensemble P(X) des parties de X par :

Soit $A \subset X$, $B(A) = \{x \in X \setminus A : L(x) \subset A\}$ et $L(A) = \bigcup_{x \in A} L(x)$.

Le principe d'invariance se traduit par : $LoB(A) = A$.

La définition d'un attracteur est alors fondée sur cette propriété d'invariance, assortie d'une condition double de maximalité pour la c-connexité et de minimalité pour l'inclusion. Ceci implique que tout point non "super-errant" (cette notion de super-errant recevant parfois le qualificatif de super-wandering ou super-Poisson-instable au sens de Birkhoff) ne peut appartenir au bassin d'un attracteur : en effet, soit S l'ensemble des points super-errants :

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$S = \{x \in X : \nexists\ y \in X : x \in L(y)\}$

Si x n'appartient pas à S, il existe donc y tel que x appartienne à L(y), ce qui implique : $L(x) \subset L(y)$ et donc, grâce à la propriété de maximalité pour la c-connexité, L(y) sera dans l'attracteur A, si x est dans son bassin ; or L(y) possède x, qui, par définition du bassin, ne peut être dans A, d'où contradiction : en conséquence, un point non situé dans S ne peut appartenir au bassin d'un attracteur. Pour cette raison, on a, pour un attracteur A : $B(A) = B(A) \cap S$, que l'on notera $B_S(A)$. On peut alors définir la notion d'attracteur par :

1.3. Définition d'un attracteur

A est un attracteur faible, si :

i) $LoB_S(A) = A$

ii) quelque soit A_i, composante c-connexe de A (i.e. classe d'équivalence de A/R), il n'existe pas A' c-connexe contenant strictement A_i, tel que AUA' vérifie i)

iii) il n'existe pas $A'' \subsetneq A$ et vérifiant i) et ii).

Cette définition implique les propriétés suivantes :

a) A est invariant par le flot et $L(A) \subset A$

b) A est c-connexe

Un attracteur peut également être caractérisé de la façon suivante : A est un attracteur faible, si et seulement si A est une composante c-connexe de L(S). Nous voyons donc qu'il suffit que S soit non vide, c'est à dire qu'il existe des points super-errants, pour que L(S) soit non vide dans X compact, donc pour qu'il existe au moins un attracteur faible. Notons que tous les attracteurs recensés comme tels aujourd'hui, étranges ou non, satisfont la définition ci-dessus. Si nous changeons le sens du temps, les attracteurs de la dynamique inverse (obtenus lorsque t tend vers moins l'infini) sont dits répulseurs. Les rapports qualitatifs entre attracteurs et répulseurs sont très intéressants à étudier dans les applications biologiques. Trois réseaux,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

duaux de celui des trajectoires, unissent attracteurs et répulseurs :

a) le réseau isochrone (Pavlidis (1973), Winfree (1980)).

b) le réseau isocline (Minorsky (1974)).

c) le réseau isosphérique (Krasnosel'skii (1968)).

Notons qu'ils sont constitués de variétés, c'est-à-dire d'hypersurfaces dans X rassemblant les points x tels que :

a) les trajectoires issues de ceux-ci aient le même ensemble limite $L_I(x)$ où I est une partie de T (si l'attracteur est décrit avec une période τ, on choisira pour I des ensembles constitués par les classes de congruence modulo τ de T).

b) leurs vecteurs vitesse soient parallèles.

c) leurs vecteurs vitesse soient tangents à l'une des sphères centrées en une singularité située à l'intérieur de l'attracteur.

Quelques théorèmes (malheureusement assez rares) permettent de préciser la géométrie de ces réseaux ; la connaissance de celle-ci peut permettre un "fit" qualitatif entre modèle et données empiriques, pour prévoir par exemple les propriétés de synchronisabilité ou de forçage du système. Ce type d'adéquation qualitative est, dans bien des cas, une alternative possible à l'adéquation quantitative, par identification paramétrique par exemple, qui n'est pas toujours possible.

2. APPROCHES STOCHASTIQUES DE LA NOTION D'ATTRACTEUR

On cherche à caractériser le comportement asymptotique d'un processus. Différents types d'approches peuvent être envisagés à partir des différents types possibles de convergence d'un processus (presque sûre, en probabilité, en norme L^p) ou de ses probabilités (cf § 2.1 et aussi les notions déjà existantes comme celles de stabilité stochastique selon Kushner (1967) ou d'ensemble asymptotiquement stable selon Friedman (1976)). On développera en fait ici la même démarche que celle utilisée pour définir un attracteur.

Les définitions seront suffisamment générales pour être appli-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

cables à n'importe quel type de processus. Cependant, elles trouveront tout leur intérêt pour des processus de type Markovie homogène pour lesquels elles s'exprimeront de manière particuliè rement simples. En outre, la notion de confineur coïncidera ave la notion d'attracteur, lorsque le système stochastique se réduit à un système déterministe dont seuls les points initiaux de trajectoires sont aléatoires et coïncidera approximativement avec le support de la probabilité invariante dans le cas d'un processus ν-récurrent et ergodique (plus précisement, la zone de confinement de niveau α coïncidera avec la notion de courbe de niveau enfermant $(1-\alpha)\%$ de la mesure invariante, lorsque l'unicité locale d'une telle courbe est assurée.

2.1. Premières définitions

Définition 2.1.1.

Soit un noyau de transition Markovien homogène P_x^t. Soit M l'ensemble des probabilités sur X. Pour tout $\mu \in M$, on note $P_\mu^t(.) = \int_X P_x^t(.)d\mu(x)$. Soit φ l'application de MxT dans M tel que $\varphi(\mu,t) = P_\mu^t$; si on suppose que φ est continue en t et en μ pour la topologie faible de M, et que X (donc M) est compact, alors φ est un flot pour lequel on peut définir un attracteur déterministe. Un attracteur satisfaisant à la définition déterministe pour ce flot sur M est dit "attracteur mesure".

Ces attracteurs mesures fournissent les probabilités invariantes liées à chaque mesure initiale μ et en particulier à chaque $x \in X$, mais ils renseignent peu sur le comportement asymptotique des trajectoires du processus. Or notre objectif est double : non seulement, il réside dans la connaissance de ces probabilités invariantes (en particulier, connaissance de leurs supports), mais également dans la connaissance de la manière dont ces supports sont décrits, et qui est liée entre autres à la structure de covariance du processus, non prise en compte par l'attracteur

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

mesure (par exemple, c'est le cas d'un cycle récurrent correspondant à des trajectoires fermées, de déphasages uniformément répartis sur $(0,2\pi)$. Un tel cycle correspond à une mesure invariante unique indépendante de la période de description temporelle de ce cycle).

On se donne pour la suite, un processus stochastique $(X^T, \mathcal{H}^{\otimes T}, P)$, où T est l'ensemble temporel (égal à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$), X est l'espace d'état supposé polonais et localement compact, $\mathcal{H}$ est la tribu Borélienne sur X et $\mathcal{H}^{\otimes T}$, la tribu produit complétée pour la probabilité canonique P. μ désignera la probabilité initiale, et E_x et P_x respectivement, l'espérance et la probabilité canonique, conditionnellement au point initial x. Pour un processus Markovien, les P_x sont donnés et mesurables en x, quelque soit $x \in X$. Dans le cas général, ils sont obtenus par désintégration de la loi P par rapport à la tribu engendrée par $(\omega(0) = x)_{x\in X}$, et sont mesurables en x et définis pour μ-presque tout $x \in X$ (Théorème de Jirina (Hennequin et Tortrat (1965)).

Définition 2.1.2.

On définit le "bassin d'ϵ-attraction de A", respectivement dans L^p, en probabilité et presque sûre, de la manière suivante :

a) $$\mathcal{B}_\epsilon^p(A) = \left\{x \in X\backslash A : \overline{\lim_{t\to+\infty}} \; E_x\left(d(\omega(t),A)^p\right) \leq \epsilon \right\}$$

b) $$\mathcal{B}_\epsilon^{pr}(A) = \left\{x \in X\backslash A : \forall \eta > 0, \; \overline{\lim_{t\to+\infty}} \; P_x(d(\omega(t),A) \leq \eta) \geq 1-\epsilon\right\}$$

c) $$\mathcal{B}_\epsilon^{ps}(A) = \left\{x \in X\backslash A : \; \overline{\lim_{t\to+\infty}} \; P_x(\omega(t) \in A) \geq 1-\epsilon\right\}$$

Remarque : $\mathcal{B}_\epsilon^{ps}(A) \subset \mathcal{B}_\epsilon^{pr}(A)$; $\mathcal{B}_0^p(A) \subset \mathcal{B}_0^{ps}(A) \subset \mathcal{B}_0^{pr}(A)$.

Dans ces définitions, on ne tient pas compte de la loi initiale μ. Des définitions analogues peuvent être obtenues en utilisant cette loi, pondérant ainsi le comportement asymptotique par la loi de départ. Néanmoins ces définitions considèrent le compor-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tement asymptotique moyen du processus et non celui individuel de chaque trajectoire. La définition suivante permet cette prise en compte et nous parait ainsi la plus apte à caractériser les propriétés asymptotiques géométriques et temporelles du système.

2.2. La notion de confineur

On supposera le processus Markovien homogène et à trajectoires C.A.D.L.A.G. (continues à droite et à limite à gauche) et que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite (i.e $\mathcal{F}_t^+=\mathcal{F}_t$, pour tout t, où $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, et $\mathcal{F}_t$ est la tribu des évènements antérieurs à t). On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est complète pour les ensembles ν_*-négligeables.

On utilisera des mesures positives et σ-finies sur X :

- une mesure ν de type "uniforme", mesure de surface ou mesure de Haar selon que X est une variété Riemanienne ou que X est inclus dans un groupe topologique localement compact et σ-compact G et tel que $\nu(X)>0$ (dans la pratique, $G = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$ et ν est la mesure de Lebesgue ou la mesure discrète uniforme sur $\mathbb{Z}^n$)
- une mesure ν_* associée au processus : on supposera le plus souvent qu'il existe $t \in T$ tel que $\nu_* >> P_{\omega(t)}$, où $\omega(t)$ note l'état de la trajectoire ω à l'instant t (remarque : ν_* ne sera pas nécessairement de type "uniforme")
- et dans le cas le plus général, une mesure σ_ω pouvant dépendre de ω et définie pour presque tout ω - σ_ω sera la mesure temps de séjour de Takens (1985), si elle existe, définie par:

$\sigma_\omega(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{t\to\infty} 1/t \ \lambda(t'<t : \omega(t') \in V_\varepsilon(E))$, où λ désigne la mesure de Lebesgue, et $\omega(t)$ note l'état de la trajectoire au temps t (Lausberg, 1987).

La notion de confineur sera fondée, comme dans la définition déterministe (Cosnard, Demongeot, (1985)), sur la notion d'ensemble limite d'une trajectoire individuelle, et sera "invariante" par la double opération qui consiste à chercher le bassin de

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

confinement, puis l'ensemble limite de ce bassin.

Soit donc $L(\omega)$, l'ensemble des points d'accumulation à l'infini de la trajectoire ω :
$L(\omega) = (\xi \in X : \forall \epsilon > 0, \forall t \in T, \exists s > t$ tel que $\omega(s) \in B(\xi, \epsilon))$.
$L(\omega)$ est un fermé de X. On note $\mathcal{F}$, l'ensemble des fermés de X et on munit $\mathcal{F}$ de la tribu de Matheron $\sigma_{\mathcal{F}}$ engendrée par la famille $\mathcal{F}^K$ définie par :
$\mathcal{F}^K = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset\}$, où $K \in \mathcal{K}$, ensemble des compacts de X ; on note $\mathcal{F}_K = (\mathcal{F}^K)^c$ (Matheron (1975)).

Proposition 2.2.1

1- L est un élément aléatoire de $(X^T, \mathcal{A}^{\otimes T})$ dans $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$.
2- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}^A \in \sigma_{\mathcal{F}}$.

Démonstrations

1) Il suffit de montrer que $L^{-1}(M) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$, pour tout M appartenant à une classe engendrant $\sigma_{\mathcal{F}}$ (Neveu, (1970)). $\{\mathcal{F}^K\}_{K \in \mathcal{K}}$ est une telle classe.
Soit donc $L^{-1}(\mathcal{F}^K)$, $K \in \mathcal{K}$.
$L^{-1}(\mathcal{F}^K) = \{\omega : L(\omega) \cap K \neq \emptyset\}^c$
$L(\omega) \cap K \neq \emptyset \rightarrow$ il existe $x \in L(\omega) \cap K$, i.e. x vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t \in T$, il existe $s > t$: $d(\omega(s), x) < 1/n$.
Par conséquent, $\{L(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{t} \bigcup_{s > t} \{d(\omega(s), K) < 1/n\}$, où $d(\omega(s), K) = \inf_{x \in K} d(\omega(s), x)$.
Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in T$, il existe $s > t$ tel que $d(\omega(s), K) < 1/n$, alors ω a des points d'accumulations dans $V(K,n)$ où $V(K,n) = \{x \in X : d(x,K) \leq 1/n\}$; (car $V(K,n)$ est compact) et ceci pour tout n, par conséquent, ω a des points d'accumulations dans $K = \bigcap_n V(K,n)$ et donc,

$$L^{-1}(\mathcal{F}^K) = \left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{t} \bigcup_{s > t} \{d(\omega(s), K) < 1/n\} \right]^c$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$= \left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{t_j\in S\ s_j>t_j} \bigcup \{d(\omega(s_j),K)<1/n\} \right]^c$, car le processus est séparable (S est un séparant de T (partie dénombrable dense dans T)). Par conséquent $L^{-1}(\mathcal{F}^K)$ est mesurable.

2) $\mathcal{F}^A \in \sigma_{\mathcal{F}}$, si $A \in \mathcal{K}$, ensemble des compacts ou si $A \in \mathcal{S}$, ensemble des ouverts, par définition de $\sigma_{\mathcal{F}}$ (Matheron, (1975)). Montrons alors que $\mathcal{F}^A \in \sigma_{\mathcal{F}}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est une algèbre et une classe monotone engendrée par les ouverts et donc par les compacts K (car $\forall$ L.C.S. $\Rightarrow G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $\forall\ G \in \mathcal{S}$) : - X et $\emptyset \in \mathcal{A}$

- X et $\emptyset \in \mathcal{A}$
- si $K\in\mathcal{K}$, $K^c \in \mathcal{A}$
- si K_1 , $K_2 \in \mathcal{K}$, $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{A}$
- si $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{K}$, alors $\lim_{i\in\mathbb{N}} K_i \in \mathcal{A}$.
- si $(K_i)_i$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{K}$, alors $\lim_{i\in\mathbb{N}} K_i \in \mathcal{A}$.

Il suffit alors de montrer que $\left\{A \in \mathcal{A} : \mathcal{F}^A \in \sigma_{\mathcal{F}}\right\}$ est une algèbre et une classe monotone engendrée par les $\{\mathcal{F}^K\}_{K\in\mathcal{K}}$ (Neveu (1970)), i.e. $\emptyset$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{K_1\cup K_2}$, $\mathcal{F}^{K^c}$, $\mathcal{F}^{\cup K_i}$, $\mathcal{F}^{\cap K_i}$ sont des éléments de $\sigma_{\mathcal{F}}$.

- $\emptyset = \mathcal{F}^X$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\emptyset}$
- $\mathcal{F}^{K^c} = \mathcal{F}^G = \mathcal{F}_G^c \in \sigma_{\mathcal{F}}$, où $G \in \mathcal{G}$
- $\mathcal{F}^{K_1\cup K_2} = \mathcal{F}^{K_1} \cap \mathcal{F}^{K_2} \in \sigma_{\mathcal{F}}$
- $\mathcal{F}^{\cup K_i} = \cap\, \mathcal{F}^{K_i} \in \sigma_{\mathcal{F}}$
- $\mathcal{F}^{\cap K_i} = \mathcal{F}^{\left(\cup K_i^c\right)^c} \in \sigma_{\mathcal{F}}$, si $\mathcal{F}^{\cup K_i^c} \in \sigma_{\mathcal{F}}$; or $\mathcal{F}^{\cup K_i^c} = \cap\, \mathcal{F}^{K_i^c} \in \sigma_{\mathcal{F}}$

Remarque : dans le cadre déterministe autonome précédent, le flot était un semi-groupe; ce qui impliquait que pour tout $x \in X$, il existait au plus une seul orbite passant par ce point et qu'il existait un nombre infini d'instants t et d'états initiaux x_0,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tels que $f_t(x_o)=x$. Par conséquent, l'instant de passage par un état donné x n'avait pas d'importance. En stochastique (même Markovien homogène), le temps intervenant de manière explicite dans les équations du système dynamique à cause de la présence du "bruit", l'instant de passage par un état donné a de l'importance puisqu'il dépend de l'orbite sur laquelle le processus se trouve. Et donc les équivalents stochastiques des notions de bassins d'attraction et de c-connexité devront en tenir compte.

On va définir maintenant la notion de "bassin de θ-confinement", analogue stochastique du bassin d'attraction. U désignera dans la suite l'un ou l'autre des ensembles suivants : $\{t_o\}$ pour un $t_o \in T$ (par ex. $t_o = 0$), ou $\{t < t_o\}$ pour un $t_o \in T^*$ (par ex. t_o peut représenter un temps de censure à partir duquel, seul le comportement asymptotique du processus est observable.

Soit $C \subset X$. On désignera dans la suite par C_U, l'ensemble $\bigcup_{t\in U} \{\omega(t) \in C\} \subset X^T$.

Définitions 2.2.1

Soit $A \in \mathcal{A}$

a) On appelle "densité de confinement (global) dans A relativement à U", la fonction F_A :

$$F_A(x) = \overline{\lim_{\eta\to 0}} \frac{P(\bigcup_{t\in U} \omega(t) \in B(x,\eta) \cap \{L(\omega) \subset A\})}{\nu_*(B(x,\eta))}$$

b) On appelle "bassins de θ-confinement (global) dans A relativement a U", respectivement dans X et dans X^T, les ensembles suivants :

$\mathcal{B}_\theta(A) = \{x \in X\backslash A \cap \text{supp.}\nu_* : F_A(x) > \theta\}$

$B_\theta(A) = \{L(\omega)\subset A\} \cap \mathcal{B}_\theta(A)_U$.

c) On appelle " bassins de θ-confinement interne (global) dans A relativement à U", dans X et X^T les ensembles suivants :

$B^i_\theta(A) = \{x \in A \cap \text{supp.}\nu_* : F_A(x) > \theta\}$;

$B^i_\theta(A) = \{L(\omega) \subset A\} \cap B^i_\theta(A)_U$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\mathcal{B}_\theta(A)$ (resp. $\mathcal{B}^i_\theta(A)$) est constitué des points $x \in A^c$ (resp. $x \in A$) pour lesquels la densité de confinement dans A est jugée suffisante, i.e. supérieure à θ ; et $B_\theta(A)$ (resp. $B^i_\theta(A)$) est constitué des trajectoires passant par ces points à des instants $t \in U$, et qui confinent dans A.

Lemme 2.2.1

Soit $t \in T$. On suppose $P_{\omega(t)} << \nu_*$ de densité f^t. On suppose de plus que f^t a des limites par morceaux en $x_0 \in X$, i.e., pour tout $\eta>0$ assez petit, il existe une partition $\overset{I}{\underset{i=1}{\oplus}} B_i$ de $B(x_0,\eta)\setminus x_0$, telle que
$\nu_*(B_i) = \lambda_i\,(\nu_*(B(x_0,\eta))-\nu_*(x_0))$, où $\sum_{i=1}^{I}\lambda_i = 1$, et telle que $x_0 \in \delta\overline{B_i}$ et $\lim\limits_{\substack{x\in B_i \\ x\to x_0}} f^t(x) = f^t(x_{0,i})$, pour tout $i=1,\dots,I$. Alors,

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{P(\omega(t)\in B(x_0,\eta))}{\nu_*(B(x_0,\eta))} = \sum_{i=1}^{I}\lambda_i f^t(x_{0,i})$$

$$-\lim_{\eta\to 0}\frac{\nu_*(x_0)}{\nu_*(B(x_0,\eta))}\left(\sum_{i=1}^{I}\lambda_i f^t(x_{0,i})-f^t(x_0)\right)$$

(cas particulier : si f^t est continue en x_0, alors,
$\lim\limits_{\eta}\dfrac{P(\omega(t)\in B(x_0,\eta))}{\nu_*(B(x_0,\eta))} = f^t(x_0)$. et de la même façon, si $P_x(\cup_s \omega(s)\in B)$ est continue en x_0, alors,
$\lim\limits_{\eta} P(\cup_s \omega(s)\in B \mid \omega(0)\in B(x_0,\eta)) = P_{x_0}(\cup_s \omega(s)\in B))$.

Démonstration

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$\frac{P(\omega(t) \in B(x_o,\eta))}{\nu_*(B(x_o,\eta))} = \sum_{i=1}^{I} \int_{B_i} \frac{f^t(x)d\nu_*(x)}{\nu_*(B(x_o,\eta))} + \frac{f^t(x_o)\nu_*(x_o)}{\nu_*(B(x_o,\eta))}$$

$$\inf_{x\in B_i} f^t(x)\nu_*(B_i) \leq \int_{B_i} f^t(x)d\nu_*(x) \leq \sup_{x\in B_i} f^t(x)\ \nu_*(B_i)$$

$$\text{or } \lim_{x\to x_o} \inf_{x\in B_i} f^t(x) = \lim_{x\to x_o} \sup_{x\in B_i} f^t(x) = f^t(x_{o,i})$$

Par conséquent,

$$\lim_{\eta} \frac{P(\omega(t)\in B(x_o,\eta))}{\nu_*(B(x_o,\eta))} =$$

$$\lim_{\eta} \frac{f^t(x_{o,i})\lambda_i(\nu_*(B(x_o,\eta))-\nu_*(x_o))}{\nu_*(B(x_o,\eta))} + \lim_{\eta} \frac{f^t(x_o)\nu_*(x_o)}{\nu_*(B(x_o,\eta))}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \lambda_i f^t(x_{o,i}) - \lim_{\eta} \frac{\nu_*(x_o)}{\nu_*(B(x_o,\eta)} \left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i f^t(x_{o,i}) - f^t(x_o)\right)$$

Proposition 2.2.2

1- $F_A(x)$ est une fonction suradditive de A, i.e.,
$F_{A1\ \cup\ A2}(x) \geq F_{A1}(x) + F_{A2}(x)$.
2- $F_A(x)$ peut encore s'écrire:
- pour $U = \{to\}$,

$$F_A(x) = \overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\omega(to)\in B(x,\eta))}{\nu_*(B(x,\eta))} \overline{\lim_{\eta}} P(L(\omega)\subset A \mid \omega(o)\in B(x,\eta))$$

- pour $U = \{t<to\}$, si le processus est continu lorsque $T=\mathbb{R}^+$,

$$F_A(x) = \overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x,\eta))}{\nu_*(B(x,\eta))} \overline{\lim_{\eta}} P(L(\omega)\subset A \mid \omega(0)\in \overline{B(x,\eta)})$$

3- Supposons $U=\{t_o\}$ et $P_{\omega(t_o)} << \nu_*$ de densité f^{t_o}. Si $f^{t_o}(x)$ et $P_x(L(\omega) \subset A)$ sont continues pour tout x sauf pour un ensemble ν_*-négligeable de points, on a,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$F_A(x) \overset{\nu_* P \cdot P}{=\!=\!=} f^{t_0}(x).P_x(L(\omega) \subset A)$$

Par conséquent, $\mathcal{B}_\theta(A) \in \mathcal{A}$, et $B_\theta(A) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$ (et de même pour $\mathcal{B}^i_\theta(A)$ et $B^i_\theta(A)$).

4- Supposons $U=\{t_0\}$ ou $[0,t_0]$ (avec $t_0 < \infty$. Si ν_* et $P(\underset{t\in U}{\cup} \omega(t)\in .)$ vérifient l'hypothèse suivante (2.2.2) :
pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que, $\nu_*(\delta B(x,\eta))=0$ et $P(\underset{t\in U}{\cup} \omega(t) \in \delta B(x,\eta))=0$, pour tout $\eta \leqslant \eta_x$, alors $F_A(x)$ est mesurable en x. Par conséquent, $\mathcal{B}_\theta(A) \in \mathcal{A}$ et $B_\theta(A) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$ (et de même pour $\mathcal{B}^i_\theta(A)$ et $B^i_\theta(A)$).

Démonstrations

1- vient de $\{L(\omega) \subset A1 \cup A2\} \supset \{L(\omega) \subset A1\} \cup \{L(\omega) \subset A2\}$

2- pour $U= \{t<t_0\}$, $F_A(x)$ peut encore s'écrire:

$$F_A(x) = \overline{\lim_{\eta\to 0}} \frac{P}{\nu_*(B(x,\eta))} ,$$

où $P = P(\underset{\tau_0\in U}{\circledast} \{\tau_{B(x,\eta)}(\omega)=\tau_0\} \cap \{L(\omega) \subset A\})$ et
$\tau_{B(x,\eta)}(\omega) = \inf(s \in T: \omega(s) \in B(x,\eta))$.
$\{\tau_{B(x,\eta)}(\omega)<t\} = \underset{s<t}{\cup} (\omega(s) \in B(x,\eta) \in \mathcal{F}_t$ et
$\{\tau_{B(x,\eta)}(\omega) \leqslant t\} = \underset{n}{\cap} \{\tau_{B(x,\eta)}<t+1/n\} \in \mathcal{F}^+_t = \mathcal{F}_t$.
$\tau_{B(x,\eta)}$ est donc un temps d'arrêt.
On a aussi $\{L(\omega)\subset A\} = L^{-1}(\mathcal{F}^{A^c}) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$.
Par conséquent,

$$P = \int_{\tau_0\in U} dP_{\tau_{B(x,\eta)}(\tau_0)} \; P(L(\omega)\subset A | \tau_{B(x,\eta)}=\tau_0) .$$

Le processus étant Markovien homogène et à trajectoires continues, et $\{\tau_{B(x,\eta)}=\tau_0\}$ appartenant à $\mathcal{F}_{\tau_0}$, on a,

$$P = P(L(\omega)\subset A | \omega(0) \in \overline{B(x,\eta)}).P(\underset{t\in U}{\cup} \omega(t)\in B(x,\eta)).$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- pour $U=\{t_o\}$, le résultat est immédiat.

3- D'après le lemme 2.2.1, on a,

$$\lim_{\eta} \frac{P(\omega(t_o)\in B(x,\eta))}{\nu_*(B(x,\eta))} \lim_{\eta} P(L(\omega)\subset A \mid \omega(0)\in B(x,\eta)) =$$

$f^{t_o}(x).P_x(L(\omega)\subset A)$, lorsque cette fonction est continue en x.

Par conséquent, si on note

$\mathcal{B} = \{x \in X\setminus A : f^{t_o}(x).P_x(L(\omega)\subset A) > 0\}$, on a $\mathcal{B}_\theta(A) \overset{\nu_* PP}{=\!=} \mathcal{B}$.

Et donc, $f^{t_o}(x).P_x(L(\omega)\subset A)$ étant mesurable en x, on a $\mathcal{B}_\theta(A) \in \mathcal{A}$. De même, $B_\theta(A) = L^{-1}(\mathcal{F}^{A^c}) \cap \mathcal{B}_\theta(A)_U \in \mathcal{A}^{\otimes T}$, en tant qu'intersection de 2 éléments mesurables.

(Remarque : si ν_* est de type discret, on a directement,

$$\frac{P(\omega(t_o)\in B(x,\eta))}{\nu_*(B(x,\eta))}.P(L(\omega)\subset A \mid \omega(0)\in B(x,\eta)) = f^{t_o}(x).P_x(L(\omega)\subset A),$$

pour tout η suffisamment petit et pour tout $x \in \text{supp}.\nu_*$)

4- Montrons que si $t_o < \infty$ et si ν_* et $P(\bigcup_{t\in U} \omega(t) \in .)$ vérifient la condition (2.2.2), alors $\nu_*(B(x,\eta))$ et $P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x,\eta))$ sont des fonctions continues en x, pour tout η fixé.

Soit $x_n \mapsto x$, et $X = \mathbb{R}$. Alors,

$\lim_{x_n\to x}]x_n-\eta, x_n+\eta[= [x-\eta, x+\eta[$ ou $]x-\eta, x+\eta]$, selon que $x_n < x$, pour tout n, ou $x_n > x$, pour tout n. Et de même, si X est quelconque,

on a $B(x,\eta) \subset \lim_n B(x_n,\eta) \subset \overline{(B(x,\eta))}$.

Par conséquent, on a,

$\nu_*(B(x,\eta)) \leq \lim_n \nu_*(B(x_n,\eta)) \leq \nu_*(\overline{B(x,\eta)})$.

Et de même, si $t_o < \infty$,

$$P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x,\eta)) \leq \lim_n P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x_n,\eta)) \leq P(\bigcup \omega(t)\in \overline{B(x,\eta)})$$

Par conséquent, grâce à l'hypothèse (2.2.2),

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\lim_n \nu_*(B(x_n,\eta)) = \nu_*(B(x,\eta))$, et si $t_0 < \infty$,

$\lim_n P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x_n,\eta)) = P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x,\eta))$.

$\overline{\lim_\eta} \dfrac{P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x,\eta) \cap L(\omega)\subset A)}{\nu_*(B(x,\eta))}$ est alors mesurable en x, comme limite supérieure de fonctions continues, donc mesurables.

Plus généralement, on peut remplacer dans les quantités précédentes, l'évènement $\{L(\omega) \subset A\}$ par l'évènement $E^\varepsilon(A) = \{\omega : \sigma_\omega(L(\omega)\setminus A) \leqslant \epsilon\}$. $E^\varepsilon(A)$ signifie que $L(\omega)$ est inclus dans A à un ensemble de mesure σ_ω-ε près environ.
Pour $\varepsilon = 0$, $E^o(A) = \{L(\omega) \subset A\}$.
Lorsque $E^\varepsilon(A) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$, on obtient une définition plus générale des bassins que l'on note $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)$ et $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot\varepsilon}(A)$.. Pour $\varepsilon = 0$, $\mathcal{B}_\theta^o(A) = \mathcal{B}_\theta(A)$ et $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot o}(A) = \mathcal{B}_\theta^i(A)$.
Lorsque $\epsilon \neq 0$, la mesurabilité de $E^\epsilon(A)$ pour la tribu $\mathcal{A}^{\otimes T}$ n'est pas triviale. (Lorsque $T=\mathbb{R}^+$, on sait seulement, ω étant C.A.D.L.A.G., que pour $B \subset X$, ϵ et $t\geqslant 0$, l'ensemble $\{t' \leqslant t : \omega(t) \in V_\epsilon(E)\}$est Lebesgue-mesurable). Si X est compact, la topologie de Matheron est équivalente à celle de Haussdorff sur les fermés F non vides de X (Matheron, (1975)). Si de plus, σ_ω est indépendante de ω et $\sigma_\omega(F\setminus A)$ est Haussdorff continue en F, $E^\varepsilon(A)$ est mesurable. On supposera dans la suite que $E^\varepsilon(A)\in\mathcal{A}^{\otimes T}$, lorsque $A \in \mathcal{A}$, sinon on complètera la tribu $\mathcal{A}^{\otimes T}$ de manière adéquate.

La définition suivante concerne l'analogue stochastique du principe d'invariance déterministe $L(B(A)) = A$. Comme en déterministe, par construction même des bassins de θ-confinement, on a $\bigcup_{\omega\in B_\theta(A)} L(\omega) \subset A$. Mais, en général, à cause de la présence de trajectoires P-négligeables, on aura même $\bigcup_{\omega\in B_\theta(A)} L(\omega) = A$.

Par conséquent, on doit définir un opérateur qui permette de

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

vérifier qu'il n'existe pas dans A de surface "inutile", i.e de sous-ensemble de A non ν-négligeable et ne contenant au plus que des points d'accumulation d'un ensemble P-négligeable de trajectoires. L'opérateur construit sera même plus général puisqu'il permettra de vérifier qu'à un sous-ensemble de mesure ν-ε' près, A ne contient que des points d'accumulation d'ensembles de trajectoires proches de $B_\theta(A)$ à P-η près.

Définitions 2.2.2

Soit $A \in \mathcal{A}$

a) On définit sur $\mathcal{A}$ l'opérateur "η-limite $\mathcal{L}_\eta$" à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ par :

$\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right) = \left\{L(D) : D \subset B_\theta^\varepsilon(A) \text{ et } P\left(B_\theta^\varepsilon(A) \setminus D\right) \leq \eta\right\}$, où

$L(D) = \bigcup_{\omega \in D} L(\omega)$

b) On dit que $\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right)$ est égal à A à ν-ε' près et on note

$\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right) \overset{\nu-\varepsilon'}{=} A$, si et seulement si pour tout

$L(D) \in \mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right)$, $\nu(A \setminus L(D)) \leq \varepsilon'$.

Cette propriété donne le degré de récurrence du processus dans chaque partie de A. A la limite, si $\nu(L(\omega) \mid A^c) = \nu(A)$, pour P-presque tout $\omega \in B_\theta^\varepsilon(A)$, alors A vérifie le principe d'invariance $\mathcal{L}_\eta(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)) \overset{\nu-0}{=} A$, pour tout $\eta : 0 \leq \eta < 1$.

Proposition 2.2.3

1- Supposons que A vérifie le principe d'invariance pour $\eta = \varepsilon = 0$. Alors cela ne signifie pas que $\nu \ll P_L$, ni même que $P_L \ll \nu$ où P_L note la loi $P(L(\omega))$.

2- Supposons $U=\{t_0\}$ et $P_{\omega(t_0)} \ll \nu_*$, où

$U=\{t<t_0\}$ et $\nu_*(B)=\nu_*(B') \Longrightarrow P(\bigcup_{t\in U} \omega(t) \in B)=P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B')$. Alors

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

si A vérifie le principe d'invariance pour η, ε' et $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)$, A vérifie aussi le principe d'invariance pour η, ε', $\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)$, quelque soit $\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)$ égal à $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)$ à un ensemble ν_*-négligeable près.

Demonstrations

1- $P(B_\theta(A)\setminus D) = 0$ n'implique pas $\nu(L(B_\theta(A)\setminus D)) = 0$.
On peut avoir $\nu(A) = 0$ et $P(B_\theta(A)) > 0$.

2- $\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A) = \left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\setminus N\right) \cup N'$, où $N \cup N' = \mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A) \Delta \mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)$, est ν_*-négligeable. Par conséquent, $B_\theta^{\cdot\varepsilon}(A) = \left(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus N\right) \cup N'$ où N et N' sont P-négligeables, et donc,

$$\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)\right) = \left\{L(D') : D' \subset \left(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus N\right) \cup N' \text{ et } P\left(B_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)\setminus D'\right) \leq \eta\right\}$$

Pour tout $D' \subset \left(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus N\right) \cup N'$, il existe $N'' \subset N'$ et $D \subset B_\theta^\varepsilon(A)$ tel que $D' = (D\setminus N) \cup N''$.

$$\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)\right) =$$
$$\bigcup_{N''\subset N'} \{L(D') : D' = (D\setminus N) \cup N'' ; D \subset B_\theta^\varepsilon(A) \text{ et } P\left(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus D\right) \leq \eta\}$$

Or si D vérifie $P\left(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus D\right) \leq \eta$, alors $(D\setminus N) \subset B_\theta^\varepsilon(A)$ et vérifie $P\left(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus(D\setminus N)\right) \leq \eta$, et donc

$$\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)\right) \subset \bigcup_{N''\subset N'} \left\{L(D') : D' = D \cup N'' \text{ et } L(D) \in \mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right)\right\}.$$

Or $\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right) \overset{\nu-\varepsilon'}{=} A$, i.e. pour tout $L(D) \in \mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\right)$, on a $\nu(A\setminus L(D)) \leq \varepsilon'$
et donc comme $L(D') \supset L(D)$, on a $\nu(A|L(D')) \leq \epsilon'$, i.e $\mathcal{L}_\eta\left(\mathcal{B}_\theta^{\cdot\varepsilon}(A)\right) \overset{\nu-\varepsilon'}{=} A$.

On introduit maintenant l'analogue stochastique de la c-connexité.

