



HAL
open science

Etude numerique de la resolution des equations de transfert: application a l'irrigation localisee

Francois Lafolie

► **To cite this version:**

Francois Lafolie. Etude numerique de la resolution des equations de transfert: application a l'irrigation localisee. Sciences du Vivant [q-bio]. Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, 1986. Français. NNT: . tel-02857969

HAL Id: tel-02857969

<https://hal.inrae.fr/tel-02857969>

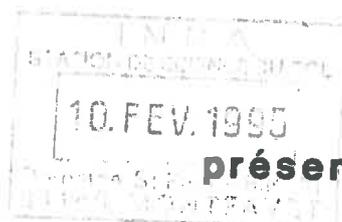
Submitted on 8 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE D'AVIGNON

THESE



présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

à

la FACULTE des SCIENCES d'AVIGNON

par

François LAFOLIE

SUJET

ETUDE NUMERIQUE

DE LA

RESOLUTION

DES EQUATIONS DE TRANSFERT :

APPLICATION A L'IRRIGATION LOCALISEE

Soutenu le 22 MAI 1986 devant la Commission d'Examen

MM. B. BLAVOUX	Professeur	Président du Jury
A. CHAMBAREL	Professeur	Rapporteur
R. GUENNELON	Directeur de Recherches	Rapporteur
E. JOLIVET	Directeur de Recherches	Examineur
C. THIRRIOT	Professeur	Examineur

Travail réalisé à la Station de Science du Sol , I.N.R.A. d'AVIGNON

A V A N T - P R O P O S

Les recherches faisant l'objet de ce mémoire ont été effectuées à la Station de Science du Sol de l'Institut National de la Recherche Agronomique à MONTFAVET.

Monsieur B. BLAVOUX, Professeur d'Hydrogéologie à l'Université d'AVIGNON, m'a fait l'honneur d'accepter la Présidence du Jury. Je ne saurais exprimer toute ma gratitude à travers ces quelques mots. Qu'il en soit tout de même grandement remercié.

Monsieur C. THIRRIOT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de TOULOUSE, a orienté et guidé les premiers pas de ce mémoire. Qu'il soit ici chaleureusement remercié pour ses conseils, sa présence dans le Jury et y trouve la gratitude d'un élève qui n'a pas su profiter de toute son expérience.

Monsieur A. CHAMBAREL, Maître-Assistant de Calcul Scientifique à l'Université d'AVIGNON, a accepté de rapporter sur ce mémoire. Qu'il soit ici vivement remercié pour ses critiques sur la partie numérique et pour sa participation au Jury.

Monsieur E. JOLIVET, Directeur de Recherches et Directeur du Département de Biométrie à l'INRA, m'a accueilli dans son laboratoire aux premiers jours de mes travaux. Qu'il soit ici remercié pour sa participation au Jury.

Monsieur R. GUENNELON, Directeur de Recherches à l'INRA, a été l'initiateur de ce travail. Qu'il soit ici remercié pour son soutien permanent et tout le savoir qu'il m'a communiqué dans le domaine de la Physique du sol et des transferts.

Que soient aussi remerciés tous les Chercheurs et Techniciens de la Station de Science du Sol de l'INRA et plus particulièrement **P. STENGEL**, Directeur du Laboratoire, pour ses précieux conseils et **L. BRUCKLER**, pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues.

Enfin, toute ma gratitude va à **Madame Nadia LEITGOLD** pour sa bonne humeur inébranlable et sa disponibilité tout au long de la frappe de ce mémoire.

S O M M A I R E

PAGES

INTRODUCTION

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. GENERALITES

- I.1. Les différentes écritures de l'équation de RICHARDS
- I.2. Les différentes conditions aux limites
- I.3. Problèmes posés par la résolution de RICHARDS
 - I.3.1. Non linéarité
 - I.3.2. Convection

II. DISCRETISATION SPATIALE

- II.1. Ordre d'approximation de deux schémas de discrétisation spatiale
 - II.1.1. Notion d'approximation
 - II.1.2. Schéma centré sur trois points
 - II.1.3. Schéma centré sur cinq points
 - II.1.4. Conditions aux limites
 - II.1.5. Résultats numériques et discussion
- II.2. Etude du type de pondération
 - II.2.1. Etude théorique
 - II.2.2. Influence de la pondération sur la solution avec une condition de flux
 - II.2.3. Conclusions

III. INTEGRATION

- III.1. Introduction
- III.2. Rappels sur l'intégration d'un système différentiel
 - III.2.1. Définition de la (ou des) stabilité(s)
 - III.2.2. "Stiffness"
 - III.2.3. Approximant de Padès - A-Stabilité et L-Stabilité
 - III.2.4. Quelques méthodes A-Stables et L-Stables
- III.3. Traitement des non-linéarités
 - III.3.1. Méthodes itératives et problèmes
 - III.3.2. Les Méthodes Prédicteurs-Correcteurs
 - III.3.3. Revue de différents schémas linéarisant l'équation
- III.4. Méthodes d'ordre élevé
 - III.4.1. Les approximants de Norsett
 - III.4.2. Implantation des approximants de Norsett
 - III.4.3. Application à l'équation d'infiltration
 - III.4.4. Conclusions
- III.5. Essai d'utilisation de l'extrapolation de Richardson
 - III.5.1. Définition de l'extrapolation de Richardson
 - III.5.2. Application et Conclusions
- III.6. Utilisation du théorème de Gershgorin pour l'étude de la stabilité des schémas d'intégration. Application à l'équation de Richards
 - III.6.1. Théorème de Gershgorin et application à l'équation de diffusion-convection
 - III.6.2. Applications
 - III.6.3. Essai d'application à l'équation de Richards

- IV. DIFFUSION NUMERIQUE
 - IV.1. Théorie et Rappels
 - IV.2. Résultats numériques

CONCLUSIONS

CHAPITRE II

INTRODUCTION

- I. MISE EN EQUATIONS
 - I.1. Equation générale dans le domaine
 - I.2. Symétries du problème et modification de l'équation
 - I.2.1. Equation dans le cas de la symétrie plane
 - I.2.2. Equation dans le cas de la symétrie cylindrique
 - I.3. Conditions aux limites
- II. REVUE DES MODELES EXISTANTS ET PROBLEMES SOULEVES
- III. RESOLUTIONS DU SYSTEME D'EQUATIONS
 - III.1. Différences finies
 - III.2. Éléments finis
 - III.2.1. Formulation variationnelle et cadre théorique
 - III.2.2. Méthode de Galerkin et introduction des éléments finis
 - III.2.3. Mise en oeuvre pour le problème des transferts en irrigation localisée
 - III.3. Intégration des systèmes
 - III.3.1. Traitement des non-linéarités
 - III.3.2. Contrôle du pas de temps
 - III.3.3. Possibilités du programme
- IV. CARACTERISTIQUES ET METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES
 - IV.1. Méthodes directes
 - IV.2. Méthodes itératives
- V. VALIDATION DES PROGRAMMES
 - V.1. Validation numérique en condition de flux
 - V.2. Validation sous charge
- VI. PROPOSITION DE DEUX NOUVELLES METHODES DE TRAITEMENT DE LA CONDITION A LA LIMITE EN SURFACE, POUR LE PROBLEME DE L'IRRIGATION LOCALISEE.
 - VI.1. Quantification de l'erreur d'estimation du flux par un schéma décentré
 - VI.1.1. Sable de Grenoble
 - VI.1.2. Yolo-light Clay
 - VI.2. Première méthode
 - VI.2.1. L'algorithme
 - VI.2.2. Résultats numériques
 - VI.3. Deuxième méthode
 - VI.3.1. Formulation du problème
 - VI.3.2. Convergence et divergence de l'algorithme de recherche de zéro. Saut de maille saturée
 - VI.3.3. Résultats numériques

CONCLUSIONS

CHAPITRE III

INTRODUCTION

- I. PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET MESURES
 - I.1. Description du dispositif
 - I.2. Apports d'eau
 - I.3. Mesures de densité
 - I.4. Mesures de conductivité
 - I.5. Mesures effectuées sur chacun des bulbes
- II. PRESENTATION ET ETUDE DES RESULTATS OBTENUS AU TERRAIN
 - II.1. Mesure de densité
 - II.2. Mesures détaillées de zones saturées et humides en surface
 - II.3. Analyse des profils de teneur en eau
 - II.4. Analyse des profils horizontaux de teneur en eau
 - II.5. Conclusions
- III. COMPARAISON DES RESULTATS SIMULES ET EXPERIMENTAUX
 - III.1. Préliminaires à la modélisation
 - III.2. Caractéristiques hydrodynamiques
 - III.2.1. Réflexions sur le modèle de MUALEM, appliqué à notre cas
 - III.2.2. Modifications apportées aux résultats du modèle de MUALEM
 - III.3. Caractéristiques des premières simulations
 - III.4. Comparaison avec les profils expérimentaux
 - III.5. Conclusions et propositions pour une nouvelle modélisation
 - III.5.1. Réflexions
- IV. SIMULATIONS ANISOTROPES ET AVEC UNE VARIABILITE TEMPORELLE DES CARACTERISTIQUES HYDRODYNAMIQUES DE LA COUCHE DE SURFACE
 - IV.1. Détermination de la sorptivité
 - IV.2. Les coefficients d'anisotropie
 - IV.3. Analyse des résultats

CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

ANNEXES

LISTE DES SYMBOLES UTILISES

<u>Symbole</u>	<u>Définition</u>	<u>Dimension</u>
$C(\psi)$	Capacité Capillaire	L^{-1}
$D(\theta)$	Diffusivité capillaire	
H	Potentiel total	L
J	Matrice Jacobienne d'une transformation	
$K(\psi)$	Conductivité hydrique	$L.T^{-1}$
K_s	Conductivité hydrique à saturation	$L.T^{-1}$
$K_{i \pm 1/2}$	Conductivité internodale	$L.T^{-1}$
K_A	Conductivité internodale obtenue par moyenne arithmétique	$L.T^{-1}$
K_G	Conductivité internodale obtenue par moyenne géométrique	$L.T^{-1}$
K_H	Conductivité internodale obtenue par moyenne harmonique	$L.T^{-1}$
L	Opérateur différentiel égal à $\text{div}(K(.)) \text{ grad}$	
L_j	j^{eme} polynome de Laguerre	
L'_j	Dérive du j^{eme} polynome de Laguerre	
P_e	Nombre de Peclet cellulaire	
\vec{Q}	Flux	$L.T^{-1}$
R_h	Approximation de L sur h	
R_{sat}	Rayon ou demi largeur de bande de la zone saturée	L
S	Variable de Kirchoff reliée à ψ	
S_i	Surface dominée par le noeud i	L^2
U	Variable de Kirchoff reliée à θ	
$d(.,.)$	Distance Euclidienne	
i_s	Premier noeud non saturé rencontré en s'éloignant du goutteur	
t	Temps	
v	Vitesse dans l'équation de Diffusion-Convection	$L.T^{-1}$
x, y, z, r	Coordonnées de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^d	
$\Delta r, \Delta x, \Delta y, \Delta z$	Pas d'espace	
$\text{Arg}(z)$	Argument d'un nombre complexe	
C^k	Espace vectoriel des fonctions k fois continuellement dérivables	
E.T.P.	Evapotranspiration potentielle	
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev	
$\text{Im}(z)$	Partie imaginaire	

$\text{Re}(z)$	Partie réelle	
Γ_i	Morceaux de frontières	
Δ	Opérateur Laplacien	
∇	Opérateur nabla (gradient)	
Ω	Domaine d'intégration spatial $\Omega \subset \mathbb{R}$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	
Ω_h	Ensemble fini de points inclus dans Ω	
γ_d	Densité sèche	$M.L^{-3}$
ρ	Rayon spectral	
λ_k	Valeur propre	
θ	Teneur en eau volumique ou paramètre de méthode d'intégration	$L^3.L^{-3}$
ψ	Potentiel matriciel	L
ω	Facteur de surrelaxation ou sous domaine de Ω	
[]	Désigne une matrice	
{ }	Désigne un vecteur	
(,)	Produit scalaire	
$\ \cdot \ _{\infty}$	Norme de maximum	
$\ \cdot \ _E$	Norme dans un espace vectoriel E	

I N T R O D U C T I O N

Aux modes traditionnels d'apport d'eau, irrigation gravitaire à la raie ou par submersion et aspersion, est venue s'ajouter une méthode d'irrigation dite localisée et consistant à apporter l'eau ponctuellement ou de façon linéaire, sous de faibles charges et débits. Cette technique qui a connu dans les années passées, et connaît toujours un développement important en Israël et en Californie, commence à être largement utilisée dans le Sud de la France, pour les cultures fruitières et légumières sous serre.

Comme cela est souvent le cas pour de nombreuses inventions révolutionnant un domaine technique, elle a été à la fois exagérément plébiscitée et mal utilisée et comprise. Les avantages qu'elle peut procurer :

- Possibilité d'automatisation de l'irrigation et de son pilotage, d'apport d'engrais en solution, d'insecticides ou de produits phyto-sanitaires,
- Diminution du temps de main d'oeuvre, dévolu à l'irrigation,
- Maintien de l'eau à un potentiel faible dans la zone racinaire,

ont souvent occulté les problèmes d'adéquation des paramètres de l'irrigation avec le support éminemment complexe de la plante qu'est le sol. Initialement développée sur des matériaux sableux et homogènes, la transposition de cette technique à des types de sol très divers et plus hétérogènes ne s'est pas faite sans quelques déboires et difficultés.

La conception des réseaux d'irrigation qui se limite encore à l'heure actuelle à des calculs de nombre de goutteurs et de longueurs et diamètres de conduites devrait suivre la démarche suivante :

- Répondre à la question : Quelle est la géométrie optimale du volume de sol devant être humecté et ses variations acceptables, en fonction de la culture envisagée ?

La réponse à cette question passe obligatoirement par la "connaissance" du système racinaire et de ses "interactions avec l'irrigation.

Connaissant la géométrie du "bulbe" que l'on veut obtenir, le modèle permet, à moindres frais, d'estimer les paramètres optimaux de l'irrigation et leurs marges de variations admissibles (nombre de goutteurs, débit nominal, durée de l'irrigation, fréquence,)

La phase de calcul de dimensionnement du réseau peut alors suivre.

Outre l'application à l'optimisation de certains paramètres de l'irrigation, le modèle constitue un outil indispensable pour évaluer l'influence de la variabilité spatiale des caractéristiques hydrodynamiques et/ou du matériel sur le résultat de l'irrigation.

D. HILLEL (1985), lors du troisième congrès international sur l'Irrigation localisée, relève les carences suivantes qui complètent ou recouvrent notre analyse sur l'état des connaissances en ce domaine.

"There remain many problems requiring further research. Among them are the following :

- 1°/ Realistic methods for predicting the temporal and spatial variations of soil moisture under drip irrigation for different crop, weather and soil conditions (including vertically and horizontally heterogeneous soils). Early efforts at modelling have been unrealistic, as they assume uniform soil texture and initial wetness.*
- 2°/ Determining the minimal and optimal fraction of the soil volume needed for various crops.*
- 3°/ Assessing and controlling downward seepage and leaching rates from the rooting zone under drip irrigation.*
- 4°/ Adjusting water discharge to the soil infiltrability so as to aid the infiltration of water under the drippers in tight or crusted soils, particularly on sloping ground".*

Outre les problèmes de fond soulevés par **HILLEL**, l'analyse des modèles existants fait apparaître des carences à divers niveaux :

a) la formulation mathématique du problème qui repose, dans tous les travaux, sur la transformation de Kirchoff, ce qui conduit assez souvent à un ajustement exponentiel de la relation conductivité-teneur en eau.

b) le traitement de la condition à la limite en surface jamais satisfaisant, malgré l'emploi de la variable de Kirchoff et qui est à l'origine de la plupart des biais dans les bilans de masse.

c) la résolution de l'équation de Richards, qui, obtenue avec différentes méthodes, présente des écarts non négligeables.

Le modèle que nous proposons, grâce à un traitement original de la condition à la surface, travaille avec l'équation de Richards. Il permet de prendre en compte la présence de plusieurs horizons, l'anisotropie des caractéristiques hydrodynamiques et en particulier, la présence d'une croûte en surface. Nous avons donc essayé de fournir un outil de calcul pour la prévision du devenir de l'eau en irrigation localisée, intégrant le plus possible les

caractéristiques du milieu. Le développement des moyens informatiques permet à l'heure actuelle de ne plus se cantonner à des solutions analytiques limitantes quant à la prise en compte de la complexité du phénomène, mais d'utiliser des modèles numériques sophistiqués, seuls à pouvoir intégrer la totalité des particularités du problème. La diminution du coût des calculs et la possibilité de travailler sur des micro-ordinateurs acceptant des codes volumineux, font de l'étude sur modèle un outil économiquement compétitif, comparé aux multiples essais de terrain qui ne seraient de toutes façons jamais assez nombreux et à même d'appréhender des modifications ultérieures du milieu.

La baisse de la qualité des eaux disponibles pour l'irrigation et la nécessité où l'on va se trouver de devoir l'économiser, ne feront qu'accroître le développement de ce type d'apport qui a l'avantage de réduire les surfaces mouillées et donc les pertes par évaporations directes en zone aride.

Les motivations, tant économiques qu'écologiques (pollution de nappe par le nitrate du fait d'irrigations mal conduites) ou sociologiques, ne manquent donc pas, et nous espérons que ce mémoire apportera une contribution à la maîtrise de cette technique.

C H A P I T R E I

INTRODUCTION

La première partie de ce mémoire est consacrée à une étude théorique et numérique de la résolution de l'équation de **RICHARDS**. Bien des travaux ont été effectués dans ce sens là, aussi avons-nous cherché à replacer le problème dans un cadre plus général, en reprenant les travaux effectués pour les équations paraboliques non linéaires, et à apporter des réponses concrètes et globales à certains points sensibles du traitement numérique. La discrétisation spatiale, l'intégration des systèmes différentiels, le traitement des non linéarité, la stabilité et la diffusion numérique ont donc plus particulièrement retenu notre attention.

Cette étude a pour objectifs, outre ceux purement cognitifs, de permettre de choisir une méthode de résolution, en fonction de ses objectifs et en ayant suffisamment d'éléments pour être capable d'apprécier l'erreur qui sera commise, que l'objectif soit la rapidité pour une précision donnée ou la précision maximale. Elle doit aussi permettre de définir les limites de certaines méthodes et ce qu'on peut en attendre.

On voit de plus en plus se développer l'utilisation des modèles à des fins de calage de paramètres sur des expériences de laboratoire ou même de terrain. Dans ce cadre d'utilisation, il est important de savoir quel sera le poids des paramètres de la discrétisation et de l'intégration sur les caractéristiques hydrodynamiques obtenues. On donnera un exemple de réestimation de K_{sat} sur une manipulation fictive au moyen d'un modèle introduisant de la diffusion numérique.

Le problème de la diffusion artificielle des fronts est important par exemple pour les pétroliers, dans la simulation de la récupération d'huile par injection d'eau. **LEMONIER et al. (1980)** proposent d'ailleurs une méthode d'éléments finis mixte dans le but de réduire la diffusion numérique. Ils soulignent l'importance d'une résolution très précise, dans la simulation de manipulations de laboratoire devant déboucher sur le calage de paramètres.

I. GENERALITES

A la suite de nombreuses générations de chercheurs, on utilisera la loi de **DARCY** généralisée pour relier le flux d'eau à un gradient de potentiel dans un milieu poreux. On se limitera à la prise en compte de deux des composantes du potentiel de l'eau dans le sol : les composantes gravitaire, matricielle et capillaire. La loi de **DARCY** nous donne alors le flux à travers une section du milieu poreux, par :

$$(1) \quad \vec{Q} = -K(\psi) \text{grad} H = -K(\psi) (\text{grad} \psi - 1)$$

avec les notations habituelles :

ψ : potentiel capillaire

$K(\psi)$: conductivité hydraulique

H : potentiel total défini par : $H = \psi - z$
 $z > 0$ vers le bas.

Comme dans de nombreux problèmes de transferts (chaleur, solutés,...), on couple cette expression donnant le flux à l'équation de conservation de masse. En reprenant les notations précédentes et en notant θ la teneur en eau, on a :

$$(2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{div}(\vec{Q}) \quad \text{Loi de conservation de masse}$$

En les combinant, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(K(\psi) \text{grad} H)$$

On pourrait aussi ajouter des termes puits ou sources dans cette équation. Elle fait apparaître deux variables : θ et ψ reliées entre elles par une fonction caractéristique du milieu où on travaille.

L'utilisation de la dérivée de l'inverse de celle-ci : ie de $\frac{d\theta}{d\psi}$ appelée capacité capillaire, permet d'éliminer l'inconnue θ , et d'avoir l'équation, connue sous le nom d'équation de **RICHARDS**.

$$(3) \quad C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{div} (K(\psi) (\vec{\text{grad}} \psi - 1))$$

Si, on se limite aux transferts monodimensionnels, on aura :

$$(4) \quad C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (K(\psi) (\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1))$$

En partant des deux équations de base (DARCY et conservation de masse), on peut obtenir une équation ayant pour inconnue la teneur en eau (Equation de FOKKER-PLANCK)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta)] \quad \text{où} \quad D(\theta) = K(\theta) \frac{dh}{d\theta}$$

Cette équation est en fait peu utilisée, du fait qu'elle ne permet pas de rendre compte des écoulements où une partie du domaine deviendrait saturée. De plus, nous avons constaté, lors de simulations préliminaires, que les fortes variations de la fonction (D(θ)), conduisait à des difficultés pour obtenir des résultats comparables à ceux donnés par l'équation de RICHARDS. HILLEL (1984) fait la même constatation lors de la modélisation des transferts en irrigation localisée et conclut à l'impossibilité d'utiliser l'équation en .

La troisième forme rencontrée, repose sur une transformation de variable due à KIRCHOFF et qui permet de récupérer une équation quasi-linéaire, et non plus fortement non-linéaire, comme l'équation de RICHARDS.

$$\text{Posons } U = \int_{\psi_0}^{\psi} K(x) dx$$

On obtient alors en reportant dans l'équation (3)

$$(5) \quad \frac{C(\psi)}{K(\psi)} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U - \frac{1}{K(\psi)} \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial U}{\partial z}$$

Cette équation présente l'avantage de travailler avec une variable U dont la nature intégrale permet d'avoir des gradients moins importants et donc des erreurs liées à la discrétisation moins élevées. A l'opposé, elle nécessite d'avoir un moyen de passage entre U et h , pour pouvoir calculer C et K . Certains

auteurs tabulent la relation $U(h)$ (VAUCLIN et al., 1979), alors que d'autres font des hypothèses sur la forme de la relation $K(\psi)$ pour pouvoir obtenir par intégration une relation $U(\psi)$ et son inverse (ABABOU, 1981 ; BRANDT et al., 1971 ; HILLEL, 1984).

Signalons au passage que la recherche dans un tableau suffisamment grand pour des raisons de précision de la valeur de K pour un U donné peut être un facteur non négligeable d'augmentation du temps de calcul, surtout si cela doit se reproduire souvent (processus itératif, petits pas de temps, ...) et sur un grand nombre de noeuds. On atteint aisément 1000 noeuds sur un maillage à deux dimensions. De plus, l'hypothèse d'une forme exponentielle de la relation $K(\psi)$ n'étant pas vérifiée sur tous les sols, nous avons rejeté l'utilisation de cette équation, au profit de l'équation de RICHARDS.

Signalons que l'on rencontre dans certains articles mathématiques, traitant de la résolution des équations aux dérivées partielles paraboliques, un autre changement de variable. Lors du traitement d'une équation parabolique non linéaire CERMAK et ZLAMAL (1980) proposent la transformation suivante :

$$H(u) = \int_{u_0}^u p(s) c(s) ds \quad \text{avec l'équation initiale :}$$

$$p(u) c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} (k(u) \vec{g} \text{rad} u) + q(x, t, u)$$

On pourrait reprendre cette transformation dans le cas de l'équation de RICHARDS et on obtiendrait, moyennant le changement de variable :

$$H(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} c(h) dh$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div} (K(\psi) \vec{g} \text{rad} \psi)$$

CERMAK utilise même conjointement une transformation de KIRCHOFF.

I.1. Les différentes écritures de l'équation de RICHARDS.

L'équation de RICHARDS est de type parabolique, fortement non linéaire. Si on développe les dérivées au second membre, on peut faire apparaître le caractère diffusif convectif. En effet, on a :

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right)$$

qui après dérivation au second membre donne :

$$(6) \quad C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = K(\psi) \Delta \psi + \frac{dK}{d\psi}$$

Si on pose $q = -K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right)$ alors $\frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) = -\frac{q}{K(\psi)} \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}$

On a donc :

$$(7) \quad C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = K(\psi) \Delta \psi - \frac{q}{K(\psi)} \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

On reconnaît ici les termes diffusif : $K(\psi) \Delta \psi$

et convectif : $-\frac{q}{K(\psi)} \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}$

L'équation (6) ou (7) est souvent rencontrée sous le nom de modèle décomposé. Cette formulation du problème est connue pour donner de moins bons résultats que (3) (VAUCLIN et al., 1979).

1.2. Les différentes conditions aux limites.

Les conditions aux limites que l'on est amené à prendre en compte sont de deux types. On a d'une part les conditions de DIRICHLET où on fixe la valeur de la fonction sur la frontière au cours du temps, et d'autre part les conditions de type NEUMAN où on impose une relation sur le gradient de la fonction à la bordure du domaine.

Exemple : a) DIRICHLET $\psi(0, t) = f(t)$

b) NEUMAN $-K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \Big|_x = g(t, x) \quad x \in \text{frontière}$

La condition de NEUMAN revient à imposer un flux d'eau en certains points de la frontière. C'est donc une condition qui demande de prendre certaines précautions pour ne pas "violer" la physique du phénomène. Il faudra entre autre être capable en un même point de passer d'une condition à l'autre pour simuler la formation d'eau ou la disparition d'une lame d'eau.

Sur un domaine en dimensions deux ou trois, les deux types de conditions peuvent être présents simultanément sur des morceaux différents de la frontière.

I.3. Problèmes posés par la résolution de RICHARDS.

Ils tiennent essentiellement à son caractère non linéaire, au fait qu'elle peut avoir un caractère plus ou moins convectif, et aux conditions aux limites pouvant entraîner une rupture brutale d'équilibre, difficile à restituer (Conditions de DIRICHLET ou de NEUMAN à flux forts).

I.3.1. Non linéarité.

Les non-linéarités sont à la base de plusieurs difficultés.

Tout d'abord l'impossibilité de faire une étude de stabilité globale, toute étude étant forcément locale pour pouvoir approcher l'opérateur non-linéaire, par l'opérateur tangent en un point.

Deuxièmement, la non-linéarité va devoir être prise en compte au niveau de la résolution numérique. Celle-ci est très variable, en fonction des auteurs. Cela va de la simple linéarisation des coefficients, c'est-à-dire qu'on leur impose leur valeur au pas de temps précédent (VAUCLIN et al., 1979 ; ABABOU, 1981) à des schémas beaucoup plus complexes tels que les méthodes prédicteur-correcteur sophistiquées implantées dans certains codes numériques spécialisés dans la résolution des systèmes d'équations différentielles. Nous reviendrons par la suite sur les différentes méthodes possibles.

I.3.2. Convection.

Le caractère convectif d'une e.d.p. est généralement associé à une idée d'oscillation et de problèmes de stabilité. Les méthodes habituellement employées pour combattre ces phénomènes parasites sont, d'une part l'utilisation de schémas d'intégration et de discrétisation peu sensibles, et d'autre part l'adjonction de termes diffusifs. Ce faisant et quelle que soit la méthode employée, on introduit une diffusion numérique qui prend sa source dans le mode de discrétisation employé (Backward en espace et/ou en temps), ou dans la diffusion que l'on rajoute. On essaiera de quantifier par la suite ce

phénomène dans différentes conditions. Une étude théorique de la stabilité des schémas d'intégrations de l'équation de diffusion-convection nous permettra, en outre, d'apporter une explication à différentes remarques rencontrées et concernant ces problèmes de stabilité et d'oscillations dans la résolution de l'équation de **RICHARDS**.

On peut énumérer aussi les problèmes suivants sur lesquels on reviendra par la suite :

- Influence de la discrétisation spatiale (ordre, caractéristiques géométriques, ...)
- Stabilité de l'intégration temporelle et ses relations avec la discrétisation spatiale
- Erreurs de troncature dans les schémas d'intégration
- Influence de la non-linéarité sur les ordres de convergences des schémas d'intégration.

II. DISCRETISATION SPATIALE.

Cette première partie étant dévolue à l'étude numérique et théorique de l'équation d'infiltration, dans le cas monodimensionnel pour des raisons de calcul, on va s'attacher à évaluer les caractéristiques de différents schémas qui seront extrapolables au cas à deux dimensions. La discrétisation de l'opérateur spatial peut se faire en employant classiquement les méthodes de différences finies ou d'éléments finis. Bien que par la suite nous utiliserons dans la modélisation les deux méthodes, nous allons ici étudier les qualités des différents schémas aux différences finies habituellement rencontrés et essayer d'apporter une réponse quant au choix à effectuer.

II.1. Ordre d'approximation de deux schémas de discrétisation spatiale.

Cette étude a été en partie motivée par les problèmes rencontrés lors de l'utilisation d'un logiciel de résolution d'E D P, effectuant lui-même la discrétisation. Les fronts simulés lors d'une infiltration présentaient des différences notables tant du point de vue forme que localisation, par rapport à la solution quasi-analytique de **PHILIP**, choisie comme référence dans ce cas.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir un opérateur discret. L'utilisation de formules de **TAYLOR** pour approcher les dérivées spatiales conduit, pour l'équation qui nous intéresse, à des schémas sur trois points, cinq

points, ou plus. L'augmentation du nombre de points utilisés pour approcher les dérivées spatiales, si elle conduit théoriquement à des ordres d'approximation plus élevés, augmente aussi le degré de couplage du système et par là même l'effort qui sera nécessaire à sa résolution (Inversion de matrice).

L'autre méthode est basée sur une identité intégrale obtenue par MARCHOUK (1980).

Nous allons, après le rappel de la notion d'approximation, présenter une étude théorique et numérique de l'ordre d'approximation des schémas sur trois points et cinq points, usuels en différences finies pour l'équation de RICHARDS.

II.1.1. Notion d'approximation.

Reprenons l'équation (3) que nous avons retenue. On a donc le problème différentiel suivant :

Trouver $u \in C^k(\Omega \times [0, T])$ tel que

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(u) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - 1 \right) \right) \quad z \in \Omega = [0, L]$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$z = 0 \quad u = u_g(t) \quad \text{ou} \quad -k(u) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - 1 \right) \Big|_{z=0} = q_g(t)$$

$$z = L \quad u = u_f(t) \quad \text{ou} \quad -k(u) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - 1 \right) \Big|_{z=L} = q_f(t)$$

On se donne la condition initiale : $u(z, 0) = u_0(z)$

Ainsi décrit, le problème est dit "bien posé".

On peut distinguer deux opérateurs. Un opérateur temporel :

$$\hat{T} : u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et un opérateur spatial}$$

$$L : u \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(k(u) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - 1 \right) \right)$$

On se donne sur Ω une "grille" de points, c'est-à-dire un ensemble Ω_h , régulièrement distribué ou non. La trace de la fonction $u(x,t)$ sur Ω_h sera un vecteur noté u_h et dont les composantes $(u_h)_i$ sont des fonctions du temps, décrivant le phénomène en tout point de Ω_h .

On définit par R_h l'opérateur discret opérant sur u_h et approximant l'opérateur continu L .

Pour chacune des extrémités de Ω_h , on peut définir de même deux opérateurs $r_{1,h}$ et $r_{2,h}$, approximant les conditions aux limites I_1 et I_2 .

$$l_i(u) = u_{g,f}(t) \quad \text{ou} \quad l_i(u) = -k(u) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - 1 \right) \Big|_{g,f} = q_{g,f}(t) \quad i=1,2$$

Si on note $U = C^k(\Omega)$ et U_h le sous espace vectoriel de dimension finie associé à Ω_h , on a le schéma suivant : GASTINEL (1978)

$$\begin{array}{ccc} u \in U & \xrightarrow{L} & L(u) \in F \\ \downarrow \text{Proj} & & \downarrow \\ u_h \in U_h & \xrightarrow{R_h} & R_h(u_h) \in F_h \end{array}$$

$[L(u)]_h$

L'opérateur R_h est alors dit approximant et quelques fois consistant à l'opérateur L si on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| [L(u)]_h - R_h(u_h) \|_{F_h} = 0$$

On a la même représentation schématique de la situation pour chacun des opérateurs aux limites.

On a donc dans le cas présent trois opérateurs discrets. On démontre en général pour chacun d'eux, une inégalité du type :

$$\| [L(u)]_h - R_h(u_h) \|_{F_h} \leq h^k \cdot M(u) \quad \text{pour l'opérateur spatial}$$

et

$$\| r_{i,h}(u_h) - [l_i(u)]_h \|_{F_{i,h}} \leq h^{k_i} \cdot M_i(u) \quad \text{pour chacun des opérateurs aux limites}$$

On pose alors $K = \max_i M_{i,h}(k_i, k)$ et on dit qu'on a une approximation d'ordre K .

Remarquons que dans le cas de conditions de DIRICHLET, on a égalité des opérateurs $r_{i,h}$ et l_i puisque $l_i(u) = u(x_i, t)$ où $i = s$ ou f et que $r_{i,h}(u) = u(x_i, t)$ par définition. La prise en compte de conditions de DIRICHLET n'est donc pas un facteur limitant pour l'ordre d'approximation.

II.1.2. Schéma centré sur trois points

L'opérateur bâti sur le schéma trois points habituel est défini de la façon suivante :

$$R_h : u_h \longrightarrow R_h(u_h) \text{ tel que :}$$

$$\left[R_h(u_h) \right]_i = \frac{1}{h} \left[k_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right]$$

C'est le schéma classiquement utilisé pour approcher un opérateur du type $L(u) = \text{div}(k(u) \vec{\text{grad}} u)$. On le retrouve chez les utilisateurs de différences finies (VAUCLIN et al., 1979) ; il est aussi implanté dans les logiciels spécialisés dans la résolution d'EDP paraboliques.

Les codes PDEONE, PDE TWO, PDECOL de MELGARD et SINCOVEC, 1981 et MADSIN et SINCOVEC, 1979 utilisent ce type de schéma pour des problèmes à une ou deux dimensions. L'implantation de conditions aux limites de type NEUMAN se fait classiquement par l'utilisation d'un noeud fictif situé à l'extérieur du domaine et symétrique par rapport au deuxième noeud intérieur. Notons qu'on trouve les mêmes options dans les sous-routines de la bibliothèque NAG, traitant d'EDP paraboliques (DEW et WALSH, 1981).

La première méthode pour obtenir R_h est d'utiliser des développements limités au voisinage de point $x_i \in \Omega$.

En notant $H = \psi - x$, on a l'approximation :

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_i \simeq \left[K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \right] \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$- \frac{\Delta x^4}{48} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_i - \frac{\Delta x^4}{32 \cdot 5!} \frac{\partial^5}{\partial x^5} \left(K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_i + o(\Delta x^4)$$

Si on utilise les approximations suivantes pour $\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i+1/2}$ et $\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i-1/2}$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i+1/2} \approx \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{48} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2} - \frac{\Delta x^4}{32.5!} \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} \Big|_{i+1/2} + o(\Delta x^4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \approx \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{48} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i-1/2} - \frac{\Delta x^4}{32.5!} \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} \Big|_{i-1/2} + o(\Delta x^4)$$

on obtient en reportant dans (8) l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(\psi) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_i &= [R_h(u)]_i - \kappa_{i+1/2} \frac{\Delta x}{48} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2} + \kappa_{i-1/2} \frac{\Delta x}{48} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i-1/2} \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{32.5!} \kappa_{i+1/2} \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} (x') + \frac{\Delta x^3}{32.5!} \kappa_{i-1/2} \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} (x'') \end{aligned}$$

où $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ et $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\text{d'où : } |[L(u)]_i - [R_h(u_h)]_i| \leq \frac{\Delta x}{48} \left[\kappa_{i+1/2} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2} - \kappa_{i-1/2} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i-1/2} \right] + \dots$$

$$\text{d'où : } |[L(u)]_i - [R_h(u_h)]_i| \leq \frac{\Delta x}{48} \left| \kappa_{i+1/2} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2} - \kappa_{i-1/2} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i-1/2} \right| + \frac{\kappa_5 \Delta x^3}{16.5!} \left\| \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} \right\|$$

Si la conductivité était constante, on retrouverait l'approximation classique du Laplacien sur trois points, dont l'ordre est en h^2 .

Une majoration grossière de la valeur absolue conduit à une inégalité du type

$$|[L(u)]_i - [R_h(u_h)]_i| < \frac{\Delta x}{48} \kappa_5 \left\| \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right\|_\infty$$

Si on introduit l'équation : $\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x \frac{\partial^4 H}{\partial x^4}(\tilde{x})$

où $\tilde{x} \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$

$$\text{on a : } -\frac{\Delta x}{48} \left[K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \right] = -\frac{\Delta x}{48} [K_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}}] \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \\ + \frac{\Delta x^2}{48} K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial^4 H}{\partial x^4}(\tilde{x})$$

On a donc la majoration :

$$| [L(u)]_i - [R_h(u_h)]_i | \leq \frac{\Delta x}{48} |K_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}}| \left\| \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right\|_{\infty} + \frac{\Delta x^2}{48} K_5 \left\| \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} \right\|_{\infty}$$

Si on fait l'hypothèse que $K(\psi)$ est de classe C^1 par exemple,

$$\text{on a } \frac{K_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{dK}{dx}(\hat{x}) \quad \text{où } \hat{x} \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$$

$$\text{c'est-à-dire } |K_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}}| \leq \Delta x \max_{[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]} \left| \frac{dK}{dx} \right|$$

on a donc :

$$\| [L(u)]_i - [R_h(u_h)]_i \|_{\infty} \leq \frac{\Delta x^2}{48} \left[K_5 \left\| \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{dK}{dx} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right\|_{\infty} \right]$$

On a donc une majoration de l'erreur de discrétisation de la forme

$$e \leq C \cdot \Delta x^2 \quad \text{c'est-à-dire quadratique}$$

Remarques : Pour arriver à ce résultat, on a dû faire les hypothèses suivantes de régularité des fonctions H et K intervenant. On a précisé, au début de ce paragraphe $H \in C^k(\Omega)$ sans fixer k . Suite à cette démonstration, on peut dire que pour avoir un schéma d'ordre quadratique, on doit faire les hypothèses :

$H \in C^4(\Omega)$ et $K(\psi) \in C^1(\Omega_{\psi})$ où Ω_{ψ} désigne l'intervalle de variation de ψ .

L'autre méthode pour obtenir des opérateurs discrets approximant L , repose sur l'utilisation d'une identité intégrale. Celle-ci est obtenue de la façon suivante :

On pose : $J_{k \pm 1/2} = K_{k \pm 1/2} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{k \pm 1/2}$ et on a alors :

$$(9) \quad J_{k+1/2} - J_{k-1/2} = \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} f dx \quad \text{où} \quad f = c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Si on intègre $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_{k-1/2}}{K(\psi)} \right)$ sur les intervalles $[x_{k-1/2}, x]$ et $[x, x_{k+1/2}]$, on obtient les égalités :

$$K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x} = J_{k-1/2} + \int_{x_{k-1/2}}^x f dx \quad \text{et} \quad K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x} = J_{k+1/2} - \int_x^{x_{k+1/2}} f dx$$

On en tire deux expressions pour $\frac{\partial H}{\partial \psi}$, que l'on intègre respectivement sur les intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ et $[x_k, x_{k+1}]$. Cela conduit à :

$$H_k - H_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial x} dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{J_{k-1/2}}{K(\psi)} dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{K(\psi)} \int_{x_{k-1/2}}^x f d\xi dx$$

$$H_{k+1} - H_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial H}{\partial x} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{J_{k+1/2}}{K(\psi)} dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{K(\psi)} \int_x^{x_{k+1/2}} f d\xi dx$$

$J_{k+1/2}$ et $J_{k-1/2}$ étant indépendants de x , on en tire les expressions qui portées dans (9) donnent l'égalité suivante.

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{K(\psi)} dx} - \frac{H_k - H_{k-1}}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{K(\psi)} dx} + \frac{1}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{K(\psi)} dx} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{K(\psi)} \int_{x_{k-1/2}}^x f dx \right] + \frac{1}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{K(\psi)} dx} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{K(\psi)} \int_x^{x_{k+1/2}} f dx \right] = \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} f dx$$

On pose :

$$(10) \quad \tilde{R}_h(H_h) = \frac{1}{\Delta x_h} \left(\frac{H_{k+1} - H_k}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{K(\psi)} dx} - \frac{H_k - H_{k-1}}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{K(\psi)} dx} \right)$$

TIKONOV et SAMARSKI (1980) montrent que l'erreur commise en utilisant ce schéma est en h^2 . Toutefois, il est inutilisable en l'état du fait de la présence de $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{K(\psi)} dx$. On remplace cette intégrale par la valeur $\Delta x / K_{k+1/2}$ qui portée dans (10) donne le schéma habituel :

$$R_h(H) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} \cdot K_{k+1/2} - \frac{H_k - H_{k-1}}{\Delta x} \cdot K_{k-1/2} \right)$$

Cet opérateur conserve les mêmes propriétés que celui défini en (10).

II.1.3. Schéma centré sur cinq points.

En reprenant les notations précédentes, l'opérateur discret est défini par :

$$R_h : u_h \longrightarrow R_h(u_h)$$

$$: (u_h)_i \longrightarrow R_h(u_h)_i = \frac{1}{2h} \left[k_{i+1} \frac{u_{i+2} - u_i}{2h} - k_{i-1} \frac{u_i - u_{i-2}}{2h} \right]$$

Les développements limités conduisent à :

$$|[L(u)]_i - [R_h(u^h)]_i| \leq K_{i+1} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i+1} + o(h^5) - K_{i-1} \frac{\Delta x}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i-1} + o(h^5)$$

$$\leq \frac{\Delta x}{6} \left| \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{i+1} \cdot K_{i+1} - \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{i-1} \cdot K_{i-1} \right| + o(h^5)$$

en utilisant un développement du premier ordre de $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$ en x_{i-1} , on obtient :

$$|[L(u)]_i - [R(u^h)]_i| \leq \frac{\Delta x}{6} \left| (K_{i+1} - K_{i-1}) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{i-1} + K_{i+1} \cdot 2 \cdot \Delta x \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}(\tilde{x}) \right| + o(h^5)$$

$$\leq \frac{\Delta x}{6} \left| (K_{i+1} - K_{i-1}) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{i-1} \right| + \frac{\Delta x^2}{3} K_5 \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|$$

$$\leq \frac{\Delta x^2}{3} \left[\left| \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{i-1} \right| \frac{K_5}{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \frac{dK}{dx} + K_5 \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|_{[i-1, i+1]} \right]$$

On obtient donc une estimation de l'approximation qui ressemble à celle du schéma sur trois points :

$$\|[L(u)] - R_h(u_h)\|_\infty \leq \frac{\Delta x^2}{3} \left[K_5 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right\|_\infty \cdot \left\| \frac{dK}{dx} \right\|_\infty \cdot \left\| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right\|_\infty \right]$$

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord, si l'ordre d'approximation est le même, h^2 , la constante multiplicative est très différente et on s'aperçoit que pour une précision requise, il faut diviser le pas d'espace par 4. Ceci ne touche qu'à l'opérateur spatial et ne préjuge pas de l'influence de la discrétisation sur la stabilité de l'intégration temporelle.

Il faut noter aussi que le schéma trois points conduit à un système linéaire tri-diagonal pour lequel on dispose d'un algorithme efficace d'inversion (Algorithme de THOMAS), alors que le schéma cinq points conduit à une matrice penta-diagonale, qui nécessitera la mise en oeuvre d'un algorithme plus lourd, le problème le plus important étant l'introduction des conditions aux limites et le traitement du noeud au voisinage de la frontière.

II.1.4. Conditions aux limites.

L'introduction des conditions aux limites est très naturelle et ne perturbe pas le système obtenu dans le cas du schéma trois points. En effet, pour des conditions de DIRICHLET, on a élimination d'une inconnue (noeud frontière) et la discrétisation sur le noeud voisin ne pose aucun problème.

Pour les conditions de NEUMAN, qui s'écrivent dans notre cas $Q = -K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x}$, on peut en reprenant le formalisme précédent montrer que l'ordre d'approximation est en h^2 . En effet, on a facilement en utilisant une approximation centrée de $\frac{\partial H}{\partial x}$ la majoration :

$$\| \ell(H) - r_{1,h}(H_h) \| \leq \frac{\Delta x^2}{6} \max_{[0, \Delta x]} \left| K \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right| \quad \text{où :}$$

$$\ell : H \longrightarrow -K(\psi) \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\text{et } r_{1,h} : H \longrightarrow \frac{H_x - H_0}{2\Delta x}$$

On conserve donc l'ordre d'approximation de l'opérateur R_h . L'opérateur $r_{1,h}$ introduit une équation supplémentaire, nécessaire du fait de la présence de H_0 . Celui-ci est en général éliminé entre l'équation du système global et celle discrétisant la condition à la limite.

Si on utilise un schéma à cinq points, on s'aperçoit que l'opérateur R_h introduit deux noeuds fictifs situés à Δx et $2\Delta x$ au-dessus de la frontière).

Dans le cas de conditions de DIRICHLET, la valeur au noeud frontière étant fixée, on élimine du fait le noeud à $-2\Delta x$. Il reste néanmoins le noeud à $-\Delta x$. La seule façon d'éliminer ce problème est de modifier l'opérateur

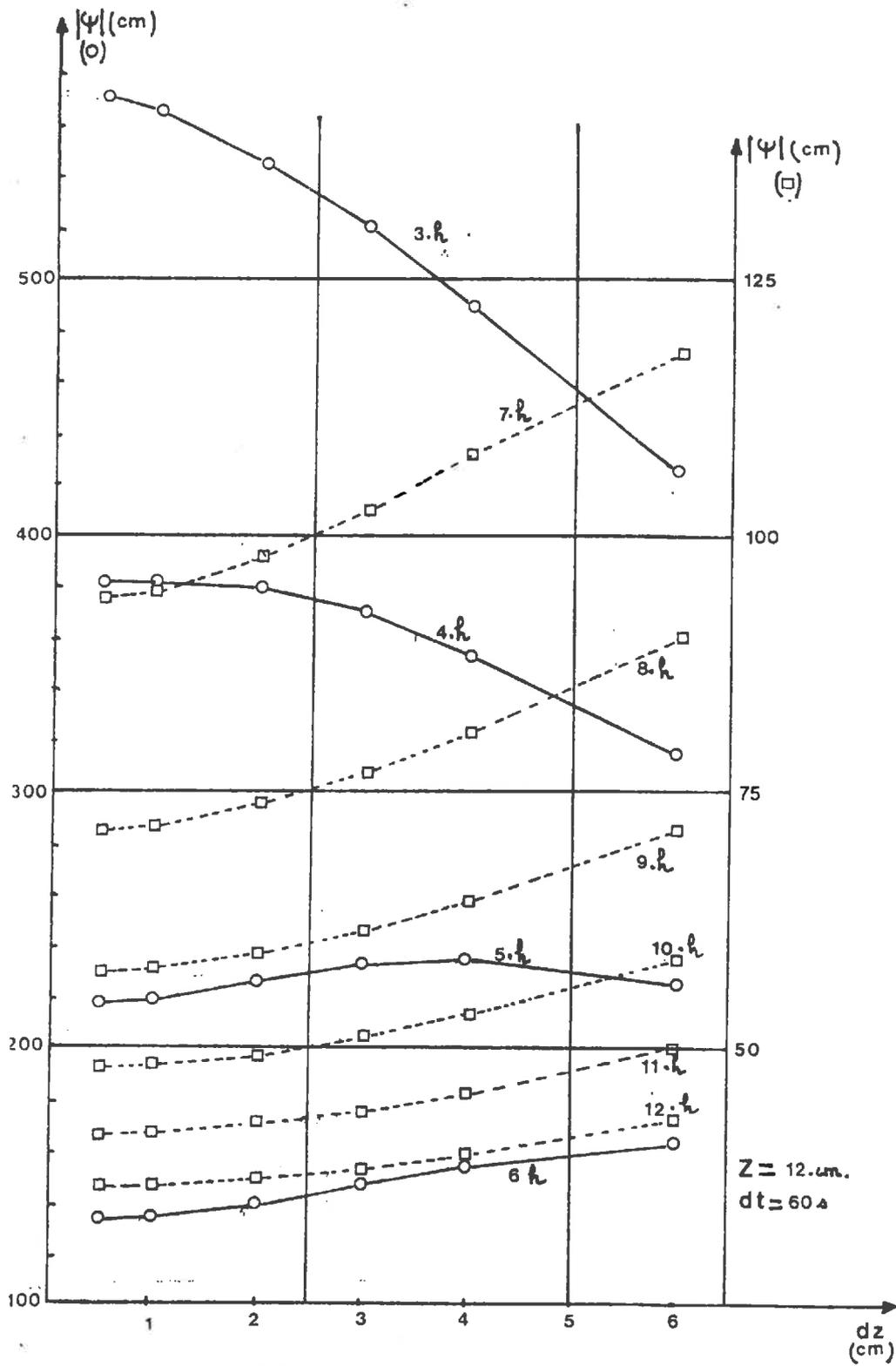


FIG. 1 - "Yolo-light Clay"

R_h au deuxième noeud et d'utiliser une formule décentrée. Cette formule quoique d'ordre h^2 est probablement une des raisons fondamentales des problèmes liés à ce type de schéma.

Dans le cas de conditions de NEUMAN, une discrétisation centrée du terme de flux permet d'éliminer le noeud situé à $-2\Delta x$, le noeud restant devant être éliminé en discrétisant l'équation au noeud Δx par une formule décentrée. Là aussi, comme dans le cas de conditions de DIRICHLET, on introduit une perturbation.

II.1.5. Résultats numériques et discussion.

On présente ci-après une vérification numérique des estimations d'erreurs établies dans les paragraphes précédents. On utilise pour cela les deux types de discrétisation spatiale, et les systèmes différentiels obtenus sont intégrés par un schéma implicite en temps. On étudie, en un point du domaine $\Omega = [0, L]$ et à un temps fixé, l'évolution de la solution pour une suite de pas d'espaces. Les conditions à la surface sont des deux types possibles. On travaille sur trois types de sol, rencontrés couramment dans les publications et couvrant une large gamme de caractéristiques hydrodynamiques (Yolo-light clay ; Sable de Grenoble ; Silty clay loam).

On fait donc l'hypothèse que l'intégration temporelle conserve les caractéristiques intrinsèques de chaque schéma spatial et qu'il en est de même du traitement des non-linéarités par linéarisation au pas de temps précédent.

Yolo-light clay

Le pas de temps choisi est de 60 s, ce qui permet de ne pas avoir de problèmes avec des pas d'espace petits. La gamme de pas d'espace testée est la suivante : $\Delta z = 1/2$ cm, 1, 2, 3, 4, 6 cm. On s'est placé à 12 cm de profondeur et on a simulé chaque cas jusqu'à 12 heures. La figure (1) présente les pressions simulées à $Z = 12$ cm. Deux échelles y sont figurées : à gauche pour les temps 3, 4, 5, 6 heures et à droite pour $t = 7 \dots 12$ heures. Sur la figure (2), se trouve la courbe $\psi_{12}(t)$ ce qui permet de se situer par rapport à l'arrivée et au passage du front d'humectation.

Il est intéressant de remarquer les concavités différentes selon qu'on se place avant ou après le passage du front. On peut noter d'ailleurs que entre 5h et 7h, il existe un point d'inflexion. On peut en déduire, par conséquent, que des pas d'espace élevés conduisent à surestimer, en valeur algébrique, la solution en avant du front d'humectation, et à la sous-estimer une fois que celui-ci est passé. La figure (1) montre bien que les erreurs commises sont bien plus importantes en avant du front que derrière.

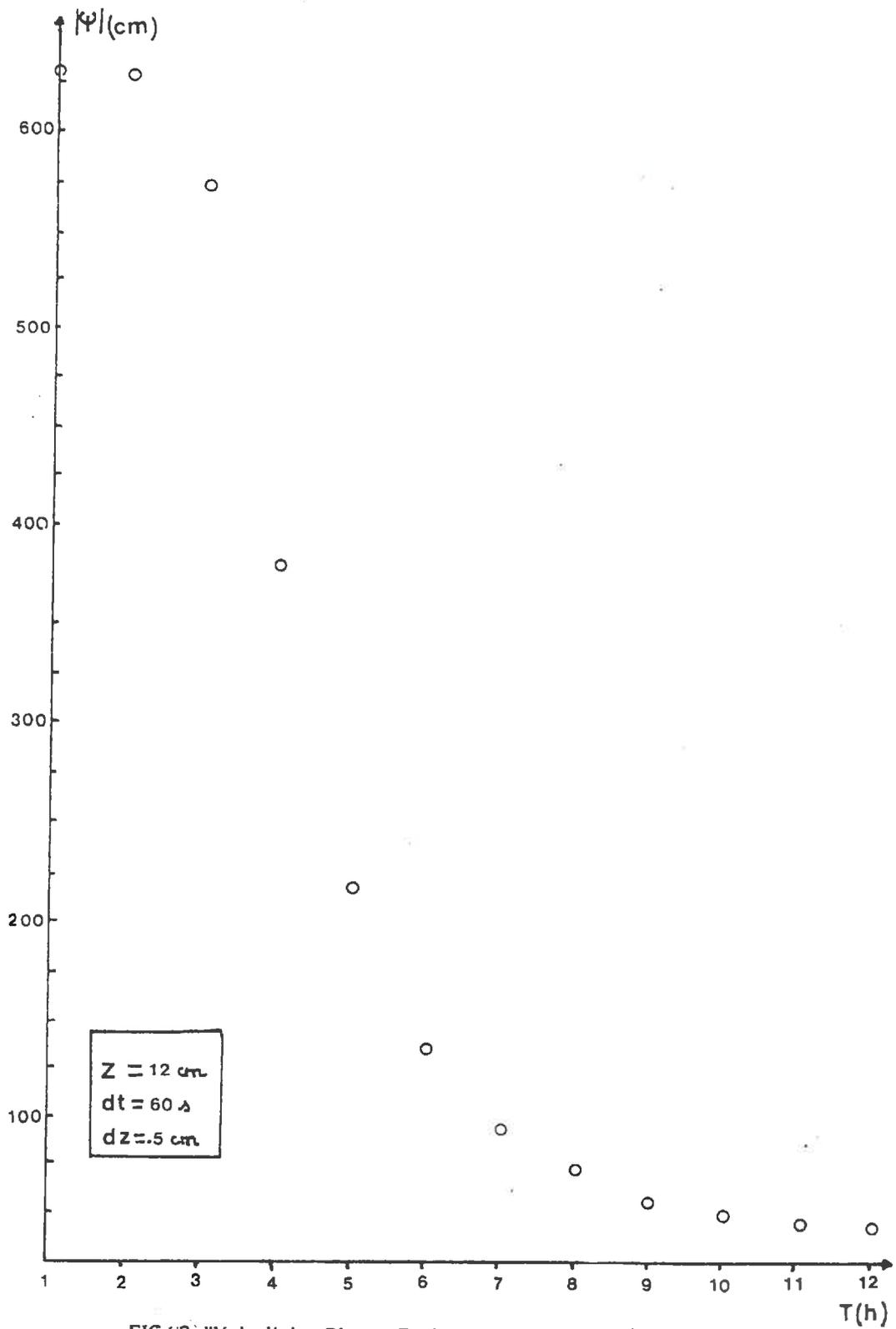


FIG.12- "Yolo-light Clay - Evolution du potentiel à Z = 12 cm

La formule théorique de majoration de l'erreur donne une erreur quadratique en fonction de Δz . On a donc cherché à vérifier la convergence quadratique du potentiel à une profondeur donnée, en fonction de Δz . Pour cela, on a essayé d'ajuster les couples $(\psi, \Delta z)$ simulés aux différents temps sur une loi : $\psi = \alpha \Delta z^2 + \beta$.

Il est bien évident sur la figure (1) que ceci n'est pas possible, dès qu'il existe un point d'inflexion, ce qui ne veut pas dire qu'au voisinage de $\Delta z = 0$ on n'ait pas convergence quadratique, mais qu'on ne peut pas le vérifier avec la gamme de Δz choisis. On trouvera, pour le cas $t = 60$ s et $Z = 12$ cm, les résultats de l'ajustement au tableau (1).

Temps	α	β	σ_{β}	r^2
3.	-4.0053	565.175	4.548	.98
4.	-1.9036	385.104	1.2614	.994
8.	.51955	71.805	.3922	.992
9.	.3897	57.587	.178	.997
10.	.294	48.186	.0967	.998
11.	.227	41.5495	.06042	.999

Tableau 1 : Régression $\psi = \alpha \Delta z^2 + \beta$

On a donc d'assez bons ajustements paraboliques.

Il faut remarquer que les Δz grands sont à la base des erreurs dans la régression, celles-ci semblant ne plus être quadratiques mais linéaires pour des Δz élevés (≥ 6 cm ici). Notons aussi, que les ajustements ainsi faits (6 points) ne "respectent" pas les résultats des simulations au voisinage des petits Δz , en ce sens que les potentiels obtenus à la limite ne sont pas cohérents avec la variation attendue. Il faut descendre jusqu'à 3 points pour pouvoir retrouver un potentiel à la limite (β) cohérent.

La forme quadratique de l'erreur semble être mieux respectée après le passage du front.

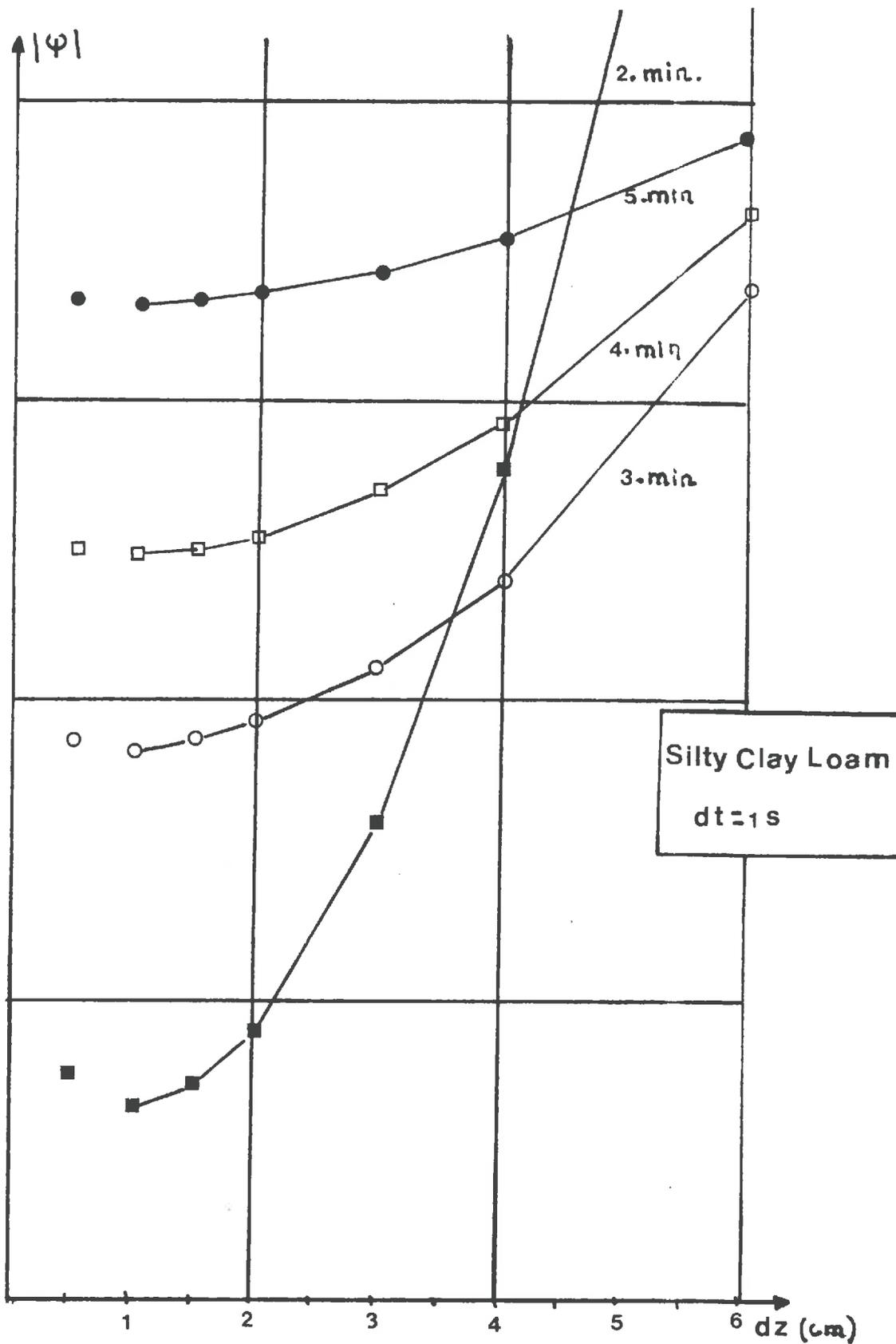


Fig. 3 - "Silty Clay loam"

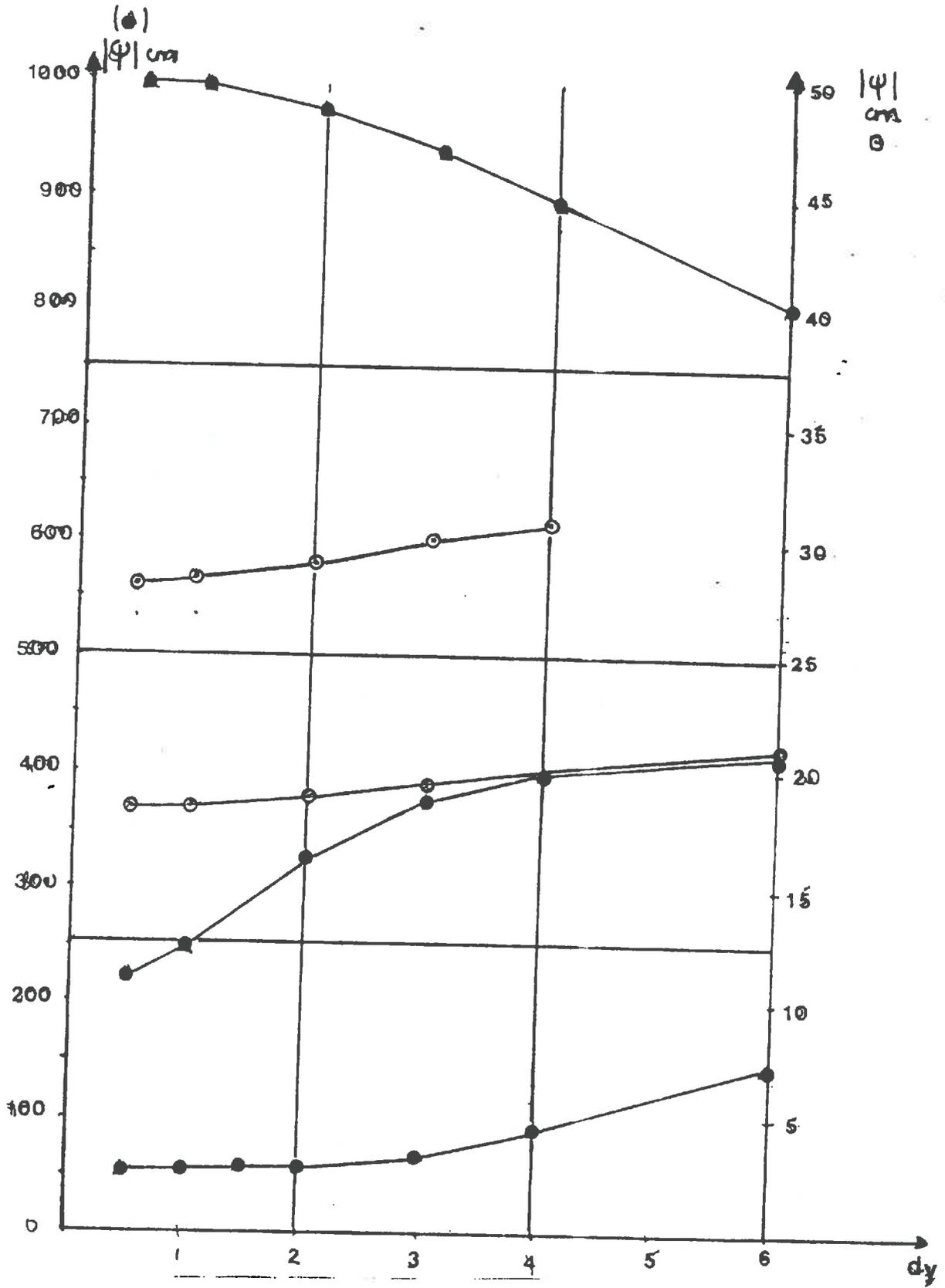


Fig. 4 - "Silty Clay loam - Potential initial 1 bar"

Silty Clay Loam

Hydrodynamiquement, ce sol se différencie du précédent par une conductivité à saturation bien plus élevée, le facteur de proportionnalité étant de l'ordre de 250. On se place là aussi à $Z = 12$ cm. Le pas de temps utilisé est de 1 s.

Les pas d'espace utilisés sont : .5, 1, 1.5, 2, 3, 4, 6 cm.

On simule jusqu'à 8 minutes. Le potentiel de départ est -100 mb.

La figure (3) présente les relations ψ , Δz . L'échelle est variable d'une courbe à l'autre et n'a pas été indiquée. On a une variation quadratique là aussi, avec des valeurs du potentiel qui diminuent à $\Delta z = .5$, ce qui est dû à un pas de temps trop grand pour ce Δz ($dt = 1$ s). La courbe à 1 minute non présente sur la figure, a un point d'inflexion caractéristique comme sur le Yolo lighth clay au passage du front. Avec un potentiel de départ aussi faible, l'influence du pas d'espace est considérablement amortie, et les tableaux de valeurs montrent bien qu'une fois le front passé, l'erreur entre $dz = .5$ et $dz = 6$ cm, ne dépasse pas 0.5 cm. Si on utilise un potentiel de départ plus élevé, 1 bar par exemple, il semble bien qu'on ait une décroissance quadratique de l'erreur, mais dès que le potentiel est proche de zéro, l'utilisation des pas d'espaces grands perturbe peu la solution. L'allure de l'erreur n'est plus régulière. Nous n'avons donc pas essayé d'ajuster une loi $\psi = \alpha dz^2 + \beta$. (fig. 4).

Sable

Dans le sable de Grenoble, les simulations ont été faites avec des pas de temps d'une seconde, et des pas d'espace de .5, 1, 1.5 et 2 cm. Les résultats font apparaître que $dt = 1$ s est trop grand pour un dz de .5 cm. On peut faire les mêmes remarques que pour le Silty Clay loam.

On peut donc résumer en disant que dans le cas d'écoulements rapides, l'erreur au niveau du front peut être importante si on utilise des pas d'espaces grands, mais devient très vite négligeable après son passage.

Dans le cas d'écoulements plus lents, on retrouve bien une allure quadratique de l'erreur avec sur-estimation en avant du front et sous-estimation en arrière.

En ce qui concerne le schéma sur cinq points, il présente les problèmes suivants :

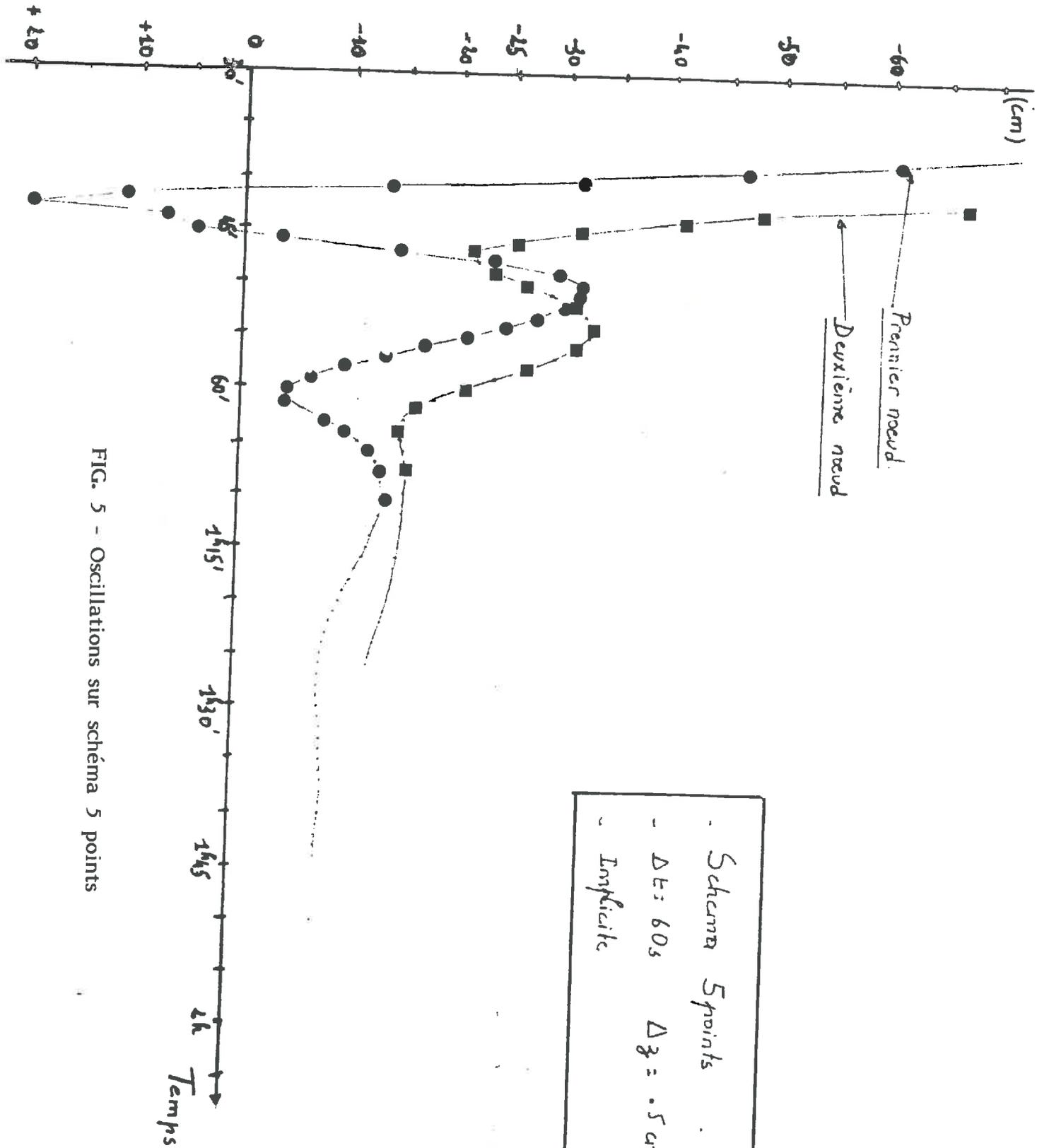


FIG. 5 - Oscillations sur schéma 5 points

. Schéma 5 points . Yolo. Light clay
 - Δt: 60s Δz: .5 cm.
 - Implicit

- Les simulations font apparaître, comme il est montré à la figure (5) des oscillations de la solution, si on regarde pas par pas. Elles peuvent très bien n'être jamais détectées avec des sorties suffisamment espacées.
- Hormis le problème de stabilité, il faut diviser approximativement le pas d'espace par 4 pour obtenir une précision comparable au schéma 3 points.
- Les oscillations se propagent dans le maillage et ont tendance à s'amortir lentement avec le temps.

Il semble donc, par conséquent, que le seul schéma discret utilisable en différences finies est le schéma sur 3 points. Il vérifie l'approximation quadratique de l'erreur en fonction du pas d'espace, et permet une prise en compte aisée des conditions aux limites. En revanche, il nécessite le calcul des conductivités internodales $xk_{i+1/2}$.

II.2. Etude du type de pondération.

II.2.1. Etude théorique.

Nous ne donnerons ici que des résultats succincts, une étude complète étant disponible dans VAUCLIN et al. (1979). On peut noter deux façons de calculer les conductivités internodales. Elles peuvent être obtenues directement en calculant $xk_{i\pm\frac{1}{2}} = f(xk_i, xk_{i\pm 1})$ ou en passant par les potentiels matriciels et on a :

$$xk_{i\pm\frac{1}{2}} = xk(f(h_i, h_{i\pm 1}))$$

La fonction f prend usuellement une des formes suivantes :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x+y) \quad ; \quad f(x, y) = \sqrt{x \cdot y} \quad ; \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$$

où on reconnaît les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques. On rencontre aussi des pondérations du type $xk_{i+1/2} = xk_i$ (MOREL-SEYTOUS, 1972). APPEL (1976) fournit une évaluation optimale des conductivités internodales pour les cas où la conductivité varie linéairement ou presque en fonction de la distance.

Les expressions suivantes sont aussi utilisables :

$$xk_{i\pm\frac{1}{2}} = xk_i \pm \frac{1}{2} \Delta z \left. \frac{dk}{dz} \right|_{i\pm} \quad ; \quad xk_{i+1/2} = 1.5 xk_{i+1} - \frac{1}{2} xk_i$$

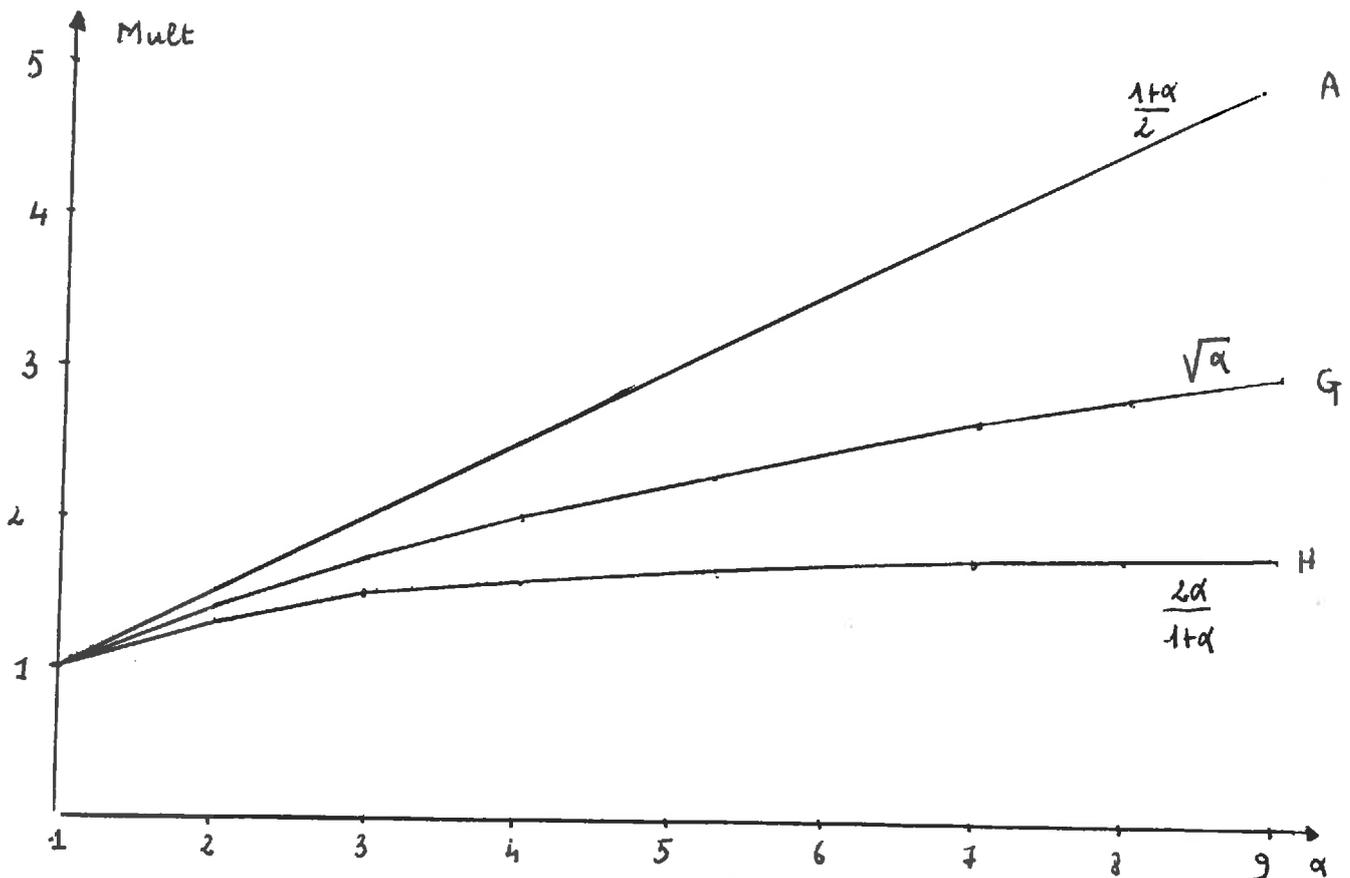
Si on se limite aux trois types de fonctions f exposées, il apparaît bien évidemment que si les deux points x et y sont proches, les fonctions f donnent des résultats très peu différents et égaux à la limite.

Les principales différences vont donc se situer au voisinage des fronts d'humectation et dépendront fortement de la forme de ceux-ci et de l'allure de la non-linéarité de $K(\psi)$.

Considérons deux points voisins dans un maillage, de conductivité x et y . On pose $\alpha = y/x$. On a alors :

$$f_A = x \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \quad f_G = x\sqrt{\alpha} \quad f_H = \frac{2\alpha}{1+\alpha} x.$$

Pour des valeurs de α ne dépassant pas 10 par exemple, on a les courbes suivantes pour le coefficient multiplicatif.



On remarque immédiatement un écart qui croît très vite pour les trois types de pondération. Il sera par exemple pour $\alpha = 9$, de 2 de A à G et de 3 de A à H.

On imagine de suite l'influence du mode de pondération sur la forme des profils et leur vitesse de propagation. Or un rapport de conductivité d'un ordre de 10 est relativement faible et ne se rencontre que dans les zones à faibles gradients ou pour des sols ne présentant pas une courbe $K(\psi)$ fortement non-linéaire. Au voisinage des fronts, et pour un sol tel le Yolo-light Clay ou le Loess MC4, on peut, par contre, avoir des coefficients de l'ordre de 10^3 à 10^4 . Dans ce cas, on obtient pour $\alpha = 10^3$:

$$f_A \rightarrow \frac{1+\alpha}{2} \sim 500$$

$$f_G \rightarrow \sqrt{\alpha} \sim 30$$

$$f_H \rightarrow \frac{2\alpha}{1+\alpha} \sim 2$$

La conductivité internodale peut donc facilement varier de deux puissances de 10, selon le mode retenu.

S'il est impossible de fournir le meilleur mode de calcul, on peut néanmoins établir le classement suivant pour la conductivité à l'interface, avec la relation d'ordre habituelle sur \mathbb{R}

$$A > G > H$$

Si on passe par la formule $xk_{i+1/2} = xk(f(h_i, h_{i+1}))$, alors en faisant l'hypothèse que $K(\psi)$ est monotone croissante, on obtient un classement inverse

$$A < G < H$$

En effet, les potentiels interpolés sont $\frac{1+\alpha}{2} h$, $\sqrt{\alpha} h$, $\frac{2\alpha}{1+\alpha} h$ avec le classement $\frac{1+\alpha}{2} > \sqrt{\alpha} > \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ quel que soit h ; or h étant négatif, on aura :

$\frac{1+\alpha}{2} h < \sqrt{\alpha} h < \frac{2\alpha}{1+\alpha} h$, ordre qui est respecté quand on passe par $K(\psi)$ puisqu'elle est monotone croissante

$$\text{d'où } K_A < K_G < K_H$$

A la vue de ces remarques, il semble donc que l'on doive faire très attention à l'influence du mode de pondération, lorsqu'on utilise une courbe $K(\psi)$ fortement non-linéaire. Il semble toutefois préférable de pondérer en

utilisant la méthode "directe", tant pour des raisons de simplicité, que pour éviter de réintroduire, dans la fonction $K(\psi)$, un argument dont on ne maîtrise pas la valeur. En effet, prenons l'exemple suivant : Supposons que le rapport des potentiels de deux noeuds voisins soit de l'ordre de 100 ($h_1 = 10$ cm, $h_2 = 1000$ cm). Cette hypothèse n'est pas du tout irréaliste, et on verra par la suite, que l'on peut avoir des gradients de potentiel bien plus grands, sur le sol où nous avons mené nos expériences. On a alors les potentiels internodaux qui valent respectivement :

$$\begin{aligned} h_A &= 50 \times h_1 \\ h_G &= 10 \times h_1 \\ h_H &= 2 \times h_1 \end{aligned}$$

Si on se place sur le sol Poirson (cf. annexe) avec les hypothèses précédentes, on aura : $h_1 = 10$ cm $K_1 = .15 \text{ e}^{-5} \text{ m.s}^{-1}$

$$h_2 = 1000 \text{ cm} \quad K_2 = .12 \text{ e}^{-9} \text{ m.s}^{-1}$$

Les conductivités internodales, calculées par les deux méthodes, sont alors :

	K_A	K_G	K_H
Dir	$.76 \text{ e}^{-6}$	$.13 \text{ e}^{-7}$	$.24 \text{ e}^{-9}$
Indi	$.55 \text{ e}^{-9}$	$.15 \text{ e}^{-7}$	$.39 \text{ e}^{-6}$

Dans leur étude VAUCLIN et al. (1979) soulignent le fait que la pondération arithmétique revient à surestimer la conductivité, tandis que la pondération harmonique, la sous-estime, le mode géométrique fournissant toujours un intermédiaire. Toutefois, on ne sait pas si l'erreur introduite par la pondération géométrique revient à surestimer ou à sous-estimer la conductivité. Ces études de troncatures sont basées sur une différence entre la conductivité internodale calculée par une des moyennes et celle dite réelle qui provient d'un développement de TAYLOR. Or, on a vu que le schéma du bilan local peut être obtenu à partir de l'identité intégrale et que dans celle-ci, on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx/K(\psi) = \Delta x / K_i^* \quad x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$$

Or, l'identité intégrale est exacte et l'intégrale est approchée par $\frac{\Delta z}{K_{i+1/2}}$

En fait, on commet donc ici une erreur dont on ne connaît pas le sens. Par conséquent, la portée des études d'erreurs sur $K_{i+1/2}$ est relativisée.