Définitions 2.2.3 (chaînage stochastique)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

a) Soient $z_i \in X, i=1,\ldots,N+1$, et soit $t \in T^+$. On appelle "densité de chaînage de z_1 à $z_2, \ldots, z_{N+1}$", la fonction $F^{\varepsilon}_t(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1})$ définie par :

$$F^{\varepsilon}_t(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1}) = \overline{\lim_{\eta\to 0}} P^{\otimes N}\Big(\bigcup_{t_0\in T} \bigcup_{t_1\geq t+t_0} \cdots \bigcup_{t_N\geq t+t_{N-1}} \{\omega_1(t_0)\in B(z_1,\eta) \cap \omega_1(t_1)\in B(z_2,\varepsilon)\},\ldots,$$

$$\{\omega_N(t_{N-1})\in B(z_N,\eta)\cap\omega_N(t_N)\in B(z_{N+1},\varepsilon)\}\Big).\frac{1}{\prod_{i=1}^{N} \nu_*(B(z_i,\eta))}$$

où $dP^{\otimes N}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N) = \prod_{i=1}^{N} dP(\omega_i)$

b) Soient $x,y\in X$; on dit que "x est θ-chaîné à y" et on note "$x\to_\theta y$", s'il existe un temps minimum $t(x,y) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $z_1,z_2,\ldots,z_N \in \text{supp.}\nu_*$, avec $z_1 = x$ et $z_{N+1} = y$ (notation), tels que $F^{\varepsilon}_{t(x,y)}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1}) > \theta^N$

c) La relation $xR_\theta y$, définie par $x\to_\theta y$ et $y\to_\theta x$, est une relation d'équivalence sur l'ensemble
$\mathcal{C}_\theta(X) = \{x\in X : xR_\theta x\}\cap\{x\in X : \forall\, y,z \in \mathcal{C}_\theta(X)$ avec $xR_\theta y$ et $yR_\theta z$, on a $xR_\theta z\}$.
On note $\mathcal{C}_\theta(X)/R_\theta$, l'ensemble des classes d'équivalence et on dit qu'une partie D de X est C_θ-connexe, si elle est incluse dans $\mathcal{C}_\theta(X)$ et si le quotient D/R_θ ne contient qu'une seule classe.

Remarque : Cette définition signifie que pour chaque $\varepsilon>0$, l'on peut relier x à y par une chaîne de flots de morceaux de trajectoires de probabilité suffisante, les differents morceaux étant d'âges homogènes, comme le seraient les morceaux consécutifs d'une seule et même trajectoire, chaque morceau étant proche du suivant à une distance inférieure ou égale à ε.

Proposition 2.2.4

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Soit $\tau_B^r(\omega) = \inf\{s \geq r : \omega(s) \} B\}$, où $B \in \mathcal{A}^{\otimes T}$, B ouvert. Alors, $\tau_B^r(\omega)$ est un temps d'arrêt et si de plus le processus est continu lorsque $T=\mathbb{R}^+$, on peut minimiser $F_t^\varepsilon(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1})$ en fonction des temps d'entrée dans les boules $B(z_i,\eta)$ et $B(z_{i+1},\varepsilon)$, $i=1,\ldots,N$:

$$F_t^\varepsilon(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1}) \geq \overline{\lim_\eta} \int_{u_0} \frac{dP\tau_{B(z_1,\eta)}(u_0)}{\nu_*(B(z_1,\eta))}$$

$$\overline{\lim_\eta} \int_{u_1 \geq t} dP(\tau_{B(z_2,\varepsilon)}(\omega)=u_1 \mid \omega(0)\in\overline{B(z_1,\eta)}\,.$$

$$\overline{\lim_\eta} \int_{u_0} \frac{P(\omega)(\sum_0^{i=1} u_j)\in B(z_i,\eta))}{\nu_*(B(z_i,\eta))}$$

$$.\overline{\lim_\eta} \int_{u_i \geq t} dP(\tau_{B(z_{i+1},\varepsilon)}(\omega)=u_i \mid \omega(0)\in B(z_i,\eta))$$

(Lorsque N=1, on a l'égalité)

<u>Démonstration</u>

On a,

$$\left\{\tau_B^r < t\right\} = \bigcup_{r\leq s<t} \{\omega(s)\in B\},\ \in \mathcal{F}_t$$

$$\left\{\tau_B^r \leq t\right\} = \bigcap_n \left\{\tau_B^r < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t\,.$$

τ_B^r est donc un temps d'arrêt.

On note $D_i = B(z_i,\eta)$, $B_{i+1} = B(z_{i+1},\varepsilon)$; $i=1,\ldots,N$. On note aussi

$$P = P^{\otimes N}\Big(\bigcup_{t_0\in T} \bigcup_{t_1\geq t+t_0} \cdots \bigcup_{t_N\geq t+t_{N-1}} \{\omega_1(t_0)\in D_1 \cap \omega_1(t_1)\in B_2\},\ldots,$$

$$\{\omega_N(t_{N-1})\in D_N \cap \omega_n(t_n)\in B_{N+1}\}\Big)$$

On a,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$P \geq P^{\otimes N}\Big(\bigoplus_{\tau_0 \in T} \bigoplus_{\tau_1 \geq t+\tau_0} \cdots \bigoplus_{\tau_N \geq t+\tau_{N-1}} \{\tau_{D_1}(\omega_1) = \tau_0 \cap \tau_{B_2}^{\tau_0+t}(\omega_1) = \tau_1\}, \ldots,$$

$$\{\omega_N(\tau_{N-1}) \in D_N \cap \tau_{B_{N+1}}^{\tau_{N-1}+t}(\omega_N) = \tau_N\}\Big)$$

où $\oplus$ désigne la somme d'évènements disjoints.

$$P \geq \int_{\tau_0 \in T} dP(\tau_{D_1}(\omega_1) = \tau_0) \int_{\tau_1 \geq t+\tau_0} dP(\tau_{B_2}^{\tau_0+t}(\omega_1) = \tau_1 | \tau_{D_1}(\omega_1) = \tau_0) \cdot$$

$$\prod_{i=2}^{N} P(\omega_i(\tau_{i-1}) \in D_i) \int_{\tau_i \geq t+\tau_{i-1}} dP(t_{B_{i+1}}^{\tau_{i-1}+t}(\omega_i) = \tau_i | \omega_i(\tau_{i-1}) \in D_i)$$

Le processus étant Markovien homogène et à trajectoires CAD-LAG, on a , $dP(\tau_{B_{i+1}}^{\tau_{i-1}+t}(\omega_i) = \tau_i | \omega_i(\tau_{i-1}) \in D_i)$

$$= dP(\tau_{B_{i+1}}(\omega_i) = \tau_i - \tau_{i-1} | \omega_i(0) \in D_i) \; ; \; i=2,\ldots,N$$

et, si le processus est continu lorsque $T=\mathbb{R}^+$, $dP(\tau_{B_2}^{\tau_0+t}(\omega_1) = \tau_1 | \tau_{D_1}(\omega_1) = \tau_0) = dP(\tau_{B_2}(\omega_1) = \tau_1 - \tau_0 | \omega_1(0) \in \overline{D_1})$

On note $u_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i=1,\ldots,N$; et $u_0 = \tau_0$.

Par conséquent, par convergence dominée de Lebesgue,

$$F_t^{\varepsilon}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1}) \geq \overline{\lim_{\eta}} \int_{u_0 \in T} \frac{dP\tau_{D_1}(u_0)}{\nu_*(D_1)} \cdot \overline{\lim_{\eta}} \int_{u_1 \geq t} dP(\tau_{B_2}(\omega) = u_1 | \omega(0) \in \overline{D_1}) \cdot$$

$$\prod_{i=2}^{N} \overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\omega(\sum_{0}^{i-1} u_j \in D_i)}{\nu_*(D_i)} \overline{\lim_{\eta}} \int_{u_i \geq t} P(\tau_{B_{i+1}}(\omega) = u_i | \omega(0) \in D_i)$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Proposition 2.2.5

Soient $x,y \in X$ et $\theta > 0$ quelconque. Si l'une des conditions suivantes i) ii) ou iii) est réalisée, alors $x \mapsto_{\theta} y$:

i) il existe $t(x,y) > 0, T_0 \subset T$, $T_i \subset [t(x,y),\infty[$,
$z_i \in \text{supp } \nu_*$, $i=1,\dots,N$,
avec $z_1 = x$, $z_{N+1} = y$ tels que

$$\overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\omega(t)\in B(z_i,\eta))}{\nu_*(B(z_i,\eta))} \cdot \overline{\lim_{\eta}} P\Big(\bigcup_{s\in T_i} \omega(s)\in B(z_{i+1},\varepsilon) \,|\, \omega(0)\in \overline{B(z_1,\eta)}\Big) > \theta$$

. pour tout $t \in \bigcup_{0}^{i-1} T_j$, $i=N,\dots,2$

et

$$\overline{\lim_{\eta}} \frac{P\big(\bigcup_{s\in T_0} \omega(s)\in B(z_1,\eta)\big)}{\nu_*(B(z_1,\eta))} \cdot \overline{\lim_{\eta}} P\Big(\bigcup_{s\in T_1} \omega(s)\in B(z_2,\varepsilon) \,|\, \omega(0)\in \overline{B(z_1,\eta)}\Big) > \theta$$

ii) - $x \in \text{supp. } \nu_*$ et $\nu_*(x) = 0$
- il existe $t(x,y) > 0$ tel que

$$\overline{\lim} P\Big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(y,\varepsilon) \,|\, \omega(0) \in \overline{B(x,\eta)}\Big) > 0$$

- il existe $C \subset X$ avec $\mu(C)$ 0, et $\gamma>0$, tels que
$P_z\big(\bigcup_{s\in T} \omega(s) \in B(x,\eta)\big) \geq \gamma$, pour tout $\eta>0$, $z \in C$.

iii) $x \in \text{supp. } \nu_*$ et $\nu_*(x) = 0$
- il existe $z_2,\dots,z_N \in \text{supp. } \nu_*$,
$\beta > 0$, $t(x,y) > 0$, et des $T_i \subset T$, $i=0,\dots,N$, comme dans la condition i), tels que

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$\overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\omega(t) \in B(z_i,\eta))}{\nu_*(B(z_i,\eta))} \geq \beta, \text{ pour tout } t \in \bigcup_{o}^{i-1} T_j \; ; \; i=2,\ldots,N, \text{ et}$$

$$\prod_{i=1}^{N} \overline{\lim} P\Big(\bigcup_{s\in T_i} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon) \,|\, \omega(0) \in B(z_i,\eta)\Big) > 0$$

(où $z_i = x$ et $z_{N+1} = y$).

- il existe $C \subset X$ avec $\mu(C) > 0$, et $\gamma > 0$, tels que
$P_z\Big(\bigcup_{s\in T} \omega(s) \in \beta(x,\eta)\Big) \geq \gamma$, pour tout $\eta > 0$, $z \in C$

Démonstrations

i) vient des relations suivantes, où B et D $\in \mathcal{R}^{\otimes T}$, B ouvert

$$\int_{u\geq t} dP(\tau_B^t(\omega) = u \,|\, \omega(0) \in D) = P\Big(\bigcup_{s\geq t} \omega(s) \in B \,|\, \omega(0) \in D\Big)$$

$$\text{et} \int_{u\in T} \frac{dP_{\tau_D}(u)}{\nu_*(D)} = \frac{P\Big(\bigcup_{s\in T} \omega(s) \in D\Big)}{\nu_*(D)}$$

$$\text{ii)} \; F^{\varepsilon}_{t(x,y)}(x,y) \geq \overline{\lim_{\eta}} \int_X \frac{P_z\Big(\bigcup_{s\in T} \omega(s)\in B(x,\eta)\Big)}{\nu_*(B(x,\eta))} d\mu(z).$$

$$\geq \frac{\gamma\mu(C)}{\nu_*(x)} \; \overline{\lim_{\eta}} \; \overline{P\Big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s)\in B(y,\varepsilon) \,|\, \omega(0)\in B(x,\eta)\Big)} \; \overline{\lim_{\eta}} P\Big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s)\in B(y,\varepsilon) \,|\, \omega(0)\in \overline{B(z_1,\eta)}\Big)$$

$$= \infty$$

iii) De la même manière qu'en b),

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$F^{\varepsilon}_{t(x,y)}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1})$$

$$\geq \beta^{N-1}\,\frac{\gamma\mu(C)}{\nu_*(x)}\;\overline{\lim_{\eta}}\;P\Big(\bigcup_{s\in T_1}\omega(s)\in B(z_2,\varepsilon)\,\Big|\,\omega(0)\in \overline{B(z_1,\eta)}\Big)$$

$$\cdot\prod_{2}^{N}\overline{\lim_{\eta}}\;P\Big(\bigcup_{s\in T_i}\omega(s)\in B(z_{i+1},\varepsilon)\,\Big|\,\omega(0)\in B(z_i,\eta)\Big)$$

i.e $F^{\varepsilon}_{t(x,y)}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1}) = \infty$

La définition suivante permet le chaînage entre 2 points à l'aide de morceaux de trajectoires non forcément homogènes du point de vue de l'âge. Ce chaînage est plus faible que le précédent.

Définitions 2.2.4. (chaînage stochastique faible)

a) On appelle "densité de chaînage faible" de z_1 à $z_2,\ldots,z_{N+1}$ la fonction $F^{f,\varepsilon}_{t}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1})$ définie par

$$F^{f,\varepsilon}_{t}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1})$$

$$= \prod_{i=1}^{N}\overline{\lim_{\eta}}\;\frac{P\Big(\bigcup_{r\in T}\omega(r)\in B(z_i,\eta)\cap\bigcup_{s\geq t+r}\omega(s)\in B(z_{i+1},\varepsilon)\Big)}{\nu_*(B(z_i,\eta))}$$

b) Soient $x,y\in X$; on dit que "x est θ-chaîné faiblement à y" et on note "$x\ \mathcal{f}_{\theta}\ y$", s'il existe un temps minimum $t(x,y)>0$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $z_1,\ldots,z_N\in$ supp. ν_* avec $z_1 = x$ et $z_{N+1} = y$ (notation), tels que
$F^{f,\varepsilon}_{t(x,y)}(z_1,\ldots,z_{N+1}) > \theta^N$.
La relation $x\ R^f_{\theta}\ y$ définie par $x\ \mathcal{f}_{\theta}\ y$ et $y\ \mathcal{f}_{\theta}\ x$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}^f_{\theta}(X) = \left\{x\in X\ :\ x\ R^f_{\theta}\ y\right\}$. On note $\mathcal{C}^f_{\theta}(X)/R_{\theta}$, l'ensemble des classes d'équivalence et on dit qu'une partie D de X est C^f_{θ}-connexe si $D\subset\mathcal{C}^f_{\theta}(X)$ et si D/R^f_{θ} ne contient qu'une seule classe.

Proposition 2.2.6.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

1- $F_t^{f,\varepsilon}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1})$ peut encore s'écrire :

$$F_t^{f,\varepsilon}(z_1,\ldots,z_N;z_{N+1}) =$$

$$\prod_{i=1}^{N} \overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\bigcup_{s\in T}\omega(s)\in B(z_i,\eta))}{\nu_*(B(z_i,\eta))} \cdot \overline{\lim_{\eta}} P(\bigcup_{s\geq t}\omega(s)\in B(z_{i+1},\varepsilon)\,|\,\omega(0)\in\overline{B(z_i,\eta)})$$

2- $x \to_\theta y \to x \overset{f}{\to}_\theta y$

$x \to_\theta y \leftrightarrow x \overset{f}{\to}_\theta y$ (avec N=1)

Démonstrations

1- se démontre de la même manière que pour le chaînage (cf proposition 2.2.4.)

2- découle des définitions des 2 chaînages.

Proposition 2.2.7.

Soient $x,y \in X$; $x \in \text{supp}\ \nu_*$, et soit $\theta > 0$ quelconque. Si la condition suivante est réalisée , alors $x \not\to_\theta y$:
quelque soient $z_2,\ldots,z_N \in \text{supp}\ \nu_*$, on a

$$\overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\bigcup_{s\in T}\omega(s)\in B(z_i,\eta))}{\nu_*(B(z_i,\eta))} \overline{\lim_{\eta}} P(\bigcup_{s>0}\omega(s)\in B(z_{i+1},\varepsilon)\,|\,\omega(0)\in B(z_i,\eta)) \leq \theta,$$

pour tout $t \in T^*$; $i=N,\ldots,2$.

et $\overline{\lim_{\eta}} \frac{P(\bigcup_{s\in T}\omega(s)\in B(z_1,\eta))}{\nu_*(B(z_1,\eta))} \overline{\lim_{\eta}} P(\bigcup_{s>0}\omega(s)\in B(z_2,\varepsilon)\,|\,\omega(0)\in\overline{B(z_1,\eta)}) \leq \theta$

(où $z_1=x$, $z_{N+1}=y$)

Note : Ces hypothèses sont réalisées si, par exemple, $P(\bigcup_{s\in T}\omega(s)\in B) \leq \theta\nu_*(B)$, pour tout $B\in\mathcal{A}$.

Démonstration

la démonstration est similaire à celle du i) de la proposition précédente.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Remarque : Les conditions suffisantes de θ-chainage ou de non θ-chainage (propositions 2.2.5. et 2.2.7) peuvent s'exprimer de manière plus simple si $P_x(\bigcup_{s\in T'} \omega(s)\in .)$ est continu en x, pour tout $T'\subset T$, et s'il existe t_o tel que $P_{\omega(t_o)} << \nu_*$ de densité continue f^{t_o}. Par exemple,
$F^{\varepsilon}_t(z_1;z_2)\geq f^{t_o}(z_1)P_z(\bigcup_{s\geq t} \omega(s) \in B(z_2,\varepsilon))$.

Exemples :

On note désormais f^t pour la densité de $P_{\omega(t)}$ par rapport à ν_*, lorsqu'elle existe.
1- On suppose que le système stochastique est obtenu en prenant un système déterministe défini sur X compact avec des conditions initiales régies par la loi μ ; on suppose aussi que supp.ν_*=X, que pour tout $t \in T$, f^t existe et est continue et qu'il existe $\theta \geq 0$ tel que $f^t(x) > \theta$, pour tout $t \in T$, $x \in X$; alors , on a : pour tout $x, y \in X$, $xR_\theta\, y \longleftrightarrow xRy$, (où R note la relation de chaînage au sens de Ruelle Bowen . (Cosnard, Demongeot, (1985)).

2- On suppose que A est un ensemble absorbant ν-récurrent et que supp. $\nu_* \supset A$ et supp. $\nu \supset A$. Soit $\theta > 0$. Si l'une ou l'autre des conditions suivantes i) ou ii) est réalisée, alors A est C_θ-connexe :

i) il existe $t \in T$ tel que f^t existe, est continue et vérifie $f^t(x) > \theta$, pour tout $x \in A$.

ii) $\nu_*(x) = 0$, pour tout $x \in A$.
(l'existence d'ensembles absorbants ν-récurrents est assurée par la décomposition de Doeblin).

Démonstrations :

1- on suppose $x \mapsto y$:

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\exists t(x,y) > 0 : \forall \varepsilon > 0, \exists t_1,\ldots,t_N \geq t(x,y), z_1,\ldots,z_{N+1} \in X$, avec $z_1 = x$, $z_{N+1} = y$ tels que $d(\omega_{z_i}(t_i), z_{i+1}) < \varepsilon$, $i=1,\ldots,N$.
Ce qui implique $P_{z_i}(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon) = 1$, $i=1,\ldots,N$ (car il existe une trajectoire et une seule passant par z_i et $\omega_{z_i}(t_i) \in B(z_{i+1},\varepsilon)$. Par continuité de $\omega_z(s)$ en z pour tout s fixé, il existe η_o suffisamment petit tel que pour tout $z \in B(z_i,\eta_o)$, $d(\omega_z(t_i), z_{i+1}) < \varepsilon$. Par conséquent,

$$P\Big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon) \,\Big|\, \omega(o) \in B(z_i,\eta)\Big) = \int_{B(z_i,\eta)} \frac{P_z\big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon)\big)\, d\mu(z)}{\mu(B(z_i,\eta))} = 1,$$

pour tout $\eta < \eta_o$, $i=2,\ldots,N$

et de même $P\Big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_2,\varepsilon) \,\Big|\, \omega(o) \in \overline{B(z_1,\eta)}\Big) = 1$.

Et donc, comme $f^t(x) > \theta$, pour tout $x \in X$, $t \in T$, les conditions i, de la proposition 2.2.5. sont vérifiées, i.e $x \to_\theta y$.
Inversement, on suppose $x \to_\theta y$:
$\exists\, t(x,y) > 0$, $z_1,\ldots,z_{N+1} \in X$, avec $z_1 = x$ et $z_{N+1} = y$, tels que $F^{\varepsilon}_{t(x,y)}(z_1,\ldots,z_N; z_{N+1}) > \theta^N$. Ce qui implique,

$$\overline{\lim_{\eta}} P\Big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon) \,\Big|\, \omega(0) \in \overline{B(z_i,\eta)}\Big) > 0, \quad i=1,\ldots,N.$$

Par conséquent, pour tout $i=1,\ldots,N$, il existe une suite $\{\eta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\int_{B(z_i,\eta_m)} \frac{P_z\big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon)\big)}{\mu(B(z_i,\eta_m))}\, d\mu(z) > 0$.

Et donc, pour tout $i = 1,..,N$, et pour tout m, il existe $B_m \subset B(z_i,\eta_m)$ avec $\mu(B_m) > 0$ et $z_i \in \overline{B_m}$, tel que $P_z\big(\bigcup_{s\geq t(x,y)} \omega(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon)\big) > 0$, pour tout $z \in B_m$. Or cette quantité vaut 1 ou 0 selon qu'il existe ou non une trajectoire déterministe passant par z et $B(z_{i+1},\varepsilon)$. Etant positive, elle vaut donc 1, pour tout $z \in B_m$.
Et donc pour tout $z \in B_m$, il existe $s \geq t(x,y)$ tel que $\omega_z(s) \in B(z_{i+1},\varepsilon)$. Alors, soit $z_i \in B_m$, soit $z_i \notin B_m$. Dans ce dernier cas, comme $z_i \in \delta B_m$, par continuité de $\omega_z(s)$ en z, il

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

existe $s \geq t(x,y)$ tel que $\omega_{z_i}(s) \in \overline{B(z_{i+1},\varepsilon)}$. Et donc $x \to y$.

2- Par hypothèse de ν-récurrence sur A, on a ,

$P_x\left(\bigcup_{t>0} \omega(t) \in B\right) = 1$, pour tout $x \in A$, $B \subset A$, $\nu(B) > 0$. On en déduit. pour tout $t_0 > 0$:

$$P_x\left(\bigcup_{t>t_0} \omega(t) \in B\right) = \int_X P_y\left(\bigcup_{t-t_0>0} \omega(t-t_0) \in B\right).dP^{t_0}(x,y)$$

$$\geq P^{t_0}(x,A) = 1$$

(car A est absorbant).

Par conséquent, d'après la proposition 2.2.5 i) ou ii), on a $x \to_\theta y$, pour tout $x,y \in A$ (il suffit de prendre $z_1=x$ et $z_2= y$).

On définit maintenant un confineur élémentaire et ses propriétés possibles.

<u>Définitions 2.2.5.</u> ((θ,ε)-confineur)

a) A est un (θ,ε)-confineur élémentaire si les conditions suivantes sont réalisées :

i) $A \in \mathcal{A}$; $\nu_*(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)) > 0$; $\mathcal{L}_0(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)) \overset{\nu-0}{=\!=} A$.

ii) pour toute composante C_θ-connexe C de A, il n'existe pas d'ensemble C_θ-connexe $C' \supset C$ tel que $\nu(C') > \nu(C)$ et $C' \cup A$ vérifie i).

iii) il n'existe pas A" tel que $A'' \cap A \neq \emptyset$, $\nu_*(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A'') \cap \mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A) > 0$, $\nu(A'') < \nu(A)$ et A" vérifie i) et ii).

<u>Remarque</u> : Si A est un $(\theta-\varepsilon)$-confineur élémentaire, alors A est défini à un ensemble ν-négligeable près et $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)$ peut être défini à un ensemble ν_*-négligeable près (proposition 2.2.3.). Dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$ et ν est la meusre de Lebesgue et si le confinement a lieu uniquement sur des ensembles ν-négligeablestels que des

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

ensembles inclus dans $\mathbb{R}^m$, $m < n$, ou des ensembles dénombrables de points, alors, tout ensemble A de mesure ν-nulle qui va contenir l'ensemble minimal vérifiant les 3 conditions précédentes, va aussi vérifier ces 3 conditions et être un confineur. Afin de distinguer l'ensemble minimal adéquat, des autres confineurs "plus gros" au sens de l'inclusion, mais de même mesure ν, on pose la propriété suivante.

b) un $(\theta-\varepsilon)$-confineur élémentaire A est minimal s'il vérifie la condition

iii)bis : il n'existe pas de (θ,ε)-confineur élémentaire $A'' \subsetneq A$.

Remarques :

1) Supposons que ν est la mesure de Lebesgue. Si la loi définie par $\{P(L(\omega)=A)\}_{A\subset X}$ est absolument continue par rapport à ν, iii)bis ne peut etre réalisé. Mais si cette loi est absolument continue par rapport à une mesure discrète alors les seuls confineurs possibles seront des ensembles de mesure ν-nulle contenant l'ensemble dénombrable de points minimum vérifiant les 3 propriétés du confineur. iii)bis est donc réalisé pour cet ensemble minimal.

2) En déterministe, un attracteur faible A vérifie automatiquement les 2 propriétés suivantes :

i) A est c-connexe

ii) $L(A) \subset A$

Ces propriétés sont la conséquence des propriétés de semi-flot continu des trajectoires. Ici aucune hypothèse de ce type sur les trajectoires elles-mêmes n'a été imposée. Par conséquent, en général, un confineur élémentaire ne sera pas C_θ-connexe (ni même n'appartiendra à $\mathcal{C}_\theta(X)$), et de A, on pourra confiner à l'extérieur de A avec éventuellement même une assez forte probabilité $\left(\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta(A^c)\neq 0\right)\right)$. On en déduit la propriété suivante :

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

c) Un (θ,ε)-confineur élémentaire est dit faible s'il vérifie la condition iv) :

iv) $A \subset \mathcal{C}_\theta(X)$ et $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A^c)\setminus\mathcal{B}_\theta^{i\cdot\varepsilon}(A)\right) = 0$

Remarque : Si $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta^{i\cdot\varepsilon}(A)\right) = 0$, alors $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A^c)\right) = 0$. Pour $\varepsilon = 0$, si $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta^i(A)\right) \neq 0$, alors $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta(A^c)\right) = 0$, pour $\theta \geq \sup_A f(x)/2$ (en effet, $x \in \mathcal{B}_\theta^i(A)$ implique $P_x(L(\omega)\subset A).f(x) > \theta$. et $x \in \mathcal{B}_\theta(A^c)$ implique $P_x\left(L(\omega)\subset A^c\right).f(x) > \theta$. Par conséquent, $f(x) > 2\theta$. (ce qui n'est pas possible.)
Pour $\varepsilon \neq 0$, la condition $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A^c)\right) = 0$ n'était pas "raisonnable" en général (puisque $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A^c)$ peut être inclus dans $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot\varepsilon}(A)$).

d) Un (θ,ε)-confineur faible est dit fort, si $\nu_*(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A^c)) = 0$ et s'il existe un voisinage de A, V(A) tel que $\nu_*\left(V(A)\setminus\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\cup A\right)\right) = 0$ (i.e. V(A) est inclus dans $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)\cup A$ à un ensemble ν_*-négligeable près.

e) A est un (θ,ε)-auto-confineur élémentaire (resp minimal, faible) si les conditions précédentes a) (resp. b) c)) sont réalisées où $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)$ est remplacé par $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot\varepsilon}(A)$. Il est dit fort si $\nu_*\left(\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A^c)\right) = 0$.

f) Soit A un $(\theta-\varepsilon)$-confineur (resp. auto-confineur). $A' \subset A$ est une zone de θ-confinement de niveau α, si A' vérifie les 3 conditions i) ii) et iii) d'un $(\theta-\varepsilon)$-confineur élémentaire dans lesquelles $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon(A)$ est remplacé par $\mathcal{B}_\theta^\alpha(A',A)$

$$= \left\{ x \in (X\setminus A) : \overline{\lim_{\eta\to 0}} \frac{P\left(\bigcup_{t\in U} \omega(t) \in B(x,\eta) \cap \{\sigma_\omega(A\setminus A'|A) \geq 1\alpha\}\right) > \theta}{\nu_*(B(x,\eta))} \right\}$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

(resp. $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot\alpha}(A',A) = \{x\in A:\ldots\}$)

La définition précédente permet de localiser globalement $L(\omega)$ par rapport à A. Si $L(\omega)$ a une loi discrète sur X, alors il peut être plus intéressant de localiser $L(\omega)$ de manière plus précise par rapport à chaque point de A. On est ainsi conduit à des définitions de type "local".
On suppose donc que $\{P(L(\omega)\cap\{y\} \neq \emptyset)\}$ est non nul uniquement pour des y appartenant à un ensemble dénombrable.

Définitions 2.2.6 :

a) Pour tout $y \in X$, on appelle "densité de confinement local relativement à U", la fonction F_y^l :

$$F_y^l(x) = \overline{\lim_{\eta\to 0}} \frac{P\left(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in B(x,\eta)\cap\{L(\omega)\cap\{y\}\neq\emptyset\}\right)}{\nu_*(B(x,\eta))}$$

b) On appelle "bassins de θ-confinement local relativement à U" respectivement dans X et dans X^T, les ensembles suivants :

$$\mathcal{B}_\theta^l(A) = \left\{x \in \text{supp.}\nu_* \cap X\backslash A : L_\theta^l(x) \subset A\right\}, \text{ où}$$

$$L_\theta^l(x) = \left\{y \in X : F_y^l(x) > \theta\right\} ; \text{ et}$$

$$B_\theta^l(A) = \bigcup_{\substack{y\in U L_\theta^l(x) \\ x\in\mathcal{B}_\theta^l(A)}} \{L(\omega)\cap\{y\} \neq \emptyset\} \cap \mathcal{B}_\theta^l(A)_U .$$

c) On appelle "bassins internes de θ-confinement local relativement à U", dans X et X^T, les ensembles suivants :

$$\mathcal{B}_\theta^{i\cdot l}(A) = \left\{x \in A : L_\theta^l(x) \subset A\right\}, \text{ et}$$

$$B_\theta^{i\cdot l}(A) = \bigcup_{\substack{y\in U L_\theta^l(x) \\ x\in\mathcal{B}_\theta^l(A)}} \{L(\omega)\cap\{y\} \neq \emptyset\} \cap \mathcal{B}_\theta^{i\cdot l}(A)_U$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Ces définitions signifient que les trajectoires issues du bassin $\mathcal{B}_\theta^1(A)$ (où $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot 1}(A)$) confinent en tout point y de A^c avec une densité de confinement inférieure ou égale à θ.

Préposition 2.2.8.

1- $F_y^1(x)$ peut encore s'écrire :

$$F_y^1(x) = \overline{\lim_\eta} \frac{P(\bigcup_{t\in U} \geq(t)\in B(x,\eta))}{\nu_*(B(x,\eta))} \overline{\lim_\eta} P(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset | \omega(0)\in B(x,\eta))$$

2- Supposons $U = \{t_o\}$ et $P\omega(to) << \nu_*$ de densité f^{to}. Si $f^{to}(x)$ et $P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset)$ sont continus pour tout x sauf pour un ensemble ν_*-nul de points, on a,

$$F_y^1(x) \overset{\nu_* PP}{=\!=} f^{to}(x).P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset)$$

Par conséquent, $\mathcal{B}_\theta^1(A) \in \mathcal{A}$ à un ensemble ν_*-négligeable près, et $B_\theta^1(A) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$, à un ensemble P-négligeable près (et de même pour $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot 1}(A)$ et $B_\theta^{i\cdot 1}(A)$).

3- Supposons $U = \{t_o\}$ ou $[0,t_o[$ avec $to < \infty$. Si ν_* et $P(\bigcup_{t\in U} \omega(t)\in .)$ vérifient l'hypothèse (2.2.2), alors $F_y^1(x)$ est mesurable en x. Par conséquent, $\mathcal{B}_\theta^1(A) \in \mathcal{A}$ et $B_\theta^1(A) \in \mathcal{A}^{\otimes T}$ (et de même pour $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot 1}(A)$ et $B_\theta^{i\cdot 1}(A)$).

Démonstrations :

1- se montre comme la proposition 2.2.2. 2- .

2- $\mathcal{B}_\theta^1(A) = \mathcal{B} \cap A^c$; $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot 1}(A) = \mathcal{B} \cap A$, où

$$\mathcal{B} = \bigcup_{y\in A} \left(F_y^1\right)^{-1}(]\theta,\infty)) \cap \bigcap_{y\in A^c} \left(F_y^1\right)^{-1}([0,\theta]).$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$. $\left(F_y^1\right)^{-1}(]\theta,\infty)) \neq \emptyset$ uniquement sur un ensemble dénombrable de $y \in X$. De plus, lorsque $U = \{t_o\}$, $F_y^1(x) \overset{\nu_* PP}{=\!=} f^{t_o}(x).P_x(L(\omega)\cap\{y\} \neq \emptyset)$ (même démonstration

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

que la proposition 2.2.2.3-). Par conséquent, $\left(F_y^1\right)^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ pour tout $I \subset \mathbb{R}^*$. Par conséquent, $\bigcup_{y\in A^c}\left(F_y^1\right)^{-1}(]\theta,\infty]) \in \mathcal{A}$. De même, $\bigcap_{y\in A^c}\left(F_y^1\right)^{-1}([0,\theta]) = \left[\bigcup_{y\in A^c}\left(F_y^1\right)^{-1}(]\theta,\infty)\right]^c$ et donc $\bigcap_{y\in A^c}\left(F_y^1\right)^{-1}([0,\theta]) \in \mathcal{A}$. Par conséquent $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

3- Lorsque $U = \{t_0\}$ ou $[0,t_0[$ avec $t_0 < \infty$ et si ν_* et $P(\bigcup_{t\in U}\omega(t)\in .)$ vérifient l'hypothèse (2.2.2), alors $F_y^1(x)$ est mesurable en x, et donc on montre comme précédemment que $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

Définitions 2.2.7 :

a) A est un θ-confineur local élémentaire (resp. minimal, faible et fort) si les conditions a) (resp. b) c) et d)) des définitions 2.2.5 sont vérifiées où $\mathcal{B}_\theta^\varepsilon$ et $\mathcal{B}_\theta^{i,\varepsilon}$ sont remplacés par $\mathcal{B}_\theta^1$ et $\mathcal{B}_\theta^{i,1}$.

b) A est un θ-auto-confineur local élémentaire (resp. minimal, faible) s'il vérifie les conditions d'un θ-confineur local élémentaire (resp. minimal, faible) où $\mathcal{B}_\theta^1(A)$ est remplacé par $\mathcal{B}_\theta^{i,1}(A)$. Il est dit fort si $\nu_*(\mathcal{B}_\theta^1(A^c))=0$.

Remarque : Dans le cas où ν est la mesure de Lebesgue, tout confineur local étant discret, est de mesure ν-nulle, et contient un ensemble minimal de points $\{\xi_i\}$ vérifiant les 3 conditions d'un confineur local élémentaire. Un tel ensemble minimal de points se localise grâce à la propriété iii)bis de minimalité (cf la remarque qui suit le a) des définitions 2.2.5).

2.3 Exemples de confineurs

On note, comme précédemment, f^t pour la densité de $P_{\omega(t)}$ par rap-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

port à ν_*, lorsque celle-ci existe ; et par souci de simplification, on pose U = {0}.

1- On reprend l'exemple 1 donné pour le chaînage stochastique. On suppose de plus que $\mu = \nu_*$. Alors tout $(\theta,0)$-confineur élémentaire global ou local est un attracteur, pour tout $\theta<1$.

2- Soit A un ensemble absorbant ν-récurrent, fermé, tel que f^0 existe et est continue sur $A \cap \text{supp.}\nu_*$, et tel qu'il existe un voisinage V(A) de A vérifiant
(H) supp. $\nu \supset V(A)$, et $P_x(L(\omega)\cap V(A)\setminus A \neq \emptyset) = 0$, pour tout $x \in V(A)\setminus A$. Alors, A est un $(\theta,0)$ -auto-confineur pour tout $\theta < \inf_{x\in A'} f^0(x)$, où A' est un sous-ensemble quelconque de A tel que $\nu_*(A') > 0$ (Jacob, (1986)).

3- Dans le cadre des équations différentielles stochastiques, Friedman utilise la notion d'ensemble asymptotiquement stable (p.270 [3]) : un ensemble fermé K non accessible $\left(\text{i.e } P_x\left(\bigcup_{t>0}\{\omega(t)\in K\}\right) = 0, \text{ pour tout } x\in K^c\right)$ est asymptotiquement stable si, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de K et pour tout ϵ positif, il existe un voisinage $\mathcal{U}_\epsilon$ de K tel que :

$$P_x\left(\left\{\omega(t)\in\mathcal{U}, \text{ pour tout } t\geq 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} d(\omega(t),K)=0\right\}\right) \geq 1-\epsilon,$$

pour tout $x \in \mathcal{U}_\epsilon$ K".

L'existence d'ensembles non accessibles asymptotiquement stables est assurée dans certains cas. En particulier, si D est le domaine de définition du système différentiel stochastique, alors, sous certaines conditions supplémentaires (p. 317 [2]), il existe une partie finie de D, K, telle que :
$\tau = \infty \rightarrow P_x\left(\lim_{t\to\infty} d(\omega(t),K) = 0\right) = 1$, pour tout $x\in D$, où τ est le temps de sortie de D.

Si on suppose que f^0 existe, est continue et qu'il existe $D' \subset D$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

avec $\nu_*(D') > 0$ et $\inf_{x\in D'} f^o(x) > 0$, alors on montre que pour tout $\theta < \inf_{x\in D'} f^o(x)$. K est union de un ou plusieurs $(\theta,0)$ confineurs globaux et locaux élémentaires.

4- Soit $\{\omega(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, un processus stationnaire à valeurs dans $(X,\mathcal{A},\pi)$ où π désigne ici la loi stationnaire à chaque instant. On suppose $\pi \ll \nu_*$ de densité f^o continue. Alors, quelque soit la fonction $g \in L^1(\pi)$, si le processus est ergodique, il existe $\theta > 0$ tel que $\{Eg\}$ (où Eg désigne l'espérance de g) est un $(\theta,0)$-confineur global et local fort pour le processus $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\omega(n))$

5- Si $L(\omega) = X$, pour P-presque tout ω, X est un $(\theta,0)$-autoconfineur (et le seul). Si de plus, f^o existe et est continue, et $\sigma_\omega=\sigma$, pour P-presque tout ω où σ est supposé être une probabilité, la zone de θ-confinement de niveau α est l'ensemble A d'aire ν-minimale tel que $\sigma(A) = \alpha$ (délimité par une courbe de niveau de σ pourvu que $\nu_*\left(\left\{x : f^o(x)>\theta\right\} \neq 0\right)$.
On trouve de telles zones de confinement dans le voisinage des attracteurs les plus stables d'un système dynamique déterministe, lorsque le système stochastique est un processus de diffusion obtenu à partir de petites perturbations aléatoires par un processus de Wiener, de ce système déterministe (Freidlin et Wentzell (1984))

Démonstrations :

1- On note B(A), le bassin d'attraction de A.
A chaque trajectoire, ω_x étant associé, de manière biunivoque, un point de départ x, on a, $P_x(L(\omega)\subset A) = 1$, pour tout $x \in B(A)$
$= 0$, pour tout $x \notin B(A)$
Par conséquent, $\mathcal{B}_\theta(A) = B(A)$, à un ensemble μ-négligeable près,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

pour tout $\theta < 1$ (car $\mu = \nu_* \rightarrow f^0(x) = 1$, μ-presque tout x). En outre, $\nu_*(\mathcal{B}_\theta(A)) > 0 \rightarrow B(A) \neq \emptyset$.
De plus, A vérifie
$\mathcal{L}_0 o \mathcal{B}_\theta(A) = \overset{\nu-0}{A} \longleftrightarrow$ pour tout $L(D) \in \mathcal{L}_0 o \mathcal{B}_\theta(A)$, $\nu(L(D)) = \nu(A)$, i.e. pour tout $D \subset B(A)$, tel que $\mu(D) = \mu(\mathcal{B}_\theta(A))$ $(= \mu(B(A)))$, on a : $\nu(L(D)) = \nu(A) \leqslant \nu(LoB(A))$, car $L(D) \subset LoB(A)$; et $\nu(A) \geq \nu(LoB(A))$, car $A \supset LoB(A)$; d'où à un ensemble ν-négligeable près, A vérifie $LoB(A) = A$
En outre $x R_\theta y \longleftrightarrow x R y$, pour tout $\theta < 1$. Par conséquent, si A vérifie la condition ii) du $(\theta,0)$-confineur élémentaire, alors A vérifie la condition ii) de l'attracteur à un ensemble ν-négligeable près ; et de même pour la condition iii). Par conséquent, à un ensemble ν-négligeable près, A vérifie les 3 conditions:
i) $LoB(A) = A$
ii) Pour toute composante c-connexe C de A, il n'existe pas C' c-connexe tel que C' $\cup$ A vérifie i).
iii) Il n'existe pas $A' \subsetneq A$ tel que A' vérifie i) et ii).
Or si A vérifie ces 3 conditions, A vérifie aussi les 3 conditions analogues relatives à $B_s(A)$ qui définissent un attracteur faible. Et donc tout $(\theta,0)$-confineur global élémentaire est, à un ensemble ν-négligeable près, un attracteur faible. De plus, s'il vérifie la condition iii) bis de minimalité, alors c'est exactement un attracteur.

2- La démonstration est donnée dans (Jacob(1986)).. On montre que $L(\omega) \overset{\nu}{=} A$, pour P-presque tout ω partant de A, et donc $\mathcal{L}_0\left(\mathcal{B}_\theta^i(A)\right) \overset{\nu-0}{=} A$. On montre ensuite que l'on ne peut grossir A pour le principe d'invariance, à cause de l'hypothèse (H) et on ne peut diminuer A à cause de la récurrence.
Et donc A est un $(\theta,0)$-auto-confineur global élémentaire.

3- On note $K = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$. On a $P_x\left(\lim_{t \to +\infty} d(\omega(t),K) = 0\right) = 1$, pour tout $x \in D$, ce qui implique que $P_x(L(\omega) \cap \{\xi_i\} \neq \emptyset) = 1$ pour des $\xi_i \in K$, $P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset) = 0$, pour tout $y \notin K$, et $P_x(L(\omega) \subset K) = 1$, pour tout $x \in D$, i.e. si D' est le plus grand sous-ensemble de D tel que $\inf_{x \in D'} f^0(x) > 0$, alors pour tout

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\theta < \inf_{x\in D'} f^0(x)$, on a
$\mathcal{B}_\theta(K) = \mathcal{B}^1_\theta(K) = D'\cap K^c$ et $\mathcal{B}^i_\theta(K) = \mathcal{B}^{i-1}_\theta(K) = D'\cap K$. On suppose que $\nu_*(D') \neq 0$ (sinon le problème n'a pas de sens). K vérifie alors les conditions i) et ii) d'un $(\theta,0)$- confineur (ou auto-confineur) global et local (on enlève au besoin les points de K n'appartenant pas à $L(D'\cap K^c)$ ou à $L(D'\cap K)$. Par contre K ne vérifie pas forcément la condition iii) et donc K peut être constitué de plusieurs confineurs (non nécessairement disjoints).

4- On note $\gamma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\omega_x(k))$. On suppose $\pi \ll \nu_*$, de densité $f^0(.)$. Le processus étant ergodique, $\gamma_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} Eg$, pour P-presque tout x et donc pour ν_*-presque tout $x \in \text{supp.}\pi$. Par conséquent, $P_x(L(\omega) = \{Eg\}) = 1$ pour ν_*-presque $x \in \text{supp.}\pi$; où P_x désigne la loi canonique conditionnellement au point initial x.
Soit $\theta < \inf_{x\in X'} f^0(x)$, où $x' \subset \text{supp.}\pi$ désigne le plus grand sous-ensemble (à un ensemble π-négligeable près) tel que $\inf f^0(x) > 0$. Alors,
$\mathcal{B}_\theta(\{Eg\}) = \mathcal{B}^1_\theta(\{Eg\}) = \left\{x \in \text{supp.}P\backslash\{Eg\} : f^0(x) > \theta\right\}$ $\{Eg\}$ vérifie le principe d'invariance. De plus on ne peut pas grossir $\{Eg\}$ par C_θ-connexité. On en déduit que $\{Eg\}$ est un $(\theta,0)$-confineur global et local élémentaire. $\{Eg\}$ est aussi un$(\theta,0)$-auto-confineur global et local fort si $Eg \in \text{supp.}\,\pi$, $f^0(Eg) > \theta$, $\nu_*(Eg) > 0$.

5- $\mathcal{B}^\alpha_\theta(A,X) = \left\{x \in X : P_x\left(\sigma(A^c) \geq \alpha\right).f^0(x) > \theta\right\}$.
$= \left\{x \in X : f^0(x) > \theta\right\}$, si $\sigma(A^c) \geq \alpha$
$\nu(A\backslash L(D)) = \emptyset$ pour tout $L(D)$. Et donc, tout A tel que $\nu_*(\mathcal{B}^\alpha_\theta(A,X)) \neq 0$, vérifie le principe d'invariance. Si A vérifie la condition ii) du $(\theta,0)$-auto-confineur, alors $\sigma(A^c) = \alpha$, et si A vérifie aussi la condition iii), alors A est l'ensemble d'aire ν-minimale tel que $\sigma(A^c) = \alpha$, pourvu que $\nu_*(\mathcal{B}^\alpha_\theta(A,X)) \neq 0$, i.e. que $\nu_*(\{x : f^0(x) > \theta\}) \neq 0$.

Remarque : si $\nu_*(x) = 0$, pour tout $x \in X$,alors à cause de la récurrence $(L(\omega) = X)$, X est C_θ-connexe pour tout $\theta \geq 0$ (cf. proposition 2.2.5 ii))

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

2.4. Comparaison des bassins de confinement

Proposition 2.4.1 :

On note $f(x) = \overline{\lim_{\eta}} \dfrac{P(\bigcup_{t\in U} \omega(t) \in B(x,\eta))}{\nu_*(B(x,\eta))}$

Soit $\theta' \geq \|f\|^{\mathcal{B}_\theta(A)} - \theta$, où $\|f\|^{\mathcal{B}_\theta(A)} = \sup_{x\in\mathcal{B}_\theta(A)} f(x)$.

1- $\mathcal{B}^1_\theta(A) \cap \mathcal{B}^1_\theta(A^c) = \varnothing$: $\mathcal{B}_\theta(A) \subset \mathcal{B}_{\theta}^{1}.(A)$

2- $\mathcal{B}_\theta(A) \subset \mathcal{B}^1_\theta.(A)$

3- $\mathcal{B}_\theta(A) \cap \{x \in X : f(x) \leqslant 2\theta\} \subset \mathcal{B}^1_\theta(A)$

4- $\mathcal{B}_\theta(A) \cap \mathcal{B}_\theta.(A^c) = \varnothing$

De plus, si A est absorbant et ouvert,

5- $\mathcal{B}^1_\theta(A) \subset \mathcal{B}_\theta(A)$.

Démonstrations :

1- $\mathcal{B}^1_\theta(A) \cap \mathcal{B}^1_\theta(A^c) = \varnothing$, par construction même de $\mathcal{B}^1_\theta$:

2- Soit $x \in \mathcal{B}_\theta(A)$: $P_x(L(\omega) \subset A).f(x) > \theta$

$\Longleftrightarrow P_x\left(\bigcap_{y\in A^c} L(\omega) \cap \{y\} = \varnothing\right).f(x) > \theta$

$\rightarrow P_x(L(\omega) \cap \{y\} = \varnothing).f(x) > \theta$, pour tout $y \in A^c$.

Par conséquent,

$P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \varnothing).f(x) < f(x)-\theta$, pour tout $y \in A^c$

$< \|f\|^{\mathcal{B}_\theta(A)} - \theta$, pour tout $y \in A^c$.

Et donc $x \in \mathcal{B}^1_\theta(A)$.

3- D'après 2-, $x \in \mathcal{B}_\theta(A) \Longrightarrow P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \varnothing).f(x) < f(x)-\theta$, pour tout $y \in A^c$ et donc si $f(x) \leqslant 2\theta$, $x \in \mathcal{B}^1_\theta(A)$.

4- $x \in \mathcal{B}_\theta(A)$: $P_x\left(L(\omega) \cap A^c = \varnothing\right).f(x) > \theta$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Par conséquent, $P_x\left(L(\omega) \cap A^c \neq \emptyset\right).f(x) < f(x)-\theta < \theta'$ et comme $P_x\left(L(\omega) \subset A^c\right) \leq P_x\left(L(\omega) \cap A^c \neq \emptyset\right)$, alors $x \notin \mathcal{B}_\theta.(A^c)$

5- Si A est absorbant, $P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset) \leq P_x(L(\omega) \subset A)$ pour tout $y \in \overset{o}{A}$. Si
$x \in \mathcal{B}^1_\theta(A)$, $P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset).f(x) > \theta$, pour tout $y \in L^1_\theta(x)$. Par conséquent, si $y \in \overset{o}{A} \cap L^1_\theta(x)$, alors $x \in \mathcal{B}_\theta(A)$.
Or $\overset{o}{A} = A$ et donc $\mathcal{B}^1_\theta(x) \subset \mathcal{B}_\theta(A)$.

2.5 Bifurcations

On parle de bifurcation, lorsque les variations d'un paramètre du système stochastique induisent un changement qualificatif des confineurs, dans leur géométrie ou dans leur description temporelle.
Dans un système déterministe, grâce aux propriétés du flot, les trajectoires sont toutes disjointes, de même que les attracteurs et leurs bassins d'attraction. L'ensemble des trajectoires, des attracteurs et de leurs bassins forme donc une structure relativement simple dont on peut suivre les changements en fonction des variations des paramètres du système.
En stochastique, la situation peut-être beaucoup plus complexe et on définira donc non seulement des bifurcations (géométriques ou temporelles) de type global, mais aussi des bifurcations (géométriques ou temporelles) de type local.

On suppose que la loi P du processus est fonction d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
On note :
- $C(\alpha)$ = {(θ,ε)-confineurs et auto-confineurs (resp. θ-confineurs et auto-confineurs locaux) obtenus pour la valeur α du paramètre}.
- A, un (θ,ε) confineur ou auto-confineur (resp. θ-confineur ou auto-confineur local) obtenu pour la valeur α_o du paramètre.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

- $C_A(\alpha)$ = { (θ,ε)-confineurs et auto-confineurs (resp. θ-confineurs et auto-confineurs locaux) A' non disjoints de A, et réalisant le minimum de
ν_*(bassin de confinement de A Δ bassin de confinement de A') pour la valeur α du paramètre}

2.5.1 Bifurcations géométriques

Définition 2.5.1.

α_0 est dite valeur de bifurcation géométrique (resp. valeur de bifurcation géométrique locale pour A) si il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $\eta>0$ (ou tout $\eta<0$) avec $|\eta| \leq \gamma$, l'une des 2 conditions suivantes est réalisée:
i) Card $C(\alpha_0+\eta) \neq$ Card $C(\alpha_0)$ (resp.
Card $C_A(\alpha_0+\eta) \neq$ Card $C_A(\alpha_0)$)
ii) Il existe dans $C(\alpha_0+\eta)$ (resp. $C_A(\alpha_0+\eta)$), un confineur de type d'homotopie différent de ceux de $C(\alpha_0)$ (resp. $C_A(\alpha_0)$ (Godbillon (1971)).

2.5.2. Bifurcations temporelles

Définitions 2.5.2.1

Désignons par i la valeur inf T.
Soit un confineur C supposé C_θ-connexe. Pour tout $\tau>0$ dans T et pour tout $\varphi \in [0,\tau[$, C_φ^τ désigne l'ensemble limite des trajectoires $\omega \in B_\theta(c)$ pour la sous-dynamique des temps $\{n\tau+\varphi-e_\omega\}_{n\in N}$, où e_ω est le temps d'entrée de ω dans une partie de $C_\circ$ notée C_0^τ et appelée sous-confineur origine de C. C_0^τ sera choisi tel que P - presque toutes les trajectoires $\omega \in B_\theta(C)$ l'intersectent. Soit donc la famille des sous-confineurs $\left\{C_\varphi^\tau\right\}_{\varphi\in[0,\tau[}$.

a) La η-période d de description de C est définie par :

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$d = \inf \{\tau \in \bar{T} : \nu\left[C \Delta \left[\bigcup_{\varphi \in [0,\tau[} C_\varphi^\tau\right]\right] \leq \eta \text{ et}$$

$$\exists\, \tau' \neq \tau : \inf_{\varphi<\tau'} \nu\left(C_\varphi^{\tau'}\right) < \inf_{\varphi<\tau} \nu\left(C_\varphi^{\tau}\right),\ \sup_{\varphi<\tau'} \nu\left(C_\varphi^{\tau'}\right) \leq \sup_{\varphi<\tau} \nu(C_\varphi^\tau) + \eta \}$$

b) Les différents types de périodes sont les suivants :
- type singulier si d=i
- type périodique si i<d<∞
- type chaotique si d=∞

Le bassin de C_φ^τ pour la sous-dynamique $\{n\tau\}_{n\in\mathbb{N}}$, est dit isochron stochastique de phase φ. C_φ^τ est constitué des états initiaux des trajectoires $\omega \in B_\theta(A)$, ayant toutes les mêmes phases φ dans le confineur.

Exemple :

Reprenons l'exemple 2 du § 2.3. Soit d la période de description du confineur A. Il existe un pseudo-cycle stochastique $\pi\mathcal{C}_t \subset A$ tel que $\nu\left(\bigcup_t \mathcal{C}_t\right) = A$, et la période de ce cycle coïncide avec la 0-période du confineur (Jacob,(1986)).

Définitions 2.5.2.2 :

α_0 est dite valeur de bifurcation temporelle (resp. valeur de bifurcation temporelle locale pour A) si il existe $\gamma>0$ tel que pour tout $\eta>0$ (ou tout $\eta<0$) avec $|\eta| \leq \gamma$, il existe dans $C(\alpha_0+\eta)$ (resp. $C_A(\alpha_0+\eta)$), un confineur ayant une composante C_θ-connexe de type de période différent de ceux de $C(\alpha_0)$ (resp. $C_A(\alpha_0)$).

2.6 Généralisation

Les définitions des § 2.2 et 2.5 restent valables pour des processus non Markoviens homogènes.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

COSNARD M. & DEMONGEOT J. (1985). Attracteurs : une approche déterministe. C.R. Acad. Sc.,300,551-556.

DACUNHA-CASTELLE D., DUFLO M. (1982). Probabilités et Statistiques, tomes 1 et 2. Masson, Paris.

FRIEDLIN M.I.,WENTZELL A.D. (1984).Random Pertubations of Dynamical Systems.Springer-Verlag, New-York.

FRIEDMAN A. (1976). Stochastic differential equations and applications. Academic Press, New York.

GODBILLON C. (1971). Eléments de topologie algébrique. Hermann, Paris.

HENNEQUIN P.L., TORTRAT A. (1965) Théorie des probabilités et quelques applications. Masson, Paris.

JACOB C. (soumis) Cycles limites stochastiques et confineurs pour processus Markoviens. C.R. Acad. Sc.

KRASNOSEL'SKII M.A. (1968) Translation operator along trajectories of differential equations. Transl. of Math. Monographs, AMS, Providence.

KUSHNER H.J. (1967) Stochastic stability and control. Academic Press, New York.

LAUSBERG C. (1987) Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange. Thèse Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

MATHERON G. (1975). Random sets and Integral geometry. Wiley, New York.

MINORSKY, N. (1974) Nonlinear oscillations. Krieger, New York.

NEVEU J. (1970). Bases mathématiques du calcul des probabilités. MASSON et Cie, Paris.

PAVLIDIS T. (1973) Biological oscillators : their mathematical analysis, Academic Press, New York.

TAKENS F. (1985) On the numerical determination of the dimension of an attractor. Lect. Notes in Maths 1125 _ Springer _ 99-106.

WINFREE A.T. (1980) The geometry of biological time. Bioma-thematics 8, Springer-Verlag , New York.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 2 .

STOCHASTIC LIMIT CYCLES AND CONFINERS : DEFINITIONS AND COMPARATIVE STUDY IN THE CASE OF MARKOVIAN PROCESSES.

Christine JACOB, Laboratoire de Biométrie INRA-CNRZ, 78350 JOUY-EN-JOSAS

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

I. INTRODUCTION.

This paper deals with the asymptotic dynamics of processes, mainly when there exists a "random rhythm" : rhythms which are more or less near a deterministic rhythm are present in many fields, mainly in all the fields of Biology, as for example, in dynamics of populations [18], or in Biochemistry ([7], [14] [22], [24]), or in mechanical Biology as it is the case for the cyclic contractions of lungs [2] or of cells like amoeboid cells or leukocytes, or of slime mold physarum [16].

We define here (in §II.2 and II.3) *stochastic cycles* $\mathcal{C} = \pi_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$ for any set of times T and any stochastic process, by generalizing Orey's definition for markovian processes in discrete time : the process passes again through each of the different sets $\mathcal{C}_t$ at equal interval of time d called the period of the cycle. Properties of such cycles are given. First, we prove that $\cup_t \mathcal{C}_t$ is an absorbing set and that inversely, an absorbing set is a cycle. We prove also that if the process reaches the cycle, when starting from outside this cycle, then it does not necessarily stay in it, except if T is countable. This implies the notions of a *super-cycle* and of a *super-absorbing* set from which a process cannot get away. Finally, because the $\mathcal{C}_t$ must be all disjointed, if the

cycle is of finished ν-measure (more exactly, $\nu\left(\bigcup_t \mathcal{C}_t\right)<\infty$), then there is at most a countable set of $\mathcal{C}_t$ of positive ν-measure . Because of this property, a stochastic cycle is not generally an interesting concept to define mathematically a random cyclic behaviour in continuous time. Thus we are led to define what we called a stochastic *pseudo-cycle* $\mathcal{C} = \pi_t \mathcal{C}_t$ where the $\mathcal{C}_t$ are not necessarily disjointed. This pseudo-cycle is obtained by adjoining to the process $\{x_t\}$ an other stochastic process which determinates the order of passing of $\{x_t\}$ through the different $\mathcal{C}_t$ (§ II.4).This definition enables us to define as cycles, behaviours which, intuitively, we would like call like that, whether they are in discrete time or in continuous time, whether the rhythms exist in mean or in variance, and whether the process is of the time series type, or depends also on the space, like a geometric process with a form dependent on time. Mechanical contractions of organs or of cells are of this type, as well as the geometric configurations of the number 1 in boolean automata networks. These are "particularly well adapted to describe the logics of interactions and feedbacks between large number of functionnaly different elements" [12]. The main fields of application of automata networks are Biology (Epidemiology, neuronal activity in the brain, dynamics of populations), nuclear physics and solids physics.

The following paragraphs III, IV and V deal with the asymptotic probabilistic behaviour of the process according to two different approaches : either we consider the mean behaviour of the process at any time t sufficiently large, or we consider the asymptotic behaviour of each trajectory. The first approach leads to the concept of stochastic limit set (§III) and the second, to the concept of confiner, which is the stochastic equivalent of the notion of attractor defined

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

by Cosnard and Demongeot in the deterministic frame [5] (§ IV). Then, the relations between a stochastic limit set and a confiner for a markovian process are studied (§V). In general, there is no particular relation between a limit set and a confiner. However, we prove, if C is an absorbing set, that there exist some relations between its attraction basin when considered as a stochastic limit set and its confining basin. Moreover if the process is continuous and if C satisfies some additional properties, then C is both a confiner and a stochastic limit set. The proof of this proposition uses lemmas which are the generalization in continuous time of some Orey's lemmas in discrete time. Finally, we prove the existence of a markovian cycle for a ν-irreducible process. This proposition is also the generalization in continuous time of some Orey's proposition in discrete time.

In the last paragraph (§ VI), we give some ideas about the estimation of a ν-recurrent pseudo-cycle and of its period.

In the following, $(x_t)_{t\in T}$ is a separable stochastic process taking values in the space $(X,\mathcal{A})$ where X is a polish space. The space of time T is $\mathbb{R}^+$ (non negative real numbers) or $\mathbb{N}$. The canonical probability law of the process on the canonical space $(X^T, \mathcal{A}^{\otimes T})$, is P. Let ν be a positive and σ-finite measure on X with supp.ν=X. We will suppose that the initial law P_{X_o} (which will be denoted μ) is absolutely continuous with respect to ν with a density f.

Notes: 1. all the proofs are given in an appendix.

2. $\prod_{t\in]a,d[} C_t$ is an abusive notation for the function $\{t \longrightarrow \mathcal{C}_t\}$ from $]a,d[$ to $\mathcal{P}(X)$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

II. STOCHASTIC CYCLES AND PSEUDO-CYCLES.

In paragraphs II.1 and II.2, x_t is an homogeneous markovian process with transition laws $P_x(X_t)$. (In all the following, for measurability problems, the $\mathcal{C}_t$ will be closed, when $T=\mathbb{R}^+$).

II.1. Markovian cycles in discrete time.

In 1971, Orey [21] following Doob in 1953 [11], gave the following definition of a markovian cycle in discrete time ($T=\mathbb{N}$) :

Definition II.1 (Markovian cycle in discrete time).

A sequence $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_d$ of d disjointed sets which belong to $\mathcal{A}$, is a cycle of length d if :
$P_x\left(x_1 \in \mathcal{C}_{j+1(d)}\right) = 1$, for all $x\in\mathcal{C}_j$, for all $j=1,\ldots,d$ (where $P_x(x_1\in B) = P(x_{n+1}\in B | x_n = x)$, for all $n\in\mathbb{N}$; and $r(d) = r(\text{modulo } d)$.).

Assumption of disjunction of the $\mathcal{C}_j$ is essential : otherwise, suppose that $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_{j'} \neq \emptyset$, then the sequence $\mathcal{C}_j\cap\mathcal{C}_{j'},\ldots,\mathcal{C}_{j+d-1}\cap\mathcal{C}_{j'+d-1}$ must be a markovian cycle, if these sets are not empty. The cycle $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_d$ is then reduced to one or several cycles beyond the following sequences :
$\left(\mathcal{C}_j\cap\mathcal{C}_{j'},\ldots,\mathcal{C}_{j+d-1}\cap\mathcal{C}_{j'+d-1}\right)$.
$\left(\mathcal{C}_j\setminus\mathcal{C}_j\cap\mathcal{C}_{j'},\ldots,\mathcal{C}_{j+d-1}\setminus\mathcal{C}_{j+d-1}\cap\mathcal{C}_{j'+d-1}\right)$, and
$\left(\mathcal{C}_{j'}\setminus\mathcal{C}_j\cap\mathcal{C}_{j'},\ldots,\mathcal{C}_{j'+d-1}\setminus\mathcal{C}_{j+d-1}\cap\mathcal{C}_{j'+d-1}\right)$

We can extend this definition to continuous time according to the following manner :

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

II.2. Markovian cycles for any set of times T.

A cycle will no more be defined by a sequence of sets belonging to $\mathcal{A}$, but rather by an equivalence class of sets which belongs to $\mathcal{A}^{\otimes d}$, where $\mathcal{A}^{\otimes d}$ denotes any σ-field of the type $\mathcal{A}^{\otimes J}$ with $J =]\varphi, \varphi+d]$, $\varphi \in T$.

Definition II.2.1.

The sets $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}' \in \mathcal{A}^{\otimes d}$ are equivalent, and we denote $\mathcal{C} \, R \, \mathcal{C}'$, if and only if there exists $\Delta t \in [-d, +d]$ such that $\pi_{t+\Delta t(d)}\mathcal{C}' = \pi_t \mathcal{C}$,for all $t \in]0,d]$, where π_t is the projection operator from X^d to X, at time $t \left(X^d = \underset{t \in]0,d]}{\pi} \left(\pi_t X^d \right) \right)$. (We denote $\mathcal{C}_t$ for $\pi_t \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_t$ for $\mathcal{C}_{t(\text{modulo } d)}$, and π_t for $\pi_{t(\text{modulo } d)}$).

This definition means that all the sets $\mathcal{C}'$ deduced from $\mathcal{C}$ by a "cyclic permutation" of the $\mathcal{C}_t$ are equivalent : for example, $\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ and $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1$ are equivalent to $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3$.
We denote $\{\mathcal{C}\}$ an equivalence class, i.e. an element of $\mathcal{A}^{\otimes d}/R$.

Definition II.2.2. (Markovian cycle).

Let $\mathcal{C} \in \mathcal{A}^{\otimes d}$, $\mathcal{C} = \underset{t \in]0,d]}{\pi} \mathcal{C}_t$. The equivalence class $\{\mathcal{C}\}$ is a markovian cycle of length d if all the $\mathcal{C}_t$ are disjointed and if

$$P_x \left(\bigcup_t x_t \in \mathcal{C}^c_{t,t_o} \right) = 0, \text{ for all } x \in \mathcal{C}_{t_o}, \; t_o \in]0,d]. \quad \text{(II.2.2)}$$

When $I = \{t_o\}$, $t_o \in T$, $\{\mathcal{C}\}$ is also called a singular set.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Lemma II.2. (Properties of a markovian cycle.)

Let $\{\mathcal{C}\}$ be a markovian cycle.

1- i) the set $C = \bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$ is an absorbing set, that is, $P_x\left(\bigcup_{t>0} x_t \in C^c\right) = 0$, for all $x\in C$

ii) an absorbing set is a singular set

2- if $\{\mathcal{C}\}$ is such that $\nu\left(\bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t\right) < \infty$, then there is at most a countable set of $\mathcal{C}_t$ of positive ν-measure.

3- i) relation (II.2.2) is equivalent to the following relation

$$P_x\left(x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right) = 0, \quad \text{for all } x\in X,\ t_o\in T,\ t\in T$$

ii) If $T=\mathbb{N}$ or if $x \in \mathcal{C}_{t_o}$, then,

$$P_x\left(\bigcup_t x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right) = 0, \quad \text{for all } t_o\in T,\ x\in X.$$

In the same way, if $\mathcal{C}$ is singular, then,

$$P_x\left(\bigcup_t x_t \in \mathring{\mathcal{C}} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c\right) = 0.$$

iii) in the general case, $\left(\bigcup_t x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right)$ is not necessarily a P-null set.

II.3. Extensions.

Definition II.2.1 being independent of the process and thanks to the previous properties 3 of Lemma II.2, we can generalize the notion of markovian cycle to any stochastic process with a canonical probability law on $(X^T, \mathcal{A}^{\otimes T})$. The conditional laws P_x are obtained from desintegration of P on the σ-algebra

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

generated by the initial states, and are defined for μaa (μ-almost all) x, where μ denotes the initial law P(x(0)).

Definition II.3.1. (stochastic cycle)

Let $\mathcal{C} \in \mathcal{A}^{\otimes d}.\mathcal{C} = \pi_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$. The equivalence class $\{\mathcal{C}\}$ is a stochastic cycle of length d if all the $\mathcal{C}_t$ are disjointed and if $P_x\left(x_t \in \mathcal{C}_{t,t_0} \cap \cup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_0}\right) = 0$, for μaa $x\in X$, $t_0\in T$, $t\in T$.

Definition II.3.2. (stochastic super-cycle)

$\{\mathcal{C}\}$ is a stochastic super-cycle if and only if

$$P_x\left(\cup_t\left\{x_t \in \mathcal{C}_{t,t_0}\right\} \cap \cup_{s>t}\left\{x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_0}\right\}\right) = 0, \text{ for μaa } x\in X,\ t_0\in T$$

Definition II.3.3. (super-absorbing set)

An absorbing set $C \in \mathcal{A}$ is super-absorbing if C is a super-cycle, that is, $P_x\left(\cup_t\{x_t\in C\} \cap \cup_{s>t}\left\{x_s \in C^c\right\}\right) = 0$, for μaa $x\in X$

Remark : Properties 1 2 3-ii) and 3-iii) are still valid for any stochastic process. Moreover, if $\{\mathcal{C}\}$ is a super-cycle, then the set $C = \cup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$ is super-absorbing and inversely. When T=ℕ, any cycle $\{\mathcal{C}\}$ is a super-cycle.

Property 2-, shows us how the assumption of disjunction of the $\mathcal{C}_t$ can be restrictive. The definition of a stochastic pseudo-cycle removes this assumption in some way.

The author defined in 1985 a "pseudo-markovian cycle" in discrete time [15]. We extend here this definition to any set of times T and any type of stochastic process (§ II.4).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

II.4. Stochastic pseudo-cycle

Definition II.4.1. (stochastic pseudo-cycle)

Let $\mathcal{C} \in \mathcal{A}^{\otimes d}.\{\mathcal{C}\}$ is a stochastic pseudo-cycle of length d if and only if there exists a stochastic process $\{\varphi_t\}_{t\in T}$ taking values in T, such that $\left\{\pi_{t\in]0,d]}\ t \times \mathcal{C}_t\right\}$ is a stochastic cycle for the process $\{\varphi_t, x_t\}_{t\in T}$. When $\{\varphi_t, x_t\}$ is an homogeneous markovian process, the pseudo-cycle is a markovian pseudo-cycle.
When $I=\{t_o\}$, $t_o \in T$, $\mathcal{C}$ is a stochastic cycle and is also called a singular set.

The process φ_t represents the cycle phasing : it determinates the order of passing of $\{x_t\}$ through the different sets $\mathcal{C}_t$. Practically, the law of φ_t outside the cycle has also to be defined. Therefore φ_t can represent not only the ability for the process $\{x_t\}$ to stay in the cycle $\{\mathcal{C}\}$ but also, its ability to enter into this cycle.

Remarks :

i) a stochastic cycle is a pseudo-cycle : it suffices to put : $\varphi_t = t(d).1_{\mathcal{C}_t}(x_t)$

ii) if $\varphi_t \in T^*$ *when* $x_t \in \bigcap_{t\in T^*} \mathcal{C}_t$, *whatever* $T^* \subset]0,d]$ *then the set* $C = \bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$ *is absorbing. Moreover, if* $\left\{\pi_{t\in]0,d]}\ t\times\mathcal{C}_t\right\}$ *is a super-cycle, then* C *is super-absorbing.*

Definition II.4.2. (ν-fondamental pseudo-cycle)

Let $\{\mathcal{C}\}$ be a stochastic pseudo-cycle of length d.$\{\mathcal{C}\}$ is ν-fundamental if and only if :
i) there do not exist a stochastic pseudo-cycle $\{\mathcal{C}'\}$ of

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

length d' such that :

$\nu(\bigcup_{t\in]0,d'[} \mathcal{C}'_t \setminus \bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t) = 0$ and there exist $t\in]0,d'[$

$t_o \in \left]0, \inf(d,d')\right]$, $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}\}$ and $\mathcal{C}' \in \{\mathcal{C}'\}$ such that $\nu(\mathcal{C}'_{t_o} \setminus \mathcal{C}_{t_o}) = 0$ with $\nu\left\{\mathcal{C}'_{t_o}\right\} < \nu\left(\mathcal{C}_{t_o}\right)$.

ii) d is the greatest common divisor of the length d' of the cycles $\{\mathcal{C}'\} \in \mathcal{A}^{\otimes d}/R$, such that

$\nu\left(\bigcup_{t\in]0,d'[} \mathcal{C}'_t \Delta \bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t\right) = 0$, and which satisfy i).

Definition II.4.3. (ν-equal pseudo-cycles)

Two ν-fundamental pseudo-cycles $\{\mathcal{C}\}$ and $\{\mathcal{C}'\} \in \mathcal{A}^{\otimes d}/R$ are ν-equal if and only if there exist $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}\}$ and $\mathcal{C}' \in \{\mathcal{C}'\}$ such that $\nu(\mathcal{C}_t) = \nu\left(\mathcal{C}'_t\right)$, for all $t\in]0,d]$.

Then, if $\{\mathcal{C}\}$ and $\{\mathcal{C}'\}$ are two ν-fundamental pseudo-cycles, either $\{\mathcal{C}\}$ and $\{\mathcal{C}'\}$ are ν-equal, either $\bigcup_t \mathcal{C}_t \cap \bigcup_t \mathcal{C}'_t = \emptyset$.

A ν-fundamental pseudo-cycle with infinite period is called a chaotic pseudo-cycle and must be distinguished from a singular set.

Definition II.4.4. (period of description of an absorbing set)

Let C be an absorbing set containing an only ν-fundamental pseudo-cycle $\{\mathcal{C}\}$ such that $C = \bigcup_t \mathcal{C}_t$. Let d be the period of this cycle. Then d is called the period of description of C. (C contains always at least a ν-fundamental pseudo-cycle, for an absorbing set is a singular set).

Because the definition of the pseudo cycle is valid for any stochastic process and any space of time T, and because the

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

different $\mathcal{C}_t$ are not necessarily disjointed, this definition of a pseudo-cycle has much more applications than Doob's and Orey's definition. In particular, geometrical figures which change cyclically of shape or of position in the space $\mathbb{R}^k$, have a pseudo-cycle : the space of work $(X,\mathcal{A})$ is then the space $(\mathcal{F},\sigma_{\mathcal{F}})$ where $\mathcal{F}$ is the set of all closed sets in $\mathbb{R}^k$, and $\sigma_{\mathcal{F}}$ is the Matheron's σ-field generated by the families

$\mathcal{F}^K = \{F\in\mathcal{F} : F\cap K = \emptyset\} ; K\in\mathcal{K}$

or by the families

$\mathcal{F}_O = \{F\in\mathcal{F} : F\cap O \neq \emptyset\} ; O \in \mathcal{O}$

where $\mathcal{K}$ and $\mathcal{O}$ are respectively the set of compact sets and the set of open sets in $\mathbb{R}^k$ [17].