Le problème de la pondération n'est pas un inconvénient propre au seul schéma trois points. La discrétisation par une méthode d'éléments finis introduit elle aussi une pondération sur chaque élément et qui plus est, automatiquement arithmétique.

Nous allons maintenant étudier l'influence du mode de pondérations sur la solution lorsqu'on a une condition de NEUMAN.

II.2.2. Influence de la pondération sur la solution avec une condition de flux

L'irrigation localisée se caractérise par un apport d'eau ponctuel qui dans des conditions réelles conduit à des flux imposés à la surface très importants. Elle se caractérise lorsqu'on travaille à de forts débits par la formation d'une flaque qui conditionnera l'extension future de la zone saturée. Le traitement des conditions de flux peut donc constituer un point faible dans la prédiction de l'extension des zones saturées et aussi dans le bouclage du bilan de masse.

Dans une méthode de différences finies, la discrétisation de l'équation :

$Q = -K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right)$ à la surface conduit avec l'équation de RICHARDS à un système différentiel de la forme

$$[C] \left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\} = -[K] \{ \psi \} + \{ S \}$$

où $\{ S \}$ est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la première qui vaut

$$\frac{2Q}{\Delta z} \frac{K_{1/2}}{K_1}$$

En utilisant un schéma implicite, on obtient au second membre un terme de "contrainte" qui vaut

$$H_2 + \frac{2Q}{\Delta z} \frac{K_{1/2}}{K_1} \frac{dt}{c_1} \quad H_1 \leq 0$$

Limitons nous aux deux pondérations géométriques et arithmétiques.

On a :

$$K_{1/2} = K_1^2 / K_{3/2} \quad \text{et} \quad K_{1/2} = 2K_1 - K_{3/2}$$

Le rapport $K_{1/2} / K_1$ vaut selon le cas :

Arithmétique $\frac{3}{2} - \frac{K_2}{2K_1}$

Géométrique $\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$

Dans un processus d'infiltration, K_1 étant toujours supérieur ou égal à K_2 , on s'aperçoit que la pondération arithmétique conduit à l'encadrement de $K_{1/2}/K_1$ suivant :

$$1 \leq K_{1/2}/K_1 \leq 3/2$$

A l'inverse, la pondération géométrique ne fait pas apparaître de telles limitations. Bien plus, le terme $\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$, peut avoir des valeurs élevées dans le cas où le gradient est très marqué ou si on utilise une courbe de conductivité fortement non linéaire. Par exemple, dans le cas du sol Poirson (cf. annexe), pour un processus d'infiltration sous flux $Q \leq K_s$, et ayant un potentiel de départ de 500 mb, ce qui correspond à $K \approx 4 \cdot 10^{-12}$ m/s, on obtient très vite, au bout de quelques pas d'intégration une conductivité de surface à 10^{-6} m/s alors que la conductivité au noeud inférieur n'a pas variée. C'est dire qu'à ce moment là, on a un terme $\sqrt{K_1/K_2}$ qui vaut environ $\sqrt{10^6}$, soit 10^3 . A l'inverse, $K_{1/2}/K_1$ vaudrait $\frac{3}{2}$ dans le cas arithmétique. Le terme de contrainte est donc complètement différent selon le mode de pondération. Il s'ensuit des solutions très différentes selon les choix. Sur ce sol, l'utilisation du mode géométrique, en condition de flux, conduit à un terme "contrainte" si élevé que l'on obtient la saturation avec des flux $Q < K_s$, même en utilisant des pas de temps très petits ($dt \leq 1$ s) et des pas d'espace très grands : $\Delta z = 2$ cm, 4 cm, 6 cm.

Nous avons essayé différentes stratégies, dont nous résumerons les résultats lors de la présentation des caractéristiques hydrodynamiques. La conclusion qui s'impose est que dans le cas de fortes non-linéarités, il faut faire très attention au temps d'apparition du flaquage, en fonction du potentiel initial et du mode de pondération.

II.2.3. Conclusions

Nous avons étudié la sensibilité de la solution de l'équation de RICHARDS, au type de schéma discret, au mode de pondération, à la façon de calculer le terme de "contrainte" avec des conditions de NEUMAN.

Les ordres de convergences estimés de façon théorique ont été vérifiés par le calcul sur différents types de sol.

L'influence du mode de pondération sur le calcul de la solution à la surface a été mis en évidence, et par conséquent son rôle sur une erreur possible dans le calcul de l'extension d'une zone saturée pour un apport d'eau ponctuel.

L'intégration des systèmes différentiels obtenus à partir des différents schémas a été systématiquement faite en employant une méthode totalement implicite, du fait de sa stabilité inconditionnelle bien connue. On a donc fait

l'hypothèse d'une relative indépendance des résultats obtenus pour chaque schéma, en fonction de la méthode d'intégration. Il est évident que pour un schéma spatial donné, caractérisé par la matrice du système différentiel obtenu, il existe un ou plusieurs modes d'intégration optimaux en un certain sens. Toutefois, nous avons préféré séparer les deux discrétisations (spatiale et temporelle), quitte à bien mettre en évidence par la suite l'influence du traitement spatial sur l'"intégrabilité" du système obtenu.

III. INTEGRATION

III.1. Introduction

Les systèmes d'équations différentielles obtenus par discrétisation, quelle qu'elle soit, de l'équation de RICHARDS, sont du premier ordre, non-linéaires, et leur forme générale est :

$$(12) \quad [C] \left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\} = -[K] \{ \psi \} + \{ S \} \quad \text{où :}$$

: [C] et [K] désignent des matrices dont les termes sont des fonctions de ψ et [S] est un vecteur dont les éléments sont aussi des fonctions de ψ

On peut dégager deux problèmes principaux dans la résolution d'un tel système. D'une part, l'intégration proprement dite, c'est-à-dire choix du pas de temps et traitement de $\left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\}$; d'autre part la prise en compte des non-linéarités.

L'intégration pose deux difficultés. Contrôle de l'erreur de troncature dans la discrétisation de $\left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\}$, comme dans le cas spatial pour la discrétisation de $\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ et deuxièmement stabilité du schéma retenu. C'est ce deuxième point qui nous intéressera plus particulièrement en relation avec les propriétés de l'opérateur spatial direct.

On s'intéressera aussi à la diffusion numérique qui est introduite par les schémas implicites appelés aussi décentrés arrière ou "backward" et à l'erreur de troncature, comme pour l'opérateur spatial discrétisé.

III.2. Rappels sur l'intégration d'un système différentiel

On requiert d'un schéma d'intégration temporel d'être à la fois un schéma "approximant" et "stable". La notion de schéma approximant a déjà été rencontrée lors de la discrétisation spatiale et l'opérateur temporel discret \hat{T} sera dit approximant si on a :

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \| T(u) - \hat{T}(\tilde{u}) \|_{\infty} = 0$, en respectant le formalisme déjà introduit. La notion de stabilité est plus complexe, et elle est intuitivement reliée à une idée de comportement régulier de l'opérateur discret et de non amplification d'erreurs.

III.2.1. Définition de la (ou des) stabilité(s)

On rencontre de nombreuses définitions de la stabilité selon les auteurs, mais un schéma vérifiant l'une ou l'autre sera assuré d'avoir une erreur $\| u(t) - u(n\Delta t) \|_{\infty}$ telle que :

$$\| u(t) - u(n\Delta t) \|_{\infty} < K \quad \forall n \text{ et}$$

$$\exists n_0 / \forall n > n_0, \forall m > n_0 \text{ et } m < n \text{ alors } \| u(t) - u(n\Delta t) \|_{\infty} \leq \| u(t) - u(m\Delta t) \|_{\infty}$$

1ère Définition : (GASTINEL, 1978 ; GODOUNOV, 1973) Soit $R_{h,\tau}$ l'opérateur discret résultant des discrétisations spatiales et temporelles. On note $r_{i,h}$ les différents opérateurs aux limites. On dispose donc d'un système d'équations noté :

$$R_{h,\tau}(u_h) = f_{h,\tau} \text{ sur } \Omega$$

$$r_{i,h}(u_h) = p_{i,h} \text{ sur } \partial\Omega_i$$

Faisons l'hypothèse que $f_{h,\tau}$ et $p_{i,h}$ fixés, on a une solution unique u_h et que celle-ci dépend continuellement de $f_{h,\tau}$ et $p_{i,h}$ c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, h, \tau) > 0 / \text{ si } \begin{cases} \| f_{h,\tau} - \tilde{f}_{h,\tau} \|_{F_h} < \delta(\varepsilon, h, \tau) \\ \text{et} \\ \| p_{i,h} - \tilde{p}_{i,h} \|_{\Phi_{i,h}} < \delta(\varepsilon, h, \tau) \end{cases}$$

$$\text{alors } \| u_h - \tilde{u}_h \|_{U_h} \leq \varepsilon$$

La stabilité est dite "inconditionnelle" si cette continuité est uniforme par rapport à h et τ . ie si $\exists \tau_0$ et h_0 tels que $\forall \tau < \tau_0$ et $\forall h < h_0$ δ est indépendant de τ et h .

On montre que dans le cas où on a à faire à un système linéaire qui va donc s'écrire avant résolution : $[A_h] \{ u_i \} = \{ f_h \}$

cette condition de stabilité est équivalente à

a) A_h inversible

b) $[A_h]^{-1}$ continu (la continuité est évidente pour un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie).

On a le théorème : Stabilité $\Leftrightarrow [A_h]^{-1}$ existe et est borné quand $h \rightarrow 0$ (schéma linéaire).

On déduit de ces propriétés une condition nécessaire et suffisante de stabilité, plus pratique à mettre en oeuvre.

Etant donné la suite de problèmes

$$\begin{cases} R_{h,\tau}(u_{h,\tau}) = f_{h,\tau} \\ r_{i,h}(u_h) = p_{i,h} \end{cases}$$

une C.N.S. pour que le problème soit stable est que

$$\exists N \text{ et } N_i \in \mathbb{R} / \|u_{h,\tau}\|_{U_{h,\tau}} \leq N \|f_{h,\tau}\|_{F_{h,\tau}} + \sum_{i=1}^n N_i \|p_{i,h}\|_{\bar{E}_{i,h}}$$

Deuxième Définition : Stabilité au sens de Von NEUMAN (RICHTMEYER, MORTON, 1967 ; MARCHOUK, 1980)

Reprenons le problème différentiel discrétisé :

$$\left\{ \frac{du}{dt} \right\} = -[A] \{u\} + \{f\}$$

Le schéma explicite en temps de pas τ s'écrit :

$$\{u\}^{j+1} = ([I] - \tau[A]) \{u\}^j + \tau \{f\}$$

avec la condition initiale

$$\{u\}^0 = \{g\}$$

Si on suppose que $[A]$ admet une base de fonctions propres $\{p_k\}_{k=1,n}$ avec les valeurs propres λ_k et si on décompose u, f, g , sur cette base, en séries de Fourier, on obtient les relations suivantes pour les coefficients de Fourier de u :

$$u_k^{j+1} = (1 - \tau \lambda_k) u_k^j + \tau f_k^j$$

En résolvant par éliminations successives et étant donné que $u_k^0 = g_k$, on obtient des relations du type :

$$u_k^j = r_k^j g_k + \tau \sum_{i=1}^j r_k^{j-i} f_k^{i-1} \quad \text{ou} \quad r_k = 1 - \tau \lambda_k$$

τ étant positif, on obtient la majoration suivante pour chaque coefficient de Fourier

$$|u_k^j| \leq |r_k^j| |g_k| + \frac{1 - |r_k|^j}{1 + |r_k|} \tau \max_j |f_k^j|$$

Le critère de stabilité de Von NEUMAN s'énonce alors :

si $\forall k \in [1, n], \exists C_{1,k} \text{ et } C_{2,k}$ uniformément bornées telles que

$$|u_k^j| \leq C_{1,k} |g_k| + C_{2,k} |f_k^j| \quad \text{alors le schéma aux différences est stable. Or,}$$

pour que cette relation soit vérifiée, il faut que $|r_n| < 1$. Notons que si on pose ρ le rayon spatial de $[A]$ alors

$$\text{si } \tau < 2/\rho \quad \text{on a } |r_n| < 1$$

Si on passe à un schéma implicite, on a la majoration

$$|u_k^j| \leq |r_k^j| |g_k| + \frac{1 - |r_k|^j}{1 - |r_k|} \tau |r_k| \max_j |f_k^j|$$

$$\text{où : } r_n = \frac{1}{1 + \tau \lambda_k}$$

Il est alors évident que si $\lambda_k > 0$ alors $|r_n| < 1$ et que le schéma implicite est donc inconditionnellement stable.

Il faut remarquer que cette notion de stabilité est reliée au rayon spectral de l'opérateur du problème et qu'elle a un caractère local. Elle est donc moins "forte" que la première. Elle ne peut être appliquée en toute rigueur que si les coefficients de l'opérateur sont constants. Si les coefficients sont variables, on peut s'attendre à avoir un schéma stable si la condition est vérifiée localement en chaque point du champ (MITCHELL, GRIFFITH).

Troisième Définition : Si on écrit le système linéaire résultant de la discrétisation sous la forme : $[A_n] \{u^{n+1}\} = [B_n] \{u^n\}$

$$\text{alors } \{u^{n+1}\} = [A_n]^{-1} [B_n] \{u^n\} \quad \text{ie en posant } [C_n] = [A_n]^{-1} [B_n]$$

$\{u^{n+1}\} = [C_n] \{u^n\}$ Il est alors évident que si, on note $\{Z_n\}$ le vecteur erreur au pas de temps n , on a la relation : $\{Z^{n+1}\} = [C_n] \{Z^n\}$

On obtient alors une majoration de l'erreur au pas τ :

$$\|Z^n\| \leq \left\| \prod_{i=1}^n C_i \right\| \cdot \|Z^0\|$$

L'opérateur aux différences sera dit stable si, $\left\| \prod_{i=1}^n C_i \right\| < K$

Etant donné la relation $\|C\| > P(C)$, on a la condition nécessaire de stabilité $P(C) \leq 1$ (Si $P(C) < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n\| = 0$)

Une condition suffisante étant $\|C\| \leq 1$

Il existe donc plusieurs définitions de la stabilité d'un schéma discret, certaines étant plus "fortes" que d'autres. En fait, le problème qui se pose est de choisir une méthode d'intégration qui appliquée à un problème donné soit stable en un sens désiré.

La discrétisation spatiale, qu'elle soit faite par une méthode d'éléments finis, de différences finies, ou toutes autres méthodes, conduit à un système d'équations différentielles ordinaires, dont les propriétés sont fortement dépendantes de celles de l'opérateur différentiel et des caractéristiques de la discrétisation. On relie en général l'"intégrabilité" aux caractéristiques du spectre de valeurs propres de l'opérateur différentiel ou à celui de sa Jacobienne dans le cas d'un opérateur non-linéaire. En se basant sur l'équation de diffusion-convection linéaire, on va introduire la notion de "stiffness" d'un opérateur et deux nouvelles définitions de la stabilité.

III.2.2. "Stiffness"

La discrétisation de l'équation de Richards conduit au système différentiel non linéaire :

$$\left\{ \frac{dH}{dt} \right\} = - [K(H)] \{H\} + \{S(H)\}$$

La matrice $[K]$ est fonction de H (A ne pas confondre avec la conductivité). Si on se place à un temps t et qu'on linéarise $[K]$ et $\{S\}$ à ce temps là, on obtient le système linéaire :

$$\left\{ \frac{dH}{dt} \right\} = - [K] \{H\} + \{S\}$$

On fait l'hypothèse que $[K]$ est valable sur un petit intervalle de temps.
On a alors une solution explicite du temps $[t + \Delta t]$, sous la forme :

$$(11) \quad H(t + dt) = \exp(-\Delta t \cdot [K]) (H(t) - [K]^{-1} \cdot s) + [K]^{-1} \cdot s$$

Si on note λ_i, x_i les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $[K]$, on a en diagonalisant $[K]$ dans sa base de vecteurs propres (on la note Λ)

$$U(t + \Delta t) = \exp(-\Delta t \Lambda) (U(t) - w) + w$$

$$\text{où } U(t) = [X]^{-1} H(t) \quad \text{et} \quad w = [X]^{-1} [B]^{-1} \cdot s \quad (X_i \text{ matrice des vecteurs propres})$$

Remarquons qu'on a alors un système découplé.

Il est alors évident que l'exponentielle aura un rôle prépondérant dans la solution, en fonction des valeurs $\{\lambda_i\}$ du spectre.

On définit alors la notion de Stiffness de la façon suivante :

Définition : Soit $S_p = \{ \lambda_i \in \mathbb{C} / [A]x_i = \lambda_i x_i \}$ le spectre de $[A]$

Le système différentiel $\left\{ \frac{dH}{dt} \right\} = -[A] \cdot H + \{S\}$ est dit "stiff" si :

$$\begin{aligned} & - \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i=1, 2 \quad \text{et si} \\ & \max |\operatorname{Re}(\lambda_i)| \gg \min |\operatorname{Re}(\lambda_i)| \end{aligned}$$

- Remarques
- Les valeurs propres du spectre de plus grande valeur absolue induisent des changements brutaux dans la solution, à travers $\exp(-\Delta t \cdot \Lambda)$.
 - Les systèmes "stiff" sont aussi quelque fois appelés systèmes à large constante de Lipchitz.

III.3.3. Approximant de Padès - A. Stabilité et L. Stabilité

L'exponentielle : $\exp(-\Delta t \cdot \Lambda)$ n'est bien sûr pas calculable par le développement en série habituel, ne serait-ce que pour des raisons de convergence de la série, notamment quand $|P(\Lambda)|$ est grand.

On utilise alors des approximants algébriques de l'exponentielle (e^{-z}) parmi ceux-ci les approximants de Padès qui vont nous servir à définir les notions de A-stabilité et L-stabilité d'un schéma d'intégration. Les premiers

approximants de Padé de e^{-z} sont les fractions rationnelles :

$$r_{m,n}(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad \text{suivantes :}$$

$$r_{0,0} = 1 \quad r_{0,1} = \frac{1}{1+z} \quad r_{1,0} = 1-z \quad r_{1,1} = \frac{1-z/2}{1+z/2}$$

Les approximants d'ordre supérieur n'étant pas très utilisables. Si on reprend l'équation (11) en remplaçant $\exp(-z)$ par une relation du type

$$\exp(-z) \simeq r_{m,n}(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \quad \text{on obtient :}$$

$$H(t+\Delta t) = q_m(-\Delta t [K])^{-1} P_n(-\Delta t [K]) [H(t) - [K]^{-1} \Delta] + [K]^{-1} \Delta$$

Si $P_n = 1$ et $Q_m = 1+z$ alors :

$$H(t+\Delta t) = [I - \Delta t [K]]^{-1} [H(t) - [K]^{-1} \Delta] + [K]^{-1} \Delta$$

$$\text{c'est-à-dire : } [I - \Delta t [K]] H(t+\Delta t) = H(t) - [K]^{-1} \Delta + [K]^{-1} \Delta - \Delta t \Delta$$

soit

$$[I - \Delta t [K]] H(t+\Delta t) = H(t) - \Delta t \Delta$$

On reconnaît dans ce schéma l'habituelle méthode implicite.

Si $P_n(z) = 1-z$ et $Q_m = 1$, on a :

$$H(t+\Delta t) = (I + \Delta t [K]) [H(t) - [K]^{-1} \Delta] + [K]^{-1} \Delta$$

$$H(t+\Delta t) = (I + \Delta t [K]) H(t) - [K]^{-1} \Delta + [K]^{-1} \Delta - \Delta t \Delta$$

$$H(t+\Delta t) = [I + \Delta t \cdot [K]] H(t) - \Delta t \Delta$$

C'est là le schéma explicite.

Enfin si : $P_n(z) = 1-z/2$ et $Q_m(z) = 1+z/2$ on aura :

$$H(t+\Delta t) = \left(I - \frac{\Delta t}{2} [K] \right)^{-1} \left(I + \frac{\Delta t}{2} [K] \right) (H(t) - [K]^{-1} \Delta) + [K]^{-1} \Delta$$

d'où on tire :

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} [K] \right)^{-1} H(t + \Delta t) = \left(I + \frac{\Delta t}{2} [K] \right) H(t) - \Delta t \cdot J$$

qui est le schéma de Cranck-Nicholson.

On peut alors requérir d'un schéma d'intégration, construit sur les approximants de Padès, d'avoir un "comportement" proche de celui de e^{-Z} . La première propriété que l'on demande est que :

$$|r_{m,n}(z)| \leq 1 \quad \forall z \geq 0$$

Une méthode correspondant à un approximant ayant cette propriété est dite A_0 -stable.

La deuxième propriété est qu'à l'image de e^{-Z} , on ait :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r_{m,n}(z) = 0$$

Si on reprend l'équation (11) ceci revient à supposer que les termes $\exp(-\lambda \Delta t)$ avec λ grand et négatif, sont amortis. Une telle méthode sera dite L_0 -Stable.

On peut remarquer en particulier que le schéma discret implicite est L_0 -Stable alors que C.N. est seulement A_0 -stable.

Si on définit la stabilité d'un schéma en demandant qu'il n'amplifie pas une perturbation dans les données initiales (cf. déf. 1), alors une méthode A_0 -stable vérifie cette propriété. En effet, si on note e_0 l'écart entre deux situations initiales, il est évident que l'écart E , fonction du temps, vérifie :

$$E_i(t + \Delta t) = r_{m,n}(-\Delta t, \lambda_i) \cdot E_i(t) \quad \text{composante par composante.}$$

La condition de A_0 -stabilité, $|r_{m,n}(z)| < 1$ assure alors que l'écart initial n'est pas amplifié.

En fait, si l'opérateur différentiel a une partie hyperbolique importante par rapport à la partie parabolique, on peut avoir des valeurs propres complexes pour la matrice $[K]$. C'est le cas de l'équation de diffusion-convection si le coefficient du terme convectif est prépondérant. On peut alors définir deux nouveaux types de stabilité, généralisant les définitions précédentes de façon naturelle.

Si $|r_{m,n}(z)| < 1 \quad \forall z / |Arg(z)| < \alpha$ où $\alpha > \max_i |Arg(\lambda_i)|$

alors la méthode est dite $A(\alpha)$ -stable, et si

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors on a la A-stabilité.

Si en plus $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |r_{m,n}(z)| = 0$ la méthode est dite L-stable.

Remarquons que les méthodes A(0)-stable et L(0)-stable sont les méthodes A_0 - et L_0 - stables précédemment définies.

Donnons enfin un théorème dû à Lambert (SMITH et al., 1977)

Théorème : Les approximants de Padès donnent des méthodes qui sont :

- i) A-stable si $m = n$
- ii) A_0 -stable si $m \geq n$
- iii) L_0 -stable si $m > n$
- iv) L-stable si $m = n+1$ ou $m = n+2$

Les méthodes couramment employées dans la résolution des équations de transfert en milieux poreux, sont donc A-stable (C.N) et L-stable (schéma implicite). A la lumière de l'étude précédente et des propriétés des approximants de Padès, on peut expliquer certains comportements constatés par différents auteurs. Il est assez souvent fait référence dans la littérature traitant des équations de type diffusion-convection, aux oscillations rencontrées lors de l'utilisation de schéma de C.N. (BETTENCOURT et al., 1980 ; WARMING et BEAM, 1978 ; ZLATEV et THOMSEN, 1979 ; WOOD et LEWIS, 1975 ; VAUCLIN et al., 1979). Ceci s'explique facilement si l'on se rappelle que la méthode de C.N est seulement A-stable, et aura donc du mal à amortir des oscillations, engendrées par les valeurs propres de module élevé.

Il est en général très difficile, sauf cas trivial, d'accéder au spectre de valeurs propres de l'opérateur spatial discret. On proposera, plus loin, une utilisation du théorème de Gershgorin, pour obtenir un encadrement du spectre et en déduire les propriétés du système à intégrer (caractère diffusif-convectif, stiffness,...)

III.2.4. Quelques méthodes A-stables et L-stables.

Nous allons nous restreindre aux méthodes dites "linéaires, multipas", habituellement notés LMM (Linear Multistep Methods). Celles-ci peuvent se

mettre sous la forme générale suivante pour une équation du type

$$y' = f(y, t)$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \frac{dy}{dt}^{n+j} \quad \text{avec } y^{n+j} \text{ connu pour } j=1, k-1$$

Cette méthode est dite d'ordre k .

Il est prouvé (Dahlquist) que l'ordre d'une LMM, A-stable ne peut excéder 2 et qu'elle doit être implicite. Parmi les méthodes (LMM) à un pas, on trouve les méthodes dites A(θ)-stable. Elles sont de la forme :

$$y^{n+1} - y^n = \Delta t \left((1-\theta) \frac{dy^{n+1}}{dt} + \theta \frac{dy^n}{dt} \right)$$

Elles sont inconditionnellement stables si $\theta \geq \frac{1}{2}$. On rencontre différentes valeurs de θ selon les auteurs. $\theta = \frac{1}{2}$ qui correspond au schéma de C.N. Les utilisateurs d'éléments finis (ZINCKIEWICZ, 1979) utilise $\theta = \frac{2}{3}$. En effet, le traitement par éléments finis linéaires (fonctions chapeaux) du terme $\frac{dy}{dt}$ conduit à un schéma A(θ)-stable avec $\theta = \frac{2}{3}$ (cf. Annexe Elements finis).

Il existe d'autres valeurs de θ , telles que $\theta = .878$ (BETTENCOURT, 1980), celles-ci étant obtenues pour des problèmes particuliers et optimales en un certain sens. Parmi les méthodes linéaires à un pas, c'est celle de C.N. qui a la plus petite erreur de troncature.

Si on fait $\theta = 0$ dans l'équation précédente, on a le schéma implicite pur. Un théorème (ZLATEV et THOMSEN, 1979) assure que : une méthode A-stable et "backward" est alors L-stable. C'est le cas de la méthode ci-dessus.

L'ordre d'une méthode linéaire multipas, A-stable ne pouvant excéder 2, (WARMING et BEAM, 1978), la formulation la plus générale pour une telle méthode est :

$$(1+\xi)y^{n+1} - (1+\zeta\xi)y^{n+1} + \xi y^n = \Delta t \left[\theta \frac{dy^{n+2}}{dt} + (-1-\theta+\rho) \frac{dy^{n+1}}{dt} - \rho \frac{dy^n}{dt} \right]$$

Pour avoir une méthode qui soit d'ordre deux, il faut que $\rho = \xi = \theta + \frac{1}{2}$. Etant donné le théorème cité précédemment, si on choisit $\rho = \theta$, $\xi = \frac{1}{2}$, $\theta = 1$ on vérifie l'égalité $\rho = \xi = \theta + \frac{1}{2}$ et de plus, on a une méthode "backward", donc L-stable.

$$\text{Par conséquent le schéma } \frac{3}{2} y^{n+2} - 2 y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = \Delta t \frac{dy^{n+2}}{dt}$$

est à la fois d'ordre 2 et L-stable. Il est donc très intéressant par comparaison à un schéma de type C.N qui est seulement A-stable. Cette formule est rencontrée chez de nombreux auteurs sous des formes différentes. RICHTMYER

et MORTON (1967) pour une équation parabolique (chaleur), WOOD et LEWIS (1975) la présentent comme un moyen d'amortir des oscillations dans un problème de chaleur, CERMAK et ZLAMAL, par des équations du type

$$C(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k(u) \operatorname{grad} u) + q(u, x, t)$$

qui s'apparente à l'équation de Richards.

On la rencontre aussi chez WARMING et BEAM (1978).

Elle nécessite l'utilisation d'un schéma à un pas pour générer la valeur de départ nécessaire avec les conditions initiales. Cette formule peut être très intéressante dans les problèmes d'infiltration pour récupérer à la fois l'approximation quadratique et une bonne stabilité. Si on l'applique à l'équation (12), on obtient le système linéaire :

$$\left(\frac{3}{2} [I] + \Delta t [C]_{n+2}^{-1} [K]_{n+2} \right) \{u\}^{n+2} = 2 \{u\}^{n+1} - \frac{1}{2} \{u\}^n + [C]_{n+2}^{-1} \{S\}$$

Rappelons pour comparaison qu'un schéma à un pas implicite s'écrit :

$$\left([I] + \Delta t [C]_{n+2}^{-1} [K]_{n+2} \right) \{u\}^{n+2} = \{u\}^{n+1} + [C]_{n+2}^{-1} \{S\}$$

On voit donc que du point de vue du calcul le schéma à deux pas n'est guère plus compliqué et ne nécessite en fait que le stockage sur deux pas de temps. La modification de la matrice est quant à elle très simple.

Comme on l'a vu, une LMM, L(0)-stable est une méthode A(0)-stable qui est backward. On distingue essentiellement parmi celles-ci le schéma implicite habituel, la méthode présentée ci-avant et la méthode de Gear à ordre variable dont l'expression générale est :

$$y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} = \beta \Delta t \cdot \frac{dy}{dt} (n+k)$$

Celle-ci est L(α)-stable avec α dépendant de l'ordre de la méthode.

III.3. Traitement des non-linéarités

Le système d'équations différentielles résultant de la discrétisation de l'équation de Richards est non-linéaire. En prenant une discrétisation par différences finies, en dimension 1, on a par exemple le système à n inconnues :

$$[C(\psi)] \left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\} = - [K(\psi)] \{ \psi \} + \{ S(\psi) \}$$

ou encore
$$\left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\} = - [C(\psi)]^{-1} [K(\psi)] \cdot \psi + [C(\psi)]^{-1} \{ S(\psi) \}$$

Si on note plus brièvement :

$$\left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\} = - [A(\psi)] \psi + \{ S(\psi) \}$$

on a la matrice $A(\psi)$ qui est tridiagonale avec des termes

$$\frac{K(\psi)_{i-1/2}}{C(\psi)_i} \frac{1}{\Delta z^2} \quad i = 2, n \quad \text{pour la sous-diagonale}$$

$$\frac{K(\psi)_{i+1/2}}{C(\psi)_i} \frac{1}{\Delta z^2} \quad i = 1, n-1 \quad \text{pour la sur-diagonale}$$

et
$$\frac{K(\psi)_{i+1/2} + K(\psi)_{i-1/2}}{C(\psi)_i \cdot \Delta z^2} + 1 \quad i = 1, n \quad \text{pour la diagonale}$$

On a $S_i = 0 \quad \forall i \neq 1$ et $S_1 = -2 \cdot \left(1 - \frac{Q}{K_1(\psi)} \right) \cdot K(\psi)_{1/2} / \Delta z$

Le système d'équations résultant de la mise en oeuvre d'une formule d'intégration peut être mis sous la forme :

$$[M(\psi)_{j+1}] \{ \psi \}_{j+1} = \{ S(\psi) \}_{j+1} + \{ L \}_j$$

III.3.1. Méthodes itératives et problèmes

Les méthodes de résolution de ce type de systèmes ne manquent pas.

En effet, le problème peut être mis sous forme de recherche de zéros d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(\psi) = [M(\psi)] \{ \psi \} - \{ S(\psi) \} - \{ L \}$

Les méthodes de Newton, de la sécante, fournissent une solution à ce problème. Néanmoins, elles nécessitent l'évaluation de la matrice des dérivées partielles $\left(\frac{\partial F_i}{\partial \psi_j} \right)$ ce qui les rend assez lourdes et difficiles d'emploi.

On peut transformer le problème $F(\psi) = 0$, en un problème de point fixe qui peut être résolu par approximations successives. Toutefois, on n'est pas

toujours dans les hypothèses requises pour avoir la convergence des itérations de points fixe et celle-ci peut être aussi très lente.

La condition nécessaire est que la "pente" de l'opérateur tangent calculée au point fixe soit inférieure à 1. L'analogie avec le problème $f(x) = x$ permet de penser que la vitesse de convergence ne sera pas indépendante de la forme de F , au voisinage du point fixe.

On a constaté, lors de simulations effectuées en conditions de Neuman et sous des flux assez forts que l'on pouvait très bien avoir des convergences très lentes encadrant la solution selon un schéma analogue à la figure 6. Il nous est aussi arrivé de constater la convergence non pas vers un point fixe, mais vers des attracteurs d'ordre plus élevé. L'existence d'un point fixe étant dépendante des caractéristiques de l'opérateur, on présente à titre d'illustration un exemple de dédoublement du point fixe, en fonction du pas d'espace utilisé lors d'une infiltration sous conditions de flux sur Yolo-Light clay. On constatait, dans ce cas, qu'une bifurcation apparaissait systématiquement pour la même valeur de dx quelle que fût la teneur en eau initiale. On remarque sur le graphe (fig. 7) que l'on a une convergence quadratique en fonction de dx . En outre, on a constaté qu'il ne fallait pas attendre d'une méthode de point fixe qu'elle permette d'utiliser des pas de temps bien plus grands qu'avec des linéarisations. La convergence est en général assez lente dans les premiers instants. Elle peut même ne pas exister si le pas de temps est trop grand. Toutefois, elle permet d'avoir des bilans de masse bien meilleurs qu'avec des linéarisations. Pour des caractéristiques hydrodynamiques fortement non-linéaires, on a tout intérêt à utiliser les itérations du fait des variations brutales. En condition de flux fort, l'erreur commise en linéarisant peut atteindre 100 % par rapport à la solution itérée.

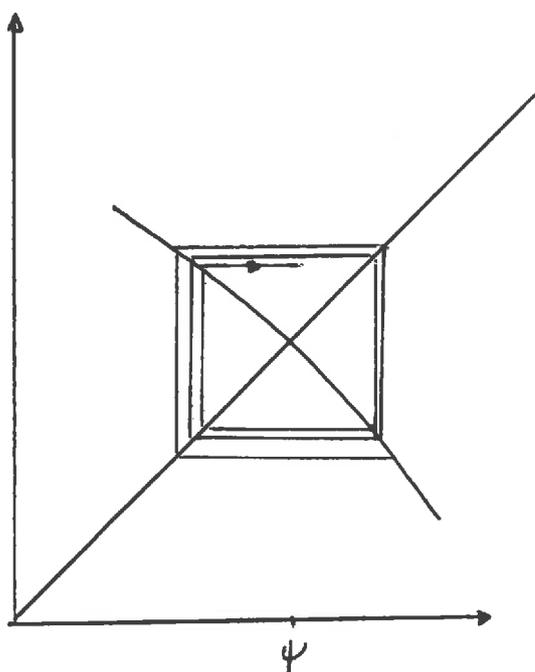


fig 6

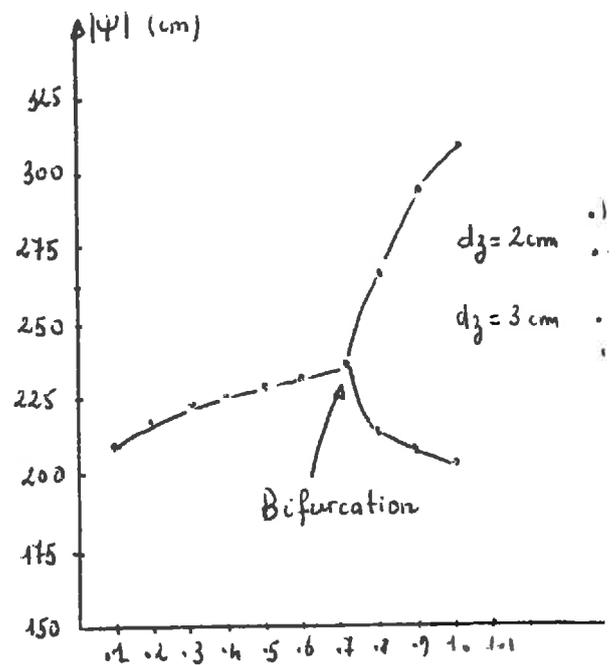


fig 7

On peut associer aux processus itératifs discutés des extrapolations dans le but d'accélérer le calcul, en ayant un point de départ des itérations plus proches de la solution. Notons enfin que les méthodes itératives sont souvent délaissées par les auteurs, pour des raisons de temps de calcul.

Le traitement des non-linéarités est alors fait de différentes façons :

- Linéarisation brutale (VAUCLIN et al., 1979 ; ABABOU, 1981)
- Extrapolation selon diverses formules : paraboliques, linéaires Aitken, (GAUDU, 1978),

CERMAK et ZLAMAL (1980) dans un article sur les méthodes d'éléments finis pour équations paraboliques non-linéaires, proposent une extrapolation basée sur la méthode d'intégration linéaire à deux pas qu'ils utilisent, dans le but de conserver un ordre d'approximation en t^2 .

Les prédictions explicites ou implicites, au demi-pas de temps, sont utilisées par quelques auteurs (RUBIN et STEINHART, 1965 ; WHISLER et KLUTE, 1965).

III.3.2. Les Méthodes Prédicteurs-Correcteurs

Les méthodes Prédicteurs-Correcteurs ou encore Prédicteurs-Estimeurs-Correcteurs traitent ce problème lors de la résolution du système correcteur. En effet, prenons le cas d'une méthode linéaire multipas implicite qui s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\beta_0 \Delta t \cdot \left\{ \frac{dy}{dt} \right\}^{n+k} = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot y^{n+j}$$

On peut considérer un prédicteur de la forme :

$$\hat{y}^{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y^{n+j}$$

ou plus compliqué, introduisant les dérivées temporelles à des pas de temps précédents. Etant donné l'équation $du/dt = f(y, t)$, on peut alors utiliser le correcteur dont la forme découle de la formule d'intégration utilisée :

$$\hat{y}^{n+k} = \hat{\alpha}_0 y^n + \dots + \hat{\alpha}_{k-1} y^{n+k-1} + \beta_0 \Delta t \cdot f(\hat{y}_{n+k}, t_{n+k})$$

Cette équation d'inconnue \hat{y}^{n+k} peut être résolue par une méthode itérative. Elle se met sous la forme condensée suivante :

$$y^{n+k} = F(y^{n+k}, t_{n+k}) \beta_0 \Delta t + cte$$

On voit alors qu'à chaque pas d'itération de résolution du correcteur, on réestime $f(y_{n+k}^e, t_{n+k})$ et donc les coefficients non-linéaires.

Pour l'équation de Richards et le système différentiel qui provient de sa discrétisation spatiale, la fonction f ci-dessus s'écrit :

$$f(y, t) = -[c(y)]^{-1} [K(y)] y + [c(y)]^{-1} s(y)$$

Si on note λ le rayon spectral de la matrice jacobienne de f , alors on sait que les itérations de point fixe ne convergeront que si $|\lambda| \Delta t < 1$; ce qui impose une sérieuse limitation sur Δt dans le cas où λ est grand (Stiffness). Cet inconvénient purement lié à la méthode d'intégration, peut être contourné, en utilisant une méthode de Newton-Raphson pour la résolution du correcteur. Cela permet de garder un pas de temps acceptable, mais présente à nouveau l'inconvénient de devoir calculer la Jacobienne.

III.3.3. Revue de différents schémas linéarisant l'équation

Pour l'équation parabolique non linéaire suivante :

$$b(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad a(u) > 0, \quad b(u) > 0$$

MITCHELL et GRIFFITH (1980) proposent un schéma centré en temps et espace de la forme :

$$b(U_m^n) (U_m^{n+1} - U_m^{n-1}) = \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[a(U_{m+\frac{1}{2}}^n) \frac{(U_m^{n+1} - U_m^n)}{\Delta x} - a(U_{m-\frac{1}{2}}^n) \frac{(U_m^n - U_m^{n-1})}{\Delta x} \right]$$

Ils remplacent ensuite $U_m^{n+1}, U_m^n, U_m^{n-1}$ par une moyenne sur les trois pas de temps, pour rendre le schéma implicite et inconditionnellement stable.

$$U_k^n = \frac{1}{3} (U_k^{n+1} + U_k^n + U_k^{n-1}) \quad k=1, \dots$$

Les coefficients non linéaires sont calculés au temps n et aux noeuds $m \pm 1/2$. LEES (1966) prouve alors que l'on a un ordre d'approximation en temps et espace quadratique.

$$\text{Max}_{m,n} \left| U_m^n - u(mh, nk) \right| \leq C \cdot (h^2 + k^2)$$

L'extension au cas multi-dimensionnel est directe.

Nous tenons à signaler qu'il n'est fait aucune hypothèse sur le type de non-linéarité alors qu'à notre expérience, celui-ci a de l'importance quant à la qualité des résultats. En effet, ce schéma linéarisé fait apparaître une erreur quadratique, mais on ne sait comment varie la constante C en fonction des

coefficients non-linéaires. Notamment, le calcul de ceux-ci est fait par la formule $a(u_{m+1/2}^n) = a\left(\frac{u_{m+1}^n + u_m^n}{2}\right)$, alors que nous avons montré que dans le cas de l'équation de Richards, en tous points similaire à celle-ci, le mode de pondération peut avoir une influence importante sur la solution, selon le type de sol sur lequel on travaille, c'est-à-dire selon la forme des fonctions $C(\psi)$ et surtout $K(\psi)$.

Signalons que MITCHELL et GRIFFITH (1980) recommandent "prudemment" l'utilisation d'un schéma à trois niveaux plutôt qu'à deux niveaux.

FAIRWEATHER (1978) fait une revue des caractéristiques des systèmes d'équations différentielles non-linéaires obtenus à partir de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(a(x, u) \operatorname{grad} u \right) + f(x, u, t) \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

après application d'une méthode d'éléments finis et avec des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neuman. Parmi les algorithmes de résolution proposés, on peut retenir une méthode prédicteur-correcteur qui s'écrit par exemple pour un schéma de Cranck-Nicholson :

Prédicteur :

$$\left(\frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t}, V \right) + \left(a(U_m) \cdot \nabla \left(\frac{\tilde{U}_{m+1} + \tilde{U}_m}{2} \right), \nabla V \right) = \left(f(U_m), V \right)$$

et pour le Correcteur :

$$\left(\frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t}, V \right) + \left(a\left(\frac{\tilde{U}_{m+1} + U_m}{2}\right) \nabla U_{m+1/2}, \nabla V \right) = \left(f\left(\frac{\tilde{U}_{m+1} + U_m}{2}\right), V \right)$$

Cette méthode conserve l'approximation quadratique en temps. La non-linéarité est traitée en deux étapes : d'abord linéarisation, puis calcul à $t + \frac{\Delta t}{2}$.

FAIRWEATHER cite aussi des schémas à trois niveaux, dûs à LEES et que nous avons mentionnés ci-dessus.

En notation, produit scalaire, elles sont de la forme :

$$(13) \quad \left(\frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2 \Delta t}, V \right) + \left(a(U_m) \nabla U_{m, \theta}, \nabla V \right) = \left(f(U_m), V \right)$$

$$\text{où } U_{m,\theta} = \theta (U_{m+1} + U_{m-1}) + (1-2\theta) U_m$$

On remarquera que le calcul de $a(u)$ est fait au temps central $m \cdot \Delta t$, pour lequel on connaît la solution. Le système obtenu est donc linéaire, alors qu'il ne l'est pas avec un schéma à deux niveaux, style C.N. On évite donc tout problème de linéarisation, extrapolation, itérations, etc... Le calcul de la solution à Δt , nécessaire au démarrage de l'algorithme peut être fait par résolution du système suivant, où la non-linéarité est traitée par linéarisation brutale.

$$\left(\frac{U_1 - U_0}{\Delta t}, v \right) + \left(a(U_0) \nabla (2\theta U_1 + (1-2\theta)U_0), \nabla v \right) = \left(f(U_0), v \right)$$

Le schéma résultant est stable pour $\theta > \frac{1}{4}$ et l'ordre de convergence en temps est quadratique.

Parmi les schémas à trois niveaux, fournissant des systèmes linéaires, FAIRWEATHER (1978) propose aussi la formule suivante, qui, si elle a une erreur locale supérieure à celle de la précédente, dispose en revanche d'une aptitude plus grande à amortir les oscillation (L_0 -Stabilité) ($\theta = \frac{1}{16}$ par exemple).

En utilisant toujours la notation scalaire résultant des méthodes variationnelles, on a :

$$\left(\frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t}, v \right) + \left(a(\hat{U}_{m+\frac{1}{2}}) \nabla U_{m+\frac{1}{2},\theta}, \nabla v \right) = \left(f(\hat{U}_{m+\frac{1}{2}}), v \right)$$

$$\text{où } U_{m+\frac{1}{2},\theta} = U_{m+\frac{1}{2}} + \theta (U_{m+1} - 2U_m + U_{m-1})$$

$$\hat{U}_{m+\frac{1}{2}} = (3U_m - U_{m-1}) / 2$$

La valeur de U_1 peut être obtenue par la même formule que précédemment. On peut remarquer que la non-linéarité est traitée par extrapolation et que ce schéma ressemble beaucoup à un schéma de Crank-Nicholson avec extrapolation.

Enfin, si on utilise un pas de temps variable, on conserve les ordres d'approximation, si $\theta > \frac{1}{4}$ et si la variation du pas de temps est monotone. On a alors les formules suivantes pour le schéma (13).

$$\left(\frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2\Delta t}, v \right) + \left(a(U_m) \nabla U_{m,\theta}, \nabla v \right) = \left(f(\tilde{U}_m), v \right)$$

avec
$$\tilde{U}_m = U_m + \frac{\Delta t_m - \Delta t_{m-1}}{2\Delta t_{m-1}} (U_m - U_{m-1})$$

$$U_{m,\theta} = \frac{1}{2} (4\theta - 1) (U_{m+1} + U_{m-1}) + (1 - 2\theta) (\sigma U_{m+1} + U_m + (1 - \theta) U_{m-1})$$

$$\sigma = \frac{\Delta t_m}{\Delta t_m + \Delta t_{m-1}}$$

On a donc des schémas linéaires multiples permettant de résoudre des systèmes d'équations différentielles non-linéaires, ayant des ordres d'approximation quadratiques en temps et disposant d'une stabilité inconditionnelle, A-stable ou L-stable. Le traitement des non-linéarités est fait de nombreuses façons, mais il est intéressant de remarquer qu'un schéma à trois niveaux permet d'éviter d'avoir à extrapoler, linéariser ou itérer. Remarquons aussi que l'utilisation d'une méthode d'éléments finis supprime le problème du choix de l'interpolation spatiale des coefficients non-linéaires. On verra par la suite que c'est là un des principaux problèmes posés par la résolution d'une équation parabolique non-linéaire.

III-4. Méthodes d'ordre élevé

Lorsqu'on est en présence d'un système différentiel linéaire défini par :

$$[A] \frac{du(t)}{dt} = -[B]u(t) + d \quad \text{avec la condition initiale } u(0) = u_0$$

il existe une solution explicite qui s'écrit :

$$u(t) = \exp(-t[A]^{-1}[B]) (u_0 - B^{-1}d) + [B]^{-1}d.$$

On en déduit généralement une solution pas à pas en posant :

$$u(t+\Delta t) = \exp(-\Delta t[A]^{-1}[B]) (u(t) - B^{-1}d) + [B]^{-1}d.$$

Le calcul de l'exponentielle n'étant pas envisageable, on utilise des approximations de : \exp , sous forme de fractions rationnelles.

III-4.1. Les approximations de Norsett

Une famille de telles fractions est constituée, comme déjà signalé par les approximations de Padé, qui se mettent sous la forme :

$$r_{m,n}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \quad z \in \mathbb{C} \quad P_m \text{ et } Q_n \text{ polynômes de degré } m \text{ et } n$$

On a vu que les approximations de Padé conduisaient entre autre aux schémas habituels : Explicite, Implicite et Cranck-Nicholson. Les approximations d'ordre supérieur sont assez souvent délaissés pour des raisons de calcul. On note l'utilisation de $r_{2,2}(z)$ pour la résolution d'un problème de transfert thermique (SMITH et al., 1977). Du fait qu'ils ne conduisent pas tous à un schéma L-Stable et qu'ils peuvent quelquefois nécessiter l'utilisation de nombres complexes ($r_{2,2}(z)$), certains auteurs ont introduit d'autres familles d'approximations de $\exp(-z)$.

MAKINSON et NORSETT (1975) ont défini la famille suivante :

$$\exp(z) \approx s_n(z) / (1 + \alpha z)^n$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et s_n est un polynôme de degré au plus égal à n .

Les coefficients de $s_n(z)$ seront dépendants de α . Celui-ci pourra alors être choisi de deux façons : soit pour obtenir la meilleure approximation de $\exp(-z)$, soit pour annuler le coefficient du terme de plus haut degré, ce qui a pour effet de conduire à une méthode L-Stable puisque :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n(z)}{(1 + \alpha z)^n} \right| = 0$$

III-4.2. Implantation des approximants de Norsett

Il est montré (SMITH et al., 1977) que si $g_n(\alpha, \beta) = \frac{\Delta_n(\beta)}{(1+\alpha\beta)^n}$ est une approximation aussi précise que possible de $\exp(-z)$ alors :

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{\Delta_n(\beta)}{(1+\alpha\beta)^n} = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{L'_j(1/\alpha)}{\alpha_j} \left(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \right)^j \quad \text{cù}$$

$L_j(x)$ désigne le polynome de Laguerre de degré j et où α est choisi tel que $L'_{n+1}(1/\alpha) = 0$. Parmi les n racines possibles de L'_{n+1} , toutes ne conduisent pas à des schémas A-Stables et encore moins A(α)-Stables. Pour un système différentiel : $A \frac{du}{dt} = -B u(t) + \Delta$, la méthode d'ordre n , A-Stable, a été mise sous la forme matricielle suivante :

$$[A + \alpha \Delta t B] \mathcal{U}_\Delta(t) = \alpha \Delta t [B(u(t)) - \Delta]$$

$$[A + \alpha \Delta t B] \mathcal{U}_{i+1}(t) = \alpha \Delta t \cdot B \cdot \mathcal{U}_i(t) \quad i=1, n-1$$

$$\mathcal{U}(t+\Delta t) = \mathcal{U}(t) + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n L'_j(1/\alpha) \mathcal{U}_j(t) / j$$

Pour obtenir une méthode L-Stable, on montre (SMITH et al., 1977) que α doit être choisi tel que : $L_n(1/\alpha) = 0$ et que l'on a alors :

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \sum_{k=0}^{n-1} L_k \left(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \right)^k$$

En reprenant le système différentiel référencé ci-avant, on a mis la méthode sous la forme matricielle suivante :

$$[A + \alpha \Delta t \cdot B] \mathcal{U}_1(t) = \alpha \Delta t [B \mathcal{U}(t) - \Delta]$$

$$[A + \alpha \Delta t \cdot B] \mathcal{U}_{i+1}(t) = \alpha \cdot \Delta t \cdot B \mathcal{U}_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n-2$$

$$[A + \alpha \Delta t B] \mathcal{U}(t+\Delta t) = [A] \left(\mathcal{U}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} L_j \left(\frac{1}{\alpha} \right) \mathcal{U}_j(t) \right) + \alpha \Delta t \cdot \Delta$$

On remarquera, que entre les deux algorithmes (A-Stable et L-Stable) seule la dernière étape du calcul diffère, ce qui facilite l'implantation sur calculateur. On renvoie à l'Annexe [1] pour le calcul des polynomes de Laguerre et des valeurs de α conduisant aux différentes approximations. Quoique ces méthodes aient été mises au point pour des problèmes linéaires,

l'approche pas de temps par pas de temps, nous a suggéré que l'on pourrait les utiliser pour l'équation de Richards. On a donc implanté les deux algorithmes jusqu'à l'ordre 4.

III-4.3. Application à l'équation d'infiltration

Le système différentiel provient de la discrétisation centrée sur trois points. On linéarise brutalement au pas de temps précédent.

Les conditions aux limites sont de Dirichlet. Les différentes valeurs de utilisées sont dans le tableau ci-dessous :

nord. Type	1	2	3	4
A-Stable	.5	ou .788675 .211344	1.068579018	1.34536642
L-Stable	Implicite pur	ou 1.7071067812 .2928932188	.435866333	.5728160625

a) Yolo-light Clay - Méthodes A-Stable

On a cherché à quantifier l'évolution de l'erreur quand on utilise des formules d'ordre de plus en plus élevé. La solution exacte étant inaccessible, la référence est constituée dans cette étude par la solution donnée avec un pas de temps de 5 s par le schéma de Cranck-Nicholson.

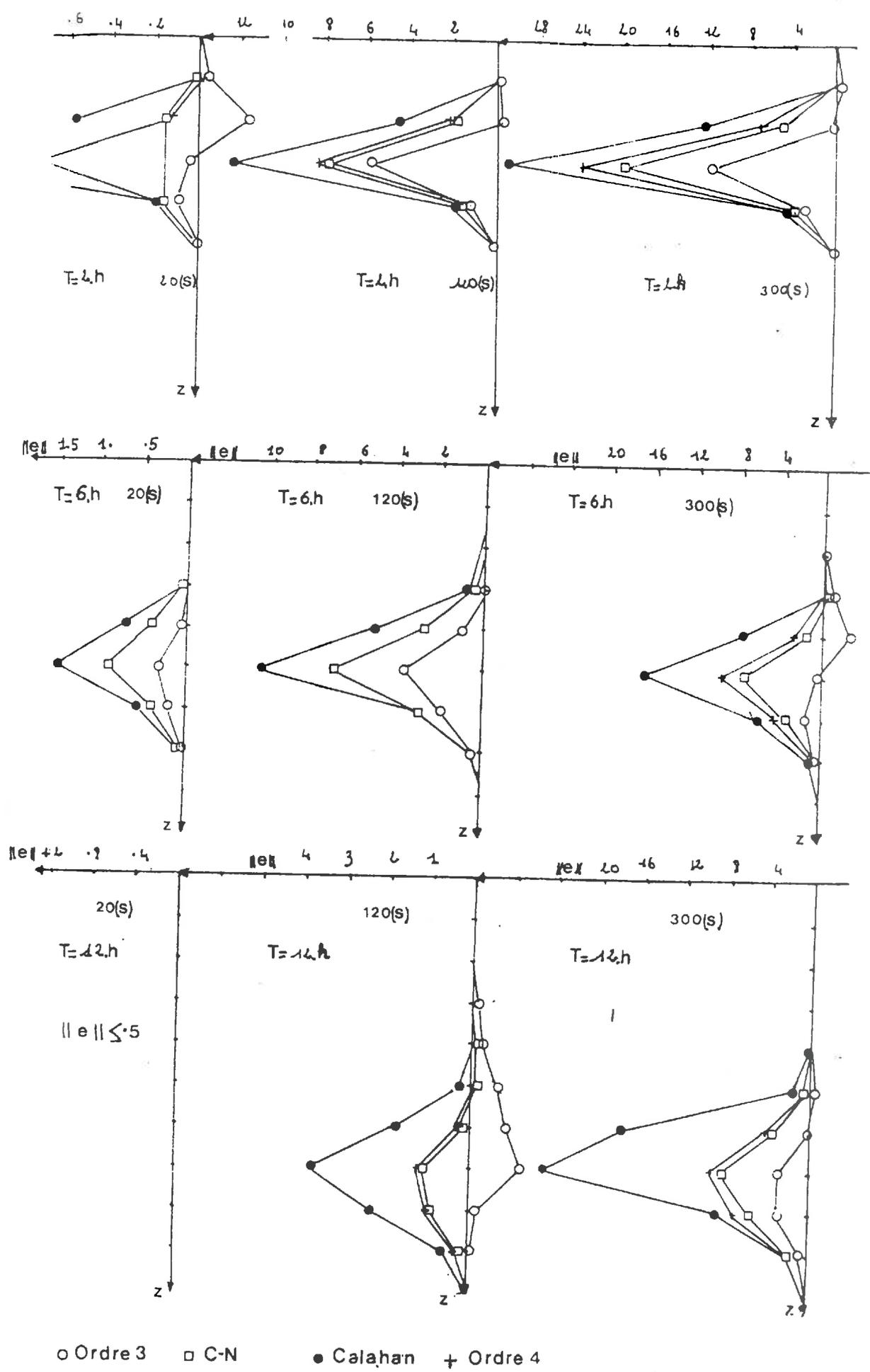
On a testé les pas de temps suivants : 20 s, 60 s, 120 s, 180 s, 300 s. La simulation d'infiltration va jusqu'à 12h.

On note $e_k^i(z)$ le vecteur erreur obtenu avec une méthode d'ordre i et le pas de temps k ; $k = 1, 2, 3, 4, 5$, correspondant aux pas énoncés ci-dessus. Ils ont été portés sur les figures (6 et 7) aux temps $t = 2h, 6h$ et $12h$ et pour les pas de temps 20 s, 120 s, 300 s.

Sur le tableau suivant, on a porté la norme du maximum de chaque vecteur erreur pour les différents pas de temps, différents ordres et temps.

On constate que la méthode de Calahan (= .788..... ou = .211...) donne des résultats assez mauvais. La méthode d'ordre 4, pourtant plus compliquée que le schéma de C.N, donne des résultats similaires à celui-ci.

FIG. 6 - Approximation pour différentes méthodes A-stable



t = 2 heures			t = 6 heures			t = 12 heures			
dt = 20s	dt = 120s	dt = 300s	dt = 20s	dt = 120s	dt = 300s	dt = 20s	dt = 120s	dt = 300s	
.16	8.	20.	.8	7.	7.8	.5	1.2	8.5	C.N
1.5	12.4	31.	1.5	10.5	17.	.5	3.8	25.5	Calahar
.24	5.9	12.	.3	3.8	2.2	.5	1.2	3.	ord = 1
.75	8.4	2.4	.8	7.2	9.8	.5	1.3	9.6	ord = 4

Tableau : Méthodes A-Stable : Norme Infinie de l'erreur

Enfin, on obtient une amélioration sensible de la précision, avec la méthode d'ordre 3. De plus, elle semble compétitive pour une précision requise par rapport à Cranck-Nicholson, du point de vue temps de calcul.

On pourra remarquer sur les figures présentant les vecteurs erreurs, que pour $\text{ord} = 3$, celui-ci n'est pas de signe constant sur toute la hauteur du profil comme c'est le cas pour les autres méthodes. En général, la méthode d'ordre 3 surestime la solution après passage du front.

b) Yolo-light Clay - L-Stable

On a repris les caractéristiques du cas précédent (Pas de temps, d'espace).

La référence est toujours constituée par C.N (5 s) puisque le phénomène simulé est toujours le même. On a le tableau suivant pour la norme infinie du vecteur erreur.

	t = 2 heures			t = 6 heures			t = 12 heures		
	dt = 20s	dt = 120s	dt = 300s	dt = 20s	dt = 120s	dt = 300s	dt = 20s	dt = 120s	dt = 300s
implicite	2.8	20.	48.2	2.6	16.9	32.8	1.6	8.6	26.8
ordre 2	.8	10.4	32.	1.0	8.4	14.9	.15	2.	12.8
ordre 3	.75	8.	20.9	.9	7.1	8.3	.13	1.29	9.
ordre 4	2.2	6.	15.	6.8	10.	6.1	9.9	8.	14.

Tableau : Méthodes L-Stable : Norme Infinie de l'erreur

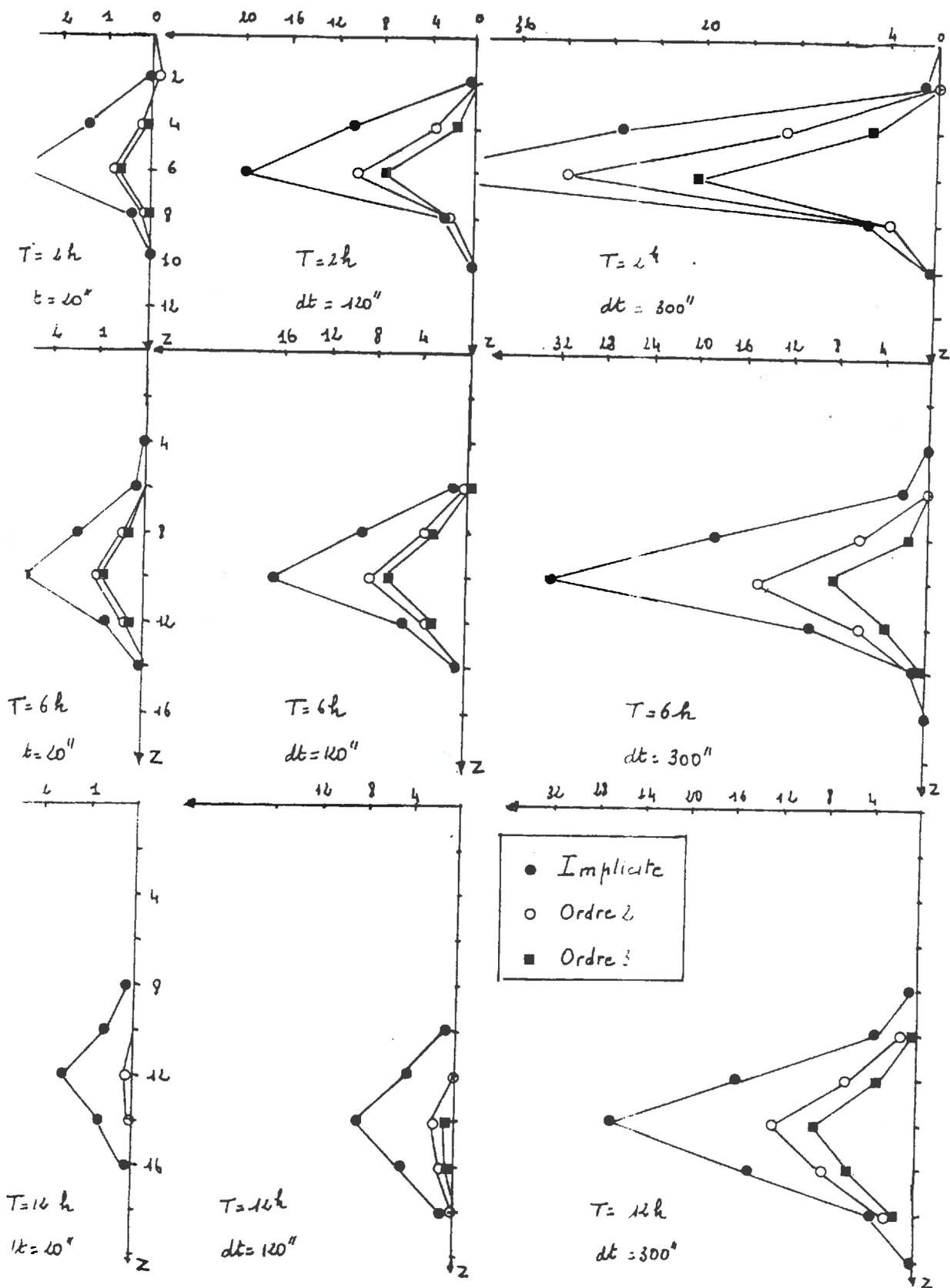


FIG. 7 - Erreurs pour différentes méthodes L-stable

On pourra remarquer, ce qui est aussi apparent sur la figure (7) que les résultats fournis par la méthode d'ordre 4, ne sont pas réguliers. Les méthodes d'ordre 2 et 3 fournissent des résultats très proches, et en amélioration très sensible par rapport à la méthode implicite. Par conséquent, seule la méthode d'ordre 2, de part son erreur de troncature réduite et son inconditionnelle stabilité est intéressante. On pourra noter que pour les deux types de méthodes, et dès que le pas de temps devient grand (300 s), les améliorations apportées par la diminution de l'erreur de troncature sont moins importantes et qu'alors c'est la non-linéarité des coefficients qui est prépondérante dans l'erreur commise avec une méthode linéarisant les coefficients.

Sur la figure apparaît bien la diminution de l'erreur au cours du temps (amortissement de la hauteur des pics).

Sur les graphes (8 et 9) sont représentés, à une profondeur et à un temps donnés, les différentes pressions obtenues avec divers pas de temps. On essaye donc de mettre en évidence ou de vérifier des ordres d'approximation théoriques.

On peut s'apercevoir que pour presque toutes les méthodes, on a un comportement suffisamment régulier tant que dt ne dépasse pas une certaine limite (ici 180 s environ) et qu'au-delà l'ordre théorique d'approximation n'est plus respecté. On peut constater notamment que la méthode implicite a un ordre linéaire comme il est prédit par l'analyse théorique. Au-delà de 180 s on perd la linéarité.

c) Sable de Grenoble

On a porté dans le tableau () (page suivante) les profils de pression au niveau du front, pour des schémas de C.N et L-Stable de divers ordres.

On peut constater que la solution au niveau du front est très sensible au pas de temps. Par exemple, pour un schéma de C.N avec un dt variant de 1/2 s à 5 s, on a une différence de pression qui au voisinage du front peut atteindre 50 mb. On distingue nettement la diffusion du front quand dt augmente. Le schéma implicite est lui beaucoup moins sensible à la variation de dt et pour un $dt = 5$ s, on n'atteint jamais des erreurs telles que celles générées par un C.N (5 s). Ceci peut sembler en contradiction avec le fait que théoriquement le schéma de C.N est meilleur que le schéma implicite pur. Il se peut que les erreurs importantes relevées soient dues aux oscillations, non amorties, qui sont toujours plus ou moins présentes dans ce type de schéma.

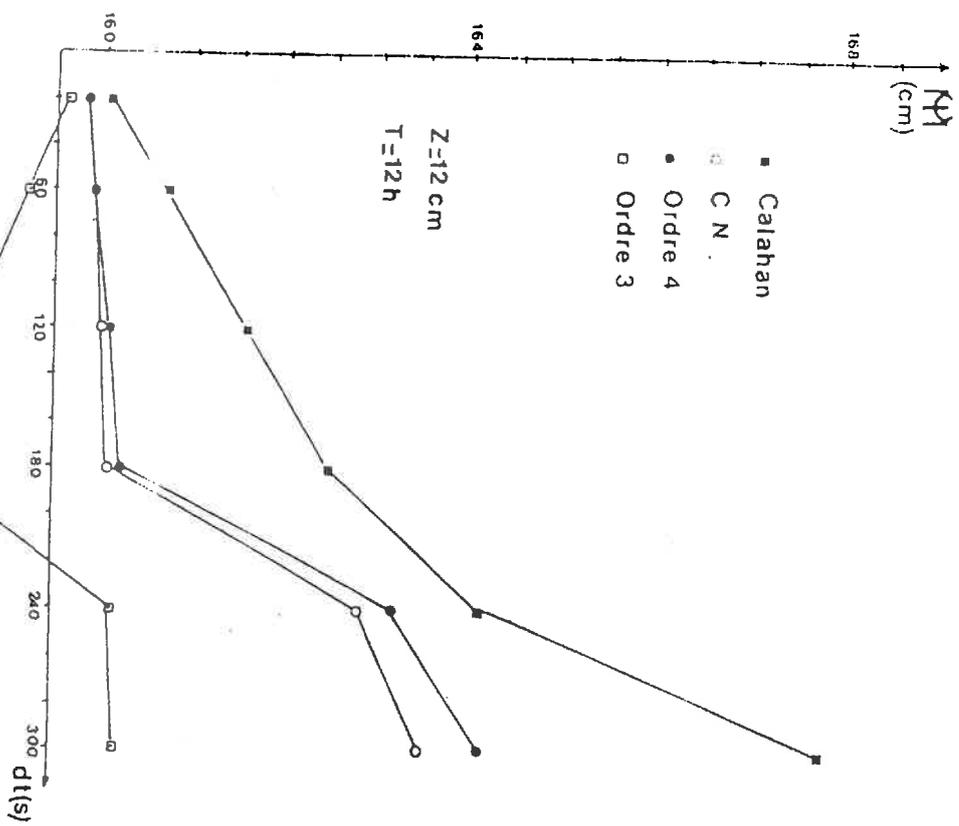
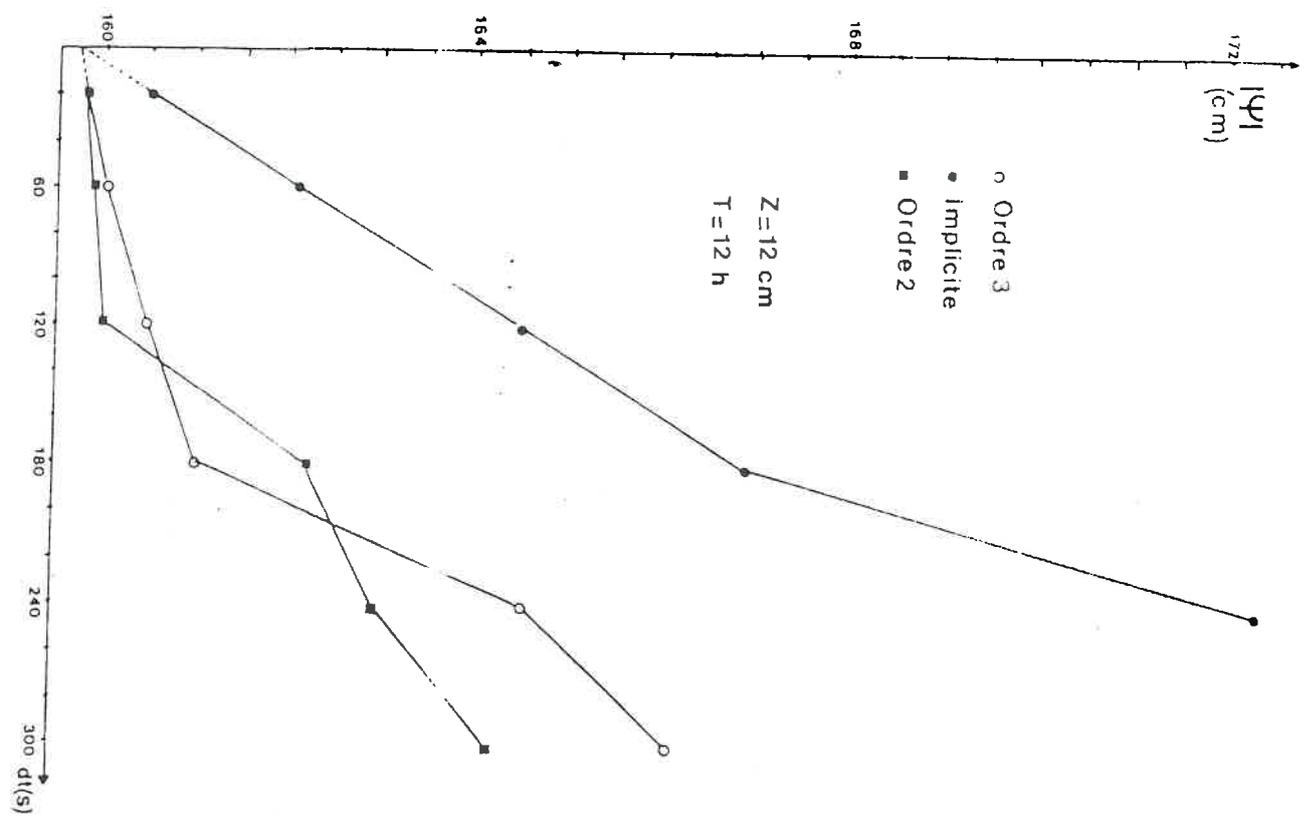


FIG. 9

C.N (1/2 s)	C.N (1 s)	C.N (5s)	IMP (1s)	IMP (5s)	L ₂ -Stable (5s)	L ₃ -Stable (5s)	L ₄ -Stable (5s)
10.41	10.30	9.43	10.37	9.84	9.68	9.49	9.44
11.25	11.13	10.12	11.2	10.60	10.4	10.18	10.12
12.23	12.1	10.90	12.18	11.47	11.22	10.97	10.9
13.42	13.24	11.8	13.36	12.5	12.19	11.89	11.8
14.88	14.65	12.87	14.81	13.74	13.34	12.98	12.86
16.77	16.47	14.17	16.68	15.3	14.76	14.31	14.16
19.42	18.99	15.83	19.31	17.41	16.59	16.0	15.8
23.71	23.01	18.08	23.55	20.58	19.13	18.3	18.00
39.6	36.1	21.54	40.04	30.35	23.34	21.85	21.31
78.55	74.13	30.81	79.22	66.73	43.85	32.97	29.08
97.00	96.18	66.83	97.07	94.36	84.19	71.05	62.37
99.65	99.55	94.82	99.65	99.26	98.01	95.77	93.78

Tableau : Profils de potentiel sur Sable de Grenoble

Enfin, il est important de constater que les schémas L-Stables, engendrés par les approximants de Norsett, et d'ordres élevés, convergent vers le schéma de C.N, utilisant le même pas de temps (5 s), c'est-à-dire qu'ils convergent vers une solution fausse.

Donc, dans les cas où l'évolution de la pression est rapide, il semble que la seule solution acceptable soit d'utiliser des pas de temps très petits. Il ne faut en outre pas s'attendre à pouvoir utiliser une méthode d'ordre supérieur dans l'espoir d'augmenter le pas de temps. Notons que dans ces cas là, le schéma implicite est beaucoup moins sensible aux variations de dt que le schéma de C.N. On retrouve un comportement déjà signalé auparavant, à savoir que le schéma implicite a tendance à sous estimer légèrement l'arrivée du front et à légèrement surestimer la pression, une fois celui-ci passé.

III.4.4. Conclusions

Il apparaît donc que dans le cas de milieux poreux où l'évolution de la pression est "lente", on peut mettre en œuvre des approximants de Norsett jusqu'à l'ordre 2 ou 3. Ils sont alors compétitifs du point de vue temps de calcul et apportent un supplément de précision non négligeable.

Cette étude a montré toutefois qu'au-delà d'un certain pas de temps, de toute façon liée à la discrétisation spatiale, c'était l'aspect non-linéaire qui conditionnait la majeure partie de l'erreur, la troncature en temps devenant minoritaire.

Dans le cas de sols où la pression est susceptible d'évoluer très rapidement, on a montré que ce type de méthodes n'était pas adapté, n'apportait rien et pouvait conduire à des résultats erronés, la seule solution étant alors l'utilisation de petits pas de temps et d'itérations. On a montré aussi que le schéma de C.N utilisé avec un pas de temps trop grand induisait des erreurs importantes au niveau du front, le schéma implicite étant lui moins sensible à dt . On a noté des oscillations de la solution sur Sable de Grenoble avec un schéma de C.N. Nous reviendrons plus loin sur ce phénomène.

On a pu vérifier sur les schémas implicites et C.N, que les ordres d'approximation en temps étaient bien linéaires et quadratiques. Nous allons essayer d'utiliser cette propriété, ainsi que celles déjà établies sur les ordres d'approximation spatiales, pour mettre en œuvre une méthode d'extrapolation de Richardson, toujours dans le but de réduire l'erreur de troncature.

III.5. Essai d'utilisation de l'extrapolation de Richardson.

La résolution d'une équation aux dérivées partielles par une méthode numérique fait passer d'un problème continu défini par l'opérateur différentiel à un problème discret. Il y a donc là un premier niveau d'approximation qui introduit une erreur fonction du pas d'espace et/ou du pas de temps. Si on reprend les notations définies dans (II.1.1.), on a le schéma :

$$\begin{array}{ccc}
 u \in V & \xrightarrow{L} & L(u) \in F \\
 \downarrow \text{Proj} & & \downarrow \text{Proj} \\
 u_h \in U_h & \xrightarrow{R_h} & [L(u)]_h \\
 & & R_h(u_h) \in F_h
 \end{array}$$

et si le schéma discret défini par l'opérateur R_h est approximant, on obtient les majorations suivantes :

$$\| R_h(u_h) - [L(u)]_h \|_{F_h} \leq h^k M(u)$$

et $\| r_{i,q}(u_h) - [l_i(u)]_h \|_{\Phi_{i,q}} < h^{k_i} M_i(u)$ pour les opérateurs aux limites.

La solution (u) du problème défini par les opérateurs L et I_1 est alors définie par

$$u = \lim_{h \rightarrow 0} u_h$$

(h peut être un vecteur regroupant les divers pas d'espace et de temps. On a alors

$$u = \lim_{\|h\|_0 \rightarrow 0} u_h)$$

III.5.1. Définition de l'extrapolation de Richardson

On reprend les majorations ci-dessus et on suppose qu'il existe des fonctions ψ et ψ_i , appartenant respectivement à F et Φ_i , telles que :

$$\| (L(u)_h - R_h(u_a)) - h^k \psi_h \|_{F_h} = o(h^k) \text{ et}$$

$$\| (l_i(u)_h - r_{i,h}(u_a)) - h^{k_i} \psi_{i,h} \|_{\Phi_{i,h}} = o(h^{k_i})$$

Posons w la fonction de U telle que

$$L(w) = \psi$$

$$l_i(w) = \psi_i$$

On obtient alors

$$\| L(u - h^k w)_h - R_h(u_a) \|_{F_h} = o(h^k)$$

$$\text{et } \| l_i(u - h^k w)_h - r_{i,h}(u_a) \|_{\Phi_{i,h}} = o(h^{k_i})$$

En faisant l'hypothèse de linéarité des opérateurs L et I_1 , on obtient :

$$\| L(u - h^k w)_h - R_h(u_a) \|_{F_h} = o(h^k)$$

$$\| l_i(u - h^k w)_h - r_{i,h}(u_a) \|_{\Phi_{i,h}} = o(h^{k_i})$$

ce qui permet d'écrire : $\| u - h^k w - u_h \|_{V_h} = o(h^k)$ puisque L et I_1 sont approximants d'ordre k .

On peut donc en déduire, en un point quelconque P du domaine d'intégration, la relation :

$$U_h^k(P) = U(P) + h^k \omega(P) + \varepsilon$$

Si donc on travaille avec deux pas d'espace et/ou deux pas de temps, on a le système :

$$U_{h_1}^k(P) = U(P) + h_1^k \omega(P) + \varepsilon_1$$

$$U_{h_2}^k(P) = U(P) + h_2^k \omega(P) + \varepsilon_2$$

d'où on tire :

$$U(P) = \left[h_2^k U_{h_1}^k(P) - h_1^k U_{h_2}^k(P) \right] / (h_1^k - h_2^k)$$

Si on pose $h_2 = h_1 / 2$, on obtient :

$$U(P) \simeq \left(\frac{h_1^k}{2^k} U_{h_1}^k - h_1^k U_{h_2}^k \right) / (h_1^k - h_1^k / 2^k)$$

$$\text{d'où } U(P) \simeq \frac{h_1^k}{2^k} \left(U_{h_1}^k - 2^k U_{h_2}^k \right) / \frac{h_1^k}{2^k} (1 - 2^k)$$

$$\text{il vient alors : } U(P) = \frac{U_{h_1}^k - 2^k U_{h_2}^k}{1 - 2^k} = \frac{2^k U_{h_2}^k - U_{h_1}^k}{2^k - 1}$$

Si h désigne le pas de temps, on aura dans le cas d'un schéma implicite, et donc linéaire, l'extrapolation : $U(P) = 2 \frac{U_{\frac{dt}{2}} - U_{dt}}{2}$ Le point P désigne bien sûr un point de l'espace temps.

Dans le cas d'un schéma de Crank-Nicholson $U(P) \simeq (4 \frac{U_{\frac{dt}{2}}}{2} - U_{dt}) / 3$

Il est évident que si on a une approximation d'ordre p , l'extrapolation de Richardson permet de récupérer une approximation d'ordre p^2 .

Remarques

La démonstration, qu'on a donnée, fait l'hypothèse que les opérateurs L et li sont linéaires. Or, si cela peut être le cas quelquefois pour li , dans le cas de l'équation de Richards, ce ne l'est jamais pour L , sauf si tout le domaine est saturé (équation Elliptique).

FAIRWEATHER (1978) et **MARCHOUCK (1980)** ne donnent des exemples que dans des cas linéaires.

On peut essayer de l'appliquer à l'équation de Richards, bien qu'elle soit non linéaire, en essayant de rester dans une gamme de pas d'espace ou de temps où les variations soient presque linéaires.

On a le choix entre une extrapolation basée sur le pas de temps, ou sur le pas d'espace ou sur les deux simultanément.

III.5.2. Application et Conclusions

Les expériences numériques précédentes ont montré que l'ordre d'approximation des schémas spatiaux sur trois points, n'était pas toujours et partout quadratique. Nous avons notamment mis en évidence les problèmes systématiques au niveau des fronts, et la limitation sur la variation de Δx nécessaire à la conservation de l'ordre d'approximation.

Pour toutes ces raisons, il nous a donc semblé inutile d'essayer d'appliquer une méthode d'extrapolation sur l'opérateur de discrétisation spatiale. Par contre, nous avons mis en évidence la bonne concordance entre les erreurs théoriques et les erreurs calculées pour l'erreur de troncature des schémas d'intégration implicites et Cranck-Nicholson. C'est donc sur cet opérateur que nous avons mis en oeuvre une extrapolation de Richardson.

-Schéma implicite.