A geometrical figure G (supposed to be compact) can be represented also in a simpler way : Let $\mathbb{Z}^k$ be the set of the vertex of a network in $\mathbb{R}^k$, and let K be a compact which contains G at any time t. Then the geometrical position of G in the space can be represented at any time t by the process $\{x_t(z)\}_{t\in T}$ which takes values in $E^{\mathbb{Z}^k}$ where $E = \{0,1\}$, and which is function of $z\in\mathbb{Z}^k$:

$x_t(z) = 1$, for all $z \in G \cap \mathbb{Z}^k$

$x_t(z) = 0$, otherwise, i.e., for all $z\in(K\setminus G) \cap \mathbb{Z}^k$.

An example of such stochastic processes, is when G is an "object" which moves in the space or changes of shape, as it is the case in mechanical Biology (see Introduction).

Boolean automata networks are other examples of such processes [8] : each cell of $K\cap\mathbb{Z}^2$ is an automaton which takes the value 0 or 1 at time t, according to the values of certains next automata at time t-1. The values 0 and 1 represent, respectively, the inactive state and the active state. The process $\{x_t\}$ is markovian in time. Automata networks are used in many fields of application as simple models of representation of interaction of different elements (see Introduction).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

III. STOCHASTIC LIMIT SETS.

We deal here only with the almost sure convergence which leads perhaps to the more immediate definitions of stochastic limit sets, in an intuitive sense. Other definitions can be found, by using other types of convergence, like L^p or probability convergences [9]. We suppose here that μ is absolutely continuous with respect to ν, with density f.

Definition III.1.

Let $A \in \mathcal{A}$, $\theta > 0$ and

$$\mathcal{B}'_\theta(A) = \left\{ x \in X : \overline{\lim_{t \to \infty}} P_x(x_t \in A) \cdot f(x) > \theta \right\}$$

A is a strict θ-a.s. stochastic limit set if $\nu(\mathcal{B}'_\theta(A)) \neq 0$ and if $\mathcal{B}'_\theta(A) \overset{\nu}{\supset} A$.

This definition means that for any t sufficiently large, there is a large enough proportion of trajectories $\omega \in X^T$ such that $x_t(\omega) \in A$.

Definition III.2.

Let $A \in \mathcal{A}$, $\theta > 0$ and

$$\mathcal{B}''_\theta(A) = \left\{ x \in X : \lim_{\epsilon \to 0} \overline{\lim_{t \to \infty}} P_x(x_t \in \overline{\mathcal{V}_\epsilon(A)}) \cdot f(x) > \theta \right\}$$

where $\mathcal{V}_\epsilon(A) = \left\{ y \in X : \inf_{z \in A} d(y,z) < \epsilon \right\}$. A is a large θ-a.s. stochastic limit set if $\nu(\mathcal{B}''_\theta(A)) \neq 0$ and if $\mathcal{B}''_\theta(A) \overset{\nu}{\supset} A$.

This definition means that for any t sufficiently large and for any $\epsilon > 0$, there is a large enough proportion of trajectories $\omega \in X^T$ such that $x_t(\omega) \in \mathcal{V}_\epsilon(A)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

The sets $\mathcal{B}'_\theta(A)$ and $\mathcal{B}''_\theta(A)$ are called the stability domains, or the basins of attraction of the stochastic limit set A. They are defined for μaa x. If A is an absorbing set, that is, $A = \bigcup_t t \times \mathcal{C}_t$ or $A = \bigcup_t \mathcal{C}_t$ where $\mathcal{C}_t$ is a pseudo-cycle, then A is called a stochastic limit cycle.

Lemma III.1.

If C is an absorbing set (and closed when $T=\mathbb{R}^+$), then,
$\lim_{t\to\infty} P_x(x_t \in C) = P_x\left(\bigcup_t \bigcap_{s\geq t} x_s \in C\right)$, for μaa $x\in X$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

IV CONFINERS ([9], [10]).

The definition of a confiner is the equivalent definition for a stochastic process, of the definition of an attractor given by Cosnard and Demongeot [5] in the deterministic frame. At the opposite of the previous definitions which count at every time t, the trajectories ω which belong to A (or $V_\epsilon(A)$) at this time, we deal here with the asymptotic behaviour of each trajectory : that is, we work with the set of accumulation points at infinite times of the trajectory ω :

$L(\omega) = \{\xi \in X$: for all $\epsilon>0$, and $t\in T$, there exists $s\geq t$ such that $x_s(\omega) \in \mathcal{B}_{\xi,\epsilon}\}$

where $\mathcal{B}_{\xi,\epsilon}$ denotes the ball of center ξ and radius ϵ. $L(\omega)$ is a closed set.

A confiner will be characterized by the essential property of invariance for the double operation which consists to seek for its basin of confining and then for the limit set of this basin. In addition to this property, the confiner will have to satisfy a double condition of maximality and minimality relatively to the concept of c-connexity.

We will suppose here, that the process is an homogeneous markovian process and that X is a locally compact and polish space. It is polish in order to define the probability P from finished probabilities, in a unique way [19]. And it is locally compact, and separable in order to use the Matheron's σ-field $\sigma_{\mathcal{F}}$ on the set of closed sets $\mathcal{F}$ [17].

We just recall quickly here the main definitions. Other definitions and properties can be found in [9] and [10]. We define a global confiner A by using the event $\{L(\omega) \subset A\}$, and a local confiner A, when the law $P(L(\omega))$ is discrete, by using events $(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset)$, $y\in A$.

<u>Definition IV.1.</u> (external basins of confining)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\mathcal{B}_\theta(A) = \{x \in X\backslash A : P_x(B(A)) \cdot f(x) > \theta\}$, where

$B(A) = \{L(\omega) \subset A\}$

$\mathcal{B}^\ell_\theta(A) = \left\{x \in X\backslash A : L^\ell_\theta(x) \subset A\right\}$, where

$L^\ell_\theta(x) = \{y \in X : P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset)\ f(x) > \theta\}$

$B_\theta(A) = B(A) \cap \mathcal{B}_\theta(A)_T$

$$B^\ell_\theta(A) = \bigcup_{\substack{y \in U L^\ell_\theta(x) \\ x \in \mathcal{B}^\ell_\theta(A)}} \{L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset\} \cap \mathcal{B}^\ell_\theta(A)_T$$

where $\mathcal{B}_T = \mathcal{B} \times \pi_{t>0} \pi_t X$

The sets $\mathcal{B}_\theta(A)$, $\mathcal{B}^\ell_\theta(A)$, which are subsets of X are respectively called global and local, (external) θ-basins of confining of A in X. They are constituted by the points of X from which the different "densities of confining" are high enough. The sets $B_\theta(A)$, $B^\ell_\theta(A)$, which are sets of trajectories, are respectively called global and local θ-basins of (external) confining of A in X^T. $\mathcal{B}_\theta(A)$ and $\mathcal{B}^\ell_\theta(A)$ are defined except to a μ-null measure set, and $B_\theta(A)$, $B^\ell_\theta(A)$ to a P-null measure set.

<u>Definitions IV.2.</u> (internal basins of confining)

Just as previously (definitions IV.1.), we define the global and local internal basins of confining as following :

$\mathcal{B}^i_\theta(A) = \{x \in A: P_x(B(A)) \cdot f(x) > \theta\}$

$\mathcal{B}^{i,\ell}_\theta(A) = \left\{x \in A: L^\ell_\theta(x) \subset A\right\}$

(And the same for the basins of trajectories).

<u>Definitions IV.3.</u> (limit operators)

We define

$\mathcal{L}_\eta(\mathcal{B}_\theta(A)) = \{L(D) : D \subset B_\theta(A)$ and $P(B_\theta(A)\backslash D) \leq \eta\}$, where

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$L(D) = \bigcup_{\omega \in D} L(\omega)$ (and in the same way, $\mathcal{L}_\eta(\mathcal{B}_\theta'(A))$).
$\mathcal{L}_\eta$ is called a θ-limit operator.

The following definition is the stochastic equivalent of deterministic Ruelle-Bowen's c-connexity which coïncids with the classical connexity when $T=\mathbb{R}^+$.

Definition IV.4. (stochastic c-connexity)

The stochastic chaining relation is defined as following :
let $x \in X$, $y \in X$:
i) $x \longrightarrow_\theta y \iff$ there exists $t_{x,y} > 0$ such that for all $\epsilon>0$ there exist N, $z_1, z_2, \ldots, z_{N+1} \in X$ with $z_1 = x$, $z_{N+1} = y$, such that :

$$\overline{\lim_{\eta \to \infty}} \; P^{\otimes N}\left(\bigcup_{t_0 \in T} \; \bigcup_{t_1 \geq t_{x,y}+t_0} \cdots \bigcup_{t_N \geq t_{x,y}+t_{N+1}} \left\{ x_{t_0}(\omega_1) \in B_{z_1,\eta} \cap x_{t_1}(\omega_1) \in B_{z_2,\epsilon} \right\}, \ldots, \left\{ x_{t_{N-1}}(\omega_N) \in B_{z_N,\eta} \cap x_{t_N}(\omega_N) \in B_{z_{N+1},\epsilon} \right\} \right) > \theta^N,$$

where $dP^{\otimes N}(\omega_1, \ldots, \omega_N) = \prod_{i=1}^{N} dP(\omega_i)$

ii) $x \, R_\theta \, y \iff x \longrightarrow_\theta y$ and $y \longrightarrow_\theta x$.
The relation R_θ is a relation of equivalence on the set
$\mathcal{C}_\theta(X) = \{x \in X : x R_\theta x$ and $\forall\, y, z \in \mathcal{C}_\theta(X)$, $x R_\theta y$ and $y R_\theta z \Longrightarrow x R_\theta z\}$.
iii) A subset $D \subset X$ is C_θ-connex if $D \subset \mathcal{C}_\theta(X)$ and if D/R_θ contains a single class.

Note : let $\theta>0$ and $x, y \in X$. If the following condition is satisfied, then $x \longrightarrow_\theta y$: there exist $t_{x,y} \in T^+$ such that $f(x).P_x\left(\bigcup_{s \geq t(x,y)} \in B_{y,\epsilon} \right)$ is continuous in x and is greater than θ for all $\epsilon>0$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Definitions IV.5. (confiners)

$A \subset X$ is a weak global $(\theta,0)$-confiner if the following conditions are satisfied :

i) $A \in \mathcal{A}$; $A \subset \mathcal{C}_\theta(X)$

ii) $\mu\left(\mathcal{B}_\theta(A^c) \setminus \mathcal{B}_\theta^i(A)\right) = 0$

iii) $\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{B}_\theta(A) \stackrel{o}{=} A \iff$ for all $L(D) \in \mathcal{L}_0 \circ \mathcal{B}_\theta(A)$, $\nu(A \setminus L(D)) = 0$

iv) for all C, C_θ-connex component of A, there do not exist $C' \supset C$ such that $\nu(C') > \nu(C)$ and $C' \cup A$ satisfies i), ii) and iii)

v) there do not exist $A' \subset A$ such that $A' \cap A \neq \emptyset$, $\nu(A') < \nu(A)$, $\mu(\mathcal{B}_\theta(A') \cap \mathcal{B}_\theta(A)) \neq 0$ and A' satisfies i), ii), iii) and iv).

$A \subset X$ is a weak local θ-confiner if the previous conditions are satisfied, where $\mathcal{B}_\theta$ and $\mathcal{B}_\theta^i$ are replaced respectively by $\mathcal{B}_\theta^\ell$ and $\mathcal{B}^{i,\ell}$.

Property i) means that there is a certain cohesion between the different points of a confiner and property ii) that if the process confines into the exterior of A with a large probability, when starting from A, then it must confine also into A with a high enough probability. Property iii) is the invariance property, and properties iv) and v) are the respective conditions of maximality and minimality for the stochastic C_θ-connexity.

Definitions IV.6. (auto-confiners)

$A \subset X$ is a weak global $(\theta,0)$-auto-confiner, resp. a weak local θ-auto-confiner if the previous conditions defined in definitions IV.5. are satisfied, where $\mathcal{B}_\theta(A)$, $\mathcal{B}_\theta^\ell(A)$ are

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

replaced respectively by $\mathcal{B}_\theta^i(A)$, $\mathcal{B}_\theta^{i\cdot c}(A)$.

Definition IV.7. (period of description of a confiner)

Let C be a C_θ-connex confiner and let $\left\{C_\varphi^\tau\right\}$ be the sub-θ-confiners relative to the subdynamics $\left\{\omega_{\bar{t}}\right\}_{\bar{t}\in(n\tau+\varphi)_{n\in\mathbb{N}}}$,

where $\bar{t} = t - e(\omega)$.

$e(\omega)$ is the entry time of the trajectory ω in a part O of C, of ν-measure $\nu(O) \leq \eta$, and chosen as the origin of description of C. Then, the η-period d of description of C is defined by :

$$d = \inf\left\{\tau \in \bar{T} : \nu\left(C \,\Delta\left(\bigcup_{\varphi\in[O,\tau[} C_\varphi^\tau\right)\right) \leq \eta, \text{ and there do not exist } \tau' \neq \tau \text{ such that } \inf_{\varphi<\tau'} \nu\left(C_\varphi^{\tau'}\right) < \inf_{\varphi<\tau} \nu\left(C_\varphi^\tau\right) \text{ and } \sup_{\varphi<\tau'} \nu\left(C_\varphi^{\tau'}\right) \leq \sup_{\varphi<\tau} \nu\left(C_\varphi^\tau\right) + \eta\right\}.$$

The different types of period are the following ones :

- singular type if $d = \inf T$
- periodic type if $\inf T < d < \infty$
- chaotic type if $d = \infty$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

V. RELATIONS BETWEEN A STOCHASTIC LIMIT SET AND A CONFINER FOR A MARKOVIAN PROCESS.

In this paragraph, $\{x_t\}$ is supposed to be an homogeneous markovian process, X is a locally compact and polish space . In the general case, there is no particular relation between a limit cycle and a confiner, both because the asymptotic behaviour which is considered is not the same in the two definitions and because a limit set is defined only from its basin of attraction, whereas a confiner must satisfy additional conditions. Therefore, a limit set do not necessarily contain points of accumulation of trajectories, and then it is not generally a confiner. Inversely, we have the following result :

Lemma V.1.

Let C be a compact set and suppose that the process is continuous, then,

$\mathcal{B}_\theta(C) \cup \mathcal{B}^i_\theta(C) \subset \mathcal{B}^{"}_\theta(C)$

Therefore, if $\mathcal{B}_\theta(C) \cup \mathcal{B}^i_\theta(C) \neq \emptyset$, C is a stochastic large limit set.

Now, if C is an absorbing set, there are relations between the attraction basins and confining ones. Moreover, C can be both a confiner and a limit set.

Suppose now that C is an absorbing set, that is $C = \bigcup_t t \times \mathcal{C}_t$ or $C = \bigcup_t \mathcal{C}_t$ where $\mathcal{C}_t$ is a pseudo-cycle (see § II.2 and II.4).

Suppose also that $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. We use the following notations :

$B'(C) = \bigcup_t \bigcap_{s \geq t} \{x_s \in C\}$

$B'_\theta.(C) = B'(C) \cap \mathcal{B}'_\theta.(C)_T$

$B^*(C) = \bigcup_t \left\{x_t \in \overset{\circ}{C}\right\}$

(If $T=\mathbb{R}^+$, we suppose that C is a closed set).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Lemma V.2.

i) $B^{\cdot}(C) \cup B(\delta C) \overset{P_x}{=\!=} B(C)$, for all $x \in X \setminus C$

$B^{\cdot}(C) \cup B^{i}(\delta C) \overset{P_x}{=\!=} B^{i}(C)$, for all $x \in C$

ii) $\mathcal{B}_\theta^{\cdot}(C) \cup \mathcal{B}_\theta(\delta C) \cup \mathcal{B}_\theta^{i}(\delta C) \subset \mathcal{B}_\theta(C) \cup \mathcal{B}_\theta^{i}(C)$

$B_\theta^{\cdot}(C) \cup B_\theta(\delta C) \overset{P_x}{\subset} B_\theta(C)$, for all $x \in X \setminus C$

$B_\theta^{\cdot}(C) \cup B_\theta^{i}(\delta C) \overset{P_x}{\subset} B_\theta^{i}(C)$, for all $x \in C$.

Moreover, if C is super-absorbing, the previous relations with $B^{*}(C)$ instead of $B^{\cdot}(C)$, are satisfied.

Lemma V.3.

If C is ν-recurrent (i.e $\{x_t\}$ is ν-recurrent in the open sets of C : $P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{\circ}{B}\right) = 1$, for all $\overset{\circ}{B} \subset C$, with $\nu(\overset{\circ}{B}) > 0$), then,

$B^{\cdot}(C) \overset{P_x}{=\!=} \left\{L(\omega) = \overline{C^{*}}\right\}$, for all $x \in X$

where $C^{*} \subset C$ with $\nu(C^{*} \setminus \delta C) = \nu\left(\overset{\circ}{C}\right)$

In addition, if supp. $\nu \supset C$, then $C^{*} = C$.

Proposition V.1.

Let C be a super-absorbing set. Let

$C^{o} = \left\{x : P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{\circ}{C}\right) \neq 0\right\}$, then, $P_x\left(B(\overline{C} \cup \overline{C^{o}})\right) = 1$, for all $x \in X$. (If $T = \mathbb{R}^{+}$, we suppose C^{o} is a closed set).

(The proof of proposition VI uses lemma V.4 which follows). The following definition V.1., lemma V.4., lemma V.5. and proposition V.3, are the generalization to continuous time, of the corresponding definition, lemmas and proposition given by Orey in discrete time [21].

Definition V.1.

A set $E \in \mathcal{A}$ is inessential if $P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s \geq t} x_s \in E\right) = 0$, for all

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$x \in X$: otherwise E is essential. An essential set which is the union of denumerably many inessential sets is improperly essential :otherwise, it is properly essential.

Lemma V.4.

Let C be a super-absorbing set. Then $X \setminus C \cup C^o$ is not properly essential. (If $T=\mathbb{R}^+$, C^o is supposed to be a closed set).

The proof of lemma V.4 uses the following lemma.

Lemma V.5.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$, an increasing sequence of σ-fields, each $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, and let $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_t \mathcal{F}_t$. Let $A_t \in \mathcal{F}_\infty$, for all $t>0$; then

i) $P\left(\bigcap_{t\geq s} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) \xrightarrow[s\to\infty]{} 1_{\bigcup_s \bigcap_{t\geq s} A_t} \cdot 1_{\mathcal{F}_\infty}$ (if $T=\mathbb{R}^+$, A_t is closed)

ii) $P\left(\bigcup_{t\geq s} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) \xrightarrow[s\to\infty]{} 1_{\bigcap_s \bigcup_{t\geq s} A_t} \cdot 1_{\mathcal{F}_\infty}$ (if $T=\mathbb{R}^+$, A_t is open)

Now, the following proposition V.2 which considers the properties of a closed and absorbing set relatively to the concepts of confiner and stochastic limit set, uses for its proof, proposition V.1 as well as the previous lemmas V.1, V.2, V.3 .

Proposition V.2.

Let C be a closed and absorbing set such that $f_c = \inf_{x\in C} f(x) > 0$. Suppose C ν-recurrent. Suppose also that there exists an open neighborhood of C, $\mathcal{V}(C)$, such that supp. $\nu \supset \mathcal{V}(C)$ and

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$P_x(L(\omega) \cap \mathcal{V}(C) \setminus C \neq \emptyset) = 0$, for all $x \in C^c$ (V.2.1). Then,

i) C is a global $(\theta,0)$-auto-confiner, and a local θ-auto-confiner (if $P(L(\omega) \cap \{y\}) \neq 0$, only for a countable set of y),

and it is C_θ-connex, for all $\theta < f_c$.

ii) If C is compact and the process continuous, then C is a large θ a.s. limit set, and $\mathcal{B}_\theta^{"}(C) \supset \mathcal{B}_\theta^{i}(C)$, for all $\theta < f_c$.

iii) suppose $\overset{o}{C}$ is attainable from C^c in the following sense : there exists $\theta_o > 0$ such that $\mu\left(\mathcal{B}^{\theta\,o}(C)\right) > 0$, where

$\mathcal{B}^{\theta\,o}(C) = \left\{x \in C^c : P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{o}{C}\right) \cdot f(x) > \theta_o\right\}$. Then,

- C is a global $(\theta,0)$-confiner for all $\theta < \min(\theta_o, f_c)$.
- Moreover, if $P(L(\omega) \cap \{y\} \neq 0$ only for a countable set of y,

then C is a local θ-confiner for all $\theta < \min(\theta_o, f_c)$.

iv) if C is super-absorbing and if $C^o = \emptyset$, then C is the only confiner and auto-confiner.

v) let $\mathcal{C}$ be the ν-fundamental pseudo-cycle relative to C, i.e. such that $\bigcup_t \mathcal{C}_t = C$ (this cycle exists and is ν-unique, thanks to ν-recurrence). Let d be the period of this cycle. Then d is the 0-period of description of the confiner C.

We see now an example of such absorbing set. Other examples can also be found in the field of stochastic differential equations [13].

<u>Proposition V.3.</u> (for $T = \mathbb{N}$, see [21])

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

We will suppose here that $\mathcal{A}^{\otimes T}$ is completed by the sets $\left\{\bigcup_t x_t \in A\right\}$, $A \in \mathcal{A}$.

Suppose that the transition probability laws $dP^r(x,y)$ are absolutely continuous with respect to ν, with density $p^r(x,y)$. Suppose also that $\{x_t\}$ is ν-irreducible (i.e. $P_x\left(\bigcup_t x_t \in B\right) > 0$, for all $x \in X$, $B \in \mathcal{A}$ such that $\nu(B) > 0$).

Then, there exists a markovian cycle $\mathcal{C} = \pi_{t \in]0,d]} \mathcal{C}_t$ such that,

i) $\nu(X \setminus C) = 0$, where $C = \bigcup_t \mathcal{C}_t$

ii) there exists an only fundamental cycle connected to $\mathcal{C}$, except perhaps to a null ν-measure set.

Remark : If C is super-absorbing, then X \ C is not properly essential (lemma V.4).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

VI. ESTIMATIONS.

We will suppose in this paragraph that the process is an homogeneous markovian process. Suppose that C is a closed and absorbing set which is assumed also to be ν-recurrent. We proved in the previous paragraph that C could be both a limit set and a confiner, that there existed an only ν-fundamental pseudo-cycle $\mathcal{C}$ relative to C, and that the period of this cycle was also the O-period of the confiner (proposition V.2.). We saw in paragraph II that, in the space $T \times X$, C is of the type $C = \bigcup_{t\in]0,d]} t\times \mathcal{C}_t$, and, in the space X, if φ_t determinates only the order of passing of $\{x_t\}$ through the different $\mathcal{C}_t$, C is of the type $C = \bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$. In that case, we can work either in the space $T \times X$ or in the space X. But, if d is not finished, the cycle $\prod_{t\in]0,d]} t\times\mathcal{C}_t$ is not compact even if every $\mathcal{C}_t$ is compact. Such a situation can occur for example when the process possesses oscillations which period depend on the amplitude at previous instants. In the space X, the set $C = \bigcup_{t\in]0,d]} \mathcal{C}_t$, is generally compact if all the $\mathcal{C}_t$ are compact. But we loose generally in this space, some information concerning the "movement" of the process. Therefore, in that case, we can work in the space $X \times X$ relative to the process $\{x_t\}\times\{\dot{x}_t\}$, where $\dot{x}_t$ denotes the derivative of x_t with respect to time (in discrete time, $\dot{x}_t = x_t - x_{t-1}$).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

VI.1. Estimation of C and test of the cycle.

Let $x_1, \ldots, x_N$ be a trajectory of the process $\{x_t\}$, observed at equal intervals of time (the observation x_i corresponds to the variable $x_{i\Delta t}$, if Δt denotes the length of the observation interval (if $T=\mathbb{N}$, $\Delta t=1$)).

According to lemma V.2., thanks to ν-recurrence, $B(C) = \{L(\omega) = C\}$. Consequently, we can estimate a closed and absorbing ν-recurrent set C with a single trajectory. Suppose that the length d of the pseudo-cycle is known and is equal to $m\Delta t$ with $m \in \mathbb{N}$. If the trajectory is observed without any measure error, we can estimate each $\mathcal{C}_{i\Delta t}$ (resp. $\pi_i \mathcal{C}_{i\Delta t}$ or $\pi_i i\Delta t \times \mathcal{C}_{i\Delta t}$) with the smallest polygon in X (resp. in X or in T×X) which contains all the x_{i+km}, $k = 1 \ldots K$. Then, if we denote $\hat{\mathcal{C}}_t$ for this estimation of $\mathcal{C}_t$, (resp. $\pi \widehat{\mathcal{C}_{i\Delta t}}$ or $\pi\, i\Delta t \,\widehat{\times}\, \mathcal{C}_{i\Delta t}$), we have, $\widehat{\mathcal{C}_{i\Delta t}} \xrightarrow[K\to\infty]{a.s} \mathcal{C}_{i\Delta t}$ (resp.

$\pi_i \widehat{\mathcal{C}_{i\Delta t}} \xrightarrow[(\Delta t\to 0)\ K\to\infty]{a.s} \pi_t \mathcal{C}_t$ or $\pi_i\, i\Delta t\, \widehat{\times}\, \mathcal{C}_{i\Delta t} \xrightarrow[(\Delta t\to 0)\ K\to\infty]{a.s} \pi_t\, t \times \mathcal{C}_t$, where

the condition $\Delta t \to 0$ is supposed only when $T=\mathbb{R}$).

If the process is observed with an error of measure, the observations are y_i, $i=1,\ldots,N$ instead of x_i, $i=1,\ldots,N$, with $y_i = x_i + \epsilon_i$; ϵ_i represents the measure error at time $i\Delta t$. Therefore, we estimate $\mathcal{C}_{i\Delta t}$ (resp. $\pi_i \mathcal{C}_{i\Delta t}$ or $\pi_i i\Delta t \times \mathcal{C}_{i\Delta t}$) by smoothing the previous polygon, built from the observations y_i, $i=1,\ldots,N$.

In discrete time, we can test that such an estimation, denoted by $\hat{\mathcal{C}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{C}}_m$, is a cycle, which means that we have not

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

put outside the estimated cycle too many points of observation, when smoothing. The test is as following : suppose $(x_n, x_{n+1})_n$ is a markovian chain taking values in a finished state space E with s elements. Suppose $(x_n, x_{n+1})_n$ is recurrent. Let H_o be the null hypothesis : "$p(i,j) > 0$ for r pairs $(i,j) \in E \times E$", then the statistics

$$\sum_{(i,j,k) \in E^3} \frac{(N_{ijk} - N_{ij}\, p(j,k))^2}{N_{ij}\, p(j,k)} \xrightarrow[N \to \infty]{} \chi^2_{rs-r}$$

where N is the size of the observed series and,

$$N_{ijk} = \sum_{p=0}^{N-2} 1_{\{x_p = i,\ x_{p+1} = j,\ x_{p+2} = k\}}$$

$$N_{ij} = \sum_{p=0}^{N-1} 1_{\{x_p = i,\ x_{p+1} = j\}} \qquad [6]$$

We apply this test to the state space $E = \left\{\hat{\mathcal{C}}_i, i=1,\ldots,d, \left(\cup \hat{\mathcal{C}}_i\right)^c\right\}$. By the cycle property, $p(j,j+1) = 1$, $j = 1,\ldots,d$, and $p(j,k) = 0$, $k \neq j+1$. Moreover $s = d+1$, $r = d$ and $rs - r = d^2$. In order to obtain the rejection of the null hypothesis with a probability error equal to 5%, we must have the following situations : at least, 25 % of the observations must be outside the cycle, for N=100 ; 7,5%, for N = 1000 ; and only 2,5% for N = 10 000.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

VI.2. Estimation of the period.

Suppose that the cycle is not a singular set. Then the process has cycles of length kd, where $k \in \mathbb{N}$. Therefore, we can find d by using any statistics $S(d')$, function of the process $\left\{x_{t+kd'}\right\}_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ t\in]0,d'[}}$, and such that

$$S(kd) = \text{local optimum } S(d'), \quad k \in \mathbb{N}$$
$$kd - \frac{d}{2} < d' < kd + \frac{d}{2}$$

where the optimum is either a minimum or a maximum. Practically, instead of S, we use $\hat{S}$, function of the observations $\{x_{i+km}\}_k$,
and we estimate $d = m\Delta t$ by $\hat{d} = \hat{m}\Delta t$ such that

$$\hat{S}(k\hat{m}) = \text{local optimum } \hat{S}(m'), \quad k=1,\ldots,K$$
$$k\hat{m} - \frac{\hat{m}}{2} < m' < k\hat{m} + \frac{\hat{m}}{2}$$

VI.2.1. Average Surface.

$S(d') = \frac{1}{d'}\int_{t\in]0,d'[} \nu\left(\mathcal{C}_t^{d'}\right) dt$ where $\pi_{t\in]0,d'[} \mathcal{C}_t^{d'}$ is the cycle relative to the process $\left\{x_{t+kd'}\right\}$. $S(d')$ satisfies :
$S(kd)$ = local minimum $S(d')$

$S(d')$ is estimated by $\hat{S}(m') = \frac{1}{m'}\sum_{i=1}^{m'} \nu\left(\hat{\mathcal{C}}_{i\Delta t}^{d'}\right)$,
function of the observed series $\left\{x_{i+km'}\right\}$, where $d' = m'\Delta t$.

VI.2.2. One-way analysis of variance.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

The following methods are adapted to processes of the time series type rather than to spatial processes, for, actually, we know how to built test statistics only in the first case. Here, the observed process is modelled by means of a non parametric periodic deterministic trend $f_1, \ldots, f_{m'}$ and an error $\{\epsilon_i\}$ which represents the deviation of the process from the periodic trend :

$$x_{i+km'} = f_i + \epsilon_{i+km'} \; ; \; i = 1, \ldots, m' \; ; \; k = 1, \ldots, K'$$

The null hypothesis H_o which is tested is the following :
$f_1 = f_2 = \ldots = f_{m'}$.
All possible values for m' are tested : $m' = 2,3, \ldots N/2$. Then, the period $d = m\Delta t$ is estimated by the value $\hat{d} = \hat{m}\Delta t$ such that H_o is rejected for $m' = \hat{m}, 2\hat{m}, 3\hat{m} \ldots$

a) If the $\left\{\epsilon_{i+km'}\right\}$ are I.I. $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, the test statistics $\hat{S}(m')$ is the classical statistics used in analysis of variance and which is function of the within population dispersion W and the total dispersion T or the between populations dispersion B. For an univariate process,

$$\hat{S}(m') = \frac{B/(m'-1)}{W/(K'-m')} ; \quad \hat{S}(m') \text{ is a Fisher variable and}$$

$\hat{S}(k\hat{m})$ = local maximum $\hat{S}(m')$.

If the errors are only either stationnary gaussian or Normal and dependent or just I.I.D., $\hat{S}(m')$ is asymptotically a Fisher variable, in the univariate case ([1], [3], [25]).

b) But when the rhythm posesses an endogeneous component, which is the case for example, for all biological rhythms,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

the errors have not a linear structure and then, the previous statistics can no more be used. Therefore another test is built :

Let put the previous model in the following form :

$X_k = f + \xi_k$, $k = 1 \ldots K'$

where

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{1+km'} \\ x_{2+km'} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m'+km'} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_{m'} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \xi_k = \begin{pmatrix} \epsilon_{1+km'} \\ \epsilon_{2+km'} \\ \cdot \\ \epsilon_{m'+km'} \end{pmatrix}$$

Let suppose that the process ξ_k is stationnary with finished variances and φ-mixing with $\sum_n \varphi_n^{1/2} < \infty$, then

$\sqrt{K'}(X_{\cdot}-f) \xrightarrow[K' \to \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{pm'}(0,\Sigma)$, where $X_{\cdot} = \frac{1}{K'} \sum_{k=1}^{K'} X_k$, p is the dimension of the process ($p=1$, for an univariate process), and Σ is the variance-covariance matrix of the vector $(X_{\cdot}-f)$ [4]. The null hypothesis has the general form : $H_o : Pf = f_o$ where P is a $pm'' \times pm'$ matrix of contrasts.

Then, $\sqrt{K'}(P\Sigma P^T)^{-1/2}(PX_{\cdot}-f_o) \xrightarrow[K' \to \infty]{\mathcal{D}_{H_o}} \mathcal{N}_{pm''}(0,I)$ and

$K'(PX_{\cdot}-f_o)^T(P\Sigma P^T)^{-1}(PX_{\cdot}-f_o) \xrightarrow[K' \to \infty]{\mathcal{D}_{H_o}} \chi^2_{pm''}$ (when H_o corresponds to the null hypothesis of paragraph a), $m'' = m' - 1$ and f_o is the vector null).

Let $\hat{\Sigma}_{K'}$ be an estimation of Σ, such that $\hat{\Sigma}_{K'}$ tends to Σ in probability, then, according to theorems 4.4. and 5.1. [4],

$$\hat{S}(m') = K'(PX_{\cdot}-f_o)^T\left(P\,\hat{\Sigma}_{K'}\,P^T\right)^{-1}(PX_{\cdot}-f_o) \xrightarrow[K' \to \infty]{\mathcal{D}_{H_o}} \chi^2_{pm''}.$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Here, $\hat{S}(k\hat{m})$ = local maximum $\hat{S}(m')$.

Remark :

1/ if the observed process $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *is markovian, weakly continuous (that is, for each bounded continuous function* g *on* X, *the function of* x *given by* $E(g(x_i)|x_{i-1} = x)$ *is continuous), v-irreducible on* $C = \bigcup_i \mathcal{C}_{i\Delta t}$, *and if* C *is compact, then* $\{x_i\}$ *is geometrically ergodic* [23]. *This implies that the usual estimate of* Σ *tends almost surely (and therefore in probability) to* Σ.

2/ When $m' \neq km$, *whatever* $k\in\mathbb{N}$, *all the components of* X *are equal and have the same variance. Therefore, in those cases,* $\hat{\Sigma}$ *is not inversible and then, only the values* $\hat{S}(m')$, *for* m' *very near* km, *are reliable.*

Remark :

In fact, the most rigourous procedure would be to estimate first the period with a contrast (average surface in the case of a bounded cycle, or residual variance in the case of a periodic mean process), and then from a sample of data independant of the previous one, to test that the estimated period is equal to the theoretic one (this can be done thanks to the statistics tests described in § VI.2.2.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

APPENDIX (proofs of lemmas and propositions)

(If $T=\mathbb{R}^+$, $\bigcup_t x_t \in O$ and $\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in O$ are measurable sets, for all open set $O \in \mathcal{A}$).

Lemma II.2.

1-i) $P_x\left(\bigcup_{s>t} x_{s-t} \in \mathcal{C}_s^c\right) = 0$, for all $x \in \mathcal{C}_t$, for all t. Therefore, $P_x\left(\bigcup_{t>0}\left\{x_t \in \left(\bigcup_s \mathcal{C}_s\right)^c\right\}\right) = 0$, for all $x \in \bigcup_t \mathcal{C}_t$, that is, $C = \bigcup_s \mathcal{C}_s$ is absorbing.

ii) comes from the cycle definition

2-Suppose there is a non countable set of $\mathcal{C}_t$ such that $\nu(\mathcal{C}_t) > 0$. Then, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that there exists a non countable set of $\mathcal{C}_t$ such that $\nu(\mathcal{C}_t) > 1/n$. (because $\bigcup_n \{\mathcal{C}_t : \nu(\mathcal{C}_t) \geq 1/n\} = \{\mathcal{C}_t : \nu(\mathcal{C}_t) > 0\}$).
Therefore, for all $n \in \mathbb{N}$, there exists $\mathcal{C}_{t_1}, \ldots, \mathcal{C}_{t_N}$ such that

$$\nu\left(\bigcup_t \mathcal{C}_t\right) \geq \sum_{i=1}^{N} \nu\left(\mathcal{C}_{t_i}\right) \geq N/n.$$

This is in contradiction with $\nu(\bigcup \mathcal{C}_t) < \infty$.

3-i)

$$P_x\left(x_t \in \mathcal{C}_{t+t_0} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}_{s+t_0}^c\right)$$

$$= \int_{\mathcal{C}_{t+t_0}} P_y\left(\bigcup_{s>t} x_{s-t} \in \mathcal{C}_{s+t_0}\right) P^t(x, dy)$$

$$= 0$$

(because $P_x\left(\bigcup_{s\geq t} x_{s-t} \in \mathcal{C}_s^c\right) = 0$, for all $x \in \mathcal{C}_t$, for all t)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Inversely, if $P_x\left(x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right) = 0$, for all t, then it is true for $t=0$, i.e., $P_x\left(\bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right) = 0$, for all $x \in \mathcal{C}_{t_o}$.

ii) - if $T=\mathbb{N}$,

$$P_x\left(\bigcup_t \left[x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right]\right) \leq \sum_{t\in\mathbb{N}} P_x\left(x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right)$$

$$\leq \sum_{t\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{C}_{t,t_o}} P_y\left(\bigcup_{s>t} x_{s-t} \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right) P^t(x,dy) = 0$$

- if $x \in \mathcal{C}_{t_o}$,

$$P_x\left(\bigcup_t \left[x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right]\right) \leq P_x\left(\bigcup_{s>0} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right) = 0$$

- if $\mathcal{C}$ is singular,

let $\omega \in \left\{\bigcup_t \left[x_t \in \overset{\circ}{\mathcal{C}} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}^c\right]\right\}$. There exist t and $s\neq t$ such that $x_t(\omega) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ and $x_s(\omega) \in \mathcal{C}^c$. $\{x_t\}$ being separable, there exists $t_j \in T'$, separant of T, such that $t<t_j<s$ with x_{t_j} near x_t. As $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ is open, we can always find t_j sufficiently near t so that $x_{t_j} \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Therefore,

$$P_x\left(\bigcup_t \left(x_t \in \overset{\circ}{\mathcal{C}} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}^c\right)\right) \leq \sum_{t_j\in T} \mathbb{1} P_x\left(x_{t_j} \in \overset{\circ}{\mathcal{C}} \cap \bigcup_{s>t_j} x_s \in \mathcal{C}^c\right) = 0$$

vi) general case

$P_x\left(\bigcup_t \left[x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right]\right)$ can be positive when the union of the events $\left(x_t \in \mathcal{C}_{t,t_o} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in \mathcal{C}^c_{s,t_o}\right)$ is measurable but not countable.

Lemma III.1.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

According to the property 3- i) of a markovian cycle (lemma II.2), $\left\{x_{t_o} \in C\right\} \overset{P_x}{=\!=} \bigcap_{s \geq t_o} \{x_s \in C\}$, for all $x \in X$, for all $t_o \in T$.

Therefore, $\left\{x_{t_o} \in C\right\} \subset \bigcup_{t \leq t_o} \bigcap_{s \geq t} \{x_s \in C\}$ but,

$\bigcup_{t \leq t_o} \bigcap_{s \geq t} \{x_s \in C\} \subset \left(x_{t_o} \in C\right)$.

so, $\left\{x_{t_o} \in C\right\} \overset{P_x}{=\!=\!=} \bigcup_{t \leq t_o} \bigcap_{s \geq t} \{x_s \in C\}$

and, $\lim_{t_o \to \infty} P_x\left(x_{t_o} \in C\right) = P_x\left(\bigcup_t \bigcap_{s \geq t} x_s \in C\right)$, $x \in X$.

Lemma V.1.

Let $0 < \epsilon < \infty$. There exists a compact $K \supset \mathcal{V}_\epsilon(C)$. Then $K \setminus \mathcal{V}_\epsilon(C)$ is compact. So the trajectories $\omega \in \{L(\omega) \subset C\}$ can pass through $K \setminus \mathcal{V}_\epsilon(C)$, only at finite times. And because the process is continuous, these trajectories cannot pass through K^c at infinite times. Therefore,

$$P_x(B(C)) \leq \lim_{\epsilon \to 0} P_x\left(\bigcup_t \bigcap_{s \geq t} x_s \in \overline{\mathcal{V}_\epsilon(C)}\right)$$

$$\leq \lim_{\epsilon \to 0} \overline{\lim_{t_o \to \infty}} P_x\left(x_{t_o} \in \overline{\mathcal{V}_\epsilon(C)}\right)$$

Hence, $\mathcal{B}_\theta(C) \cup \mathcal{B}^i_\theta(C) \subset \mathcal{B}^{\cdot\cdot}_\theta(C)$.

Lemma V.2.

i) The inclusions $\subset$ are immediate. Those, in the other sense, $\supset$, are satisfied because C is absorbing : the trajectories which belong to $B(C) \setminus B(\delta C)$, or to $B^i(C) \setminus B^i(\delta C)$, pass through $\overset{o}{C}$ at infinite times ; then, thanks to

$P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{o}{C} \cap \bigcup_{s>t} x_s \in C^c\right) = 0$ (property 3- ii), lemma II.2)

We have,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$B(C) \setminus B(\delta C) \cup B^i(C) \setminus B^i(\delta C) \subset B'(C)$

ii) according to i), we have,

$P_x\left(B'(C)\right) \leq P_x(B(C))$, for all $x \in X \setminus C$ and

$P_x\left(B'(C)\right) \leq P_x\left(B^i(C)\right)$, for all $x \in C$.

Thanks to lemma III.1, we have.

$P_x\left(B'(C)\right) = \lim_t P_x(x_t \in C)$, for all $x \in X$.

Consequently,

$P_x(B(C)) \cdot f(x) \geq \lim_t P_x(x_t \in C) \cdot f(x)$, for all $x \in X \setminus C$ and

$P_x\left(B^i(C)\right) \cdot f(x) \geq \lim_t P_x(x_t \in C) \cdot f(x)$, for all $x \in C$.

This implies,

$\mathcal{B}'_\theta(C) \subset \mathcal{B}_\theta(C) \cup \mathcal{B}^i_\theta(C)$

Relations on the trajectories are then directly deduced. Moreover, if C is super-absorbing, we can replace $B'(C)$ by $B^*(C)$.

Lemma V.3.

$\{x_t\}$ is ν-recurrent in C, that is, $P_x\left(\bigcup_t x_t \in A\right) = 1$, for all $x \in C$, open set $A \subset C$ such that $\nu(A) > 0$. $\{x_t\}$ being separable, we have :

$$P_x\left(\bigcup_t x_t \in A\right) \leq P_x\left(\bigcup_{t_j \in T'} x_{t_j} \in A\right).$$

This implies : $P_x\left(\bigcup_{t_j \in T'} x_{t_j} \in A\right) = 1$, for all $A \in \mathcal{A}_*$ where

$\mathcal{A}_* = \{\text{open set } A : A \subset C,\ \nu(A) > 0\}$

We prove now that :

$$\bigcap_{\xi_j \in \{\xi_j\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_t \bigcup_{s \geq t} \left(\overbrace{x_s \in \mathcal{B}_{\xi_j, \epsilon}}^{\circ} \cap C\right) \overset{P_x}{=} \bigcup_t \bigcap_{s \geq t} \{x_s \in C\}, \quad \text{for all}$$

$x \in X$, for all set $\{\xi_j\}_j$ dense in $C^* \subset C$ where C^* is such that $\nu(C^* \setminus \delta C) = \nu\left(\overset{\circ}{C}\right)$.

As a matter of fact, we have.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \{x_s \in V\} \supset \lim_{N\to\infty} \searrow \Omega_{N.t_o}(V)$, for all $V \in \mathcal{A}_*$, where

$$\Omega_{N.t_o}(V) = \left[\bigcap_{j=1}^{N} \bigcup_{\substack{t_j \in T \\ t_j \geq t_{j-1}+s}} x_{t_j} \in V \right] \cap x_{t_o} \in C .$$

We calculate $\Omega_{N.t_o}(V)$ in a recurrent way

$$P_x\left(\Omega_{1.t_o}(V)\right) = P_x\left(x_{t_o} \in C \cap \bigcup_{t_t \geq t_o+s} x_{t_1} \in V\right)$$

$$= P_x\left(x_{t_o} \in C \cap x_{t_o+s} \in C \cap x \bigcup_{t_1-t_o\geq s} x_{t_1} \in C\right)$$

(because C is absorbing).

Then,

$$P_x\left(\Omega_{1.t_o}(V)\right) = \int_C P_x^{t_o}(dy_o) \int_C P_{y_o}^{s}(dy_s) P_{y_s}\left(\bigcup_{t_1-t_o\geq s} x_{t_1-t_o-s} \in V\right)$$

We have,

$P_{y_s}\left(\bigcup_{t_1-t_o\geq s} x_{t_1-t_o-s} \in V\right) = 1$ (ν-recurrence on C) and $P_{y_o}(x_s \in C) = 1$, for all $y_o \in C$ (C is absorbing).

Then, $P_x\left(\Omega_{1.t_o}(V)\right) = P_x\left(x_{t_o} \in C\right)$.

We prove in the same way, that, $\Omega_{N.t_o}(V) \overset{P_x}{=\!=} \left\{x_{t_o} \in C\right\}$, for all $x \in C$, for all $N \in \mathbb{N}$.

Consequently,

$P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in V\right) \geq \lim_{N\to\infty} P_x\left(x_{t_o} \in C\right)$, for all $x \in C$, for all $V \in \mathcal{A}_*$.

So, $P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in V\right) \geq P_x\left(B'(C)\right)$ (lemma III.1.)

If $\overset{o}{C} \neq \emptyset$, because $P_x\left(x_t \in \overset{o}{C} \cap \bigcup_{s\geq t} x_s \in C^c\right) = 0$ (lemma II.2.), we have,

$$B'(C) \supset \overset{P_x}{\bigcap_{V_j \in \{V_j\}}} \bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \{x_s \in V_j\},$$ for all countable set $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of open sets $V_j \in \mathcal{A}_*$.

Therefore,

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$B'(C) \overset{P_x}{=\!=} \bigcap_{V_j \in \{V_j\}} \bigcap_t \bigcup_{s \geq t} \{x_s \in V_j\}, \quad \text{for all } x \in C.$$

Then, setting $V_j = \overline{\mathcal{B}_{\xi_j, 1/n} \cap C}^{\rho}$, we have

$$(D) \qquad B'(C) \overset{P_x}{=\!=} \bigcap_{\xi_j \in \{\xi_j\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_t \bigcup_{s \geq t} \left\{ x_s \in \overline{\mathcal{B}_{\xi_j, 1/n} \cap C}^{\rho} \right\}, \quad \text{for all}$$

$x \in X$, for all countable set of points $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dense in C^*,

where $C^* = C \setminus B$ with $B = \left\{ \xi \in C : \exists\, \epsilon > 0,\ \nu\left(\overline{\mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap C}^{\rho}\right) = 0 \right\}$

The right member of relation (D) is $\left\{ L(\omega) \supset \overline{C}^{*} \right\}$; now $B'(C) \subset B(C) \cup B^i(C)$ (lemma V.2. i)). Therefore, $B'(C) \overset{P_x}{=\!=} \left\{ L(\omega) = \overline{C}^{*} \right\}$. We prove now that $\nu(C^* \setminus \delta C) = \nu\left(\overset{\circ}{C}\right)$, that is, $\nu(B) \leq \nu(\delta C)$. X is separable ; consequently, there exists a countable set of points $\{\xi_j\}_j$, dense in X : for all $\xi \in B$ and for all $\epsilon > 0$, there exists $\xi_j \in \{\xi_j\}_j$ such that $\xi_j \in \mathcal{B}_{\xi, \epsilon}$.

Now, for all $\xi \in B$, there exists $\epsilon > 0$ such that $\nu\left(\overline{\mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap C}^{\rho}\right) = 0$. If ϵ' is sufficiently small, $\mathcal{B}_{\xi_j, \epsilon'} \subset \mathcal{B}_{\xi, \epsilon}$ with $\xi \in \mathcal{B}_{\xi_j, \epsilon'}$ and $\xi_j \in \mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap C$. If we denote $V\{\xi_j\} = \mathcal{B}_{\xi_j, \epsilon'} \cap C$, we have, $B \subset \bigcup_j V\{\xi_j\}$. Now

$$\nu(V(\xi_j)) \leq \nu(\mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap C) = \nu\left(\overline{\mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap C}^{\rho}\right) + \nu(\mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap \delta C) = \nu(\mathcal{B}_{\xi, \epsilon} \cap \delta C).$$

Therefore, $\nu(B) \leq \nu(\delta C)$, and consequently, $\nu(C^* \setminus \delta C) = \nu\left(\overset{\circ}{C}\right)$.

If ν satisfies supp $\nu \supset C$ then $B = \emptyset$, and $C^* = C$.

Proposition V.1.

According to lemma V.4, we have, $X \setminus C \cup C^{\circ} = \bigcup_m \overset{\circ}{F}_m$, where the $\overset{\circ}{F}_m$ form an increasing family of inessential sets, i.e. such that

$P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in \overset{\circ}{F}_m\right) = 0$. Now,

$P_x\left(L(\omega)\cap X\setminus \bar{C} \cup \bar{C}^o \neq \emptyset\right) \leq P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in X\setminus C\cup C^o\right)$

and $P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in X\setminus C\cup C^o\right) = \lim_m P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} x_s \in \overset{\circ}{F}_m\right)$.

Consequently, $P_x\left(L(\omega) \subset \bar{C} \cup \bar{C}^o\right) = 1$, for all $x \in X$.

<u>Lemma V.4.</u>

It suffices to prove that $X\setminus C \cup C^o$ is a countable union of inessential sets.

let $F_m = \left\{x \notin C : P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{\circ}{C}\right) > 1/m\right\}$. Then, $X\setminus C \cup C^o = \bigcup_m \overset{\circ}{F}_m$.

We prove now that $\overset{\circ}{F}_m$ is inessential, for all m :

suppose there exists $x \in X$ such that $P_x(\mathcal{E}) > 0$, where $\mathcal{E} = \bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \left\{x_s \in \overset{\circ}{F}_m\right\}$. $\omega \in \mathcal{E} \Leftrightarrow$ for all t, there exists $s \geq t$: $x_s(\omega) \in \overset{\circ}{F}_m$.

Consequently, $P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{\circ}{C} \mid \mathcal{F}_s \cap \mathcal{E}\right) > 1/m$, where $\mathcal{F}_s$ is the σ-field generated by $\{x_t, t\leq s\}$. According to lemma V.5,

$\lim_s P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{\circ}{C} \mid \mathcal{F}_s \cap \mathcal{E}\right) = 1_{\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \left\{x_s \in \overset{\circ}{C}\right\}} 1_{\mathcal{E}}$ which implies,

(E) $\quad P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \left\{x_s \in \overset{\circ}{C}\right\} \cap \mathcal{E}\right) > 1/m.$

But C is super-absorbing. Therefore :

$\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \left\{x_s \in \overset{\circ}{C}\right\} \subset \bigcup_t \bigcap_{s\geq t} \{x_s \in C\}$. We have :

$\mathcal{E} \subset \bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \left\{x_s \in X\setminus C \cup C^o\right\}$. Consequently,

$P_x\left(\bigcap_t \bigcup_{s\geq t} \left\{x_s \in \overset{\circ}{C}\right\} \cap \mathcal{E}\right) = 0$, which is in contradiction with

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

(E).

Then, F_m° is inessential.

Lemma V.5.

Since i) and ii) have similar proofs, only the proof for ii) will be given. For $r \leq s$,

$$P\left(\bigcup_{t\geq r} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) \geq P\left(\bigcup_{t\geq s} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) \geq P\left(\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$P\left(\bigcup_{t\geq r} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) = E_{\mathcal{F}_s} 1_{\bigcup_{t\geq r} A_t}.$$

In the same way, $P\left(\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) = E_{\mathcal{F}_s} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t}$. Let $s = n\,\Delta t$ (i.e. $\Delta t = s/n$). We apply then the martingale convergence theorem in discrete time, to the martingales $E_{\mathcal{F}_{n\Delta t}} 1_{\bigcup_{t\geq r} A_t}$ and $E_{\mathcal{F}_{n\Delta t}} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t}$ [20]. This gives :

$$E_{\mathcal{F}_{n\Delta t}} 1_{\bigcup_{t\geq r} A_t} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} E_{\mathcal{F}_\infty} 1_{\bigcup_{t\geq r} A_t} = 1_{\bigcup_{t\geq r} A_t} 1_{\mathcal{F}_\infty}$$

and

$$E_{\mathcal{F}_{n\Delta t}} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} E_{\mathcal{F}_\infty} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t} = 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t} \cdot 1_{\mathcal{F}_\infty}$$

But $1_{\bigcup_{t\geq r} A_t} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t}$.

Consequently,

$$P\left(\bigcup_{t\geq n\Delta t} A_t \mid \mathcal{F}_{n\Delta t}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t} \cdot 1_{\mathcal{F}_\infty}, \text{ for all } \Delta t \text{ and then,}$$

$$P\left(\bigcup_{t\geq s} A_t \mid \mathcal{F}_s\right) \xrightarrow[s\to\infty]{a.s} 1_{\bigcap_u \bigcup_{t\geq u} A_t}\, 1_{\mathcal{F}_\infty}.$$

Proposition V.2 .

iv) is directly obtained from proposition V.1., and ii) from lemma V.1.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

i) we prove first that C satisfies the 4 conditions of a global $(\theta,0)$-auto confiner, for all $\theta < f_c$.

Condition i) $(C \subset \mathcal{C}_\theta(X))$
Thanks to ν-recurence, we proved in [10] that C is C_θ-connex, for all $\theta < f_c$.

Condition ii) $\left(\mathcal{B}_\theta(C^c) \subset \mathcal{B}_\theta^i(C)\right)$
This condition is satisfied, for all $\theta \geq 0$, because C is absorbing, which implies, $P_x\left(B(C^c)\right) = 0$, for all $x \in C$.

Condition iii) $\left(\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{B}_\theta^i(C) \triangleq C\right)$
We have to prove first that $\mathcal{B}_\theta^i(C) \neq \emptyset$. $\mathcal{B}_\theta^i(C) = \{x \in C: P_x(B(C)).\ f(x) > \theta\}$. Because C is absorbing, $P_x\left(B'(C)\right) = 1$, for all $x \in C$. And thanks to lemma V.2., $P_x\left(B'(C)\right) = P_x(B(C)) = 1$. Then $\mathcal{B}_\theta^i(C) = C$ for all $\theta < f_c$.
Now, let $L(D) \in \mathcal{L}_0 \circ \mathcal{B}_\theta^i(C)$: $P(D) = P\left(B_\theta^i(C)\right)$
$= P\left(B'(C) \cap \mathcal{B}_\theta^i(C)_T\right)$.
But, $B'(C) \overset{P_x}{=\!=} \{L(\omega) = C\}$, for all $x \in X$ (lemma V.3.). Consequently, $P(D) = P(\{L(\omega) = C\} \cap C_T)$. As $\inf_{x \in C} f(x) > 0$, $D = F' \cap C_T$, with $F' \subset \{L(\omega) = C\}$ such that $P_x(F') = P_x(L(\omega) = C)$, for all $x \in C$. Then $L(D) = C$.

Condition iv) (there do not exist C' C_θ-connex, $C' \supset C$ such that $\nu(C') > \nu(C)$ and C' satisfies i), ii), iii), whatever $\theta < f_c$) . Thanks to V.2.1, C' such that $C' \supset C, \nu(C') > \nu(C)$ and C' satisfies the invariance property (condition iii)) cannot exist.

Condition v) (there do not exist $C'' \subset C$ such that $\nu(C'') < \nu(C)$ and C'' satisfies i),ii),iii),iv)). Because of

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Lemma V.3 , C'' cannot satisfy iv) whatever $C'' \subsetneq C$ and $\theta < f_c$.

Consequently, C is a global $(\theta,0)$-auto-confiner, and it is C_θ-connex, whatever $\theta < f_c$.

We prove now that C is a local θ-auto-confiner, for all $\theta < f_c$. Conditions i), iv), and v) are proved as previously

Condition ii) $\left(\mathcal{B}^{\ell}_{\theta}(C^c) \subset \mathcal{B}^{i\cdot\ell}_{\theta}(C)\right)$

We have $P_x\left(B(C^c)\right) = 0$, for all $x \in C$. This implies : $P_x\left(L(\omega) \cap C^c \neq \emptyset\right) = 0$ and particularly, $P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset) = 0$, for all $y \in C^c$, $x \in C$. Consequently, $L^{\ell}_{\theta}(x) \cap C^c = \emptyset$, for all $x \in C$, and then $\mathcal{B}^{\ell}_{\theta}(C^c) = \emptyset$, for all $\theta \geq 0$.

Condition iii) $\left(\mathcal{L}_o \circ \mathcal{B}^{i\cdot\ell}_{\theta}(C) \overset{o}{=} C\right)$.

If $x \in C$, $P_x\left(B'(C)\right) = 1 = P_x(L(\omega) = C)$. But $P_x(L(\omega) = C) \leq P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset)$, for all $y \in C$, $x \in C$. Hence, $L^{\ell}_{\theta}(x) = C$, for all $x \in C$ and $\theta < f_c$ which implies $\mathcal{B}^{i\cdot\ell}_{\theta}(C) = C$. We have as previously, $\mathcal{L}_o \cdot \mathcal{B}^{i\cdot\ell}_{\theta}(C) \overset{o}{=} C$, for all $\theta < f_c$. Consequently, C is a local θ-auto-confiner, for all $\theta < f_c$.

iii) In this paragraph, conditions i), ii), iv), and v), are proved as previously.Condition iii) remains just to be proved. We prove first that C is a global $(\theta,0)$-confiner, for all $\theta < \min(f_c, \theta_o)$.

Condition iii) $\left(\mathcal{L}_o \circ \mathcal{B}_{\theta}(C) \overset{o}{=} C\right)$

As $\bigcup_t x_t \in \overset{o}{C} \overset{P_x}{\subset} B'(C)$, for all $x \in X$ (lemma II.2.), and as $B'(C) \overset{P_x}{=\!=} \{L(\omega) = C\}$, for all $x \in X$ (lemma V.3), and $B'(C) \subset B(C)$ (lemma V.2.), then $B_\theta(C) \supset \mathcal{B}^{\theta\,o}(C)$, whatever

$\theta \leq \theta_o$. Moreover, let $L(F \cap E_T) \in \mathcal{L}_o \circ \mathcal{B}_\theta(C)$:

$$P(F \cap E_T) = P(B(C) \cap \mathcal{B}_\theta(C)_T)$$

$$\geq P\left(\{L(\omega) = C\} \cap \mathcal{B}^{\theta o}(C)_T\right)$$

Then, as $\mu\left(\mathcal{B}^{\theta o}(C)\right) > 0$, $F \cap E_T \supset F' \cap E_T'$ where $F' \subset \{L(\omega) = C\}$ and $\mu(E') = \mu\left(\mathcal{B}^{\theta o}(C)\right)$.
Consequently $L(F \cap E_T) = C$.
Then, C is a global $(\theta, 0)$-confiner, for all $\theta < \min(f_c, \theta_o)$.
Then, we prove that there exists θ such that C is a local θ-confiner.

Condition iii) $\left(\mathcal{L}_o \circ \mathcal{B}'_\theta(C) \overset{o}{=} C\right)$
Thanks to the inequalities,
$P_x\left(\bigcup_t x_t \in \overset{o}{C}\right) \leq P_x\left(B'(C)\right) = P_x(L(\omega) = C) \leq P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset)$,
for all $x \in X$, $y \in C$, we obtain,
$P_x(L(\omega) \cap \{y\} \neq \emptyset) \cdot f(x) > \theta_o$, for all $x \in \mathcal{B}^{\theta o}(C)$, $y \in C$.
Consequently, $L'_\theta(x) \supset C$, for all $x \in \mathcal{B}^{\theta o}(C)$, $\theta < \theta_o$.
Moreover, as $\{L(\omega) \cap \{y_1\} \neq \emptyset\} \subset \bigcup_t \left\{x_t \in \overset{o}{C}\right\} \overset{P_x}{\subset} \{L(\omega) = C\}$,
for all $x \in X$, and all $y_1 \in \overset{o}{C}$,
$P_x(\{L(\omega) \cap \{y_1\} \neq \emptyset\} \cap \{L(\omega) \cap \{y_2\} \neq \emptyset\}) = 0$, for all $y_1 \in \overset{o}{C}, y_2 \in C^c$.
Consequently, $L'_\theta(x) = C$, for all $x \in \mathcal{B}^{\theta o}(C)$, $\theta \leq \theta_o$.
, which implies that $\mathcal{B}'_\theta(C) \supset \mathcal{B}^{\theta o}(C)$, for all $\theta \leq \theta_o$, and then condition iii) is satisfied.
Then, C is a local θ-confiner, for all $\theta < \min(\theta_o, f_c)$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

v) $\bar{\mathcal{C}}_t$ is a closed and absorbing set, which satisfies the same asumptions that C. Consequently, $\mathcal{C}_t$ is a $(\theta,0)$-auto-confiner, a local θ-auto-confiner and it is C_θ-connex, for all $\theta < \theta_t$, where $\theta_t = \inf_{x\in\mathcal{C}_t} f(x)$, and this is true for all $t \in]0,d]$. Therefore, this is satisfied also for all $\theta < f_c$. The same kinds of results hold for the global and local confiners. We have $\bigcup_t \mathcal{C}_t = C$, and by definition of a ν-fundamental pseudo-cycle, there do not exist another cycle $\mathcal{C}'$ of period d' such that, for all $\varphi \in \left[0, \inf(d', d)\right[$, $\nu\left(\mathcal{C}'_\varphi\right) < \nu(\mathcal{C}_\varphi)$. Consequently d is the 0-period of description of C, whatever the kind of confiner considered.

Proposition V.3 .

1) we prove first the existence of a C-set C^*, i;e., C^* is such that $\nu(C^*) > 0$ and $I(C^*) \neq \emptyset$, where $I(C^*) = \left\{ r>0 : \inf_{(x,y)\in C^*\times C^*} p^r(x,y) > 0 \right\}$. d denotes the greatest common divisor of the $r \in I(C^*)$.
The process being separable, it is determinated by its law on a countable subset T' of T. It is ν-irreducible for T' and then we can transpose Orey's proof in discrete time, to the process $\{x_t\}_{t\in T'}$. We will suppose that C^* is an open set.

2) We prove then that C^* is d-accessible and even that $P_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_{nd} \in C^*\right) > 0$, for all $x \in C^*$. We prove also that C^* is not s-accessible, whatever s such that $0 < s < d$: Let $0 < s \leq d$. $A \in \mathcal{A}$ is s-accessible if there exists $A^* \subset C^*$ such that $\nu(A^*) > 0$ and $P_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_{nd+s} \in A\right) > 0$, for all $x \in A^*$. Suppose that C^* is s-accessible. Let denote $P_x^{nd+s}(C^*) = P_x\left(x_{nd+s} \in C^*\right)$. We have, for all

$(x,y) \in C^* \times C^*$:

$$p^{(n+n'+n'')d+s}(x,y) \geq \int_{C^*} p^{nd}(z,y)\; p^{(n'+n'')d+s}(x,z)\; \nu(dz)$$

$$\geq \alpha_n \int_{C^*} p^{(n'+n'')d+s}(x,z)\; \nu(dz)$$

where $\alpha_n = \inf_{(z,y)\in C^* \times C^*} p^{nd}(z,y)$.

In the same way, we have, for all $(x,z)\in C^* \times C^*$, $p^{(n'+n'')d+s}(x,z) \geq \alpha_{n'} \int_{C^*} p^{n''d+s}(y,z)\; \nu(dy)$. Then,

$$\sum_{n+n'+n''=N} p^{(n+n'+n'')d+s}(x,y)$$

$$\geq \sum_{n+n'+n''=N} \alpha_n \alpha_{n'} \int_{C^*} \sum_{n''\leq N-2} P_y^{n''d+s}(C^*)\; \nu(dy)$$

C^* is s-accessible, which implies, for N sufficiently large, that $\int_{C^*} \sum_{n''\leq N-2} P_y^{n''d+s}(C^*)\; \nu(dy) > 0$. Therefore, $p^{Nd+s}(x,y) > 0$, for all $x,y \in C^* \times C^*$; if $0 < s < d$, it contradicts the fact that d is the greatest common divisor of the $r \in I(C^*)$. Then, C^* is not s-accessible, for $0 < s < d$. But, $P_x^{nd}(C^*) = \int p^{nd}(x,y)\; \nu(dy)$, which is positive for all $x\in C^*$, if $nd \in I(C^*)$. Therefore, C^* is d-accessible.

3) Let $\tilde{\mathcal{C}}_t = \left\{x : P_x\left(\bigcup_{n>0} x_{nd-t} \in C^*\right) > 0\right\}$. We prove that the set $F = \bigcup_{t'\neq t} \tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}$ is not accessible. Then, we put

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$\mathcal{C}_t = \tilde{\mathcal{C}}_t \backslash F$. The $\mathcal{C}_t$ are all disjointed, and we prove that $\left\{\pi_t \mathcal{C}_t\right\}$ is a markovian cycle : suppose that there exists $t \neq t'$ such that $\tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}$ is accessible, which means that there exists $0 < s \leq d$ such that $\tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}$ is s-accessible ; we have,

$$\sum_{m,n} P_x^{(m+n)d+(s-t)}(C^*) \geq \int_{\tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}} \sum_n p^{nd+s}(x,y) \sum_m p_y^{md-t}(C^*) \nu(dy)$$

With the help of the assumption of accessibility of $\tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}$, there exists $B \subset \tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}$, $\nu(B) > 0$ such that $\sum_n p^{nd+s}(x,y) > 0$, for all $y \in B$, $x \in A^*$. Thanks to the definitionof $\tilde{\mathcal{C}}_t$, $\sum_m p_y^{md-t}(C^*) > 0$, for all $y \in \tilde{\mathcal{C}}_t$. Therefore,

$\sum_{m,n} P_x^{(m+n)d+(s-t)}(C^*) > 0$, for all $x \in A^*$.

We prove in the same way that
$\sum_{m,n} P_x^{(m+n)\,d+(s-t')}(C^*) > 0$, for all $x \in A^*$.

But C^* is d-accessible and not s-accessible for $0 < s < d$. This implies that $s=t$ and $s=t'$, i.e. $t = t'$, which contradicts the hypothesis $t \neq t'$.

Consequently, the set $F = \bigcup_{t,t'} \tilde{\mathcal{C}}_t \cap \tilde{\mathcal{C}}_{t'}$ is not accessible.

Let $\mathcal{C}_t = \tilde{\mathcal{C}}_t \backslash F$. By construction, the $\mathcal{C}_t$ are all disjointed : $\bigcup_t \mathcal{C}_t = \bigcup_t \tilde{\mathcal{C}}_t \backslash F$. By ν-irreducibility, $\bigcup_t \tilde{\mathcal{C}}_t = X$, and then $\bigcup_t \mathcal{C}_t = X \backslash F$.

As F is not accessible and the process is ν-irreducible, we

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

have $\nu(F) = 0$. We prove now that $\pi_t \mathcal{C}_t$ is a cycle, which means,

$P_x\left(\bigcup_{s>0} x_{nd+s} \in \mathcal{C}^c_{s+t_o}\right) = 0$, for all $x \in \mathcal{C}_{t_o}$, and $t_o \in]0,d]$.
Let $x \in \mathcal{C}_{t_o}$.
$P_x\left(\bigcup_{s} x_{nd+s} \in \mathcal{C}^c_{s+t_o}\right) = (F) \cup (G)$, where,

$$(F) = \int_{\mathcal{C}_d} p^{nd-t_o}(x,y)\, P_y\left(\bigcup_s x_{s+t_o} \in \mathcal{C}^c_{s+t_o}\right)\, \nu(dy)$$

and

$$(G) = \int_{\mathcal{C}^c_d} p^{nd-t_o}(x,y)\, P_y\left(\bigcup_s x_{s+t_o} \in \mathcal{C}^c_{s+t_o}\right)\, \nu(dy)$$

- We prove first that $(F) = 0$.
For that, we prove that $\mathcal{C}_d$ is only d-accessible : Let $x \in C^*$.

$$\sum_{n,n'} P_x^{(n+n')d+s}(C^*) \geq \int_{\mathcal{C}_d} \sum_{n'} p^{n'd+s}(x,y) \sum_n p_y^{nd}(C^*)\, \nu(dy)$$

$\sum_n p_y^{nd}(C^*) > 0$, for all $y \in \mathcal{C}_d$, by definition of $\mathcal{C}_d$. Suppose $\mathcal{C}_d$ is s-accessible : there exists $A^* \subset C^*$, $\nu(A^*) > 0$, and $\mathcal{C}^*_d \subset \mathcal{C}_d$, $\nu\left(\mathcal{C}^*_d\right) > 0$, such that : $\sum_m p_x^{md+s}(x,y) > 0$, for all $x \in A^*$, $y \in \mathcal{C}^*_d$. This implies,

$$\sum_{n,n'} P_x^{(n+n')d+s}(C^*) > 0, \text{ for all } x \in A^*$$

This is possible only if $s = d$, because C^* is only d-accessible. Therefore $\mathcal{C}_d$ is only d-accessible.
We prove then that $P_y\left(\bigcup_s x_{s+t_o} \in \mathcal{C}^c_{s+t_o}\right) = 0$, for all $y \in \mathcal{C}_d$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

by using the fact that $\mathcal{C}_d$ is only d-accessible. Denote $t = s+t_o$.

Let $y \in \mathcal{C}_d$ and $t \neq t'$

$$\sum_n P_y^{nd+t-t'}(\mathcal{C}_d) \geq \int_{\mathcal{C}_t^c} p^t(y,x) \sum_n P_x^{nd-t'}(\mathcal{C}_d)\nu(dx)$$

$\sum_n P_x^{nd-t'}(\mathcal{C}^d) > 0$, for all $x \in \mathcal{C}_{t'}$, by definition of $\mathcal{C}_t$. We have,

$$\sum_n P_y^{nd+t-t'}(\mathcal{C}^d) \geq \int_{\mathcal{C}_t} \mathbb{1}\, p^t(y,x) \sum_n P_x^{nd-t'}(\mathcal{C}^d)\nu(dx)$$

Suppose $p^t(y,x) > 0$, for all $y \in \mathcal{C}_d^* \subset \mathcal{C}_d$, $\nu(\mathcal{C}_d^*) > 0$ and for all $x \in B^* \subset \mathcal{C}_{t'}$, $\nu(B^*) > 0$. Then $\sum_n P_y^{nd+t-t'}(\mathcal{C}_d) > 0$, for all $y \in \mathcal{C}_d^*$.

Therefore $\mathcal{C}_d$ is $(t-t')$-accessible, which implies $t=t'$. But $t \neq t'$; therefore $p^t(y,x) > 0$ only for all $y \in \mathcal{C}_d^* \subset \mathcal{C}_d$ such that $\nu(\mathcal{C}_d^*) = 0$, or for all $x \in B^* \subset \mathcal{C}_{t'}$ such that $\nu(B^*) = 0$ i.e. $P_y^t(\mathcal{C}_{t'}) = 0$ for ν-almost all $y \in \mathcal{C}_d$, for all $t' \neq t$. Then $P_y^t(\mathcal{C}_t) = 1$, for ν-almost all $y \in \mathcal{C}_d$, for all t. i.e. $P_y\left(\bigcap_t x_t \in \mathcal{C}_t\right) = 1$

i.e. $P_y\left(\bigcup_t x_t \in \mathcal{C}_t^c\right) = 0$, for ν-almost all $y \in \mathcal{C}_d$.

Therefore (F) = 0, for all $x \in \mathcal{C}_{t_o}$, for all t_o.

- We prove now that (G) = 0.

Let $x \in \mathcal{C}_{t_o}$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

$$\sum_n P_x^{nd-t}(C^*) \geq \int_{\mathcal{C}_d^c} p^{nd-t_o}(x,y) \sum_n P_y^{nd+t_o-t}(C^*)\, \nu(dy)$$

By definition of $\mathcal{C}_{t-t_o}$, $\sum_n P_y^{nd+t_o-t}(C^*)$ is positive for all $y \in \mathcal{C}_{t-t_o}$, and null for all $y \in \mathcal{C}_{t-t_o}^c$.

Therefore, if $p^{nd-t_o}(x,y) > 0$, for all $y \in B^* \subset \mathcal{C}_{t-t_o} \subset \mathcal{C}_d^c$ $(t \neq t_o)$, where $\nu(B^*) > 0$, we have

$$\sum_n P_x^{nd-t}(C^*) > 0.$$

But, $\sum_n P_x^{nd-t}(C^*) > 0$ only if $x \in \mathcal{C}_t$, by definition of $\mathcal{C}_t$.
But $x \in \mathcal{C}_{t_o}$, which implies $t=t_o$, which is inconsistent with the paragraph before.
Consequently, $p^{nd-t_o}(x,y) = 0$, for ν-almost all $y \in \mathcal{C}_d^c$, and then $(G) = 0$, for all $x \in \mathcal{C}_{t_o}$, $t_o \in]0,d]$.
Therefore $\left\{\pi_t\, \mathcal{C}_t\right\}$ is a markovian cycle.
Moreover, if $C = \bigcup_t \mathcal{C}_t$ is super-absorbing, $X \setminus C \cup C^o$ is not properly essential (lemma V.4.).

ii) Let $\{\mathcal{C}'\}$ be another cycle, and $C' = \bigcup_t \mathcal{C}'_t$. By ν-irreducibility, $\nu(X \setminus C') = 0$. Therefore $\nu(C) = \nu(C')$.