On a simulé en conditions de flux, sur Yolo-light Clay, avec un schéma implicite, et des pas de temps allant de 3 secondes pour la simulation de référence, à 5 minutes. On compare l'évolution de la pression à différentes cotes entre le schéma implicite et le même schéma utilisant l'extrapolation (cf. tableaux suivants). On peut constater sur le premier tableau que pour la gamme de pas de temps acceptable pour $z = .5$ cm, on obtient avec l'extrapolation de Richardson et $dt = 5$ s, une précision équivalente à celle d'un schéma utilisant un pas de temps de 3 secondes. De même, sur le deuxième tableau avec un pas de l'espace de 2 cm, on peut voir que avec un dt ne sortant pas de la zone linéaire (cf fig. 8) on récupère la précision d'un schéma avec un $dt = 5$ s.

La figure 11 comporte les différentes pressions obtenues à la surface et à deux autres cotes (1,5 cm et 3 cm) au bout de deux heures, en fonction du pas de temps. On peut observer que l'extrapolation apporte bien un ordre d'approximation quadratique au schéma implicite qui est, sinon, d'ordre 1.

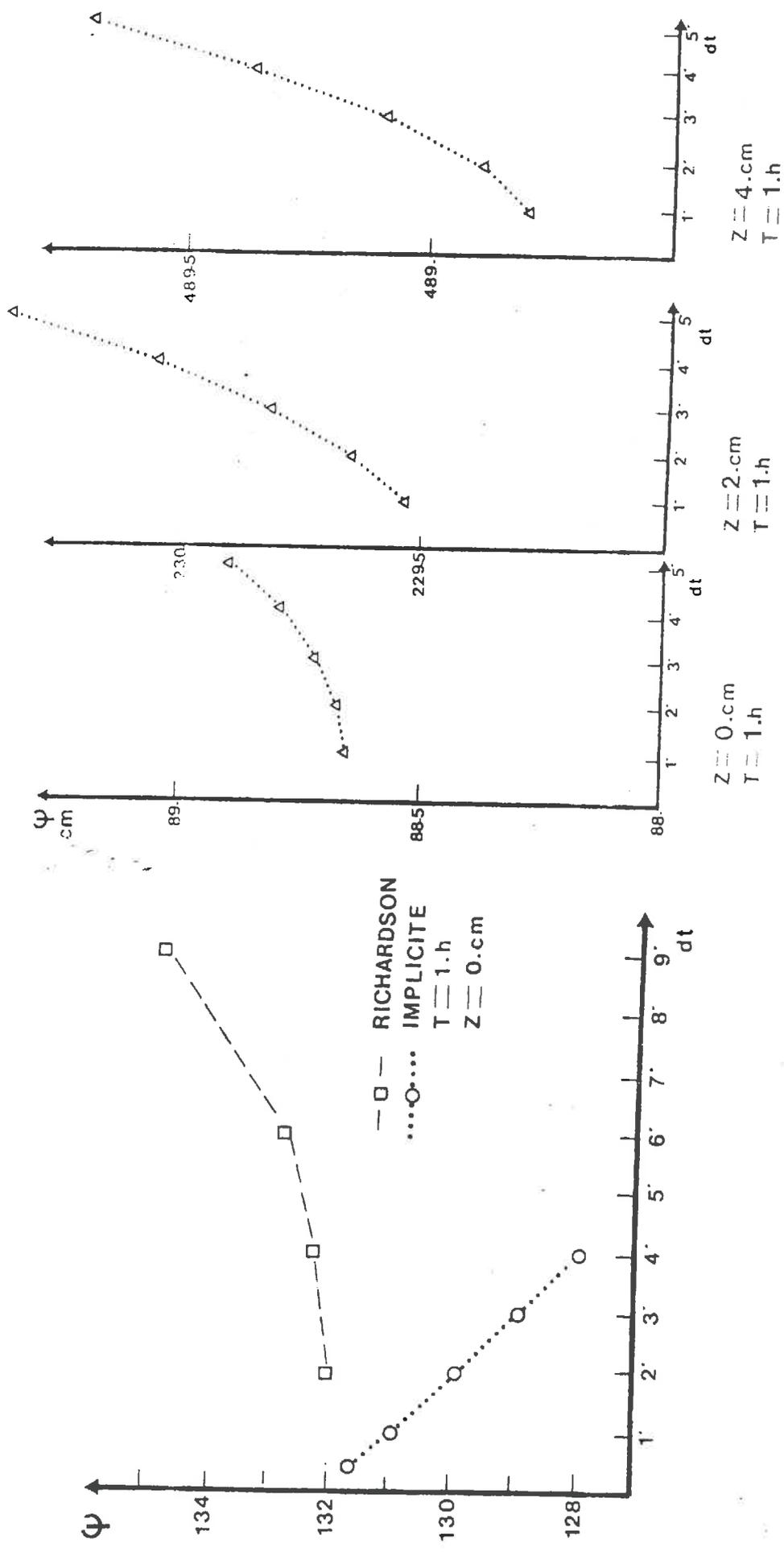
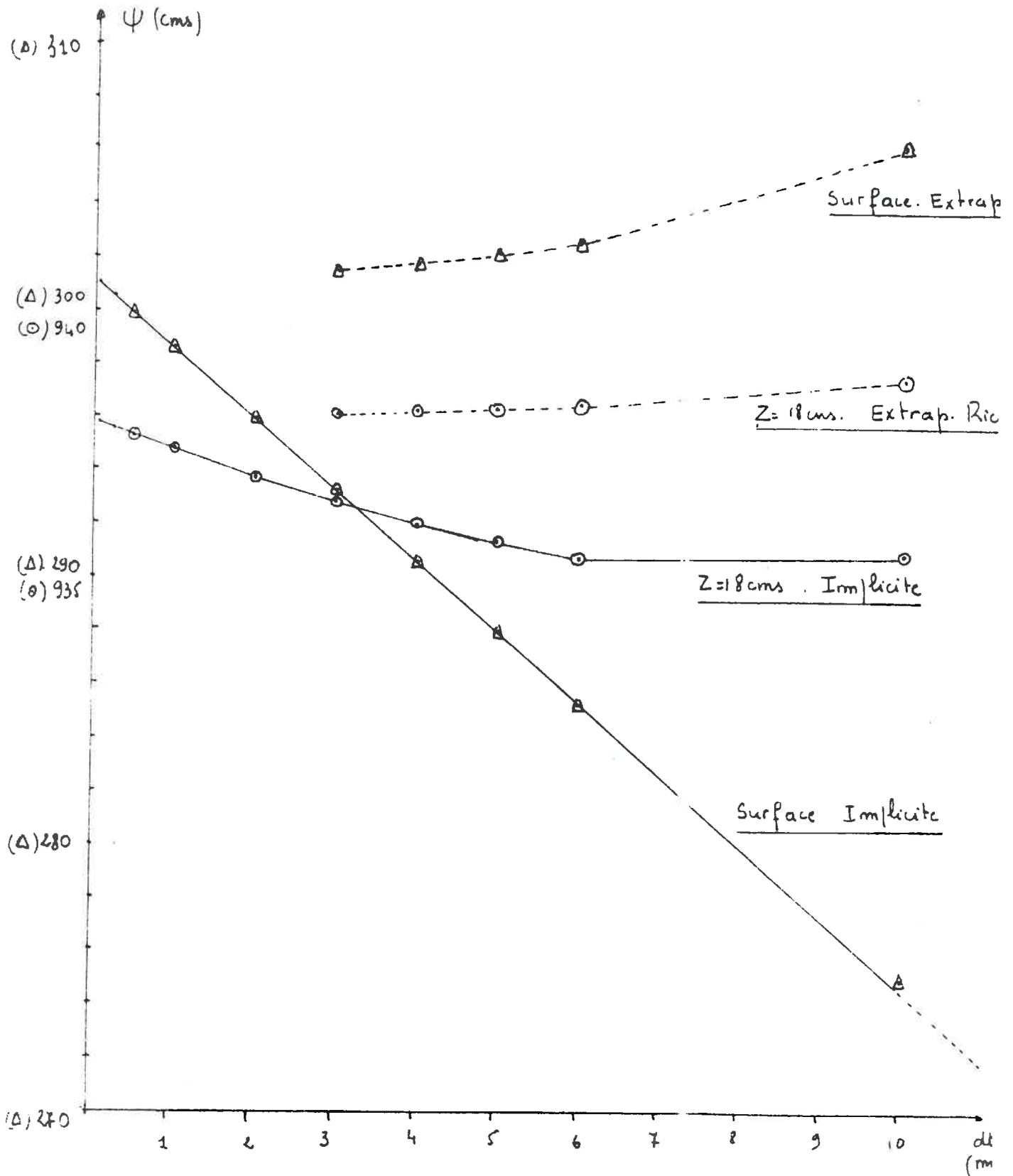


FIG. II - Convergence des Extrapolations de RICHARDSON



Silty Clay Loam.

Tableau : EVOLUTION DE LA PRESSION (cm) A LA SURFACE
Yolo-light Clay

z = .5 cm

(h) temps	Imp. 3 s	Imp. 30 s	Imp. 60 s	Richardson 60 s	Imp. 120 s	Richardson 120 s	Imp. 240 s	Richardson 240 s	Richardson 300 s
1	131.71	130.88	129.97	131.8	128.14	131.88	125.9	13.	13.
2	88.598	88.37	87.65	88.65	86.65	88.67	84.68	88.8	88.9
3	67.9	67.6	67.5	67.9	66.6	67.95	65.28	68.0	67.76
4	55.29	55.07	54.9	55.3	54.3	55.32	53.35	55.36	55.4
5	46.65	46.47	46.4	46.65	46.1	46.7	45.1	46.98	46.7
6	40.285	40.14	39.98	40.3	39.85	40.30	39.05	40.32	40.34
7	35.37		35.12	35.38	35.	35.4	34.3	35.4	35.4
8	31.41		31.23	31.45	31.12	31.46	30.56	31.47	31.47
9	28.2		28.02	28.2	27.9	28.2	27.6	28.24	28.27

Tableau. : EVOLUTION DU POTENTIEL (cm) A LA SURFACE
Yolo-light Clay

z = 2 cm

(h) temps	Imp. 20s	Imp. 50s	Imp. 120s	Imp. 180s	Imp. 240s	Richardson 120s	Richardson 240s	Richardson 360s	Richardson 600s
1	131.58	130.91	129.91	128.94	127.99	132.00	132.26	132.79	135.07
2	101.00	100.65	100.14	99.63	99.13	101.2	101.31	101.5	102.28
3	81.445	81.376	81.73	80.36	79.99	81.5	81.56	81.68	82.13
4	67.485	67.422	66.93	66.64	66.36	67.53	67.57	67.65	67.95
5	57.152	57.09	56.7	56.46	56.22	57.19	57.23	57.24	57.49
6	49.238	49.06	48.85	48.65	48.44	49.28	49.3	49.34	49.49
7	43.002	42.85	42.67	42.48	42.31	43.04	43.06	44.09	44.21
8	37.97	37.84	37.673	37.51	37.35	38.00	38.02	38.04	38.14
9	33.825	33.71	33.56	33.41	33.27	33.86	33.87	33.89	33.98
10	33.335	30.25	30.11	29.98	29.85	30.38	30.39	30.41	30.47

Tableau : EVOLUTION DE LA PRESSION (cm) Silty Clayloam

Surface Temps	Imp. 3s	Imp. 60s	Richardson 180s	Imp. 300s	Richardson 300s	Imp. 600s	Richardson 600s	Imp. 900s	Richardson 900s
1 h	301.2	298.57	301.4	287.77	301.9	274.8	306.	272.2	317.7
2 h	221.79	220.33	221.98	213.96	222.1	206.3	223.1	200.8	226.5
3h	182.17	181.15	182.29	176.7	182.37	171.4	182.9	167.4	184.5
4h	157.49	156.72	157.58	153.37	157.6	149.3	157.9	146.2	158.9
z=18cm Temps	Imp. 5"	Imp. 1'	Richardson 3'	Imp. 5'	Richardson 5'	Imp. 10'	Richardson 10'	Imp. 15'	Richardson 15'
1 h	937.9	937.3	938.0	935.6	938.1	935.3	938.6	939.6	941.48
2 h	648.8	648.7	649.4	649.	650.1	654.1	658.1	677.9	662.0
3 h	436.8	435.4	437.2	429.8	437.5	424.4	438.9	428.6	443.3
4 h	322.8	321.4	323.0	315.3	323.1	308.25	323.8	305.4	326.0

On a pu constater une bonne concordance entre les conclusions de l'étude de l'erreur de troncature en temps et la "faisabilité" d'une extrapolation de Richardson. En effet, si on tient à ce que l'erreur entre la solution de référence et la solution fournie par le schéma extrapolé reste négligeable, il faut que les pas de temps se situent dans l'intervalle que nous avons défini avant. Cet intervalle est bien entendu fonction du sol, mais aussi de la discrétisation spatiale (valeur de Δx). Si on ne respecte pas cette condition, l'extrapolation peut fournir des résultats faux. Par conséquent, avant d'utiliser une telle méthode, il faut s'assurer que pour le type de caractéristiques hydrodynamiques dont on dispose et pour la discrétisation spatiale qu'on a effectuée, les pas de temps qu'on va utiliser sont adéquats. Ceci peut être fait en testant sur un programme simulant le transfert monodimensionnel, différents pas. On constate alors très vite dans quelle mesure on ne respecte plus l'erreur théorique linéaire ou quadratique.

Couplée à un algorithme itératif, l'extrapolation de Richardson sur les pas de temps constitue une méthode efficace de réduction du temps de calcul pour une précision donnée. Ceci, encore une fois, à condition de respecter scrupuleusement la condition énoncée précédemment. On a pu voir que sur un sable par exemple, la linéarité de l'erreur n'était respectée que sur un intervalle de t assez petit.

III.6. Utilisation du théorème de Gershgorin pour l'étude la stabilité des schémas d'intégration. Application à l'équation de Richards

Nous avons déjà mentionné dans les paragraphes précédents quelques uns des problèmes liés à la stabilité des schémas.

-Impossibilité de faire une étude de stabilité globale pour une équation non linéaire.

-Liaison entre stabilité et spectre de valeurs propres de l'opérateur ou de sa jacobienne.

Les simulations effectuées sur différents types de sols ont permis de mettre en évidence le problème de l'existence et de l'amortissement des oscillations parasites. Nous avons constaté, à la suite de nombreux auteurs, la stabilité globale du schéma de Cranck-Nicholson, mais aussi sa capacité à générer et à amortir difficilement des ondes parasites, dans certaines conditions. Ces oscillations qui prennent naissance juste après passage du front, quand $\left| \frac{d\Psi}{dt} \right|$ varie rapidement, peuvent dénaturer le phénomène et entraîner

des problèmes du fait que la pression peut devenir positive en certains noeuds (Effet de Gibbs : BORIS (1981)) (cf. fig. 5 sur le schéma à 5 points).

La connaissance du spectre ou du moins une approximation le bornant, permet de prévoir ce genre de comportement et de choisir une méthode d'intégration adaptée. Plus encore que la connaissance du spectre, elle-même, il serait intéressant de relier ces variations à celles des paramètres de la discrétisation.

L'équation de Richards pouvant se mettre sous forme diffusion convection, nous allons avant de l'aborder montrer comment on peut utiliser le théorème de Gershgorin pour borner le spectre d'une équation de diffusion-convection linéaire et en déduire le comportement à l'intégration en fonction de quelques paramètres de la discrétisation.

III.6.1. Théorème de Gershgorin et application à l'équation de diffusion-convection

Considérons l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{munie de ses conditions aux limites et initiales.}$$

Il est bien connu que le caractère diffusif ou convectif, ie parabolique ou hyperbolique de l'équation, dépend de l'importance relative des coefficients D et v. Il est donc évident que le spectre de l'opérateur différentiel provenant d'une discrétisation spatiale quelconque dépendra de D et de v, entre autre. Le problème discret correspondant à l'équation ci-dessus s'écrit :

$$B \frac{dU}{dt} = -A \cdot U + f \quad B, A \text{ et } f \text{ étant des fonctions de } U \text{ dans le cas non-linéaire.}$$

On a vu alors que le système était dit "Stiff" si

$$\operatorname{Re}(\lambda(-B^{-1}A)) < 0 \quad \text{et si} \quad \max_{i=1, n} |\operatorname{Re}(\lambda_i)| \gg \min_{i=1, n} |\operatorname{Re}(\lambda_i)|$$

où $\lambda(-B^{-1}A)$ désigne une valeur propre de $B^{-1}A$.

Dans le cas non-linéaire, on considère le spectre des valeurs propres de $J = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)$ où $\frac{dU}{dt} = g(U, t)$, ce qui permet d'appréhender le comportement local du système.

Le théorème de Gershgorin, connu aussi sous le nom de théorème des disques, s'énonce de la façon suivante :

Théorème : Soit A une matrice de dimension n , à coefficients réels ou complexes. On note $\text{Spec}(A)$ le spectre de la matrice. On a alors :

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(A), \exists i / |\lambda - a_{ii}| \leq m_i \quad \text{où} \quad m_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}$$

ce qui s'écrit aussi : $\text{Spec}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Disc}(a_{ii}, m_i)$

où $\text{Disc}(a_{ii}, m_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 / d(x, a_{ii}) \leq m_i\}$ d désignant la distance habituelle

Prenons d'abord le simple problème de diffusion-convection que nous discrétisons en différences finies centrées. On obtient alors le système différentiel défini par :

$$\frac{dU_i}{dt} = \left(\frac{D}{h^2} + \frac{V}{2h} \right) U_{i-1} - \frac{2D}{h^2} U_i + \left(\frac{D}{h^2} - \frac{V}{2h} \right) U_{i+1}$$

C'est aussi le système auquel on arrive en utilisant une méthode d'éléments finis à fonction de base linéaire et en sommant les termes d'une même ligne pour la matrice de masse. Cette dernière opération est connue sous le nom de "lumping" (ZINCKIEWICZ, 1979).

L'application du théorème à la matrice tridiagonale du système conduit à considérer les disques centrés en :

$$-\frac{2D}{h^2} \quad \text{et de rayons} \quad r_i = \left| \frac{D}{h^2} + \frac{V}{2h} \right| + \left| \frac{D}{h^2} - \frac{V}{2h} \right|$$

Avant de traiter ce cas, on peut considérer les deux problèmes extrêmes consistant en des systèmes purements diffusifs et purement convectifs.

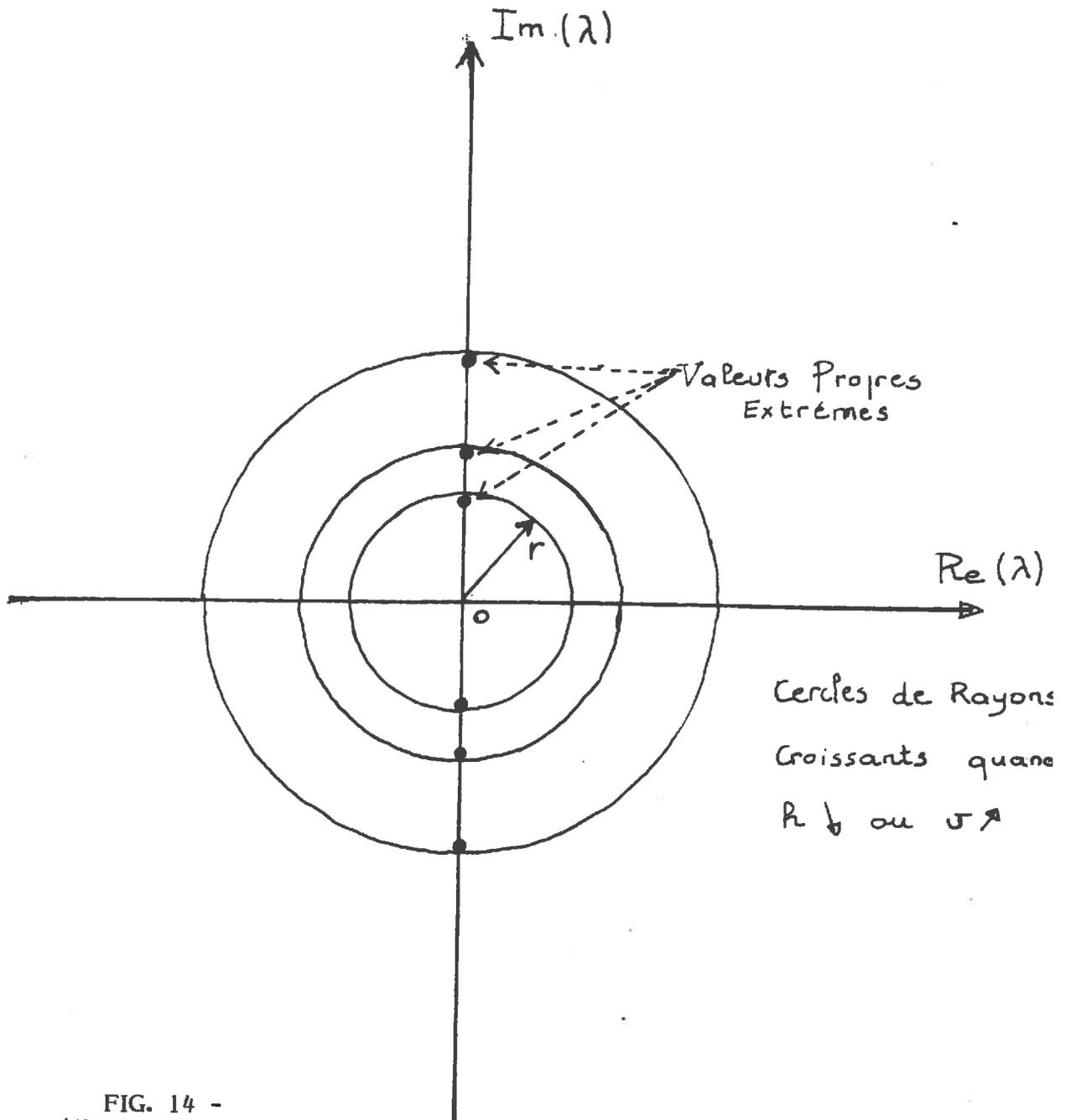


FIG. 14 -

Cercles de Gershgorin et valeurs propres pour le cas purement convectif.

Cas convectif

On suppose que $D = 0$. On a donc l'équation de convection et les cercles de Gershgorin sont centrés à l'origine. De plus, du fait de la linéarité de l'équation, on peut facilement obtenir les valeurs propres. En effet, on a une matrice tridiagonale de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2h} & & 0 \\ \frac{\nu}{2h} & & & \\ & & & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont alors définies par : $\lambda_j = i(\nu/h) \cos \frac{j\pi}{n+1}$

où i désigne le nombre imaginaire pur de module égal à 1 ($i = \sqrt{-1}$)

Les λ_j sont donc conjuguées deux à deux.

Le rayon du cercle de Gershgorin pour un indice j fixé est

$$\Gamma_j = \left| \frac{\nu}{2h} \right| + \left| -\frac{\nu}{2h} \right| \text{ c'est à dire } \Gamma_j = \frac{\nu}{h}$$

On s'aperçoit que les valeurs propres extrêmes ie: de module le plus élevé sont situées juste à l'intérieur des cercles de Gershgorin, qui sont tous égaux dans ce cas, où la matrice a des termes diagonaux constants. On constate qu'une croissance de ν ou une décroissance de h , ou les deux simultanément concourent à une augmentation du rayon des cercles et des valeurs propres extrêmes. (fig. 14)

Cas diffusif

On pose ici $\nu = 0$. On a donc la simple équation de diffusion. La matrice obtenue est alors tridiagonale telle que :

$$\begin{bmatrix} -\frac{2D}{h^2} & \frac{D}{h^2} & & \\ \frac{D}{h^2} & & & \\ & & & \\ & & & -\frac{2D}{h^2} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas là aussi, on peut aisément calculer les valeurs propres, qui sont égales à :

$$\lambda_j = -\frac{2D}{h^2} \left(1 - \cos \frac{j\pi}{n+1} \right)$$

Elles sont donc réelles et les cercles de Gershgorin ont pour rayon commun $\Gamma_j = \frac{2D}{h^2}$

. Le centre étant en $-\frac{2D}{h^2}$, ils sont complètement dans le demi-plan $\text{Re}(\lambda) < 0$ et tangents à l'axe imaginaire en 0.

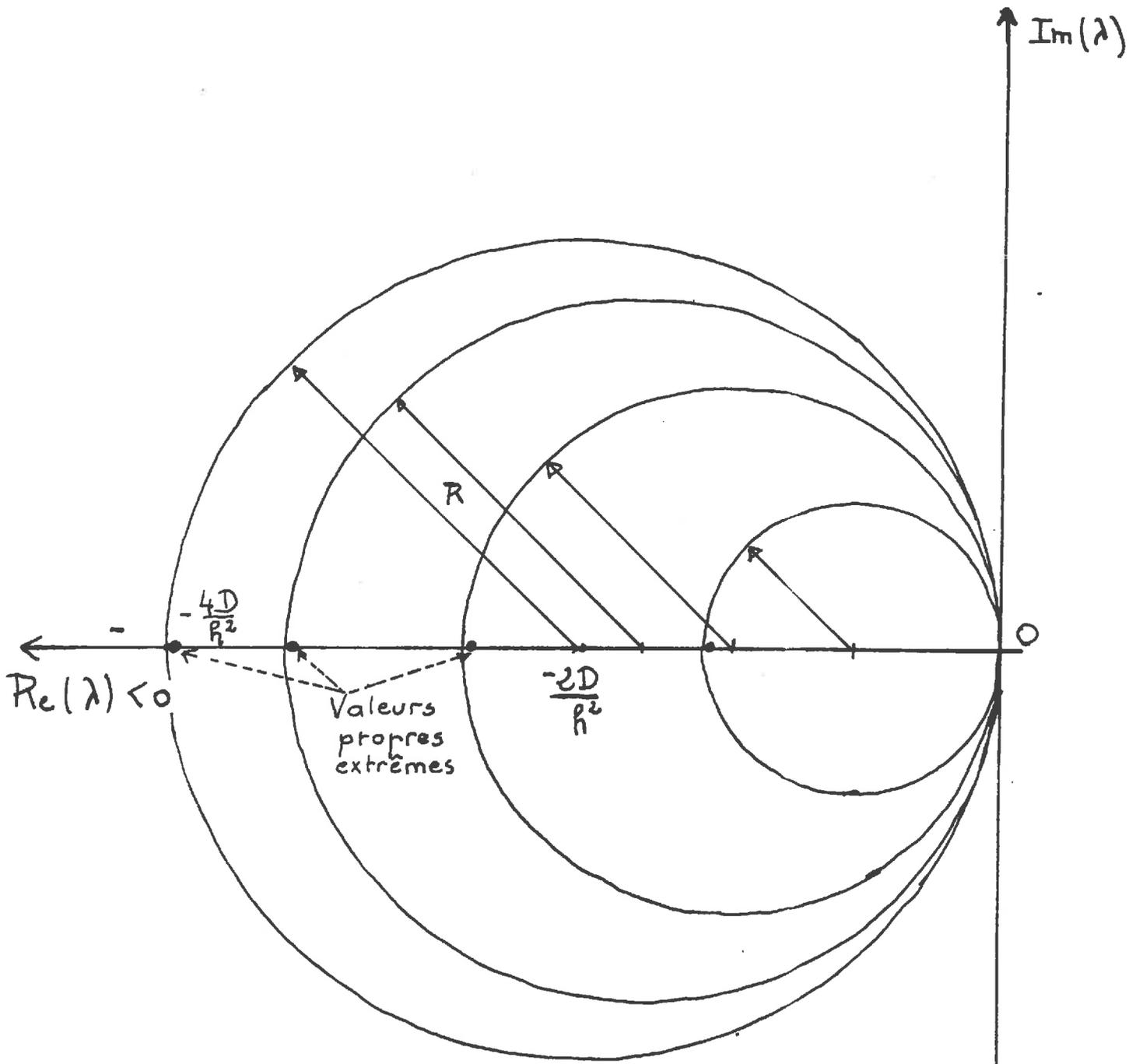


FIG. 15 -

Cercles de Gershgorin et valeurs propres dans le cas Diffusif.

On constate aussi que les valeurs propres sont comprises dans l'intervalle ouvert $] -\frac{4D}{h^2}, 0 [$ (fig. 15)

L'analyse de ces deux cas tests suggère que pour un cas intermédiaire où diffusion et convection se trouvent réunies, on a des valeurs propres avec des parties imaginaires qui peuvent ne pas être nulles, selon les valeurs respectives de D et v . Si on regarde les cercles de Gershgorin, on s'aperçoit qu'ils ont pour centre $-2D/h^2$, mais que les rayons définis par

$$r_j = \left| \frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h} \right| + \left| \frac{D}{h^2} - \frac{v}{2h} \right| \quad \text{valent :}$$

et $\frac{v}{h} \quad \text{si} \quad \frac{2D}{h^2} < \frac{v}{h}$

$$\frac{2D}{h^2} \quad \text{si} \quad \frac{2D}{h^2} \geq \frac{v}{h}$$

On a donc pour un pas d'espace h fixé, et pour un coefficient de diffusion D croissant, des cercles de rayons constants égaux à v/h tant que $\frac{2D}{h^2} \leq \frac{v}{h}$; coupant l'axe des imaginaires et dont les centres se déplacent vers la gauche en partant de O (fig. 16).

Puis à partir de D tel que $2D/h^2 = v/h$, on a une suite de cercles tangents à l'axe imaginaire en O et de rayons croissants $2D/h^2$

En notant (a) les termes (tous égaux) de la diagonale et (b) et (c) ceux des sous et sur-diagonales, on sait que les valeurs propres sont données par :

$$\lambda_i = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{i\pi}{n+1} \quad i=1,2$$

En revenant aux cas décrits avant, on voit que si $\frac{2D}{h^2} < \frac{v}{h}$ alors le produit bc est négatif et que par conséquent on a une partie imaginaire non nulle et de module :

$$2\sqrt{bc} \cos \frac{i\pi}{n+1}$$

En se rappelant que dans un cas linéaire, on a une solution dans laquelle apparaissent des exponentielles, on voit donc que ces valeurs propres complexes, vont introduire dans la solution des termes oscillants.

Il est d'ailleurs bien connu que des valeurs propres imaginaires sont à la base de problèmes d'oscillations. De même, il apparaît que dès que $\frac{2D}{h^2} \geq \frac{v}{h}$ la partie imaginaire s'annule et que l'on a donc un spectre entièrement réel. Remarquons toutefois que dans le cas où la partie imaginaire est différente de O , la partie réelle est négative et que par conséquent le spectre

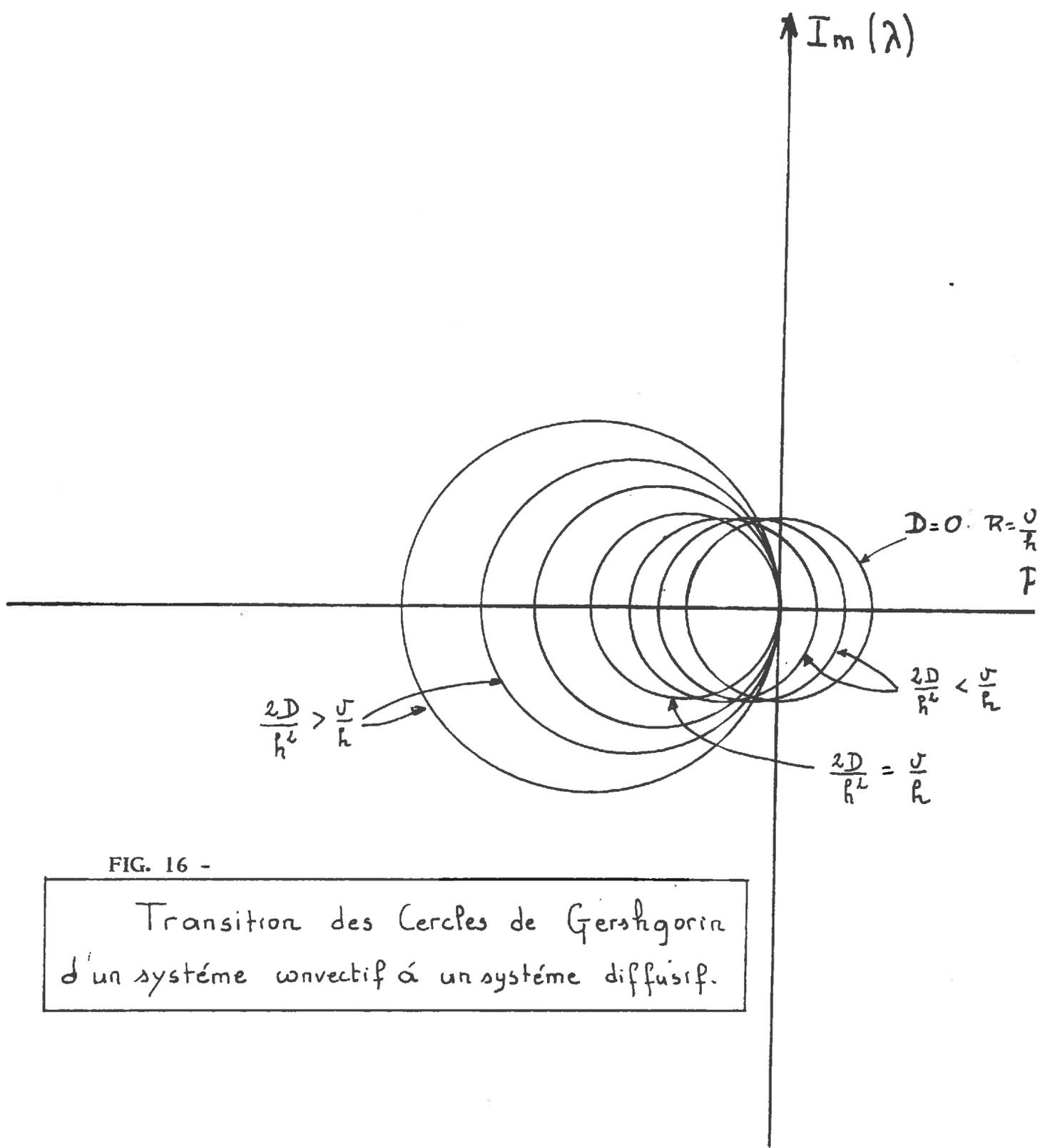


FIG. 16 -

Transition des Cercles de Gerstingorin
d'un système convectif à un système diffusif.

est tout entier inclus dans le demi-plan $\text{Re}(\lambda) < 0$ et plus précisément dans un cône de sommet 0 et d'angle α supérieur ou égal à : $\max_i |\arg(\lambda_i)|$

On peut donc conclure, que dans le cas des équations linéaires, lorsque les cercles de Gershgorin ne coupent pas l'axe imaginaire, ailleurs qu'en zéro, les valeurs propres sont réelles et le système diffusif, tandis que dans le cas inverse on a des valeurs propres à parties imaginaires non nulles. Cette indication sur la localisation du spectre peut être utilisée pour le choix de la méthode d'intégration et pour estimer la "stiffness" du système.

III.6.2. Applications

Soit D et v fixés. On peut étudier grâce au théorème précédent les effets introduits par la discrétisation spatiale. De fait, celle-ci modifie les caractéristiques initiales de l'opérateur, à travers le type de discrétisation, l'ordre, la finesse du maillage, etc....

a) Finesse du maillage et raffinement

Considérons un maillage régulier de pas h_i dans le cas monodimensionnel par exemple. On sait alors que pour l'équation de diffusion-convection, on a le rayon des disques qui vaut :

$$r_i = \begin{cases} \frac{v}{h_i} & \text{si } \frac{2D}{h_i^2} < \frac{v}{h_i} & (1) \\ \frac{2D}{h_i^2} & \text{si } \frac{2D}{h_i^2} \geq \frac{v}{h_i} & (2) \end{cases}$$

-Si on se trouve dans la situation (1), un raffinement du maillage va faire croître plus vite $\frac{2D}{h_i^2}$ que $\frac{v}{h_i}$, et par conséquent va induire un déplacement des cercles vers la gauche avec un accroissement simultané du rayon. On peut même prédire à partir de quelle valeur de h on va passer d'un système ayant des valeurs propres complexes à un système ayant des valeurs propres purement réelles. On peut donc augmenter progressivement la partie diffusive de l'opérateur discret jusqu'à éliminer complètement l'aspect convectif. L'aspect gênant de cette manoeuvre est une augmentation rapide du rayon spectral et la diminution concomitante du pas de temps, nécessaire à la stabilité de l'intégration ou à sa convergence dans le cas où on utilise un algorithme de point fixe.

On peut noter, à ce propos, quelques remarques faites dans la littérature. **FIRDAOUSS et al. (1983)** remarquent que dans un problème d'infiltration par tranchée filtrante, la diminution du pas d'espace supprime presque complè-

tement ou du moins réduit largement les oscillations observées après le passage du front. Celles-ci étaient de 3 % de θ_s pour un $dz = 3$ cm et presque nulles pour $dz = 1$ cm). Si on veut prendre en compte l'effet d'hystérésis, ce problème d'oscillation revêt alors une grande importance. En effet, les oscillations se traduisent par un changement de signe périodique de $\frac{d\psi}{dt}$, en certains noeuds du maillage ce qui correspond à de "faux" changements de modes de fonctionnement (alternance drainage-humectation). Outre le fait qu'ils soient sans significations physiques, ils peuvent introduire des perturbations supplémentaires dans le calcul (variations du bilan par exemple quand on change de branche d'hystérésis).

b) Discrétisation spatiale décentrée

La discrétisation spatiale décentrée des termes convectifs est bien connue pour introduire de la diffusion et éviter l'apparition d'oscillation parasites sur la queue des courbes. Si on reprend notre simple équation de diffusion convection $\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - v \frac{\partial U}{\partial x}$, on s'aperçoit que les formes discrètes "centrées et décentrées" peuvent s'écrire simplement de façon combinée à l'aide d'un paramètre, noté ici α .

On a :

$$\frac{dU_i}{dt} = U_{i-1} \left(\frac{D}{\Delta z^2} + \frac{v}{2h} + \frac{\alpha v}{2h} \right) - U_i \left(\frac{D}{\Delta z^2} + \frac{2\alpha v}{2h} \right) + U_{i+1} \left(\frac{D}{\Delta z^2} - \frac{v}{2h} + \frac{\alpha v}{2h} \right)$$

Il suffit alors de faire $\alpha = 0$ pour avoir le schéma centré et $\alpha = 1$ pour le schéma décentré arrière. On a donc en utilisant cette formulation toute une plage de valeurs de α ($0 \leq \alpha \leq 1$) pour lesquelles on introduit de la diffusion. Le théorème de Gershgorin fournit un outil simple pour l'étude de ce genre de discrétisation.

Si on fixe le pas d'espace, on peut alors définir la valeur de α pour laquelle on obtiendra un système diffusif.

On a :

$$r_i = \left| \frac{D}{\Delta z^2} + \frac{v}{2\Delta z} + \frac{\alpha v}{2\Delta z} \right| + \left| \frac{D}{\Delta z^2} - \frac{v}{2\Delta z} + \frac{\alpha v}{2\Delta z} \right|$$

$$\text{i.e : } r_i = \begin{cases} \frac{v}{\Delta z} & \text{si } \frac{D}{\Delta z^2} + \frac{\alpha v}{2\Delta z} < \frac{v}{2\Delta z} \\ \frac{2D}{\Delta z^2} + \frac{2\alpha v}{2\Delta z} & \text{si } \frac{D}{\Delta z^2} + \frac{\alpha v}{2\Delta z} \geq \frac{v}{2\Delta z} \end{cases}$$

Δz , D , v étant fixés, le système commence à être diffusif pour des valeurs de α supérieures ou égales à $1 - 2D / (v \Delta z)$

$$\text{c'est à dire } (1 - \alpha) < 2D / v \Delta z$$

En se définissant un nombre de Peclet cellulaire par :

$$1/P_e = D / v \Delta z \quad \text{on a } 2/P_e \geq 1 - \alpha \quad \text{soit } \alpha \geq 1 - 2/P_e$$

On voit donc que pour des nombres de Peclet cellulaires un peu grand α tend très vite vers 1. On peut raisonner inversement pour obtenir Δz avec α fixé.

c) Dans le cas où on a un maillage éléments finis ou différences finies non uniforme, il est évident d'après ce qui précède que le rayon spectral est directement relié à la maille de plus petite taille où l'on peut observer une variation de la solution. Il est bien clair que si on est dans une zone où les gradients ou la vitesse sont nuls, la forme du maillage n'a que peu d'influence sur le spectre.

Si on est en présence de plusieurs milieux ayant des coefficients de diffusion différents, ou encore dans le cas d'une équation non-linéaire où la diffusion varie de façon brutale au voisinage des fronts, on aura des valeurs propres de tailles très différentes selon le point du maillage où on se trouve. Tout ceci, concourt à étaler le spectre et à augmenter la "stiffness" du système.

On peut citer encore les résultats suivants :

- L'utilisation de formules d'approximations d'ordre élevé (en différences finies) ou d'éléments de haute précision augmente la "stiffness" et donc l'effort de résolution (couplage, pas de temps, ...)

- Les cas multidimensionnels ont des valeurs propres plus grandes et voient donc s'accroître le travail nécessaire à la résolution indépendamment de la taille.

III.6.3. Essai d'application à l'équation de Richards

L'équation de Richards peut se mettre sous une forme faisant apparaître les termes diffusifs et convectifs, quelquefois appelée "forme décomposée". Si l'inconnue est la charge totale $h = \psi - z$ (ψ : potentiel capillaire), on a :

$$c(\psi) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa(\psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad \text{qui devient en développant :}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\kappa(\psi)}{c(\psi)} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{c(\psi)} \frac{d\kappa(\psi)}{dz} \frac{\partial h}{\partial z}$$

κ/c est la diffusivité capillaire et $(1/c) \frac{d\kappa}{dz}$ a la dimension d'une vitesse. On a donc une équation analogue à l'équation de diffusion convection. On notera D le rapport κ/c et $v = \frac{1}{c(\psi)} \frac{d\kappa(\psi)}{dz}$

En discrétisant en différences finies centrées et en notant $g(h, t)$ le second membre du système différentiel, la matrice Jacobienne est alors tridiagonale et donnée par :

$$\frac{\partial g_i}{\partial h_i} = 0 \quad \text{si } i \neq j-1, j, j+1 \quad \frac{\partial g_i}{\partial h_{j-1}} = \frac{D_i}{\Delta z^2} + \frac{v_i}{2\Delta z} \quad \frac{\partial g_i}{\partial h_{j+1}} = \frac{D_i}{\Delta z^2} - \frac{v_i}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial h_j} = -\frac{2D_j}{\Delta z^2} + \frac{\partial D_j}{\partial h_j} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial v_j}{\partial h_j} \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad \text{les dérivées étant évaluées au point (h) et où}$$

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] = \frac{h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}}{\Delta z^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] = \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2\Delta z}$$

Les rayons des cercles sont donc donnés par :

$$r_i = \left| \frac{D_i}{\Delta z^2} + \frac{v_i}{2\Delta z} \right| + \left| \frac{D_i}{\Delta z^2} - \frac{v_i}{2\Delta z} \right|$$

$$\text{Les centres sont donc : } -\frac{2D_i}{\Delta z^2} + \frac{\partial D_i}{\partial h_i} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial v_i}{\partial h_i} \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right]$$

Dans le cas où D et v ne dépendent pas de h , on est ramené à comparer $\frac{D_i}{\Delta z^2}$ et $\frac{v_i}{2\Delta z}$, mais ici les centres des cercles ne sont pas en $-2D_i/\Delta z^2$.

On peut voir que tout va dépendre du signe de

$$\frac{\partial D_i}{\partial h_i} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial v_i}{\partial h_i} \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right]$$

On peut faire une étude succincte. Si on se place dans un processus d'infiltration, à partir d'un profil initial uniforme, on aura :

$$\frac{\partial D}{\partial h} < 0 \quad \text{en tout point du profil}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} < 0 \quad \text{""}$$

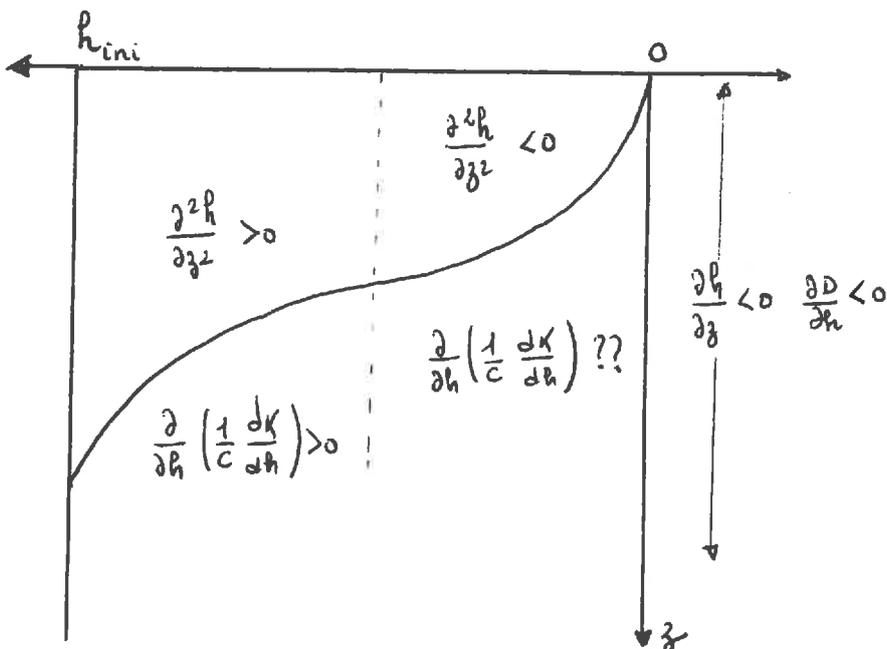
$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} < 0 \quad \text{jusqu'au point d'inflexion,} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} > 0 \quad \text{au-delà}$$

En ce qui concerne $\frac{\partial v}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{c} \frac{dk}{dh} \right)$, on peut énoncer les résultats suivants :

$\frac{1}{c}$ croissant quel que soit le point du profil

$\frac{dk}{dh}$ décroissant jusqu'au point d'inflexion, croissant au-delà

d'où $\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{c} \frac{dk}{dh} \right) > 0$ au-delà du point d'inflexion et il est difficile de conclure de façon globale pour les points situés avant, puisque $\frac{1}{c}$ et $\frac{dk}{dh}$ ont des sens de variations opposés.



On voit donc que

$$\frac{\partial D}{\partial h} \Big|_i \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) < 0 \quad \text{après le point d'inflexion}$$

$$\frac{\partial v}{\partial h} \Big|_i \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) < 0 \quad \text{" "}$$

On peut en déduire que le centre des cercles est décalé à gauche pour les points du maillage situés après le point d'inflexion, et par conséquent que les cercles associés ne coupent pas l'axe imaginaire.

On est donc dans un système diffusif. Pour les points situés avant le point d'inflexion, on a $\frac{\partial D}{\partial h} \Big|_i \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ qui est positif. Si $\partial v_i / \partial h_i$ est négatif ou si $\left| \frac{\partial D}{\partial h} \Big|_i \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] \right| > \left| \frac{\partial v}{\partial h} \Big|_i \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right|$, alors on peut avoir des cercles interceptant l'axe imaginaire, et donc introduction d'oscillations.

On peut constater numériquement que quand celles-ci apparaissent, c'est toujours sur la queue des courbes (t), c'est-à-dire pour des points ayant vu passer le front c'est-à-dire des points du profil situés entre la surface et le point d'inflexion, ce qui est cohérent avec nos déductions.

Remarquons que dans les premiers instants de l'apport d'eau, on a des valeurs propres très différentes, correspondant à des termes diagonaux, grands sur les tous premiers noeuds (n° 1 ou 2) et petits sur les autres. Ceci se traduit par une grande "stiffness" du système et la nécessité d'utiliser des petits pas de temps. Dès que le phénomène et que les gradients s'adoucissent, on a un écart moins grand entre valeurs propres et une transition plus douce des plus grandes aux plus petites. Le pas de temps peut alors grandir.

Les déductions générales que nous avons faites dans le cas général sont applicables ici. La diminution du pas d'espace conduit à une diminution du pas de temps, du fait de l'accroissement de "stiffness". On retrouve là un résultat bien connu qui dit que pour avoir stabilité, il faut réduire le pas de temps quand on réduit le pas d'espace.

Le fait que le spectre soit étalé, ie le fait que le problème soit "stiff" implique la mise en oeuvre de méthode L-stables. On peut constater sur les simulations que les méthodes d'intégration telles C.N ou plus généralement A-stable, ont besoin de pas de temps petits si on veut éviter l'apparition d'oscillations et que dans les cas où l'écart entre valeurs propres est localement très marqué (sable), celles-ci peuvent persister.

A l'inverse, les méthodes L-stable, tel le schéma implicite pur, permettent l'emploi de pas de temps plus grands et amortissent vite les oscillations. On a souligné dans le paragraphe précédent (III.4.3.), leur moins grande sensibilité à une augmentation de dt. De nombreux auteurs, ont constaté sur divers problèmes de transferts (eau, sel, chaleur, ...) l'incapacité du schéma de C.N, à rendre compte, sans oscillations parasites, du phénomène. VAUCLIN et al. (1979) soulignent dans leur étude que les ondulations et instabilités peuvent survenir aussi bien avec l'équation dite du "bilan local", qu'avec l'équation décomposée. Il est aussi signalé que le mode de linéarisation peut avoir une influence.

MADALA et Mc DONALD (1981) signalent aussi que pour des problèmes de diffusion décrits par l'équation : $\text{div}(\kappa(\cdot) \text{grad}(\cdot))$ les valeurs propres sont très étalées si K varie beaucoup et que la solution est alors plus difficile à obtenir ("making the numerical solution, more difficult"). Un des remèdes étant selon eux de diviser par K de façon à transformer l'opérateur auto-adjoint $\text{div}(K(\cdot) \text{grad}(\cdot))$ en l'opérateur non auto-adjoint $\Delta + \text{div}(\text{Log}(\kappa) \text{grad}(\cdot))$. La matrice du système discret n'est alors plus symétrique et peut admettre des valeurs propres complexes. Mc DONALD propose alors de résoudre le système linéaire par une méthode itérative de Chebychev. Celle-ci requiert la dimension de l'ellipse bornant le spectre pour optimiser le calcul et la vitesse de convergence.

On a pu constater combien les notions de stabilité, de diffusion, de convection étaient liées. L'introduction explicite de terme de diffusion ou implicite (ie : à travers le schéma) est un moyen très utilisé comme on l'a vu d'amortissement des oscillations et de contrôle de la stabilité. Cette perturbation, si elle assure un bon déroulement des calculs, n'en est pas moins une source d'erreurs. Il nous a semblé intéressant d'essayer de la quantifier, et de voir jusqu'à quel point elle peut dénaturer la solution.

IV. DIFFUSION NUMERIQUE

La diffusion numérique peut être introduite par discrétisation décentrée du terme convectif, comme on l'a vu, mais aussi lors de l'approximation de la dérivée $d\psi/dt$. On va s'attacher à cette dernière dans ce qui suit.

IV.1. Théorie et Rappels

On réécrit l'équation de Richards sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} (h) \frac{\partial h}{\partial z} \quad (*)$$

L'approximation de $\partial h / \partial t$ dans le schéma implicite pur provient de :

$$\frac{h^{j+1} - h^j}{\Delta t} = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|^{j+1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} (\tilde{t}) \quad \tilde{t} \in [j \cdot \Delta t, (j+1) \Delta t]$$

d'où

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|^{j+1} = \frac{h^{j+1} - h^j}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} (\tilde{t}) = \frac{\kappa}{c} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right]^{j+1} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right]^{j+1}$$

Si on calcule $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$ à partir de (*), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\kappa}{c} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

En supposant l'inversibilité des dérivées par rapport à t et à z, on obtient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\kappa}{c} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

On remplace alors $\frac{\partial h}{\partial t}$ par l'équation (*) et on obtient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\kappa}{c} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

En supposant les coefficients localement constants, ce qui est le cas dans une méthode de différence finie où on linéarise, les dérivées par rapport au temps des différents coefficients faisant intervenir K et C disparaissent.

Il reste alors des termes en $\frac{\partial h_i}{\partial z_i}$ $i = 1, 2, 3, 4$, à savoir :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\kappa^2}{c^2} \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} + 2 \frac{\kappa}{c^2} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

L'équation que l'on résoud est donc :

$$\frac{h^{d+1} - h^d}{\Delta t} = \frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \Big|^{d+1} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial h}{\partial z} \Big|^{d+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \\ + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{2\kappa}{c^2} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \left(\frac{\kappa}{c} \right)^2 \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} \right]$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient :

$$\frac{h^{d+1} - h^d}{\Delta t} = \left(\frac{\kappa}{c} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \Big|_{d+1} + \frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{d+1}$$

On voit donc, que quand on utilise le schéma backward, on rajoute implicitement une diffusion numérique dont une estimation locale est donnée par $\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right)^2 = D_n$. Il faut noter que dans un schéma explicite, la diffusion numérique est de même modèle, mais de signe opposé.

IV.2. Résultats numériques

L'analyse de la formule $D_n = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{d\kappa}{dz} \right)^2$, fait donc apparaître une variation linéaire en fonction du temps, mais aussi quadratique en fonction du gradient de conductivité. Celle-ci sera donc maximale au voisinage des fronts d'humectation. Les gradients diminuant au cours du temps, on peut s'attendre à ce qu'elle devienne très faible. Enfin, il ne faut pas perdre de vue que c'est un phénomène essentiellement local et n'affectant sensiblement que les zones du domaine où existent des gradients de conductivité forts. Sa valeur en soi n'a que peu d'intérêt et il est plus intéressant de la comparer à la diffusion réelle.

On a calculé une solution de référence en utilisant un schéma de C.N avec un petit pas de temps, de façon à éviter toute oscillation et à profiter de l'absence de diffusion numérique dans un schéma de C.N (discrétisation centrée de $d\psi/dt$). L'erreur d'intégration, pour un schéma implicite, est une combinaison de l'erreur de troncature et de la diffusion numérique introduite.

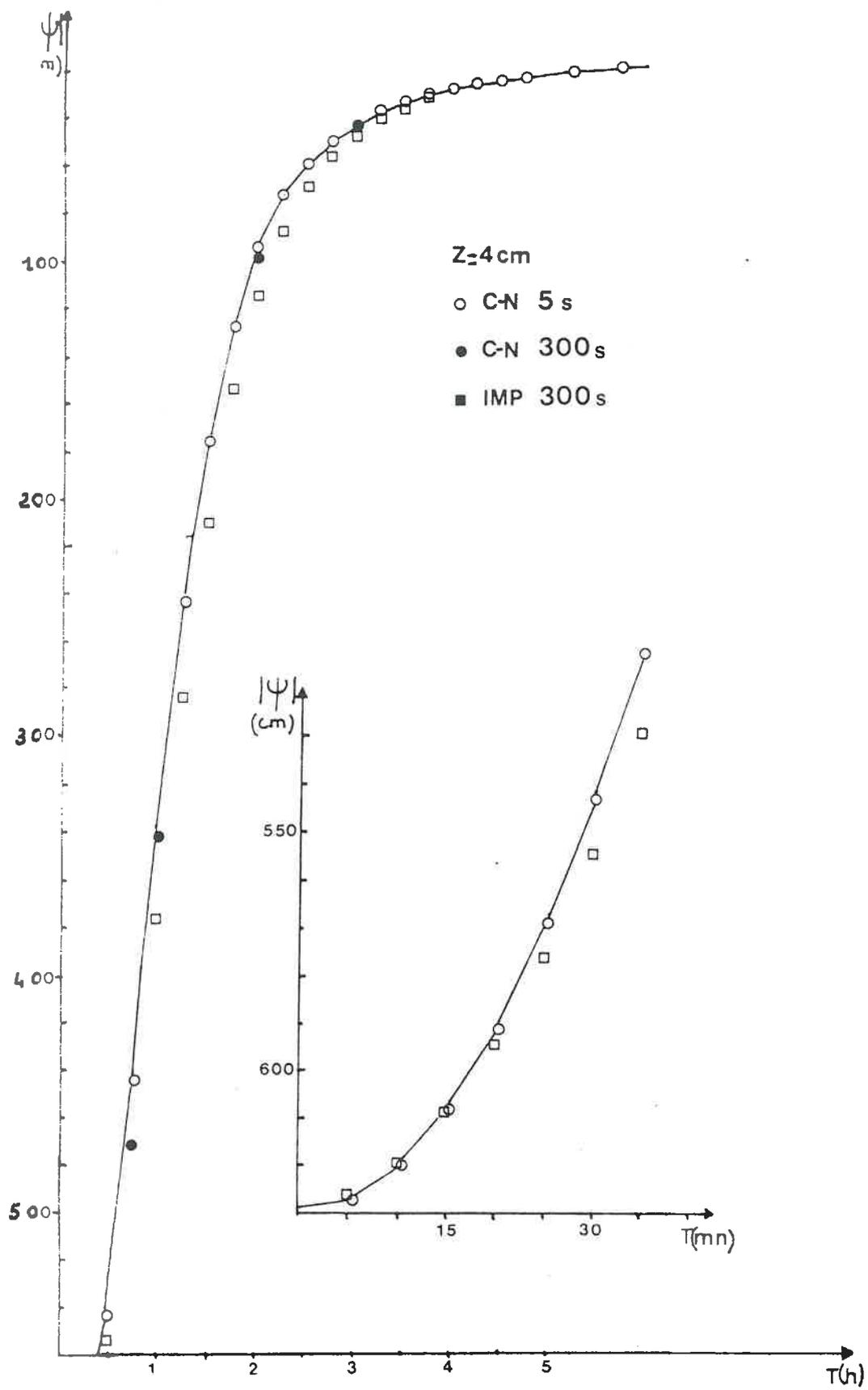


FIG. 17 -

Il est donc assez difficile de les séparer, dans la mesure où on n'a accès globalement qu'aux deux à la fois. Etant donné que l'on rajoute de la diffusion, on pourrait s'attendre à ce que les courbes $\psi_z(t)$ fassent apparaître une variation plus précoce de la pression en un point donné, qu'avec un schéma de C.N. En fait, on peut voir (fig. 17) qu'il n'en est rien et que l'on a plutôt un retard. En remarquant sur les courbes (fig. 17) que le schéma implicite sous-estime la solution à un temps donné, on peut en conclure que la diffusion numérique qui s'oppose à l'erreur de troncature, est relativement faible, puisqu'elle ne permet pas de la faire changer de signe, sauf en avant du front (cf. fig. 17).

La figure 17 présente l'évolution du coefficient de diffusion numérique estimé et de la diffusivité à différentes cotes au cours du temps.

On peut constater que d'une part elle diminue avec la profondeur et d'autre part qu'elle est maximale à un niveau donné, au temps correspondant au passage du point d'inflexion de la courbe $\psi(z)$ à cette cote là, ce maximum étant de plus en plus faible. Donc, si elle perturbe la solution, elle ne le fait réellement de façon importante que dans les premiers centimètres. En se reportant à la figure 19, on peut voir que la norme infinie du vecteur erreur varie à peu près linéairement avec le pas de temps, ce qui semble indiquer là aussi, que dans notre cas, c'est l'erreur de troncature qui est primordiale. On remarquera la décroissance des pentes avec le temps.

Tableau récapitulatif sur erreur de troncature plus diffusion

$$\text{On note } \|e_{\text{imp}}^{dt}\|_{\infty} = \text{Max}_{[0,z]} |\psi_{\text{imp}}^{dt}(z) - \text{CN}_{5,4}(z)|$$

On a porté dans le tableau ci-dessous les $\|e_{\text{imp}}^{dt}\|_{\infty}$ pour les temps (2h, 6h, 12h) et pour $dt = 5 \text{ s}, 20 \text{ s}, 60 \text{ s}, 120 \text{ s}, 180 \text{ s}, 300 \text{ s}$.

On a effectué la régression linéaire : $\|e_{\text{imp}}^{dt}\|_{\infty} = a + b dt$

temps	5s	20s	60s	120s	180s	300s	r^2	t(Stud)	a	b
2h	.5	2.8	9.8	20	29.9	48.2	.999	.036	-.05	.163
6h	.4	2.6	6.3	16.9	25.4	32.8	.966	.414	.874	.116
12h	.3	1.6	4.2	8.6	12.8	26.8	.983	.306	-.908	.087

Tableau : Linéarité de l'erreur de troncature

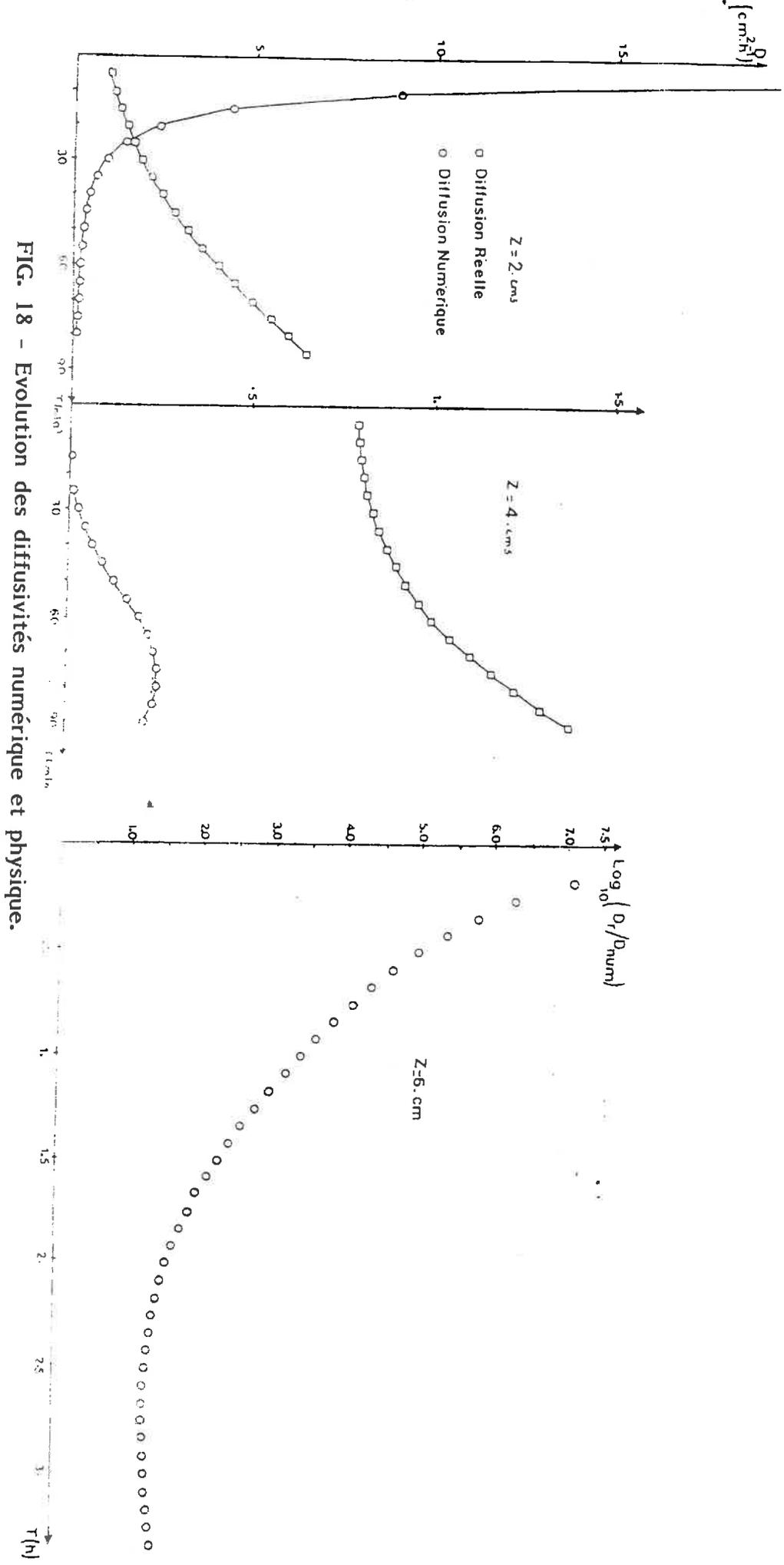


FIG. 18 - Evolution des diffusivités numérique et physique.

$\|e\|_{\infty}$ (cm)

- 2.h
- 6.h
- 12.h

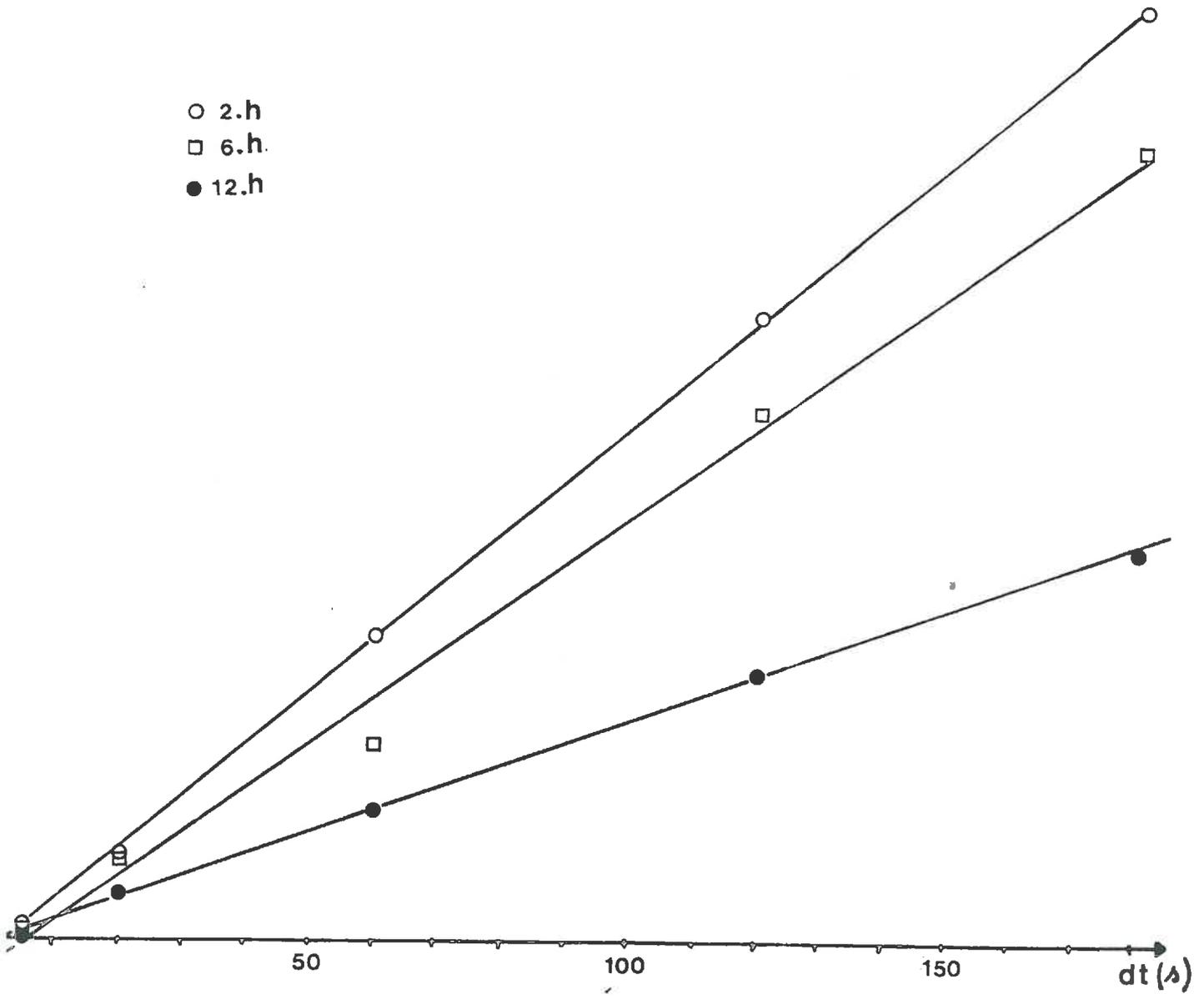


FIG. 19 - Erreur de troncature et de diffusion numérique en fonction du pas de temps.

Les tests de Student permettent de dire que les ordonnées à l'origine ne sont pas significativement différentes de zéro à 95 %. La perte de linéarité de l'erreur en fonction du pas de temps pour des dt grands est due, comme on l'a déjà dit, à la non-linéarité. Il peut, peut-être, s'y ajouter l'influence de la diffusion numérique. Si on ôte les valeurs obtenues à 300 secondes, on a :

l'emps	r^2	a	b	t(Stud)	a sign. $\neq 0$
2h	1.000	-.406	.169	1.2	non
6h	.993	-.08	.144	.351	non
12h	1.000	.032	.071	.125	non

Le problème de la diffusion numérique a intéressé de nombreux chercheurs du fait qu'elle est nécessaire à la stabilité du calcul et que d'autre part elle biaise la solution. Sur son origine, BORIS et BOOK (.) soulignent que dans un calcul en variables Euleriennes, c'est-à-dire tels qu'ils sont généralement effectués en milieux poreux, la diffusion numérique survient du fait qu'on étale sur toute une cellule la perturbation qui vient juste d'affecter un de ses bords. Le palliatif, bien connu et mentionné par bien des auteurs (BORIS et BOOK, 1981 ; ZALEZAK, 1981 ; THIRRIOT, 1980) était de travailler en variables Lagrangiennes pour le terme convectif. A ce propos, THIRRIOT fait remarquer que, après application de la transformée de Kirchoff à l'équation de Richards, il subsiste un terme convectif non négligeable. Sur le problème du traitement des termes convectifs, BORIS, BOOK et ZALEZAK proposent un algorithme permettant de contrôler la diffusion artificielle rajoutée pour avancer la solution, en évitant les oscillations, puis de l'enlever une fois le pas de temps effectué. RAVIART (1981) présente, entre autre, cette méthode pour le traitement des termes convectifs, dans le cadre des méthodes Lagrange-projection. BORIS relève que l'inconvénient des méthodes Lagrange est la déformation du maillage qui peut faire perdre l'ordre d'approximation quadratique pour une dérivée première centrée, s'il y a juxtaposition de cellules de tailles trop différentes.

Pour essayer de mieux faire apparaître le problème de la diffusion numérique et de l'étalement artificiel des fronts, on a fait l'expérience numérique suivante. On a simulé une infiltration avec un schéma de C.N et un petit pas de temps. Ce résultat a été considéré comme la sortie d'une expérience de laboratoire, où on aurait enregistré la pression à diverses

profondeurs. On a ensuite cherché à réestimer le K_{sat} à partir d'un schéma implicite et avec divers pas de temps. L'algorithme de minimisation par moindres carrés est celui de Gauss-Marquardt.

On a pu observer que les résidus étaient toujours systématiquement biaisés. Tous positifs, puis tous négatifs. Les valeurs réestimées ont été les suivantes :

<u>Yolo-light Clay</u>		$z = 1 \text{ cm}$	$K_s = .4428 e^{-1}$	
	K_s		Ic à 95 %	
dt = 5 s	$.440792 e^{-1}$	$.386 e^{-4}$	$.440027 e^{-1}$	$.441558 e^{-1}$
dt = 30 s	$.44878 e^{-1}$	$.245467 e^{-4}$	$.448297 e^{-1}$	$.44927 e^{-1}$
dt = 60 s	$.465621 e^{-1}$	$.26153 e^{-4}$	$.465047 e^{-1}$	$.466145 e^{-1}$

On peut observer qu'il faut systématiquement surestimer le K_s , c'est-à-dire puisque la diffusion numérique augmente la diffusion réelle, que l'erreur de troncature est bien prépondérante. L'erreur est toujours assez faible, et atteint un peu plus de 5 % à dt = 60 s. Le biais relevé dans les résidus est bien la preuve de l'existence de la diffusion numérique, surtout en avant du front, puisque c'est là que les résidus sont positifs ($res = y_{ajusté} - y_{obs}$).

CONCLUSIONS

Notre étude a porté sur les deux principaux problèmes posés par la résolution d'une équation aux dérivées partielles : stabilité et convergence. Elle s'est limitée, pour des raisons évidentes d'intérêt et de calcul, au cas monodimensionnel de l'équation de Richards, mais les résultats quantitatifs ou qualitatifs obtenus sont applicables au cas multidimensionnel.

L'approximation de l'opérateur spatial de l'équation de Richards, par des formules discrètes, a été étudiée. Nous avons montré que l'ordre d'approximation quadratique n'est pas toujours et partout présent (Fonction du temps, de la place du point par rapport au front, du type de sol c'est-à-dire en fait des caractéristiques hydrodynamiques). Nous en avons déduit, dans la suite de notre étude, l'impossibilité d'utiliser avec suffisamment de robustesse une méthode d'extrapolation de Richardson sur les pas d'espace. L'étude de l'approximation

sur cinq points nous a permis de conclure à son inadaptation et donc au fait qu'on ne saurait éviter le problème du calcul des conductivités internodales. C'est là, à notre avis, un résultat important car comme on l'a montré, ce calcul a une influence non négligeable sur la solution finale.

Nous avons vérifié la relativement bonne linéarité de l'erreur introduite par le schéma implicite pour la discrétisation de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et quadratique pour le schéma de C.N. Il a été alors possible de mettre en oeuvre une méthode de Richardson sur les pas de temps. Les résultats obtenus étaient de qualité variables en fonction du type de sol et en tous cas soulignaient la nécessité absolue de rester dans un intervalle de pas de temps où l'ordre théorique d'approximation fût respecté, faute de quoi on ne pouvait plus contrôler le devenir de l'erreur.

Nous avons abordé le problème de la stabilité des schémas aux différences finies en découpant l'opérateur en ses parties spatiales et temporelles et en ne considérant plus que la stabilité des méthodes d'intégration de systèmes d'équations différentielles du premier ordre.

On a alors introduit la notion de stiffness du système différentiel, concept relié au spectre des valeurs propres de l'opérateur. Après un rappel des principales définitions de la stabilité, on replace les méthodes habituelles pour l'intégration de Richards dans le cadre plus général des méthodes A-stable et L-stable. On a alors proposé d'utiliser deux familles de méthodes A-stable et L-stable dues à Norsett, et permettant d'avoir des ordres d'approximation en temps élevés. Les tests conduits sur l'équation de Richards ont fourni des résultats variables en fonction du type de sol et du pas de temps. Très efficaces aux petits pas de temps, ces méthodes ont bien fait ressortir qu'on ne saurait utiliser des pas de temps grands avec des linéarisations, sans introduire une erreur importante. L'erreur de linéarisation aux pas de temps assez élevés est alors apparue comme prépondérante.

Les quelques tests que nous avons faits auparavant avaient souligné les problèmes survenant avec une méthode itérative de point fixe (convergence des itérations). La sensibilité aux conditions aux limites de type Neuman (flux importants) avait été mise en évidence.

Dans le cadre des problèmes d'oscillations parasites se développant quand le terme convectif est important, on a souligné le rôle du spectre des valeurs propres et proposé et montré comment on pouvait utiliser le théorème de Gershgorin.

C H A P I T R E I I

INTRODUCTION

La prévision du devenir de l'eau en irrigation localisée étant un problème d'intérêt agronomique, quelques auteurs, notamment Israéliens et Californiens, s'y sont intéressés, mais très peu en fait en essayant de modéliser de la façon la plus complète possible le système physique. On rencontre de nombreux articles donnant des solutions pour l'infiltration sous apport ponctuel ou en ligne, sous flaque circulaire ou pour une bande. Ces cas constituent des extrêmes de l'irrigation localisée, dont les principaux défauts sont de ne pas prendre en compte l'extension de la zone saturée, et de se limiter à l'intégration d'équations simplifiées (linéaires) découlant d'hypothèses faites sur la courbe de conductivité (Par exemple : $\frac{dK}{d\theta} = \text{cte}$).

Un des arguments avancés pour expliquer ce choix était la simplicité de mise en oeuvre, associée à un très faible coût de calcul par rapport à une solution numérique. Si celui-ci était acceptable, il y a encore quelques années, il nous paraît, à ce jour, complètement dépassé, dans la mesure où on dispose maintenant de micro-ordinateurs puissants, aptes à recevoir un programme de simulation, même important. L'attitude qui consiste à rechercher encore à ce jour, et aux prix de simplifications à tous niveaux, une solution analytique sous prétexte de coût ou de facilité, nous semble tout à fait rétrograde et relever d'une méconnaissance des moyens informatiques actuels. Que le modèle soit construit dans un but d'étude ou dans un objectif de prévision au terrain, on ne saurait justifier l'introduction de simplifications, le rendant inapte à simuler ou prendre en compte les diverses particularités que l'on ne manque pas de rencontrer quand on passe d'une parcelle à une autre. Il va de soi que la capacité des moyens informatiques augmentant et leur prix diminuant, cette attitude ne sera que plus vraie dans les années à venir.

N'importe lequel des deux codes mis au point pour l'irrigation localisée peut et a été implanté sur un micro-ordinateur malgré sa taille relativement importante. Les simulations ont été faites sur une machine relativement lente et inadaptée au calcul scientifique, ce qui renforce notre position à l'égard de l'utilisation de méthodes numériques.

Il nous semble donc que l'on puisse tout à fait s'orienter vers des modèles complexes, essayant d'inclure le plus possible les caractéristiques du milieu. Les tentatives d'utilisation des quelques modèles existant, numériques ou simplifiés, n'ont conduit à des résultats acceptables que dans quelques situations bien particulières. Sans entrer dans les détails, ce qui sera fait par la suite, on peut à notre avis distinguer deux sources principales à ces désaccords.

D'une part, les erreurs à la base de la modélisation, c'est-à-dire celles introduites lors de la transcription du système physique, en un ensemble d'équations. On peut citer par exemple : la non prise en compte de la variation temporelle des caractéristiques hydrodynamiques dans certains milieux.

Entre aussi dans cette classe l'hétérogénéité du milieu, l'approximation des caractéristiques hydrodynamiques ($dK/d\theta = \text{cte}$), la variabilité spatiale.

D'autre part, si le transfert d'eau en plusieurs dimensions est un problème relativement bien résolu et qui a fait l'objet de bien des études, on constate comme il est montré par la suite, des écarts non négligeables entre les résultats fournis par différentes méthodes.

Enfin, les modèles de transfert en irrigation localisée disposent d'un tendon d'Achille propre, se situant au niveau du traitement du phénomène à la surface, c'est-à-dire d'un point de vue mathématique, l'imposition et le traitement des conditions aux limites à la cote $z = 0$.

Notre effort portera donc dans ces deux directions : caractérisation du système, la plus proche possible de la réalité et traitement de la condition à la limite.

I. MISE EN EQUATIONS

Définition préliminaire

Nous allons, par la suite, fréquemment utiliser le terme "couche" pour désigner une zone d'épaisseur variable du profil. Il est important de bien cerner ce que nous mettons sous ce mot, de façon à ce qu'il n'y ait pas de méprise par la suite. Disons avant tout qu'il ne s'agit pas pour nous d'un horizon au sens pédologique du terme, quoiqu'il puisse y avoir concordance ou inclusion de plusieurs couches dans un horizon. La distinction se fait dans notre cas uniquement sur des critères hydrodynamiques, la localisation au terrain de ces différents morceaux du profil pouvant être faite sur des critères de densité, visuels ou autres, laissés à l'appréciation subjective de l'expérimentateur. Toutefois, il est bien évident que outre l'histoire "pédogénétique" du matériau, son "histoire agronomique" est à la base de la différenciation des couches. Les anciens défoncements, labours récents, travaux superficiels, croûtes de battance résultant de la pluie ou de l'irrigation elle-même, sont autant de découpages évidents et nécessaires du profil, dans un objectif de modélisation.

I.1. Equation générale dans le domaine

Le phénomène d'infiltration sous apport d'eau ponctuel ou en ligne est essentiellement tridimensionnel. Les symétries qu'il peut admettre nous permettrons de faire, par la suite, des simplifications.

L'écriture sous forme générale des équations de DARCY et de continuité est la suivante :

$$\text{Loi de DARCY} \quad \vec{Q} = -[K(\psi)] \, g \vec{\text{grad}} H \quad (2.1) \quad H = \psi - z$$

$$\text{Lois de Conservation de Masse} : \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{div} \vec{Q} \quad (2.2)$$

[K] désigne le tenseur des conductivités hydriques. Si ses directions propres coïncident avec le trièdre direct habituel (\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}), \vec{k} orienté vers le bas, il admet la représentation diagonale suivante :

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

Dans la plus part des travaux de simulation, on fait l'hypothèse d'isotropie et on a alors :

$[K] = k \cdot [I]$ où $[I]$ désigne la matrice identité. Si on fait la seule hypothèse d'isotropie dans le plan

horizontal, le tenseur admet la représentation suivante :

$$\begin{bmatrix} k_H & 0 & 0 \\ 0 & k_H & 0 \\ 0 & 0 & k_V \end{bmatrix}$$

Nous faisons l'hypothèse que k_H et k_V sont non seulement fonction du potentiel matriciel (ψ), mais aussi de z , la cote verticale, ce qui permet de prendre en compte la stratification du milieu.

La combinaison des deux équations (2.1) et (2.2) conduit à

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} \left([K] \text{grad } H \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

De même, qu'on a supposé la dépendance de la conductivité en fonction de la cote, on se donne pour chaque couche une relation $\psi(\theta)$ et donc $C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}$ (la capacité capillaire). L'équation de Richards obtenue est donc de

la forme :

$$C(\psi, z) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2.4)$$

avec les égalités suivantes, si on distingue p couches dans le profil :

$$K_H(\psi, z) = \sum_{i=1}^p K_H^i(\psi) \chi_{[z_i, z_{i+1}]} \quad (2.5)$$

$$C(\psi, z) = \sum_{i=1}^p C^i(\psi) \chi_{[z_i, z_{i+1}]} \quad (2.6)$$

$$K_V(\psi, z) = \sum_{i=1}^p K_V^i(\psi) \chi_{[z_i, z_{i+1}]} \quad (2.5.1)$$

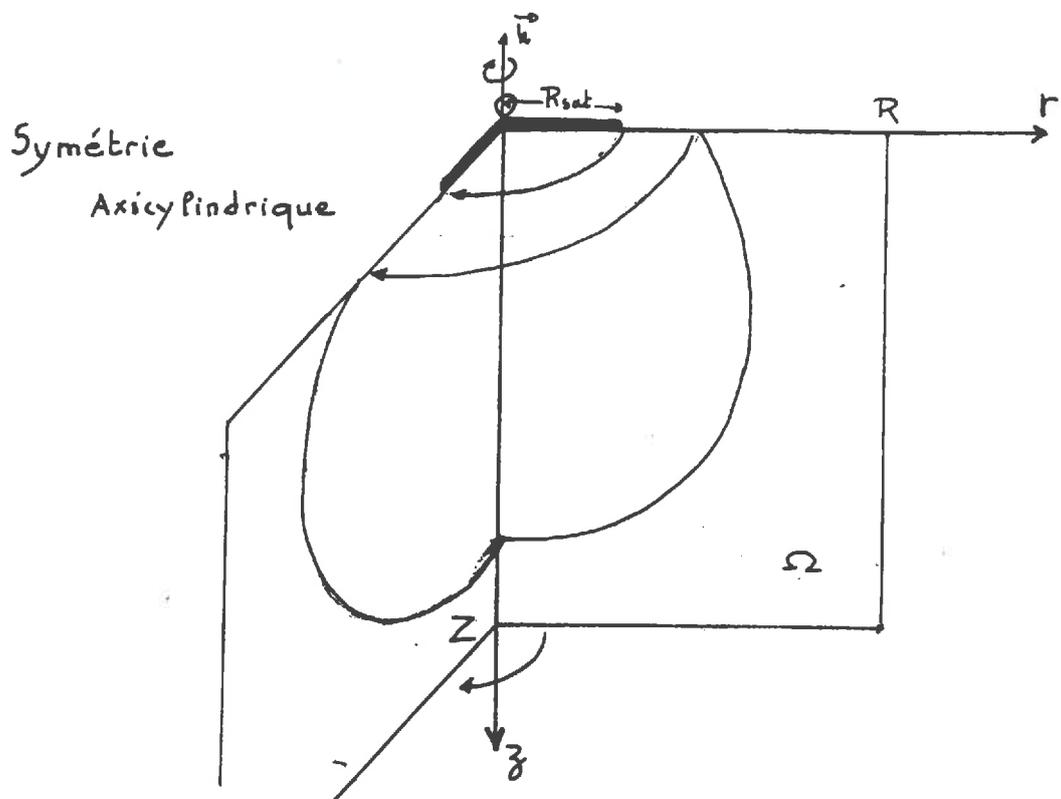
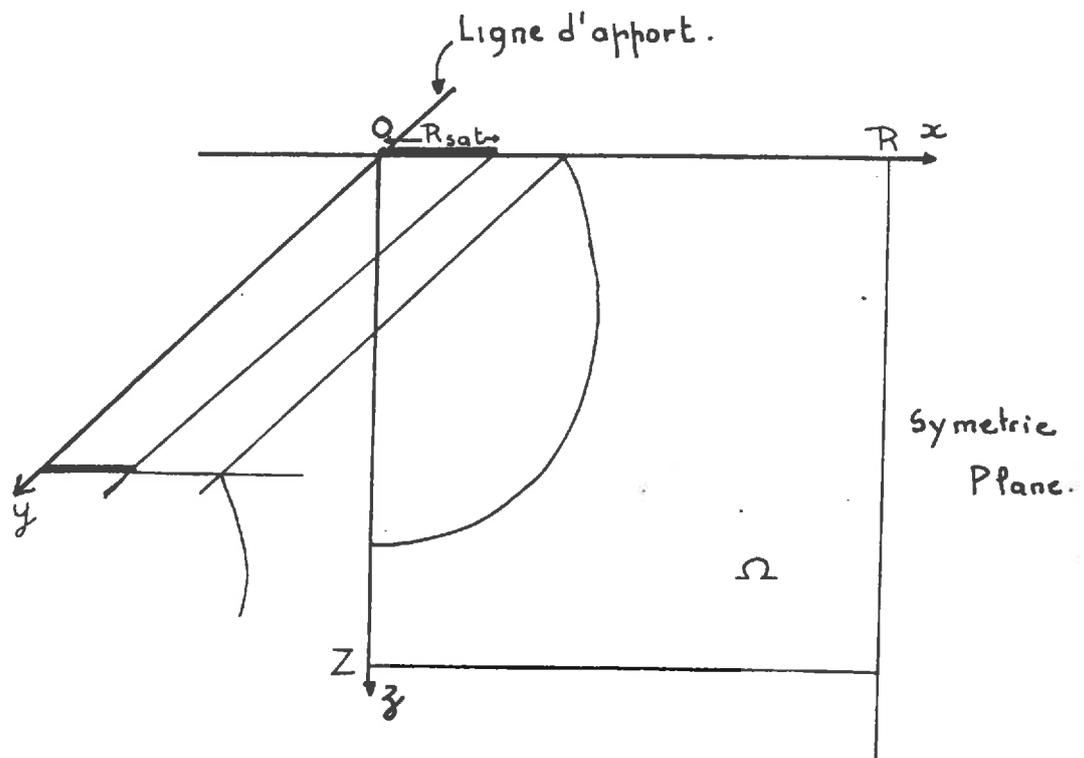


Fig 1

K_H^i et K_V^i désignant les courbes $K_{H,V}(\psi)$ pour la $i^{\text{ème}}$ couche.

Les fonctions χ_Ω désignent classiquement la fonction caractéristique d'un intervalle Ω de \mathbb{R}

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que du fait que $H = \psi - z$, on a $\frac{\partial H}{\partial t} = \dots$, ce qui nous permet de réécrire l'équation (2.4) sous forme homogène

$$C(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

On essaiera par la suite de toujours conserver cette forme d'équation, de type $\text{div}(K(\cdot) \text{grad}(\cdot))$ qui se prête bien au traitement par une méthode variationnelle, débouchant sur les éléments finis.

I.2. Symétries du problème et modifications de l'équation

On distingue deux modes d'apport d'eau en irrigation localisée.

L'apport par goutteur isolé, c'est-à-dire éloigné de son voisin de sorte que l'interférence, si elle existe, ne se produise qu'au bout d'un temps suffisamment long. On se trouve alors en présence d'un écoulement à symétrie axicylindrique, tant que l'interférence avec un autre goutteur n'a pas lieu. Il est évident que dans le cas contraire, on perd la symétrie de l'écoulement et la représentation bi-dimensionnelle du problème n'est plus possible. On retrouve alors un problème entièrement tridimensionnel sur un domaine parallélépipédique.

Le deuxième mode d'apport est dit "en ligne", et on fait, dans ce cas, l'hypothèse que les points d'apport d'eau sont assez proches les uns des autres pour que l'interaction entre sources soit possible très rapidement et qu'ainsi on aboutisse à un apport quasi linéaire, avec un écoulement qui ne se fera plus radialement comme pour l'apport ponctuel, mais dont le plan d'écoulement préférentiel sera perpendiculaire à la ligne d'apport. On a alors un problème à symétrie plane.

I.2.1. Equation dans le cas de la symétrie plane

On conserve les notations habituelles des axes. Il suffit dans ce cas de supprimer une des composantes horizontales de l'écoulement pour obtenir :

$$C(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

Cette équation est définie sur un domaine $\Omega = [0, R] \times [0, Z]$ où R et Z peuvent prendre des valeurs aussi grandes qu'on le désire. La symétrie permet de se limiter à un quart de plan orthogonal à la ligne d'apport. Celle-ci passe en (0,0) (cf. figure (2.1)).

I.2.2. Equation dans le cas de la symétrie cylindrique

Dans cette configuration, l'équation de l'écoulement est la suivante :

$$C(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(K_H(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V(\psi, z) \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{K_H(\psi, z)}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \quad (2.9)$$

où r est la direction radiale. L'écoulement est simulé dans un domaine $\Omega = [0, R] \times [0, Z]$ où le goutteur est situé en (0,0). La rotation de Ω autour de $(0, \vec{z})$ engendre un cylindre qui doit contenir le domaine humecté (Non interaction entre sources).

On peut ramener cette équation à la forme : $\text{div}(K(.) \text{grad}(.))$ en faisant une transformation sur les caractéristiques hydrodynamiques. En effet, posons $k = r.K$ et $c = r.C$. On définit donc une conductivité hydraulique k, fonction de ψ , de z et de r. Celle-ci admet les mêmes directions propres que K. On conserve donc la même différenciation pour les conductivités horizontales et verticales.

Si on remplace K et C par $\frac{k}{r}$ et $\frac{c}{r}$ dans l'équation (2.9), on obtient :

$$\frac{c}{r} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_H}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_V}{r} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{k_H}{r^2} \frac{\partial H}{\partial r} \quad (2.10)$$

On considère les expressions $\frac{k_H}{r} \frac{\partial H}{\partial r}$ et $\frac{k_V}{r} \frac{\partial H}{\partial z}$ comme produits de $\frac{1}{r}$ et de $k_H \frac{\partial H}{\partial r}$ et $k_V \frac{\partial H}{\partial z}$ respectivement. Le développement des dérivées au second membre de (2.10) conduit à :

$$\frac{c}{r} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_H \frac{\partial H}{\partial r} \right) + k_H \frac{\partial H}{\partial r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_V \frac{\partial H}{\partial z} \right) + k_V \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{k_H}{r^2} \frac{\partial H}{\partial r}$$

$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$ étant nul et les termes en $\frac{k_H}{r^2} \frac{\partial H}{\partial r}$ disparaissant, il reste :

$\frac{c}{r} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(k_H \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_r \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right]$ ce qui permet de retrouver une équation de la forme désirée.

$$C(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_H(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_r(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2.11)$$

On s'aperçoit donc que l'équation initiale (2.7) peut se ramener après introduction des symétries à une même équation dans laquelle le type de symétrie est pris en compte uniquement à travers le calcul des caractéristiques hydrodynamiques.

Cette transformation est importante car elle permet, lors de la résolution par une méthode de différences finies ou d'éléments finis, de n'avoir qu'un seul et même algorithme de discrétisation pour les deux symétries, la différence étant introduite au niveau du calcul des caractéristiques hydrodynamiques. Remarquons de plus que même dans cette phase là du calcul, on a un "emboîtement ou une inclusion" de la symétrie plane dans la symétrie cylindrique. Le calcul des caractéristiques hydrodynamiques pour le cas cylindrique ne diffère de celui pour la symétrie plane que par la multiplication par r , la distance du noeud à l'axe de symétrie.

1.3. Conditions aux limites

Quelle que soit la symétrie, on va avoir la même expression pour les conditions aux limites, au moins sur toute la portion de frontière excluant la surface du sol. Les expressions qui vont suivre, sont donc applicables aux deux cas sauf spécification contraire.

On partitionne naturellement la frontière en plusieurs sous-ensembles caractérisés chacun par une condition à la limite.

$$\text{On note : } \Gamma_1 = \left\{ (x, z) / x=0, z \in [0, Z] \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (x, z) / x=R, z \in [0, Z] \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ (x, z) / x \in [0, R], z=Z \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ (x, z) / x \in [0, R_{\text{sat}}], z=0 \right\}$$

$$\Gamma_5 = \left\{ (x, z) / x \in]R_{\text{sat}}, R_u] , z=0 \right\}$$

$$\Gamma_6 = \left\{ (x, z) / x \in]R_u, R] , z=0 \right\} \quad (2.12)$$

- R_{sat} désigne le rayon de la zone saturée pouvant se former à la surface

- $R_h > R_{\text{sat}}$ sera défini par la suite

- Dans les définitions de Γ_i , x peut être remplacé par r .

Frontières latérales : Γ_1 et Γ_2

Sur Γ_1 et Γ_2 , les hypothèses de symétrie et d'isolement du système par rapport à ses voisins nous conduisent à imposer des conditions de flux nul. On a donc :

$$\forall z \in [0, Z] \text{ et } x=0 \text{ ou } x=R \quad k_H \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad (2.13)$$

Remarques

La condition de flux nul pour $x = R$ est naturelle pour l'apport en ligne, puisqu'elle revient à simuler la présence d'une ligne d'apport située à $2R$. elle est donc valable même si on observe des variations de teneur en eau sur Γ_2 , c'est-à-dire s'il y a interaction.

Par contre, pour le cas cylindrique, son imposition consiste à isoler le goutteur de son environnement. Il faut donc prendre soin de toujours avoir une frontière latérale suffisamment éloignée, si l'on tient à l'isolement, ou alors si

R ne peut croître au-delà d'une certaine limite imposée par le réseau, savoir que dès que l'écoulement a atteint Γ_2 , on ne vérifie plus les hypothèses de départ, à savoir que l'écoulement n'est plus à symétrie cylindrique.

Fond du domaine : Γ_3

La courbe Γ_3 correspond au fond du domaine. C'est certainement la portion de frontière pour laquelle on a le plus le choix sur les conditions imposables. On peut distinguer schématiquement trois cas.

a) Présence d'un horizon imperméable ou quasi imperméable à une profondeur fixée. Dans ce cas, on impose bien évidemment une condition de flux nul qui se traduit par :

$$\forall x \in [0, R] \quad -k_v(\psi, z, x) \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

b) La présence d'une nappe à une profondeur donnée pouvant interagir avec l'écoulement engendré par l'irrigation est prise en compte par imposition du potentiel à cette cote.

$$\forall x \in [0, T], \forall z \in [0, R] \quad H(x, z, t) = -Z_{nappe} \quad (2.15)$$

On suppose donc qu'il n'y a pas variation du plafond de la nappe sous l'action de l'irrigation.

c) Si il n'existe pas de raisons physiques (nappes ou substratum imperméables) pour imposer une condition à la limite sur Γ_3 , on peut utiliser une condition de flux nul, couplée à une frontière mobile en choisissant la position de celle-ci de façon compatible avec le profil initial. Il faut pouvoir supposer que les flux à travers cette frontière sont nuls ou négligeables par rapport à l'échelle de temps de notre phénomène et à ceux qu'on impose à la surface.

Conditions à la surface : Γ_4 , Γ_5 , Γ_6

L'apport d'eau à la surface du sol engendrant une décroissance de son infiltrabilité, il peut se former au voisinage du goutteur ou de la ligne d'apport une zone saturée, où l'eau se trouve à un potentiel positif ou nul.

On supposera que cette surface a la forme d'un disque ou d'une bande selon que l'apport est ponctuel ou en ligne. La frontière Γ_4 , précédemment définie, représentera donc le rayon du disque ou la demi-largeur de la bande.

L'extrémité de Γ_4 , désignée par R_{sat} , est en toute rigueur une fonction du temps qui vaut 0 à $t = 0$. Selon la nature du sol et de l'apport d'eau, R_{sat} peut très bien rester égal à 0. Dans ce cas, Γ_4 est vide et on a la condition à la limite :

$$Q = -k_v(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \text{où} \quad Q = Deb/s - ETP.$$

(S : Surface estimée de l'impact de la goutte et correspondant à la première cellule du maillage).

Si Γ_4 n'est pas vide, on a la condition de Dirichlet :

$$\forall x \in [0, R_{sat}(t)] \quad H(x, 0, t) = H_{sat} \quad (2.16)$$

Sur le restant de la frontière, on doit imposer le flux évaporatif, soit :

$$-E_v = -k_v(H(x, 0, t)) \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_0(x, t) \quad (2.17)$$

Notre propos n'étant pas d'étudier et de modéliser l'évaporation, nous avons fait l'hypothèse suivante :

$$E_v = ETP \quad \text{si} \quad |H(x, 0, t)| < H_{lim} \quad (2.18)$$

$$E_v = 0 \quad \text{sinon}$$

Par conséquent, si on connaît $R_{sat}(t)$, le problème est parfaitement défini. Au niveau de la zone saturée, on peut distinguer deux flux. Le flux évaporatif, égal à l'ETP, instantanée, et le flux en infiltration. Si on connaît la distribution de ce dernier, le long de Γ_4 on peut écrire :

$$Q_{sat}(t) = \int_0^{R_{sat}(t)} \int_0^{2\pi} q(r, t) \cdot r \cdot d\theta dr = 2\pi \int_0^{R_{sat}(t)} r \cdot q(r, t) dr \quad \text{(cylindrique)} \quad (2.20)$$

$$Q_{sat}(t) = 2 \int_0^{R_{sat}(t)} q(r, t) dr \quad \text{(symétrie plane - flux par unité de longueur)}$$

et à tout instant et en toute rigueur, on a les équations de bilan suivantes, exprimées en débit :

$$Q_{sat}(t) + \pi [R_{sat}(t)]^2 \cdot ETP = Deb \quad (\text{cylindrique}) \quad (2.21)$$

$$Q_{sat}(t) + 2 \cdot R_{sat}(t) \cdot ETP = Deb \quad (\text{plane})$$

On peut donc en déduire deux équations intégrales implicites donnant $R_{sat}(t)$:

$$2\pi \int_0^{R_{sat}(t)} r \cdot q(r,t) dr = Deb - \pi [R_{sat}(t)]^2 \cdot ETP. \quad (\text{cylindrique}) \quad (2.22)$$

$$\int_0^{R_{sat}(t)} q(r,t) dr = Deb - R_{sat}(t) \cdot ETP \quad (\text{plane})$$

L'utilisation de la loi de DARCY à la surface fournit une distribution $q(r,t)$ sous la forme :

$$q(r,t) = -K_{v,sat} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}(r,0,t) \quad (2.23)$$

Les équations (2.22) sont de la forme : $f(t) = \int_0^{h(t)} g(x,t) dx$

En dérivant membre à membre, on obtient :

$$\frac{df}{dt} = h'(t) g(t, h(t)) + \int_0^{h(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx \quad (2.24)$$

L'application de cette formule aux équations (2.22) conduit à :

$$- \text{ETP} \frac{dR_{\text{sat}}(t)}{dt} = \frac{dR_{\text{sat}}(t)}{dt} \cdot q(R_{\text{sat}}(t), t) + \int_0^{R_{\text{sat}}(t)} \frac{\partial q}{\partial t}(r, t) dr \quad (\text{symétrie plane})$$

(2.25)

$$- 2\pi \cdot \text{ETP} \cdot R_{\text{sat}}(t) \frac{dR_{\text{sat}}(t)}{dt} = 2\pi R_{\text{sat}}(t) \frac{dR_{\text{sat}}(t)}{dt} \cdot q(R_{\text{sat}}(t), t) \quad (\text{cylindrique})$$

$$+ \int_0^{R_{\text{sat}}(t)} r \frac{\partial q}{\partial t}(r, t) dr$$

On en tire les équations donnant $\frac{dR_{\text{sat}}}{dt}$:

$$- \frac{dR_{\text{sat}}}{dt} \left[\text{ET.P} + q(R_{\text{sat}}(t), t) \right] = \int_0^{R_{\text{sat}}(t)} \frac{\partial q}{\partial t}(r, t) dr. \quad (\text{plane})$$

(2.26)

$$- R_{\text{sat}}(t) \frac{dR_{\text{sat}}(t)}{dt} \left[\text{ET.P} + q(R_{\text{sat}}(t), t) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_{\text{sat}}(t)} r \frac{\partial q}{\partial t}(r, t) dr \quad (\text{cylindrique})$$

Ces expressions traduisent que la variation de débit à travers la zone

saturée au cours du temps $\left(\int_0^{R_{\text{sat}}(t)} \frac{\partial q}{\partial t}(r, t) dr \text{ ou } \int_0^{R_{\text{sat}}(t)} r \frac{\partial q}{\partial t}(r, t) dr \right)$

est compensée par le flux passant à travers l'incrément de surface obtenu par accroissement de R_{sat} .

Si on ajoute les équations (2.26) aux conditions à la limite en surface, on a un problème différentiel avec une frontière libre. Tel qu'il est formulé, le problème peut être comparé à un "problème de Stéfan".

Les inconnues de notre problème sont donc : $H(x, z, t)$ et $R_{\text{sat}}(t)$.

La résolution de ce genre de problème est généralement faite par un algorithme itératif (MITCHELL et GRIFFITH, 1980). On peut aisément imaginer un processus consistant à calculer une solution H , pour un R_{sat} , puis à modifier celui-ci avec l'équation (2.26) et à recommencer la boucle jusqu'à convergence. L'utilisation d'un tel algorithme soulève deux problèmes importants.

a) La "poursuite" de R_{sat} ("front tracking") nécessite la modification du maillage au voisinage de R_{sat} au moins pour pouvoir imposer la condition de Dirichlet sur la bonne frontière. C'est là le moins difficile des deux problèmes.

b) Le calcul de R_{sat} passe par l'estimation de $q(r,t)$ à la surface du sol, ce qui avec une formule discrète ne peut être fait qu'avec une approximation décentrée. Or, on sait que dans bien des cas, le calcul conduit à des aberrations, et au moins à des erreurs.

Si on n'utilise pas la technique de "poursuite du front", on a une zone saturée plus petite qu'elle ne l'est en réalité et on est obligé de rajouter un flux à sa périphérie de façon à récupérer le défaut d'infiltration et à équilibrer le bilan de masse. Cette façon de faire est donc purement artificielle. C'est la méthode mise en oeuvre par les différents chercheurs ayant modélisé jusqu'alors l'irrigation localisée (BRANDT et al., 1971 ; HILLEL et al., 1984; ABABOU, 1981). L'équation qui est rajoutée à la surface est obtenue de la façon suivante. Soit i_s le premier noeud du maillage, non saturé, rencontré en s'éloignant du point d'apport. On note D_{sat} le débit à travers la surface couverte par les noeuds $i = 1, i_s - 1$. D_{sat} est donné par :

$$D_{sat} = \sum_{i=1}^{i_s-1} -K_{V,SAT} \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_i \cdot S_i(i)$$

où $S_i(i)$ est la surface couverte par le noeud i , qui est donc une bande ou une couronne selon la symétrie. On pose D_{ev} le débit d'évaporation. On définit alors D_{res} par :

$$D_{res} = D_{eb} - D_{sat} - D_{ev} \quad \text{et le flux } Q_{res} \text{ par :}$$

$$Q_{res} = D_{res} / S_i(i_s)$$

On a donc un découpage de la frontière en surface, en trois sous-domaines : T'_h, T'_s, T'_b avec les conditions :

$$T'_h : \forall i < i_s(t) \quad H(r_i, 0, t) = H_{sat}$$

$$\Gamma_5 : \quad i = i_s \quad - k_r (H(r_s, 0, t)) \frac{\partial H}{\partial z} (r_s, 0, t) = Q_{res} - ETP(H)$$

$$\Gamma_6 : \quad \forall i > i_s(t) \quad - k_r (H(r_i, 0, t)) \frac{\partial H}{\partial z} (r_i, 0, t) = -ETP(H)$$

On remarque donc que dans le cadre de cette méthode, on retrouve un des deux problèmes précédents, à savoir l'estimation décentrée de $q(r,t)$ à la surface du sol. Dans les sols à faible conductivité, cette évaluation se fait dans des zones à forts gradients, au moins sur une partie de Γ_4 , qui correspond aux couronnes les plus extérieures en symétrie cylindrique et donc à des surfaces importantes. On montrera par la suite tous les inconvénients qui peuvent en résulter et l'erreur que l'on fait. Ceux-ci nous conduiront à imaginer deux nouvelles procédures pour le traitement de la condition à la limite en surface, dans le cadre de l'algorithme "discret", c'est-à-dire que nous laisserons de côté la procédure de "poursuite du front".

On a donc mis en place le problème suivant :

On cherche $H(r,z,t) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\Omega = [0,Z] \times [0,R]$

solution de :

$$C(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_u(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_v(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2.27)$$

avec les conditions aux limites :

$$\forall z \in [0, Z] \text{ et } x = 0 \text{ ou } x = R : -k_u(\psi, z, r) \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad (2.28)$$

$$\forall r \in [0, R] \text{ et } z \in Z : -k_v(\psi, r, z) \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2.29)$$

(impermeable ou flux nul à frontière mobile)

ou $H(r, z, t) = -Z_{nappe}$

$$\forall r \in [0, R_{ini}] \text{ et } z=0 : -k_v(r, 0, \psi) \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{Deb}{S} - ETP \quad (t < t_{pond}) \quad (2.30)$$

$$\forall r \in [R_{ini}, R] \text{ et } z=0 : -k_v(r, 0, \psi) \frac{\partial H}{\partial z} = -E_v(H) \quad (t < t_{pond}) \quad (2.31)$$

S'il y a flaquage : ie $t > t_{pond}$, on a :

$$\forall r \in [0, R_{sat}(t)] \quad H(r, 0, t) = H_{sat} \quad (2.32)$$

$$\forall r \in [R_{sat}(t), R] \quad -k_v(r, 0, \psi) \frac{\partial H}{\partial z} = -E_v(H) \quad (2.33)$$

R_{sat} étant défini par :

$$-2\pi \cdot K_{v, SAT} \int_0^{R_{sat}(t)} r \frac{\partial H}{\partial z}(r, 0, t) dr = Deb - \pi [R_{sat}(t)]^2 \cdot ETP \quad (\text{cylindrique}) \quad (2.34)$$

$$-K_s \int_0^{R_{sat}(t)} \frac{\partial H}{\partial z}(r, 0, t) dr = Deb - R_{sat}(t) \cdot ETP. \quad (\text{plane})$$

avec $E_v(H) = ETP * \chi_{[H_{lim}, 0]}$

La condition initiale correspond à un champ de potentiel $H(r, z, 0)$ quelconque. Toutefois, la physique du phénomène impose de le choisir au moins continu et doit permettre de le prendre probablement aussi régulier qu'on le désire.

II. REVUE DES MODELES EXISTANTS ET PROBLEMES SOULEVES.

A notre connaissance, le premier article traitant de la modélisation des transferts en irrigation localisée est celui de **BRANDT et al. (1971)**. L'équation de base est celle de Fokker-Planck, à laquelle les auteurs appliquent

la transformée de Kirchoff $S(\theta) = \int_{\theta_n}^{\theta} D(\theta) d\theta$ au seul second membre.

Les conditions aux limites sont analogues à celles définies ci-dessus dans le cas "discret". Les équations sont discrétisées en différences finies et intégrées par une méthode A.D.I., les non-linéarités étant traitées par une méthode de Newton. Les auteurs insistent sur le fait que le calcul des flux à travers la zone saturée est entaché d'erreurs, dues au fait que les gradients de $D(\theta)$ et $K(\theta)$ sont forts au voisinage de la saturation. Bizarrement, la précision et la validité de la formule décentrée sur trois points ne sont pas discutées. Toutefois, ils concluent que s'il existe une différence entre le volume d'eau apporté et celui calculé par variation du stock sur un pas de temps, il faut réduire la taille du pas d'espace.

Remarquons que ceci conduit à une meilleure approximation des dérivées premières décentrées et peut par conséquent améliorer l'estimation du flux résiduel. Cette stratégie n'étant pas très désirable du fait de l'augmentation du nombre d'inconnues, ils proposent de corriger à chaque pas de temps, le débit du goutteur de façon à compenser une infiltration excessive ou insuffisante sur le pas de temps précédent. Ils testent leur programme sur la solution analytique de Wooding pour un écoulement permanent à travers une petite mare. Dans un deuxième article, **BRANDT et al. (1971)** comparent les résultats de simulation avec des expériences au laboratoire et in situ. En symétrie plane et sur des infiltrations au laboratoire, ils obtiennent de bons accords sur un sol sablo-argileux (Gilat-loam) pour un petit débit, mais en général un désaccord croissant avec celui-ci. Les différences importantes constatées avec le plus fort débit sont expliquées par une mauvaise estimation de K_{sat} . Cette explication nous paraît incomplète quand on regarde les courbes données par **BRESLER (1971)**. On y constate un bon accord sur la profondeur atteinte et sur l'extension latérale, pour trois débits relativement faibles (.184, .495, .963 $\text{cm}^3, \text{cm}^{-1}, \text{min}^{-1}$), ce qui semble indiquer la validité des caractéristiques hydrodynamiques introduites dans le modèle.

Au débit $3.22 \text{ cm}^3.\text{cm}^{-1}.\text{min}^{-1}$ survient un brutal désaccord se traduisant par une sous-estimation de l'approfondissement du bulbe et une sur-estimation de l'extension de la zone saturée. Si la première erreur est sûrement imputable à une sous-estimation de K_s , la deuxième n'est probablement pas entièrement due à cette sous-estimation. Etant donné qu'il n'est pas fourni de bilan de masse, il est difficile de savoir si l'erreur est uniquement due à une mauvaise estimation de K_{sat} .

Notre expérience semble montrer, comme on le verra par la suite, qu'aux forts débits et sur un sol présentant une faible conductivité comme c'est le cas ici ($K_s = .01 \text{ cm}.\text{min}^{-1}$), le calcul du flux résiduel tel qu'il est fait conduit à des erreurs importantes. Il sera bon de se rappeler par la suite que le pas d'espace utilisé par BRANDT est de 4 cm et que la teneur en eau initiale de son domaine est très faible.

ABABOU (1981) utilise la transformée de Kirchoff appliquée à l'équation

de Richards :
$$U(h) = \int_{h_n}^h K(\psi) d\psi$$
 . Les conditions aux limites sont celles de

Bresler, la résolution est faite par un schéma A.D.I., linéarisé. A la différence de Bresler où les caractéristiques hydrodynamiques sont calculées par interpolation spline sur des données de terrain, ABABOU fait l'hypothèse supplémentaire : $\frac{1}{K} \frac{dK}{dh} = de$. Ceci lui permet d'avoir, grâce à une fonction $K(h)$ de forme exponentielle, une relation explicite entre U et h . L'utilisation de la variable U , qui présente des gradients bien moins importants que h ou θ , n'empêche pas un certain désaccord entre les quantités d'eau apportées et infiltrées, probablement du au calcul de Q_{res} , comme il le souligne. ABABOU relève les écarts les plus importants (- 9 %, - 7,5 %) pour un sol à faible conductivité et avec les débits les plus élevés (Resp : 3 l.h^{-1} en cylindrique, $3 \text{ l.h}^{-1}.\text{m}^{-1}$ (plane)). L'utilisation que nous avons faite de son modèle confirme ces chiffres.

RAGAB et al. (1984) utilisent eux aussi la transformée de Kirchoff sur h , et obtiennent une équation où θ figure au premier membre. Les équations différentielles résultant d'un calcul de bilan sur chaque cellule du domaine, sont intégrées en utilisant le logiciel CSMP et une méthode de Runge-Kutta. L'infiltrabilité à travers la zone saturée, nécessaire pour le calcul de Q_{res} , est estimée par une approximation au premier ordre de $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, alors que BRESLER et ABABOU utilisent une approximation au second ordre. Il est intéressant de constater que VAN DER PLOEG (1974) utilisant lui aussi CSMP et une méthode de Runge-Kutta pour la résolution de ce problème, sur les données de Bresler,

voit son intégration devenir instable dès qu'il essaye d'utiliser les Δx et Δt de Bresler (4 cm et 6 min). Il est obligé de prendre $\Delta x = 6$ cm et $\Delta t = 30$ s. On peut, au passage, en déduire que l'algorithme à pas fractionnés de Runge-Kutta est assez mal adapté à ce type d'équations différentielles provenant de la discrétisation de l'équation de Kirchoff. **HILLEL (1981)** utilise lui aussi des pas d'espaces allant jusqu'à huit centimètres. En reprenant les données de Bresler, il constate quelques différences entre ses résultats de simulation et ceux de Bresler, et un bien meilleur accord avec les résultats expérimentaux pour le débit $Q = 3.22 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$. Il explique cela par le fait que les erreurs que l'on peut commettre sur la détermination de la fonction de diffusivité $D(\theta)$, sont plus grandes que pour $K(\theta)$, notamment au voisinage de la saturation. On ne peut dire exactement pourquoi ses résultats sont meilleurs. L'utilisation d'une formule décentrée au premier ordre pour l'estimation des flux à travers la zone saturée est contestable et en général sous-estime l'infiltrabilité. On se demande alors comment il peut ne pas surestimer la zone saturée sans surestimer la conductivité à saturation. Là aussi, l'absence de bilan empêche de tirer plus d'informations.

Outre les essais de terrain de **BRANDT et BRESLER (1971)**, repris par **HILLEL (1981)**, **LEVIN et VAN-ROYEN (1979)** ont utilisé le modèle de **BRESLER** pour étudier l'influence du débit et de la fréquence d'application sur la distribution de l'eau. On retiendra que pour un sol sableux (98 % de sable) et des débits de 2 et 4 litres par heure, le modèle de Bresler a un bilan de masse de 92 % après apport de 12 litres. **ABABOU**, sur différents sables, obtient des bilans de 98 à 99 %. Le choix de la variable $U(h)$ (**ABABOU**) au lieu de $S(\theta)$ explique peut être cette différence. Pour les sols à faible conductivité, à part les essais de **BRANDT** sur un sol faiblement argileux (Gilat-loam) et **ABABOU** (Loess MC4), on ne trouve pas d'autres comparaisons avec des simulations. Ce sont pourtant les conditions hydrodynamiques qui posent le plus de problèmes, du fait de la forte extension de la zone saturée qu'elles entraînent.

Soulignons que pour un sol de type argileux, ne présentant pas une porosité structurale importante en surface, il y a deux types de problèmes. Premièrement, la faible conductivité hydraulique entraîne l'extension de la zone saturée. On utilise donc une partie de l'algorithme de résolution, où les erreurs peuvent être grandes et se cumuler. C'est la première source de difficultés qui peut conduire, toutes choses égales par ailleurs, à un désaccord avec l'expérimentation et à un bilan de masse non équilibré. Deuxièmement, les caractéristiques hydrodynamiques peuvent, selon leurs modes d'acquisition, présenter des biais systématiques par rapport aux caractéristiques réelles du milieu lors de l'expérimentation. Alors que dans un sol où la fraction argileuse

est très faible, on peut supposer que le K_s , sauf action extérieure sur le milieu, variera peu au cours du temps, on sait bien qu'il n'en est pas de même pour un milieu où la phase argileuse est suffisamment importante pour modifier la géométrie de l'espace poral au cours de l'humectation. Nous avons constaté sur des échantillons prélevés in-situ (cf. Mesures de K_s) un gonflement tel qu'en 2 ou 3 heures la conductivité à saturation en était fortement modifiée.

Nos expérimentations numériques, sur un sol argileux (St. Paul, Montfavet) montrent, par exemple, que l'utilisation de la valeur de K_s obtenue par une mesure au double anneau, conduit à des résultats complètement aberrants, même sur des sites irrigués depuis plusieurs semaines (la mesure de K_s au double anneau sur ce sol se déroulant sur un temps très long, elle fournit des résultats correspondant à un milieu où l'argile a eu suffisamment de temps pour gonfler et ainsi obturer ou réduire la taille des pores).

Sur ce même sol et en irrigation localisée journalière, on constate à l'opposé un début de réouverture de la porosité structurale entre chaque irrigation. JURY et EARL (1977), en sol nu et cultivé lors d'expérimentations sur un sol argileux ($K_s \sim 1$ cm/heure), constatent une dérive du rayon de la zone saturée au cours du temps et parallèlement enregistrent sur des échantillons prélevés au cours de la saison une diminution régulière du K_s . Dans leurs cas, le $R_{s,max}$, obtenu par la formule $R_{s,max} \leq (q/\pi K_s)^{1/2}$, avec la conductivité initiale à saturation était de 46 cm. Celui-ci dépasse 1,20 mètre en fin d'expérimentation.

Il existe encore au moins deux sources de problèmes habituellement rencontrées au champ, mais qui ne sont pas présentes sur les sols sableux où se sont déroulées jusqu'alors la plupart des manipulations (Brandt (Sinaï Sand, Gilat-loam), Levin (98 % sable grossier), Ababou (DEK, DIERI)). La déstructuration du sol en surface, qui peut survenir pour de multiples raisons et qui conduit à une obturation partielle des pores de surface, concourt à une réduction de la conductivité de la couche superficielle. Il s'en suit une extension latérale bien plus importante que ne la prévoirait un modèle ne prenant pas en compte ce phénomène. Enfin, on rencontre quelquefois un effondrement pour des sols à mauvaise structure conduisant à la création d'une petite mare sous le goutteur. Cet effet est bien plus compliqué à prendre en compte automatiquement que le précédent et on se trouve alors dans un cas où la solution obtenue risque d'être là aussi assez éloignée de la réalité. La simulation d'une infiltration en apport localisé avec une borne à l'extension de la flaque et calcul du stockage en surface peut rendre compte de la situation.

On constate donc que la modélisation dans un but prédictif des écoulements en irrigation localisée doit, pour être tant soit peu efficace, ne pas se contenter de la description habituelle des transferts, mais essayer de tenir compte, de façon automatique si possible, des différentes modifications pouvant survenir et affectant globalement les caractéristiques hydrodynamiques et la géométrie du milieu.

La quantification de ces modifications n'étant pas forcément accessible, mesurable et/ou modélisable en continu, leur introduction dans un modèle numérique n'est pas aisée. Une simple prise en compte "discrète" apportera toutefois une amélioration importante.

III. RESOLUTIONS DU SYSTEME D'EQUATIONS

Pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles (2.27) et les conditions aux limites et initiales qui l'accompagnent (2.28,....2.35), nous avons choisi, à la suite de l'étude mono-dimensionnelle du premier chapitre, de séparer la discrétisation spatiale de l'intégration temporelle.

Ceci offre une grande souplesse au niveau de la programmation, puisqu'un même algorithme d'intégration peut traiter des systèmes d'équations différentielles, provenant d'une discrétisation par différences finies ou éléments finis.

Plusieurs raisons nous ont conduit à envisager les deux modes de discrétisation spatiale. Il n'est pas question ici de discuter des avantages et inconvénients respectifs des deux méthodes. La méthode des différences finies, pour l'équation qu'on a définie, reste proche de la physique du phénomène et tout dysfonctionnement peut être facilement relié au système discret en résultant. A l'opposé, le problème qu'on résout en utilisant la méthode des éléments finis, n'a plus rien à voir avec l'équation initiale. Ce découplage est un désavantage pour la recherche d'erreurs informatiques ou même tout simplement pour avoir un passage aisé du phénomène physique au problème discret que l'on résoud.

Inversement, la méthode des éléments finis, de par le cadre théorique qu'elle offre, la prise en compte aisée des conditions aux limites de type Neuman, sa mise en oeuvre automatique, est assez attractive et a les faveurs de bien des chercheurs dans le domaine des transferts en milieux poreux. L'apparition de codes, tel MODULEF et la résolution quasi-automatique des "équations-types" qui en résulte y est-elle peut être pour quelque chose ?

Il existe peu de comparaisons des résultats fournis par les deux méthodes dans le cadre des écoulements en milieux poreux. Nous avons trouvé pour un problème, infiltration à partir d'une tranchée, des solutions à partir de différents modes de discrétisation. Nous reviendrons par la suite sur ce problème, mais les différences entre les solutions obtenues sont telles qu'il nous a semblé intéressant d'utiliser les deux discrétisations dans notre cas et d'essayer d'expliquer ne serait-ce que qualitativement ces écarts.

III.1. Différences finies

A la suite des conclusions de l'étude dans le cas mono-dimensionnel, nous discrétiserons les termes $\frac{\partial}{\partial x_i} (k^{(i)} \frac{\partial h}{\partial x_i}) (x_i = r_i)$ par un schéma centré sur trois points, les conductivités étant calculées aux internoeuds, comme déjà expliqué. On définit donc sur le domaine $\Omega = [0, \pi] \times [0, Z]$, deux grilles : la première correspondant aux points où sera obtenue la solution, la deuxième aux points de calcul des conductivités.

On se donne donc deux suites finies $(x_i)_{i=1, n_x}$ et $(z_j)_{j=1, n_z}$ définissant les abscisses et les ordonnées des points de la grille.

On en déduit les suites $(x'_i)_{i=1, n_x+1}$ et $(z'_j)_{j=1, n_z+1}$ servant à la définition du deuxième ensemble de points, de la façon suivante :

$$x'_i = (x_i + x_{i-1})/2 \quad i=2, n_x \quad z'_j = (z_j + z_{j-1})/2 \quad j=2, n_z$$

Dans le but d'introduire aisément les conditions aux limites de type flux nul sur les deux frontières verticales, on définit les abscisses x_1 et x_{n_x} de façon que $x'_1 = 0$ et $x'_{n_x+1} = R$.

Sur les deux frontières horizontales, on choisit : $z_1 = 0$ et $z_{n_z} = Z$ de sorte que z'_1 se trouve à la cote $-z'_2$ et z'_{n_z+1} à la cote $2z_{n_z} - z'_{n_z}$

La deuxième grille est constituée par les points :

$$(r'_i, z'_j) \quad \begin{matrix} i=1, n_x+1 \\ j=1, n_z+1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad (r_i, z_j) \quad \begin{matrix} i=1, n_x \\ j=1, n_z+1 \end{matrix}$$

En notant $H_{i,j}(t)$ la valeur de $H(r, z, t)$ au point (r_i, z_j) , on approche l'équation (2.27) en ce point par :

$$c_{i,j} \frac{dH_{i,j}}{dt} = \frac{1}{x'_{i+1} - x'_i} \left[\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \cdot k_H(x'_{i+1}, y'_j) - \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \cdot k_H(x'_i, y'_j) \right] \\ + \frac{1}{y'_{j+1} - y'_j} \left[\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} \cdot k_V(x_i, y'_{j+1}) - \frac{H_{i,j} - H_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \cdot k_V(x_i, y'_j) \right] \quad (2.36)$$

où $k_H(x'_{i+1}, y'_j)$ et $k_H(x'_i, y'_j)$ désignent les conductivités internodales horizontales et $k_V(x_i, y'_{j+1})$, $k_V(x_i, y'_j)$ les conductivités internodales verticales. A la suite de ce qui a été dit dans la première partie, elles seront calculées par une moyenne géométrique sauf indication contraire dans la suite.

En reprenant le formalisme employé dans l'étude de l'approximation de l'équation monodimensionnelle et en conduisant un calcul en tous points similaire à celui développé, on montre que l'on peut obtenir la majoration suivante de l'erreur d'approximation spatiale :

$$\| [L(H)]_{i,j} - [R_{h,k}(H_{h,k})]_{i,j} \|_{\infty} \leq \frac{\Delta x^2}{48} M_x + \frac{\Delta y^2}{48} M_y \quad \text{où :}$$

M_x et M_y sont des constantes données par :

$$M_x = K_{H,S} \left\| \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{dK}{d\psi} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right\|_{\infty} \quad (\Delta x = \max_i |x_{i+1} - x_i|)$$

$$M_y = K_{V,S} \left\| \frac{\partial^4 H}{\partial y^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{dK}{d\psi} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial^3 H}{\partial y^3} \right\|_{\infty} \quad (\Delta y = \max_j |y_{j+1} - y_j|)$$

Le traitement des conditions aux limites, de types Dirichlet ou Neuman, se fait de la façon déjà exposée. On a vu que la discrétisation spatiale de celles-ci est d'ordre quadratique et ne perturbe donc pas l'ordre d'approximation de l'opérateur spatial.

On obtient donc un système de $n_x * n_y$ équations différentielles non linéaires qui sera intégré par une des méthodes proposées au premier chapitre. Pour plus de détails sur les équations discrètes, on se reportera à l'annexe (différences finies).

Remarquons que la matrice du système différentiel est penta-diagonale. Le système est de la forme :

$$[C] \left\{ \frac{dH}{dt} \right\} = -[M] \{H\} + \{S\} \quad \begin{array}{l} [C] : \text{diagonale} \\ [M] : \text{penta-diagonale} \end{array} \quad (2.37)$$

III.2. Éléments finis

III.2.1. Formulation variationnelle et cadre théorique.

Posons :

$$L(H) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(H, r, z) \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k(H, r, z) \frac{\partial H}{\partial z} \right)$$

On se donne sur la frontière Γ de Ω , les conditions aux limites (2.28) à (2.34), c'est-à-dire de Neuman ou de Dirichlet selon le point frontière considéré.

On pose $M = \{H \in C^2(\Omega) / H|_{\Gamma} = 0\}$ M est un sous-espace vectoriel de $C^2(\Omega)$. (f, g) désigne le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ défini classiquement par $(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g \, dw$.

On regarde la projection de $L(u)$ sur M , c'est-à-dire le produit scalaire $(L(u), v)$ $v \in M$.

$$(L(u), v) = \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\cdot) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\cdot) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \cdot v \, dw$$

En utilisant la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega = \Gamma} X dy - Y dx$$

on obtient :

$$(L(u), v) = \int_{\Omega} k(\cdot) (q \text{grad } u \cdot q \text{grad } v) dx dy - \int_{\Gamma} k v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$$

L'intégrale $\int_{\Gamma} k \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds$ est égale à :

$$\sum_{i=1}^6 \int_{\Gamma_i} k \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds \quad \text{où les } \Gamma_i \text{ sont ceux définis avant.}$$

Sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ on a des conditions de flux nul, par conséquent on aura :

$$\int_{\Gamma_i} k \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.38)$$

Sur Γ_4 , on a la condition de Dirichlet $u|_{\Gamma_4} = 0$ d'où

$$\int_{\Gamma_4} k \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad (2.39)$$

Sur Γ_5 et Γ_6 , on a les conditions de Neuman : $-k \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = g(x)$ où g est fixée (évaporation, flux imposé) et s est l'abscisse curviligne de Γ_i . (dans notre cas x). Par conséquent, on a :

$$- \int_{\Gamma_i} k(\cdot) \nu \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = \int_{\Gamma_i} g_i(x) \cdot \nu \cdot ds \quad i=5, 6 \quad (2.40)$$

Par conséquent, on aura : $-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \cdot \nu \cdot k(\cdot) ds \geq 0$

On peut alors établir les propriétés suivantes pour l'opérateur L.

a) $(L(u), v) = (L(v), u)$ Il est évident que u et v jouent des rôles symétriques, si k est uniquement fonction de x et z .

b) $(L(u), u) = \int_{\Omega} k(\cdot) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dw + A$ où $A \geq 0$

k étant positive, on a évidemment $(L(u), u) \geq 0$.

c) Supposons que $(L(u), u) = 0$

Alors dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet et/ou de type flux nul, on a $A = 0$ et donc :

$$\int_{\Omega} k(\cdot) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dw = 0$$

La fonction $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$ étant positive ou nulle et continue, on en déduit moyennant les hypothèses sur k , que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{d'où : } u = cte$$

Si on a les conditions de Dirichlet $u|_{\Gamma} = 0$, on en tire $u(x,z) = 0$ pour tout $(x,z) \in \Omega$

On pose $f = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t^*} \cdot C(\cdot)$ et on considère la fonctionnelle J définie sur M par : $J(u) = (L(u), u) - 2(f, u)$ classiquement appelée fonctionnelle énergie

On montre de façon directe que si u^* est solution de $L(u) = f$, alors u^* minimise J , c'est-à-dire que

$$\forall u \in M \quad J(u^*) \leq J(u)$$

Inversement, on suppose que u^* minimise J et on considère $J(u^* + \lambda v)$ $v \in M, \lambda \in \mathbb{R}$. Le développement de cette expression conduit à

$$\lambda^2 (L(u), v) + 2\lambda (L(u^*) - f, v) \geq 0$$

d'où on tire $(L(u^*) - f, v) = 0$ pour que le trinôme soit toujours positif ce qui donne

$$(L(u^*), v) = (f, v)$$

On ne peut en conclure à ce stade que $L(u^*) = f$ puisque l'égalité n'a lieu que pour $v \in M$ et non $L^2(\Omega)$

Si on fait l'hypothèse de la densité de M dans $L^2(\Omega)$

(i.e. que $\forall g \in L^2(\Omega)$, $\forall \varepsilon \geq 0$ donné, $\exists v \in M$ / $\|g - v\|_{L^2} \leq \varepsilon$)

on en déduit bien l'égalité recherchée $L(u^*) = f$

Supposons que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ sont dans $L^2(\Omega)$, on peut alors

considérer la forme bilinéaire $((u, v)) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + uv \, dw$ qui est symétrique

définie positive sur M du fait des propriétés de l'opérateur L. Elle définit donc un produit scalaire sur M et par la même une norme $\|u\|_1 = ((u, u))$

Le complété de M pour cette norme est un espace de Hilbert, noté $H^1(\Omega)$.

On note $a(u, v) = (Lu, v)$ et $(f, v) + \sum_i \int_{\Gamma_i} b_i \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, ds = f(v)$

les formes bilinéaires et linéaires sur $H^1(\Omega)$

On sait alors que l'on a équivalence entre le problème initial défini par l'opérateur L et le problème défini par :

(P) Trouver $u^* \in H^1(\Omega)$ / $\forall v \in H^1(\Omega)$ $a(u, v) = f(v)$

Il existe alors un théorème ([Lax-Milgram]) (CIARLET, 1978) permettant d'affirmer que si

a) a est continue, bornée par rapport à u et à v, ie $|a(u, v)| \leq \mathcal{V} \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$
et si

b) a est fortement positive ie. $a(u, u) \geq \delta \|u\|_1^2$

alors

u^* solution de (P) existe et est unique.

La notion de forte positivité est rencontrée sous différents vocables (coercivité, ellipticité, H^1 -elliptique,...).

Notre problème correspond au cas mixte, non homogène, du fait qu'on a à la fois des conditions de Dirichlet et de Neuman et que les conditions de flux ne sont pas toujours homogènes : ie $\frac{\partial u}{\partial n} \neq 0$

Les deux hypothèses du théorème : $|a(u, v)| \leq \mathcal{V} \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$ et

$$a(u, u) \geq \delta \|u\|_1^2$$

sont dans ce cadre bien vérifiées (CIARLET, 1978)

Notre problème se met donc sous la forme suivante à un temps fixé.
 Trouver $u \in H^1(\Omega)$ / $a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\text{où : } f(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\omega + \sum_{i=5,6} \int_{\Gamma_i} g_i(x) \cdot v \, ds$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} k \cdot \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\omega \quad (2.41)$$

La démonstration, d'existence et d'unicité que l'on vient de donner, utilisant une formulation variationnelle du problème, a nécessité de faire l'hypothèse que k ne dépendait que des coordonnées spatiales et pas de u .

Pour le cas non linéaire, il existe un théorème d'unicité et d'existence donné par G. CHAVENT pour l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - f(x, \varphi)$$

avec les conditions aux limites les plus générales.

On peut donc conclure à l'existence et à l'unicité de la solution de notre problème.

III.2.2. Méthode de Galerkin et introduction des éléments finis

Il existe deux méthodes bien connues pour la résolution d'un tel problème : les méthodes Ritz et Galerkin. Nous n'utiliserons que la seconde. Celle-ci consiste à choisir un sous-espace vectoriel V_h de $H^1(\Omega)$ qui soit de dimension finie et sur lequel on se donne le problème discret (dérivant du problème continu posé sur $H^1(\Omega)$) défini par :

$$(P_d) \text{ trouver } u_h \in V_h \quad / \quad a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Le lemme de Lax-Milgram permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'un tel u_h .

La méthode des éléments finis permet de construire les sous-espaces V_h de façon simple. En effet, si on écrit u_h dans une base (w_k) de V_h , on aura :

$$a\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k w_k, v_h\right) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Si on fait $v_h = w_k$, on obtient le système linéaire :

$$\sum_{k=1}^N a_{k,j} a(w_k, w_j) = f(w_j) \quad \forall j=1, N \quad (2.42)$$

La matrice $[A] = (a_{k,j}) = a(w_k, w_j)$ est appelée matrice de rigidité par analogie avec la mécanique.

Si les fonctions $(w_j)_{j=1, N}$ sont prises les plus générales possibles, la matrice $[A]$ sera pleine et son inversion coûteuse. Il faut donc choisir les fonctions $(w_j)_{j=1, N}$ de façon qu'il y ait le plus possible de termes nuls. En remarquant que

$$a(w_k, w_j) = \int_{\Omega} k_u \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + k_v \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} dw$$

on s'aperçoit qu'il suffit que les fonctions $(w_j)_{j=1, N}$ soient à support compact.

Ainsi dès que $\mu(\text{Supp}(w_k) \cap \text{Supp}(w_j)) = 0$

on aura $a(w_k, w_j) = 0$

(μ : mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2).

On se donne donc une triangulation \mathcal{T} , de Ω vérifiant :

$$\mathcal{T} = \left\{ \text{Triangles } T, \text{ tels que leurs intersections deux à deux soient vides, ou réduites à un côté ou à un sommet (i.e de mesure nulle)} \right.$$

$$\left. \text{et } \bigcup_{\mathcal{T}} T = \Omega \right\}$$

En notant S_i , $i = 1, N$ les sommets de la triangulation, les fonctions de base w_i les plus simples (linéaires) seront définies par :

$$- w_i(S_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{Supp}(w_i) = \bigcup_{\substack{T_j \\ \{T_j, \text{ admet } S_i \text{ comme sommet}\}}} T_j)$$

$$- w_i \text{ est linéaire sur les triangles } T_j.$$

Il n'y aura donc pas plus de termes non nuls sur la première ligne de $[A]$ qu'il n'y a de sommets autour de S_i .

III.2.3. Mise en oeuvre pour le problème des transferts en irrigation localisée

En utilisant les équations (2.38) (2.39) (2.40) et en explicitant l'équation (2.41), on a :

$$\int_{\Omega} c(\cdot) \frac{\partial u}{\partial t} v \, d\omega = - \int_{\Omega} k_H \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + k_V \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \, d\omega + \int_{\Gamma'_5} v \cdot Q_{res} \, dx + \int_{\Gamma'_6} v \cdot \bar{E}_r(u) \, dx$$

On note \bar{w}_i la trace de la fonction w_i sur Γ' . Notons que si les w_i sont linéaires, les \bar{w}_i quand elles ne sont pas nulles, correspondent aux fonctions de base linéaires sur un segment.

En portant $u = \sum_{k=1}^N u_k w_k$, ou ce qui est équivalent, en explicitant (2.42), on obtient le système d'équations différentielles non linéaires :

$$\sum_{k=1}^N \frac{du_k}{dt} \int_{\Omega} w_k w_i \, c(r, \beta, u_k) \, d\omega = - \sum_{k=1}^N u_k \int_{\Omega} k_H(r, \beta, u_k) \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{\partial w_i}{\partial x} + \quad (2.43)$$

$$k_V(r, \beta, u_k) \frac{\partial w_k}{\partial y} \frac{\partial w_i}{\partial y} \, d\omega + \sum_{k=1}^n Q_{res, k} \int_{\Gamma'_5} \bar{w}_k \bar{w}_i \, dx + \bar{E}_{r, k} \int_{\Gamma'_6} \bar{w}_i \bar{w}_k \, dx \quad \forall i=1, N$$

Qui se met sous forme matricielle : $[C(u)] \left\{ \frac{dU}{dt} \right\} = - [K(u)] \{U\} + \{S\}$

$$C_{i, k} = \int_{\Omega} u_k u_i \, c(r, \beta, u) \, d\omega$$

avec
$$k_{i, j} = \int_{\Omega} k_H \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + k_V \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} \, d\omega$$

$$S_i = \sum_{k=1}^N (Q_{res, k} + \bar{E}_{r, k}) \int_{\Gamma'_5 \cup \Gamma'_6} \bar{w}_k \bar{w}_i \, dx$$

Le calcul des termes des matrices [C] et [K] et du vecteur $\{S\}$ est fait en utilisant le concept d'élément de référence. On établit ainsi des matrices élémentaires, associées à un triangle. Celles-ci sont dans une deuxième phase expansées pour former les matrices [C] et [K]. Les quadratures nécessaires au calcul des matrices élémentaires sont faites explicitement et non par une méthode numérique (points de Gauss par exemple). Cette façon de procéder permet, à partir d'un tableau de coordonnées des sommets et d'une table de connectivité, ie associant à un triangle ses numéros de sommets, de générer automatiquement les matrices élémentaires. On procède donc plutôt en bouclant sur les triangles que sur les noeuds. Pour plus de détail sur les calculs des intégrales, on se reportera à l'annexe. L'introduction des conditions aux limites de type Dirichlet se fait par exemple, en un noeud i , en posant $u_i = u_{lim}$, en imposant $k_{i,i} = 1$ et en modifiant en conséquence la ligne et la colonne passant par (i, i) .

III.3. Intégration des systèmes

Les deux modes de discrétisation fournissent un système différentiel non linéaire analogue à :

$$[c(u)] \left\{ \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\} = - [K(u)] \{ \mathbf{u} \} + \{ S \} \quad (2.46)$$

Dans le cadre des différences finies, la matrice [C] est diagonale et donc s'inverse directement. Par contre, pour les éléments finis, il n'en est rien. Nous utiliserons la technique du "Lumping" de la matrice [C] qui consiste à sommer tous les termes d'une ligne et à mettre le résultat sur la diagonale (ZINCKIEWICZ, 1979). GAUDU (1978) propose une pondération de $\frac{du}{dt}$, dans le but d'améliorer la stabilité. On remarquera que d'une part la matrice qu'il obtient ainsi correspond à celle résultant du "Lumping" et que d'autre part, on a souligné dans l'étude sur la stabilité que le Lumping est un facteur de son amélioration. Par conséquent, on disposera dans les deux cas d'un système du type :

$$\left\{ \frac{dU}{dt} \right\} = -[C]^{-1} [K] \{U\} + [C]^{-1} \{S\} \quad (2.45)$$

où $[C]^{-1}$, $[K]$, $\{S\}$ sont fonctions de u .

Nous avons choisi d'utiliser une méthode A (θ)-Stable à un pas qui assure la stabilité inconditionnelle et permet de choisir à travers le paramètre entre divers algorithmes couramment employés. Rappelons que la formule générale est pour une équation $y'(t) = f(y,t)$

$$y^{j+1} = y^j + \Delta t [\theta f(y^{j+1}, t^{j+1}) + (1 - \theta) f(y^j, t^j)]$$

Les méthodes d'ordres supérieurs sont abandonnées au vu des résultats de la première partie.

L'application de l'algorithme choisi à la formule (2.42) définissant le système différentiel, donne :

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{dt} = \theta \left[-[C^{-1}]^{j+1} [K]^{j+1} u^{j+1} + [C^{-1}]^{j+1} \{S\}^{j+1} \right] + (1-\theta) \left[-[C^{-1}]^j [K]^j u^j + [C^{-1}]^j \{S\}^j \right]$$

soit en regroupant les termes en u^{j+1} et u^j :

$$\begin{aligned} [I + \theta dt [C^{-1}]^{j+1} [K]^{j+1}] u^{j+1} &= \theta dt [C^{-1}]^{j+1} S^{j+1} + [I - (1-\theta) dt [C^{-1}]^j [K]^j] u^j \\ &+ (1-\theta) dt [C^{-1}]^j S^j \end{aligned} \quad (2.46)$$

On note

$$\{SML\} = [I - (1-\theta) dt [C^{-1}]^j [K]^j] u^j + (1-\theta) dt [C^{-1}]^j S^j \quad (2.47)$$

c'est-à-dire la partie linéaire du second membre (Ne dépendant pas de u à t^{j+1}).

III.3.1. Traitement des non-linéarités

Les non-linéarités du système d'équations obtenu peuvent être traitées de nombreuses façons (cf. Chapitre I, III.3). Parmi celles-ci, nous avons choisi de mettre en oeuvre une méthode de point fixe, pouvant être couplée avec des extrapolations sur les coefficients. Celle-ci consiste à chercher la solution u_k^{j+1} obtenue par résolution des systèmes successifs.

$$F(u_k^{j+1}), u_{k+1}^{j+1} = S_k^{j+1} + \{SML\}$$

$k = 1, 2, \dots$ où $F(u_k^{j+1})$ représente génériquement la matrice au premier membre et S_k^{j+1} , le vecteur non-linéaire du second membre. La valeur initiale de u_k^{j+1} ie u_1^{j+1} est donnée par u^j . Remarquons que si on limite le processus itératif à un pas, on a la solution obtenue par linéarisation brutale.

Le système à résoudre s'écrit explicitement :

$$[I + \theta dt [c^{-1}]_b^{j+1} [K]_b^{j+1}] \{u_{k+1}^{j+1}\} = \theta dt [c^{-1}]_b^{j+1} \{S\}_k^{j+1} + \{SML\} \quad (2.48)$$

Il est alors pratique d'introduire le résidu w_k^{j+1} défini par :

$$w_k^{j+1} = u_{k+1}^{j+1} - u_k^j \quad \text{ce qui donne après introduction dans (2.45)}$$

$$[I + \theta dt [c^{-1}]_b^{j+1} [K]_b^{j+1}] w_b^{j+1} = -[I + dt \theta [c^{-1}]_b^{j+1} [K]_b^{j+1}] u_k^{j+1} + \theta dt [c^{-1}]_b^{j+1} \{S\}_k^{j+1} + \{SML\}. \quad (2.49)$$

On pose :

$$[A]_b^{j+1} = I + dt \theta [c^{-1}]_b^{j+1} [K]_b^{j+1} \quad (2.50)$$

(2.46) devient alors :

$$[A]_b^{j+1} = -[A]_b^{j+1} \{u_k\}^{j+1} + \theta dt [c^{-1}]_b^{j+1} \{S\}_k^{j+1} + \{SML\} \quad (2.51)$$

En notant $[0]$, l'opérateur au pas de temps précédent, Δt_p le pas de temps correspondant, on a :

$$\{S_{ML}\} = \{u\}^j - \frac{\Delta t}{\Delta t_p} \frac{1-\theta}{\theta} [0] \{u\}^j + \frac{\Delta t}{\Delta t_p} \frac{1-\theta}{\theta} \{u\}^j + (1-\theta) \Delta t_p [C^{-1}]^j \{S^j\} \quad (2.52)$$

Remarquons que dans le cas où $\theta = 1$ ie pour un schéma implicite pur, on a simplement $\{S_{ML}\} = \{u^j\}$

On pose $\{s_0\} = \theta \Delta t_p [C^{-1}]^j \{S^j\}$ ie le vecteur sollicitation au pas de temps précédent. On a alors en portant dans (2.48)

$$\{S_{ML}\} = u^j \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta t_p} \frac{1-\theta}{\theta} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta t_p} \frac{1-\theta}{\theta} [0] u^j + \{s_0\} \frac{1-\theta}{\theta} \quad (2.53)$$

La suite des systèmes linéaires à établir et à résoudre dans le cadre de la méthode choisie, est donnée par :

$$[A]_k^{j+1} w_k = -[A]_k^{j+1} u_k^{j+1} + \theta \Delta t [C]_k^{j+1} \{S\}_k^{j+1} + \{S_{ML}\}$$

$$u_{k+1}^{j+1} = u_k^{j+1} + w_k \quad u_1^{j+1} = u^j$$

(2.54)

$\{S_{ML}\}$ est défini par (2.50) et $[A]_k^{j+1}$ par (2.47)

D'un point de vue implantation sur ordinateur, la présentation retenue nécessite le stockage au début de chaque pas de temps de la matrice $[0]$ et du vecteur $\{s_0\}$ définissant le problème au pas de temps précédent. Il ne reste plus alors qu'à réactualiser $[A]$ et $\{S\}$.

Le test d'arrêt de l'itération est fait sur la norme de w_k .

$$\|w_k\|_\infty \leq \epsilon \quad (2.55)$$

Dans un but d'accélération de la convergence, nous avons essayé deux types d'extrapolation. Tout d'abord sur la suite $(u_k^{(n)})_{k=1, \dots}$. La convergence vers le point fixe n'étant pas monotone, cet essai s'est avéré aboutir à des complications diverses. D'autre part, on a extrapolé les caractéristiques hydrodynamiques en fonction des pas de temps précédents, par différentes formules, pour obtenir une valeur de départ des itérations plus proches de la solution. GAUDU (1978) propose deux types d'extrapolations.

$$\text{Linéaires : } u^{k+1/2} = u^k + \frac{dt_k}{2 dt_{k-1}} (u^k - u^{k-1}) \quad (2.56)$$

$$\text{Paraboliques : } u^{k+1/2} = \frac{1}{2} \left[(1+\alpha) u^k + \beta u^{k-1} + \gamma u^{k-2} \right] \quad (2.57)$$

$$\alpha = (dt_{k-2} + dt_{k-1} + dt_k) (dt_{k-1} + dt_k) / ((dt_{k-2} + dt_{k-1}) \cdot dt_{k-1})$$

$$\beta = (dt_{k-2} + dt_{k-1} + dt_k) dt_k / (dt_{k-2} \cdot dt_{k-1})$$

$$\gamma = dt_k (dt_{k-1} + dt_k) / (dt_{k-2} \cdot (dt_{k-2} + dt_{k-1}))$$

L'extrapolation linéaire apporte quelques problèmes, notamment pour les points où les variations sont brutales. Elle peut conduire à un allongement des itérations, et ne doit être utilisée en tout état de cause que lorsque le phénomène est suffisamment "doux". Nous utiliserons donc de préférence l'extrapolation parabolique.

Quoi qu'il en soit, les extrapolations ne sont pas faites dans les phases de simulation, impliquant des changements de fonctionnement ; c'est-à-dire par exemple lors du début des irrigations ou des phases de redistribution.

III.3.2. Contrôle du pas de temps

Dans tout problème parabolique, les gradients initiaux tendent à s'atténuer et il est intéressant d'en tenir compte en augmentant le pas de temps de façon à diminuer la charge en calculs. Certains codes utilisent des estimations de l'erreur, pour déterminer le pas de temps et sa variation.

Dans les problèmes de milieux poreux, il est souvent utilisé un critère de contrôle de Δt basé sur une quantité d'eau maximale infiltrable à ne pas dépasser. HANK-BOUWER (1962) utilisent : $\Delta t = \frac{Q}{I}$ où $Q = .035 \Delta x$ désigne la quantité d'eau à ne pas dépasser, et I le flux maximal calculé. A sa suite, ABABOU utilise :

$$\Delta t = \frac{.035 (\Delta x \cdot \Delta z)^{1/2}}{I} \quad (2.58)$$

Nous avons préféré utiliser le nombre d'itérations nécessaires à la satisfaction du critère (2.55) pour contrôler la taille du pas de temps. La stratégie utilisée consiste à augmenter Δt , s'il y a convergence rapide, 2 itérations ou 3, à le laisser inchangé si on a la convergence en moins de 5 itérations et à le diminuer sinon. Dans un but d'économie du temps de calcul, on a rajouté quelques possibilités, telles la poursuite des itérations si on est proche de la solution, une augmentation ou une diminution modulée en fonction du point où on se trouve dans le cycle d'irrigation, une éventuelle acceptation de la solution si la convergence est trop lente au bout d'un certain nombre d'itérations, etc.... Cet ensemble d'options permet un contrôle assez précis et optimisé du pas de temps.

Le pas de temps initial est choisi volontairement petit (2 s). A titre d'exemple, on a reporté ci-après les pas de temps utilisé par le code différences finies pour différents sols et ceux utilisés par ABABOU, c'est-à-dire calculé par (2.58).

Loess MC4 Au bout de 8h de calcul, pour un apport linéaire de 2,7 l/h/m, ABABOU a un Δt de 360s environ, tandis que dans des conditions un peu moins favorables, initial plus faible et débit plus élevé, notre pas de temps est de 190s ($\epsilon = 1$ cm). Sur les sables DEK et DIERI, utilisés par ABABOU, et pour des apports linéaires, les pas de temps sont de 45 au bout de 16 heures et 1h au bout de 24 heures de simulation. Il semble donc globalement que notre contrôle du pas de temps conduise à prendre des pas plus petits que ceux d'ABABOU. Remarquons qu'avec des pas de temps contrôlés par la formule (2.58), les itérations de point fixe pourraient ne pas converger, notamment au début.

III.3.3. Possibilités du programme

Les codes mis au point acceptent les différentes conditions aux limites que nous avons décrites lors de l'établissement des équations. La mobilité des frontières du domaine nous a conduit à écrire un programme permettant de générer les caractéristiques du maillage éléments finis (table des coordonnées, convectivité, etc...). Les éléments triangulaires retenus, et le domaine rectangulaire sur lequel on travaille, permettent de le faire aisément, sans avoir recours à des algorithmes plus compliqués (Polygones de Voronoï, etc...). Ce programme qui ne nécessite en entrée que la trace du maillage sur la frontière, est utilisé en subroutine soit pour générer un maillage fixe, soit pour modifier le maillage existant en rajoutant des triangles sur les frontières le nécessitant (\mathcal{T}_2 et/ou \mathcal{T}_3).

Un programme similaire est utilisé dans le cadre des différences finies.

Dans le cas des éléments finis pour minimiser la largeur de bande de la matrice, et dans le cas des différences finies pour conserver la structure bloc-tridiagonale, on doit renuméroter tous les noeuds de maillages après modification des frontières. Les modifications des vecteurs, bilan et autres, sont assurées par ce programme.

Notons enfin que la frontière mobile et le programme associé permettent d'économiser une part importante du temps de calcul en ne conduisant la simulation au départ que sur un petit domaine qui est agrandi au fur et à mesure des besoins.

Dans une optique de vérification et d'estimation des performances des programmes, ils ont été prévus pour simuler des infiltrations sous flux, flaque, et à partir d'une tranchée (Les trois cas quelle que soit la symétrie). Des programmes de sorties graphiques, courbes, isocontours, surfaces en perspectives leurs sont associés.

IV. CARACTERISTIQUES ET METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

IV.1. Méthodes directes

La discrétisation en différences finies et l'emploi de méthode A.D.I. pour l'équation de Richards ont l'avantage de conduire à des systèmes tridiagonaux, de petite taille et donc très efficacement résolus.

La solution x^* du système $Ax = b$ peut être alors obtenue, sous hypothèses, comme point fixe des opérateur J,G,S. La convergence des itérations définies par $x^{n+1} = Op(x^n)$ a lieu si $\rho(Op) < 1$ par exemple. Rappelons le théorème suivant dû à Stein-Rosenberg.

Théorème

Soit L, U , deux matrices positives :

- 1) si $\rho(U+L) = 0$ alors $(I-L)^{-1}$ existe $(I-L)^{-1}U \geq 0$
et $\rho[(I-L)^{-1}U] = \rho(L+U)$
- 2) si $\rho(U+L) = 1$ et si $\rho(L) < 1$ alors $(I-L)^{-1}$ existe $(I-L)^{-1}U \geq 0$
et $\rho[(I-L)^{-1}U] = \rho(L+U) = 1$
- 3) si $0 < \rho(U+L) < 1$ alors $(I-L)^{-1}$ existe, $(I-L)^{-1}U \geq 0$
et $0 \leq \rho[(I-L)^{-1}U] \leq \rho(L+U) < 1$
- 4) si $\rho(L+U) > 1$ et si $\rho(L) < 1$ alors $(I-L)^{-1}$ existe $(I-L)^{-1}U > 0$
et $1 < \rho(L+U) \leq \rho[(I-L)^{-1}U]$

Ce théorème exprime donc le fait que si Jacobi converge, alors Gauss-Seidel converge aussi et plus vite, et que si Jacobi diverge, Gauss-Seidel diverge aussi et plus vite. En conclusion, Jacobi n'est intéressant que pour étudier la convergence sur un cas donné, mais ne doit jamais être employé. C'est un indicateur du fonctionnement de G.S.

Pour décider de l'applicabilité d'une de ces méthodes, on doit pouvoir estimer $\rho(J)$ dans le cas où on se trouve. Ceci ne se fait pas directement et on va d'abord donner une définition.

Définition : Soit A une matrice de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si A vérifie les deux propriétés suivantes, A est dite une "M-Matrice".

$$a) \quad \sum_{l=1}^n a_{k,l} > 0 \quad \forall k = 1, n$$

$$b) \quad a_{k,l} \leq 0 \quad \forall k = 1, n \quad \text{et} \quad \forall l \neq k$$

Une conséquence immédiate est que A est inversible et d'inverse positif.

On dispose alors du théorème suivant :

Théorème : Si A est une M-Matrice alors :

- Jacobi converge
- G.S. converge
- S.O.R. converge avec $\omega \in]0, \frac{2}{1+\rho(J)} [$

Par conséquent, il ne reste plus qu'à vérifier que les matrices obtenues sont des M-Matrices.

Si on reprend les équations fournies, en annexes, pour les différences finies, on se rend compte immédiatement que c'est bien le cas.

On pourra donc appliquer avec succès l'itération de Gauss-Seidel ou S.O.R.. Dans notre cas, on peut choisir comme point de départ des itérations la solution au pas de temps précédent ou une extrapolation de celle-ci.

Les matrices que nous obtenons par différences finies ont un découpage naturel en blocs tridiagonaux et diagonaux. On dit que l'on a alors une matrice bloc triadiagonale. On montre que les itérations de Jacobi, Gauss-Seidel et S.O.R. convergent si A est un bloc H-Matrice. Nous n'entrerons pas dans la démonstration du théorème qui nécessite l'introduction des notions de normes vectorielles, de majorante, etc... Disons simplement que nos matrices vérifient bien ces propriétés et que, par conséquent, les itérations de Jacobi, G.S. et S.O.R sont utilisables. Elles sont données sous formes matricielles, par les formules suivantes :

$$\text{Si } A = \Delta -L-V \quad ; \quad x = (x_i) \quad x_i \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{r+1} = (L+V)x^r + \Delta^{-1}b \quad \text{Approximations successives Jacobi/blocs}$$

$$x^{r+1} = (I-L)^{-1}Ux^r + (I-U)^{-1}\Delta^{-1}b \quad \text{Approximations successives G.S./blocs}$$

$$x^{r+1} = (I-\omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)I)x^r + \omega(I-\omega L)^{-1}\Delta^{-1}b \quad \text{S.O.R./blocs}$$

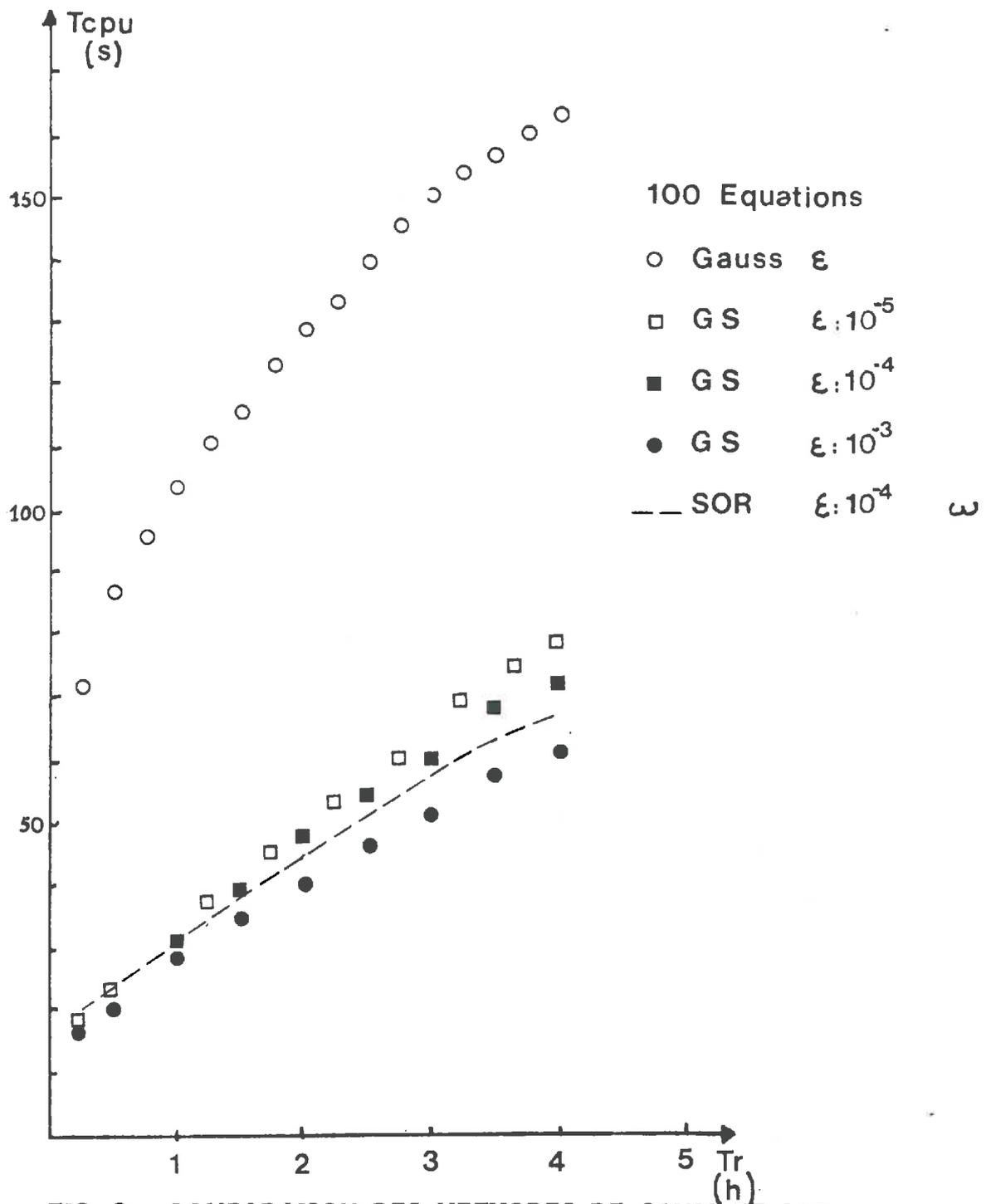


FIG. 2 - COMPARAISON DES METHODES DE GAUSS ET SOR

b) Fortement implicites

Ces méthodes sont utilisées sur des systèmes de grosses tailles. Elles utilisent un préconditionnement de la matrice de façon à accélérer la convergence. Les plus utilisés sont les préconditionnement SSOR et CHOLESKY incomplet. Ils consistent à obtenir une factorisation approximative de la matrice A sous forme L.V (Triangl. inf * Triangl. sup) pour CHOLESKY et l'inverse de la matrice SSOR pour le préconditionnement SSOR. Citons, parmi ces méthodes, les algorithmes I.C.C.G. (Incomplet, CHOLESKY Conjugated Gradient) qui est une méthode du gradient avec un préconditionnement incomplet de CHOLESKY, SIP (Strongly Implicit Procedure) qui utilise aussi un préconditionnement incomplet de CHOLESKY. Ces méthodes ont été utilisées avec succès dans des problèmes d'écoulement en milieux saturés (2-D et 3-D). Nous ne les citons que pour mémoire et ne les utiliserons pas. Nous avons préféré mettre en oeuvre la méthode de GAUSS, optimisée pour des systèmes à structure bande et la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL ou son extension, l'algorithme SOR. Les méthodes itératives sont particulièrement intéressantes dans le cas des différences finies. En effet, la structure penta-diagonale de la matrice permet une optimisation poussée de l'algorithme. On présente ci-après quelques comparaisons faites entre les méthodes itératives (G-S, SOR) et la méthode directe (GAUSS).

a) Le problème test est celui de l'apport linéaire, mis en oeuvre sur le sable DIERI, avec un débit de $1,5 \text{ l.h}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

On a simulé avec un domaine fixe comportant 100 noeuds. Le temps final est de 4h. Le pas de temps est variable et ajusté en fonction du nombre d'itérations de point fixe nécessaires. Ceci pourrait fausser un peu la comparaison, mais le pas de temps pris par la méthode SOR étant toujours inférieur, la comparaison n'en est que plus tranchée (cf. figure 2).

On peut constater que :

- une augmentation de la précision requise pour arrêter les itérations SOR, (ϵ passant de 10^{-3} à 10^{-5}), ne grève pas le temps de calcul quoique le nombre d'itérations augmente sensiblement (la résolution du système linéaire ne constitue pas la charge la plus importante en temps cpu pour le code, alors que c'est le cas pour l'algorithme de GAUSS).

- les résultats obtenus, que ce soit globalement (bilan de masse) ou d'un point de vue local, ne sont pas sensibles à la variation de ϵ .

- malgré le fait que les pas de temps soient plus petits et que le temps passé à la résolution ne constitue qu'une fraction de la charge totale du code le temps de calcul est divisé par 3.