Suppose there exist t and t' such that $\mathcal{C}_t \cap \mathcal{C}'_{t'} \neq \emptyset$. Then, $\left(\pi_\ell\ \mathcal{C}_{t+\ell} \cap \mathcal{C}'_{t'+\ell}\right)$ is a markovian cycle, and by ν-irreducibility, $\nu\left(X \setminus \bigcup_\ell\ \mathcal{C}_{t+\ell} \cap \mathcal{C}'_{t'+\ell}\right) = 0$. Hence,
$\nu(C) = \nu\left(\bigcup_\ell\ \mathcal{C}_{t+\ell} \cap \mathcal{C}'_{t'+\ell}\right)$. Consequently, there exists an only fundamental cycle, except to a null ν-measure set, which is connected to $\mathcal{C}$.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

REFERENCES

[1] Andersen, A.H., Jensen, E.B. and G. Schou (1981), "Two-way analysis of variance with correlated errors". *International Statistical Review*, 49, 153-167.

[2] Baconnier, P., Benchetrit, G., Demongeot, J. and D.T. Pham (1983), "Simulation of the entrainment of the respiratory rhythm by two conceptually different models". In *Rhythms in Biology and Other Fields of Application*, Lecture Notes in Biomathematics, 49, edited by M. Cosnard, J. Demongeot and A. Le Breton. Berlin, Springer Verlag.

[3] Baldessari, B. and F. Gallo (1981), "Statistical analysis of denendent data : analysis of variance". *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 26(3), 363-374.

[4] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*. New York, Wiley.

[5] Cosnard, M. and J. Demongeot (1985), "Attracteurs : une approche déterministe". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 300(15), 551-556.

[6] Dacunha-Castelle, D. and M. Duflo (1983), *Probabilités et Statistiques. 2. Problèmes à temps mobile*. Paris, Masson.

[7] Demongeot, J. (1983), "Systèmes dynamiques et champs aléatoires : application en biologie fondamentale". Thèse, Grenoble.

[8] Demongeot, J., Goles, E. and M. Tchuente (1985). *Systems and Cellular Automata*. New York, Academic Press.

[9] Demongeot, J. and C. Jacob (1987), "Confineurs : Une approche stochastique des attracteurs". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, à paraitre.

[10] Demongeot, J. and C. Jacob (1987), "Confineurs : Une approche stochastique des attracteurs". *Rapport technique*.

[11] Doob, J.L. (1953), *Stochastic Processes*. New York, Wiley.

[12] Fogelman-Soulie, F., Milgra, M. and G. Weisbuch (1983), "Automata networks as models for biological systems : a survey". In *Rhythms in Biology and Other Fields of Application*, Lecture Notes in Biomathematics, 49, edited by M. Cosnard, J. Demongeot and A. Le Breton. Berlin, Springer Verlag.

[13] Friedman, A. (1976), *Stochastic Differential Equations and Applications*. New York, Academic Press.

[14] Goldeter, A. and J.L. Martiel (1983), "A critical discussion of plausible models for replay and oscillation of cyclic-AMP in dictyostelium cells". In *Rhythms in Biology and Other Fields of Application*, Lecture Notes in Biomathematics, 49, edited by M. Cosnard, J. Demongeot and A. Le Breton. Berlin, Springer Verlag, 173-188.

[15] Jacob, C. (1985), "Random oscillations modelling". In *Time Series Analysis : Theory and Practice 7*, edited by O.D. Anderson. Amsterdam, North-Holland, 139-156.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

[16] Jäger, W. and J.D. Murray (1984), *Modelling of Patterns in Space and Time*. Lecture Notes in Biomathematics, 55. Berlin, Springer Verlag.

[17] Matheron, G. (1975), *Random Sets and Integral Geometry*. New York, Wiley.

[18] May, R.M. (1974), *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton, Princeton University Press.

[19] Neveu, J. (1970), *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Paris, Masson.

[20] Neveu, J. (1972), *Martingales à temps discret*. Paris, Masson.

[21] Orey, S. (1971), *Lectures Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities*. London, Van Nostrand Reinhold.

[22] Pavlidis, T. (1973), *Biological Oscillators : Their Mathematical Analysis*. New York, Academic Press.

[23] Tweedie, R.L. (1983), "Criteria for rates of convergence of Markov chains, with application to queuing and storage theory". In *Probability, Statistics and Analysis*, edited by J.F.C. Kingman and G.E.H. Reuter. Cambridge, Cambridge University Press.

[24] Winfree, A.T. (1980), *The Geometry of Biological Time*. Berlin, Springer Verlag.

[25] Yang, M.C.K. and R.L. Carter (1983), "One way analysis of variance with time-series data". *Biometrics*, 39, 747-751.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CHAPITRE 3 .

ATTRACTEURS ET CONFINEURS : DU PERIODIQUE AU CHAOS

J. DEMONGEOT *, C. JACOB ** et P. CINQUIN *

* Université de Grenoble
TIM3 - IMAG BP 68
38 402 St Martin d'Hères Cédex

** INRA - CNRZ
Laboratoire de biométrie
78 350 Jouy-en-Josas

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Résumé :

Nous donnons une définition générale de la notion d'attracteur pour un système déterministe, puis de la notion de confineur pour un système stochastique. Nous montrons dans ce dernier cas que l'on peut étendre les notions classiques de bifurcation ; ensuite, nous définissons la période de description d'un confineur, lorsqu'il est possible de la calculer ; sinon, nous proposons l'usage des estimateurs classiques de la dimension des orbites chaotiques. Nous donnons enfin quelques exemples biologiques d'application, ainsi que l'exemple académique de l'oscillateur de van der Pol bruité par un processus gaussien.

0. Introduction

Il existe de nombreux exemples biologiques de comportements périodiques présentant un caractère plus ou moins aléatoire ; les domaines concernés vont de l'écologie aux systèmes biochimiques comportant un faible nombre d'enzymes, comme la haute glycolyse (voie de dégradation des sucres dans la cellule), en passant par la physiologie (rythmes respiratoire et cardiaque) et la microbiologie (qui, comme l'écologie, offre d'intéressants exemples de compétition entre espèces pour un substrat nutritif ou du type proie-prédateur). Ces exemples peuvent être trouvés dans de nombreux ouvrages édités ces dernières années (cf. par exemple

Pavlidis (1973), Waltman (1974), Levin (1974), Banks (1975), Reinberg (1977), Feistel & Ebeling (1978), Bruni et al. (1979), Winfree (1980), Gumowski (1981), Cosnard et al. (1983), Jäger et Murray (1984), ...). Un grand nombre d'auteurs tente d'expliquer les oscillations observées à l'aide de modèles mathématiques représentant des dynamiques non linéaires et/ou à retard, à temps discret ou continu, à caractère déterministe ou stochastique. Ces modèles distinguent les oscillations endogènes (le système biologique est alors un pace-maker ayant un comportement périodique autonome) des oscillations exogènes (dues à la seule action de forçage de variables d'environnement du système oscillantes). Souvent, l'approche déterministe est préférée, du fait d'une meilleure connaissance des méthodes analytiques de résolution et de calcul numérique et d'une étude plus aisée des problèmes de stabilité trajectorielle et de stabilité structurelle (c'est-à-dire vis-à-vis de modifications paramétriques). Cependant, à cause dans certains cas du caractère intrinsèquement aléatoire du phénomene observé, le modèle déterministe a moins de pouvoir explicatif que le stochastique, ainsi que l'ont souligné des auteurs tels que Bartlett (1956), May (1974), Parker (1974), Smith et Tuckwell (1974), Anderson (1976), Barra et al. (1979), Ricciardi (1980), ...En effet, l'ajustement d'un modèle déterministe aux observations n'est pas toujours valide : il l'est lorsque le processus observé résulte d'une moyennisation sur les individus d'une nombreuse population (moléculaire par exemple, si les concentrations sont importantes) ; il l'est également si le processus observé chez un seul individu a un caractère pratiquement déterministe, l'aléa, qui intervient en général de manière non linéaire, étant trop faible pour modifier significativement le processus déterministe. Par contre, plus l'aléa devient important, plus le comportement s'éloigne de celui du processus déterministe primitif bruité par cet aléa : c'est le cas d'un système présentant un focus stable très peu attractant ; bruité de manière adéquate, il présente des oscillations aléatoires (Jeffries (1974)). C'est également le cas de systèmes à cycle-limite qui, suffisamment bruités, possèdent un comportement chaotique. Le modèle déterministe s'ajustant le mieux aux observations peut, dans ces derniers cas, conduire à une interprétation erronée du mécanisme biologique sous-jacent.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Certains auteurs ont alors utilisé un modèle stochastique, tout en caractérisant le phénomène périodique observé en référence à un comportement de type cycle-limite pour le modèle déterministe sous-jacent bruité (Ozaki (1980) et Tong (1983)). Là encore, la période et la géométrie du cycle-limite ne caractérisent correctement les oscillations aléatoires que si le bruit est faible. Il n'existait en effet jusqu'ici aucun outil de description du comportement asymptotique d'un processus aléatoire "oscillant", hormis les notions d'ensemble invariant ou clos, absorbant, stochastiquement fermé (Nummelin (1984), Barra et al. (1979)), d'ensemble de probabilité invariante (Tweedie (1975), Barra et al. (1979)), d'ensemble asymptotiquement stable (Friedman (1976)) ou stochastiquement stable (Kushner (1967)), qui pouvaient servir à la rigueur d'équivalent stochastique de la notion déterministe d'attracteur. Pour pallier cette lacune, la notion de cycle-limite stochastique fut d'abord introduite (Jacob (1985), (à par. a et b)), généralisant les cycles markoviens (Doob (1953), Orey (1971)) et caractérisant de manière temporelle les ensembles invariants. Puis cette notion fut étendue en celle de confineur (Demongeot et al. (1986) et (à par. a et b), Cinquin et al. (à par.)), équivalent probabiliste de celle d'attracteur (Cosnard & Demongeot (1985 a et b)). Cette notion de confineur a permis de généraliser les notions d'isochron et de bifurcation, facilitant l'étude des stabilités trajectorielle et structurelle du système stochastique. Dans la suite, nous rappellerons la définition de ces notions (attracteur, confineur, isochron, bifurcation) et nous présenterons une procédure d'estimation dans le cas d'un système de van der Pol bruité ; enfin, nous donnerons la liste de quelques exemples biologiques où ces notions s'appliquent.

1. La notion d'attracteur

Depuis Birkhoff en 1927, de nombreux auteurs ont tenté de définir la notion d'attracteur d'une dynamique déterministe. Par exemple, Cosnard & Demongeot (1985 a et b) ont utilisé comme point de départ la caractéristique essentielle qui semble intuitivement être le propre d'un attracteur, à savoir l'invariance par la double opération qui consiste d'abord

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

à rechercher son bassin d'attraction, puis l'ensemble limite de ce bassin.

Soit T l'ensemble temporel (égal a $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$), X l'espace d'état supposé métrique compact et f_t un semi-flot continu de XxT vers X, c'est-à-dire que $f_{t+t'}(x)=f_t \circ f_{t'}(x)$ et $f_t(x)$ est une fonction continue de t et de x, qui représente l'état à l'instant t de la trajectoire issue de x. Notons que ce semi-flot peut représenter aussi bien la dynamique d'une équation récurrente, d'un système différentiel ordinaire, que celle d'un système différentiel aux dérivées partielles (Henry (1981).

Le concept d'attracteur est fondé sur la définition de L(x), ensemble limite de la trajectoire issue de x, c'est-à-dire ensemble des points d'accumulation de la trajectoire $\{f_t(x)\}_{t\in T}$, lorsque t tend vers l'infini ; on peut aussi dire plus simplement que L(x) désigne l'ensemble des points de X visités une infinité de fois à des temps croissant vers l'infini par la trajectoire issue de x. On utilise la notion de c-connexité de Ruelle-Bowen, pour exprimer la cohésion mutuelle des points de L(x) : elle exprime dans ce cas que l'on peut, à partir d'un point quelconque de L(x), visiter tout autre point de L(x) en utilisant une portion de trajectoire qui l'amène aussi près que l'on veut de cet autre point. De manière plus générale et plus rigoureuse, nous allons maintenant donner les définitions de la c-connexité, des opérateurs bassin et limite, et enfin celle d'attracteur.

1.1.Définition de la c-connexité

On dit que x est chaîné à y ($x \vdash y$), s'il existe $t(x,y)>0$, tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$, $t_1,\ldots,t_N \geq t(x,y)$ et $z_1,\ldots,z_{N+1}$ dans X, avec $z_1=x$, $z_{N+1}=y$ et $d(f_{t_i}(z_i),z_{i+1})\leq\varepsilon$, pour tout $i=1,\ldots,N$.

On appelle coeur de X (noté C(X)) l'ensemble des points x vérifiant : $x \vdash x$. La relation d'équivalence de Ruelle-Bowen est alors définie sur C(X) par : $xRy \Leftrightarrow x \vdash y$ et $y \vdash x$.

Une partie D de X est dite c-connexe, si D est dans C(X) et si D/R ne contient qu'une seule classe d'équivalence (i.e. pour tout couple de points x,y de D, on a : $x \vdash y$ et $y \vdash x$). On démontre sans peine que L(x) est c-connexe.

1.2.Définition des opérateurs bassin et limite

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

On définit les opérateurs B bassin et L limite sur l'ensemble P(X) des parties de X par :

$\forall A \subset X$, $B(A) = \{x \in X \setminus A \ ; \ L(x) \subset A\}$ et $L(A) = \bigcup_{x \in A} L(x)$

Le principe d'invariance se traduit par :

$$L \circ B(A) = A$$

La définition d'un attracteur est alors fondée sur cette propriété d'invariance, assortie d'une condition double de maximalité pour la c-connexité et de minimalité pour l'inclusion. Ceci implique que tout point non "super-errant" (cette notion de super-errant recevant parfois le qualificatif de super-wandering ou super Poisson-instable au sens de Birkhoff) ne peut appartenir au bassin d'un attracteur ; en effet, soit S l'ensemble des points super-errants :

$S = \{x \in X \ ; \ \exists \ y \in X \ ; \ x \in L(y)\}$

Si x n'appartient pas à S, il existe donc y tel que x appartienne à L(y), ce qui implique : $L(x) \subset L(y)$ et donc, grâce à la propriété de maximalité pour la c-connexité, L(y) sera dans l'attracteur A, si x est dans son bassin ; or L(y) possède x, qui, par définition du bassin, ne peut être dans A, d'où contradiction ; en conséquence, un point non situé dans S ne peut appartenir au bassin d'un attracteur. Pour cette raison, on a, pour un attracteur A : $B(A) = B(A) \cap S$, que l'on notera $B_S(A)$. On peut alors définir la notion d'attracteur par :

1.3. Définition d'un attracteur

A est un attracteur faible, si :

i) $L \circ B_S(A) = A$

ii) quelque soit A_i, composante c-connexe de A (i.e. classe d'équivalence de A/R), il n'existe pas A' c-connexe contenant strictement A_i, tel que $A \cup A'$ vérifie i)

iii) il n'existe pas $A'' \subsetneq A$ et vérifiant i) et ii).

Cette définition implique les propriétés suivantes :

a) A est invariant par le flot et $L(A) \subset A$

b) A est c-connexe

Un attracteur peut également être caracterisé de la façon suivante : A est un attracteur faible, si et seulement si A est une composante c-connexe de L(S). Nous voyons donc qu'il suffit que S soit non vide, c'est-à-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

dire qu'il existe des points super-errants, pour que L(S) soit non vide dans X compact, donc pour qu'il existe au moins un attracteur faible. Notons que tous les attracteurs recensés comme tels aujourd'hui, étranges ou non, satisfont la définition ci-dessus. Si nous changeons le sens du temps, les attracteurs de la dynamique inverse (obtenus lorsque t tend vers moins l'infini) sont dits répulseurs. Les rapports qualitatifs entre attracteurs et répulseurs sont très intéressants à étudier dans les applications biologiques. Trois réseaux, duaux de celui des trajectoires, unissent attracteurs et répulseurs :

a) le réseau isochrone (Pavlidis (1973), Winfree (1980))

b) le réseau isocline (Minorsky (1974))

c) le réseau isosphérique (Krasnosel'skii (1968))

Notons qu'ils sont constitués de variétés, c'est-à-dire d'hypersurfaces dans X rassemblant les points x tels que :

a) les trajectoires issues de ceux-ci aient le même ensemble limite $L_I(x)$ où I est une partie de T (si l'attracteur est décrit avec une période τ, on choisira pour I des ensembles constitués par les classes de congruence modulo τ de T)

b) leurs vecteurs vitesse soient parallèles

c) leurs vecteurs vitesse soient tangents à l'une des sphères centrées en une singularité située à l'intérieur de l'attracteur.

Quelques théorèmes (malheureusement assez rares) permettent de préciser la géométrie de ces réseaux ; la connaissance de celle-ci peut permettre un "fit" qualitatif entre modèle et données empiriques, pour prévoir par exemple les propriétés de synchronosabilité ou de forçage du système. Ce type d'adéquation qualitative est, dans bien des cas, une alternative possible à l'adéquation quantitative, par identification paramétrique par exemple, qui n'est pas toujours possible.

2. La notion de confineur

2.1. Définition

"The stability problem for the stochastic equation :

$$dx = f(x)\,dt + g(x)\,dW,$$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

likewise what happens for general stochastic dynamical system may be approached either by a stochastic extension of Lyapunov stability for possible equilibrium states with a suitable convergence criterion or as the analysis of possible invariant probability distribution on the state space" (Barra et al. (1979)). D'autres types d'approche peuvent être egalement envisagés à partir des différents types possibles de convergence d'un processus (presque sûre, en probabilité, en norme L^p, ...). La notion de confineur (Demongeot et al. (1986), Demongeot & Jacob (à par. a et b), Cinquin et al. (à par.)) permet de concilier les deux approches proposées par Barra et al. En particulier, elle coïncide avec la notion d'attracteur, lorsque le système stochastique se réduit à un système déterministe dont seuls les points initiaux des trajectoires sont aléatoires et coïncide approximativement avec le support de la probabilité invariante, dans le cas d'un processus ν-récurrent et ergodique (plus précisement, elle coïncide avec la notion d'ensemble de surface minimum chargé par $(1-\varepsilon)$% de la mesure invariante, lorsque l'unicité d'un tel ensemble est assurée, ce qui est le cas par exemple pour une mesure invariante gaussienne isotrope).

Selon la mème démarche que celle utilisée pour définir un attracteur, un confineur sera caracterisé par la propriété essentielle d'invariance sous la double opération qui consiste d'abord à rechercher son bassin de confinement, puis l'ensemble limite de ce bassin.. Cette propriété sera également assortie d'une condition double de maximalité pour la c-connexité stochastique et de minimalité locale de poids pour une mesure ν définie sur X.

Soit donc un système dynamique stochastique $(X^T, \alpha^{\otimes T}, P_\mu)$, où T est l'ensemble temporel (égal à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$), X est l'espace d'état supposé métrique, localement compact et séparable, α est la tribu borélienne de X et $\alpha^{\otimes T}$ la tribu produit complétée pour la probabilité canonique P_μ du processus induite par une mesure initiale μ. Le processus est supposé séparable, c'est-à-dire défini par sa connaissance sur une partie dénombrable de T (Neveu (1970)). On note $\omega(t)$ l'état à l'instant t d'une trajectoire ω de X^T. La notion de base est, comme précédemment, l'ensemble limite d'une trajectoire ω, noté $L(\omega)$. $L(\omega)$ est un ensemble fermé de X. On montre que c'est un élément aléatoire de $(X^T, \alpha^{\otimes T})$ dans (F, B_F), où F

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

dénote l'ensemble des fermés de X et B_F la tribu de Matheron engendrée par les familles $F^K = \{G\in F\ ;\ G\cap K = \emptyset\}$, où K décrit les compacts de X (Matheron (1975)). On utilise de plus une mesure annexe ν sur X, qui nous servira, lorsque c'est possible, à choisir localement, parmi les candidats possibles, le confineur C ayant la mesure $\nu(C)$ la plus faible. Pour simplifier l'exposé, on supposera que μ est absolument continue par rapport à ν, de densité f. Comme précédemment, on définit les opérateurs bassin B_θ^ε et limite L_η :

$\forall\ A\in\alpha,\ B_\theta^\varepsilon(A) = \{x\in X\setminus A\ ;\ P_x(E)f(x)>\theta\}$, où $E=\{\nu(L(\omega)\setminus A)\leq\varepsilon\}$

$B_\theta^\varepsilon(A)$ est donc constitué des points de A^c dont la densité de confinement dans A est suffisamment élevée. Posons : $\forall\ D\subset X^T$, $L(D)=\bigcup_{\omega\in D} L(\omega)$; alors : $L_\eta(B_\theta^\varepsilon(A)) = \{L(D)\ ;\ D\subset B_\theta^\varepsilon(A)$ et $P_\mu(B_\theta^\varepsilon(A)\setminus D)\leq\eta\}$, où $B_\theta^\varepsilon(A)$ désigne l'ensemble des trajectoires issues de $B_\theta^\varepsilon(A)$. $L_\eta(B_\theta^\varepsilon(A))$ est donc constitué par tous les ensembles limites des trajectoires de D, où D décrit l'ensemble des parties de X^T égales à $B_\theta^\varepsilon(A)$ à P_μ-η près. Le principe d'invariance correspond alors à une sorte de continuité :

$L(B_\theta^\varepsilon(A)) \overset{\varepsilon}{=} A \Leftrightarrow \exists\,\eta(\varepsilon)\geq 0/\forall\ L(D)\in L_\eta(B_\theta^\varepsilon(A))$, $\nu(A\setminus L(D))\leq\varepsilon$

Pour $\varepsilon=0$, le principe d'invariance signifie qu'il n'existe pas dans A de "ν-surface" inutile, i.e. de parties de A occupées uniquement par la limite de trajectoires P_μ-négligeables.

L'équivalent de la c-connexité est alors défini par :

soit x,y dans X ; on dit que x est θ-chaîné à y ($x\mapsto_\theta y$), s'il existe $t(x,y)>0$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe N dans $\mathbb{N}$, $z_1,\ldots,z_{N+1}$ dans X, avec $z_1=x$, $z_{N+1}=y$, et $z'_1,\ldots,z'_N$ dans X, tels que :

$d(z'_i,z_{i+1})\leq\varepsilon$ et $\lim_{\eta\to 0} P_{z_i}\left(\bigcup_{t\geq t(x,y)} \{\omega(t)\in B_{z'_i,\eta}\}\right) f(z_i)/\nu(B_{z'_i,\eta})$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et soit supérieur à θ, $B_{z'_i,\eta}$ désignant la boule centrée en z'_i de rayon η. La relation d'équivalence définie par : $xR_\theta y \Leftrightarrow x\mapsto_\theta y$ et $y\mapsto_\theta x$ sur $C_\theta(X) = \{x\in X\ ;\ x\mapsto_\theta x\}$ permet de définir les ensembles A c_θ-connexes comme n'ayant qu'une classe d'équivalence dans leur quotient A/R .

Intuitivement, tout couple de points x,y d'un ensemble c_θ-connexe est tel qu'il existe, avec une probabilité suffisante, une "trajectoire fantôme" entre x et y.

Un θ,ε-confineur faible est alors défini par :

i) A appartient à α et à $C_\theta(X)$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

ii) $B_\theta^\varepsilon(A^c) \subset \{x \in A \ ; \ P_x(E)\ f(x) > 0\}$

iii) $L(B_\theta^\varepsilon(A)) \overset{\varepsilon}{=} A$

iv) pour tout A_i, composante c_θ-connexe de A, il n'existe pas A' c_θ-connexe contenant A_i avec $\nu(A')>\nu(A_i)$, tel que $A' \cup A$ vérifie i), ii), iii)

v) il n'existe pas A" tel que $A" \neq A$, $A" \cap A \neq \emptyset$, $B_\theta^\varepsilon(A") \cap B_\theta^\varepsilon(A) \neq \emptyset$ et $\nu(A") < \nu(A)$, avec A" vérifiant i), ii), iii) et iv).

Pour que les points du confineur soient suffisamment récurrents, la propriété i) doit être imposée (contrairement au cas déterministe, où, grâce aux propriétés du flot, elle découle automatiquement de la définition de l'attracteur). Il en est de même pour la condition ii), qui exprime le fait que, partant de A, le processus ne peut rester confiné avec une probabilité trop élevée à l'extérieur de A. C'est l'équivalent de la propriété : $L(A) \subset A$, toujours vraie dans le cas des attracteurs. Les conditions iii), iv) et v) sont l'équivalent stochastique des conditions d'invariance, de maximalité et de minimalité de l'attracteur.

Remarques :

a) considérons la mesure temps de séjour de Takens, notée σ_ω et définie par : $\forall\ B \in \alpha$, $\sigma_\omega(B) = \lim_{t \to +\infty} \sup_{U \text{ ouvert} \downarrow B} \lambda(s \leq t ; \omega(s) \in U)/t$, avec λ mesure de Lebesgue ($T=\mathbb{R}_+$) ou mesure dénombrante ($T=\mathbb{N}$) ; supposons que σ_ω existe P_μ-presque partout dans X^T ; on peut alors remplacer ν par σ_ω dans la définition de l'événement E intervenant dans le bassin. Dans certains cas, la mesure temps de séjour est P_μ-presque sûrement constante, égale à σ (s'il existe par exemple une unique mesure invariante). Si $\nu(A)<+\infty$, l'analogue de $L(\omega) \subset A$ et $A \subset L(D)$ est alors : $\sigma(A \,|\, L(\omega)) \geq 1-\varepsilon$ et $\nu(L(D) \,|\, A) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\nu(A)}$

b) on peut définir une propriété de confinement plus locale que celle donnée ci-dessus, dans certains cas (Demongeot & Jacob (à par. a)).

2.2. Exemples de confineurs (Demongeot & Jacob (à par. a)

1) Si le système stochastique n'a que ses conditions initiales aléatoires, tirées suivant la loi μ, supposée de support X, et si E peut s'écrire : $\{L(\omega) \setminus A \subset N\}$, où $\nu(N)=0$, tout 0,0-confineur est ν-égal à un attracteur.

2) Si A est un ensemble fermé, ν-récurrent, complètement clos (i.e. il existe un voisinage ouvert de A, noté V(A), tel que :

$\forall\ x \in A^c$, $P_x(L(\omega) \cap V(A) \setminus A \neq \emptyset) = 0$ et $\forall\ x \in V(A) \setminus A$, $P_x(L(\omega) \cap A^c \neq \emptyset) = 0$),

A est un 0,0-confineur, si $V(A) \subset \mathrm{supp}\nu$, $0 < \inf_{x \in V(A) \setminus A} f(x)$, A non c_0-connecté à A^c.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Ces deux résultats sont en accord avec l'intuition. Notons enfin que, lorsque le système stochastique est obtenu à partir d'un système déterministe par perturbation gaussienne, un certain nombre de résultats théoriques (Freidlin & Wentzell (1984)) permettent d'affirmer la convergence des $\theta,0$-confineurs vers les attracteurs déterministes sous-jacents, lorsque la variance du bruit tend vers 0 ; ces résultats permettent également de donner une certaine idée de "l'épaisseur" de ces confineurs (cf. aussi Budgor et al. (1976), Izrailev et al. (1981)).

2.3. Bifurcations

Dans un système déterministe, grâce aux propriétés du flot, les trajectoires sont toutes disjointes, de même que les attracteurs et leurs bassins d'attraction. L'ensemble des trajectoires, des attracteurs et de leurs bassins forme donc une structure relativement simple dont on peut suivre les changements en fonction des variations des paramètres du système. On parle alors de bifurcation, lorsque, *"sous l'effet d'une perturbation de ces paramètres, la morphologie du réseau des trajectoires est modifiée"* (Bruter (1976)). L'étude mathématique des bifurcations peut être capitale d'un point de vue biologique, puisqu'elle permet de prédire par exemple à partir de quelle valeur des paramètres biologiques une population, située dans un régime périodique, va s'éteindre (par transformation d'un cycle-limite en un état stable situé à l'origine). Dans le cas stochastique, la situation est en général beaucoup plus complexe, et on ne définira donc une bifurcation que localement, pour un confineur donné.

Supposons donc que la loi P_μ est fonction d'un paramètre β de $\mathbb{R}$. Soit C un θ,ε-confineur obtenu pour la valeur β_o du paramètre et soit $C(\delta)$ la classe des confineurs C' non disjoints de C, de bassin $B_\theta(C')$ non disjoints de $B_\theta(C)$ et réalisant le minimum $\lambda\nu(B_\theta(C')\Delta B_\theta(C))$, cela pour la valeur $\beta_o+\delta$ du paramètre. Alors, β_o est dite valeur de bifurcation géometrique, s'il existe η, tel que, pour tout δ vérifiant $0<\delta<\eta$, il existe dans $C(\delta)$ un confineur de type d'homotopie différent de celui de C (Godbillon (1971)). Notons que β_o est aussi dite valeur de bifurcation, si la condition $0<\delta<\eta$ est remplacée par $\eta<\delta<0$.

Supposons maintenant que l'ensemble temporel soit partitionné par la relation d'équivalence modulo τ, où τ est un temps strictement posi-

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

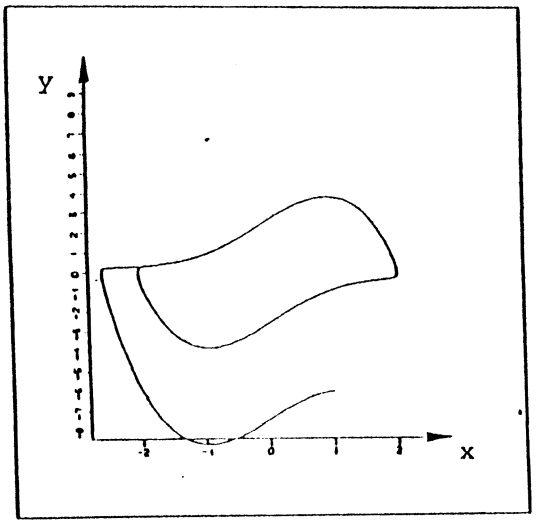
tif appartenant à T. Désignons par C_ϕ^τ, le sous-confineur obtenu en considérant dans C les points qui appartiennent aux ensembles limites, pour la sous-dynamique des temps égaux à ϕ modulo τ, des trajectoires de $B_\theta^\varepsilon(C)$, en prenant comme origine leur temps d'entrée dans une partie C_0^τ de C : $d = \inf\{\tau \in \overline{T} ;\ \nu(C \Delta \cup_\phi C_\phi^\tau) \leq \eta$ et $\nexists \tau' \neq \tau ;\ \inf_{\phi<\tau'} \nu(C_\phi^{\tau'}) < \inf_{\phi<\tau} \nu(C_\phi^\tau)$ et $\sup_{\phi<\tau'} \nu(C_\phi^{\tau'}) < \sup_{\phi<\tau} (C_\phi^\tau) + \eta\}$ désigne alors la η-période de C.

Cette définition signifie que, pour la bonne période de description d, les sous-confineurs recouvrent approximativement C, tout en étant les plus disjoints possible. On définit trois types différents de période :

- le type singulier, si d=0
- le type périodique, si $0<d<+\infty$
- le type chaotique, si $d=+\infty$.

Remarquons que, lorsque le confineur est un ensemble complètement clos, fermé et ν-récurrent, la période du confineur coïncide avec celle du cycle-limite associé (Jacob (à par.b)). Notons enfin que le bassin de C_ϕ^τ est dit isochron stochastique de phase ϕ et que β_o sera dite valeur de bifurcation temporelle, si la définition ci-dessus de valeur de bifurcation reste valide en remplaçant type d'homotopie par type de période.

2.4. Estimation



L'estimation de la localisation et de la période de description d'un confineur sera présentée sur l'exemple académique de l'oscillateur de van der Pol, dont nous donnons ci-contre et ci-dessous des simulations dans le cas déterministe et dans le cas bruité.

Figure 1 : simulation du cycle-limite de l'oscillateur de van der Pol déterministe, d'équation : $dx/dt=y$, $dy/dt=-x+2(1-x^2)y$

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

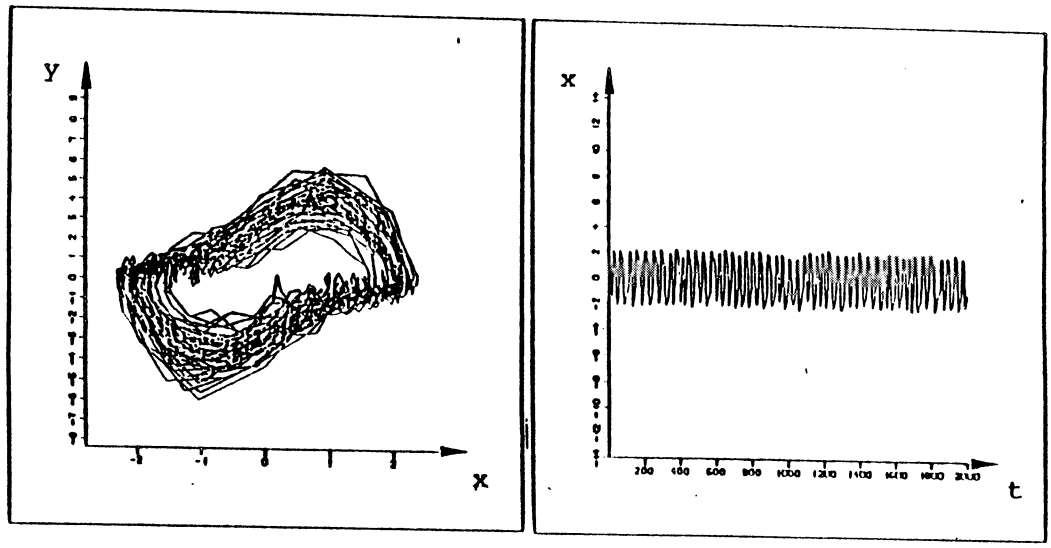


Figure 2 : système de van der Pol bruité, au second membre de la seconde équation (celle de l'accélération), par un processus gaussien à composantes indépendantes, centrées, de variance 1. Nous avons representé à droite l'évolution temporelle de la variable x.

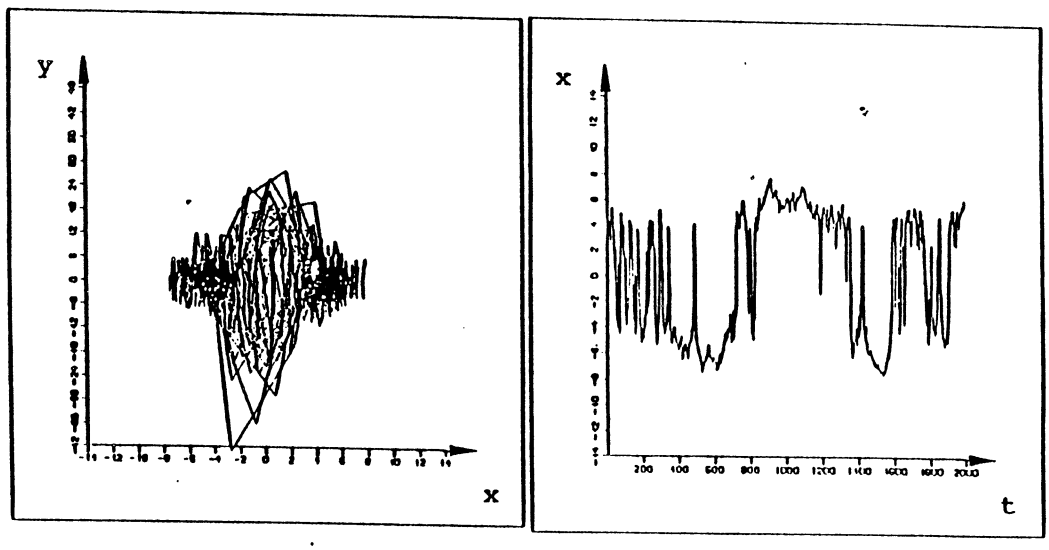


Figure 3 : système de van der Pol bruité par le même processus gaussien que ci-dessus, mais de variance 1000 (on peut remarquer que le système se comporte comme un véritable bi-stable, à transitions aléatoires entre les deux zones stationnaires pièges, correspondant aux deux "becs" du système déterministe.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

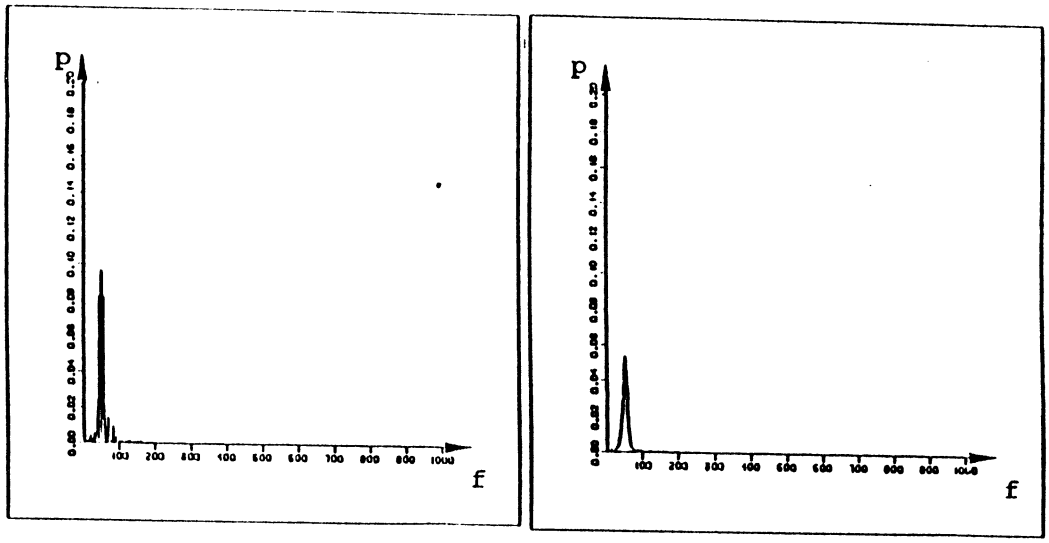


Figure 4 : spectre de Fourier du signal x(t) de la Figure 2 ; à gauche, on a representé le spectre empirique et, à droite, le spectre lissé ; la période, après démodulation complexe, a été trouvée égale à 39.3.