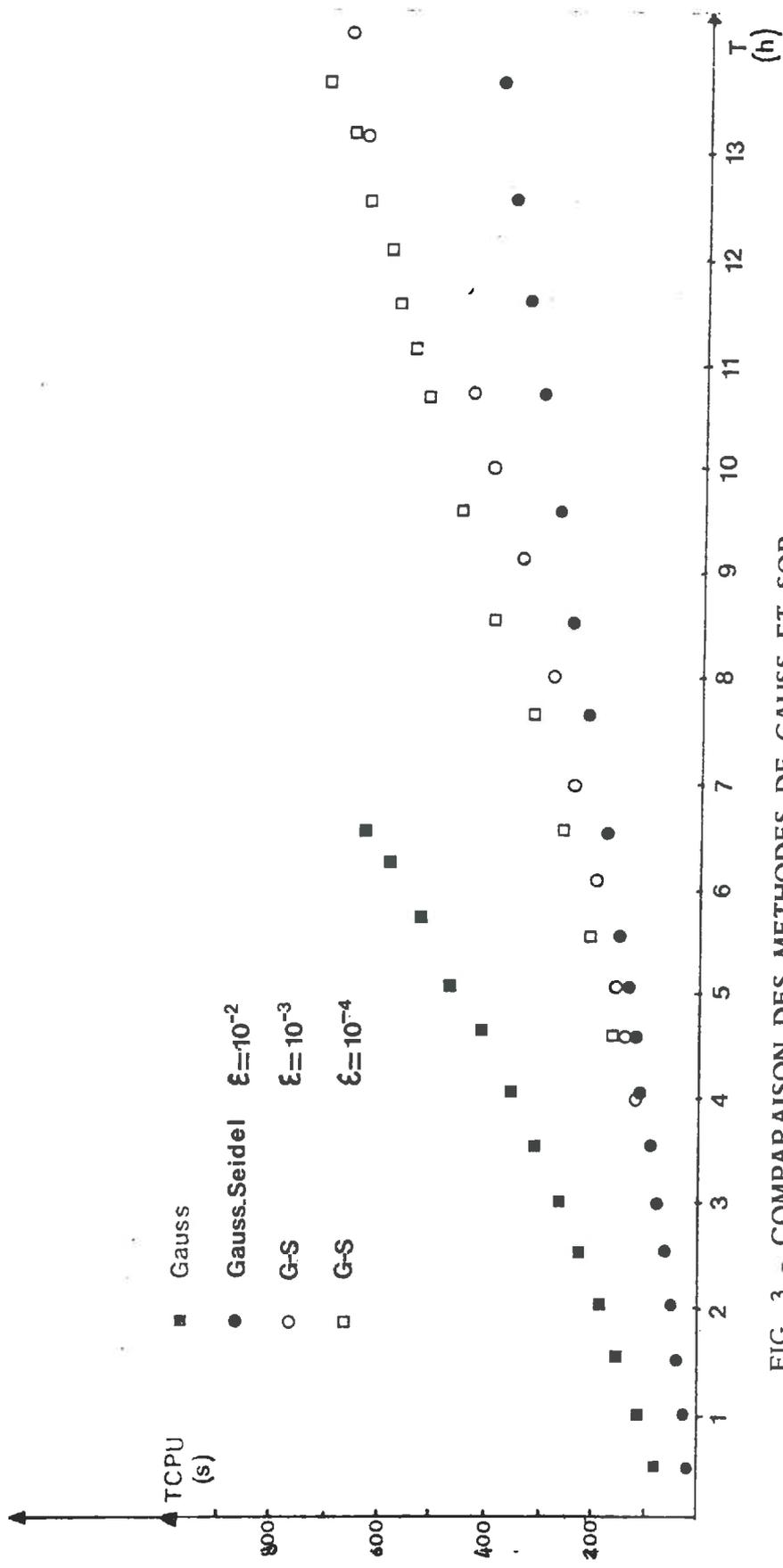


FIG. 3 - COMPARAISON DES METHODES DE GAUSS ET SOR

t (h)	GAUSS		G-S $\epsilon = 10^{-3}$		G-S $\epsilon = 10^{-4}$		G-S $\epsilon = 10^{-5}$	
	tcpu (s)	Rap	tcpu (s)	Rap	tcpu (s)	Rap	tcpu (s)	Rap
.5	87	.948	21	.973	24	.973	24	.973
1.	104	.962	28	.972	32	.972	32	.972
1.5	116	.957	35	.964	40	.963	42	.963
2.	129	.955	41	.968	48	.968	50	.968
2.5	140	.964	47	.976	55	.977	58	.977
3.	151	.972	52	.984	61	.985	66	.985
3.5	157	.979	58	.99	68	.99	73	.99
4	<u>163</u>	.984	<u>62</u>	.989	<u>73</u>	.989	<u>79</u>	.989
Max. It. SOR			27		37		50	

Les simulations faites avec des systèmes d'équations plus importants (720 noeuds) font apparaître des écarts en temps cpu, bien plus importants (fig. 3-4). A titre d'exemple (20s de temps cpu permettent de simuler 11h de temps réel avec la méthode itérative et 2mn avec la méthode directe).

Toutefois, on peut noter quelques inconvénients.

Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme SOR augmente avec le pas de temps utilisé et le nombre de noeuds participant effectivement à l'écoulement. On a donc une compétition avec dt. Le pilotage du pas de temps ne doit alors plus être fait uniquement par l'algorithme de point fixe, mais prendre aussi en compte l'algorithme SOR. On constate en fait que l'épsilon de l'algorithme de point fixe doit être suffisamment restrictif, pour assurer un bon comportement des itérations SOR. Ceci conduit à des pas de temps plus petits qu'avec une méthode directe (1/2). Ce désavantage est largement compensé par la vitesse de résolution.

La détermination du facteur de surrelaxation ω n'est pas en général automatique.

Sur le même problème test, les différents essais que nous avons faits conduisent à choisir un ω voisin de 1.1. On peut constater (fig. 2) que pour un problème court, il n'est pas intéressant de prendre $\omega \neq 1$ (ie G-S). Au-delà, la surrelaxation devient intéressante, du fait de la réduction du nombre d'itéra-

t (h)	GAUSS		G-S $\epsilon = 10^{-3}$		G-S $\epsilon = 10^{-4}$		G-S $\epsilon = 10^{-5}$	
	tcpu (s)	Rap	tcpu (s)	Rap	tcpu (s)	Rap	tcpu (s)	Rap
.5	87	.948	21	.973	24	.973	24	.973
1.	104	.962	28	.972	32	.972	32	.972
1.5	116	.957	35	.964	40	.963	42	.963
2.	129	.955	41	.968	48	.968	50	.968
2.5	140	.964	47	.976	55	.977	58	.977
3.	151	.972	52	.984	61	.985	66	.985
3.5	157	.979	58	.99	68	.99	73	.99
4	<u>163</u>	.984	<u>62</u>	.989	<u>73</u>	.989	<u>79</u>	.989
Max. It. SOR			27		37		50	

Les simulations faites avec des systèmes d'équations plus importants (720 noeuds) font apparaître des écarts en temps cpu, bien plus importants (fig. 3-4). A titre d'exemple (20s de temps cpu permettent de simuler 11h de temps réel avec la méthode itérative et 2mn avec la méthode directe).

Toutefois, on peut noter quelques inconvénients.

Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme SOR augmente avec le pas de temps utilisé et le nombre de noeuds participant effectivement à l'écoulement. On a donc une compétition avec Δt . Le pilotage du pas de temps ne doit alors plus être fait uniquement par l'algorithme de point fixe, mais prendre aussi en compte l'algorithme SOR. On constate en fait que l'épsilon de l'algorithme de point fixe doit être suffisamment restrictif, pour assurer un bon comportement des itérations SOR. Ceci conduit à des pas de temps plus petits qu'avec une méthode directe (1/2). Ce désavantage est largement compensé par la vitesse de résolution.

La détermination du facteur de surrelaxation ω n'est pas en général automatique.

Sur le même problème test, les différents essais que nous avons faits conduisent à choisir un ω voisin de 1.1. On peut constater (fig. 2) que pour un problème court, il n'est pas intéressant de prendre $\omega \neq 1$ (ie G-S). Au-delà, la surrelaxation devient intéressante, du fait de la réduction du nombre d'itéra-

cpu
(s)

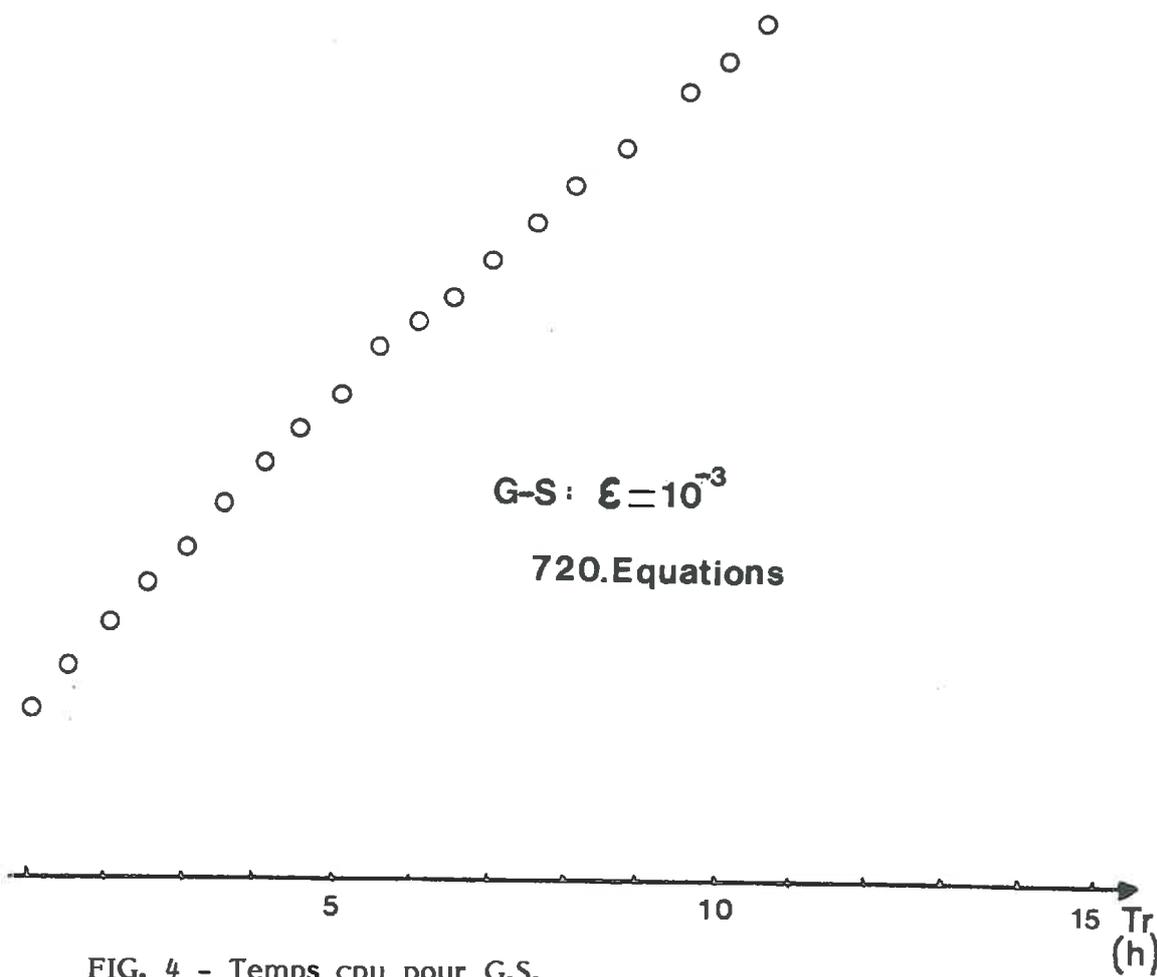


FIG. 4 - Temps cpu pour G.S.

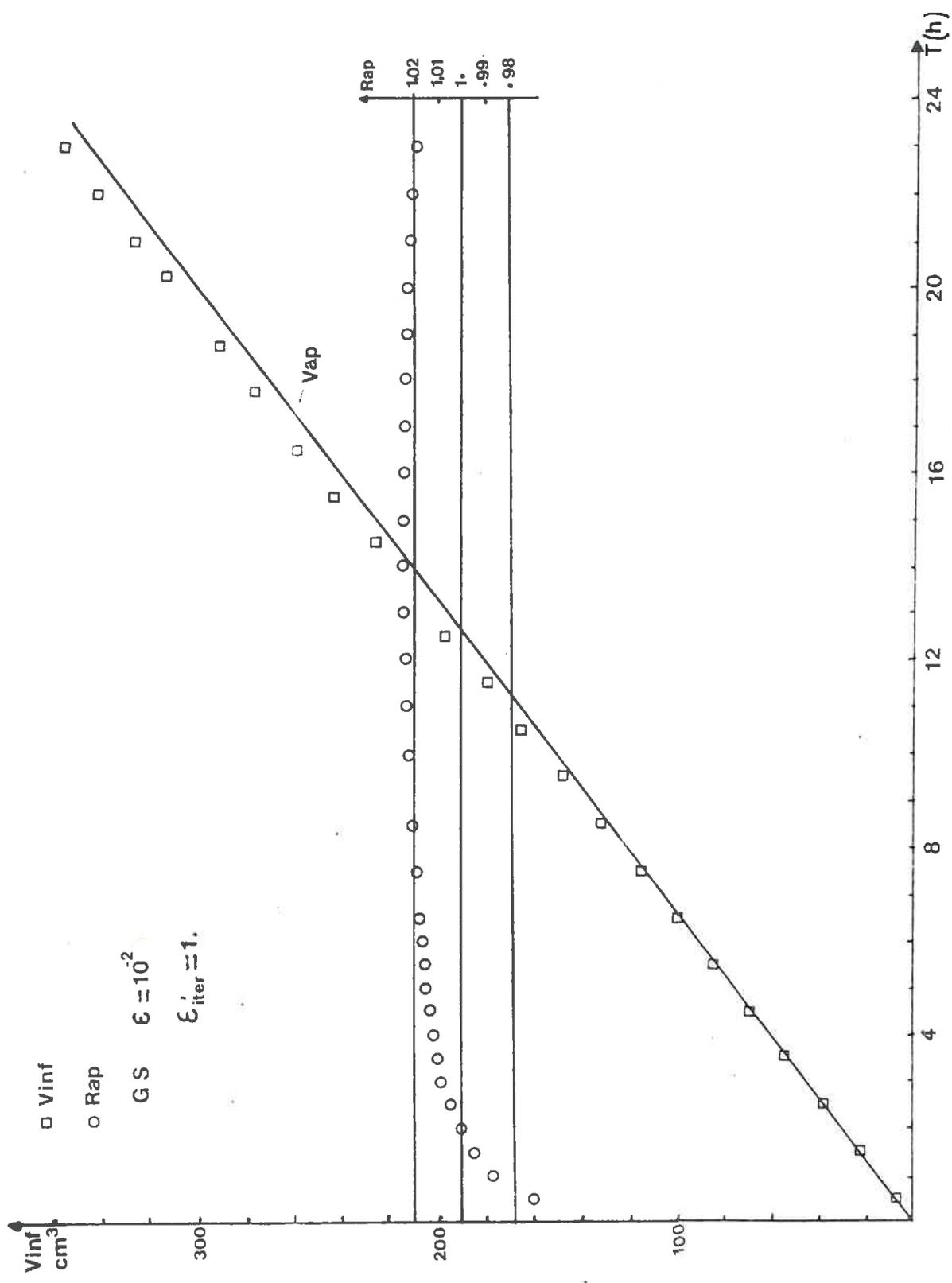


FIG. 5 - Bilan de masse

tions. Pour $\epsilon = 10^{-4}$, et au bout de 4h, on a un nombre d'itérations égal à 37 pour $\omega = 1$ et 22 pour $\omega = 1.1$. On peut constater sur la figure 3 le gain en temps cpu, qui ne fait que s'amplifier quant t et le nombre d'équations augmentent.

La figure (5) fait ressortir que l'algorithme itératif peut conduire à un bilan de masse légèrement biaisé, au bout de plusieurs heures de simulation. En prenant toujours le même problème test, on peut constater que pour t n'excédant pas 4 à 6h, l'erreur sur le bilan de masse est bien $< 1\%$ et du même ordre que celle obtenue par l'algorithme direct. Au delà, l'erreur atteint 3% (de 8h à 24h) puis commence à diminuer. Les expérimentations numériques montrent qu'en régime de redistribution, ce problème de biais disparaît. Il est remarquable que, pour $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$, on n'obtienne pas d'amélioration pour ϵ décroissant. En fait, l'amélioration peut être obtenue en prenant par exemple $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}$ et en requerrant une précision plus importante sur l'arrêt de l'itération de point fixe. Ceci conduit à une variation du pas de temps plus lente, mais aussi à un nombre d'itérations SOR grandement réduit. L'examen des champs de potentiel fournis respectivement par la méthode directe et la méthode itérative, montre que les erreurs les plus importantes se trouvent sur les noeuds de potentiel les plus faibles (algébrique), c'est-à-dire les plus éloignés de l'écoulement. Dans toute la zone d'écoulement effectif, l'erreur est très faible et n'est pas à l'origine du biais sur le bilan de masse (si on laisse l'écoulement se poursuivre de façon à ce que tous les noeuds soient intéressés, le biais disparaît).

V. VALIDATION DES PROGRAMMES

Il est bien connu que pour les problèmes de transferts en milieux poreux, on ne dispose de solutions analytiques que pour des géométries simples et des conditions aux limites restrictives.

BEN ASHER, LOMEN, WARRICK (1978) proposent des solutions analytiques pour l'apport ponctuel (symétrie cylindrique) ou en ligne (symétrie plane). Toujours dans le but d'approcher ce qui se passe en irrigation localisée, **WARRICK et LOMEN (1976)** donnent des solutions pour l'infiltration par bande ou disque sous condition de flux (flux $<$ infiltrabilité), tandis que **WOODING (1968)** fournit une solution pour un régime permanent d'infiltration à partir d'une flaque. Nous avons déjà souligné l'utilisation qui a été faite de ces solutions pour la validation de leurs modèles numériques par **BRANDT et al. (1971)**, et **ABABOU (1981)**. Dans le cadre de la validation, il est intéressant de revenir brièvement sur les travaux de ces deux auteurs.

Remarquons d'abord que les deux solutions mentionnées ci-dessus (**WARRICK** et **WOODING**) utilisent la transformée de Kirchoff appliquée à h ou à θ , et font de plus l'hypothèse d'une relation linéaire entre la nouvelle variable introduite (ϕ ou S ; $\phi = \int_{h_0}^h K(h) dh$, $S = \int_{\theta_0}^{\theta} D(\theta) d\theta$), et la conductivité. De ce fait, on travaille sur une équation linéaire.

D'un point de vue purement méthodologique, on peut se demander si la validation d'un programme destiné à traiter une équation aux dérivées partielles, non linéaire, ou plus faiblement non linéaire comme l'équation de Kirchoff reposant sur la solution d'un problème linéaire apporte quelque chose de plus qu'un bilan de masse équilibré sur l'équation de départ. Il ne faut pas perdre de vue que les problèmes soulevés par le cas non-linéaire, itérations, linéarisation, stabilité, convergences sont complètement éliminés lors du traitement d'une équation linéaire.

BRANDT et **BRESLER (1971)** utilisent la solution analytique de Wooding de façon intéressante pour valider numériquement leur modèle. Ils ajustent en permanence le débit du goutteur, de façon à avoir un débit à travers la zone saturée, constant et égal à celui obtenu par Wooding en régime permanent. Leur solution approche donc un état stationnaire dans une partie de plus en plus grande du domaine d'écoulement au fur et à mesure que le temps s'écoule. Les sorties du modèle sont alors, outre le champ de potentiel, la taille de la zone saturée. On remarque alors qu'en régime quasi-permanent le rayon de la zone saturée tend asymptotiquement vers 1 quand h tend vers zéro (h : pas d'espace). On obtient là une mesure intéressante de l'effet du traitement de la condition à la surface par une formule décentrée.

Nous avons donc préféré valider numériquement notre modèle en bilans de masse sur divers sols, en travaillant avec l'équation non-linéaire. Quand on l'a pu, on a comparé les champs de potentiel obtenus avec les solutions du modèle d'Ababou pour des simulations sous flux n'entraînant pas le flaquage. De ce fait, on peut estimer que si celles-ci sont voisines, hors du problème du traitement des conditions aux limites en irrigation localisée, on dispose d'un modèle fournissant des solutions "exactes", aux erreurs d'approximation près.

Pour la validation, en conditions de charge, et pour travailler avec l'équation non-linéaire, nous avons légèrement modifié nos programmes de façon à traiter le problème de la tranchée filtrante. Ce dernier a fait l'objet de nombreuses résolutions par différentes méthodes, ce qui nous permettra de faire quelques remarques et de vérifier que la solution obtenue est "bonne".

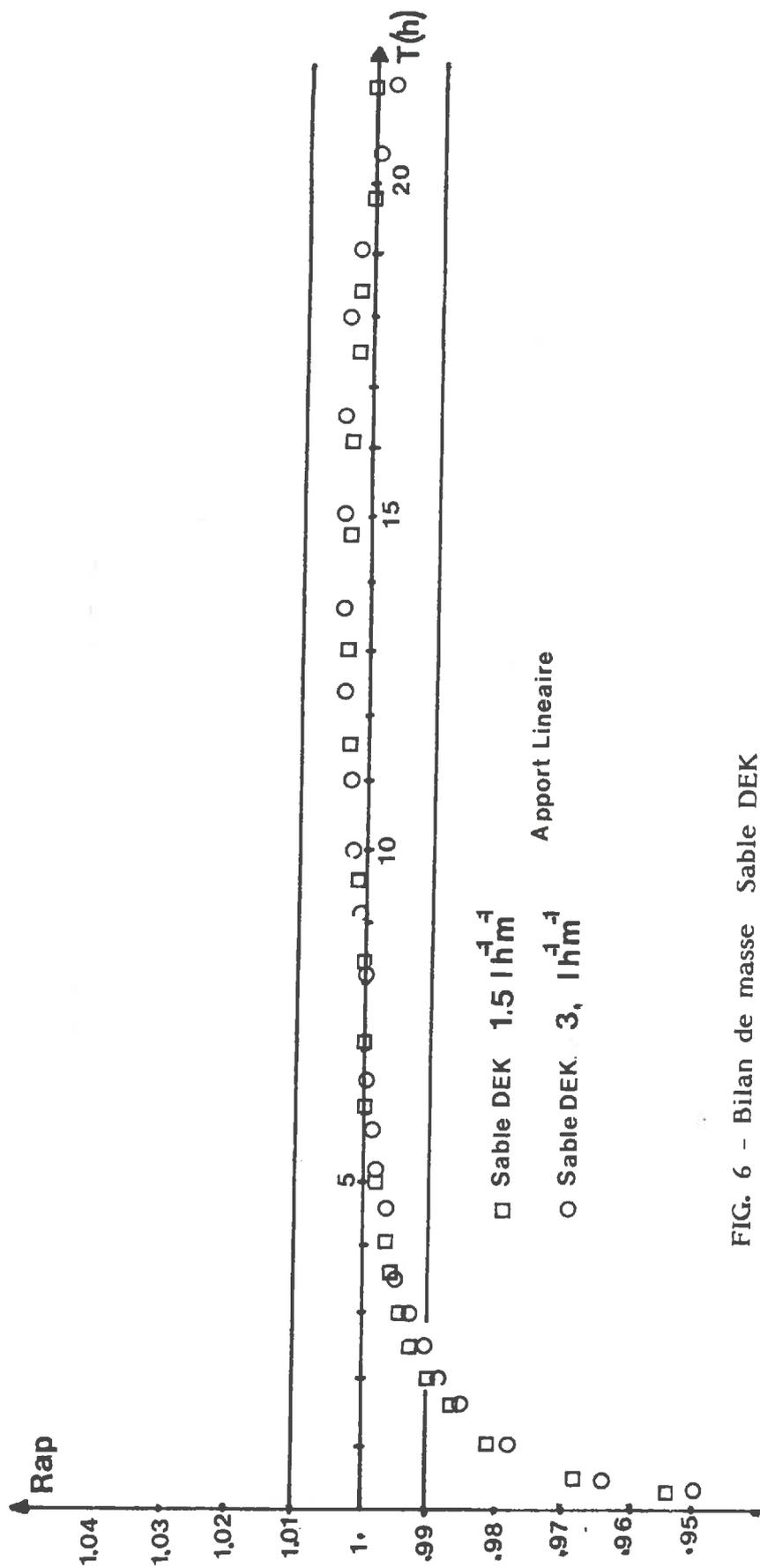


FIG. 6 - Bilan de masse Sable DEK

V.1. Validation numérique en condition de flux.

On a validé le code pour des flux égaux ou inférieurs à la conductivité à saturation du sol considéré, et pour des temps d'apport longs (plusieurs heures). Il nous a toutefois semblé intéressant de simuler avec des flux supérieurs, jusqu'à la saturation, pour étudier le comportement du code dans des conditions semblables aux premiers temps d'une irrigation localisée. Nous avons effectué ces simulations sur les sols déjà mentionnés (Sables DEK et DIERI, Loess MC4, Silty Clay loam et le sol sur lequel ont été effectuées les expériences de terrain connu sous le nom de Poirson (cf. Annexe).

L'évolution des bilans de masse pour le sable DEK par exemple est reportée sur le figure 6. L'apport est linéaire et il n'y a pas flaquage. Pour un pas d'espace de 2 cm dans les deux directions, et avec des itérations de point fixe, on constate que pour des flux égaux à $.6 K_s$ ou $1.3 K_s$, on a des comportements très proches et un bilan de masse dont l'erreur devient très rapidement inférieure à .5 %. Dans les mêmes conditions, ABABOU obtient avec un Δz de 3 cm, une erreur de -1,4 % au bout de 16h. On peut constater (fig. 7), sur les isocontours de teneur en eau, que l'accord avec ABABOU est très bon et qu'on ne trouve de différences qu'au niveau des faibles teneurs en eau (périphérie de la zone humide). Ceci explique la différence dans les bilans de masse.

Pour le loess MC4 (fig. 8), qui se caractérise par une conductivité à saturation très faible, on peut constater toute l'importance du pas d'espace. Ce cas suggère tout l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer quelquefois d'un maillage à pas variable, quand on travaille avec un sol où le front d'humectation est extrêmement marqué. Il serait là très intéressant de travailler avec un pas relativement grand dans les zones sèches et très humides, et de descendre jusqu'à un demi centimètre au voisinage du front d'humectation. Cela améliorerait bien évidemment l'estimation des bilans lors de l'intégration discrète, mais diminuerait aussi sensiblement la diffusion numérique due au calcul des conductivités internodales. On remarquera (fig. 9) sur les isocontours la légère différence entre les deux cas, et surtout la forme caractéristique de l'erreur, telle que nous l'avons montrée dans la première partie, à savoir une diffusion au niveau du front quand Δz augmente et un retard dans la zone plus humide.

Pour le sol Poirson, les simulations faites à flux faible ($.6K_s$ et K_s) donnent de bons bilans de masse. On peut remarquer une erreur systématiquement positive ou négative, selon qu'on linéarise ou qu'on itère (fig. 10).

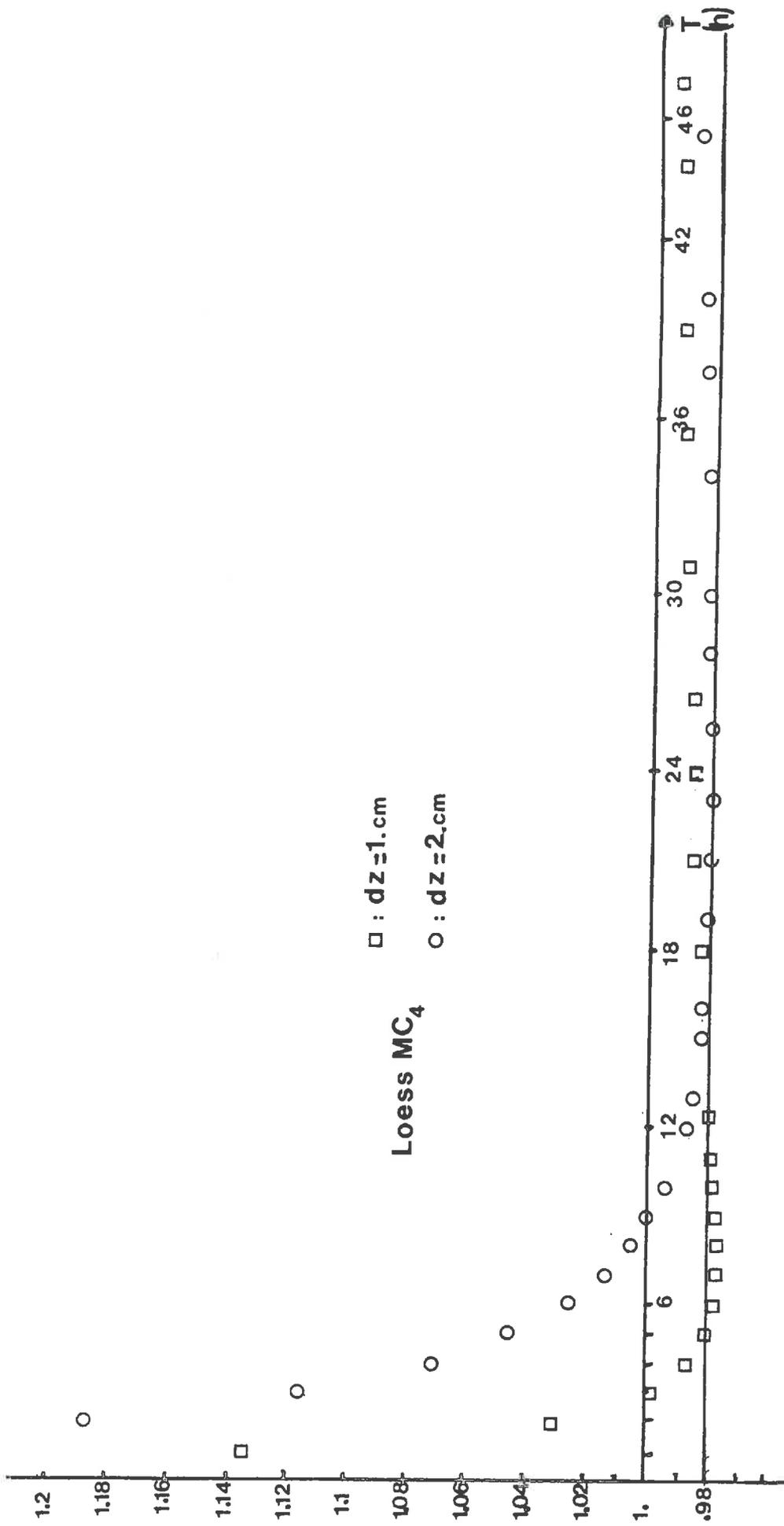


FIG. 7 - Bilan de masse Loess MC₄

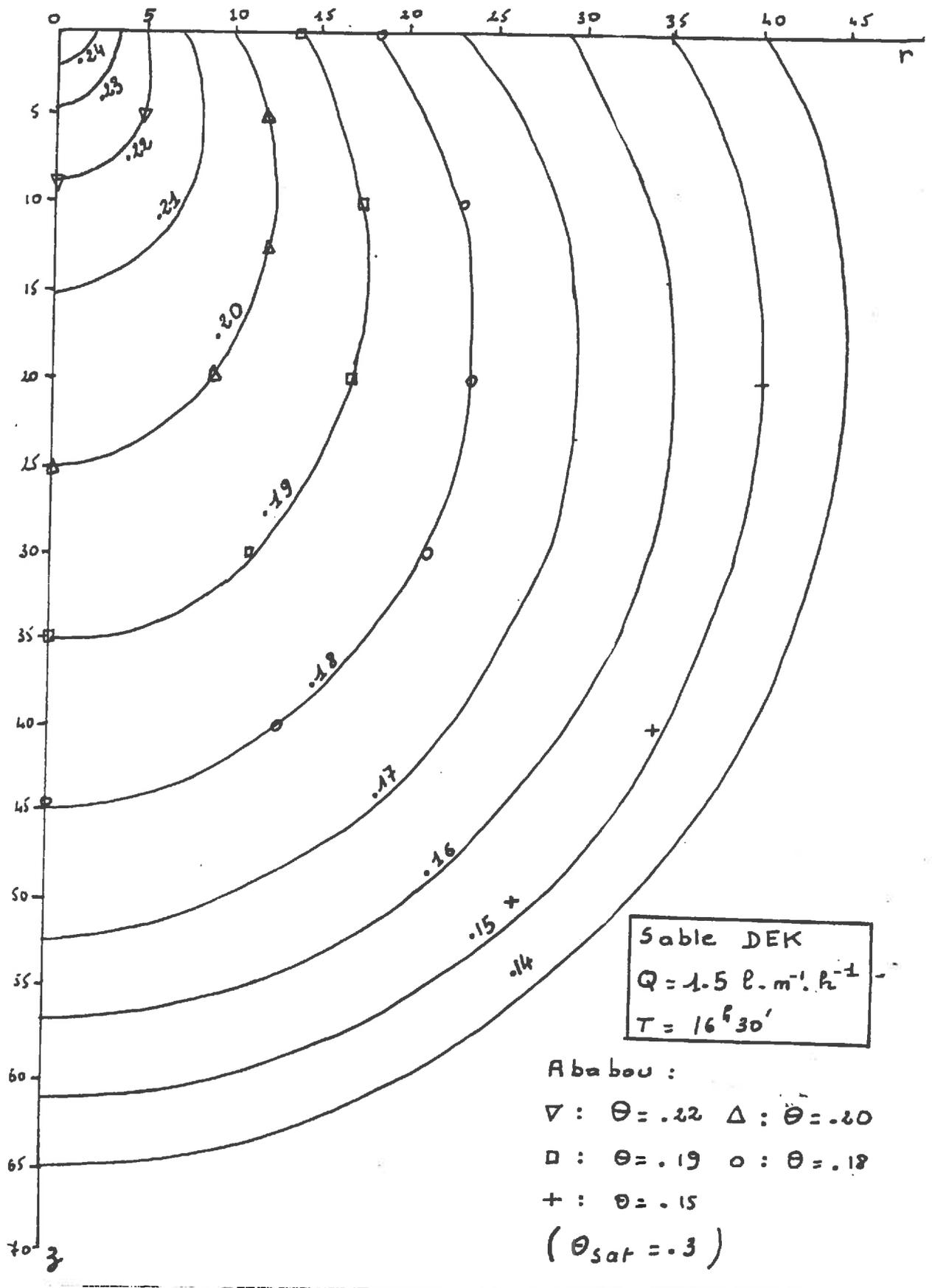
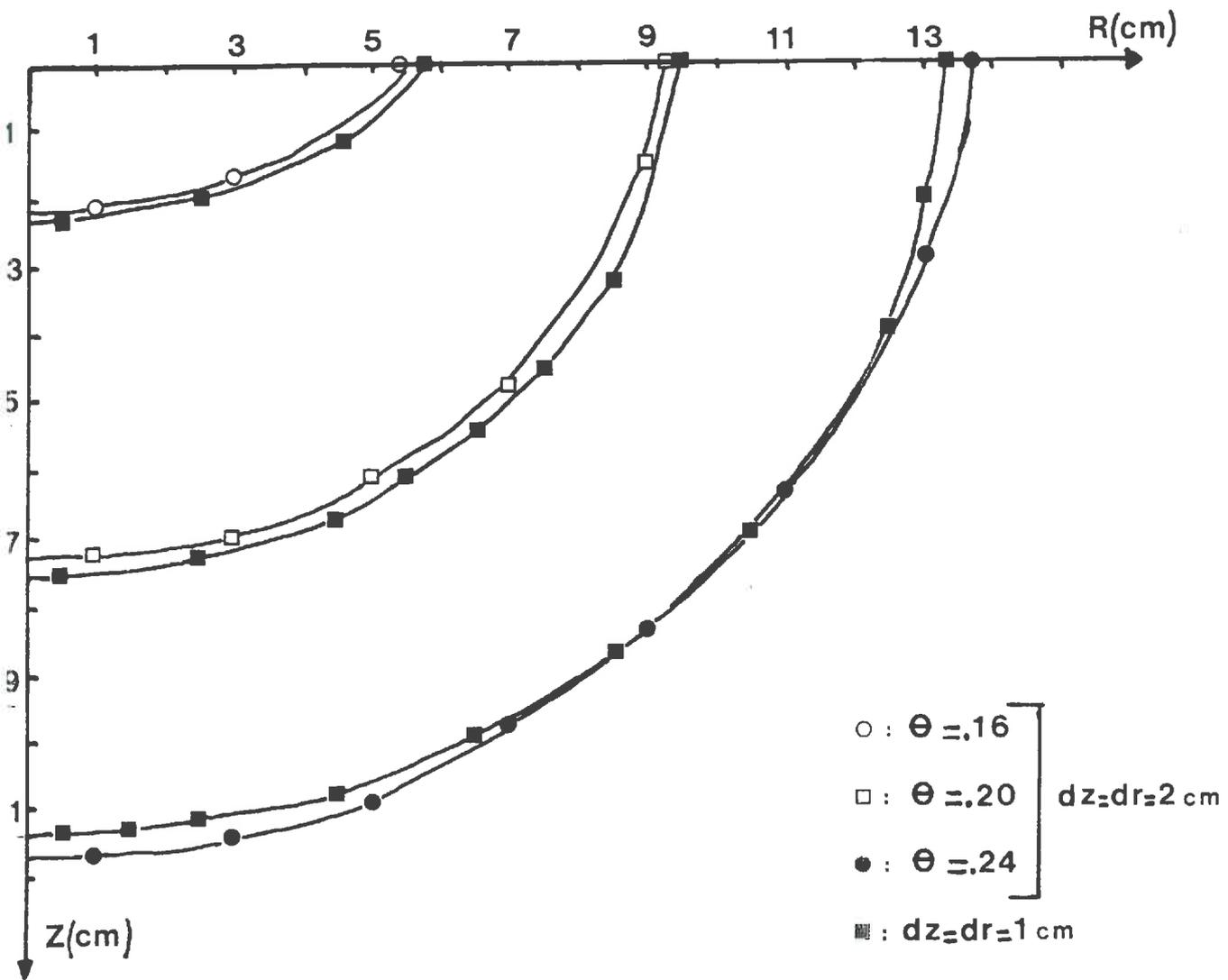


FIG. 8 Isohyètes Sable DEK



Loess MC₄ Q=Ks

FIG. 9 - Isohyètes loess MC₄

$Q = K_s$ [

- $dt = 2s$. Linéarisé. Implicite
- Point fixe Implicite

$Q = .6K_s$ [

- $dt = 0.4s$ Linéarisé Implicite
- Point fixe Implicite

POIRSON

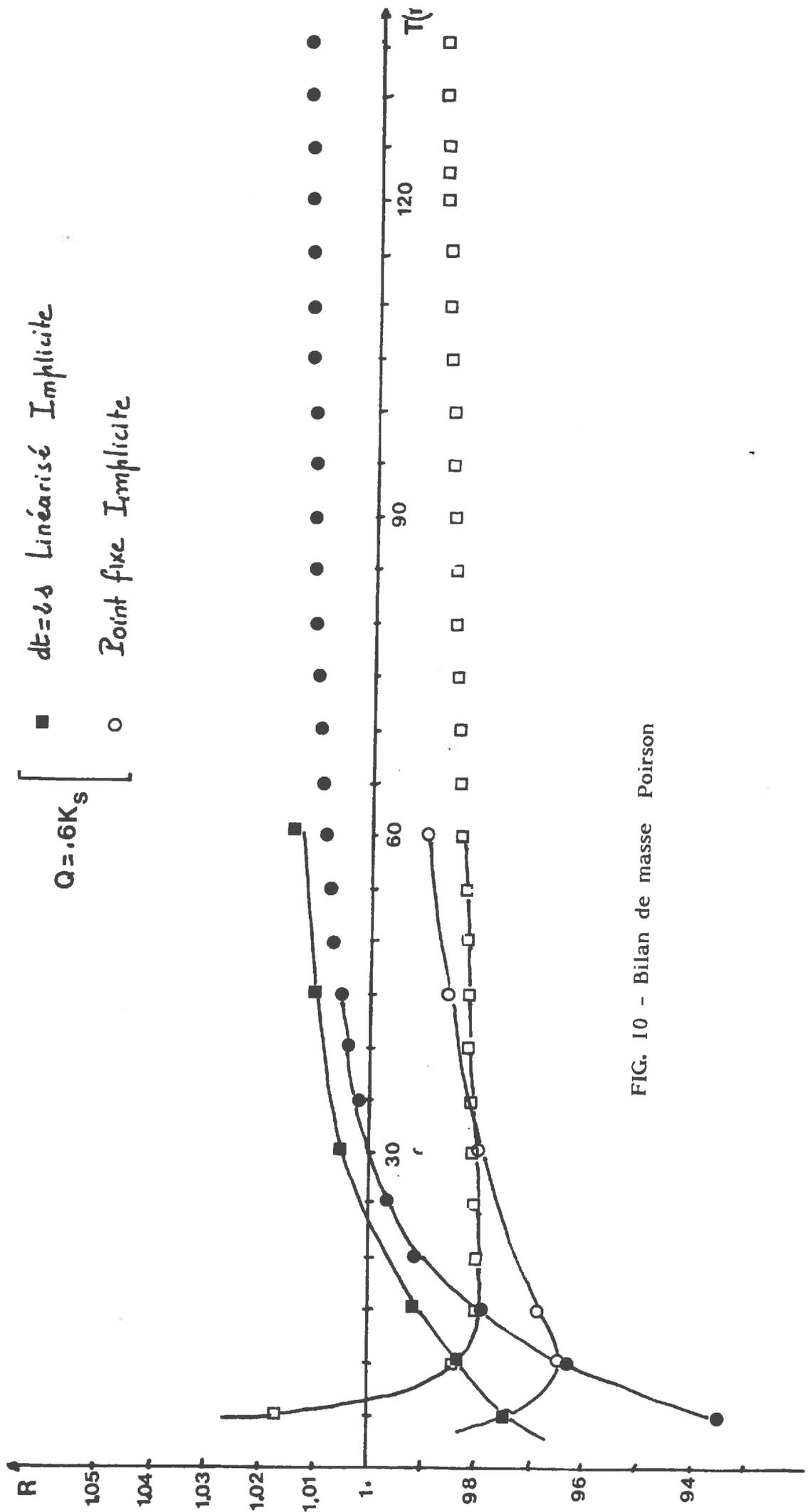


FIG. 10 - Bilan de masse Poirson

V.2. Validation sous charge

En condition de charge à la surface, nous avons préféré comparer nos résultats à d'autres méthodes d'intégration, plutôt que d'utiliser une solution analytique obtenue par Wooding et déjà utilisée par Brandt et al.. Le problème traité est donc celui de la tranchée filtrante pour lequel existe de nombreuses solutions utilisant diverses méthodes de résolutions. Le domaine est représenté ainsi que les conditions aux limites sur la figure 11. Le sol utilisé est le Silty Clay loam déjà mentionné. ZYVOLOSKY et al. (1976) utilisent l'équation de Fokker en discrétisant en éléments finis triangulaires. Le système différentiel est intégré par un schéma de Cranck-Nicholson, avec itérations de point fixe. FIRDAOUS et al. (1983) utilisent différentes versions de la méthode ADI et mettent en évidence l'effet du pas d'espace sur la solution. SELIM et KIRKHAM (1979) utilisent aussi une méthode ADI ; CAUSSADE et al. (1979), après utilisation de la transformée de Kirchoff, proposent une méthode itérative de résolution dite ALNL (Alternative, linear non-linear) qui consiste à calculer d'abord la solution du problème linéarisé, puis à calculer par une itération de type point fixe, le vecteur résidu à rajouter.

La figure 12 présente les isocontours de teneur en eau à $t = 50mn$.

On peut constater que l'on a un relativement bon accord entre la solution obtenue par éléments finis et la nôtre. Par contre, la solution ADI de Firdaouss diffère par un écart grandissant entre les isohyètes à 45, 40 et 21 % et celles calculées par les deux autres méthodes. Notamment, la position de la frontière de la zone humide est sous estimée de 5 cm sur l'axe de symétrie.

La méthode ALNL de Caussade prédit des profondeurs sur l'axe de symétrie tout à fait semblables à celles de Firdaouss, mais diffuse énormément plus latéralement et ressemble en cela à la méthode d'éléments finis ou à notre code (fig. 13). On voit donc qu'en utilisant quatre méthodes numériques différentes sur cet exemple relativement simple, on obtient des champs d'humidité qui présentent des différences sensibles.

Il est regrettable que les différents auteurs ne fournissent pas les quantités d'eau infiltrées au cours du temps. On aurait pu alors un peu mieux juger de l'effet de telle ou telle méthode. On peut toutefois remarquer que comme pour les infiltrations sur sables précédemment décrites, la méthode ADI fournit les plus faibles profondeurs atteintes par une teneur en eau donnée. Autant qu'on puisse en juger au vu des isohyètes, il semble qu'en condition de charge, la méthode ADI soit celle qui "infiltré le moins d'eau". On pourra aussi remarquer que le comportement de notre intégration avec un schéma implicite, semble être cohérent par rapport aux résultats de Zyvolosky qui utilise un schéma de C.N.. En effet, notre simulation fait apparaître un "retard" de

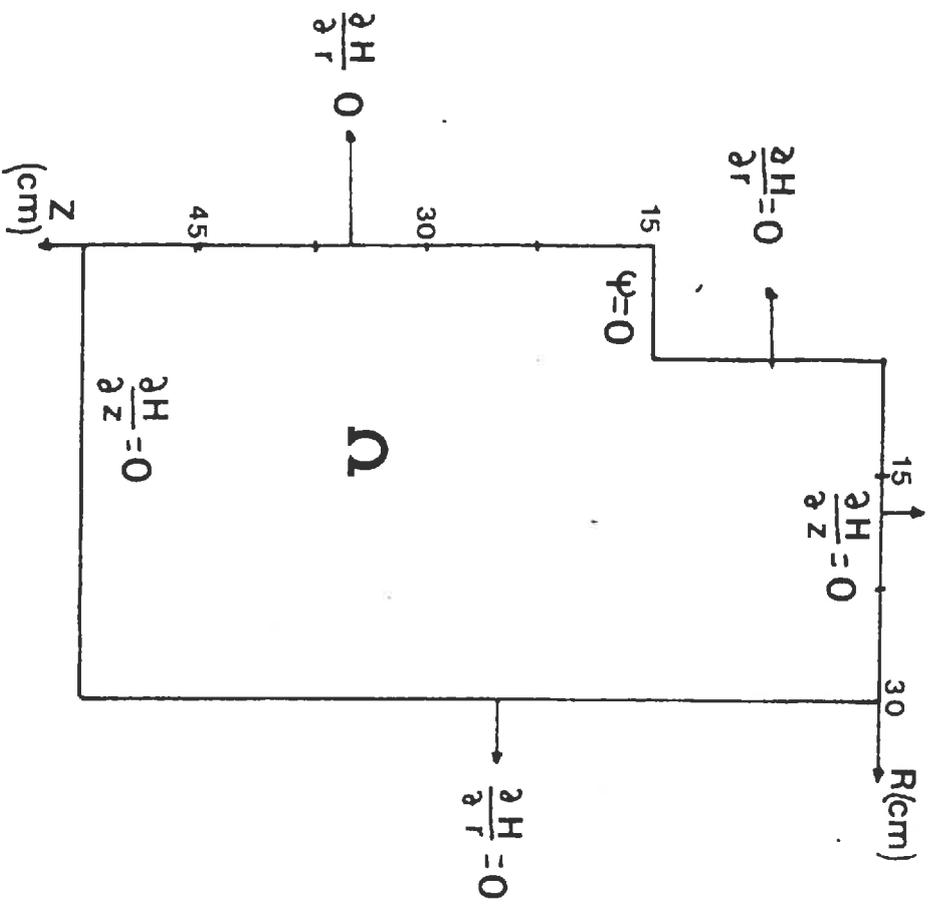


FIG. 11 - Domaine et conditions aux limites

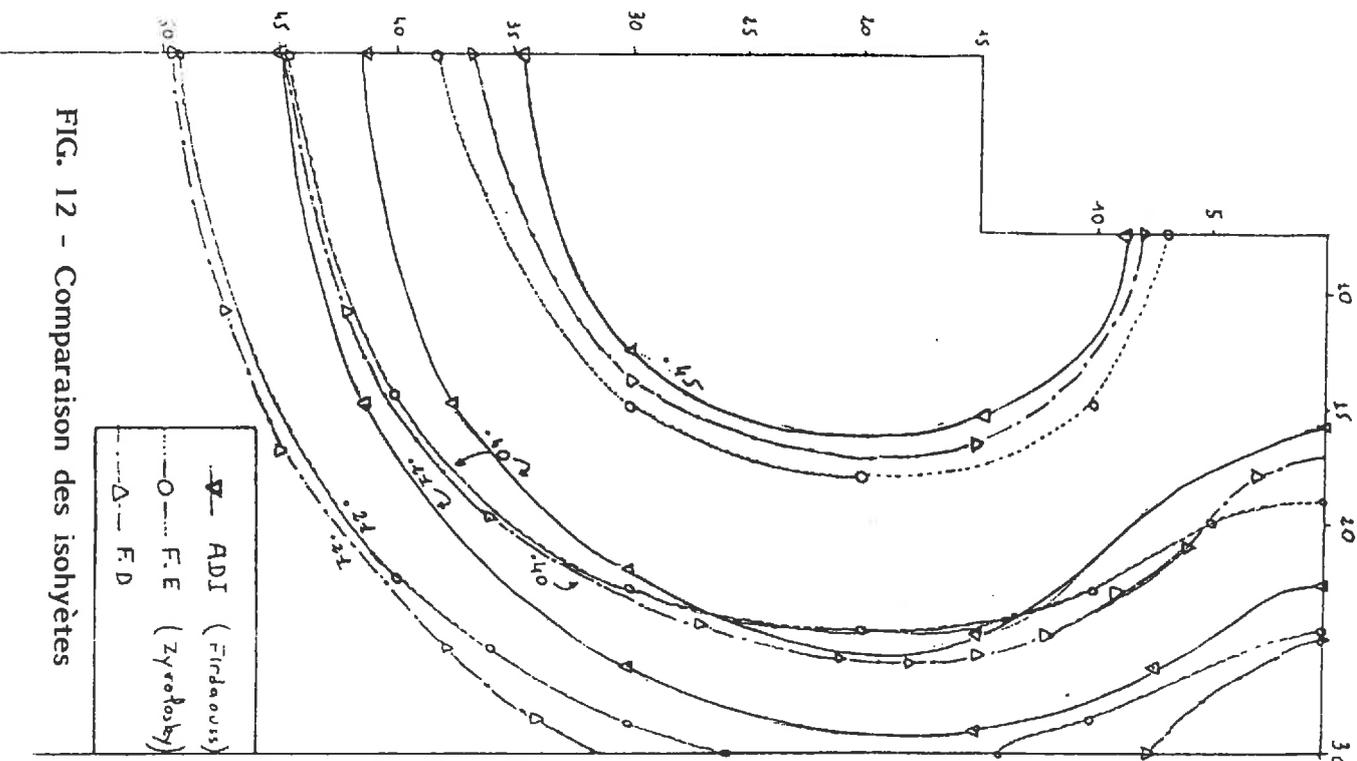
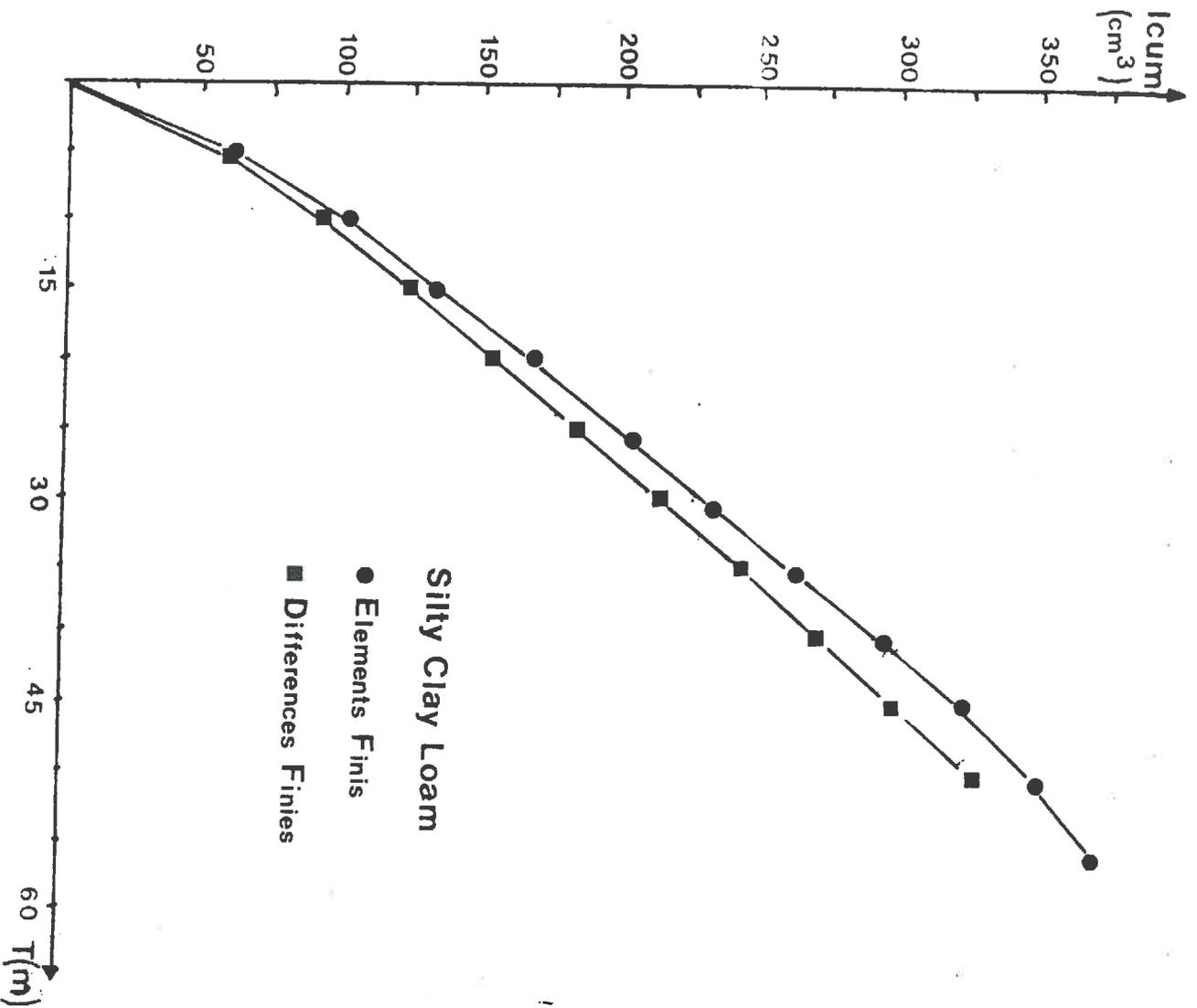
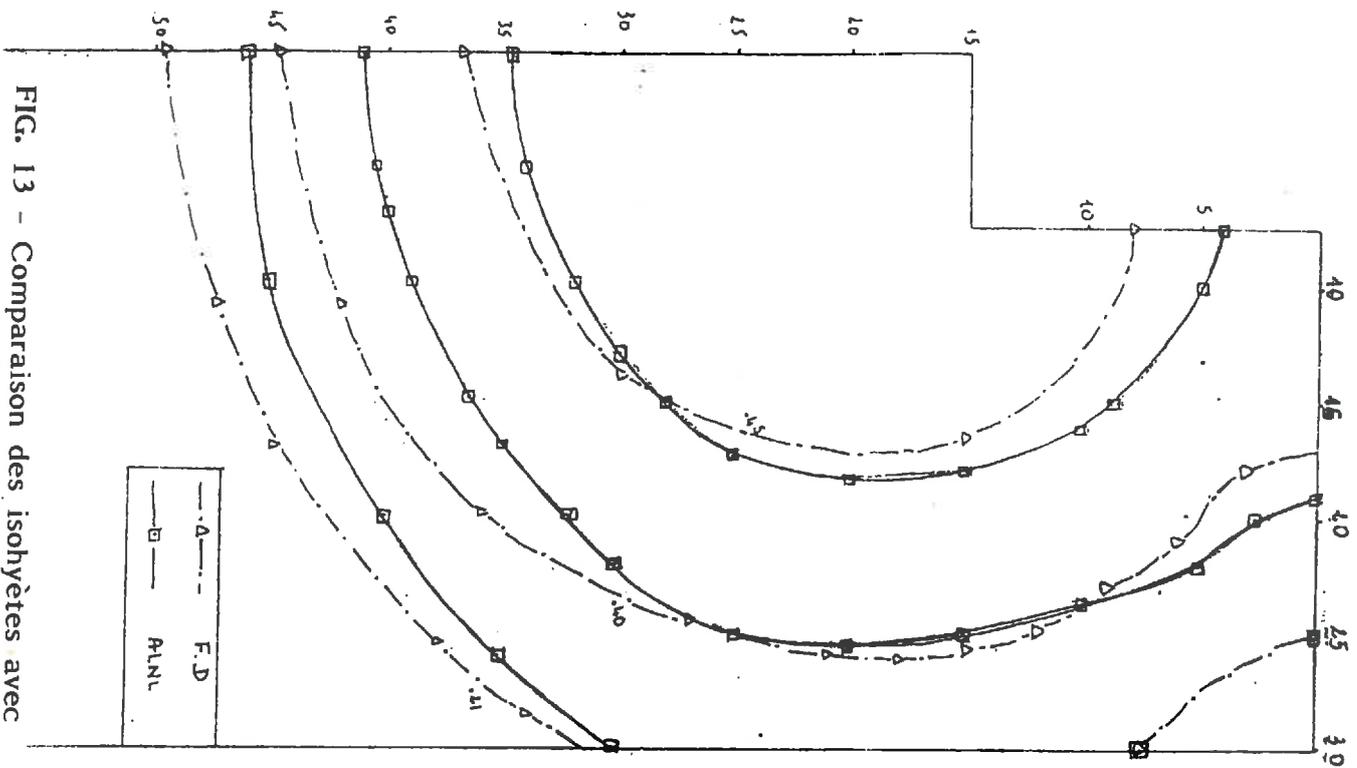


FIG. 12 - Comparaison des isohyètes

Silty Clay Loam
 $\theta_{sat} = .5$
 $K_{sat} = 11.22$
 $\text{cm} \cdot \text{h}^{-1}$
 $T_{emps} = 50'$

- ∇ ADDI (Firdaous)
- \circ F.E (Zyrefolob)
- Δ F.D



l'isohyète humide par rapport à C.N. et une avance de l'isothète la plus sèche ce qui est tout à fait en accord avec nos déductions de la première partie.

Les résultats fournis par notre code sont donc tout à fait semblables à ceux obtenus par d'autres méthodes. Le schéma que nous utilisons ayant fait ses preuves dans sa version monodimensionnelle, nous en concluons qu'il donne des résultats corrects en conditions de Dirichlet. A titre de vérification supplémentaire, on a porté sur la figure 14 les quantités cumulées infiltrées pour nos deux codes (éléments finis, différences finies). On peut constater la régularité des courbes $I_{cum}(t)$ et leur proximité. Ceci donne à penser que les deux programmes fournissent une solution "exacte". L'écart entre les deux courbes est dû au fait que la pondération arithmétique, implicitement mise en oeuvre dans les éléments finis surestime la conductivité et donc a tendance à légèrement surestimer les quantités infiltrées. L'écart entre les deux méthodes se stabilise au cours du temps.

VI. PROPOSITION DE DEUX NOUVELLES METHODES DE TRAITEMENT DE LA CONDITION A LA LIMITE EN SURFACE, POUR LE PROBLEME DE L'IRRIGATION LOCALISEE

Comme on l'a souligné dans l'introduction du (II) et dans l'établissement des équations, un des problèmes important de la modélisation de l'irrigation localisée réside dans le traitement de la condition à la surface, c'est-à-dire dans le calcul du flux résiduel que l'on doit imposer à la périphérie de la zone saturée pour assurer l'équilibre du bilan de masse.

Tous les auteurs jusqu'à présent calculaient ce flux au moyen des formules : (cf. Etablissement des équations).

$$Q_{res} = (D_{eb} - D_{sat} - E_v) / S_{is}$$

$$D_{sat} = \sum_{i=1}^{i_s-1} -K_s \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_i \cdot S_i$$

et soulignaient les erreurs commises en calculant $\frac{\partial H}{\partial z}$ par une formule discrète décentrée.

Nous présentons ci-après les résultats de quelques essais numériques permettant d'éclairer ce problème et de quantifier quelque peu l'erreur commise.

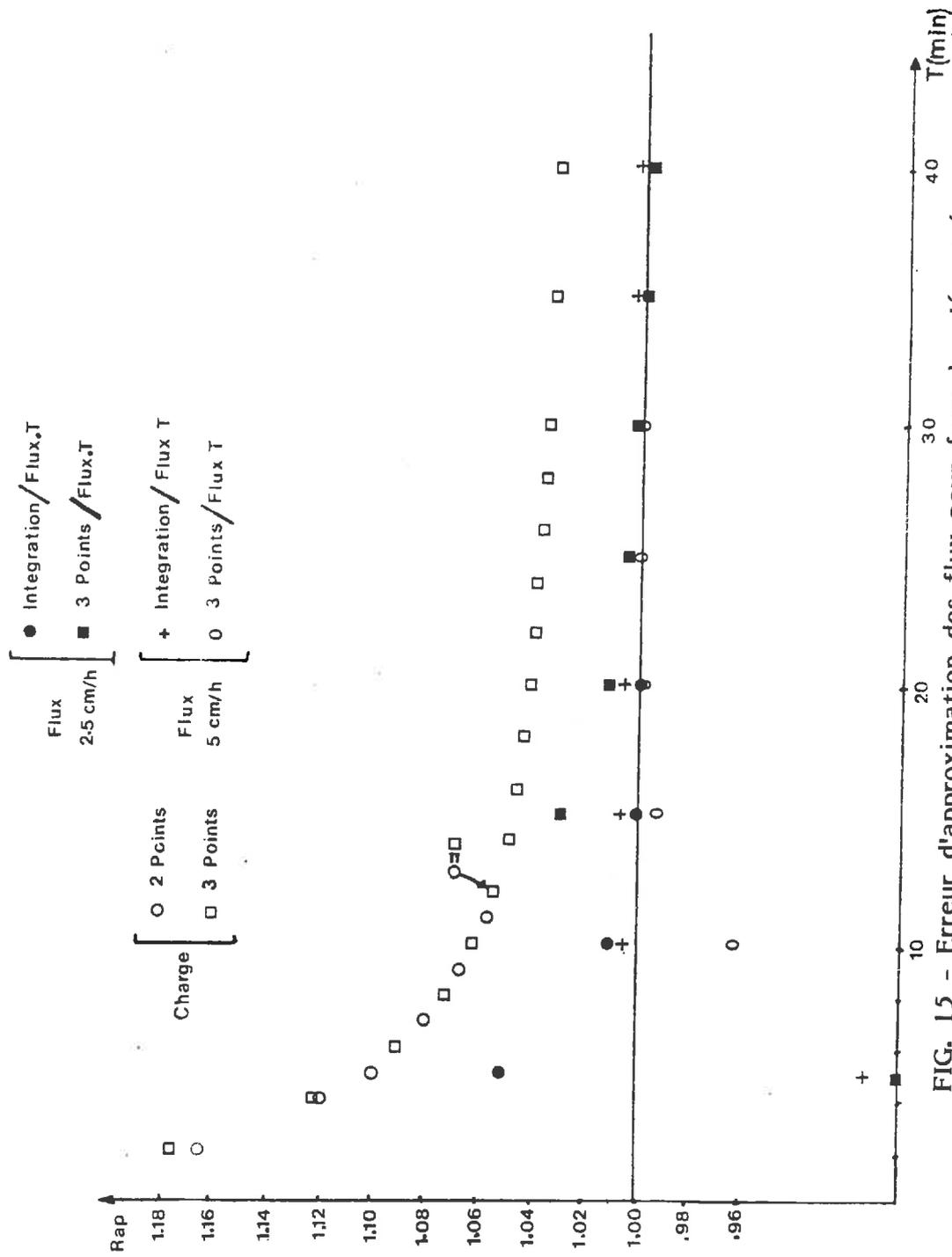


FIG. 15 - Erreur d'approximation des flux pour formules décentrées (Sable de Grenoble)

IV.1. Quantification de l'erreur d'estimation du flux par un schéma décentré

Les expérimentations numériques conduites sur Yolo light Clay, et Sable de Grenoble, ont pour objet la mise en évidence de la sensibilité de l'erreur au type de sol et au pas d'espace utilisé dans la discrétisation. Pour cela, on a simulé des infiltrations à 1-D en conditions de flux et de charge. Pour chacune d'elles, la quantité d'eau infiltrée est calculée par intégration du profil (ou obtenue directement en fonction du flux appliqué), et par intégration du flux à la surface au cours du temps.

On note :

$$Q_{\text{prof}}(t) = \int_0^z \theta(z,t) dz \quad Q_{\text{flux}}(t) = \int_0^t -K_{\text{surf}} \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \Big|_0 dt$$

Ces quantités sont approchées par :

$$Q_{\text{prof}}(t) \approx \sum_{i=1}^N \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \Delta z$$

$$Q_{\text{flux}}(t) \begin{cases} \approx \sum_{j=1}^M -K_{\text{surf}} \left(\frac{h_2 - h_1}{\Delta z} \right) \cdot \Delta t \\ \approx \sum_{j=1}^M -K_{\text{surf}} \left(\frac{-3h_1 + 4h_2 - h_3}{2\Delta z} \right) \Delta t \end{cases}$$

VI.1.1. Sable de Grenoble

On a porté sur la figure 15 la quantité R en fonction du temps définie par :

$$R = \frac{Q_{\text{prof}}(t) - Q_{\text{prof}}(t - dt)}{Q_{\text{flux}}(t) - Q_{\text{flux}}(t - dt)}$$

Les flux ont été calculés par une formule décentrée à 2 et à 3 points. Pour les simulations effectuées sous flux $Q_{\text{prof}}(t) = \text{flux} * t$.

On peut constater que pour l'infiltration sous charge, les formules décentrées à 2 et 3 points donnent très vite (12mn environ) le même gradient et donc le même flux. Le profil de charge est donc linéaire au voisinage de la surface. On peut penser que c'est un comportement que l'on retrouvera très vite sur tout sol doté d'une conductivité hydrique "suffisante". On s'aperçoit alors que le débit calculé par estimation du flux n'est pas bon et présente une erreur s'atténuant très lentement avec le temps. Il est certain que l'erreur serait différente si on changeait l'emplacement des points de discrétisation, mais on

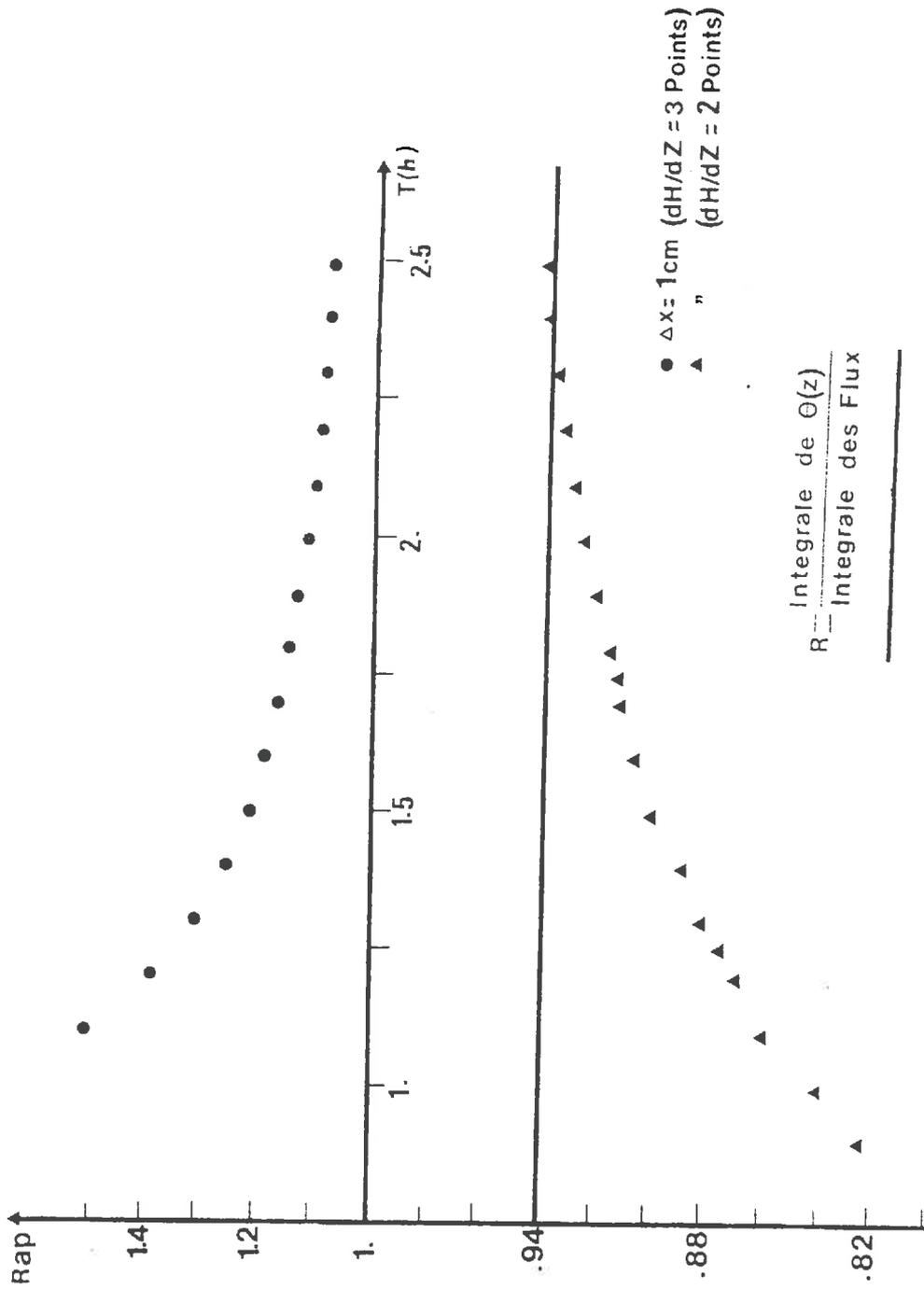


Fig. 16 - Erreur d'approximation des flux par des formules décentrées (Yolo-light Clay)

ne dispose d'aucune règle pour effectuer ceci ; ie à quel moment doit-on changer les points utilisés dans le calcul de la formule trois points. On peut donc constater que même sur du sable où les profils de charge ne présentent pas de variations brutales, l'utilisation de formules décentrées présente de sérieuses limitations. On présente sur le même graphe ce qui se passe en condition de flux, ceci pour avoir des profils de charges plus doux. On peut constater que là aussi on a des estimations tout à fait variables du flux entrant, jusqu'à ce que les premiers noeuds aient atteint un état quasi-stable (ie. $\text{grad } \underline{v} \approx 1$, et $K_{\text{surf}} = Q$).

VI.1.2. Yolo-light Clay

Pour le Yolo-light Clay, qui de part sa conductivité faible s'apparente à un sol tel le loess MC4, on a conduit les simulations avec un pas d'espace de 1 cm et un $t = 60$ s. Si on ne s'intéresse pas à la première partie de la courbe (hors échelle, qui correspond à la rupture de l'équilibre) (fig. 16), il apparaît que, au bout de 2h30, l'erreur instantanée est encore de l'ordre de 10 %. Il est intéressant de constater que l'erreur due à la formule 3 points est supérieure à celle due à la formule deux points, du moins pendant les premières heures (Soulignons qu'une irrigation localisée dure environ 6h à ± 2 h). Ces erreurs de signes opposés expliquent les résultats différents obtenus aux forts débits sur le Gilat-loam par Bresler d'une part et Hillel d'autre part, quant à l'extension de la zone saturée.

On a recalculé les débits sur les mêmes simulations en faisant l'hypothèse que le pas d'espace est de 2 cm (c'est-à-dire qu'on utilise les noeuds 1, 3, 5). On se trouve alors dans des conditions similaires aux simulations d'Ababou et de Bresler pour le Δz . On s'aperçoit alors qu'au bout de 4h de simulation, l'erreur instantanée quant au débit est encore de 12 %. c'est-à-dire que sur un sol à faible conductivité, et en utilisant l'équation de Richards, il faudrait utiliser des pas d'espace extrêmement petit au voisinage de la surface pour obtenir une estimation acceptable des débits. Ceci étant, il resterait encore le problème du choix des noeuds, utilisés pour le calcul de $\frac{\partial H}{\partial z}$ quand le front d'humectation pénètre de plus en plus profondément. On a montré que même sur un sable l'erreur commise en régime quasi-asymptotique peut être non négligeable.

Il faut toutefois un peu tempérer ces conclusions pessimistes dans le cas où on utilise l'équation de Kirchoff. Les gradients moins importants de la variable intégrale permettant des erreurs de troncature plus faibles pour les formules décentrées. Les erreurs en bilan des modèles d'Ababou et de Bresler

sont malgré tout importantes, et peuvent atteindre 10 % sur sol à faible conductivité et 8 % sur du sable pour Levin (1979) utilisant le programme de Bresler.

Il apparaît donc que si on modélise les transferts en irrigation localisée avec l'équation de Richards, il est impératif et absolument nécessaire d'imaginer un autre mode de traitement des conditions aux limites en surface.

VI.2. Première méthode

L'idée générale qui prévaut dans les deux méthodes est d'utiliser des variables plus globales que la pression estimée en certains noeuds. On se rapproche un peu par ce côté là de la nature intégrale de la variable de Kirchoff. On évite ainsi de prendre en compte à la fois des erreurs locales dues à l'intégration et on récupère aussi le bon accord général constaté sur les simulations en conditions de flux et de charge.

VI.2.1. L'algorithme

On se place dans la situation générale décrite sur la figure 17 .

On définit les variables suivantes :

- Ω : le domaine total qui peut être à frontières mobiles
- ∂F : une courbe dans Ω , qui sera définie ensuite
- ω : un sous domaine de Ω , de frontière $\partial\omega$ définie par :
 $\partial\omega = \partial F \cup [0, R_{sat}] \cup [0, Z_F]$; Z_F désignant l'intersection de ∂F et de la frontière verticale de Ω située sur l'axe de symétrie.
- \vec{f} : le champ de gradient de potentiel : $f = -K(\psi) \cdot \vec{\text{grad}} H$
- θ : désigne classiquement la teneur en eau en tout point du domaine.

On écrit la loi de conservation de masse pour tout petit domaine élémentaire inclus dans ω , c'est-à-dire :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\text{div}(\vec{f}) \Leftrightarrow d\theta = -\text{div} \vec{f} dt$$

d'où $\int_{\omega} d\theta = - \int_{\omega} \text{div} \vec{f} dt d\omega = - dt \int_{\omega} \text{div} \vec{f} d\omega$ ce qui donne en utilisant le théorème de la divergence : (\vec{n} : normale extérieure à ω)

$$\int_{\omega} \text{div} \vec{f} d\omega = \int_{\partial\omega} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma \quad \text{En utilisant la description de } \partial\omega, \text{ on obtient :}$$

$$\int_{\omega} d\theta = - dt \int_{\partial\omega} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma = - dt \int_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma + dt \int_{[0, R_3]} \vec{f} \cdot \vec{k} d\gamma + 0$$

le dernier terme nul étant dû au flux nul à travers $[0, Z_f]$

d'où

$$dt \int_0^{R_3} \vec{f} \cdot \vec{k} d\gamma = \int_{\omega} d\theta + dt \int_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma$$

soit encore

$$\int_0^{R_3} \vec{f} \cdot \vec{k} dx = \int_{\omega} \frac{d\theta}{dt} + \int_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma$$

Cette formule exprime donc que, si on est capable d'estimer la variation de teneur en eau sur ω ie : $\int_{\omega} \frac{d\theta}{dt}$, et si on sait calculer le flux à travers ∂F ie : $\int_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma$, alors on pourra estimer le débit à travers la zone saturée et donc le flux résiduel.

Les principaux problèmes dans cet algorithme sont la définition de ∂F et le calcul de $\int_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{n} d\gamma$. En effet, il faut que ∂F définisse un domaine ω où la fonction $\theta(x, z, t)$ ne présente pas de gradients trop forts pour que l'intégration discrète soit bonne et parallèlement passe dans une zone du champ de teneur en eau "optimale" du point de vue du calcul des flux. On a le choix entre une définition basée sur une valeur du potentiel ou sur la présence d'un gradient. Il est apparu plus facile de satisfaire les deux conditions énoncées en utilisant un F basé sur la valeur du potentiel. C'est aussi plus pratique et facile d'implantation. Notons de plus qu'un essai préliminaire, en condition de charge et à une dimension permet de déterminer facilement pour un sol donné le potentiel à utiliser.

On pose donc à un temps t fixé :

$$I_{\text{sat}} = \left\{ (i, j) / |\psi_{i,j}| < |\psi_{\text{lim}}| \right\}$$

On a alors l'approximation

$$\int_{\omega} d\theta = \sum_{(i,j) \in \bar{I}_{sat}} dt \theta_a(i,j) \cdot V_{i,j}$$

où $dt \theta_a(i,j) = [\theta_a(i,j)]^t - [\theta_a(i,j)]^{t-dt}$

et $V_{i,j}$ le volume associé au noeud (i, j) en fonction de la symétrie.

La courbe ∂F , quant à elle, est approchée par une ligne brisée, constituée par les bords des cellules définies par la discrétisation. Cela ne pose pas de problème car le théorème de la divergence ne nécessite pas la régularité de ∂F partout, mais seulement que ∂F soit régulière par morceaux.

On peut donc tout à fait approcher F par une ligne brisée et conserver la formule établie.

Le calcul du flux à travers celle-ci s'effectue selon l'algorithme suivant :

- a) calcul du flux horizontal sur le premier noeud $(i_f, j_f) = (i_{s-1}, 1)$
- b) on pose $(i_f, j_f) = (i_f, j_f + 1)$

- 1) Si $(i_f, j_f) \in \bar{I}_{sat}$
 - α) calculer le flux horizontal
 - β) retourner en b

- 2) Si $(i_f, j_f) \notin \bar{I}_{sat}$
 - α) on pose $(i_f, j_f) = (i_f - 1, j_f)$
 - β) si $i_f < 0$ aller en : c)
 - γ) si $(i_f, j_f) \in \bar{I}_{sat}$ Alors :
 - Calculer le flux vertical sur $(i_f + 1, j_f - 1)$
 - Calculer le flux horizontal sur (i_f, j_f)
 - Retour à b)
 - δ) si $(i_f, j_f) \notin \bar{I}_{sat}$ Alors :
 - Calculer le flux vertical sur $(i_f + 1, j_f - 1)$
 - On pose $(i_f, j_f) = (i_f, j_f - 1)$
 - Retour à b)

- c) sortie, fin du calcul.

L'algorithme ainsi défini, construit la frontière en partant de la surface et calcule en même temps les flux. On remarquera qu'il évite de créer des morceaux de frontière dont la normale extérieure soit orientée vers le haut. On peut donc s'éloigner quelque peu de la courbe ∂F , telle qu'on l'a définie.

La figure 17 présente une isohyète (∂F) qui est classiquement obtenue sur un sol où la convection est importante. Si, on se place dans le cas inverse, on obtiendra plutôt la configuration du schéma (fig. 18).

Les erreurs commises dans cet algorithme sont dues au calcul des flux, et à l'estimation explicite de la variation de teneur en eau. En ce qui concerne les flux, on peut penser que l'erreur est faible du fait qu'on utilise une formule centrée et qu'on se trouve dans une zone où l'hypothèse de linéarité du champ de potentiel, sur une petite distance, est assez bien vérifiée. Soulignons que les conductivités utilisées pour calculer les flux sont plus faibles qu'elles ne devraient l'être, ceci étant dû au caractère explicite de l'algorithme. Les variations de teneur en eau sont plus importantes que les variations réelles étant donné qu'on tend asymptotiquement vers un état d'équilibre. On peut imaginer deux processus pour pallier ces inconvénients.

a) Une itération de type point fixe permettant successivement d'améliorer l'estimation des conductivités et la variation de θ dans ω , puis de résoudre le problème au moyen de ces nouvelles estimations.

b) Des extrapolations de type Δ^2 -Aitken, paraboliques ou linéaires, par calculer la variation de θ et les conductivités.

En fait, nous avons choisi, pour éviter tout problème d'amplification d'erreur et de stabilité, de nous limiter à la version de base de l'algorithme.

VI.2.2. Résultats numériques

Pour s'assurer du bon fonctionnement de l'algorithme, on a tout d'abord simulé sur un sable et sur le sol de Poirson, une infiltration sous flux, de surface d'apport fixée, permettant de vérifier que l'estimation du flux à travers la surface était bonne.

On définit les trois quantités suivantes :

$$V_{app} = Deb * dt \quad (deb : \text{débit à travers la surface d'apport})$$

$$d\theta = \int_{\omega} d\theta(x,y) dx dy$$

$$V_T = dt * \int_{\partial\omega} \vec{Q} \cdot \vec{n} d\sigma \quad \vec{Q} = -K(\psi) g \vec{grad} H$$

On pose alors $R = \frac{V_{T1} + d\theta}{V_{app}}$, $V_{T1} + d\theta$ constituant une

approximation du volume d'eau ayant traversé la surface du sol et par conséquent permettant d'obtenir une estimation du débit.

Dans le cas du sable DEK, le potentiel définissant la frontière $\partial\omega$ a été choisi égal à -15 cm. Cette valeur garantit la vérification des hypothèses posées dans la discussion théorique. On a alors une estimation qui n'est jamais plus mauvaise que 0.5 %, c'est-à-dire un R inclus dans [.995, 1.].

Dans le cas du sol Poirson, le potentiel de la frontière a été choisi à -5 cm. L'existence de très forts gradients et de variations brutales de la conductivité avec la pression impose de se situer dans une zone où l'on puisse s'assurer que ces deux limitations soient inexistantes ou bien amorties. On obtient là aussi une erreur locale (ie. sur un pas de temps) inférieure à 0.5 %.

On peut remarquer que si $\partial\omega$ définit un domaine où les noeuds sont en régime permanent, on a :

$$\int_0^{R_{sat}} Q_{sol}(r) dr = \int_{\partial\omega} \vec{Q} \cdot \vec{n} d\gamma$$

On peut donc calculer le flux à travers la zone saturée, en utilisant une frontière interne au domaine Ω et donc permettant une bonne approximation (centrée) de Q.

Résultats en Irrigation localisée

L'irrigation localisée sur du sable ne posant pas de problèmes, on a testé la méthode sur le sol Poirson.

L'algorithme d'extension de la zone saturée ne pose pas de problèmes.