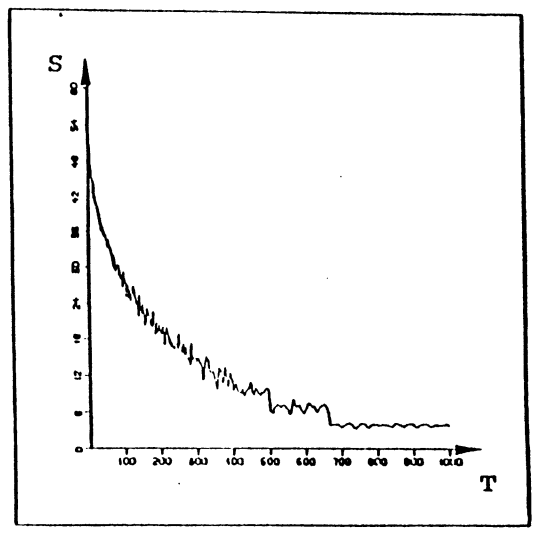


Figure 5 : S(T) représente la surface moyenne du cycle markovien lié au signal, pour la période d'essai T (Jacob (1985)). Elle présente un minimum local pour tout multiple de la période de description (ici 40).

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

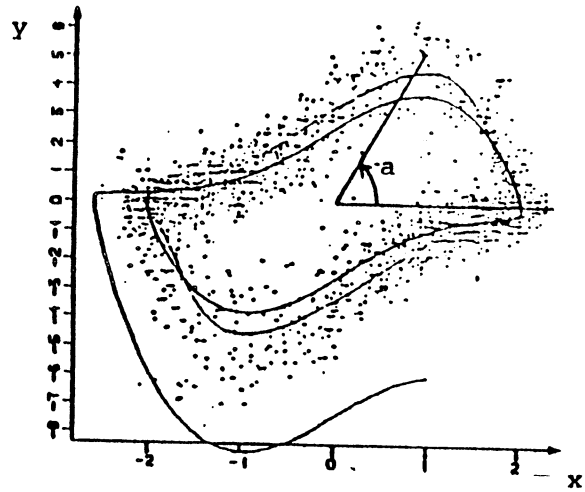


Figure 6 : la trajectoire la plus interne representée ci-dessus n'est autre que le cycle-limite de l'équation déterministe de la Figure 1 ; la trajectoire extérieure à celle-ci correspond à la spline cubique fermée (avec des conditions de fermeture égalant la fonction et ses deux premières dérivées) minimisant le critère des moindres carrés, pour le nuage de points correspondant à la simulation de la Figure 2. On remarquera que l'approximation est meilleure au voisinage des "becs", où le systeme séjourne davantage.

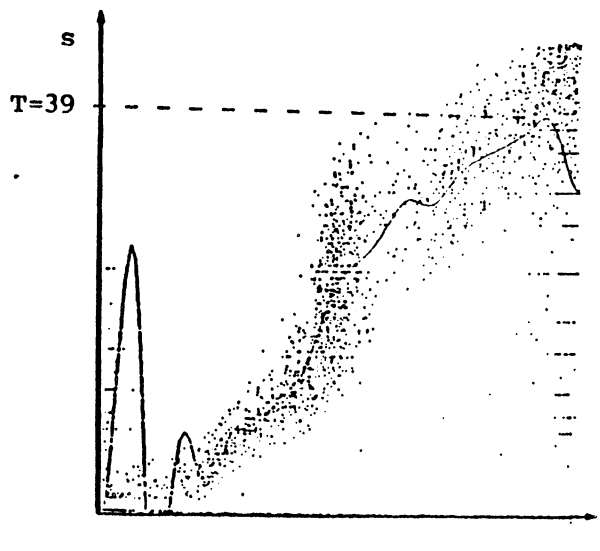


Figure 7 : représentation de la spline cubique approximant au sens des moindres carrés les points du nuage de la Figure 6, représentés par leur temps modulo une période d'essai T, en fonction de leur angle polaire a par rapport au centre de gravité du nuage.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

L'estimation de la localisation d'un θ-confineur empirique se fait de la manière suivante :

- on retient, dans le nuage de points d'une simulation, un sous-nuage, formé des points d'accumulation empiriques, i.e. des points tels que le processus soit récurrent dans un de leurs voisinages de rayon determiné, après un temps déterminé, ceci pour éviter de garder des points transitoires
- on trace la spline fermée de la Figure 6 ; puis on cherche le barycentre du sous-nuage d'accumulation (si ce nuage était composé de plusieurs clusters non connexes, on rechercherait, pour chaque cluster, la spline fermée et le barycentre). Notons que cette opération peut être généralisée au cas d'un espace d'état de plus de deux dimensions, par détermination de la surface spline fermée, ayant des conditions de recollement suffisamment régulières sur une courbe fermée d'appui représentée par la spline fermée ci-dessus.
- on cherche, de part et d'autre de la spline fermée, les premières courbes homothétiques interne (de rapport k) et externe (de rapport 2-k) qui enferment en leur intérieur θ% des points du sous-nuage d'accumulation.

La convergence d'un tel θ-confineur empirique vers le confineur théorique correspondant est un problème statistique important, qui ne sera pas abordé ici ; notons seulement ici que la convergence a lieu vers le θ,0-confineur théorique, lorsque la taille de l'échantillon simulé tend vers l'infini, les temps des points simulés tendant également vers l'infini (cette proprieté étant liée à la convergence de la mesure empirique vers la mesure invariante du van der Pol bruité, dont la densité peut être obtenue après résolution numérique de son équation de Fokker-Planck - cf. par exemple Ebeling & Engel-Hebert (1980) pour la résolution dans le cas de van der Pol modifié).

L'estimation de la période de description se fait, comme il est indiqué sur la Figure 7, par recherche de la période d'essai T pour laquelle le critère des moindres carrés de la spline cubique définie par le temps S(a) modulo T est minimum. Ce minimum est ici atteint pour T=38.9, ce qui est sensiblement voisin de l'estimation obtenue, sur le signal x(t), par la procédure classique de l'analyse spectrale (cf. Figures 4 et 5). On peut se fixer un seuil, pour le critère des moindres carrés, à partir duquel on

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

décide d'abandonner la procédure d'estimation de la période, pour tenter celle d'estimation de la dimension fractale (cf. par exemple Cosnard et al. (1986)). Notons que, dans ce dernier cas, la procédure d'estimation de la localisation du confineur reste valable.

3. Conclusion : quelques exemples d'application possible en biologie

La principale application a lieu, lorsque l'étude, dans un espace d'état approprié conjoint, s'impose, pour des variables dont on soupçonne que leurs évolutions sont liées ; notons que ces variables peuvent être une une observable (taille d'une population à l'instant t, valeur de l'indice Dow Jones au mois t) à un temps donné et la même observable au temps t-1, ou bien sa dérivée dans le cas continu ; la découverte d'une zone de confinement et d'une période de description de celle-ci (ou le calcul de sa dimension) permettent dans ce cas par exemple de déterminer la taille de la "mémoire" ou de la "régressivité" du système observé (cf. la Figure 8 ci-contre pour le cas de la population de lynx canadien (en coordonnées logarithmiques) correspondant à des observations annuelles depuis le début du siècle, et cf. les travaux en cours de J. Scheinkman sur l'indice Dow Jones). Des domaines d'application comparables se rencontrent :

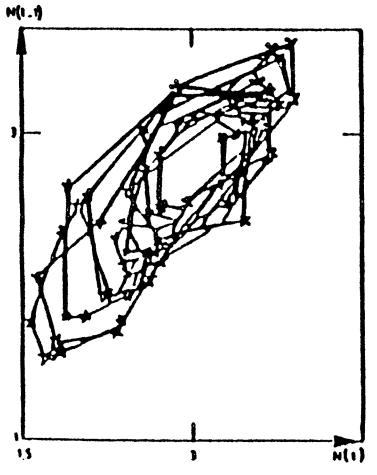


Figure 8

- en écologie et en démographie (cf. par exemple Anderson (1976))
- en physiologie (cf. l'exemple du système respiratoire donné par J.F. Bertholon dans Benchetrit et al. (1987))
- en cinétique biochimique (cf. par exemple Gillespie (1977) et (1980) et Turner (1977)).

A chaque niveau donc du monde biologique, on rencontre des lieux d'application possible des outils décrits ci-dessus ; nous espérons pour terminer qu'il existe aussi en économie des domaines où le transfert de ces techniques pourrait être pertinent.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Références :

ANDERSON R.M. (1976) Some simple models of the population dynamics of eucaryotic parasites, Lect. Notes in Biomaths 11, 16-57.

BANKS H.T. (1975) Modeling and control in the biomedical sciences, Lect. Notes in Biomaths 6, Springer Verlag, Berlin.

BARRA M., BRUNI C. & KOCH G. (1979) Deterministic and stochastic bounded rate models in immunology, Lect. Notes in Biomaths 32, 140-154.

BARTLETT M.S. (1956) Deterministic and stochastic models for recurrent epidemics, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Stat. & Prob. 4, 81-109.

BENCHETRIT G., BACONNIER P. & DEMONGEOT J. (1987) Concepts and formalization of breathing, Manchester Un. Press, Manchester.

BERGER J., BUHLER W., REPGES R. & TAUTU P. (1976) Mathematical models in medicine, Lect. Notes in Biomaths 11, Springer Verlag, Berlin.

BRUNI C., DORIA G., KOCH G. & STROM R. (1979) Systems theory in immunology, Lect. Notes in Biomaths 32, Springer Verlag, Berlin.

BRUTER C.P. (1976) Interprétation géométrique des travaux de l'école thermodynamique, Bulletin du GERB 8, 131-151.

BUDGOR A.B., LINDENBERG K. & SHULER K.E. (1976) Studies in nonlinear stochastic processes II : the Duffing oscillator revisited, J. Stat. Phys. 15, 375-391.

CINQUIN P., COSNARD M., DEMONGEOT J. & JACOB C. (à paraître) Attracteurs et confineurs : approches déterministe et stochastique, in Analyse numérique des attracteurs étranges, Cosnard M. & Mira C. éds, Editions du CNRS, Paris.

COSNARD M., DEMONGEOT J. & LE BRETON A. (1983) Rhythms in biology and

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

other fields of application : deterministic and stochastic approaches, Lect. Notes in Biomaths 49, Springer Verlag, Berlin.

COSNARD M. & DEMONGEOT J. (1985 a) Attracteurs : une approche déterministe, C.R.Acad.Sc. 300, 551-556.

COSNARD M. & DEMONGEOT J. (1985 b) On the definitions of attactors, Lect. Notes in Maths 1163, 23-32.

COSNARD M., DEMONGEOT J., LAUSBERG C. & LOTT K. (1986) Quelques exemples de dimension fractale d'attracteurs, Rapport de Recherche IMAG-TIM3, Grenoble.

DEMONGEOT J., COSNARD M. & JACOB C. (1986) Attractors and confiners : deterministic and stochastic approaches, in Dynamical systems - a renewal of mechanism, Diner S., Fargue D. & Lochak G. eds, World Sc. Publ. Singapour.

DEMONGEOT J. & JACOB C. (à paraître a) Confineurs : 1 - une approche stochastique & 2 - exemples et applications, C.R. Acad.Sc.

DEMONGEOT J., JACOB C. & CINQUIN P. (à paraître b) Some new tools to study oscillations and chaos in biological systems, in Chaos in biological systems, Holden A. ed., Manchester Un. Press, Manchester.

DOOB J.L. (1953) Stochastic processes, J. Wiley, New York.

EBELING W. & ENGEL - HEBERT H. (1980) The influence of external fluctuations on self sustained temporal oscillations, Physica 104A, 378-396.

FEISTEL R. & EBELING W. (1978) Deterministic and stochastic theory of sustained oscillations in autocatalytic reaction systems, Physica 93A, 114-137.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

FRIEDMAN A. (1976) Stochastic differential equations and applications, Academic Press, New York.

GILLESPIE D.T. (1977) Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions, J.Phys.Chem. 81, 2340-2361.

GILLESPIE D.T. (1980) Approximating the master equation by Fokker-Planck type equations for single variable chemical systems, J.Chem.Phys. 72, 5363-5370.

GODBILLON C. (1971) Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris.

GUMOWSKI I. (1981) Sur la caractérisation des oscillations observées en sciences naturelles, Bulletin du GERB 13, 9-26.

HENRY D. (1981) Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lect. Notes in Maths 840, Springer Verlag, New York.

IZRAILEV F.M., RABINOVICH M.I. & UGODNIKOV A.D. (1981) Approximate description of three dimensional dissipative systems with stochastic behaviour, Phys.Lett. 86A, 321-325.

JACOB C. (1985) Random oscillations modelling, in Time series analysis : theory and practice, Anderson O.D. ed., North Holland, Amsterdam.

JACOB C. (a paraître a) Cycles limites stochastiques et confineurs pour processus markoviens, C.R.Acad.Sc.

JACOB C. (a paraître b) Stochastic limit cycles and confiners : definitions and comparative study in the case of Markovian processes, Lect. Notes in Maths.

JAGER W. & MURRAY J.D. (1984) Modelling of patterns in space and time, Lect. Notes in Biomaths 55, Springer Verlag, Berlin.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

JEFFRIES C. (1974) Probabilistic limit cycles, Lect. Notes in Biomaths 2, 123-131.

KRASNOSEL'SKII M.A. (1968) Translation operator along trajectories of differential equations, Transl. of Math. Monographs, AMS, Providence.

KUSHNER H.J. (1967) Stochastic stability and control, Academic Press, New York.

LEVIN S. (1974) Mathematical problems in biology, Lect. Notes in Biomaths 2, Springer Verlag, Berlin.

MATHERON G. (1975) Random sets and integral geometry, J. Wiley, New York.

MAY R.M. (1974) Stability and complexity in model ecosystems, Princeton Un. Press, Princeton.

MINORSKY, N. (1974) Nonlinear oscillations, Krieger, New York.

NEVEU J. (1970) Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris.

NUMMELIN E. (1984) General irreducible Markov chains and non-negative operators, Cambridge Un. Press, Cambridge.

OREY S. (1971) Lecture Notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities, van Nostrand Rheinhold Mathematical studies, London.

OZAKI T. (1980) Nonlinear time series models for nonlinear random vibrations, J.Appl.Prob. 17, 84-93.

PARKER R.A. (1974) Some consequences of stochasticizing an ecological system model, Lect. Notes in Biomaths 2, 174-183.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

PAVLIDIS T. (1973) Biological oscillators : their mathematical analysis, Academic Press, New York.

REINBERG A. (1977) Des rythmes biologiques à la chronobiologie, Gauthier Villars, Paris.

RICCIARDI L.M. (1980) Stochastic equations in neurobiology and population biology, Lect. Notes in Biomaths 39, 248-263.

SMITH C.E. & TUCKWELL H.C. (1974) Some stochastic growth processes, Lect. Notes in Biomaths 2, 211-225.

TONG H. (1983) Threshold models in nonlinear time series analysis, Lect. Notes in Stats 21, Springer Verlag, Berlin.

TURNER J.S. (1977) Discrete simulation methods for chemical kinetics, J.Phys.Chem. 81, 2379-2408.

TWEEDIE R.L. (1975) Sufficient conditions for ergodicity and stationarity of Markov chains on a general state space, Stoch.Proc. & Appl. 3, 385 403.

WALTMAN P. (1974) Deterministic threshold models in the theory of epidemics, Lect. Notes in Biomaths 1, Springer Verlag, Berlin.

WINFREE A.T. (1980) The geometry of biological time, Biomathematics 8, Springer Verlag, New York.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

ANNEXE

Simulations de trajectoires de l'équation de Van der Pol

$\dot{x}(t) = y(t)$
$\dot{y}(t) = 2(1 - x^2(t))\, y(t) - x(t) + e(t)$

où $e(t)$ est un bruit blanc gaussien de variance δ^2.
L'approximation utilisée est la suivante

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = x_{1,n} + h_o x_{2,n} \\ x_{2,n+1} = x_{2,n} + h_o\left[2\left(1 - x_{1,n}^2\right) x_{2,n} - x_{1,n}\right] + \sqrt{h_o} e_{n+1} \end{cases}$$

h_o est le pas de simulation (ici $h_o = 0.005$). Le nombre de points simulés est 80 000 et le nombre de points sortis en tracé est de 2000 (i.e. un point simulé tous les 40).

Légende des figures

1 et 2 : tracé de $\dot{x}(t)$ en fonction de $x(t)$.

3 : tracé de $x(t)$ en fonction de t

4 : tracé du spectre empirique (A)
tracé du spectre lissé (B)
tracé de la fonction $S(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}$ surface sous-confineur C_i^t, calculé à partir de la sous-dynamique $\{x_{i+kt}\}_{k\in N}$ (C)

- Valeurs de δ^2 utilisées : 0.1 (a) ; 1 (b) ; 10 (c) ; 100 (d) ; 1000 (e) ; 0 (0)

Interprétation des analyses

Les simulations se comportent comme si le bruit théorique était à support compact et les trajectoires observées restent donc dans un voisinage du cycle limite. Ce voisinage correspond en fait à la zone de probabilité invariante maximum, lorsque celle-ci existe*. On peut suivre sur la figure 1 la déformation de ce voisinage en fonction de la variance du bruit. La figure 2 permet de mieux évaluer la densité de points dans ce voisinage. La figure 3 donne l'allure des trajectoires et les figures 5, 6, 7, 8 permettent d'évaluer la structure temporelle du processus : un rythme est repéré, sur les spectres, par un pic à la fréquence $k\pi/T = 2\pi x/2000$ (et éventuellement à ses harmoniques $k2\pi/T$), et sur la fonction $S(t)$ par des minimas locaux en $T, 2T, 3T$....

On constate donc que pour les variances 0, 1 et 1, il existe un rythme de périodes respectives 38.78 et 39.27 (ceci, après affinement des résultats par démodulation complexe). Le confineur (calculé à partir de la probabilité invariante, si elle existe) a alors la forme d'un anneau "troué" en son centre pour ces valeurs. Par contre pour la variance 10, le "trou" commence à se combler et le rythme à se déstabiliser : apparaissent

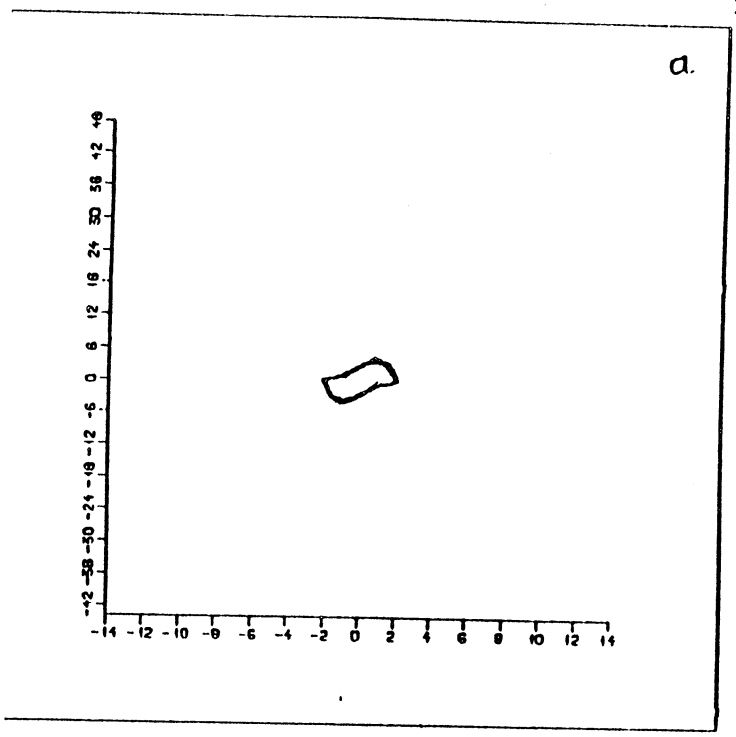
---

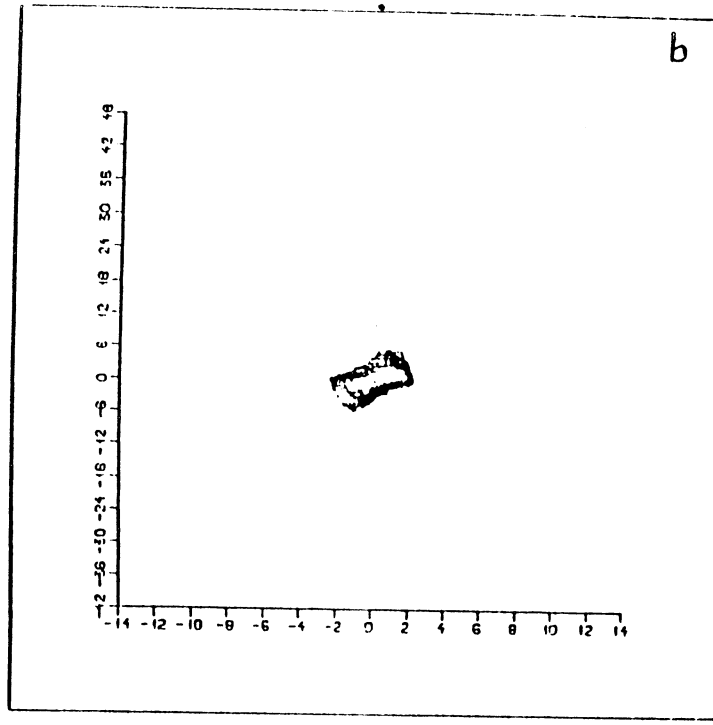
* Un certain nombre d'auteurs ont prouvé l'existence d'une probabilité invariante pour la diffusion associée à l'équation de Van der Pol sous des formes diverses et légèrement différentes de celle utilisée ici, cf par ex., NARITA, KIYOMASA (1985) Recurence and stationary probability distributions of solutions of Van der Pol equation. Rep. Fac Engrg. Kanagawa Univ., no 23, 3-7. NGUEN DONG AN' (1981) Some methods for integration Fokker-Planck-Kolmogorov equations in the theory of random oscillations, Ukrain, Mat. Zh., 33, no 1, 87-91 (en russe

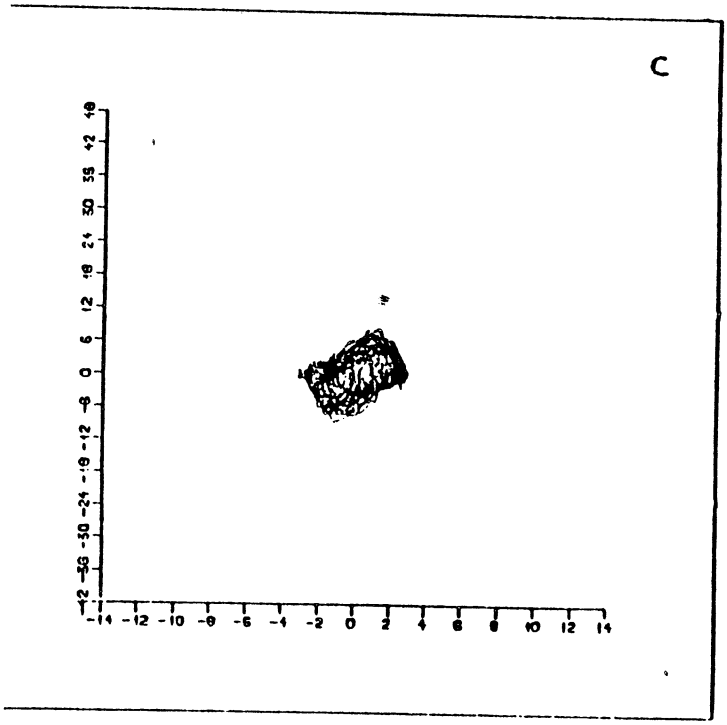
tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

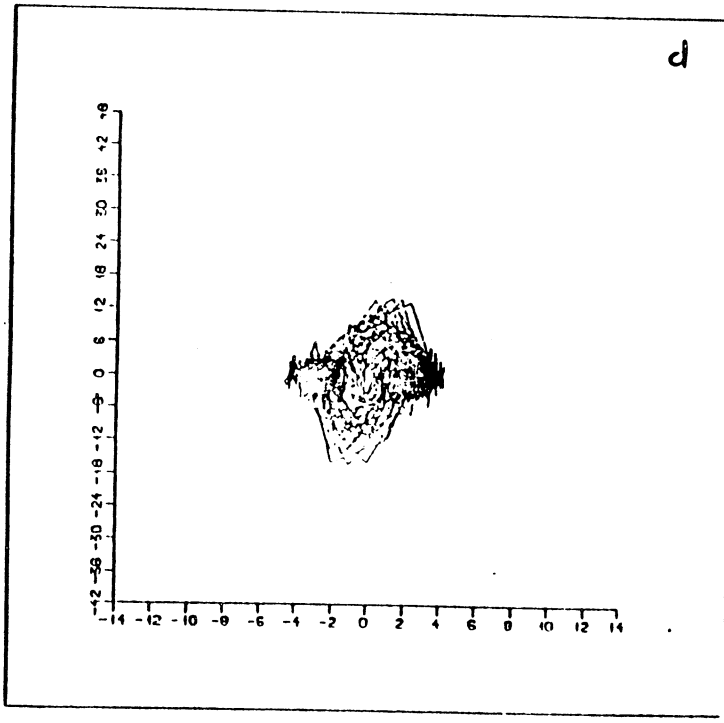
alors 2 zones, correspondant aux 2 "becs" du cycle déterministe, où les trajectoires restent plus longtemps. La probabilité invariante tend à être bimodale. Ces phénomènes vont ensuite en s'accentuant lorsque la variance augmente. Chaque trajectoire devient de plus en plus "chaotique" et le confineur est dit de type singulier. Le bruit est donc un paramètre de bifurcation à la fois temporelle et géométrique, et la bifurcation a lieu pour une variance comprise entre 1 et 10.

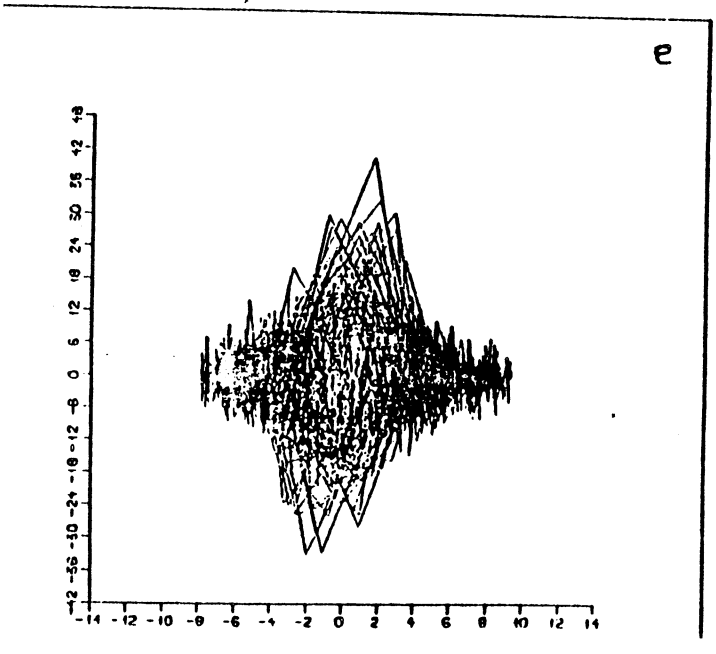
tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008





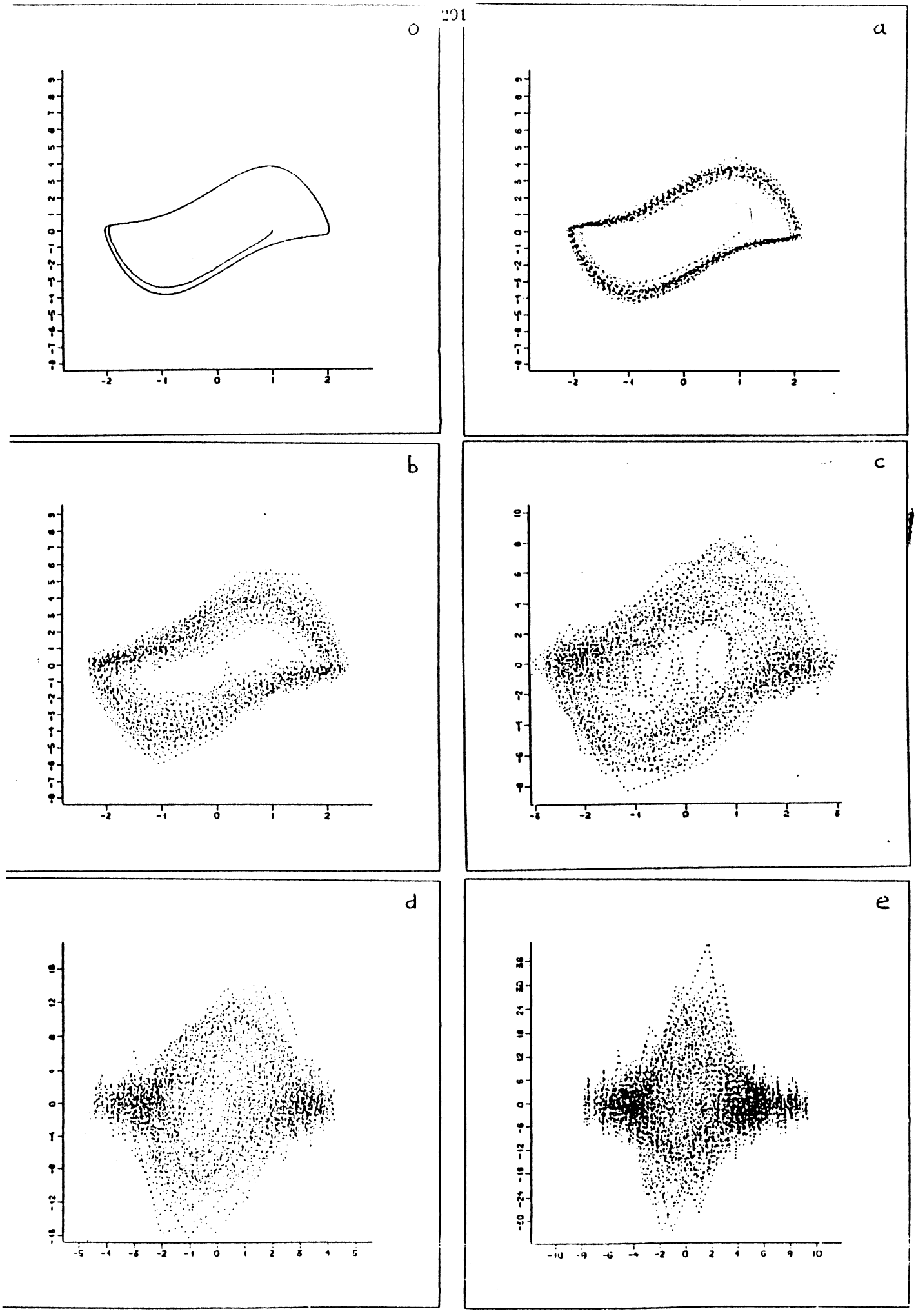






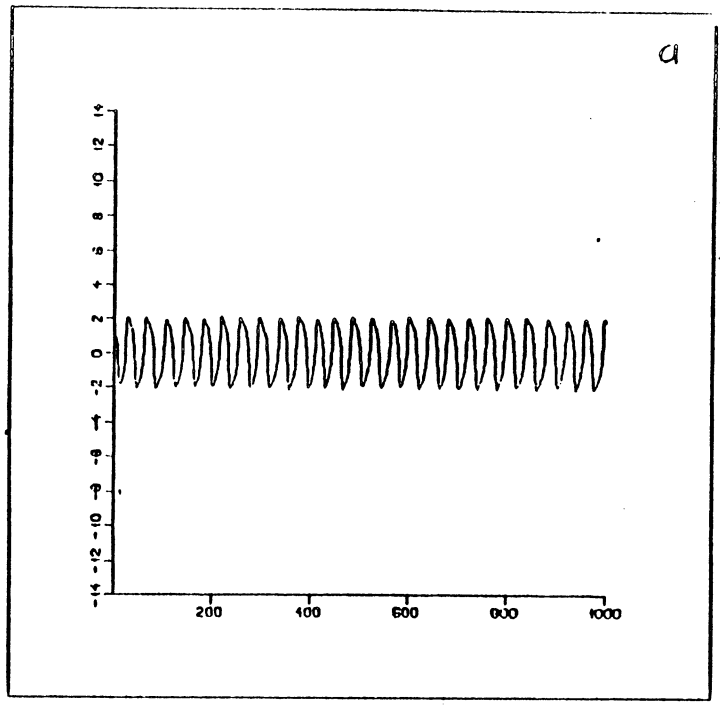
FIGURES 1

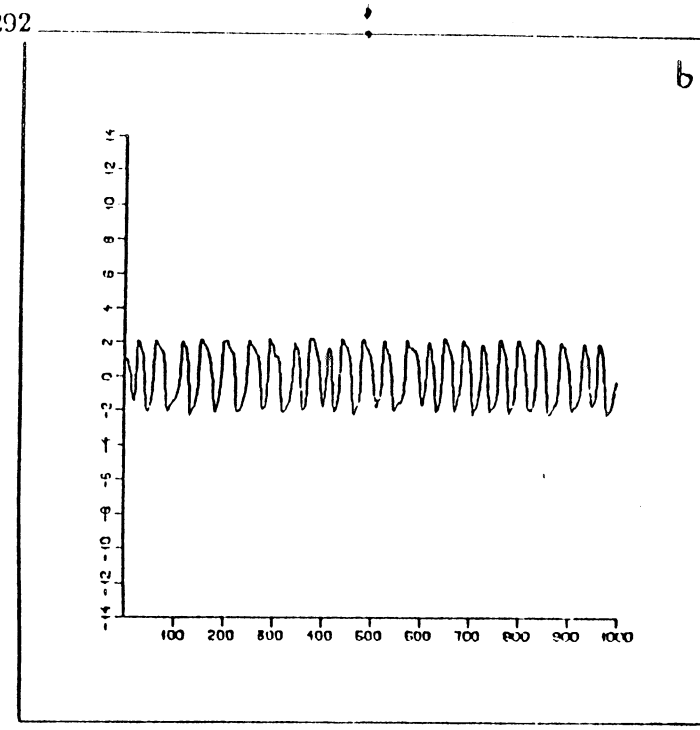
tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