Le seul critère que nous ayons pour tester la validité du processus est le bilan de masse.

Avec un potentiel ψ_{dir} , définissant $\partial\omega$, égal à -5 cm, on a un bilan de masse équilibré à moins de 1 %, après 4h d'irrigation. On a remarqué que l'erreur en bilan est d'autant plus petite que ψ_{dir} tend vers zéro.

Cet algorithme constitue donc une méthode efficace et précise de simulation des transferts en irrigation localisée, basés sur l'équation de Richards. Le calcul des flux à travers une frontière intérieure à Ω permet de s'affranchir de l'utilisation de formules décentrées et permet de suivre automatiquement le développement de la zone à potentiel très faible sous le goutteur.

VI.3. Deuxième méthode

Cette méthode reprend une partie des idées de la précédente. On n'utilise plus ω mais Ω tout entier. On fait l'hypothèse qu'à part la partie constituée par la surface du sol, le restant de la frontière admet des conditions de flux nul. On pourra généraliser à la présence de remontées capillaires. L'idée complémentaire repose sur l'utilisation de la validation des résultats fournis par le code à la fois en conditions de charge et de flux.

Supposons que l'on se trouve dans la situation générale suivante où l'on dispose d'une zone saturée d'un flux résiduel et d'un bilan de masse équilibré. La question qui se pose est alors l'estimation du flux résiduel à utiliser pour le pas de temps suivant. L'idée est la suivante :

- Si le schéma d'intégration est performant et le flux résiduel correct, on doit équilibrer le bilan de masse (on peut rapprocher cette idée de celle qui consiste à calculer par intégration du profil d'humidité l'eau entrée lors d'une pluie dépassant l'infiltrabilité, pour en déduire le ruissellement).

VI.3.1. Formulation du problème

Quel que soit le flux résiduel Q , on lui associe, à travers les opérateurs différentiels et aux limites définissant le problème, le champ de teneur en eau $\theta(x, z)$. Les conditions initiales et aux limites étant fixées, on a unicité de la solution (cf. II.3.2.1.).

Considérons les applications définies par :

$$f : Q \longrightarrow \theta(x, z)$$

$$F : Q \longrightarrow B = \int_{\Omega} \theta(\omega) d\omega$$

L'injectivité de f sur un voisinage de Q découle de l'unicité de la solution.

On peut raisonnablement, même si ce n'est pas démontré ici, supposer l'injectivité de F sur un voisinage de Q (peut être plus petit)

On pose Q_t^* le flux à appliquer pour boucler le bilan de masse. On a alors

$$F(Q_t^*) = B_t^* = t + Deb$$

Si on définit G par :

$$G: Q_t \longrightarrow B_t - B_t^* \quad \text{alors} \quad G(Q_t^*) = 0$$

$$\text{et on a} \quad G(Q_t) = \int_{\Omega} \theta(\omega) d\omega - B_t^*$$

(On abandonne l'indice t)

L'injectivité de F assure celle de G et donc l'unicité de la solution Q^* de l'équation $G(Q^*) = 0$.

Quelles sont les caractéristiques de G sur un voisinage de Q^* ?

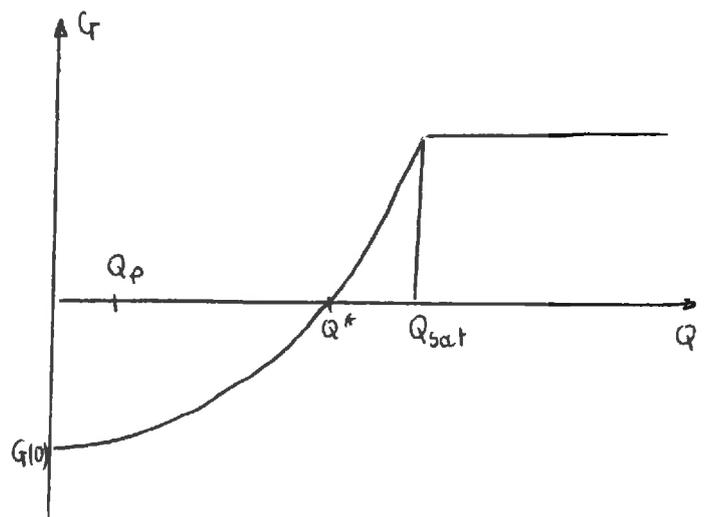
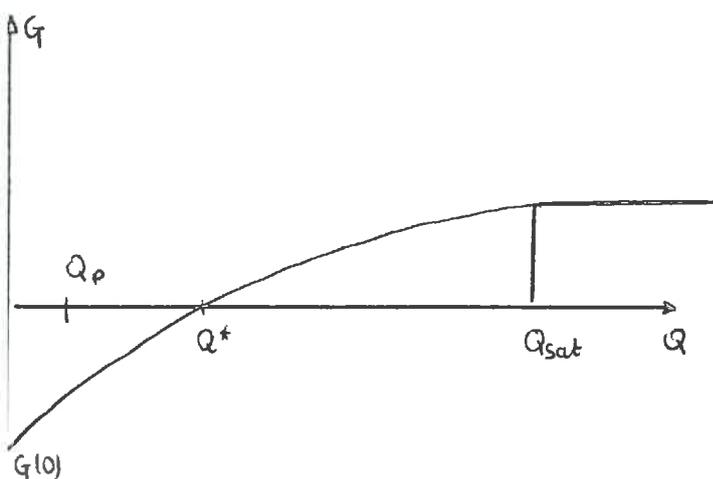
Il est évident que si $Q_1 > Q_2$ alors $\int_{\Omega} \theta_1(\omega) d\omega > \int_{\Omega} \theta_2(\omega) d\omega$

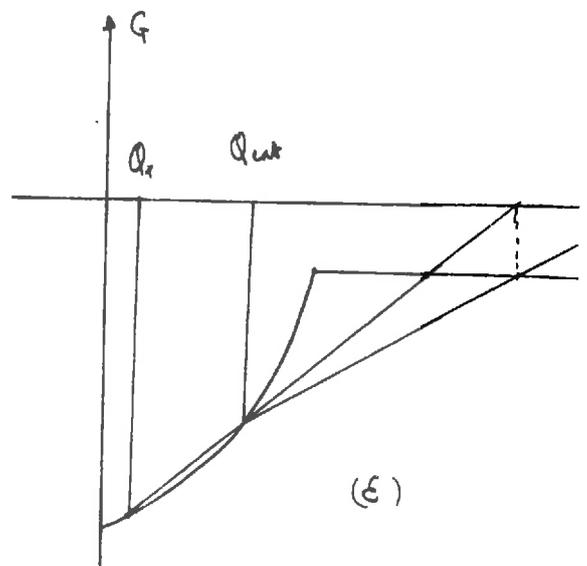
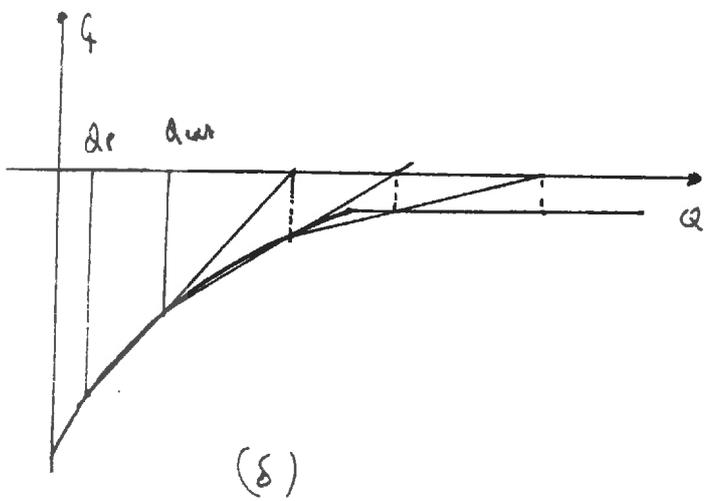
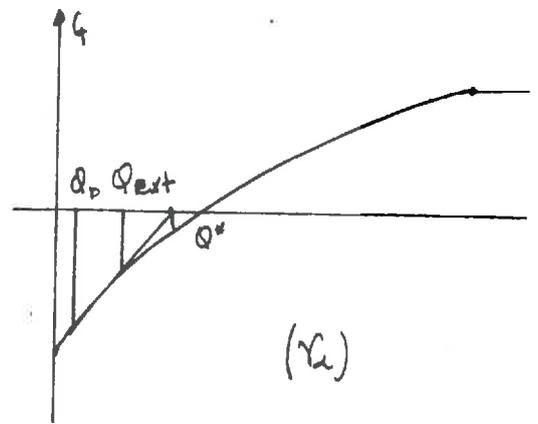
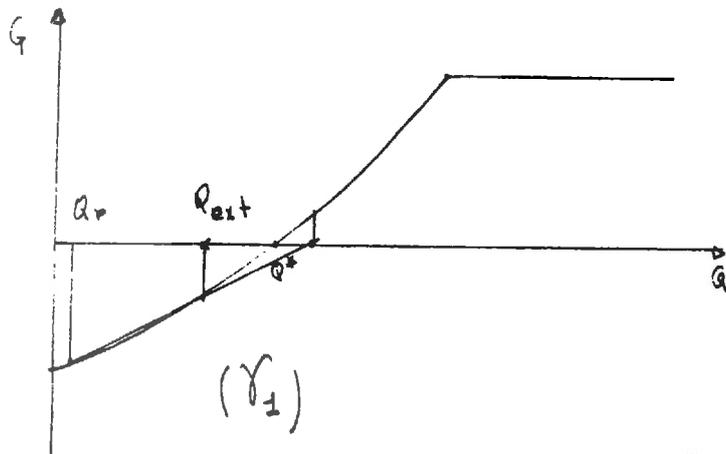
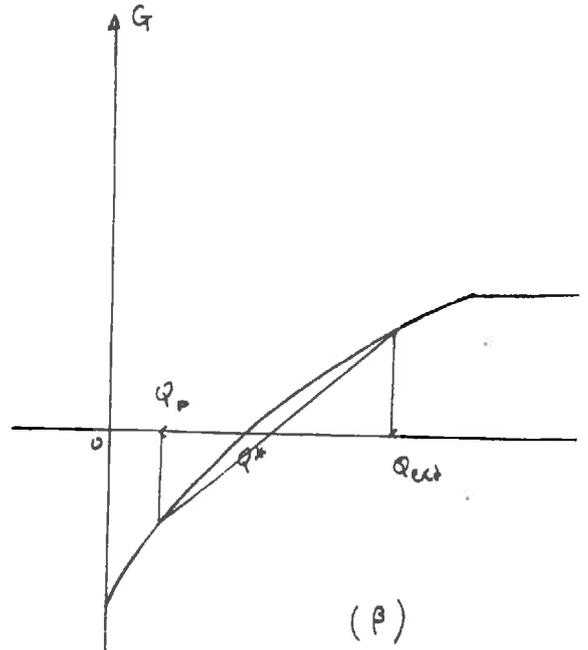
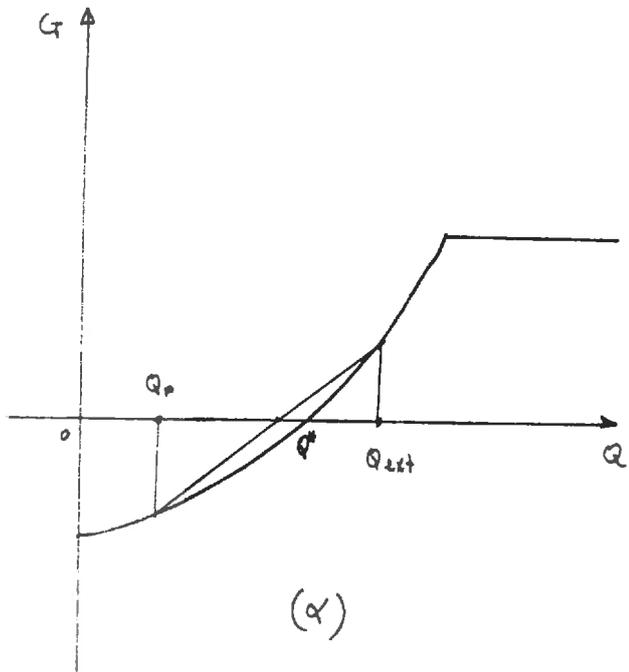
et on peut donc supposer que G est monotone croissante sur un voisinage de Q^* .

Considérons le cas particulier où on impose $Q = 0$, on a alors :

$$G(0) = \int_{\Omega} \theta_t(\omega) d\omega - B^* < 0$$

De même, si on augmente suffisamment le flux, on va arriver à la saturation et à une quantité d'eau infiltrée maximale sur un pas de temps, si on ne change pas la taille de la zone saturée. Donc, si on se place sur l'intervalle $[0, Q_{sat}]$, la fonction G prendra une des allures suivantes :





Restons dans l'hypothèse où on a une zone saturée qui ne change pas au cours du pas de temps. Pour chercher Q^* par un algorithme de type tangente ou sécante, il faut deux estimations de la racine et si possible l'encadrant pour ne pas sortir du domaine d'attraction de celle-ci. On a le choix entre plusieurs estimateurs :

α) Le flux résiduel précédent (Q_p), dont on sait qu'il est inférieur à la solution recherchée, puisque l'infiltrabilité diminue à travers la zone saturée.

) On peut estimer par une loi en $1/\sqrt{t}$, la décroissance de l'infiltrabilité à travers la zone saturée et ainsi en déduire un flux résiduel. On sait bien que la loi en $1/\sqrt{t}$ n'est pas très adaptée au cas multi-dimensionnel, mais elle suffit à notre algorithme. Le flux résiduel fourni sera supérieur à (Q_p), mais on ne sait rien de sa position par rapport à Q^* . On le note Q_{ext} .

VI.3.2. Convergence et divergence de l'algorithme de recherche de zéro. Saut de maille saturée

Si on démarre l'algorithme avec les deux estimateurs définis ci-dessus, on peut distinguer deux situations générales.

Si G_p et G_{ext} désignent les valeurs de G pour les flux Q_p et Q_{ext} , on a les deux possibilités :

$$G_p * G_{ext} < 0$$

$$G_p * G_{ext} > 0$$

a) Si $G_p * G_{ext} < 0$, on a un encadrement de la racine et on n'a pas à craindre un saut de maille saturée au cours du temps sous hypothèse que $\psi_{i3}^{t+dt} < 0$ (cf. figures (α) et (β)). On peut faire la méthode de la sécante.

b) Si $G_p * G_{ext} > 0$, on a plusieurs situations possibles.

b1) Soit on retrouve un encadrement au bout d'une itération (cela dépend de la concavité de la courbe $G(Q)$) et moyennant l'hypothèse faite en a) ($\psi_{i3} < 0$), on peut faire la méthode de la sécante (fig. (γ_1)).

b2) Soit on ne récupère pas d'encadrement, ce qui ne signifie pas que le processus est divergent, mais on doit s'assurer à chaque pas que la méthode converge, ie que la zone saturée ne change pas de taille (cf. fig γ_2).

b3) S'il y a divergence (cf. fig. (δ) et (ϵ)) on décrit plus loin ce qui se passe lors du changement de taille de la zone saturée.

La méthode de la sécante a été légèrement modifiée de façon à toujours encadrer la racine quand cela est possible et à tester la convergence quand cela est nécessaire

L'algorithme général de traitement comporte deux phases. Une phase initiale où on détermine éventuellement la zone saturée si elle existe (débit important sur sol ayant une faible infiltrabilité). Une partie générale effectuant l'algorithme de la sécante et qui traite l'agrandissement de la zone saturée.

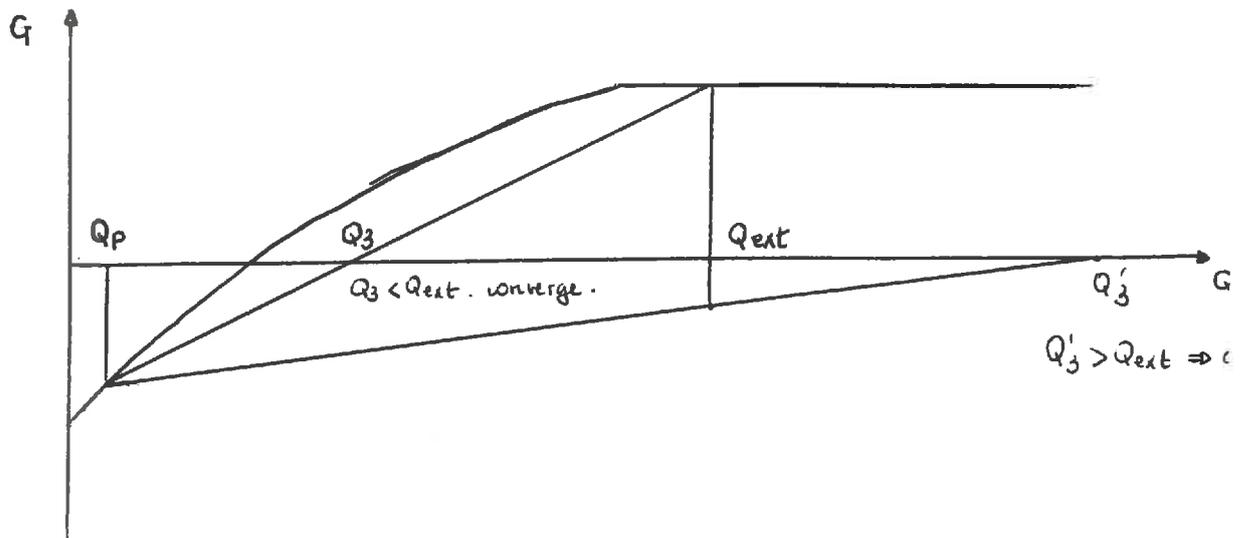
Le test d'agrandissement n'est mis en jeu que si la résolution fait apparaître une charge positive ou nulle au premier noeud non saturé en surface.

a) Si cela arrive avec Q_p , on change la zone et on résoud avec un flux approprié sur le nouveau noeud, non saturé.

b) Si cela arrive avec Q_{ext} , alors on fait la sécante une fois et on teste le flux fourni Q_3 par rapport à Q_{ext} .

α) Si $Q_3 > Q_{ext}$, on change la zone saturée

β) Si $Q_3 < Q_{ext}$, on retourne en b) (cf. figure (α))



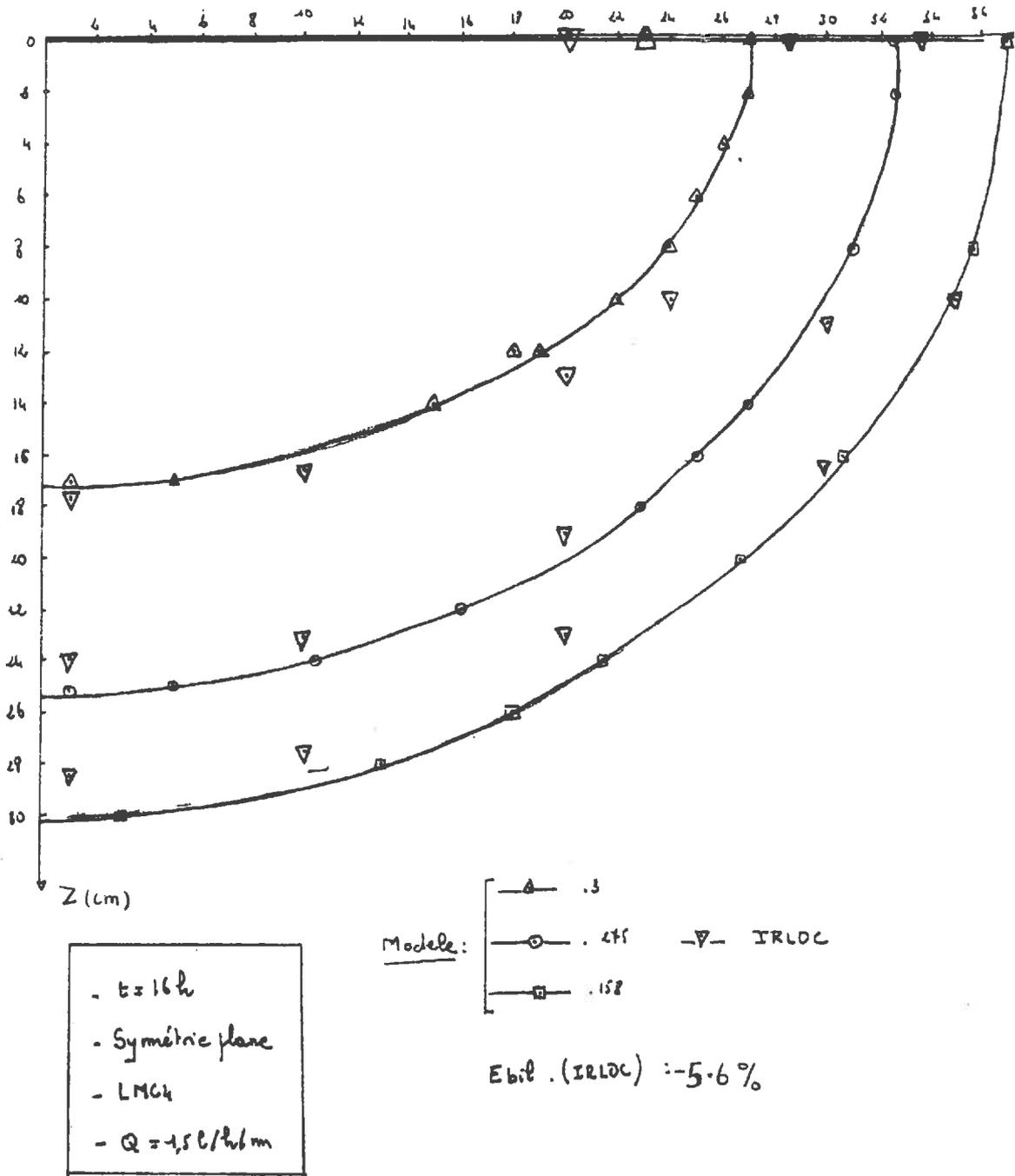


FIG. 19 - Comparaison avec le modèle d'Ababou - Loess MC₄

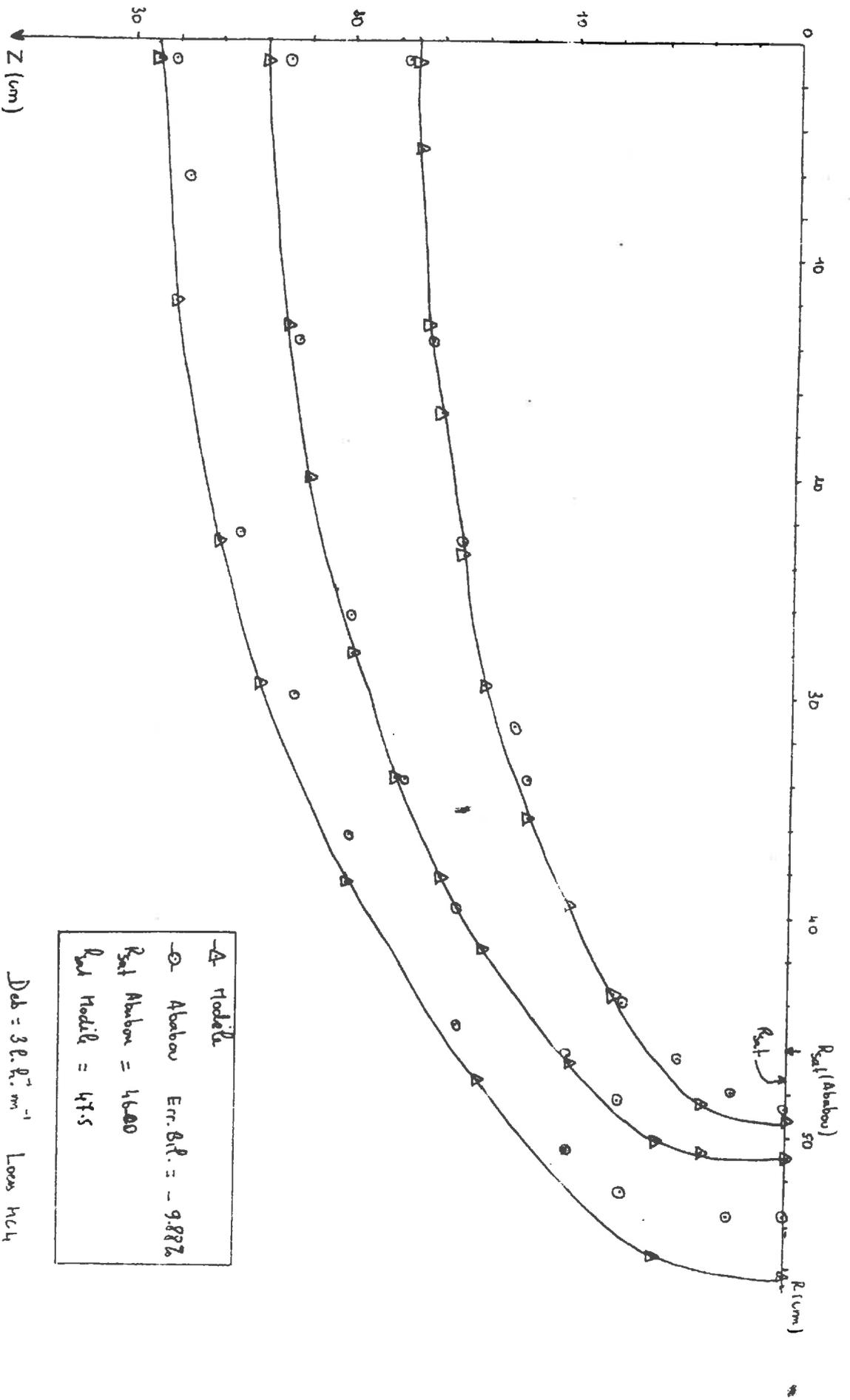


FIG. 20 - Comparaison avec le modèle d'Ababou

VI.3.3. Résultats numériques

On a déjà présenté (page et suivantes) une sortie du modèle pour le sable DEK en symétrie plane pour un débit de $1,5 \text{ l.h}^{-1}\text{m}^{-1}$. On a pu constater pour ce cas où il n'y a pas flaquage le bon accord avec le modèle d'Ababou. Pour le cas où il y a flaquage, le seul élément de comparaison que nous ayons est constitué par le modèle d'Ababou et ses résultats sur le loess MC4. On a donc simulé pour ce sol là l'apport d'eau en ligne et ponctuel pour différents débits. Nous travaillons donc avec la variable potentiel, tandis que les résultats fournis par le modèle d'Ababou utilisent la variable de Kirchoff.

Le tableau ci-dessous présente les R_{sat} obtenus avec les deux modèles et les bilans de masse respectifs. On présente par ailleurs quelques comparaisons des champs d'humidités fig. 19-20). On pourra remarquer sur les différentes figures que la méthode ADI semble sous estimer systématiquement l'approfondissement du bulbe, phénomène déjà constaté lors de la simulation de la tranchée filtrante.

	$.5 \text{ l.h}^{-1} \text{ m}^{-1}$ 19h45	$1.5 \text{ l.h}^{-1} \text{ m}^{-1}$ 20h20	$3.0 \text{ l.h}^{-1} \text{ m}^{-1}$ 11h45	$.5 \text{ l.h}^{-1}$ 17h40	1.5 l.h^{-1} 15h	3.0 l.h^{-1} 13h40
R_{sat}	2 cm	23 cm	47.5 cm	18 cm	39 cm	58 cm
R_{sat} Ababou	1.5 cm	20 cm	46.25 cm	16.25 cm	36 cm	53 cm
Bilan sécante divergence	.001 % < 1 %	.001 % < 1 %	.001 % < 1 %	.001 % < 1 %	.001 % < 1 %	.001 % < 1 %
Bilan Ababou	-3.5 %	-5.6 %	-9,8 %	-3 %	-6,2 %	-8,6 %

CONCLUSIONS

Nous avons montré lors de l'établissement des équations comment on pouvait considérer le problème du déplacement de R_{sat} au cours du temps, comme un problème de Stefan et que par conséquent la solution ne pouvait, en toute rigueur, être obtenue qu'en mettant en oeuvre une méthode itérative dont l'une des solutions (outre le champ de potentiel) serait la position de R_{sat} . On a donc introduit l'algorithme habituel comme un palliatif et en aucun cas comme résultant du phénomène. Il est purement lié à la discrétisation des équations et consiste en quelque sorte à obtenir une approximation discrète du déplacement de la frontière. La fonction continue $R_{sat}(t)$ est approchée par une fonction en escalier. Ceci est d'ailleurs assez bien illustré par la figure 6b, page 93) (ABABOU, 1981) où on distingue nettement les paliers de la fonction $R_{sat}(t)$ en escalier (ie rendue par le modèle).

Il est apparu que quelle que soit la méthode qu'on utilise, on n'échappe pas à l'estimation des flux à la surface à travers la zone saturée. La variable de Kirchoff, malgré ses gradients doux, peut conduire à des biais sur les bilans de masse, comme on l'a relevé dans quelques articles. Une étude sur deux sols (Sable et Argile) à une dimension et avec l'équation de Richards a permis de montrer qu'avec la variable potentiel et même sur du sable où les gradients sont faibles, on pouvait encore obtenir des erreurs importantes sur l'estimation des débits.

Après avoir longuement validé le code sur différents sols et en différents modes de fonctionnement, nous avons proposé deux nouvelles méthodes de traitement de la condition à la surface, basées sur des quantités plus globales que la pression en un point et de ce fait moins sensibles aux erreurs locales. De plus, on s'affranchit de l'utilisation de formules discrètes décentrées.

On a pu remarquer qu'il y avait "convergence" de la méthode basée sur le théorème de la divergence vers celle utilisant la sécante, quand on faisait tendre Ψ_{div} vers zéro. Le terme "convergence" recouvre ici :

- la convergence des estimations des débits à travers la zone saturée, et par conséquent celle des flux résiduels,
- la convergence des bilans de masse,
- la convergence des champs d'humidité.

Les surfaces saturées, obtenues par les deux méthodes ont toujours été égales et les écarts sur les champs de pression jamais supérieurs à quelques millibars, au voisinage des zones à forts gradients.

Ces résultats numériques montrent donc que les deux méthodes mises au point sont plus efficaces que celles habituellement utilisées.

On a de plus l'énorme avantage de travailler avec l'équation de Richards, ce qui évite d'avoir à passer à l'équation de Kirchoff et donc de devoir faire une tabulation de $\bar{U}(\psi)$ (U : variable de Kirchoff : $U(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} K(\psi) d\psi$) ou un ajustement exponentiel de $K(\psi)$. Des essais que nous avons conduits à une dimension montraient qu'il est nécessaire de tabuler finement $U(\psi)$ pour avoir une précision acceptable.

On peut affirmer qu'on dispose donc d'un modèle apte à travailler avec l'équation de Richards, et présentant une très bonne résolution des problèmes à la limite en surface.

C H A P I T R E I I I

PASSAGE DU MODELE AU TERRAIN

INTRODUCTION

On ne saurait nier que l'objectif principal, fondamental et final d'un modèle est la prévision, même si on lui reconnaît généralement d'autres utilisations. Un modèle numérique de transferts d'eau ne doit pas se limiter au rôle de l'étude de l'influence de divers paramètres, aussi bien physiques que numériques, sans se confronter à la réalité du terrain. C'est dans la recherche d'explications aux désaccords plus ou moins prononcés que l'on ne saurait manquer de constater, que prennent source les idées qui permettront de mieux restituer la réalité et ainsi de mieux prédire.

Dans le domaine des transferts en milieu sol, on a souvent tendance à utiliser les équations des milieux poreux, en oubliant toutes les hypothèses qui ont du être posées pour leur établissement. Les notions d'homogénéité, de validité de la loi de DARCY, d'écoulement monophasique, etc... ne sont jamais qu'approchées. De plus, on peut facilement imaginer que les propriétés ci-dessus ne sont pas forcément des propriétés intrinsèques du milieu, mais dépendent en fait plutôt de la dynamique du phénomène. Tout milieu naturel peut être considéré comme approchant suffisamment bien les hypothèses, tant qu'on respecte une dynamique de l'eau appropriée. Par exemple, un sol présentant une porosité structurale non négligeable va "fonctionner" comme un sol DARCIEN, en régime évaporatif ou sous un apport d'eau respectant l'infiltrabilité de la matrice et ne sera plus du tout en accord avec les hypothèses dès que l'eau utilisera, de façon importante, les chemins d'écoulement préférentiels offerts par la porosité structurale (Ecoulement non laminaire, non capillaire, etc...). La limite entre les deux types de fonctionnement n'est bien entendu pas possible à fixer. La question qui se pose plutôt et qui conditionne l'utilisation des modèles "poreux" est :

Quels sont les "régimes hydrodynamiques" admissibles pour ne pas donner trop d'importance aux hétérogénéités ?

La réponse à cette question conditionne l'utilisation "positive" que l'on peut faire d'un modèle utilisant les équations des milieux poreux.

Dans notre cas, il nous a semblé absolument nécessaire de tenter de comparer les prévisions et la réalité. A l'inverse de la quasi totalité des tentatives existantes, on s'est placé sur un sol (cf. discussion plus loin) ne satisfaisant pas toutes les hypothèses et pouvant se révéler hydrodynamiquement hétérogène dans certaines situations. Il ne s'agit pas dans notre esprit d'effectuer un calage au sens habituel (optimisation non linéaire), puisqu'en fait ceci ne sert pas à grand chose dans une optique agronomique, le travail étant entièrement à refaire à quelques mètres du site étudié. (Portée des caractéristiques hydrodynamiques). Bien plus, en l'absence de structure spatiale (au sens géostatistique), il sera impossible d'utiliser des calages faits en différents points pour interpoler. Soulignons aussi qu'en l'état actuel des possibilités d'acquisition des caractéristiques hydrodynamiques, il semble utopique de vouloir se lancer dans celles-ci, à l'échelle d'une parcelle. Il existe aussi une autre limitation qui réside, elle, dans le coût des calculs à effectuer pour réaliser une simulation stochastique. Les tirages aléatoires dans des distributions de paramètres (conductivité, courbe de pF) conduisent, pour pouvoir estimer les sorties statistiques classiques à un nombre impressionnant de simulations, qui si elles sont "envisageables" dans le cadre monodimensionnel deviennent prohibitives à 2.D. Certains auteurs ont tenté de rendre compte de la variabilité spatiale à travers un paramètre (facteur d'échelle) ce qui allège un tant soit peu les calculs.

Il nous semble en outre que dans la mesure où l'on s'intéresse à un phénomène physique caractérisé par des "contraintes" externes importantes, et par une durée de "fonctionnement critique" relativement courte, il peut exister à l'échelle d'une parcelle des caractéristiques du profil qui auront une importance telle sur l'écoulement, que les différences pouvant être induites par la variabilité spatiale vont être complètement amorties, voire annihilées. Par exemple, la présence d'une couche relativement peu perméable, sous-jacente à la couche travaillée, annule facilement les effets induits par des variations de conductivité d'une puissance de 10 dans la couche du dessus.

Dans une optique d'application agronomique du modèle, on peut se demander s'il n'existe pas des facteurs à prendre en compte, quelquefois bien plus importants que la variabilité spatiale. Il est indéniable que par exemple la formation de croûtes, l'effondrement, le gonflement de la phase argileuse, sont autant de phénomènes qui vont agir de façon importante sur la distribution de l'eau. On touche là à une approche de la variabilité temporelle des caractéristiques hydrodynamiques des couches de surface entre autre. Rappelons que JURY, par exemple, constate une diminution de la conductivité au cours d'une saison d'irrigation.

I. PROTOCOLE EXPERIMENTAL ET MESURES

Les expériences de terrain ont été conduites sur une parcelle du domaine St. Paul de l'INRA à Montfavet. On trouvera, en annexe, les caractéristiques du sol (granulométrie).

I.1. Description du dispositif

Il consiste en une rampe de 70 mètres, régulièrement équipée de 24 goutteurs, ayant un débit nominal de 4 l/h. L'espacement entre ceux-ci est donc légèrement inférieur à 3 mètres. On a pu vérifier a posteriori la non-interaction entre bulbes.

Le dispositif est équipé de cinq tubes d'accès pour sondes neutrons-gamma, régulièrement espacés, destinés à la mesure des humidités initiales et densités. Ils sont légèrement décalés par rapport à la rampe, pour éviter tout écoulement le long de ceux-ci.

I.2. Apports d'eau

Pour des raisons climatiques, les 24 bulbes n'ont pu être traités simultanément. Ils sont répartis en deux groupes. On verra par la suite les avantages et les inconvénients pouvant résulter de cette contrainte expérimentale.

De même, en ce qui concerne les apports d'eau, il a été impossible de respecter une stricte monotypie. Là aussi, on peut tirer avantage de cette situation. On trouvera dans le tableau (1) les cycles d'irrigation effectifs, et les débits contrôlés. On pourra constater qu'on a essayé de rester le plus près possible d'un rythme "agronomique", 4h irrigation, 20 à 24h de redistribution.

I.3. Mesures de densité

On a effectué avant la mise en route de l'expérimentation des mesures de densité sur les tubes d'accès et avec des anneaux de prélèvement sur un bulbe expérimental établi à quelques mètres. Celui-ci ayant été ouvert jusqu'à 1,30 m, on a pu faire des prélèvements pour la mesure de l'humidité et constater visuellement qu'il avait une forme relativement régulière et assez symétrique.

On présente (figure 3.1) les différents profils de densité sèche obtenus sur les tubes d'accès.

Ils font apparaître, globalement, deux couches de densité moyennes différentes, avec un interface aux environs de 30 à 40 cm, correspondant à un fond de travail du sol. En faisant l'hypothèse que correspondent à ces deux couches des horizons de caractéristiques hydrodynamiques différentes, on a tenu compte de leur présence dans les mesures ultérieures et dans l'acquisition des caractéristiques hydrodynamiques nécessaires à la modélisation.

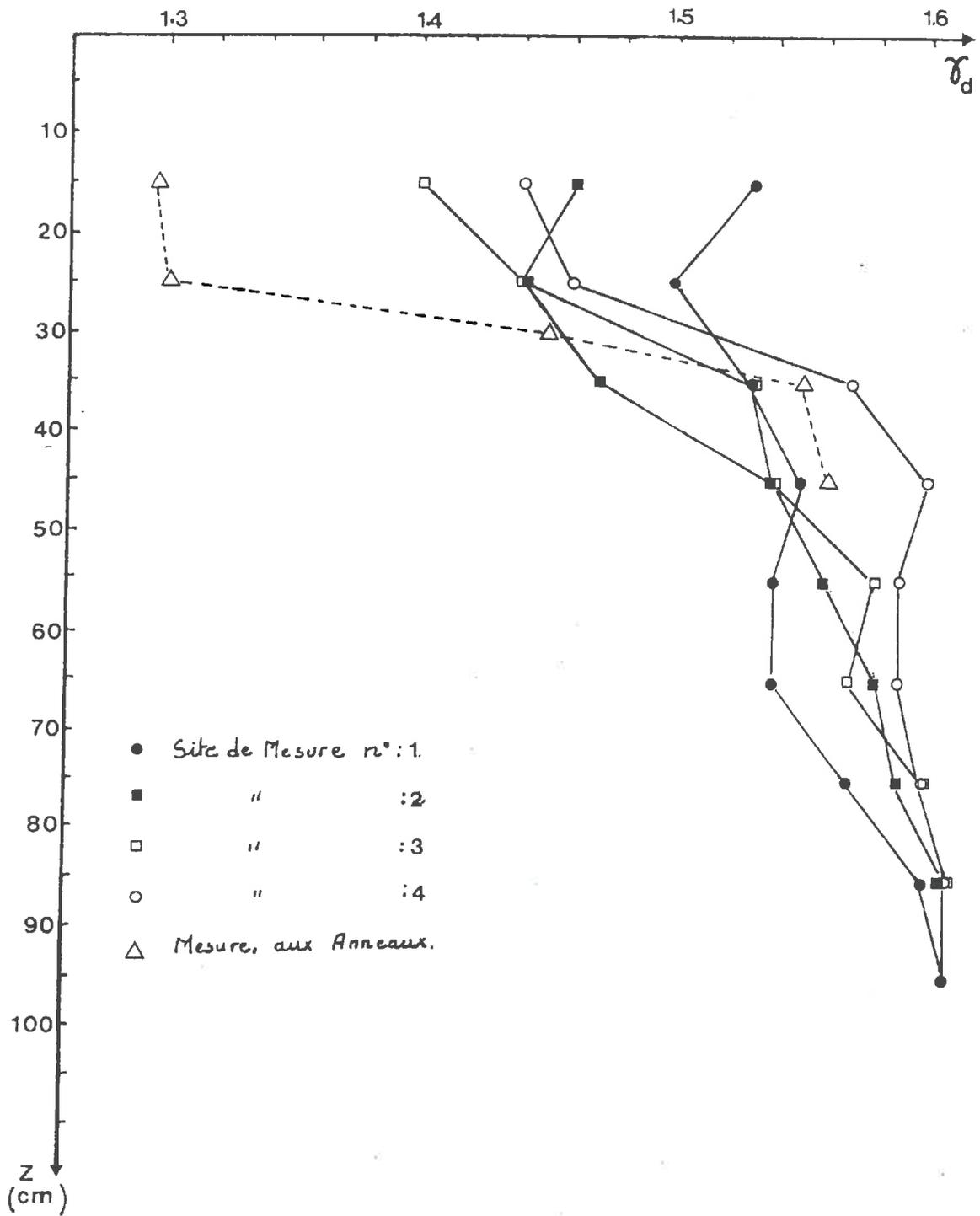


FIG. 3-1. Profils de densité obtenus à la sonde Gamma-diffusion et avec des anneaux de prélèvement

Numero Culteur	K_s^{-1} m.h	Cycle d'irrigation simulé I : Irrigation R : Redistribution	Prof _{ini}
1, 2, 3, 4, 5 4l/h	2.4 .298	3h30/ 20h/ 4h/ 18h30/ 5h/ 4h/ 5h/ 20h I R I R I R I R $T_{fin} = 80h$	1
7, 8, 9, 10 4l/h	2.95 .298	4h/ 21h45/ 2h30/ 16h15/ 4h/ 24h/ 4h15/ 19h15 I R I R I R I R 4h/ 24h/ 4h/ 12h/ 2h/ 12h/ 2h/ 6h/ I R I R I R I R $T_{fin} = 165h$	2
11, 12, 13, 14, 15 4 l/h	2.75 .298	4h/ 15h/ 4h15/ 24h/ 4h/ 21h/ 4h/ I R I R I R I 12h/ 2h/ 22h/ 2h/ 8h/ R I R I R $T_{fin} = 122h15$	2
16, 17 4,5 l/h	3.09 .298	4h/ 24h/ 5h/ 24h/ 5h/ 4h/ I R I R I R $T_{fin} = 66h$	3
18, 19, 20 4,5 l/h	3.09 .298	4h/ 24h/ 4h/ 24h/ 5h/ 24h/ 3h/ 4h/ I R I R I R I R $T_{fin} = 92 h$	3
21, 22, 23, 24	3.09 .298	4h/ 24h/ 1h30/ 24h/ 4h/ 6h/ I R I R I R $T_{fin} = 63h30$	3

Tableau 1 : CARACTERISTIQUES PREMIERES SIMULATIONS

Site	K_s (cm.s ⁻¹)	K_s (cm.h ⁻¹)	K_s (m.j ⁻¹)
1	.363 x 10 ⁻²	13.09	3.14
1bis	.4212 x 10 ⁻²	15.16	3.64
2	1.7 x 10 ⁻²	61.25	14.7
2bis	.3411 x 10 ⁻²	12.28	2.95
3	2.84 x 10 ⁻²	102.2	24.5
4	.31712 x 10 ⁻²	11.4	2.75
5	.3577 x 10 ⁻²	12.87	3.09

Tableau 2

Site	K_s (cm.s ⁻¹)	K_s (cm.h ⁻¹)	K_s (m.j ⁻¹)
1	.1 e ⁻²	3.6	.864
2	.11 e ⁻²	3.95	.95
3	.01 e ⁻²	.36	.086
4	.34 e ⁻²	12.24	2.94
5	.34 e ⁻³	1.24	.29

Tableau 3

Notons enfin, qu'on a relevé tout au long du transect, la présence d'une couche plus sableuse dont le sommet oscille entre .90 et 1.0 mètre.

I.4. Mesures de conductivité

Au vu de la remarque précédente, il a été décidé d'effectuer des mesures de conductivité à saturation pour chacun des horizons (0-30 et 30-100). On s'est limité à cinq sites de mesures pour la couche inférieure, localisés au voisinage des tubes d'accès. On a effectué sept mesures sur la couche de surface. On se reportera à l'annexe pour le protocole de mesure. Les tableaux (2) et (3) présentent les résultats obtenus pour les deux horizons.

On peut constater que pour la couche de surface, à part deux valeurs assez éloignées des autres, les conductivités à saturation sont peu variables. La couche sous-jacente présente quant à elle un caractère beaucoup plus dispersé.

Ces deux séries de mesures mettent assez bien en évidence l'influence de la porosité structurale et des hétérogénéités sur la valeur du K_{sat} . La couche de surface, travaillée et remaniée, relativement homogène présente un K_s stable, sauf accident bien marqué (trous divers). La couche du dessous présente des résultats allant de valeurs qu'on peut penser être voisines de la conductivité de la matrice jusqu'à des K_s quasiment aussi élevés que pour la zone du dessus.

I.5. Mesures effectuées sur chacun des bulbes

a) Humidité

Il était impensable de vouloir caractériser la distribution de l'eau dans tout le bulbe, même en se restreignant à un plan de symétrie axiale. Cela eût représenté plus d'une centaine de mesures d'humidité par bulbe. On a donc choisi de faire les mesures de façon à avoir à la fois des profils de teneurs en eau et une caractérisation de l'extension latérale du bulbe, cette dernière étant déjà importante d'un point de vue agronomique, indépendamment de la répartition précise de l'eau dans le volume humecté.

De plus, on pensait que vu la présence d'hétérogénéités de densité et de circulation dans le profil, il était probablement très peu intéressant et rentable de vouloir caractériser très précisément tout le champ d'humidité. Les prélèvements ont donc été faits selon le plan exposé à la figure 3-2. On y trouvera aussi la localisation des mesures de la sonde Gamma diffusion. La mesure gravimétrique, telle qu'elle a été pratiquée, est entachée d'une erreur très faible, tant du point de vue des valeurs mesurées que de la localisation dans le profil. De par le volume de mesure réduit, elle est plus adaptée à la définition des limites du volume humecté que la sonde à neutrons, l'inconvénient étant qu'elle fournit des profils moins lisses et plus sensibles aux micro hétérogénéités.

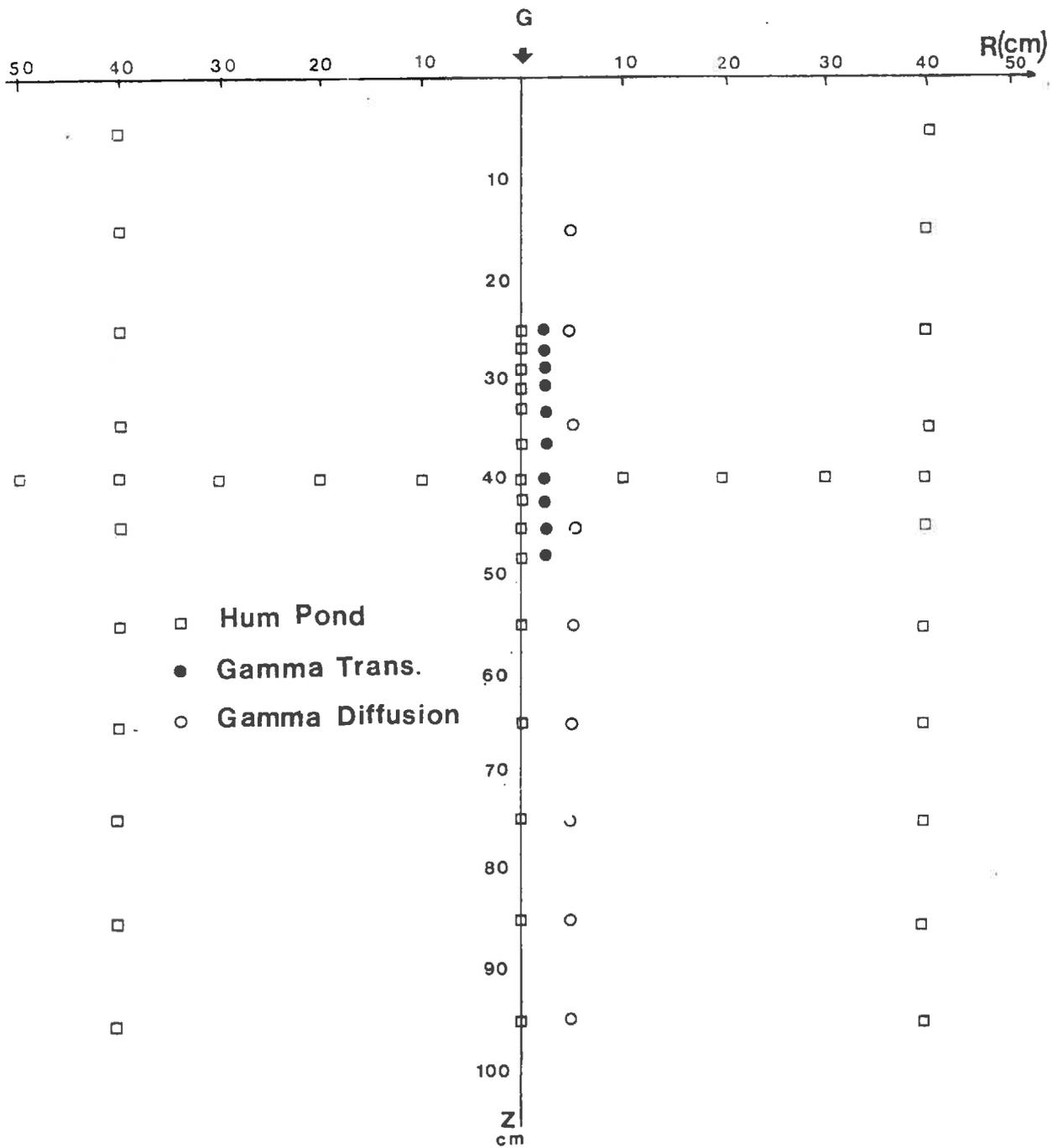


FIG. 3-2 - Plan des prélèvements et des mesures

Cote Site	25	27	30	33	36	39	42	45
1	*	*	1.36	1.40	1.43	1.47	1.47	1.51
2	*	*	1.39	1.50	1.54	1.54	1.53	1.54
3	*	*	1.48	1.47	1.51	1.50	1.49	1.54
4	*	*	1.44	1.47	1.40	1.44	1.44	1.46
5	*	*	1.38	1.38	1.37	1.44	1.52	1.53
6	1.37	1.40	1.33	1.38	1.49	1.48	1.50	1.49
7	1.36	1.43	1.45	1.51	1.52	1.55	1.54	1.52
8	1.41	1.42	1.39	1.44	1.46	1.46	1.51	1.53
9	1.41	1.46	1.47	1.46	1.51	1.51	1.38	1.49
10	1.42	1.44	1.50	1.59	1.59	1.56	1.59	1.62
11	1.42	1.48	1.51	1.53	1.52	1.53	1.52	1.52
12	1.39	1.41	1.40	1.43	1.44	1.41	1.47	1.44
13	1.41	1.44	1.46	1.59	1.63	1.61	1.63	1.61
14	1.43	1.48	1.50	1.43	1.55	1.51	1.56	1.56
15	1.44	1.45	1.53	1.61	1.62	1.62	1.61	1.58
16	1.39	1.41	1.54	1.54	1.55	1.53	1.55	1.57
17	1.52	1.59	1.59	1.59	1.54	1.54	1.52	1.55
18	1.59	1.63	1.63	1.63	1.62	1.62	1.58	1.59
19	1.42	1.42	1.46	1.53	1.53	1.50	1.50	1.56
20	1.36	1.51	1.51	1.49	1.49	1.63	1.61	1.55
21	1.53	1.58	1.59	1.60	1.59	1.56	1.56	1.54
22	1.54	1.58	1.60	1.56	1.51	1.54	1.58	1.58
23	1.48	1.49	1.53	1.58	1.61	1.61	1.58	1.65
24	1.35	1.39	1.44	1.52	1.43	1.45	1.49	1.54

Tableau 4 : Densités sèches

b) Densité

L'expression en humidité volumique de la mesure gravimétrique de la teneur en eau nécessite la connaissance de la densité sèche. Celle-ci a été mesurée de façon précise entre 25 et 50 cm, avec un pas de 3 cm, à la sonde Gamma transmission. Sur le restant du profil [50, 100], on a utilisé les valeurs données par la sonde Gamma-diffusion (sonde mixte gamma-neutrons).

c) Zones humides en surface

La taille des zones humides et saturées en surface étant primordiale pour vérifier le plus ou moins bon accord avec la simulation, il a été procédé à des prises de vue et à des relevés manuels permettant d'obtenir ces surfaces.

Précisons enfin, que chaque bulbe était ouvert selon un plan de symétrie axiale. Cela permettait de faire les prélèvements d'humidité à la spatule et de faire des observations visuelles sur le profil, la distribution de l'eau, la présence d'hétérogénéités, l'écartement des tubes d'accès à la sonde Gamma-transmission, etc... Les prélèvements gravimétriques sur les verticales extérieures étaient faits à la tarière au-delà de 50 cm.

II. PRESENTATION ET ETUDE DES RESULTATS OBTENUS AU TERRAIN

II.1. Mesure de densité

La mesure de densité est, dans notre cas, importante pour deux raisons.

Elle permet bien sûr d'une part le calcul de l'humidité volumique qui est la variable utilisée dans les modèles, à partir des mesures pondérales, mais surtout d'apprécier l'existence et l'emplacement de l'interface. Etant donné l'hypothèse de corrélation que nous avons faite, et qui nous semble légitime, entre, variation des caractéristiques hydrodynamiques et variation de densité, le profil de densité sera forcément un des facteurs explicatifs à prendre en compte dans l'analyse des résultats et dans les choix devant être faits lors de la modélisation (situation de l'interface, densité à imposer, ...).

On présente dans le tableau 4 les profils de densité observés à la sonde Gamma-transmission, au voisinage de l'interface.

On peut remarquer sur chaque profil, de façon plus ou moins nette, sa présence. Celle-ci est beaucoup moins marquée que dans les mesures faites avant irrigation. On peut probablement expliquer ce lissage des profils par un tassement dû à l'apport d'eau. Sur la figure 3-3 se trouve le profil de densité moyen. Malgré tout ce qu'une moyenne peut introduire comme lissage, on peut y distinguer aussi, la présence de l'interface. Etant dû à un fond de travail, sa localisation est forcément variable tout au long du transect.

z cm	25	27	30	33	36	39	42	45
nb Indiv	19	24	24	24	24	24	24	24
Moyenne	1.433	1.471	1.478	1.509	1.519	1.526	1.53	1.534
Variance	$0.469 \cdot 10^{-2}$	$0.512 \cdot 10^{-2}$	$0.64 \cdot 10^{-2}$	$0.568 \cdot 10^{-2}$	$0.524 \cdot 10^{-2}$	$0.387 \cdot 10^{-2}$	$0.348 \cdot 10^{-2}$	$0.237 \cdot 10^{-2}$
Ecart-type	0.068	0.072	0.080	0.075	0.072	0.062	0.059	0.049
Coef. Var. %	4.78	4.85	5.41	4.99	4.77	4.08	3.86	3.15
I.C. 95 %	1.402 1.465	1.442 1.508	1.443 1.512	1.478 1.54	1.489 1.548	1.5 1.551	1.501 1.555	1.525 1.564

Tableau 5 Densités sèches - Statistiques

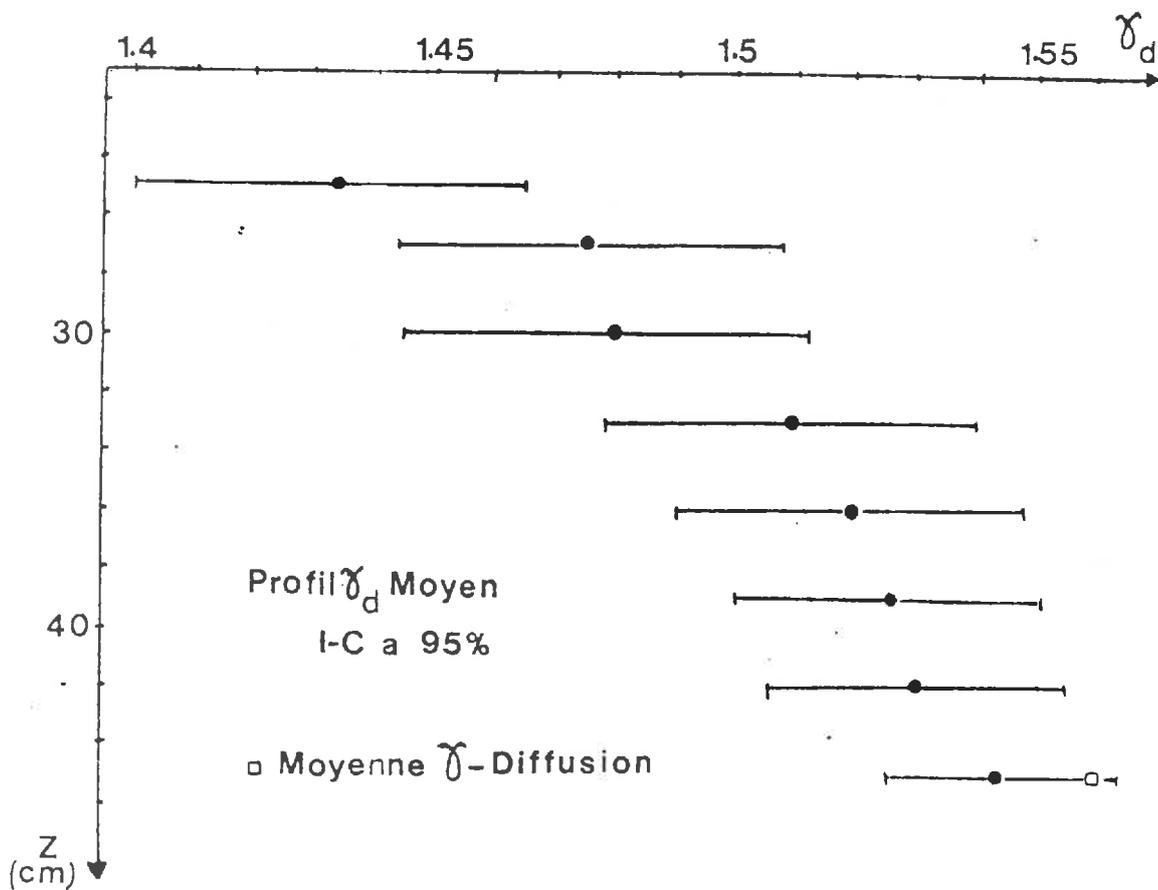


FIG. 3-3 - Profil densité moyen obtenu à la sonde Gamma-transmission

Remarquons que les coefficients de variation, présentés au tableau 5 indiquent que c'est aux alentours de 30 cm que la densité fluctue le plus, ce qui indique bien que la position moyenne de l'interface est environ à cette profondeur là. On peut remarquer enfin, sur les profils de densité (fig. 3-1), que la variation d'un site à l'autre diminue avec la profondeur.

En conclusion, et en ce qui concerne la couche de surface, on peut noter une dérive de la densité entre le début et la fin des irrigations. On passe en moyenne à 25 cm de 1,33 à 1,44 et à 30 cm de 1,43 à 1,47. La densité de la deuxième couche n'est, quant à elle, pas affectée. On peut rapprocher cette variation d'une variabilité temporelle des caractéristiques hydrodynamiques en partie induite par l'irrigation.

On peut remarquer aussi une légère dérive des densités vers des valeurs plus élevées quand on parcourt les sites par numéro d'ordre croissant. Celle-ci s'accompagne aussi d'une plus grande variabilité.

II.2. Mesures détaillées de zones saturées et humides en surface

On a porté dans le tableau 6 les surfaces mesurées en cm^2 , pour chacun des bulbes et les rayons correspondants en cm. L'hypothèse d'existence d'une zone humide ayant la forme d'un disque est assez bien respectée, étant donné que nous avons pris la précaution d'aplanir chaque placette devant recevoir un goutteur. On s'est donc permis de tirer de chaque surface un rayon équivalent.

On observe une croissance de la taille des zones humides quand on se déplace le long du transect (numéros croissants). Celle-ci s'accompagne d'une croissance plus faible des zones saturées. Il s'en suit bien évidemment une augmentation très nette de la surface de "diffusion". Si on imagine que l'augmentation de densité est liée à une diminution de la porosité structurale, et notamment celle constituée de fissures, on peut aisément en déduire que le processus de diffusion latérale se fera dans des conditions bien plus favorables (augmentation des surfaces de contact et des connexions). On peut faire là un parallèle avec l'augmentation du coefficient de diffusion d'un sel dans un milieu poreux, lorsque la densité de celui-ci augmente jusqu'à un certain niveau. L'augmentation de densité de la couche de surface entraînant une modification de ses caractéristiques hydrodynamiques, il semble logique de chercher une corrélation entre densité moyenne de la couche de surface et rayon de la couronne de diffusion. Le coefficient de détermination r^2 s'élève à 0,6.

Site	S _{sat}	R _{sat}	S _{tot}	R _{tot}	R _{dif}	\bar{Y}_d
1	40	5	707	15	10	1.45
2						1.52
3	260	20	2030	30	10	1.50
4	110	15	1960	25	10	1.46
5	260	20	2030	30	10	1.46
6	283	4.5	390	17.8	8	1.42
7	245	9	1014	18	9	1.50
8	397	11	1145	19	8	1.45
9	242	9	903	17	8	1.46
10	220	10	1123	9	9	1.54
11	2010	18	2700	29	11	1.50
12	905	17	2800	30	13	1.42
13	890	17	3400	33	16	1.54
14	441	17.5	1600	34	16.5	1.50
15	807	16	3395	33	17	1.55
16	815	16	2460	28	12	1.51
17	460	17.5	4760	39	21.5	1.56
18	1150	19.5	3830	35	15.5	1.61
19	1256	20	5540	42	22	1.49
20	2290	27	6940	47	20	1.52
21	2290	27	6360	45	18	1.57
22	1965	25	7850	50	25	1.56
23	1180	20	5020	40	20	1.57
24	110	20	3850	15	15	1.46

Niveau 5 : Zones Humides Surface

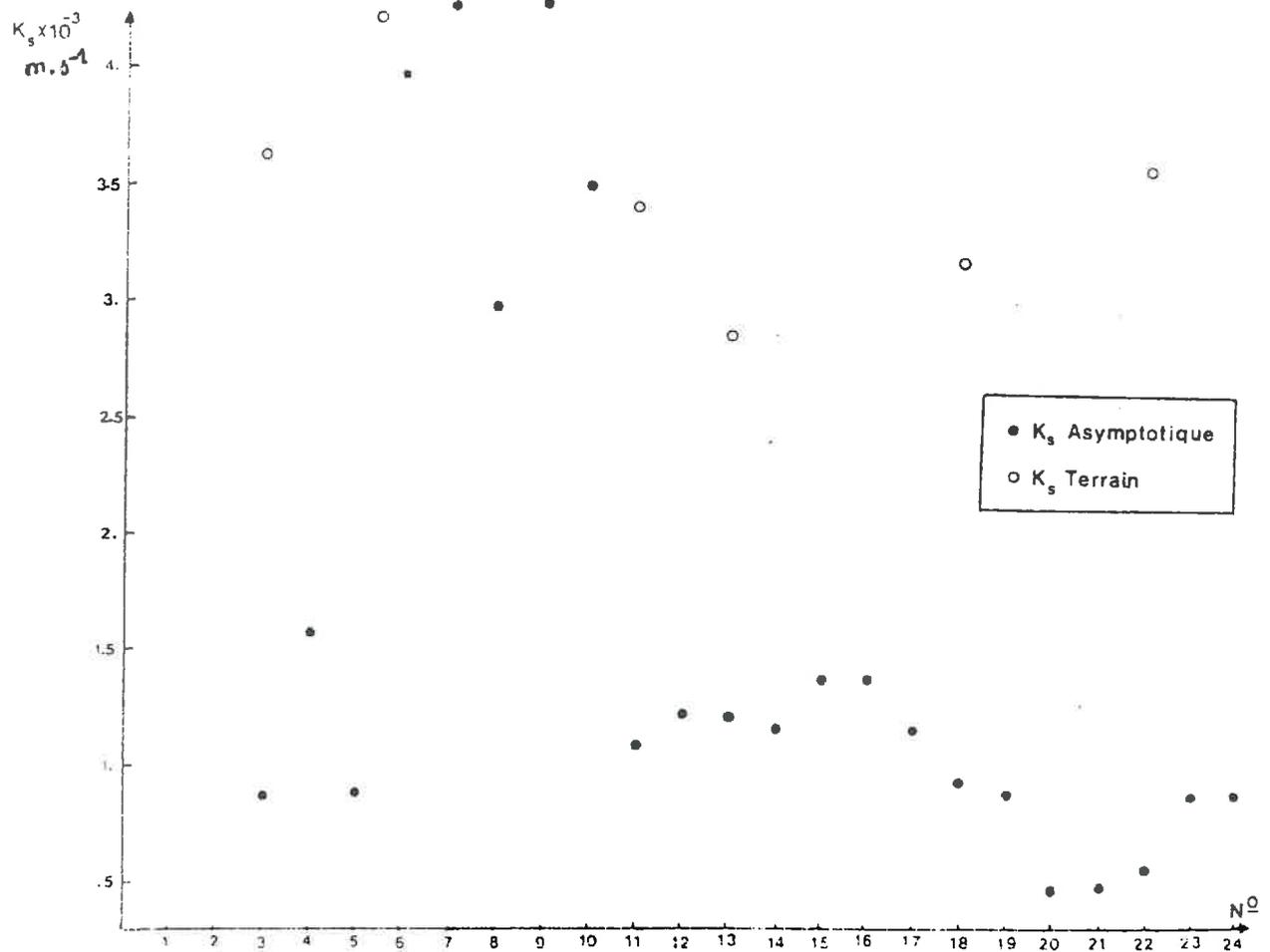
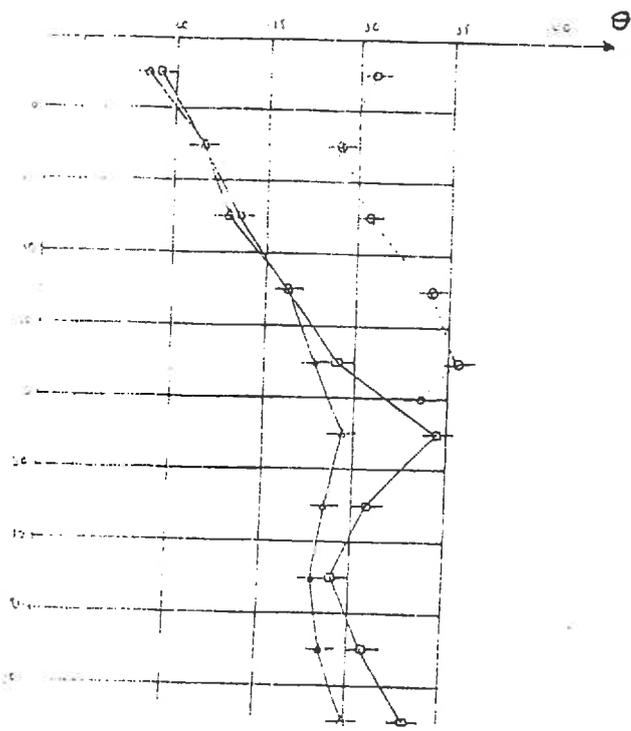
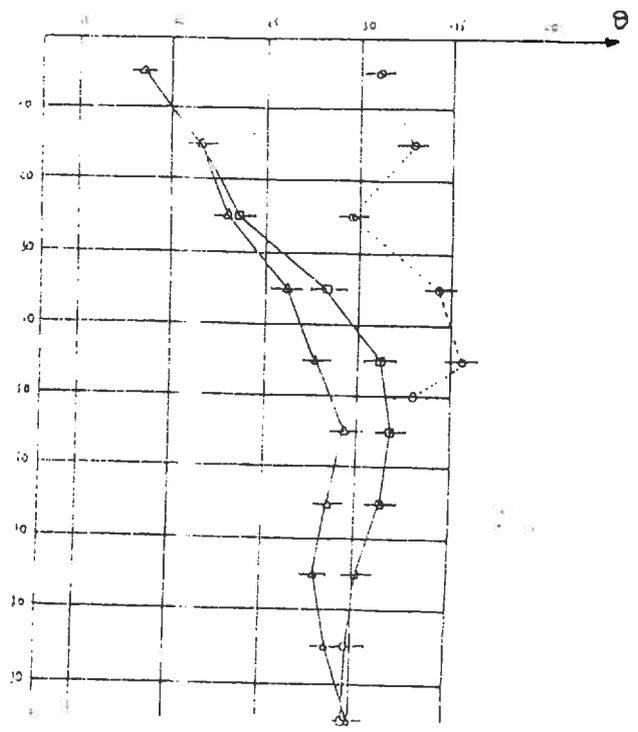


FIG. 3-4 - K_{sat} mesuré et obtenu à partir des zones saturées



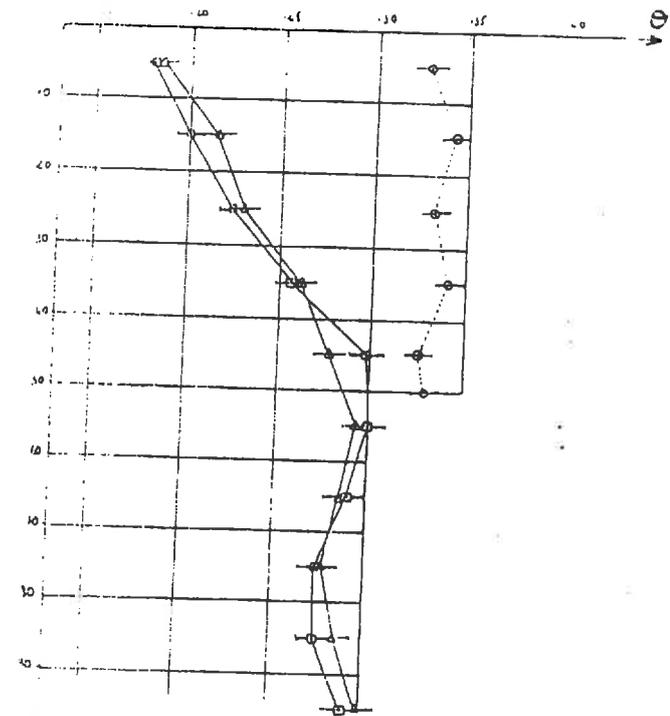
n° 1

Δ Profil Initial
 □ R: 50 cm
 ○ Sous Goutteur



n° 2

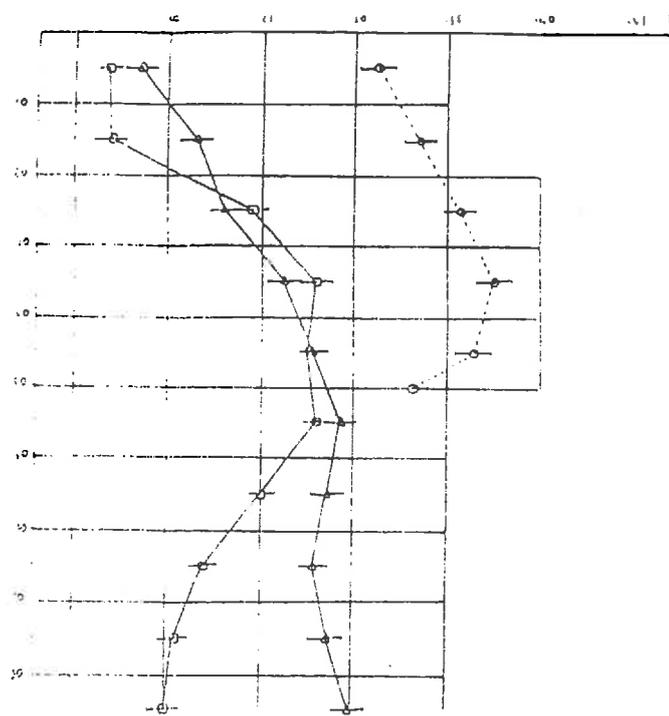
Δ Profil Initial
 □ R: 50 cm
 ○ Sous Goutteur



n° 3

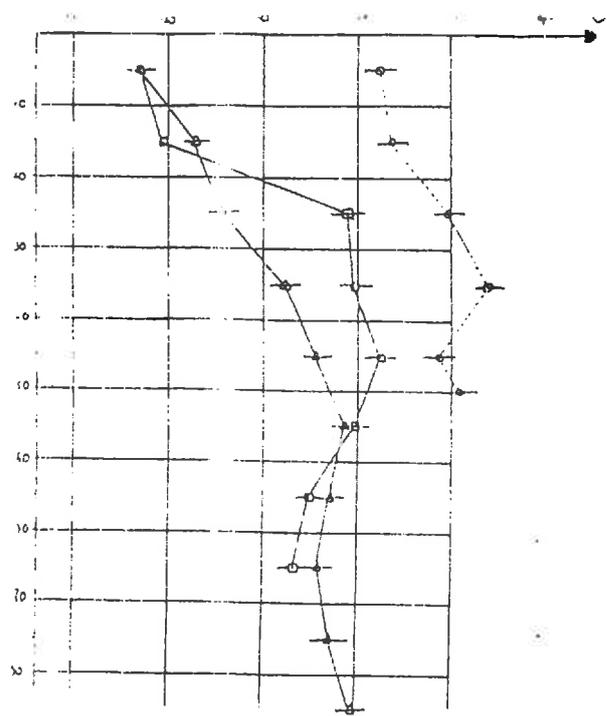
Δ Profil Initial
 □ R: 50 cm
 ○ Sous Goutteur

FIG. F1



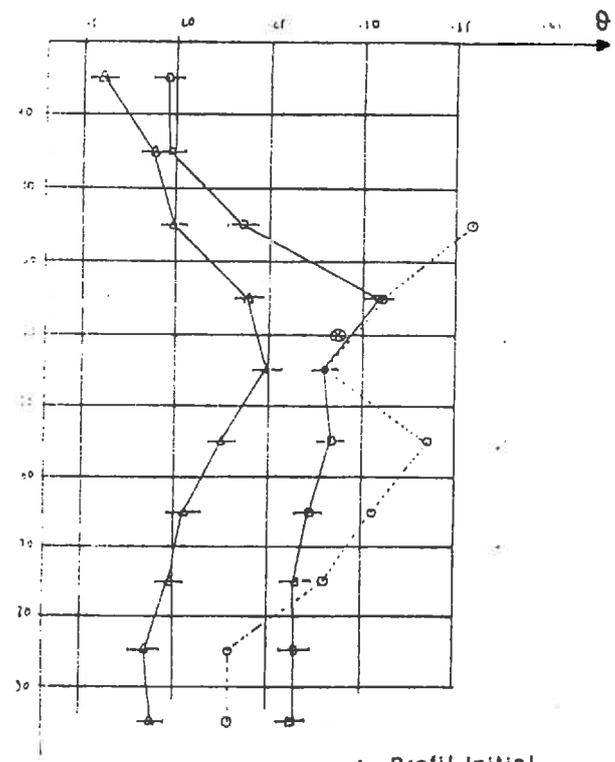
n° 4

- △ Profil Initial
- R: 50 cm
- Sous Goutteur



n° 5

- △ Profil Initial
- R: 50 cm
- Sous Goutteur



n° 6

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- R: 50 cm

FIG. F2-

Si on fait l'hypothèse d'un régime asymptotique établi à la surface du sol, (ce qui est certainement très proche de la réalité, au bout de 4h d'irrigation et en tout état de cause vérifié par les résultats du modèle), on peut calculer une borne supérieure de la conductivité à saturation en surface au moyen de la formule : $Q = K_s \cdot \pi \cdot R_s^2$. Les valeurs obtenues sont dans le tableau 6, exprimées en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$. La figure 3-4 montre clairement que les valeurs de K_s mesurées in situ et obtenues par la formule précédente sont assez différentes, surtout pour les sites 10 à 24.

Etant donné que les mesures in-situ de K_s dans la couche (0-30) sont assez semblables, on peut avancer différentes explications à ce phénomène et à cette différence entre sites. Sur les premiers sites, plus proches de la situation résultant du travail du sol, il ne s'est pas écoulé assez de temps et on n'a pas une densité très élevée au départ de l'irrigation. De ce fait, le gonflement survenant lors de l'irrigation ne referme peut être pas aussi complètement la porosité structurale que pour les autres sites. On garde ainsi une couche de surface à conductivité plus élevée. Sur les sites de numéros supérieurs à 10, on a au contraire création d'une croûte de surface de conductivité réduite, d'un facteur supérieur à 5 par rapport aux mesures de terrain et contrôlant l'infiltration.

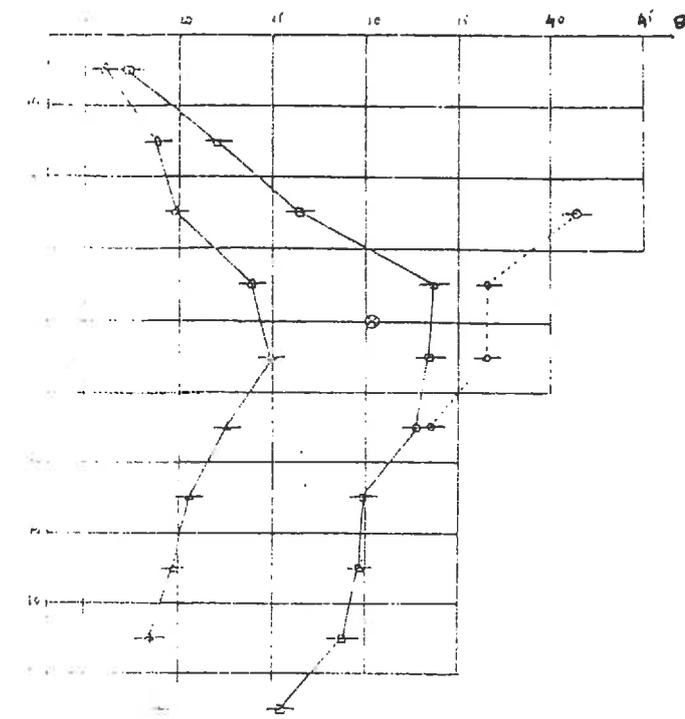
II.3. Analyse des profils de teneur en eau

On dispose de trois profils verticaux et d'un profil horizontal, situé à 40 cm de profondeur. Outre l'utilisation qui sera faite de ces mesures pour vérifier le fonctionnement du modèle, on peut essayer d'en dégager certaines indications sur le fonctionnement hydrodynamique du sol. On a regroupé les bulbes en fonction de la dose reçue.

a) Bulbes 1 à 5

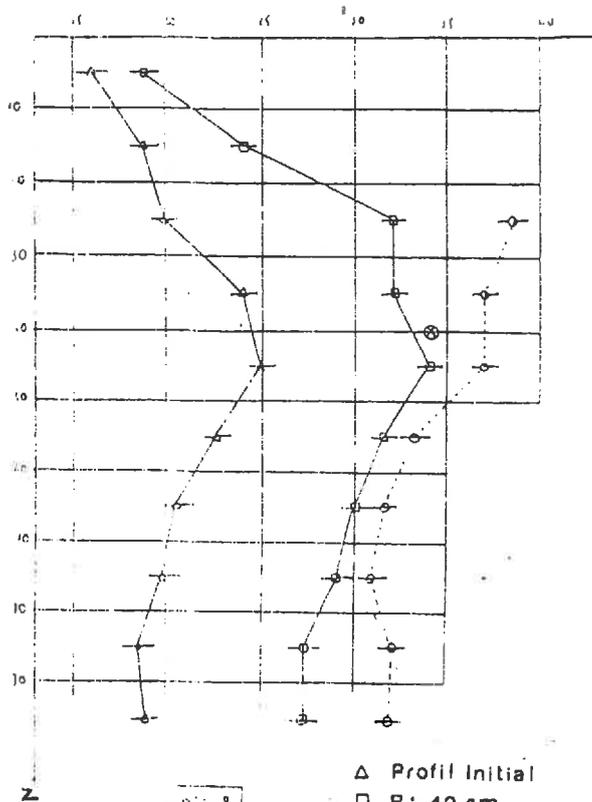
Sur ces cinq premiers bulbes, les profils latéraux ont été effectués à 50 cm du goutteur. On peut observer figure (F1-F2) qu'à cette distance de l'axe de symétrie, les profils hydriques sont très peu perturbés par l'apport d'eau. L'augmentation maximale de teneur en eau se trouvant dans un intervalle de profondeur [35-55], ce qui correspond au voisinage de l'interface dans la deuxième couche.