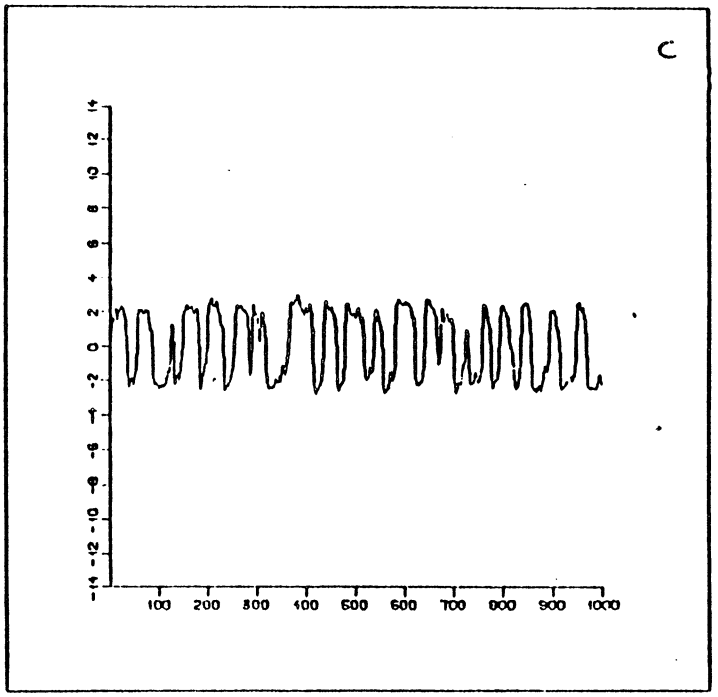


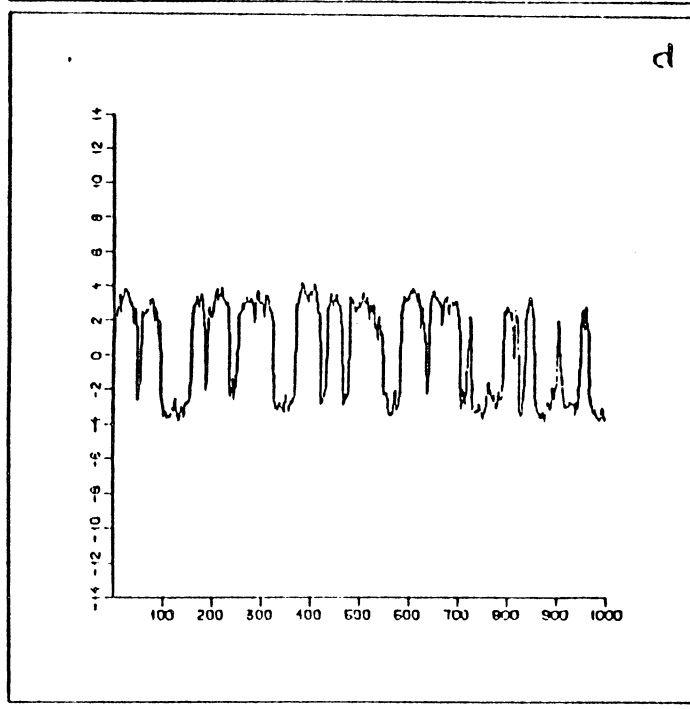
FIGURES 2

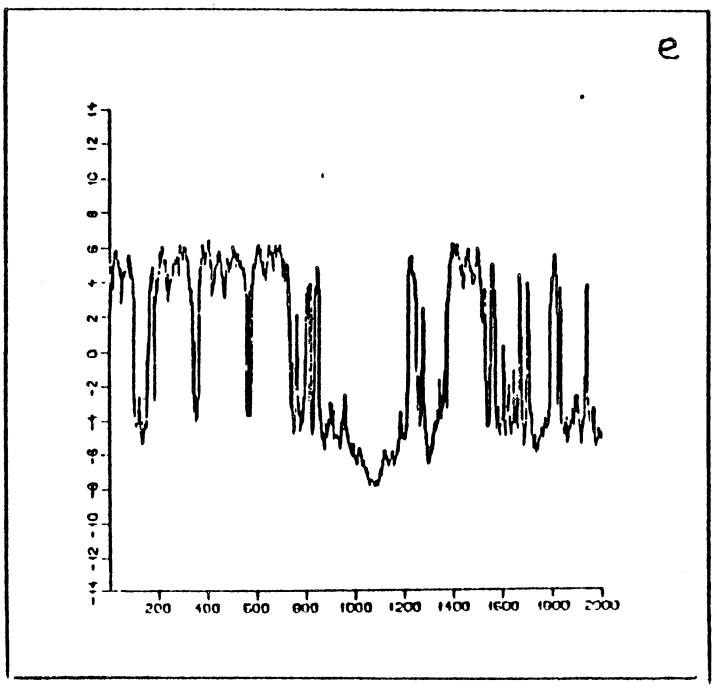
tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008





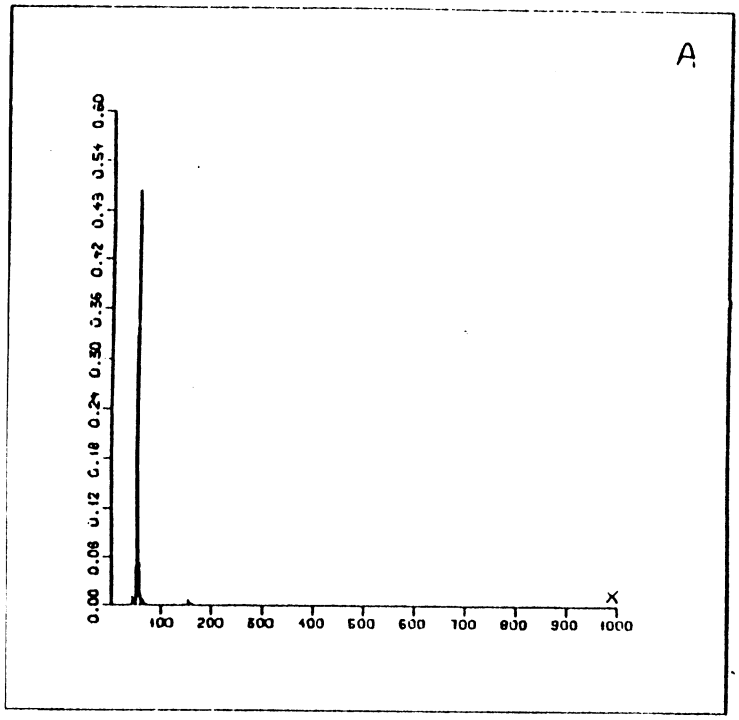


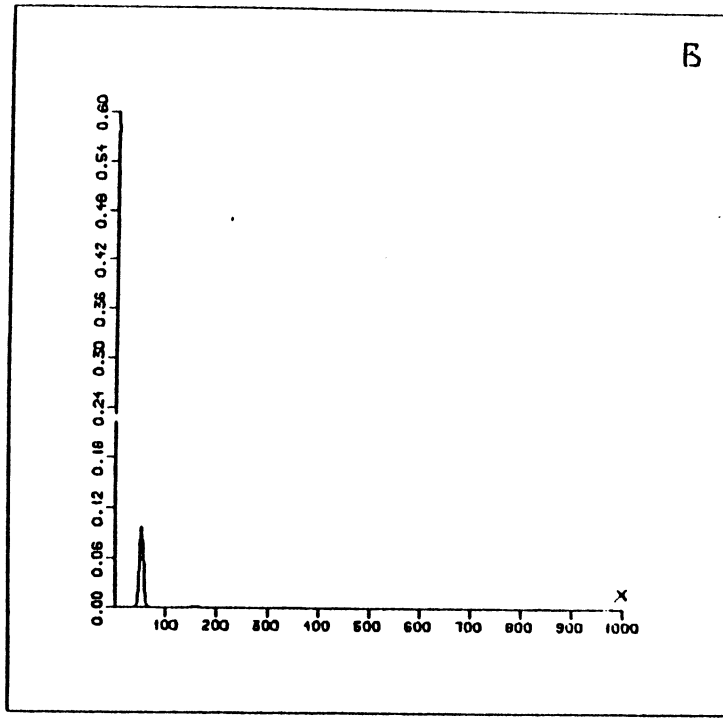


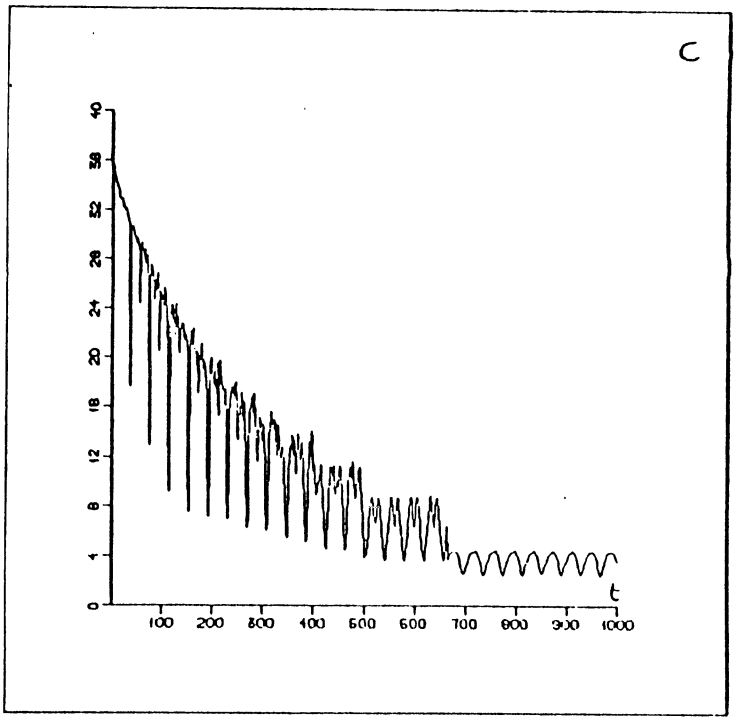


FIGURES 3

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

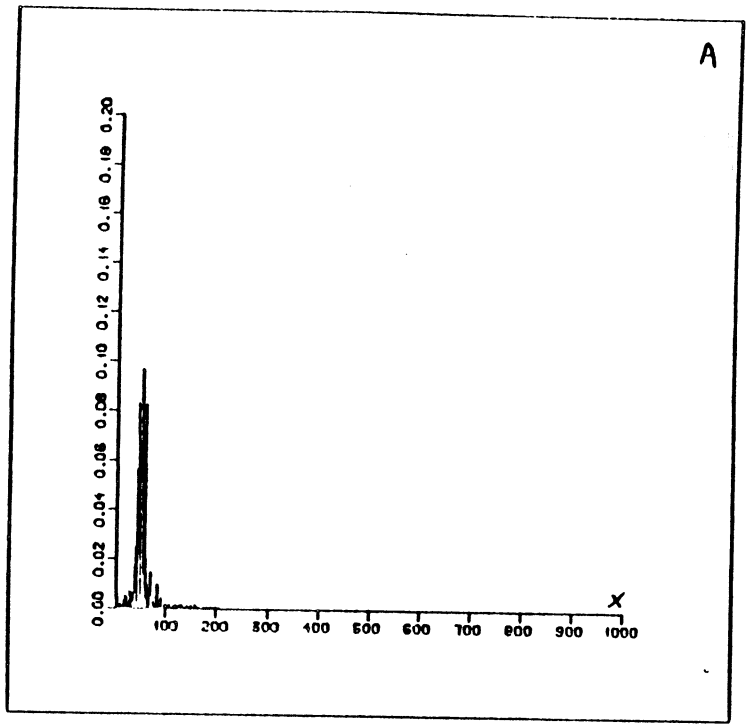


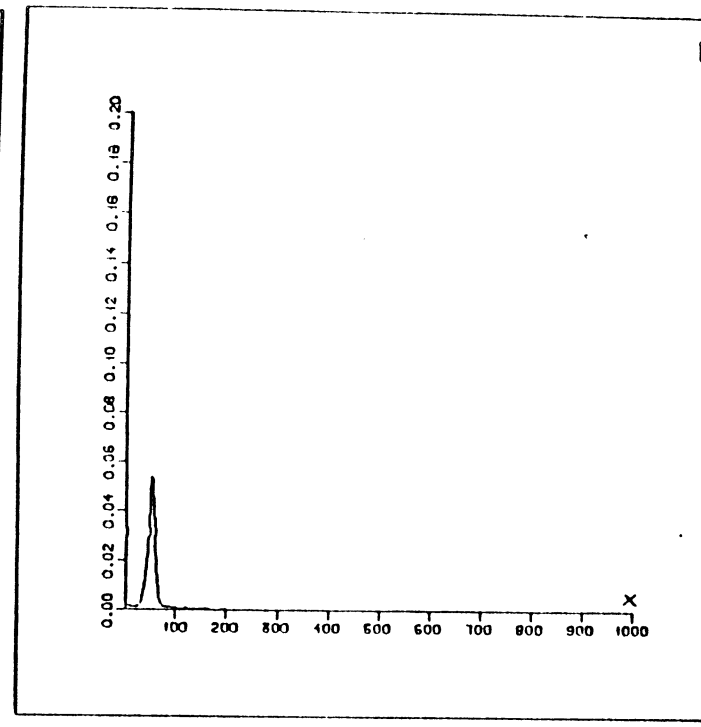


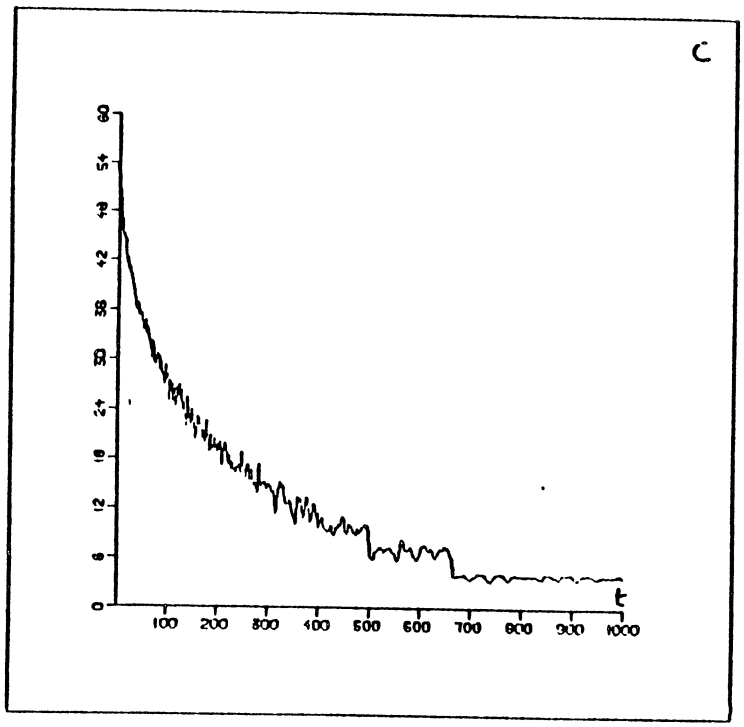


FIGURES 4.a

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

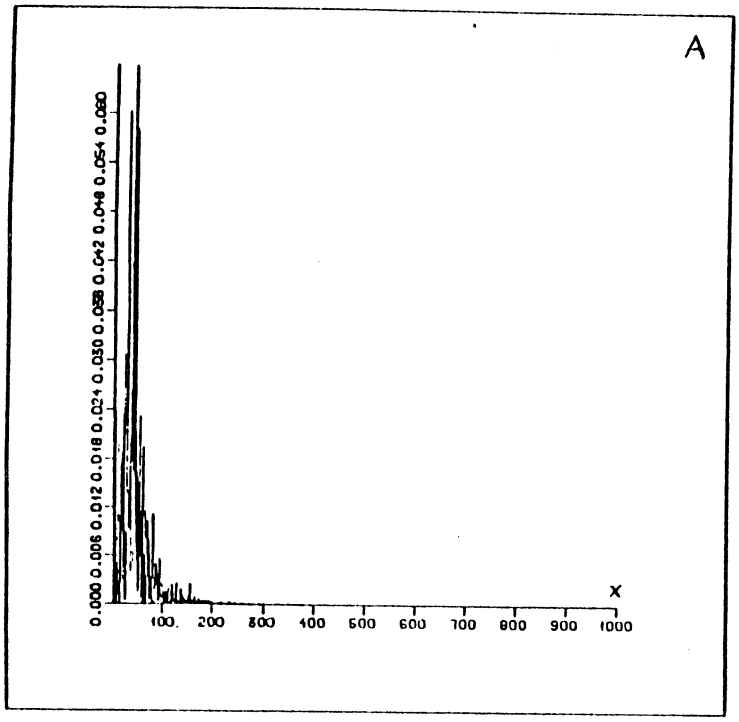


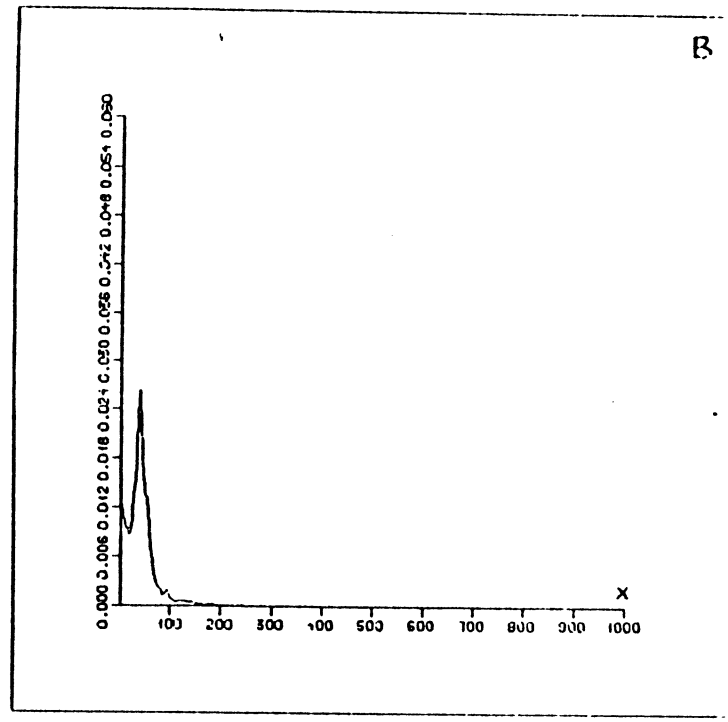


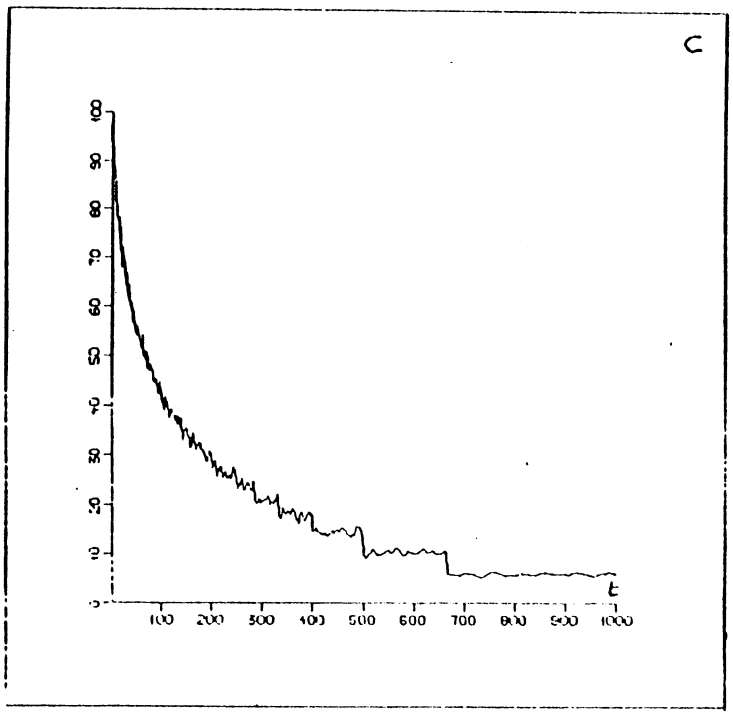


FIGURES 4.b

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

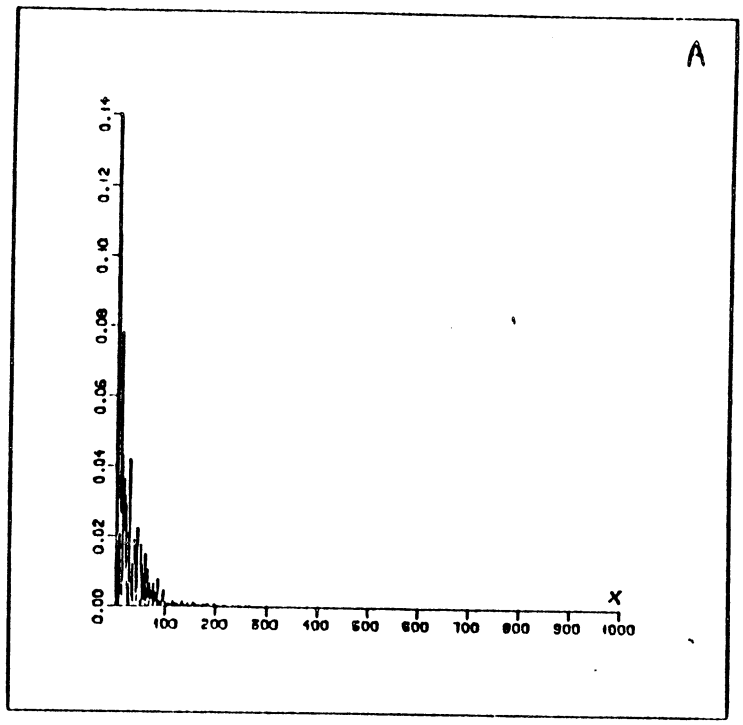


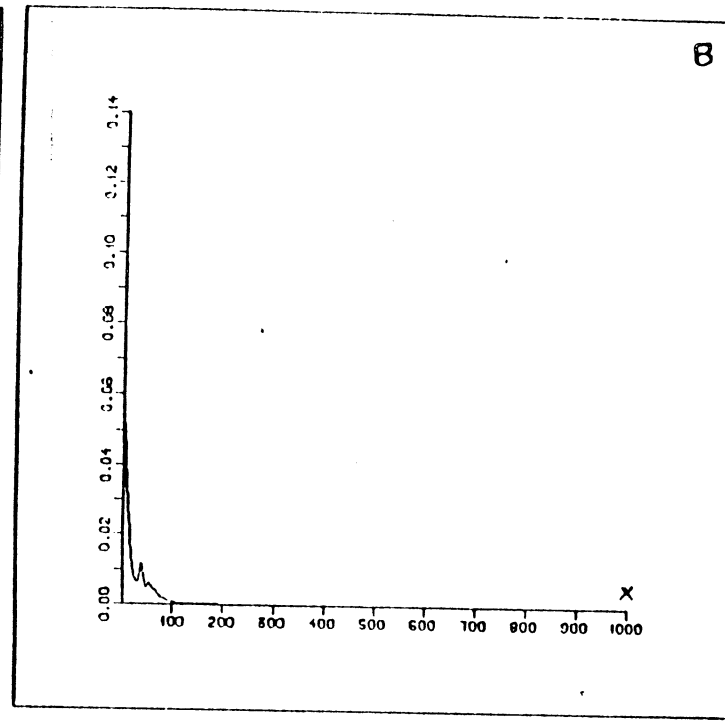


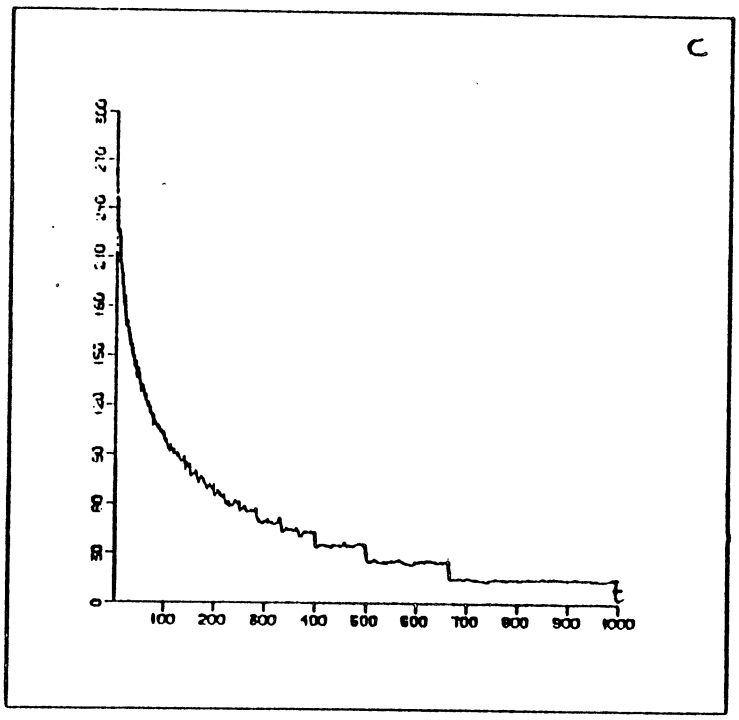


FIGURES 4.C

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

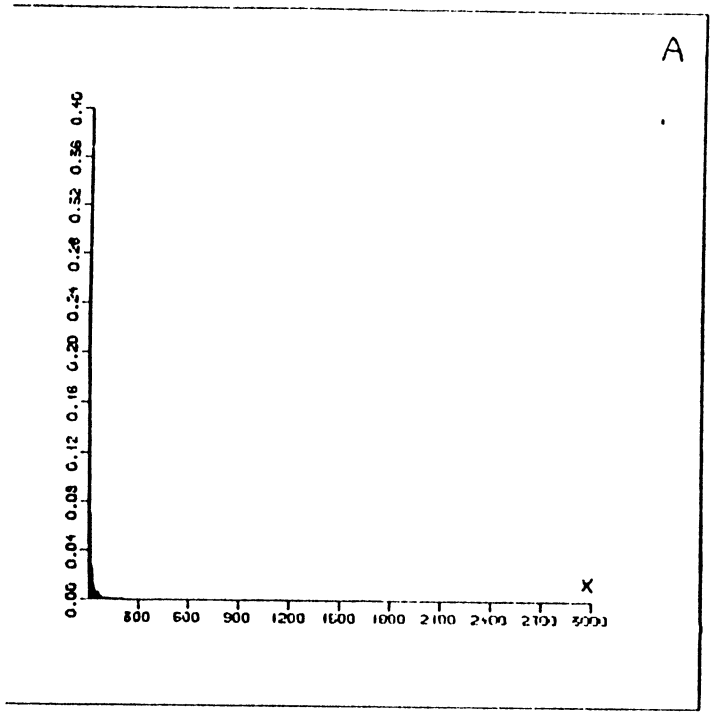


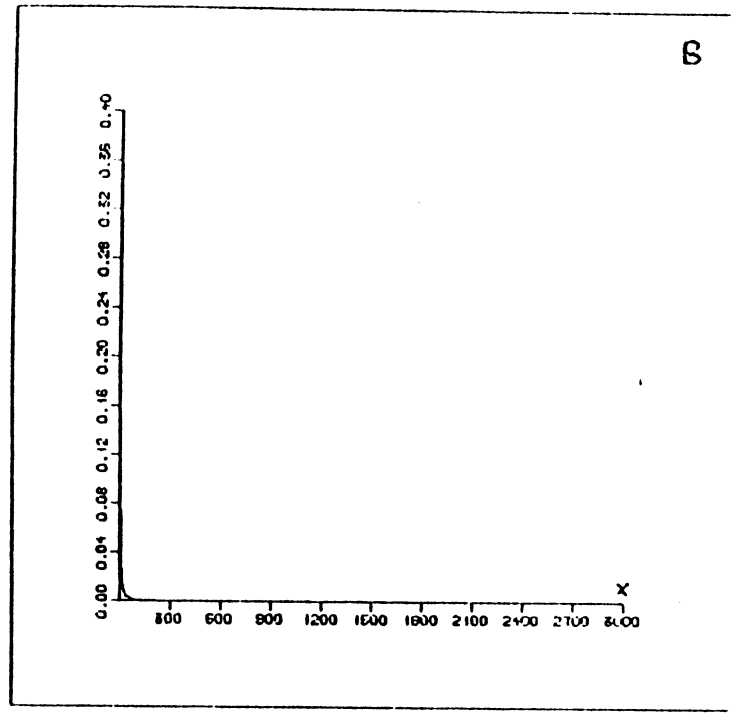


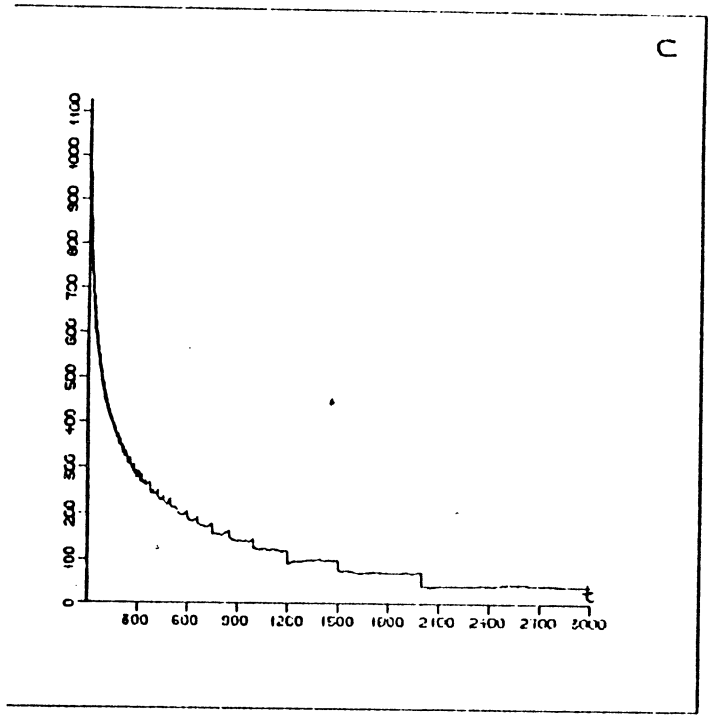


FIGURES 4.d

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008







FIGURES 4.e

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

CONCLUSION

Nous pensons avoir montré l'interêt d'une modélisation stochastique adaptée à un problème de type stochastique, d'autant plus que l'on dispose maintenant d'outils topologiques permettant l'étude du comportement asymptotique de processus (traduisant, en biologie, des états d'équilibre).

En général, la recherche des confineurs peut être facilitée par une partition judicieuse de l'espace d'état en fonction de certains critères asymptotiques. En effet, pour les processus Markoviens à temps discret, sous certaines conditions, comme celle-ci : "il existe une mesure ϕ σ-finie telle que tout ensemble invariant de l'espace d'état X soit de mesure ϕ positive", alors il existe une décomposition de l'espace en un ensemble dénombrable d'ensembles invariants ϕ-récurrents H_n et un ensemble improprement essentiel E :

$$X = \sum_n H_n + E \text{ (décomposition de Doeblin, Tweedie, 1979)}$$

Le confinement a lieu alors dans les ensembles $\overline{H_n}$ et $\overline{\Lambda}$ où $\Lambda = \{x : P_x(\bigcup_t \omega(t) \in \bigcup_n H_n) = 0\}$ (proposition V.1., Jacob, 1987). Si de plus, $\Lambda \subset \sum_m H_m$, alors, les seuls confineurs sont les ensembles invariants récurrents, caractérisés chacun par la période du cycle stochastique associé (Jacob, 1987).

Pour les processus à temps continu, Arnold et Kliemann obtiennent une partition de l'espace d'état selon divers critères de controllabilité (1981). Les ensembles absorbants sont des éléments particuliers de cette décomposition. Les diffusions non dégénérées sont soit transientes à l'infini, soit récurrentes dans tout l'espace (et ceci quelque soit l'état initial). Par contre, pour les systèmes stochastiques dégénérés avec bruit à support compact, ils obtiennent une partition non triviale de l'espace d'état (ensemble invariant différent de l'espace entier) ainsi que des comportements asymptotiques non triviaux.

Dans les cas non-triviaux, la localisation des confineurs peut être facilitée par la définition elle-même qui est de type algorithmique. C'est, par exemple, le cas d'un modèle stochastique obtenu par petites pertubations aléatoires bornées d'un système dynamique déterministe ayant un attracteur stable. Les trajectoires stochastiques restent alors dans un voisinage de l'attracteur (Freidlin et Wentzell, 1984), et par conséquent, il existe un

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

confineur dans ce voisinage (reste à le localiser de manière plus précise). Cette localisation serait aussi facilitée si l'on disposait d'une fonction de Lyapounov stochastique, fonction positive et décroissante au voisinage des confineurs. Dans Jacob (1985), on prouve la stabilité d'un cycle markovien lorsque le processus est géométriquement ergodique à l'exterieur du cycle (le cycle lui-même étant considéré comme le centre de l'espace). Inversement, un modèle autorégressif stochastique dont l'équation déterministe de récurrence associée possède une fonction de Lyapounov au voisinage de l'origine, est géométriquement ergodique, et donc possède une probabilité invariante "centrée à l'origine (Chan et Tong, 1985). Par conséquent, un critère d'ergodicité géométrique centrée sur une certaine région de l'espace, comme celui à temps discret qui concerne l'existence d'une fonction $g(x)$ positive vérifiant $Eg(x_{n+1} \mid x_n = x) \leq g(x)(1-\delta)$, permettrait de jouer le rôle d'une fonction de Lyapounov. Une telle fonction a été aussi définie par Kushner (1967), dans le cadre de sa définition de la stabilité stochastique. Elle permet surtout de localiser les ensembles invariants. Dans ce cadre, Kushner a prouvé des théorèmes d'existence de cette fonction. Une telle fonction a également été définie dans un cadre plus général par Friedman (1976), mais des théorèmes d'existence n'ont pas été prouvés.

Un certain nombre d'autres questions mériteraient aussi d'être étudiées ou approfondies; citons par exemple :

- La discrimination d'un phénomène chaotique non bruité d'un phénomène presque chaotique et légèrement bruité.
- La transition du périodique vers le chaotique, ou du périodique vers le type singulier, dans le cas stochastique (dans le cas déterministe, trois types de transition vers le chaos ont déjà été repérés (Dubois et al., 1987, Ott, 1981).
- L'existence de confineurs de faible dimension dans des systèmes de dimension infinie.
- La convergence des confineurs vers les attracteurs du système déterministe associé lorsque l'aléa tend à s'annuler. On sait déjà (cf. Introduction) que cette convergence est assurée dans le cas d'un système possédant un attracteur stable, bruité par un aléa à support borné, lorsque celui-ci tend vers l'ensemble vide. On sait également, lorsque le processus est ergodique et qu'il existe pour le système déterministe

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

associé des attracteurs stables, que la masse, pour la probabilité invariante, de l'ensemble des attracteurs les plus stables tend vers 1, lorsque l'aléa tend vers 0 (cf. Introduction). Cela implique que les zones de confinement pour cette probabilité invariante, tendent vers les attracteurs les plus stables. Dans le cas où il n'existe pas une seule probabilité invariante, mais plusieurs, notées P_i, et localisées sur des ensembles A_i ν-récurrents (i.e. $\lim_{t\to\infty} P_x^t(.) = P_i(.)$, pour tout $x \in A_i$), alors pour les ensembles A_i qui sont des auto-confineurs, les propriétés précédentes de convergence sont probablement en général encore vérifiées. Dans un cas plus général, on devra étudier directement la convergence topologique des confineurs vers les attracteurs.

- L'étude des propriétés statistiques des estimateurs proposés ici, pour les périodes des confineurs, et pour les confineurs eux-mêmes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

ARNOLD L., KLIEMANN W. (1981). Qualitative Theory of Stochastic Systems; in : Probabilistic Analysis and Related Topics, Vol. 3. ed. by A.T. Bharucha-Reid. Academic Press, new-York.

DUBOIS M., ATTEN P., BERGE P. (1987). L'ordre chaotique. La recherche, 185, 190-201.

CHAN K.S., TONG H. (1985). On the use of the deterministic Lyapounov function for the ergodicity of stochastic difference equations. Adv. Appl. Prob., 17, 666-678.

FREIDLIN M.I., WENTZELL A.D. (1984). Random Pertubations of Dynamical Systems. Springer-Verlag, New-York.

FRIEDMAN A. (1976). Stochastic Differential Equations and Applications. Academic Press, New-York.

JACOB C. (1985). Random Oscillations Modelling; in : Time Series Analysis : Theory and Practice 7. Ed. by O.D. Anderson. North-Holland, Amsterdam, 139-159.

JACOB C. (1987). Stochastic limit cycles and confiners : definitions and comparative study in the case of Markovian processes; in : Spatial processes and spatial time series analysis. d. by F. Droesbeke. Publications des Facultés Universitaires Saint-Louis, Bruxelles.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

KUSHNER H.J. (1967). Stochastic Stability and Control. Academic Press, New-york.

OTT E. (1981). Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems. Rev. Mod. Phys., 53, 4, 655-671.

TWEEDIE R.L. (1979). Topological Aspects of Doeblin Decomposition. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, 46, 299-305.
(Décomposition de Doeblin, Tweedie, 1979)

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'Article 5 de l'Arrêté du **16 avril 1974,**

Vu les rapports de M. P. PRIOURET

M. H. TONG

M. J. DEMONGEOT

M.me BREILLAT ép. JACOB Christine est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de **DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.**

Fait à Grenoble, le 7 SEP. 1987

Le Président de l'U.S.T.M.G.

Le Président

M. PAYAN

Résumé : cette thèse présente un ensemble d'outils permettant de situer, dans l'espace d'état d'un système stochastique, les points représentatifs les moins excentriques du système. Lorsqu'il s'agit d'un système périodique, on propose une méthode d'estimation de la période fondée sur la localisation de parties des orbites correspondant à une observation faite sur des parties de l'espace temporel. Cette méthode peut être considérée comme étant complémentaire des méthodes spectrales usuelles. Les notions de cycle limite stochastique et de confineur ont été introduites par souci de généraliser les notions déterministes correspondantes de cycle limite et de confineur.

tel-00325683, version 1 - 30 Sep 2008

Mots clés : processus stochastiques, phénomènes aléatoires périodiques, cycle limite stochastique, confineur, estimation de période.