On peut en conclure que pour ces cinq individus l'extension latérale maximale se situe bien au voisinage de 40 cm de profondeur et à une valeur moyenne de 50 cm. On peut noter le comportement relativement homogène du groupe. Il ne faut pas attribuer trop d'importance au dessèchement du profil en profondeur, au site 4, celui-ci étant dû à l'interface 80-100 cm déjà mentionné



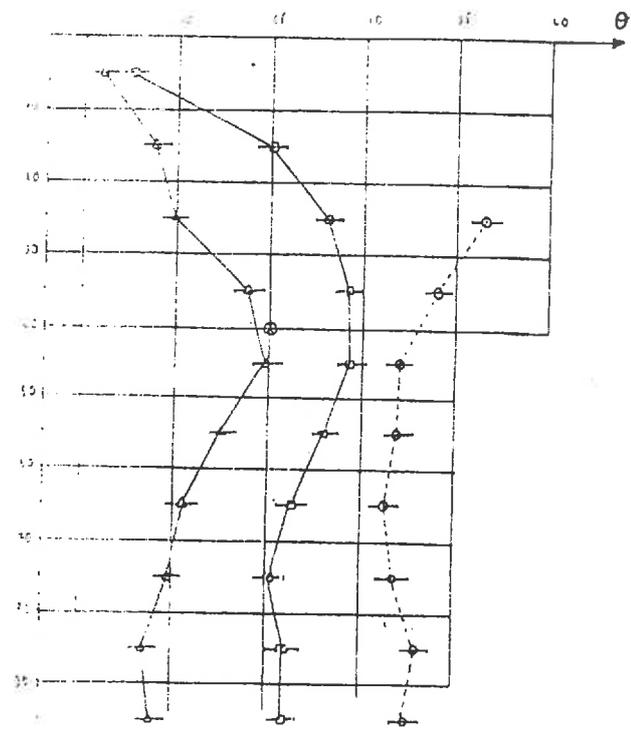
n° 7

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- R: 50cm



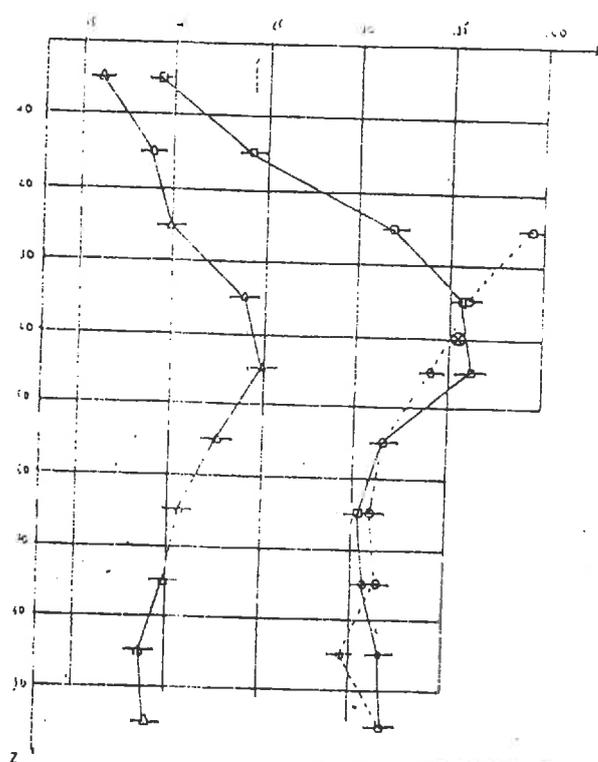
n° 8

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- R: 50cm



n° 9

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- R: 50cm



n° 10

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- R: 50cm

FIG. F3-

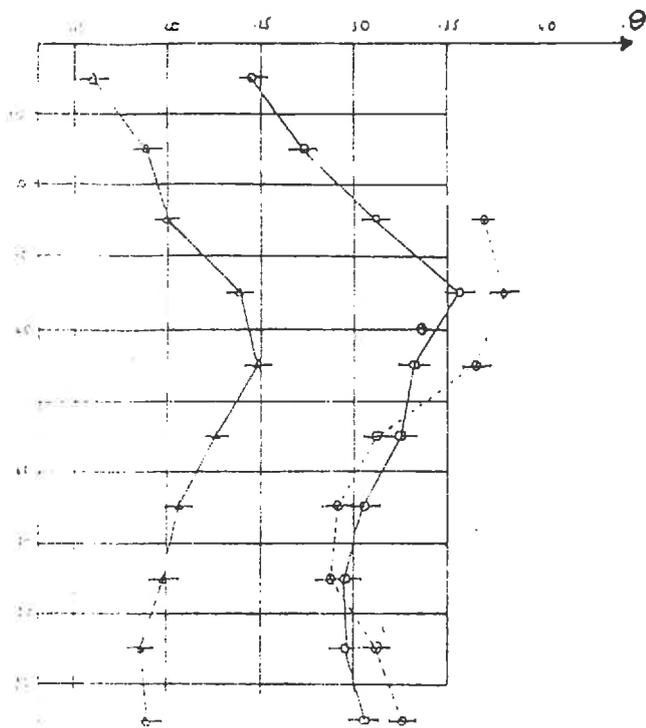
(remontée de la couche sableuse). Notons enfin que les profils sous goutteurs sont plus réguliers pour les numéros d'ordre grands. Ceci est dû au décalage dans le temps (5h) existant entre les mesures faites sur les premiers bulbes (N°1,2) et les derniers (4,5). Les teneurs en eau sont très proches en surface et à 50 cm.

b) Bulbes 7 à 10

On peut noter figure (F3) une augmentation très nette de la teneur en eau jusqu'au fond sur les profils sous goutteurs et latéraux. La couche de surface se caractérise sur ces derniers, par une augmentation plus faible que dans la couche de dessous. Le "parallélisme" entre profils initiaux et final suggère un fonctionnement avec une direction d'écoulement privilégiée, du moins à partir de l'interface. On peut remarquer qu'au-delà de 40 cm, la différence de teneurs en eau entre profils latéraux et profils sous goutteur est assez faible, ce qui vient confirmer l'hypothèse avancée. Dans la couche de surface, on peut constater un fonctionnement plus isotrope. Les humidités en surface pour les profils latéraux sont très proches des valeurs initiales et la présence de l'interface, à 30-40 cm, est flagrante. Les plans de flux nul, aux erreurs d'appréciation près, sont situés à environ 50 cm, ce qui correspond bien à un écoulement dans la deuxième couche à partir de l'interface (30-40) avec une pseudo-condition à la limite, de type flaque ou potentiel imposé au niveau (30-40).

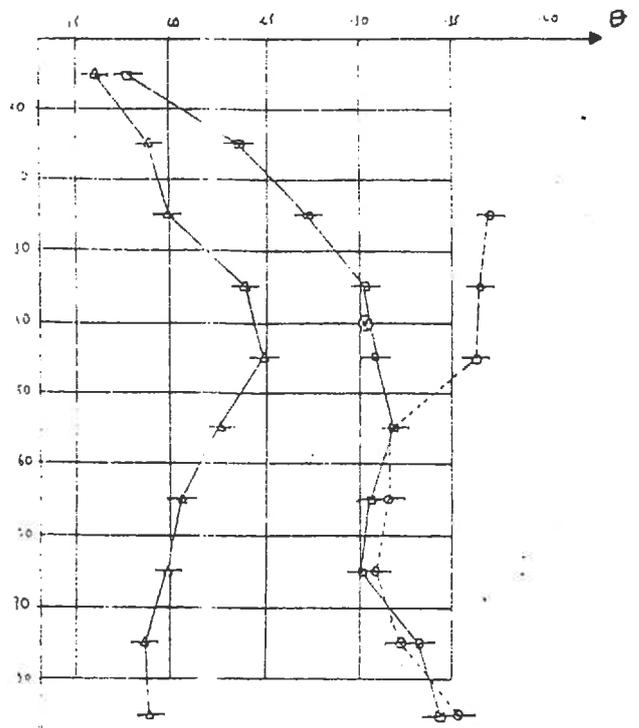
- Les humidités relevées à 50 cm du goutteur et 40 cm de profondeur sont tout à fait cohérentes avec les profils (fig. F4). C'est-à-dire, que dans le cas où il y a fermeture (n° 7) du profil latéral, ce qui correspond probablement à une pseudo-condition à la limite de type potentiel fixe, assez élevé en valeur absolue, on a aussi fermeture latérale. A l'inverse, dans le cas où il n'y a pas fermeture au fond (n° 8 et 10), on peut remarquer que la teneur en eau à 50 cm de l'axe est aussi élevée, ce qui est cohérent avec un potentiel quasi nul à $R = 40$ cm et $Z = 40$ cm. La fermeture latérale se produit donc probablement, vu les gradients importants pouvant exister dans ce sol, aux environs de 60 cm. Ce que l'on veut montrer à travers cette explication c'est que si en profondeur il n'y a pas fermeture, ceci est corrélé à un potentiel à l'interface très faible (voisin de zéro) et que par conséquent la fermeture latérale est rejetée plus loin.

-Le profil 9 est intéressant car il montre qu'en 10 cm, dans la direction radiale, la teneur en eau passe de 30 % au 25 % initiaux.



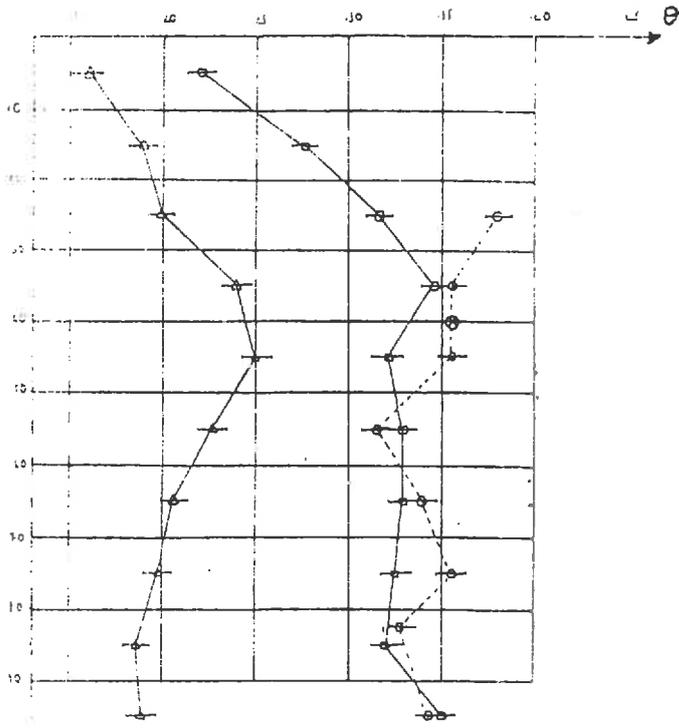
n° 44

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- ⊙ R: 50cm



n° 45

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- ⊙ R: 50cm



n° 43

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- ⊙ R: 50cm

FIG. F5-

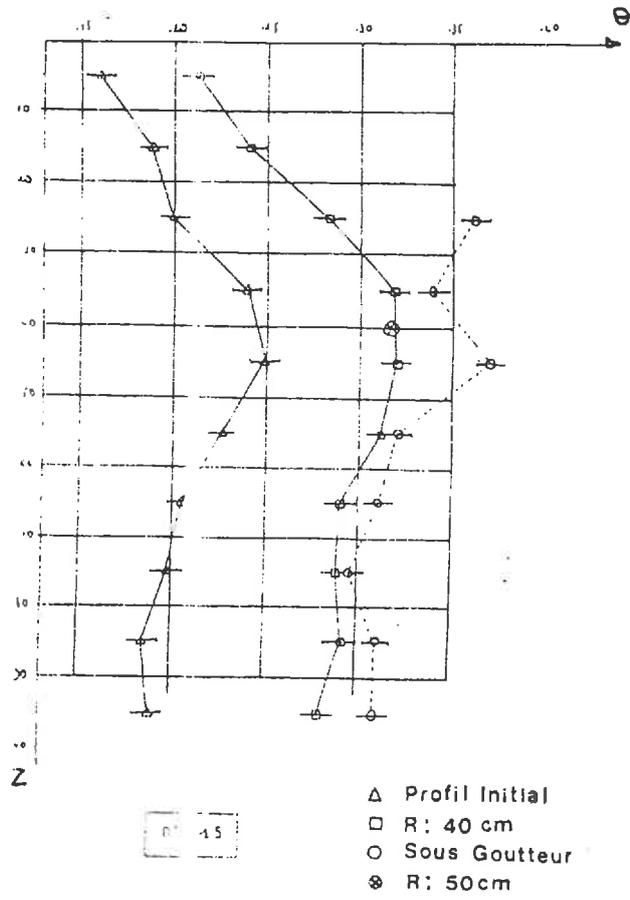
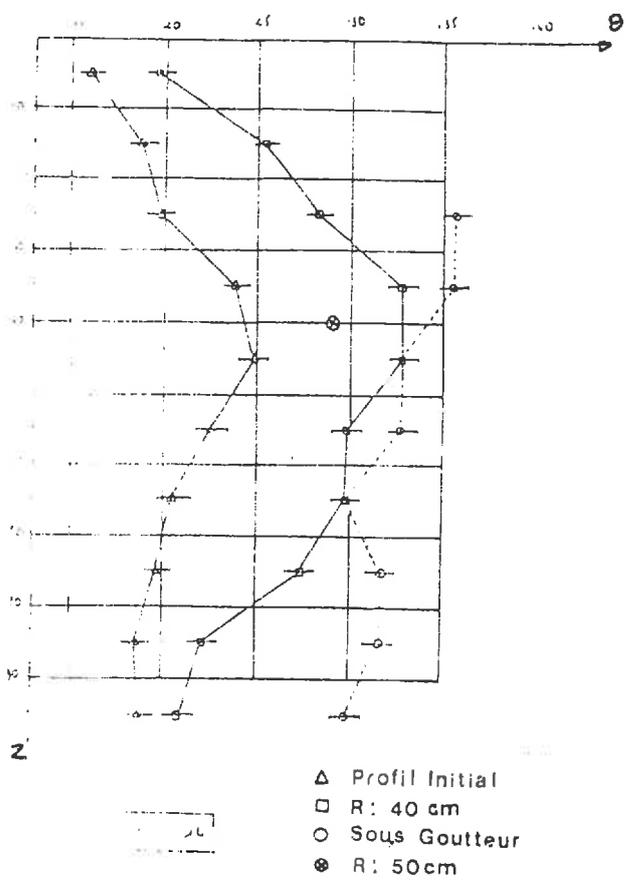


FIG. F6-

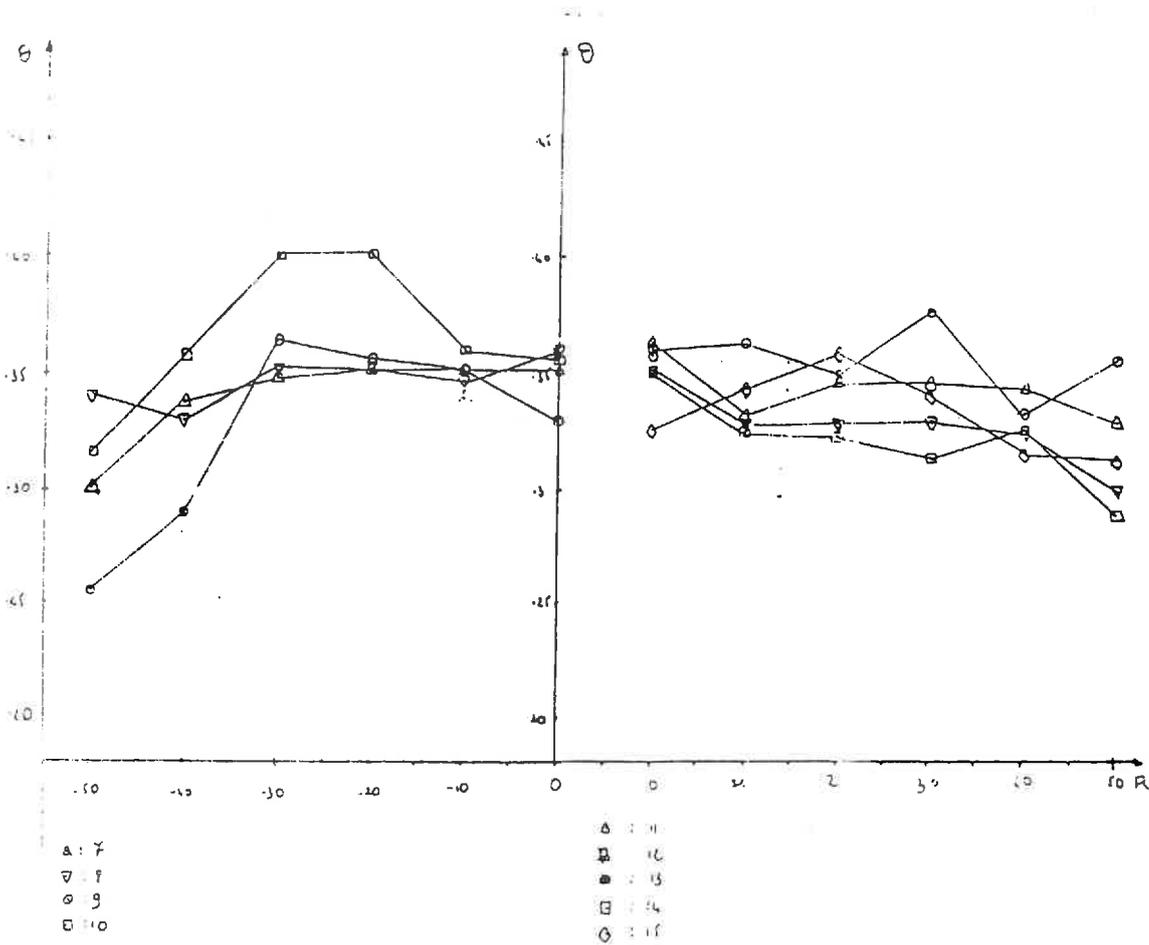
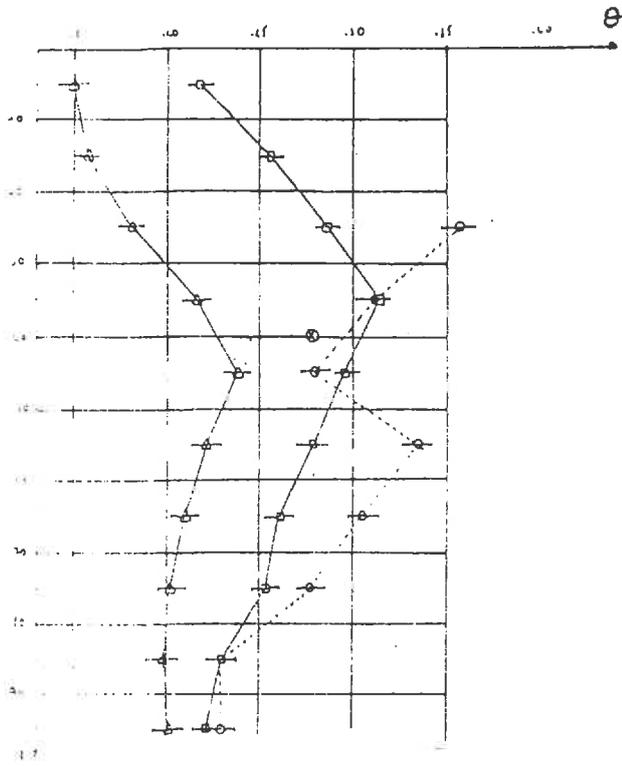
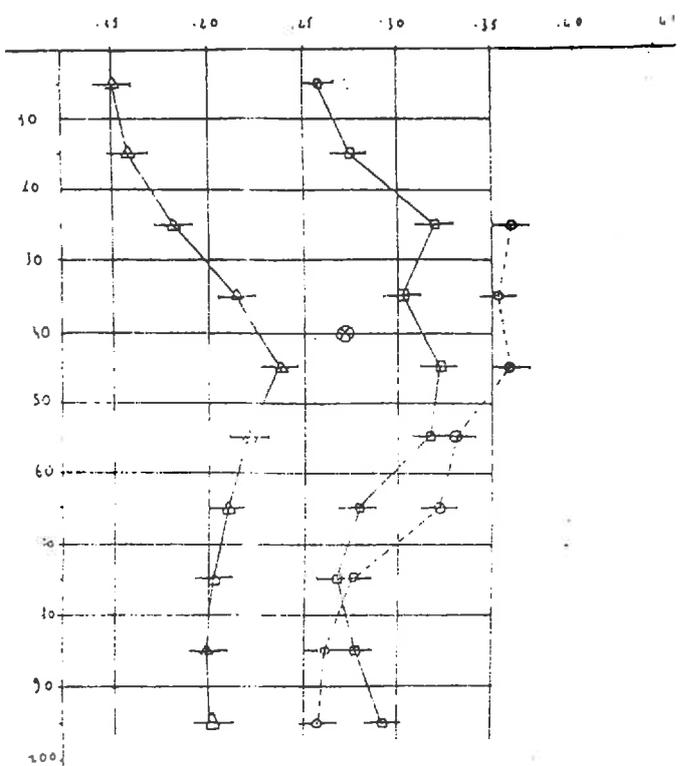


FIG. F4-



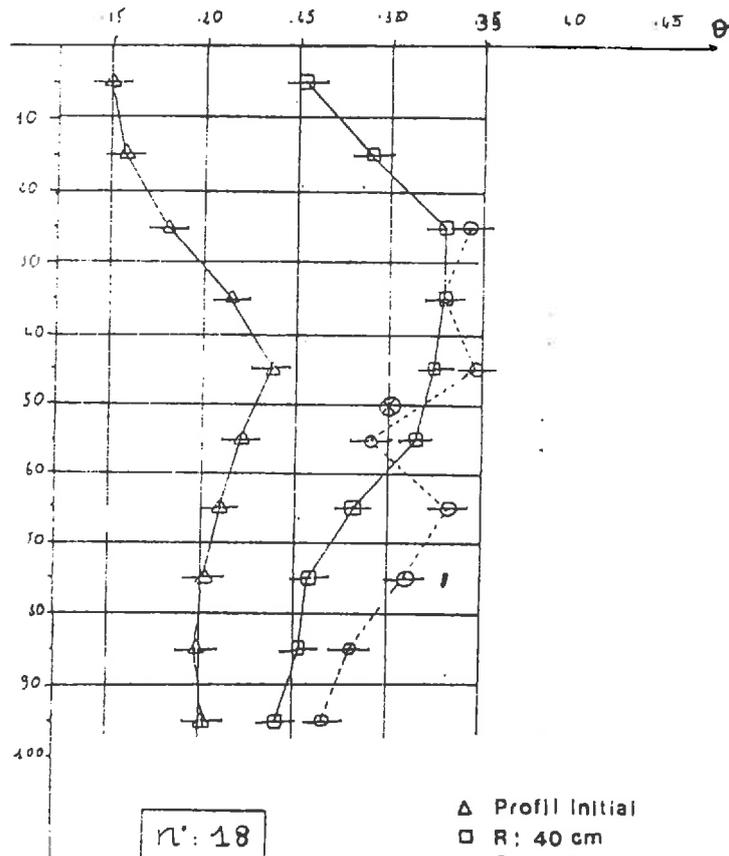
n°: 16

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- ⊗ R: 50cm



n°: 17

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- ⊗ R: 50cm



n°: 18

- △ Profil Initial
- R: 40 cm
- Sous Goutteur
- ⊗ R: 50cm

FIG. F7-

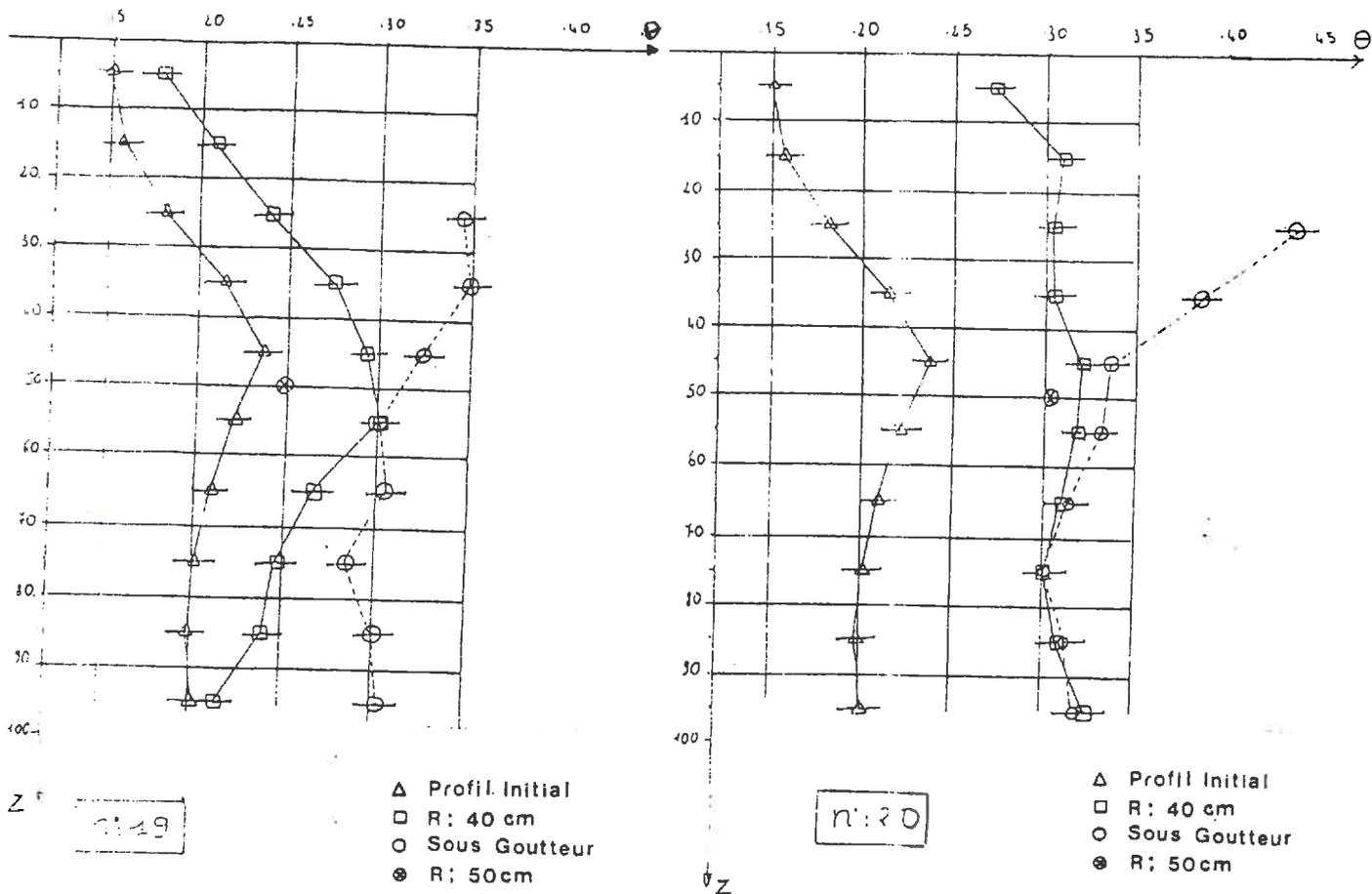


FIG. F8-

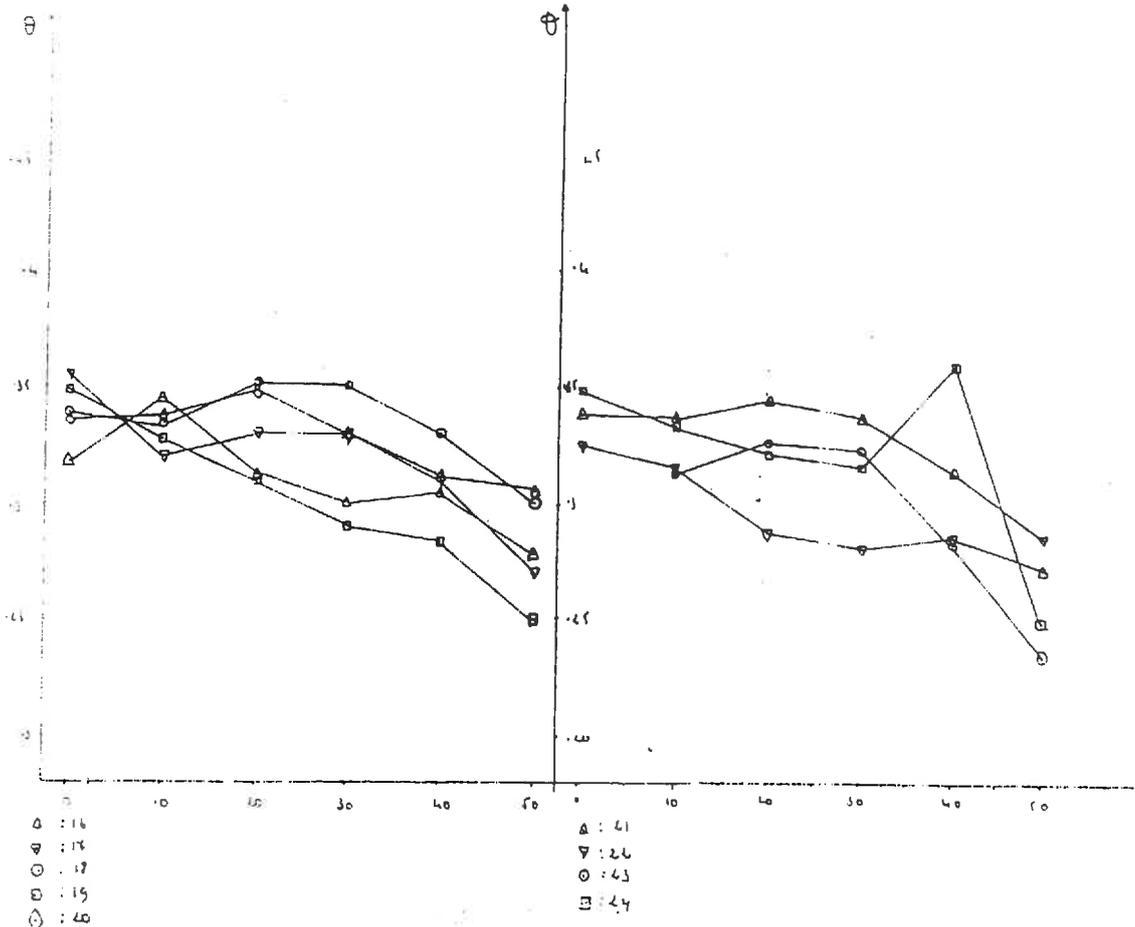


FIG. F9-

-Les profils radiaux établis à 40 cm font bien apparaître le début de fermeture à 40-50 cm de l'axe (cf. gradients) (fig. F4).

-Remarquons enfin que les profils décalés sont toujours plus réguliers et lisses que les profils sous goutteur. Ceci est certainement à relier à un fonctionnement plus diffusif et en tous cas, moins sensible aux hétérogénéités locales.

c) Bulbes 11 à 15 Fig. F5 - F6

Ces sites se caractérisent par un apport plus important que pour les précédents (cf. tableau 1).

On peut constater globalement un accroissement de la teneur en eau plus important que sur les précédents. Il est plus difficile de distinguer les plans de flux nuls qui semblent être toutefois toujours assez voisins de 50 cm. Les mêmes remarques en ce qui concerne les teneurs en eau à 50 et les profils latéraux peuvent être faites. Il convient de noter que les profils sous goutteur et latéraux sont très proches, sauf au site 14. Les gradients sur les profils radiaux, au voisinage de $R = 50$ cm sont moins importants ce qui semble indiquer que la fermeture a lieu plus loin [60 à 70].

d) Bulbes 16 à 20 Fig. F7-F8

Ils se caractérisent par des profils sous goutteur et extérieurs, tendant à se rapprocher du profil initial, au bas du domaine. La quantité d'eau reçue est inférieure à celle des précédentes. On peut remarquer aussi que les profils de teneur en eau sont "inférieurs" à ceux des bulbes déjà traités. A part le n° 20, ils présentent un comportement assez homogène. Les gradients relevés sur les profils radiaux suggèrent tous une fermeture assez rapide, latéralement, entre 50 et 60 cm (fig. F9).

e) Bulbes 21 à 24 Fig.F10-F9

Ce sont les sites qui ont reçu la dose la plus faible. On notera la grande variabilité de comportement (2 sites à profils ouverts et 2 à profils fermés). La faible dose apportée ne permet pas d'avoir un comportement aussi homogène que pour les groupes précédents et fait bien apparaître l'effet des hétérogénéités de structure (Bulbes 21 et 22 hétérogènes, et 23-24 plus proches de ce qu'on attend en milieu isotrope). Si on ne tient pas trop compte des profils au fond, on peut remarquer une extension latérale dans la couche de surface et dans les premiers centimètres de la deuxième couche assez peu variable d'un bulbe à l'autre.

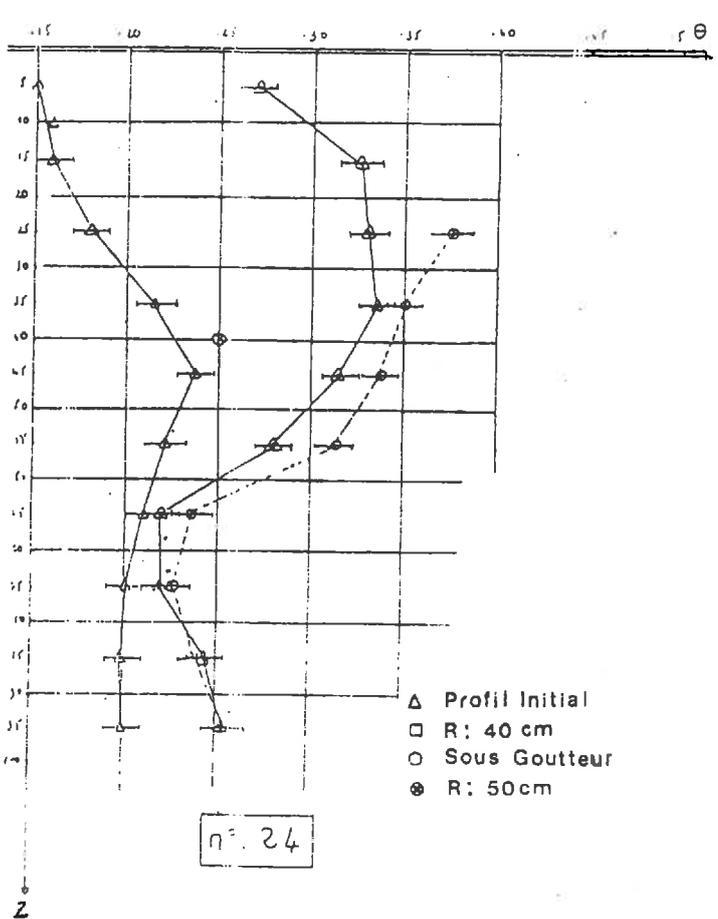
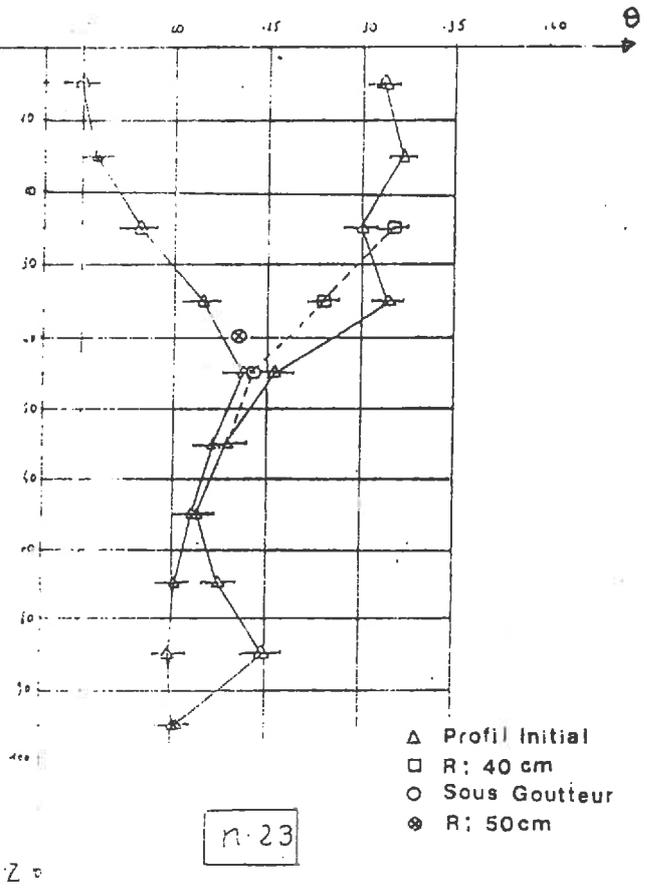
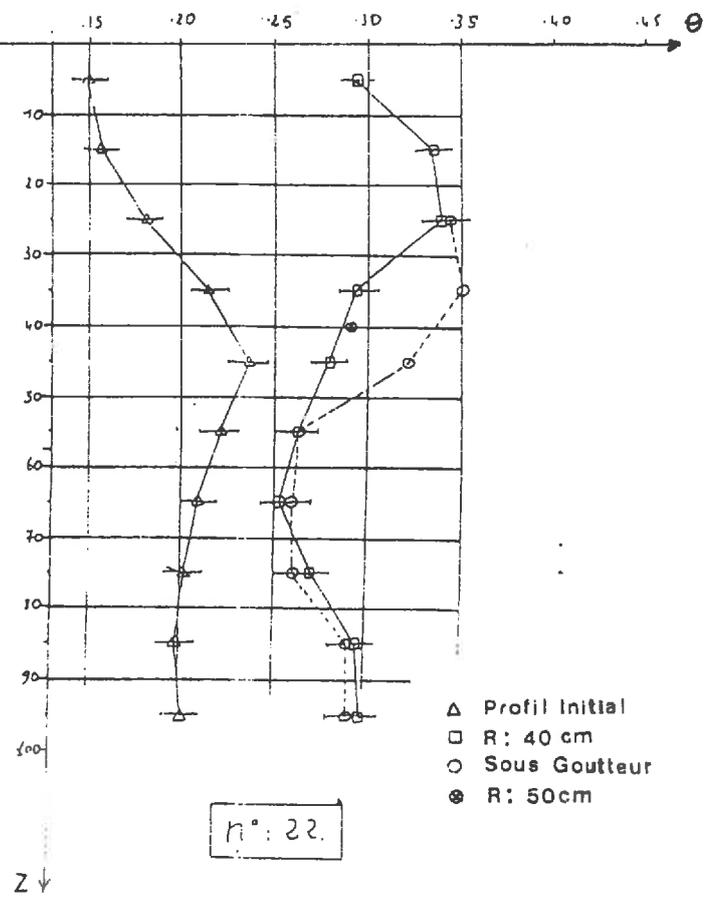
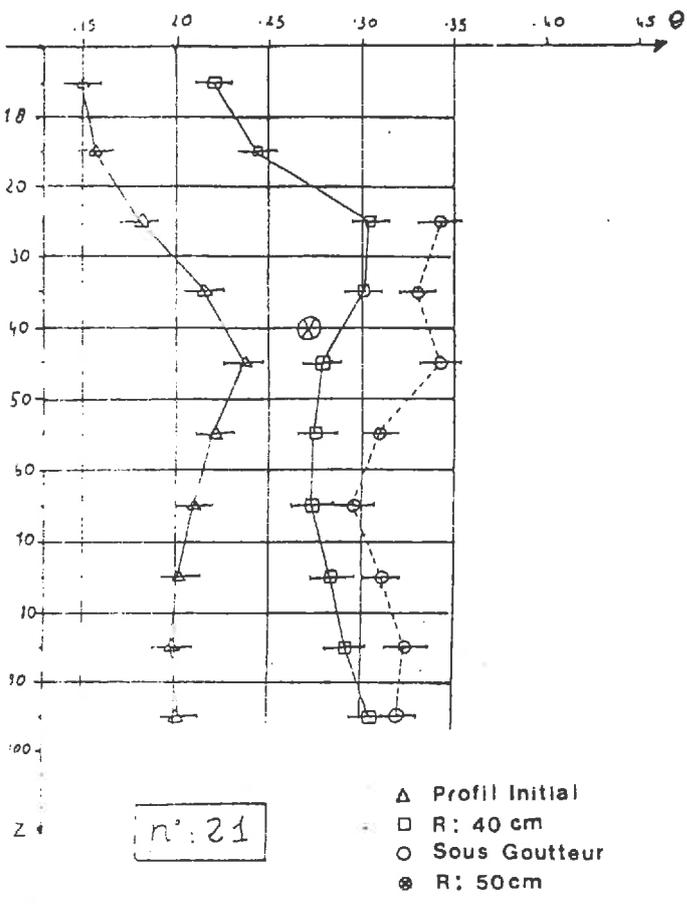


FIG. F10

II.4. Analyse des profils horizontaux de teneur en eau

On a vu dans l'analyse précédente que les profils horizontaux présentaient tous un gradient au voisinage de 50 cm qui indiquait une fermeture plus ou moins rapide. Les observations in situ montraient bien que l'extension latérale à ce niveau était variable, mais qu'elle se situait dans tous les cas dans un voisinage de 60 cm de distance à l'axe de symétrie.

On notera que pour les bulbes ayant reçu la dose la plus faible (21 à 24), l'extension est la plus petite. En la comparant à ce qui se passe sur les autres, on peut en déduire qu'il y a une croissance continue du moins sur la période étudiée, de l'extension latérale à 40 cm de profondeur. Si on effectue un classement des sites en fonction de la dose reçue :

Les plus arrosés : 11 à 15

Moyennement arrosés : 1 à 10 et 16 à 20

Moins arrosés : 20 à 24

on s'aperçoit que l'on peut établir les mêmes classes pour la distance radiale de fermeture.

Les irrégularités des profils horizontaux démontrent bien la présence d'hétérogénéités qu'elles soient de cheminement ou de densité.

II.5. Conclusions

Il ressort que la configuration bi-couche (au moins) du profil joue en faveur d'un comportement relativement homogène des sites, aux hétérogénéités locales près.

On peut quasiment distinguer deux systèmes. Le système sous-jacent (30-100 cm), fonctionne à partir de l'interface, comme un deuxième bulbe. La présence des hétérogénéités conduit à obtenir assez vite, pour celui-ci (2 ou 3 cycles d'irrigation), un fonctionnement avec une forte composante verticale. Si on admet de considérer l'interface comme une zone d'apport d'eau quasiment libre, on retrouve dans l'allure des profils hydriques les résultats d'un écoulement asymptotique à partir d'une flaque (cf. JEPSON, 1968).

La conductivité de la couche du dessous est celle qui conditionne le fonctionnement dans une telle configuration ($K_{s,2} < K_{s,1}$) et dans un système homogène. Ici, il faudrait plutôt prendre en compte le nombre de fissures présentes à l'interface et interceptées par l'écoulement. On sait qu'elles existent puisqu'on les a observées visuellement et qu'on a pu constater

leur présence, indirectement, lors des mesures de K_s . Toutefois, elles ne fonctionnent probablement pas pendant tout le temps de l'irrigation et les mesures de K_s montrent qu'elles ne sont pas très grosses. La couche travaillée agissant comme un tampon et limitant la présence d'eau à potentiel très faible, (en valeur absolue), à l'interface, réduit le temps de fonctionnement important des fissures. De plus, une fois l'apport d'eau stoppé, on entre dans une phase de redistribution où elles cessent très vite de jouer un rôle dans le transfert.

Sans dévoiler les conclusions tirées de l'utilisation du modèle, on peut dire que la conductivité mesurée pour la matrice de la deuxième couche ne permet pas un approfondissement des bulbes, conforme aux résultats expérimentaux.

La couche superficielle [0,30] peut être décomposée en deux systèmes. Cette dichotomie est induite par le fonctionnement du système et non présente au début de l'expérimentation. Elle n'affecte que la zone très humide ou ayant été saturée. On a montré dans l'analyse des mesures de surfaces humides qu'il devait exister une couche de surface, de conductivité inférieure à celle mesurée au terrain, la fourchette de réduction semblant être de l'ordre de 5 à 10.

L'ensemble de ces deux systèmes composant la première couche semble fonctionner de façon relativement isotrope avec là aussi peut être une légère tendance à une prédominance de la direction verticale. Il nous a semblé intéressant de schématiser le profil de la façon présentée figure .

III. COMPARAISON DES RESULTATS SIMULES ET EXPERIMENTAUX

III.1. Préliminaires à la modélisation

La première phase de la simulation consiste à choisir les paramètres qui vont permettre de ramener un système physique complexe à une réalité géométrique et mathématique plus simple. Il va être nécessaire, dans notre cas, de fixer l'emplacement de l'interface, c'est-à-dire remplacer une transition relativement continue dans le système physique par une discontinuité dans le modèle. Il faudra aussi donner une densité à chacune des couches. Ce sont donc trois paramètres qu'il va être nécessaire de fixer, tout en sachant très bien qu'ils seront entachés d'une incertitude, comme pour la profondeur de l'interface, ou carrément faux dans toute une partie du domaine, comme ce sera le cas pour la densité de la couche sous-jacente. L'erreur de densité, par exemple, ne devra pas être oubliée lors de la comparaison des résultats de terrain, calculés avec la densité mesurée, et les résultats de simulations calculés avec la densité moyenne affectée au profil.

De même, la position fluctuante de l'interface peut aisément introduire des biais dans les profils hydriques. Il conviendra donc d'être circonspect, tant en ce qui concerne les profils au voisinage de l'interface qu'en ce qui concerne les teneurs en eau dans les parties basses du profil, où la différence avec la densité retenue est la plus grande. On pourra d'ailleurs aisément palier cet inconvénient en reprenant les "vraies" densités. On a donc choisi de placer l'interface à 30 cm de profondeur. Les densités ont été choisies à 1,33 pour la couche de surface et 1,54 pour la couche du dessous. Les valeurs mesurées à la sonde gamma à diffusion sont assez supérieures à cette moyenne dans le bas du profil (1,60). Toutefois, dans toute cette partie du profil, une erreur de 0,05 sur la densité n'induit pas une erreur énorme sur les humidités (de l'ordre de 1 à 2 % volumique, ce qui reste acceptable).

III.2. Caractéristiques hydrodynamiques

L'acquisition des courbes $K(\theta)$ et $\psi(\theta)$ est en général une tâche longue et difficile. Si la courbe $\psi(\theta)$ peut être assez facilement obtenue au laboratoire, la courbe $K(\theta)$ requiert elle beaucoup plus de temps et est, en général, limitée à la zone de mesure du tensiomètre, pour une courbe sur échantillon non remanié. Il est possible d'utiliser, au-delà, des micro-psychromètres, mais les temps nécessaires pour atteindre les faibles teneurs en eau sont longs. Pour ces raisons et bien d'autres, on a fait le choix sûrement très discutable de ne pas mesurer la courbe $K(\theta)$, mais d'essayer de l'obtenir par un modèle.

Notre choix s'est porté sur le modèle de MUALEM qui ne nécessite que la courbe $\psi(H_p)$ et la valeur de K_{sat} .

La relation potentiel-teneur en eau pondérale ($\psi(H_p)$) est mesurée au laboratoire. Les mesures faites par une autre équipe travaillant sur la même parcelle montrent le bon accord entre la courbe de laboratoire faite sur agrégats et une courbe déduite de l'évolution des profils tensiométriques et neutroniques.

On a donc utilisé deux courbes $\psi(H_p)$ (une pour chaque horizon). Le modèle de MUALEM permet de leur associer deux courbes $K(\theta)$ ou $K(\psi)$. Nous ne nous étendrons pas sur les caractéristiques du modèle. Disons seulement que les points de mesure sont interpolés par fonction spline et qu'on en déduit un tableau ψ, θ, K, C , pour la gamme de teneur en eau $[\theta_r, \theta_s]$ utilisée dans le modèle. Le pas de teneur en eau étant de l'ordre de 0,0025 (200 points), l'interpolation est faite linéairement dans les simulations, la recherche de l'encadrement se faisant sur les potentiels.

HORIZON 1	
ψ : (mètres)	H_p
-12196.00	.017
-6577.00	.021
-1485.00	.034
-780.00	.044
-335.00	.070
-165.20	.097
-112.20	.120
-81.60	.130
-37.70	.141
-18.35	.166
-10.20	.176
-5.3	.198
-2.09	.217
-1.02	.239
- .61	.250
- .31	.259
- .01	.398 (hor. 1) .319 (hor. 2)

Tableau 7 : Valeurs expérimentales
de la relation $\psi - H_p$

L'avantage d'une telle approche est qu'il n'y a pas d'ajustement à faire sur une quelconque forme analytique. On n'introduit donc pas, a priori, une erreur sur des mesures de laboratoire fiables. De plus, il est peu probable que n'importe quel sol soit justiciable d'une des nombreuses formules en vigueur. D'ailleurs, les essais d'ajustement de $\psi(\theta)$ et/ou $K(\theta)$ faits sur ce jeu de données, avec différentes formules utilisées habituellement, se sont soldés par des échecs. Les tentatives d'ajustement par morceaux n'ont pas été plus fructueuses. L'interpolation par fonctions splines nous semble, elle, garantir un certain respect de la réalité et des mesures, quand celles-ci sont assez nombreuses.

III.3.1. Réflexions sur le modèle de MUALEM, appliqué à notre cas

On a porté sur le tableau 7 les données $\psi(H_p)$ ayant servi à l'établissement de la courbe $K(\theta)$ par MUALEM. Sur les figures 3-6 à 3-8, on trouvera la courbe $\psi(\theta)$ à différentes échelles.

On remarquera la décroissance brutale de la teneur en eau avec le potentiel au voisinage de la saturation. Par exemple :

$$\begin{array}{l} \theta : .529 \longrightarrow .375 \\ \psi : 0. \text{ cm} \longrightarrow 15 \text{ cm} \\ \kappa : K_s \longrightarrow K_s * 10^{-4} \end{array}$$

MUALEM associe donc logiquement à un drainage brutal sur les 15 premiers centimètres de potentiel, une variation tout aussi importante de la conductivité.

On peut déjà, au vu de la courbe $\psi(\theta)$, penser que l'écoulement engendré par de l'eau à potentiel nul en surface **n'obéira pas complètement à la loi de DARCY**, et en particulier ne se fera pas de façon totalement capillaire dans notre milieu. En effet, plaçons nous dans les hypothèses où on a un écoulement DARCIEN. On a d'une part une conductivité très faible jusqu'à ce qu'on atteigne la saturation ($\psi = 15 \text{ cm}$, $K = 10^{-9} \text{ cm.s}^{-1}$) et parallèlement, une capacité capillaire qui augmente très vite dans cette partie de la courbe jusqu'à $\psi \simeq 1,75 \text{ mm}$, ie quasiment zéro. Par conséquent, la diffusivité est extrêmement faible tant qu'on n'est pas très proche de la saturation. Considérons les petits éléments de volumes de sol implicitement induits par la discrétisation. Si on se place dans un processus d'humectation, on s'aperçoit donc qu'un élément de volume ne cède de l'eau à son voisin que si il est quasiment saturé et que de plus il possède une capacité capillaire très grande au voisinage de la saturation. On peut donc facilement imaginer que de telles caractéristiques

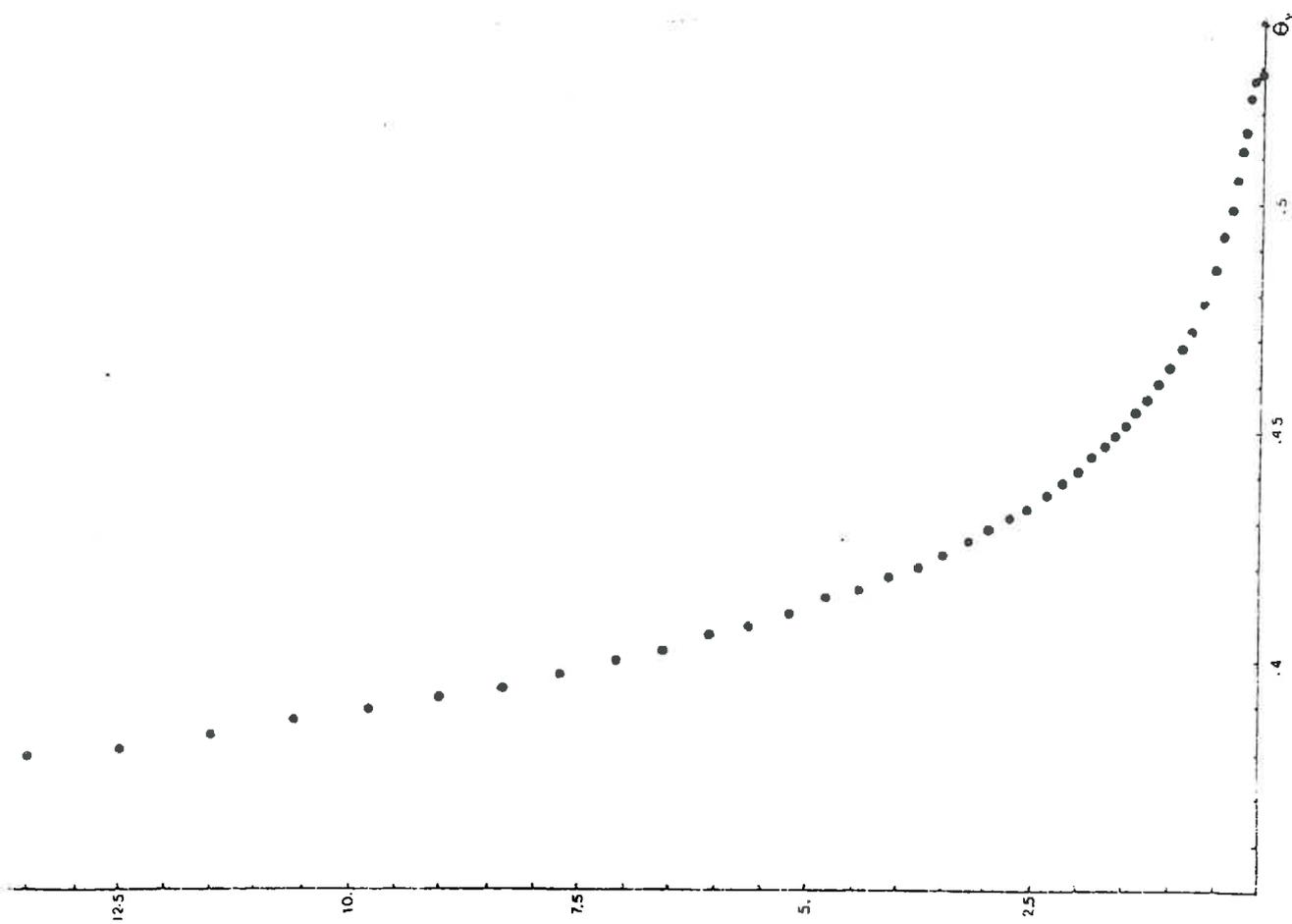


FIG. 3-6 . Courbe Psi-Thêta

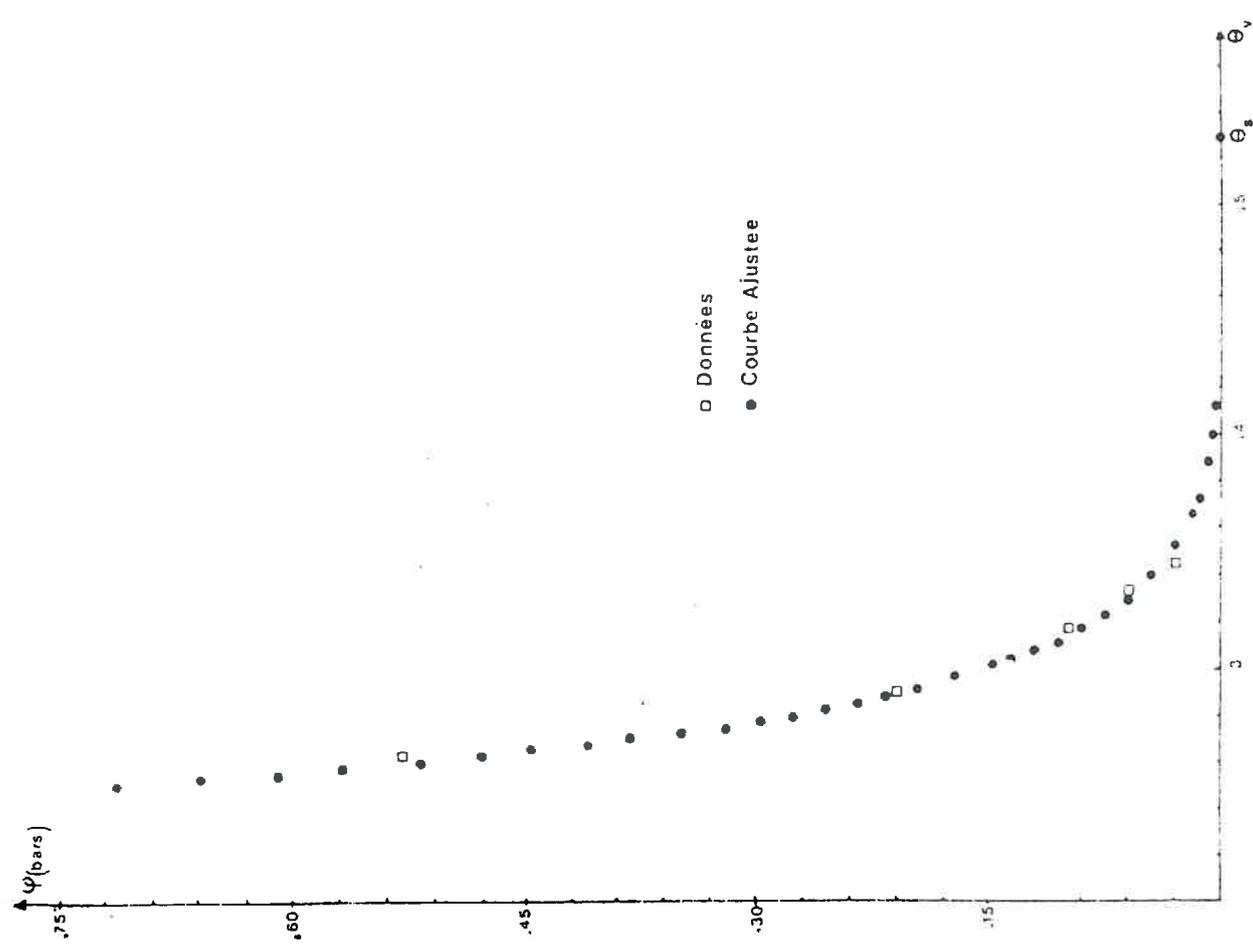


FIG. 3-7. Courbe Psi-Thêta

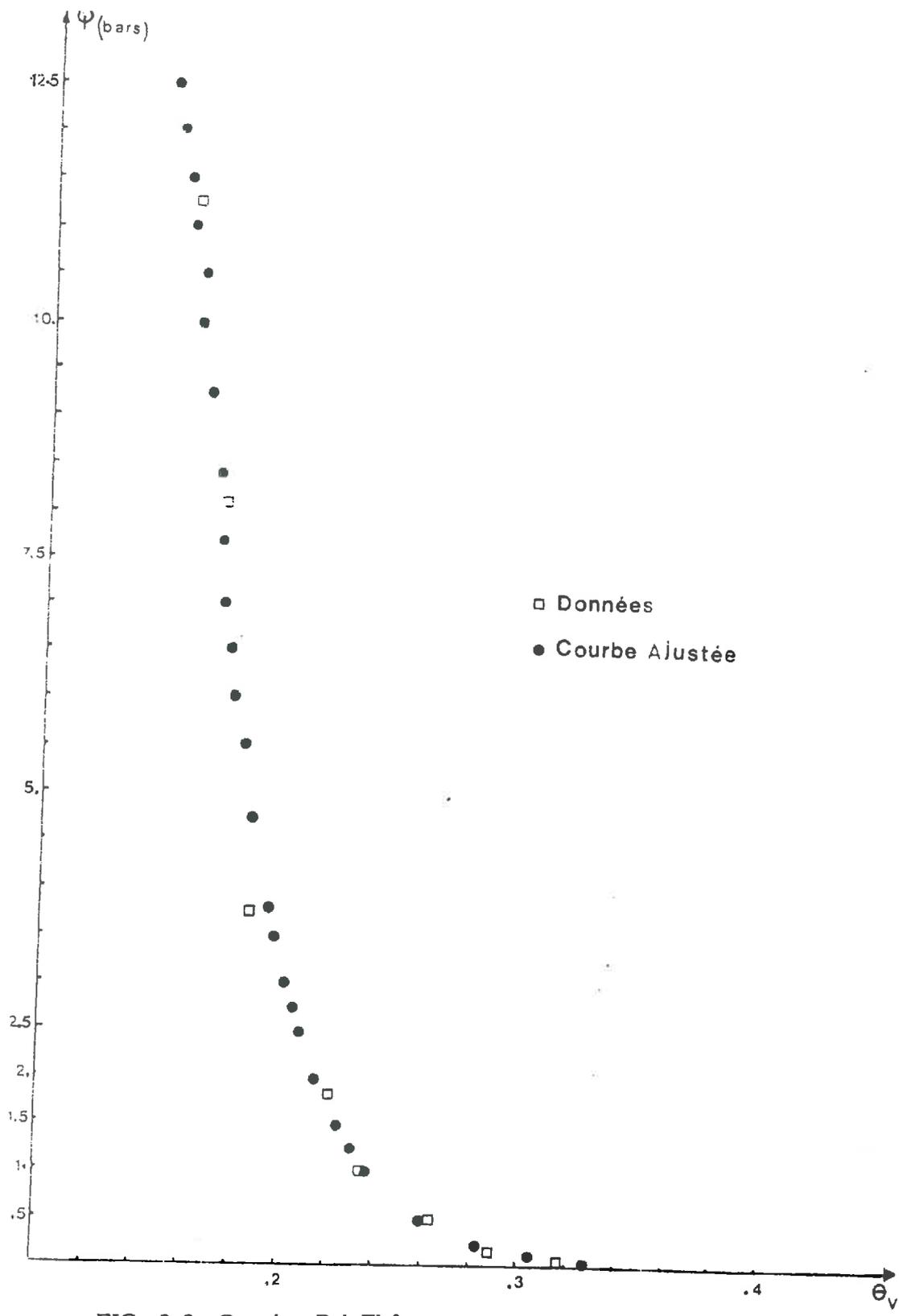


FIG. 3-8. Courbe Psi-Thêta

hydrodynamiques conduisent à un écoulement de type piston. On a un front d'humectation extrêmement raide et n'ayant guère la possibilité de s'adoucir, ce qui est tout à fait en accord avec une fonction de diffusivité, de type Dirac.

Les premières simulations effectuées sous flux ou en charge ont effectivement confirmé cette hypothèse et soulevé de nombreux problèmes numériques pour nos algorithmes. En effet, la moindre petite oscillation par exemple 1/10 cm de potentiel, entraîne au voisinage de la saturation, des variations importantes de teneur en eau. On pouvait donc aboutir à des dysfonctionnements des algorithmes d'extension de flaque uniquement dûs à ces oscillations. Les caractéristiques, telles quelles, conféraient à l'équation un caractère nettement hyperbolique et on était obligé de choisir des pas de temps et d'espace extrêmement petits pour pouvoir éliminer les problèmes mentionnés. Le calcul devenait prohibitif.

Outre ces problèmes numériques, un tel fonctionnement semblait absurde dans la réalité. Il est bien évident que les gros pores correspondant à la fraction de teneur en eau $[\theta_{res}, \theta_{sat}]$ (θ_{res} : Ressuyage rapide) ne débitent pas seulement quand ils sont pleins. On peut donc, à notre avis, avoir une conductivité relativement élevée, alors que le potentiel matriciel n'est pas nul.

En fait, ce type de fonctionnement est très dépendant des conditions aux limites, ie, en fait du type d'écoulement qu'elles engendrent.

Le problème qui se posait alors était : Comment essayer de rendre compte de cet écoulement au moyen de la loi de DARCY, alors que justement on n'est plus dans ses hypothèses ? La réponse ne peut être que très imparfaite d'un point de vue théorique, mais peut être plus séduisante quant aux résultats.

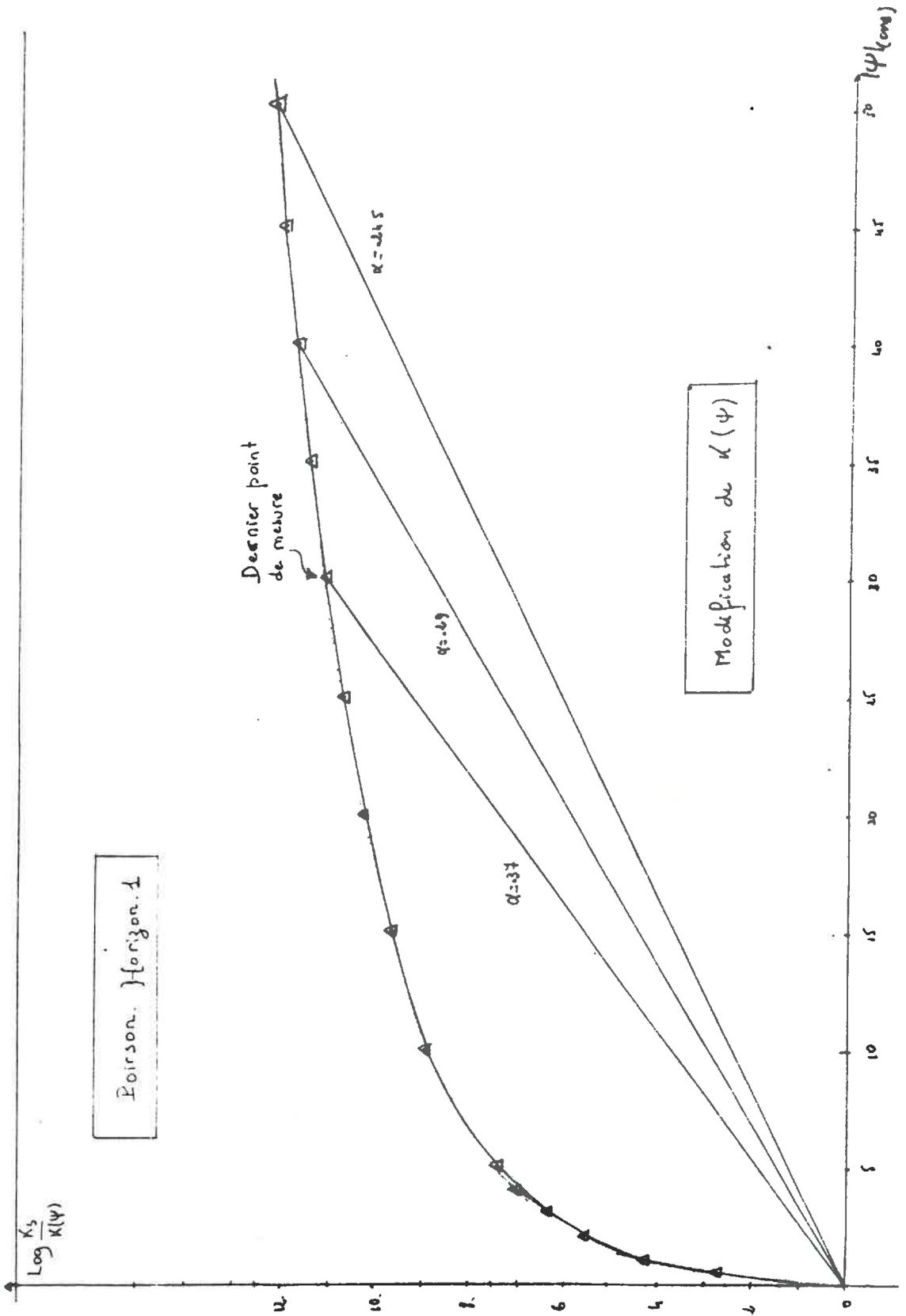
L'objectif numérique était lui clairement posé. Modifier la courbe $K(\theta)$ de façon à avoir un écoulement possible à des potentiels un peu plus éloignés de zéro, ce qui permettrait de "simuler" un écoulement assez rapide, alors que toute la porosité ne serait pas pleine. Le second objectif à réaliser était de laisser la courbe inchangée dans toute la zone de potentiel correspondant à la redistribution où la loi de DARCY était probablement applicable.

3.2.2. Modifications apportées aux résultats du Modèle de MUALEM

Il n'était pas dans nos objectifs de modifier le modèle de MUALEM dans la zone de potentiel voisine de zéro. Cela eut été un projet bien ambitieux. Nous avons préféré essayer de modifier l'allure de la courbe. Il se posait alors deux questions :

- a) Sur quel intervalle de potentiel ?
- b) De quelle façon ?

FIG. 3-9 . Modification de la courbe K-Thêta du modèle de MUALEM



Le dernier point mesuré pour la courbe $\psi(\theta)$ étant à 30 cm (cf. tableau 7), on a choisi de ne modifier la courbe que dans la zone $[0, \approx 30 \text{ cm}]$. De fait, on ne dispose d'aucune information dans cette zone. On a donc testé par la suite différents "potentiels de coupure" au voisinage de 30 cm.

Pour apprécier l'allure de la courbe $K(\psi)$, on a porté sur la figure 3-9 la relation $\text{Log}(\kappa_s/\kappa(\psi))$ en fonction de ψ . On peut noter la variation très brutale dans les premiers centimètres, puis une zone à variation plus linéaire. L'idée est de modifier la courbe $K(\psi)$ sur la portion à forte variation. La portion quasi linéaire traduisant un comportement exponentiel de $K(\psi)$, nous avons décidé de remplacer la variation rapide par une variation linéaire, pour récupérer une courbe $K(\psi)$ exponentielle. Ce choix est bien sûr tout à fait arbitraire. On a donc choisi trois potentiels de coupure (H_{cut}) auxquels on a raccordement de la courbe initiale et de la courbe modifiée sur $\psi \in [0, H_{\text{cut}}]$

En notant ψ_c le potentiel de coupure, on remplace la courbe originelle par la droite $\text{Log}(\kappa_s/\kappa(\psi)) = \alpha |\psi|$ sur $[0, |\psi_c|]$

L'équation de la courbe $K(\psi)$ sur $[0, |\psi_c|]$ est alors :

$$\kappa(\psi) = \kappa_s \exp(-\alpha |\psi|) \text{ où } \alpha = \text{Log}(\kappa_s/\kappa_c) / |\psi_c|$$

Remarquons que seule la continuité est assurée au raccordement, mais cela ne semble pas poser de problèmes.

Pour choisir ψ_c , on a effectué plusieurs tests en irrigation localisée avec un potentiel initial à 500 millibar. Un ψ_c de 20 cm s'est avéré insuffisant. On présente figure 3-10, la comparaison des champs d'humidité obtenus avec $\psi_c = 30 \text{ cm}$ et $\psi_c = 50 \text{ cm}$. On peut constater que la seule différence notable se trouve dans la zone correspondant à des potentiels compris entre $[0, 50] \text{ cm}$. Dès qu'on rejoint la courbe initiale, les différences ne sont plus très sensibles. On a donc décidé de s'en tenir à un potentiel de 50 cm.

III.3. Caractéristiques des premières simulations

Les bulbes ont été répartis en groupes, en fonction de l'irrigation effectuée, comme il a été fait lors de la discussion des résultats expérimentaux. A chaque site est associée une conductivité à saturation mesurée au terrain en fonction de sa situation sur la rampe. La conductivité de la couche sous-jacente est la même pour tous (30 cm/jour) (voir tableau (1)). La courbe $\psi(\theta)$ est la même pour tous. D'un point de vue numérique, on a utilisé le schéma totalement implicite avec des itérations de point fixe, le critère d'arrêt étant à 1 cm. La résolution des systèmes linéaires est faite soit par l'algorithme de

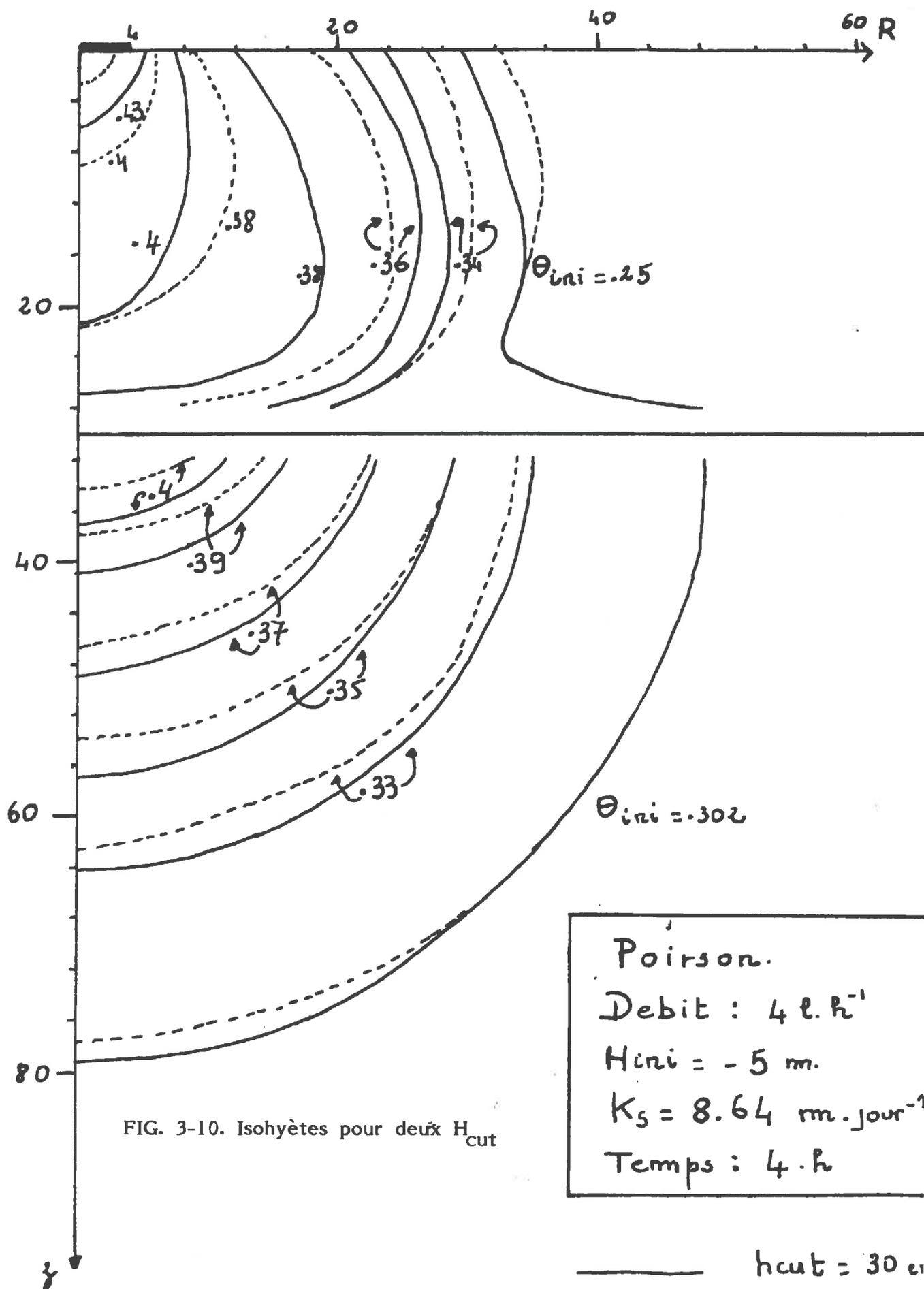


FIG. 3-10. Isohyètes pour deux H_{cut}

Poirson.
 Debit : 4 l.h⁻¹
 H_{ini} = - 5 m.
 K_s = 8.64 m.jour⁻¹
 Temps : 4.h

———— h_{cut} = 30 cm
 - - - - - h_{cut} = 50 cm

Profils 50 cms Goutteur

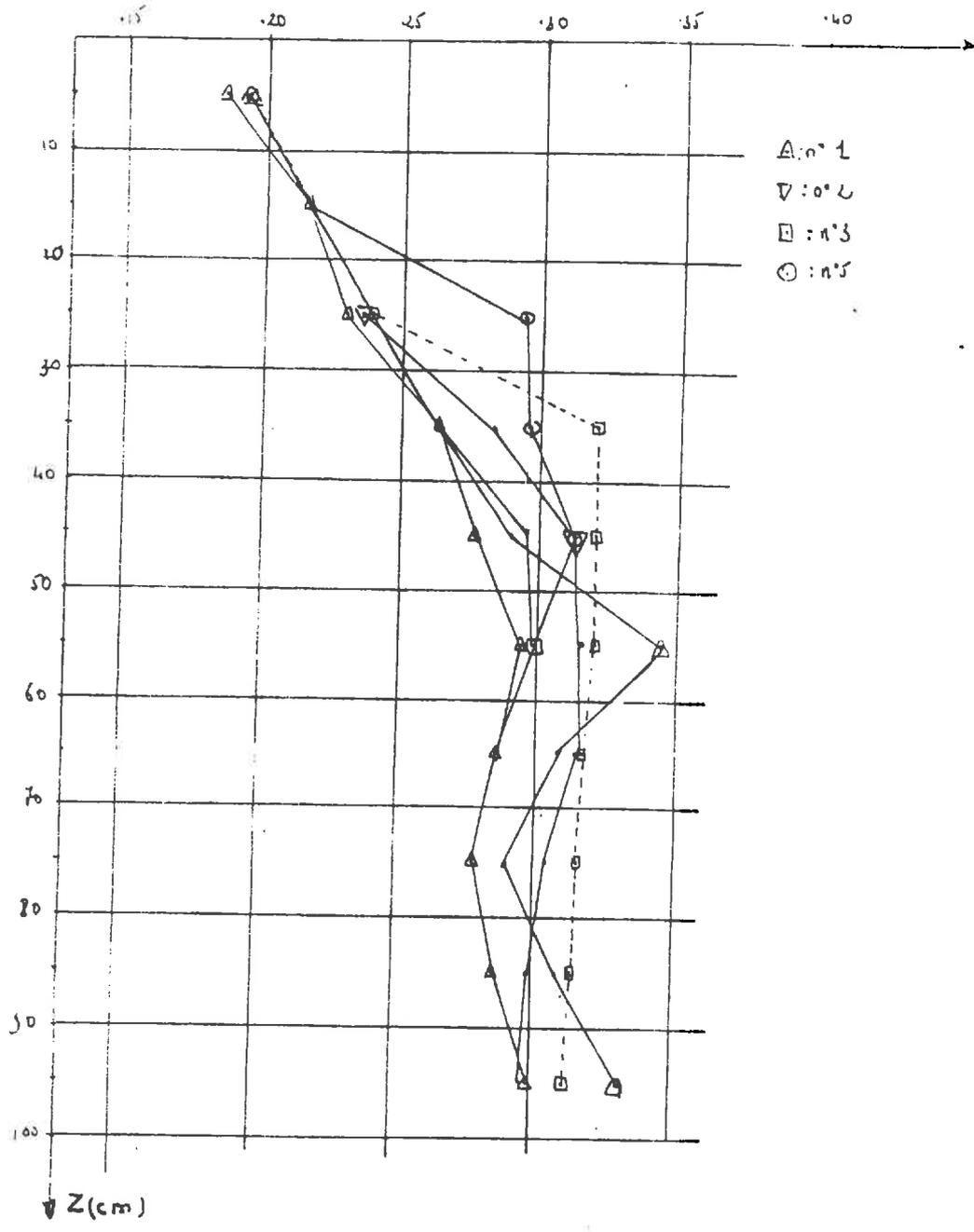
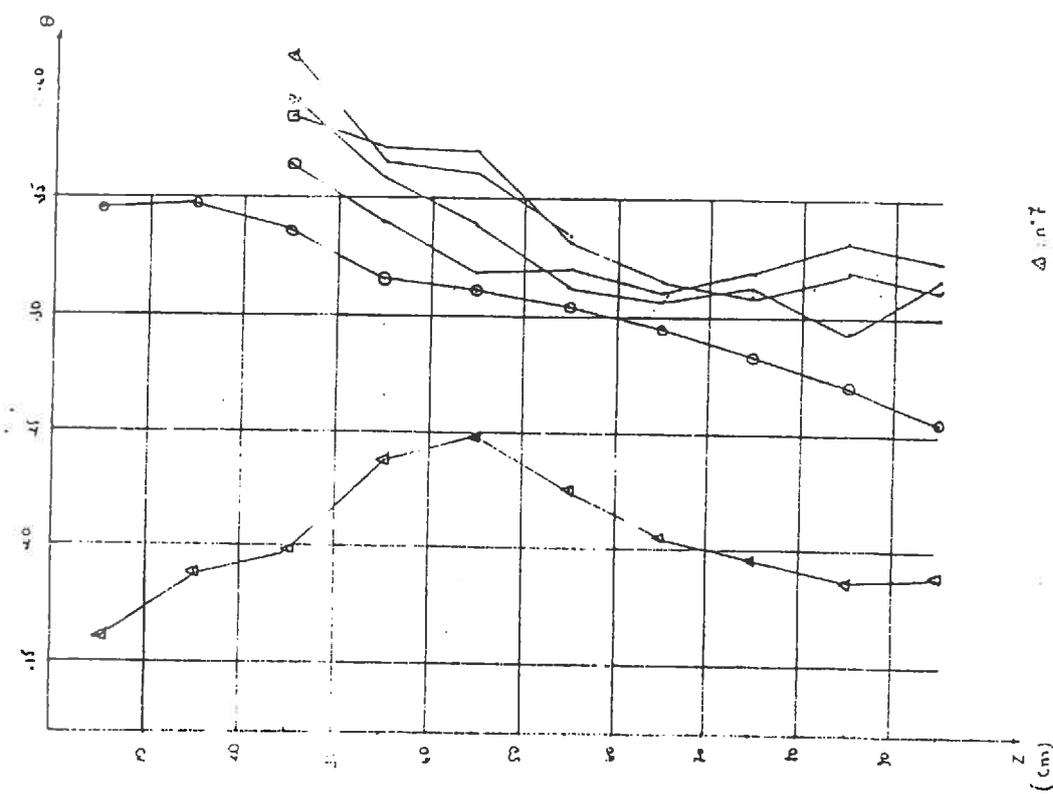


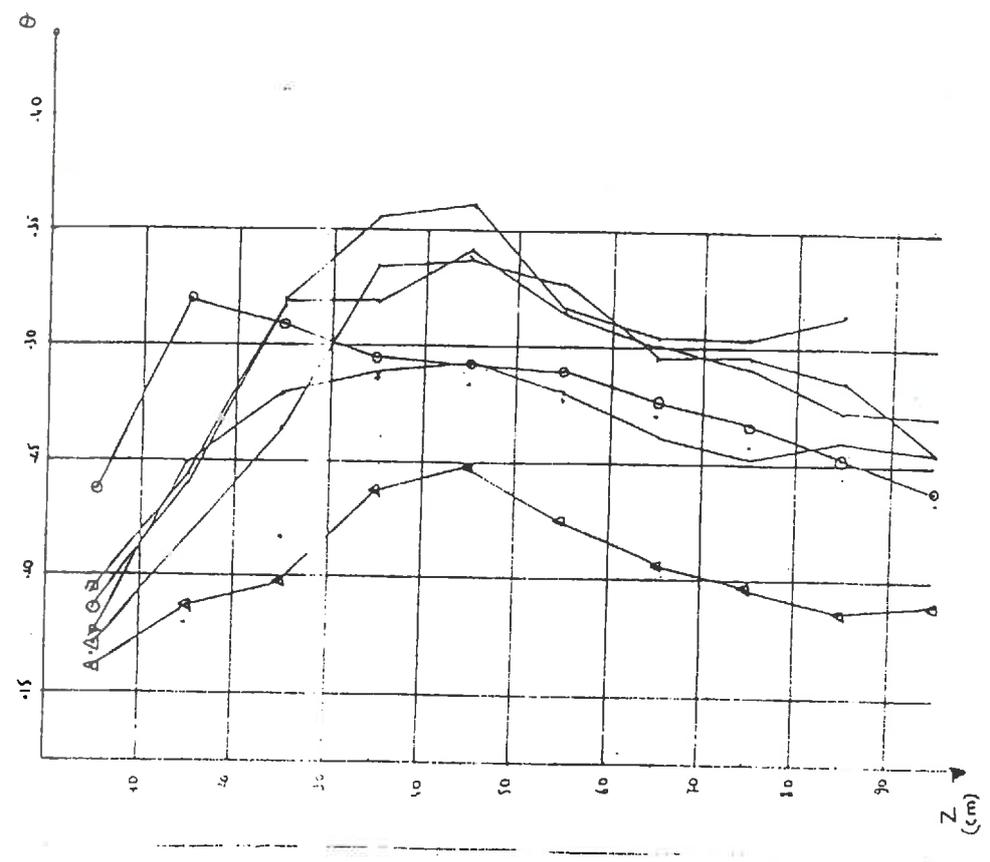
FIG. G1.

Profils sous Goutteur



○ Profil Final
 △ Profil Initial N°:2
 K_S N°:2
 Bulbes 7 a 10
 △ n°:7
 □ n°:9
 ⊙ n°:5
 ▽ n°:40

Profils à 40 cms du Goutteur



○ Profil Final
 △ Profil Initial N°:2
 K_S N°:2
 Bulbes 7 a 10
 △ n°:7
 ⊙ n°:9
 ▽ n°:9
 □ n°:40

Gauss, soit par l'algorithme SOR le test d'arrêt étant à 10^{-4} , le programme choisissant en fonction de la taille du système. La grille en différences finies est de dimensions variables. Le critère d'agrandissement étant une variation maximale autorisée, pas de temps par pas de temps, sur des noeuds situés à trois intervalles à l'intérieur du domaine. La grille maximale autorisée est définie par les abscisses : (1, 3.3, 5.8, 8.5, 11.5, 14.5, 17.5,, 68.5, 71.5, 74.5) et les ordonnées : (0, 2, 4, 6, 8, 11, 14, 17, 21, 24, 28, 32, 37, 42, 47, 53, 58, 63, 68, 73, 78, 83, 88, 94, 100, 106, 112, 118, 124, 130).

La grille de départ comporte 10 noeuds dans chaque direction.

On a simulé, pour chaque groupe, le cycle d'irrigation défini au tableau 1.

L'évaporation a été négligée dans ce cas.

III.4. Comparaison avec les profils expérimentaux

a) Bulbes 1,2,3,4,5 cf. figure G1

On peut constater que les profils simulés à 50 cm du goutteur sont légèrement plus humides que ceux mesurés qui se trouvaient être presque égaux au profil initial. En fait, si on regarde les profils latéraux, à presque tous les niveaux, on s'aperçoit qu'ils traduisent un élargissement du bulbe, au-delà de 50 cm de rayon. Cela ne peut s'expliquer que par une conductivité insuffisante de la couche du dessous exagérant de ce fait l'étalement à l'interface. En ce qui concerne la couche de surface, on a un R_{sat} de l'ordre de 6 cm et un R_{Tot} de 38 cm environ. Les rayons saturés mesurés au terrain s'évaluent entre 5 cm et 20 cm. Les rayons des zones humides entre 15 et 30 cm. On a donc dans notre cas une diffusion s'effectuant à partir de la zone saturée sur une distance de 30 cm environ, alors qu'elle n'est que de 10 cm au terrain.

b) Bulbes 7,8,9,10 cf. figure G2-~~G7~~

On pourra noter un relativement bon accord entre les profils simulés et mesurés que ce soit sous le goutteur ou à 40 cm de celui-ci. Ces sites se caractérisent par une durée d'apport plus longue que pour les autres groupes. Ceci permet d'avoir avant le démarrage de la dernière irrigation, une situation physique respectant assez bien les hypothèses à la base du modèle poreux. De fait, on obtient une plus grande homogénéité entre sites et un meilleur accord avec la modélisation. Il faut remarquer que les caractéristiques hydrodynamiques

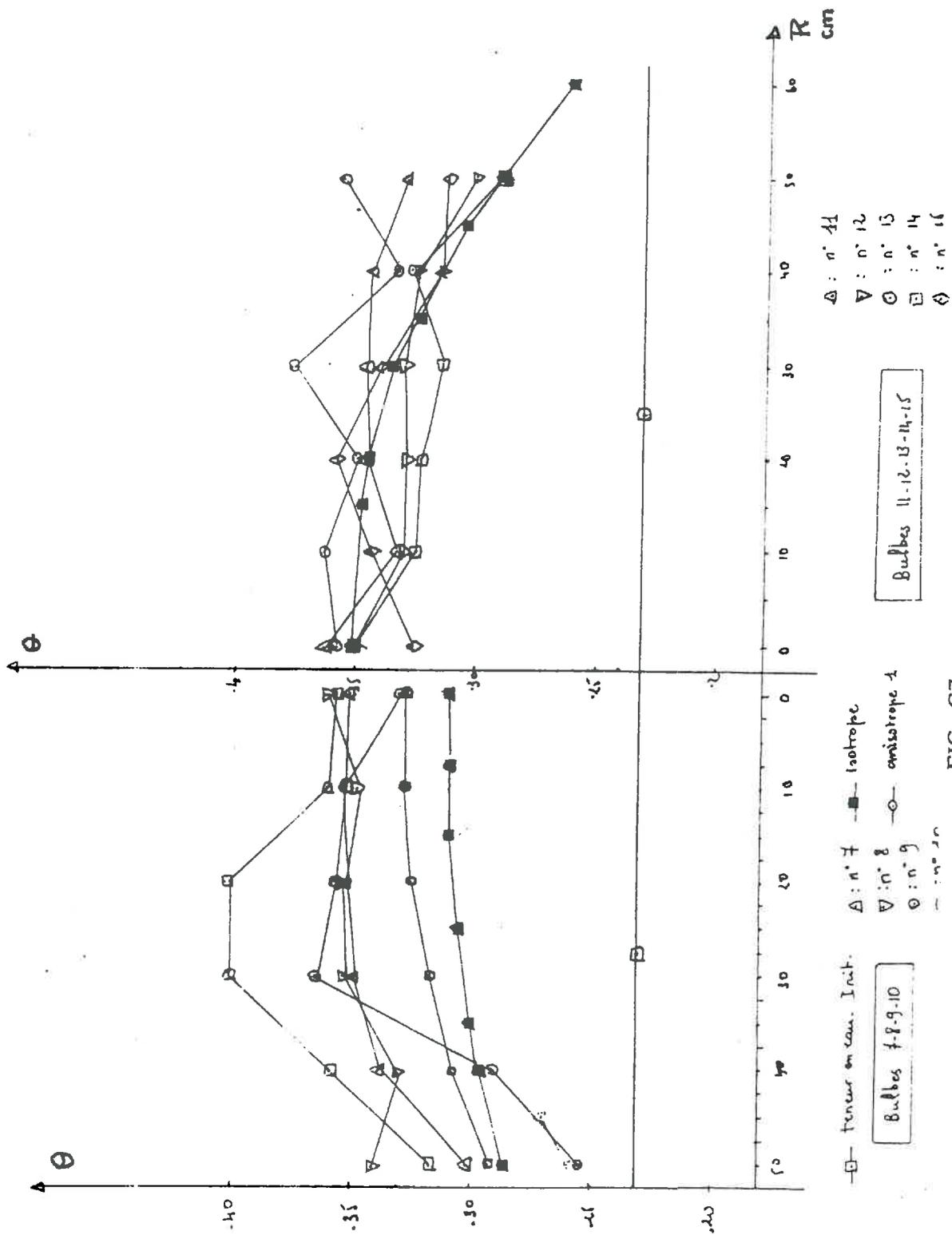
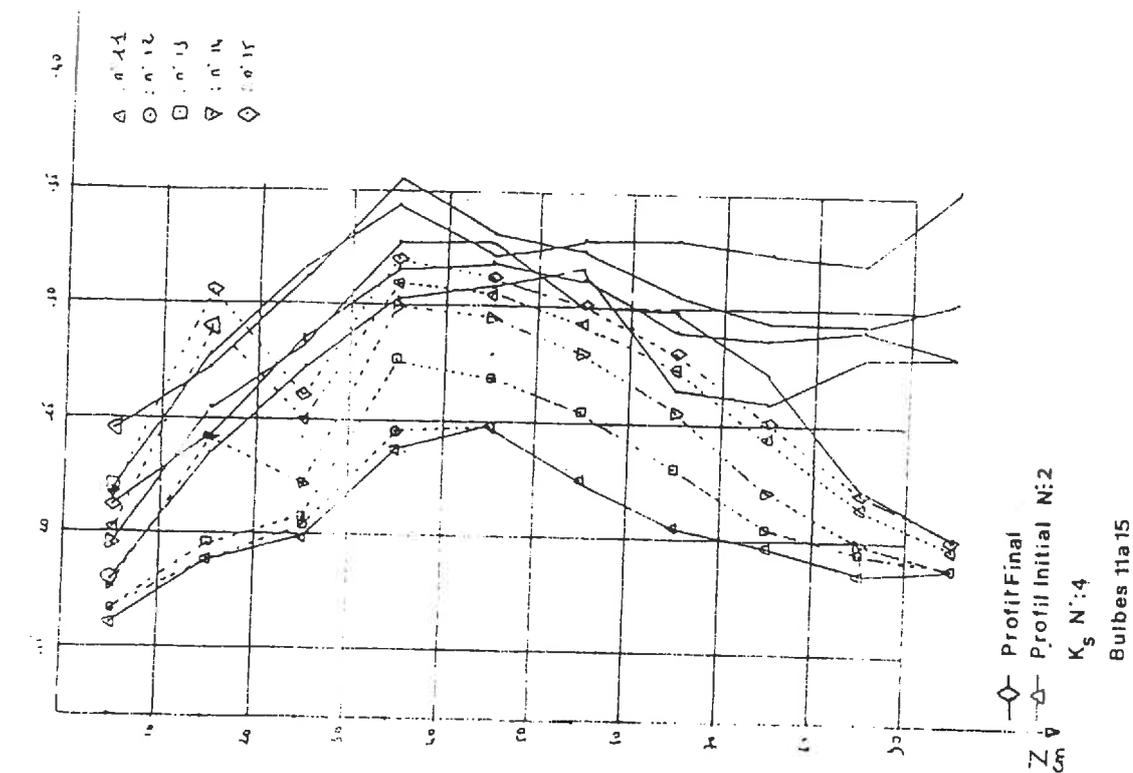


FIG. G7

Profils à 40 cms du Goutteur



Profils aux Goutteur

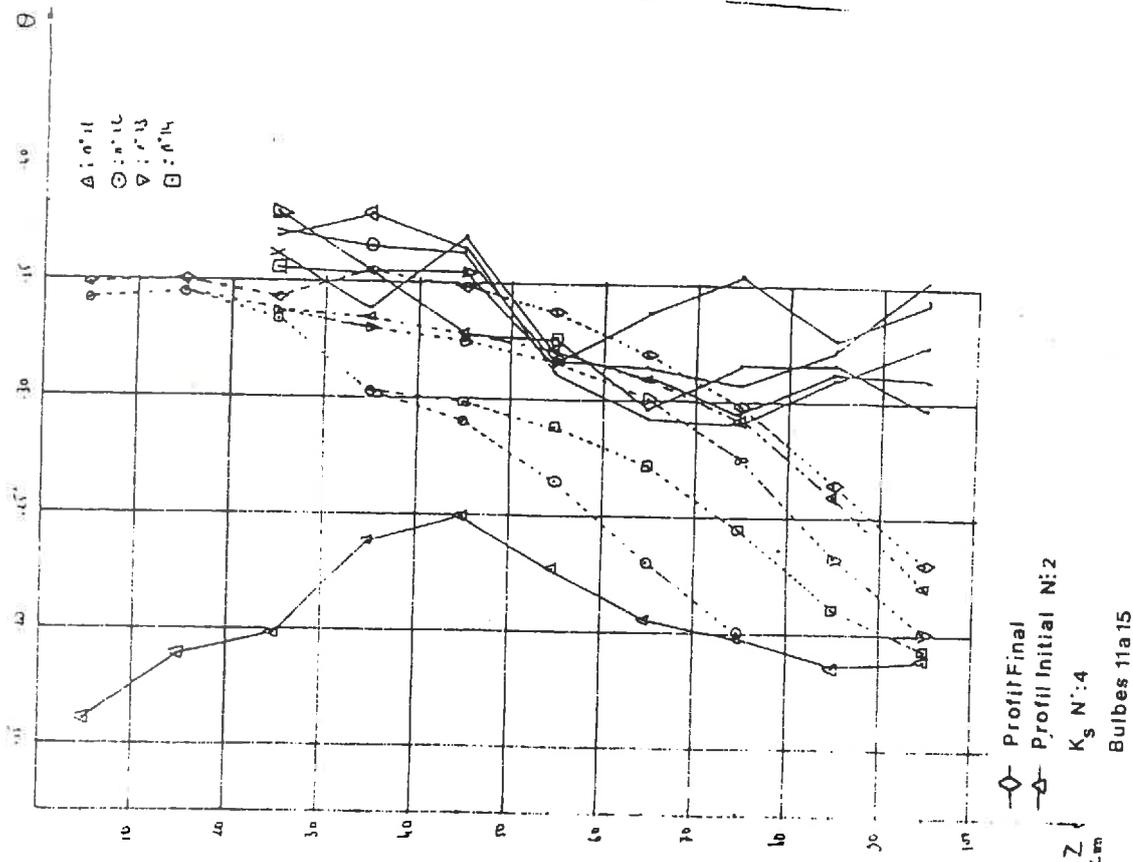


FIG. G3

ques injectées dans le modèle et notamment K_{sat} sont mesurées après l'irrigation et donc rendent compte de l'histoire hydrique (récente). Elles sont en tous cas bien plus proches de la situation au moment du dernier apport que si elles avaient été mesurées au début.

Il subsiste néanmoins des biais qui peuvent être dûs au fait que les bulbes ont fonctionné en conditions anisotrope un certain nombre de fois et aussi que les hypothèses ne sont jamais totalement vérifiées.

Il nous semble donc illusoire de vouloir prédire dans ce type de matériaux la phase transitoire consistant en l'établissement du bulbe, surtout quand on part d'une situation très sèche comme c'était notre cas. Par contre, il semble qu'on puisse probablement attendre des résultats assez bons, une fois cette phase passée.

c) Bulbes 11,12,13,14,15 cf. figure G3-~~6~~7

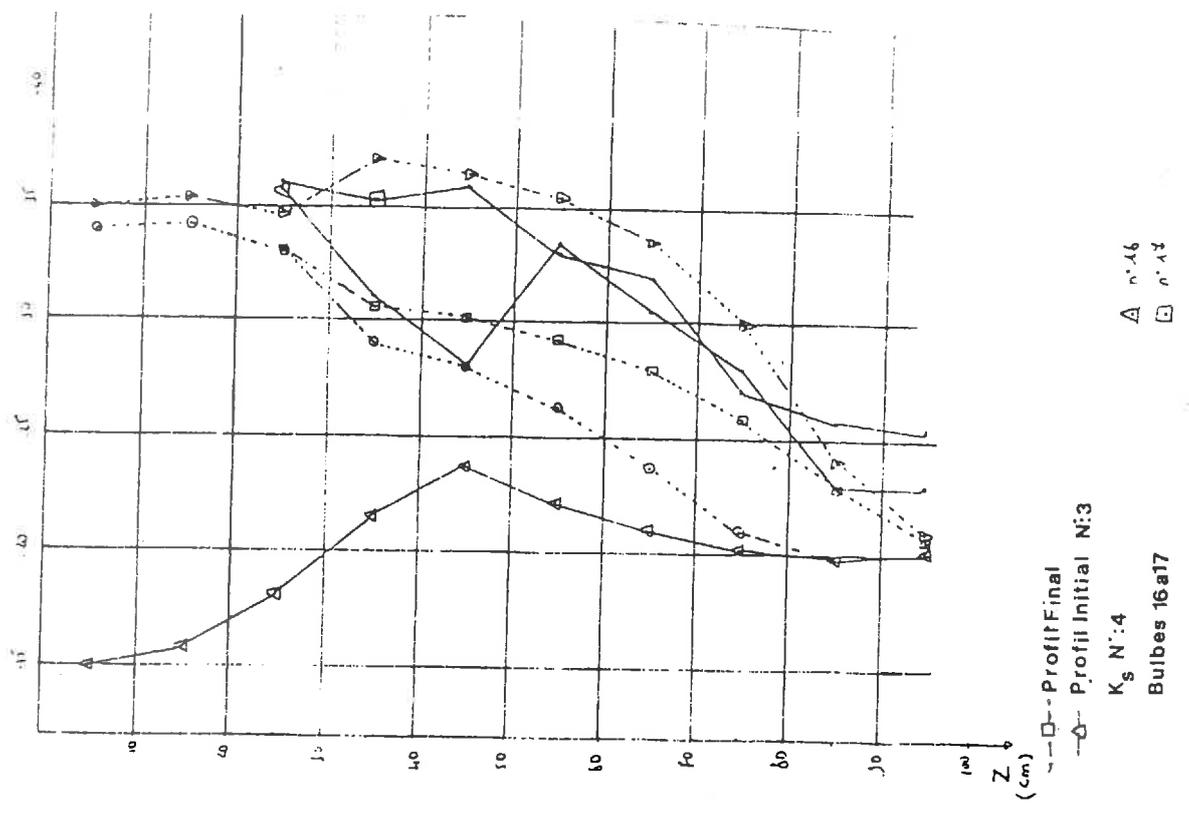
L'analyse des profils hydriques sous goutteur semble indiquer une sous-estimation de la conductivité de la deuxième couche. Les teneurs en eau simulées, sur les 2/3 supérieurs du profil, sont assez bonnes. Pour les profils à 40 cm, on peut observer un très bon rendu jusqu'à 60-80 cm (cela dépend des sites) et une très bonne adéquation par exemple au site 14. On sous-estime toutefois légèrement les humidités, même si la forme du profil est bien rendue. Les teneurs en eau à 25 cm, qui font apparaître un creux dans les profils, sont dues à la forme arrondie des profils dans la couche du dessus, avant l'étalement à l'interface. Cela traduit un étalement insuffisant du bulbe dans la couche de surface, ce qui est confirmé par les profils légèrement moins humides que ceux mesurés. Le bas du profil traduit certainement un manque de conductivité de la couche inférieure.

En ce qui concerne les humidités de surface, on a des zones saturées identiques aux précédentes, et des zones humides de 38 cm. Ceci n'est pas étonnant dans la mesure où les caractéristiques sont peu différentes. On en déduit donc là aussi une sur-estimation de la diffusion latérale et une sur-estimation de l'infiltrabilité, à travers la zone de surface. Les profils d'humidité radiaux font apparaître une forme globale satisfaisante, avec toutefois une sous-estimation de l'humidité pour des abscisses éloignées de l'axe de symétrie.

d) Bulbes 16,17 cf. figure G4-~~6~~8

Pour les profils sous goutteur, on a une assez bonne restitution des profils, avec un désaccord au bas du profil. L'aspect légèrement bombé du profil peut être dû à un temps de mesure après irrigation pas tout à fait exact. Une heure de plus peut tout à fait bien résorber cet excès. Les profils extérieurs font apparaître une sous-estimation des teneurs en eau en surface.

Profil Sous Goutteur.



Profils 40 cms Goutteurs.

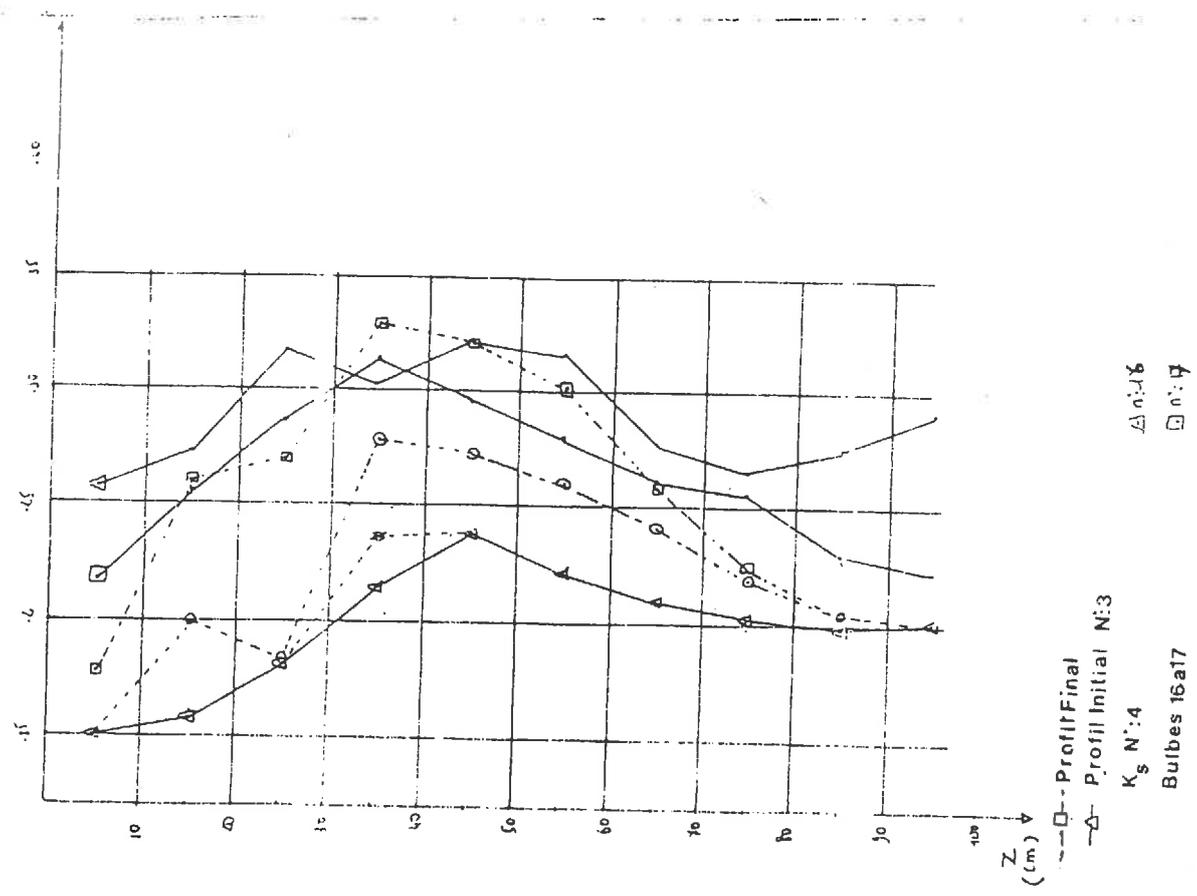


FIG. G4

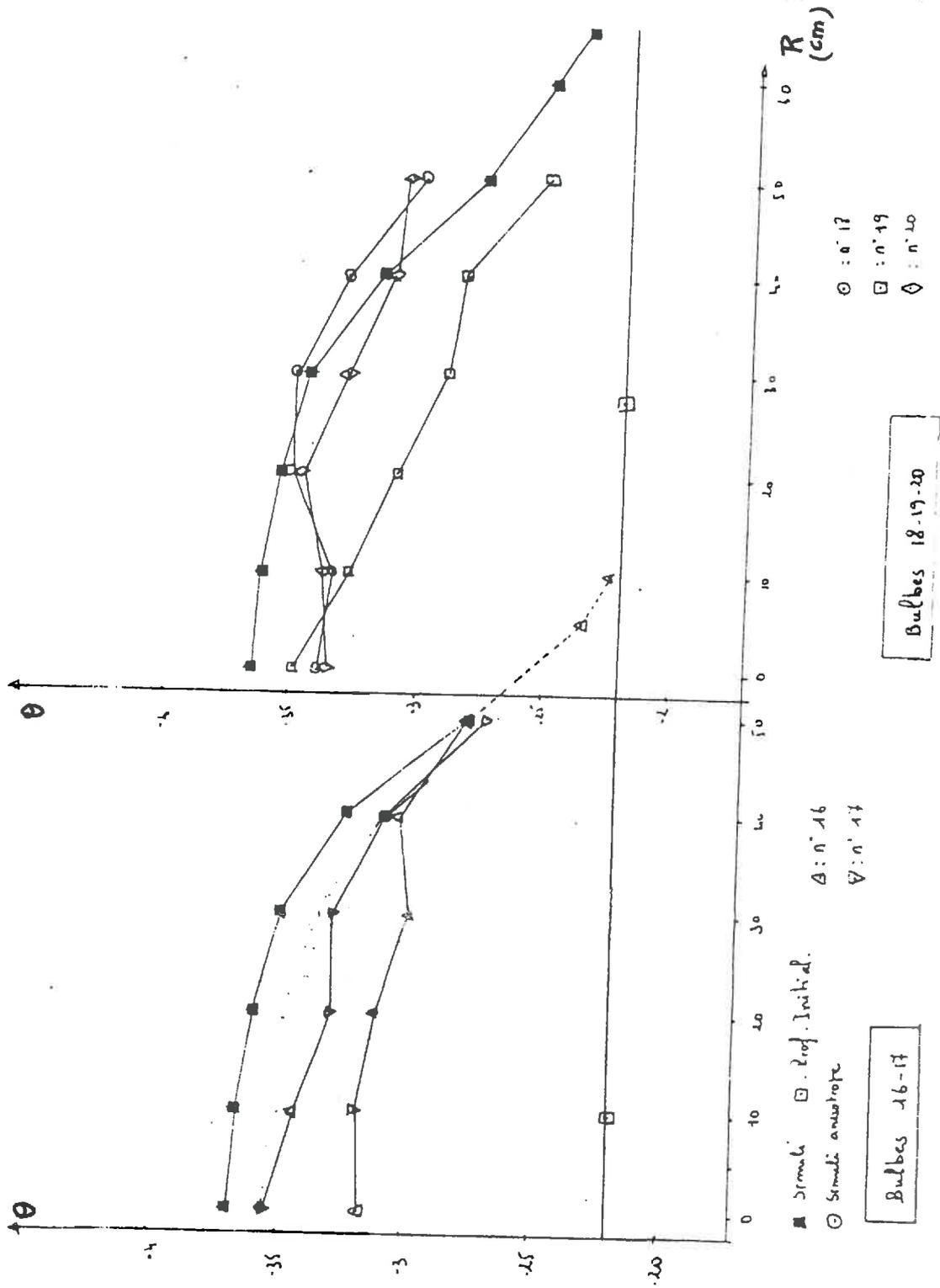
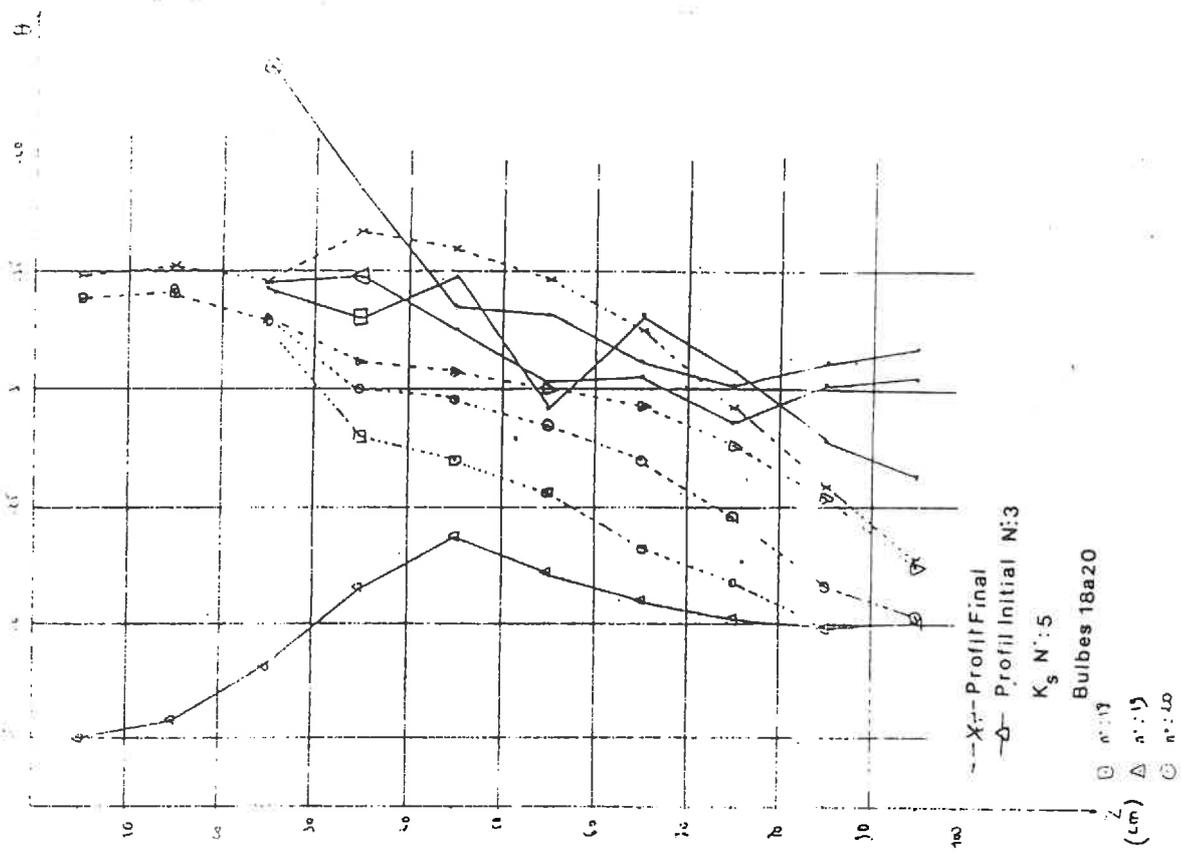


FIG. G8

Profil sous Goutteur



Profil 40cms Goutteur

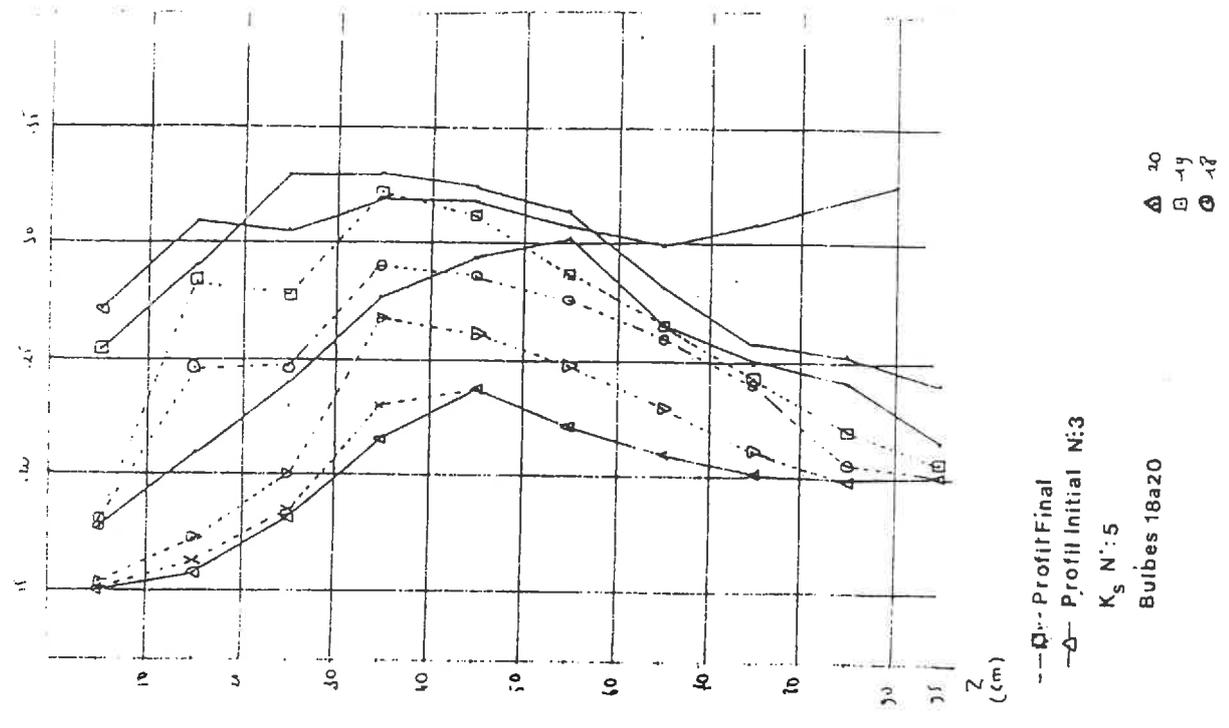


FIG. G5

La forme globale du profil est assez bien rendue, avec toujours une sous-estimation des teneurs en eau au fond. Le profil radial d'humidité fait apparaître une légère sur-estimation des teneurs en eau par le modèle (1 à 2 % volumique). C'est à relier avec le profil extérieur, légèrement excédentaire par rapport aux mesures. L'extension latérale semble assez bien rendue. Les humidités de surface font apparaître le même problème que précédemment.

e) Bulbes 18,19,20 cf. figure G5-48

Les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites : sous-estimation de la conductivité et un profil sous goutteur relativement bien rendu, mis à part l'écart au bas du profil. De même, pour les profils latéraux, la forme globale est assez bien rendue avec une sous-estimation de la teneur en eau en surface. On peut d'ailleurs constater que les R_{sat} et R_{Tot} prédits sont respectivement de 6 cm et 35 cm, alors que ceux mesurés sont de 20 à 27 cm et 35 à 47 cm. La zone de diffusion autour de la zone saturée est de nouveau sur-estimée par rapport à la réalité. Pour le profil horizontal, on peut remarquer qu'à 2 ou 3 % volumique près, il reproduit assez bien la moyenne des trois bulbes.

f) Bulbes 21 à 24 cf. figure G6-49

Dans ce groupe, on peut constater un assez bon rendu des profils sous goutteur jusqu'à 50 à 60 cm, avec toutefois une assez grande variabilité des profils expérimentaux. On sous-estime l'approfondissement comme précédemment. Pour les profils latéraux, la situation est encore plus claire ; on est très loin de la réalité de terrain dans tous les cas. L'écart en teneur en eau, dans la couche travaillée, est très important. Le profil horizontal, passe nettement en dessous des profils mesurés dès qu'on s'éloigne de l'axe du goutteur. Les humidités relevées en surface appellent les mêmes commentaires que pour les autres bulbes. Le rayon total est sous-estimé, 30 cm au lieu de 35 à 50 cm, et le rayon saturé aussi 6 cm au lieu de 20 à 27 cm.

III.5. Conclusions et propositions pour une nouvelle modélisation

Il ressort de nombreuses indications de ces essais effectués avec différentes irrigations.

On a déjà relevé le désaccord qui existait entre K_{sat} mesuré et probable en fonction des surfaces des taches saturées. Ceci est confirmé dans les simulations, où les rayons saturés sont systématiquement sous-estimés, par rapport au terrain.

Profils à 40 cm du Centre

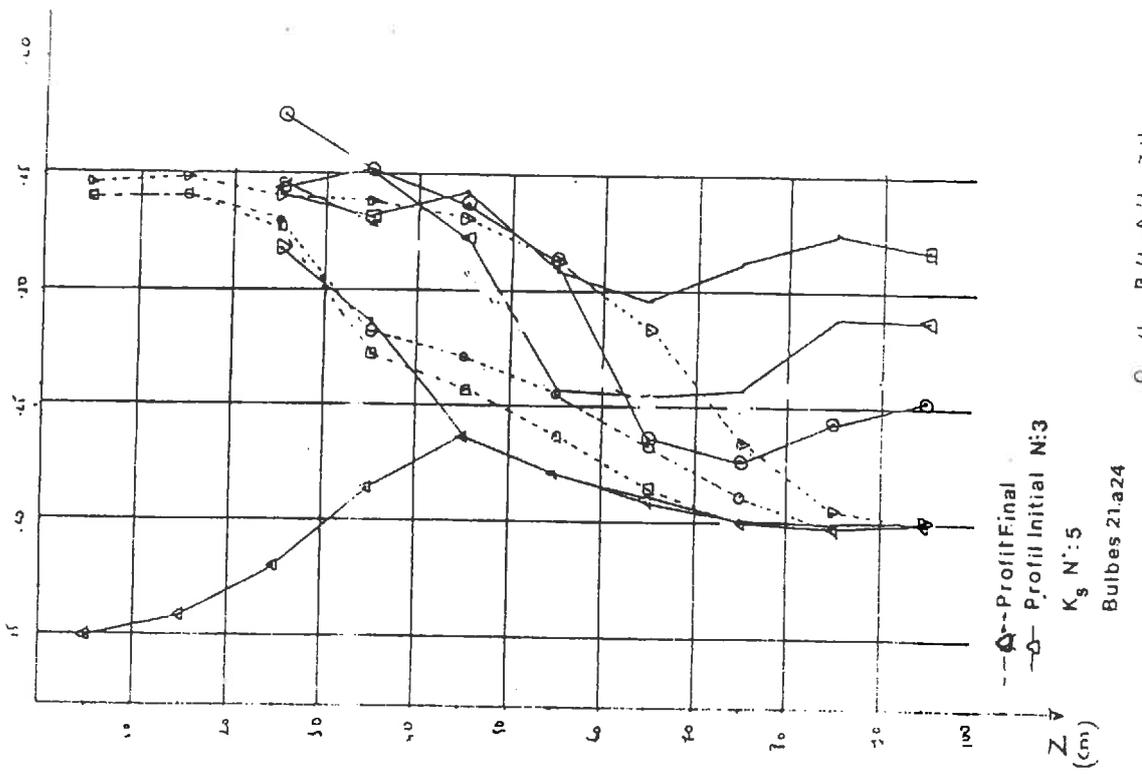
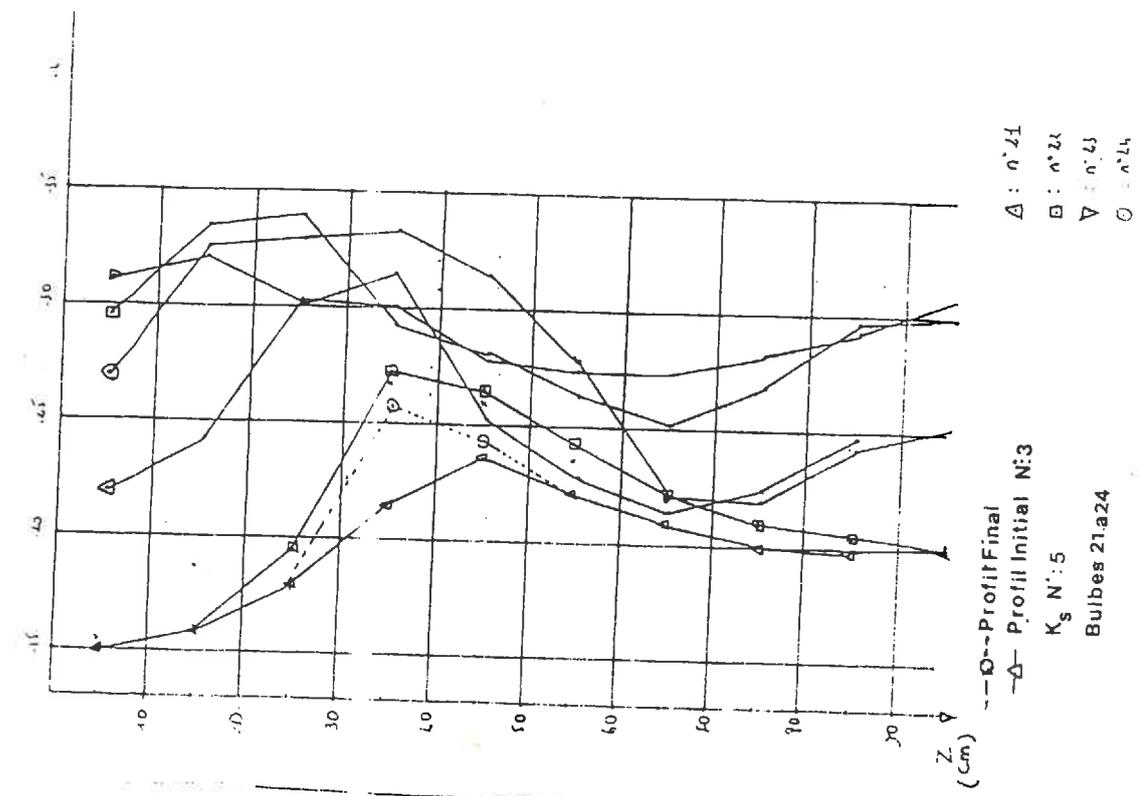


FIG. G6

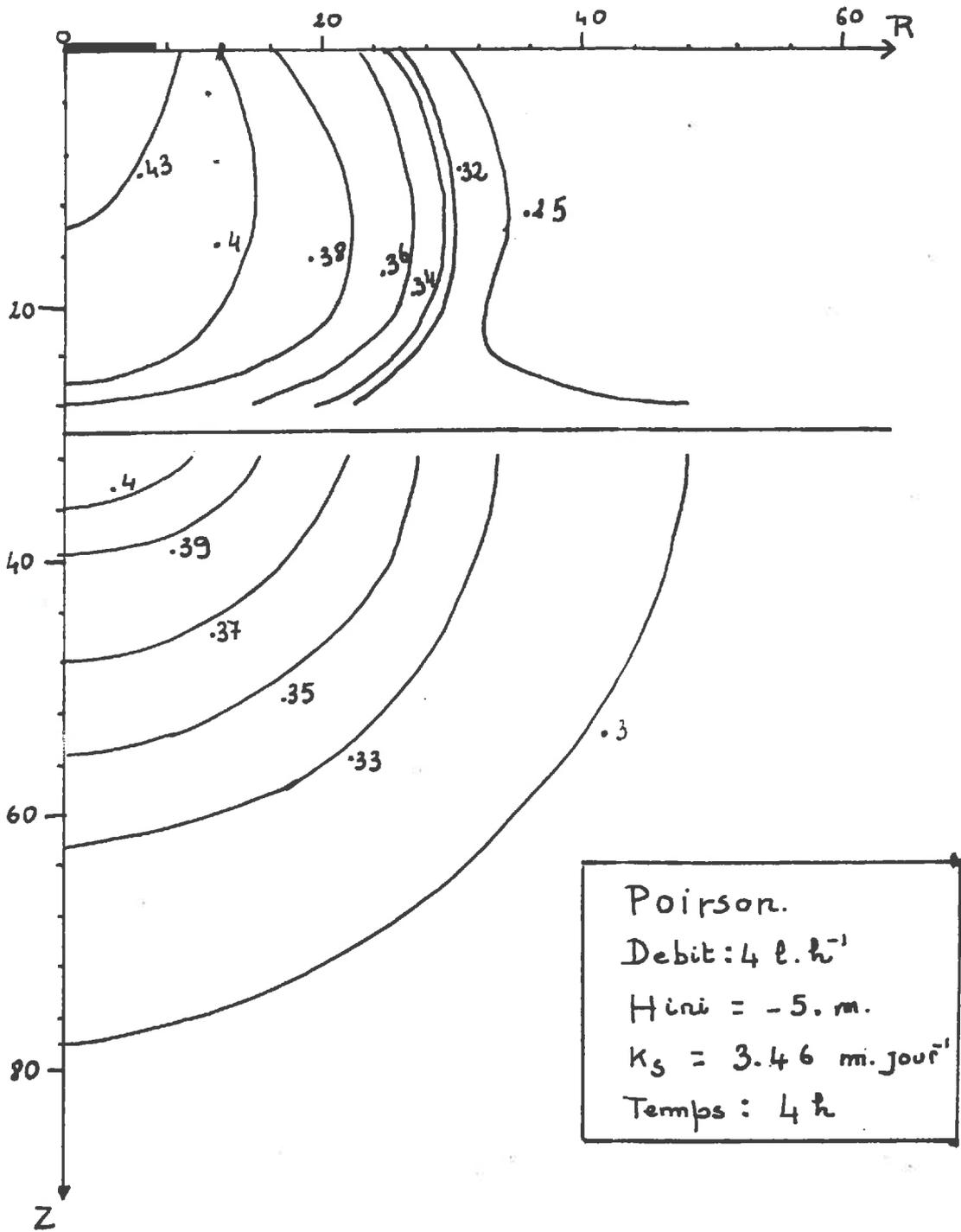


FIG. 3-12. Isohyètes en irrigation localisée

L'écart existant entre les rayons de diffusion peut être expliqué par une anisotropie du tenseur de conductivité. Une réduction de la conductivité de la couche de surface irait dans le sens d'une réduction de cette distance de diffusion. Les "accidents" apparaissant dans les profils latéraux à 25 cm disparaîtraient si la zone saturée était plus étalée.

En ce qui concerne la deuxième couche, on a relevé tout au long de l'analyse, la sous-estimation probable de la conductivité. Il est à noter que si on tient à garder une bonne extension latérale en augmentant la conductivité de la deuxième couche, il faut que la zone saturée en surface soit plus grande, ce qui est cohérent avec les déductions précédentes. La nature hétérogène du profil laisse à penser que dans cette zone là aussi le tenseur de conductivité doit être anisotrope.

Si on considère les profils horizontaux, on s'aperçoit que l'on a en général une sous-estimation de teneur en eau aux abîmes éloignés de l'axe de symétrie ie. au voisinage de la fermeture latérale, ce qui concorde avec les sous-estimations relevées dans les profils latéraux, au niveau de l'extension maximum.

Pour essayer de mieux rendre compte de la réalité, et ceci sans faire de calage au sens des moindres carrés, on a essayé de tenir compte des déductions précédentes. Le but est d'introduire les caractéristiques propres aux milieux et ignorées dans la phase préliminaire, que ce soit par manque de caractérisation physique, ou du fait d'un défaut d'analyse du système.

Il nous semble donc évident qu'il faille introduire dans la simulation deux caractéristiques propres à ce milieu.

- a) d'une part une décroissance de l'infiltrabilité de la couche de surface au cours des irrigations,
- b) d'autre part tenir compte d'une probable anisotropie du tenseur de conductivité.

III.5.1. Réflexions

La présence de l'interface ne confère à la conductivité de la couche de surface un rôle important sur le résultat final de l'irrigation que dans la mesure où elle est capable d'étaler le bulbe avant qu'il n'atteigne l'interface. Les simulations (cf. figures 3-11, 3-12) font apparaître clairement que au bout de 4h d'irrigation, par exemple, une variation de conductivité de 3 m/jour ou 9 m/jour de la couche de surface, n'a aucun effet sur le champ d'humidité final.

Etant donné que les mesures de K_s sont relativement homogènes dans le premier horizon et compte-tenu de la réduction de conductivité nécessaire à l'obtention d'une zone saturée identique à celles relevées au terrain, on doit conclure à la présence d'une couche limitante formée en surface au cours des irrigations, puisque les mesures de K_s sont faites après irrigation.

En ce qui concerne l'anisotropie, il faut faire la remarque suivante. Les simulations ont été effectuées avec une valeur de K_s de 30 cm/jour environ, pour tous les sites, dans le deuxième horizon. C'est une des valeurs les plus faibles que nous ayons mesurées. Il est évident que si dans le but d'approfondir le bulbe on se donnait une conductivité à saturation supérieure, la diffusion latérale serait également accrue alors que l'adéquation du modèle est satisfaisante quant à ce critère. Il semble donc qu'il faille augmenter la conductivité verticale, ce qui est tout à fait acceptable au vu des mesures en introduisant l'anisotropie.

Le coefficient de réduction de la conductivité en surface et le rapport entre les conductivités verticales et horizontales peuvent évidemment être considérés comme des facteurs de calage du modèle. Ils le sont effectivement dans la mesure où on ne dispose pas de mesures physiques pouvant lever cette incertitude. Néanmoins, ils ont une signification physique et auraient pu être obtenus au prix d'un peu plus de temps de manipulation. On ne peut donc pas les considérer comme des facteurs de calage pur, c'est-à-dire ne pouvant pas être mesurés ou entachés d'une incertitude expérimentale prohibitive. Ils sont seulement introduits pour rendre compte de ce que nous pensons avoir démontré être la réalité du milieu.

Il faut souligner que le calage sur nos données de terrain peut soulever des problèmes. Comment constituer le vecteur observations ? Doit-on prendre tous les profils dont on dispose ? Sont-ils positionnés de façon optimale ? Ne serait-il pas nécessaire de pondérer certaines mesures ? La réponse à toutes ces questions ne peut être obtenue qu'à partir d'une expérience en milieu bien contrôlé.

De toutes façons, il est probablement assez utopique de vouloir établir des prévisions précises dans un milieu présentant des hétérogénéités. Il nous semble que la prédiction de la géométrie de la zone humectée : profondeur, largeur, etc... est déjà en soi un objectif intéressant, dans la mesure où par exemple une bonne estimation de ces paramètres permettrait d'avoir une idée du volume intercepté par un système racinaire et des pertes occasionnelles en eau et fertilisants.

IV. SIMULATIONS ANISOTROPES ET AVEC UNE VARIABILITE TEMPORELLE DES CARACTERISTIQUES HYDRODYNAMIQUES DE LA COUCHE DE SURFACE

Nous avons dans un premier temps appliqué le choix arbitraire suivant.

Pour la réduction de la conductivité dans la couche de surface, on a multiplié par un facteur d'homothétie α_R , la courbe de conductivité pour les deux premiers centimètres de sol aux noeuds ayant déjà été saturés une fois au moins. Le facteur α_R a été déterminé de façon approchée à partir des approximations asymptotiques : $Q/\pi R_s^2$. Or, on sait que celles-ci ne fournissent qu'une majoration qui peut être grossière en certain cas de la vraie valeur.

ABABOU fournit une valeur du Rayon saturé limite basée sur la solution de Philip et une formule fournie par TURNER et PARLANGE permettant d'estimer le taux d'infiltration dû à la "diffusivité multidimensionnelle".

Il pose donc pour une surface d'infiltration S_0 , de périmètre l_0 .

$$I = \alpha_0 S t^{1/2} + \alpha_0 t K_s + l_0 \Delta i \cdot t$$

$$\text{où } \Delta i = \cdot 24 S^2 / (\theta_s - \theta_0) \quad (\text{cm}^3 \cdot \text{min}^{-1} / \text{cm}) \quad \checkmark$$

$$\text{Il en déduit : } R_s \text{ lim} = \left[\left(\frac{\Delta i}{K_s} \right)^2 + \frac{Q}{\pi K_s} \right]^{1/2} - \frac{\Delta i}{K_s}$$

Il faut noter que PARLANGE a établi cette formule pour des temps d'infiltration courts, et que par conséquent, on ne peut probablement pas l'utiliser pour déterminer le rayon saturé limite. Pour s'en assurer, nous avons essayé de la confronter à nos résultats de simulation. Elle nécessite la connaissance de la sorptivité, que nous avons déterminée de la façon suivante.

IV.1. Détermination de la sorptivité

Ne disposant pas d'expériences d'infiltration, où les quantités infiltrées eussent été mesurées au cours du temps, nous avons procédé par simulation.

On a donc réalisé, pour différents potentiels initiaux, des infiltrations horizontales monodimensionnelles avec les caractéristiques hydrodynamiques du sol de Poirson. Ces calculs étant faits avec une méthode d'intégration performante, des pas d'espaces et des pas de temps petits (1 s), on s'est permis de calculer les stocks d'eau infiltrés par intégration discrète du profil.

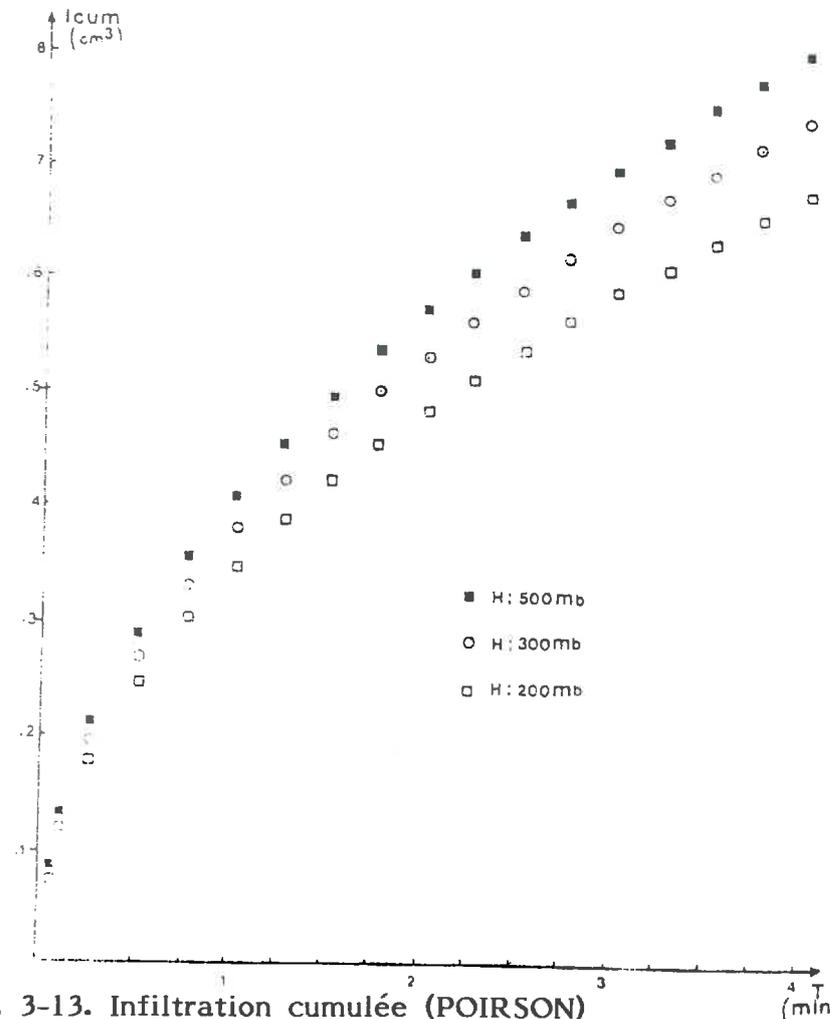


FIG. 3-13. Infiltration cumulée (POIRSON)

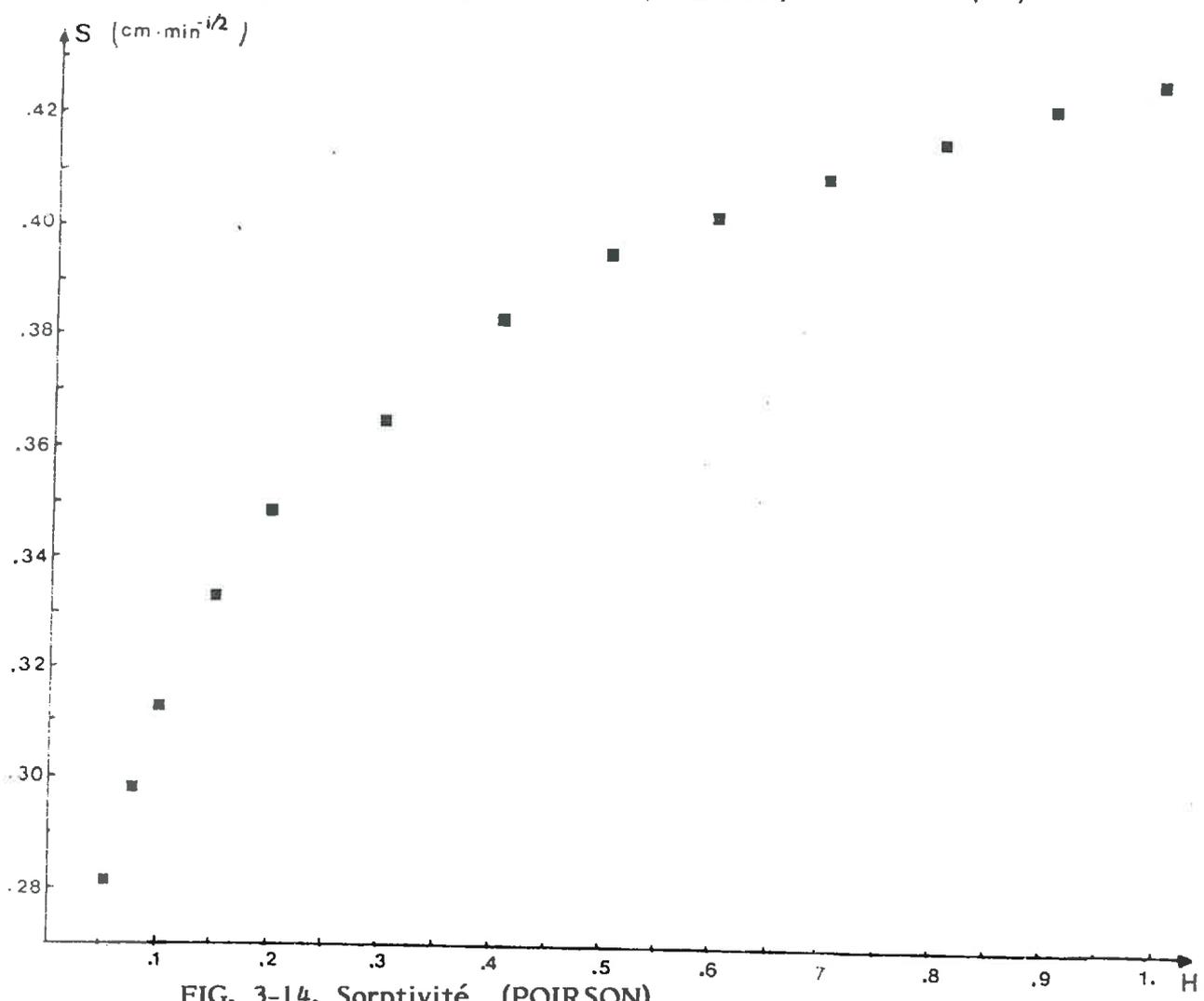


FIG. 3-14. Sorptivité (POIRSON)

On trouvera sur la figure 3-13, les quantités infiltrées cumulées pour différents potentiels initiaux (ψ_i) et sur les premiers instants. On remarquera l'allure très régulière des courbes. Pour chacun des ψ_i , on a ajusté la loi

$$I = S\sqrt{t} + cte \quad \text{sur les résultats du modèle.}$$

Les sorptivités obtenues (fig. 3-14) sont dans le tableau 8 ainsi que les différentes sorties statistiques usuelles.

On a alors utilisé la sorptivité pour calculer le débit vertical à travers la zone saturée. Si on prend, par exemple, une situation obtenue au bout de plusieurs cycles d'irrigations, on a un potentiel initial de l'ordre de 50 mb à la surface. Au bout de 4h d'apport, le modèle numérique fournit un $R_{\text{sat}} = 7.2$ et un $D_{\text{sat}} = .94288 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. On en tire la valeur exacte de R_{sat} par extrapolation au débit du goutteur : $1.1 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Soit $R_{\text{sat}} = 7.81 \text{ cm}$. La surface de la zone saturée est alors de 191.9 cm^2 .

Pour	t	= 240 min	
	S	$\approx .3 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1/2}$	$D_v = 42.98 \text{ cm}^3 \cdot \text{min}^{-1}$, alors que
	S_0	= 192 cm^2	le débit total est de
	K_s	= $.2046 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1}$	$66.66 \text{ cm}^3 \cdot \text{min}^{-1}$

On a donc un débit résiduel "multidimensionnel" $Q_R = 23.68 \text{ cm}^3 \cdot \text{min}^{-1}$

D'après la formule de PARLANGE, celui-ci devrait être égal à : $l_0 \Delta i$

En fait, on a $\Delta i = .245^2 / (\theta_s - \theta_0) = .12$ ce qui pour évacuer le débit résiduel nécessite un rayon saturé de 31.5 cm alors que le R_{sat} réel est de 8 cm environ. On a donc bien confirmation que la formule $\Delta i = \frac{.245^2}{\theta_s - \theta_0}$ n'est pas adaptée à la prédiction de $R_s \text{ lim}$.

Sur la base des déductions précédentes, on a donc préféré estimer K_s au moyen de la formule $K_s = \frac{Q_v}{\pi R_s^2}$ où Q_v est le débit vertical. On a pris au vu des résultats précédents une estimation grossière $Q_v = .65 \text{ Deb}$. L'objectif n'étant pas de caler exactement, on a choisi un coefficient de réduction moyen de la conductivité de l'ordre de .2.

IV.2. Les coefficients d'anisotropie

La couche à conductivité réduite, introduite à la surface, a été considérée comme isotrope.

Pour la couche travaillée de surface, les simulations avaient fait apparaître un effet diffusif qui semblait sur-estimé par rapport à la réalité. La réduction de la conductivité de surface devait palier cet inconvénient. La conductivité est donc maintenue isotrope et inchangée dans la mesure où elle semble apte à "alimenter" correctement l'interface.

La deuxième couche se caractérisant par une conductivité insuffisante, on a introduit l'anisotropie verticalement, en laissant la conductivité horizontale inchangée du fait que les profils horizontaux étaient assez proches des profils mesurés. Le facteur vertical d'anisotropie est compris entre 1 et 2. Il est initialement pris égal à 1.5.

IV.3. Analyse des résultats

On a effectué pour les différents groupes, les simulations décrites ci-après, avec les valeurs de réduction de K_s en surface et d'anisotropie indiquées précédemment. Les sites (1,2,3,4,5) n'en font pas partie, du fait qu'on ne dispose pas de données expérimentales suffisantes pour juger de l'effet de l'introduction de l'anisotropie. On a résumé dans les tableaux 9 et 10 les rayons saturés calculés et ceux mesurés. Sont aussi portés les rayons des zones humides (R_{Tot}) en surface et les distances de diffusion R_{dif} .

On peut constater que pour les sites 11 à 15 et 16 et 17, on obtient des rayons saturés très voisins de ceux obtenus au terrain.

Pour les bulbes 18 à 20 et 21 à 24, on sous-estime légèrement les valeurs réelles de R_{sat} . Aux sites 7 à 10, où on était déjà proches des valeurs de terrain, la diminution de K en surface, conduit à une nette sur-estimation.

Il apparaît que quand on restitue bien R_{sat} (sites 11 à 15 et 16 et 17), on obtient aussi un bon accord au niveau des rayons humides en surface. Là où on sous-estime (18 à 20 et 21 à 24), on obtient des rayons pour la zone humide sous-évalués aussi.

Pour les sites 7 à 10, les sur-évaluations du rayon saturé conduisent logiquement à une sur-évaluation du rayon total.

Il apparaît donc à l'analyse de ces premiers résultats que l'on puisse classer les bulbes en trois groupes pour ce qui concerne la conductivité de la couche de surface [0, 2 cm].

Un premier groupe (1 à 10) où elle n'est pas limitante est sûrement très peu différente de celle mesurée au terrain pour la couche travaillée. Ceci pouvant être dû à l'existence d'une porosité structurale ouverte en surface et annihilant les effets d'une éventuelle croûte.

Bulbes	R_{tot} cm	R_{tot} cm	R_{dif} cm	R_{dif}
1 à 5	15/15/30/25/30	30 cm	10/	22
7 à 10	18/19/17/19	38 cm	9/8/8/9	2
11 à 15	29/30/33/34/33	38 cm	11/13/16/16.5/17	21
16 - 17	28/39	35 cm	12/21.5	12.5
18 à 20	35/42/47	36 cm	15.5/22/20	19
21 à 24	45/50/40/35	34 cm	18/25/30/15	16

Tableau 10 :

R_{tot} et R_{dif} : mesures au terrain

R_{tot} et R_{dif} : fournis par le modèle en conditions anisotropes.

Bulbes	R_{sat} cm	R_{sat} cm	R_{sat} cm
1 à 5	5/5/10/15/20	8.0 cm	-
7 à 10	9/11/9/10	7.75 cm	16.0
11 à 15	18/17/17/17.5/16	8.5 cm	16.8
16 - 17	16/17.5	8.0 cm	17.6
18 à 20	19.5/20/27	8.2 cm	16.9
21 à 24	27/25/20/20	8.5 cm	18.1

Tableau 9 :

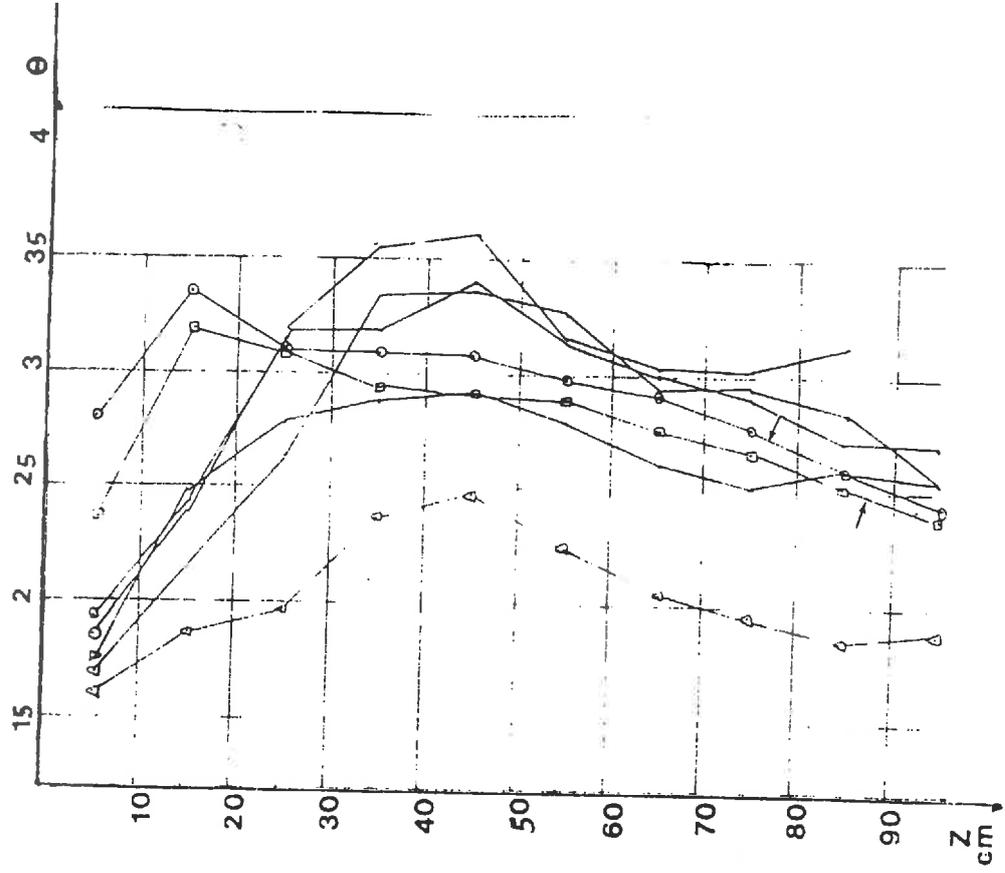
R_{sat} : mesure de terrain

R_{sat} : fourni par le modèle en conditions isotropes

R_{sat} : fourni par le modèle en conditions anisotropes

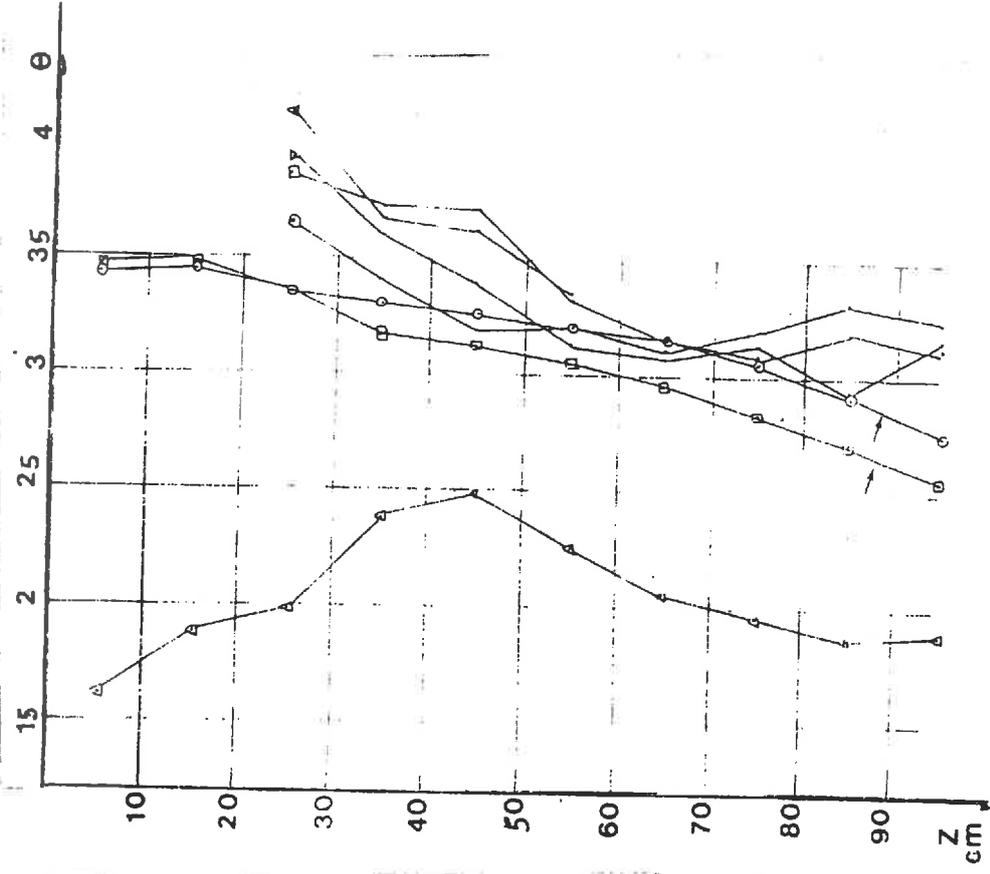
(rapport de diminution égal à .2)

Profils a 40 cm du Goutteur



- N: 7 Δ
- N: 8 \square
- N: 9 ∇
- N: 10 \diamond
- \circ Profil Anisotrope \rightarrow
- \square Profil Isotrope \rightarrow
- Δ Profil Initial

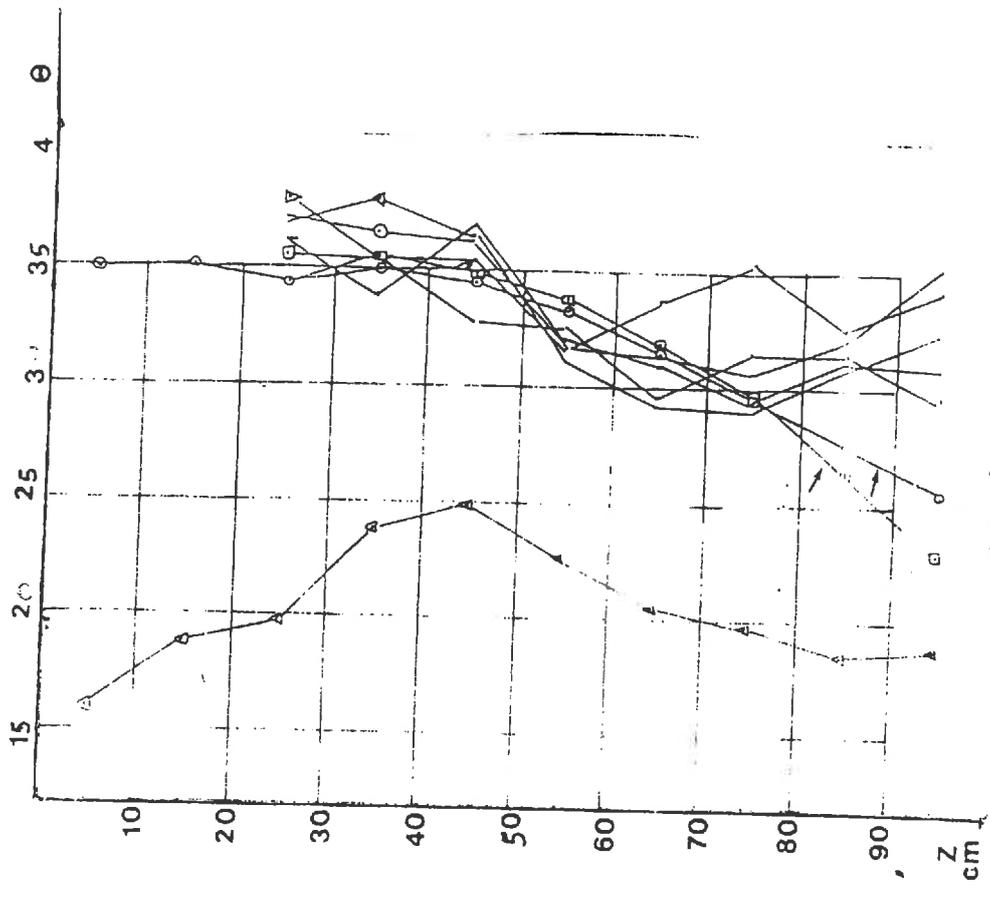
Profils sous Goutteur



- N: 7 Δ
- N: 8 \square
- N: 9 \circ
- N: 10 ∇
- \circ Profil Anisotrope \rightarrow
- \square Profil Isotrope \rightarrow
- Δ Profil Initial

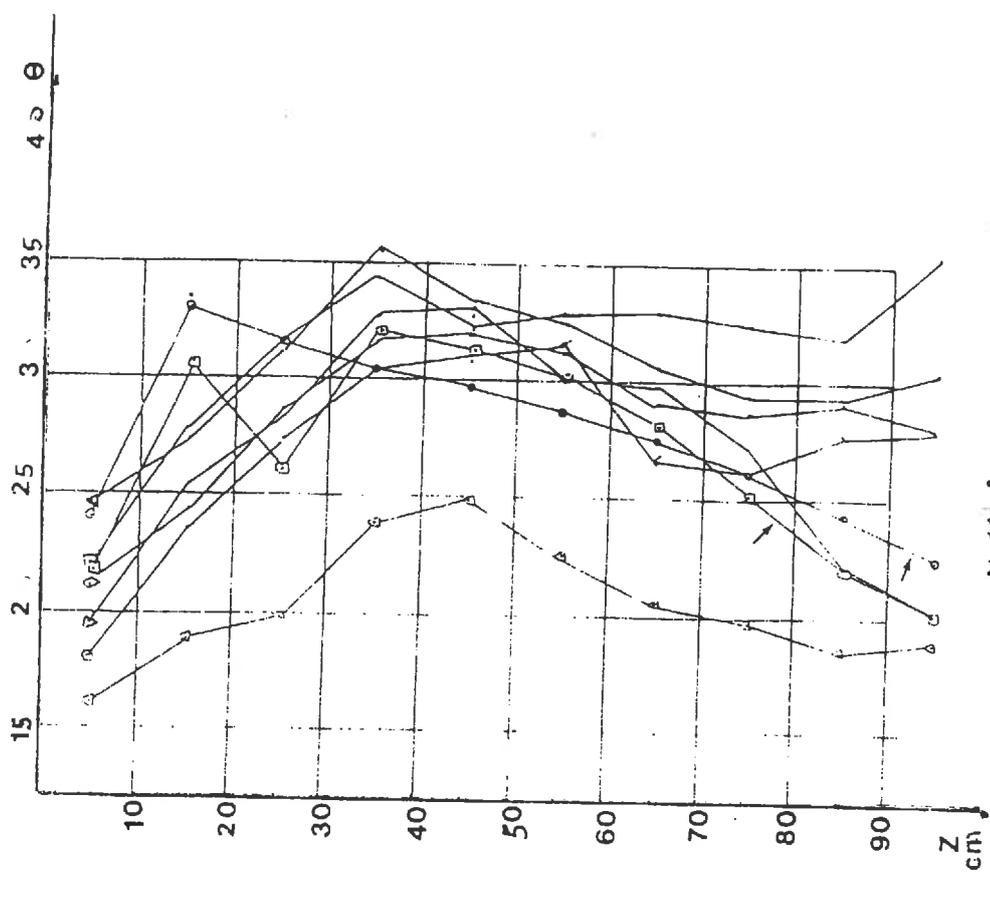
FIG. HI

Profils sous Goutteur



- N:11 Δ
 - N:12 \circ
 - N:13 ∇
 - N:14 \square
 - N:15 \diamond
- \circ Profil Anisotrope \rightarrow
 - \square Profil Isotrope \rightarrow
 - Δ Profil Initial

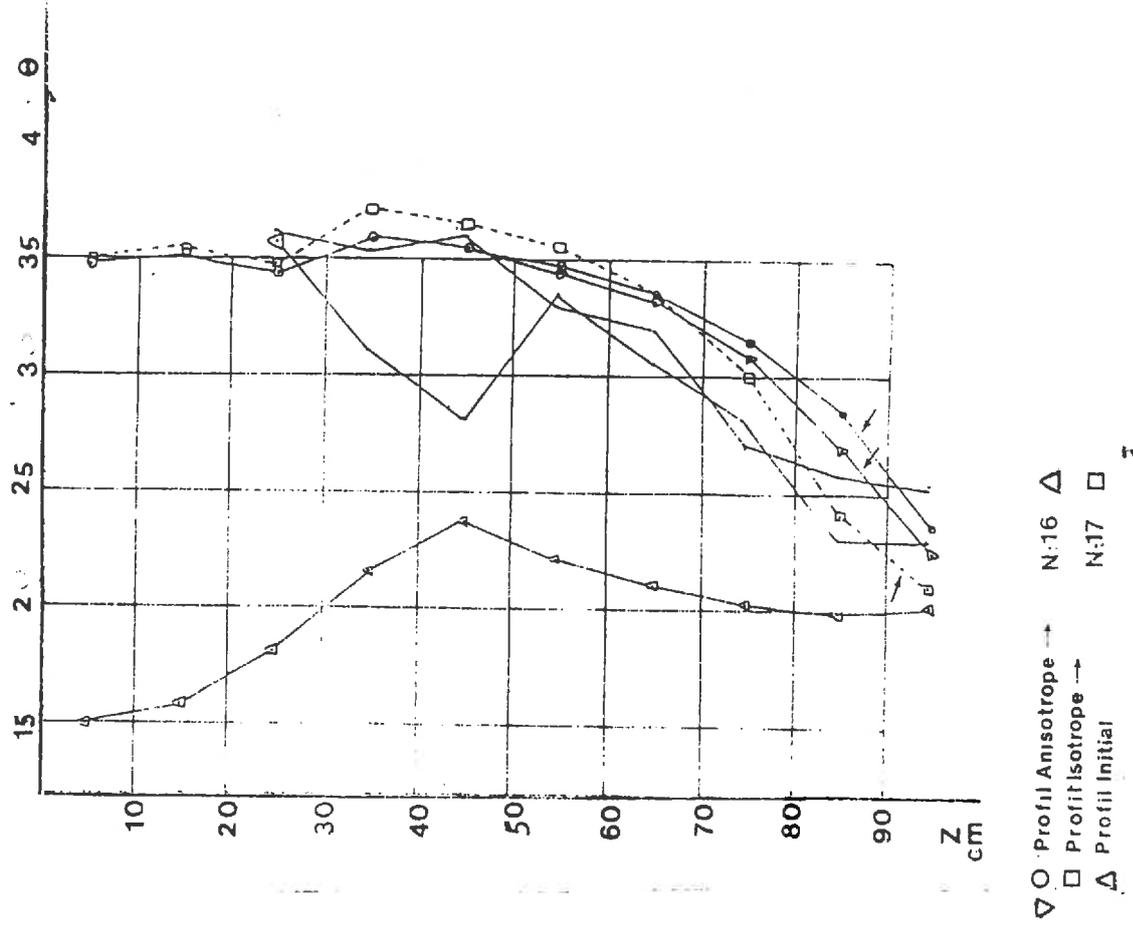
Profils a 40 cm du Goutteur



- N:11 Δ
 - N:12 \circ
 - N:13 \square
 - N:14 ∇
 - N:15 \diamond
- \circ Profil Anisotrope \rightarrow
 - \square Profil Isotrope \rightarrow
 - Δ Profil Initial

FIG. H2

Profils sous Goutteur



Profils a 40 cm du Goutteur

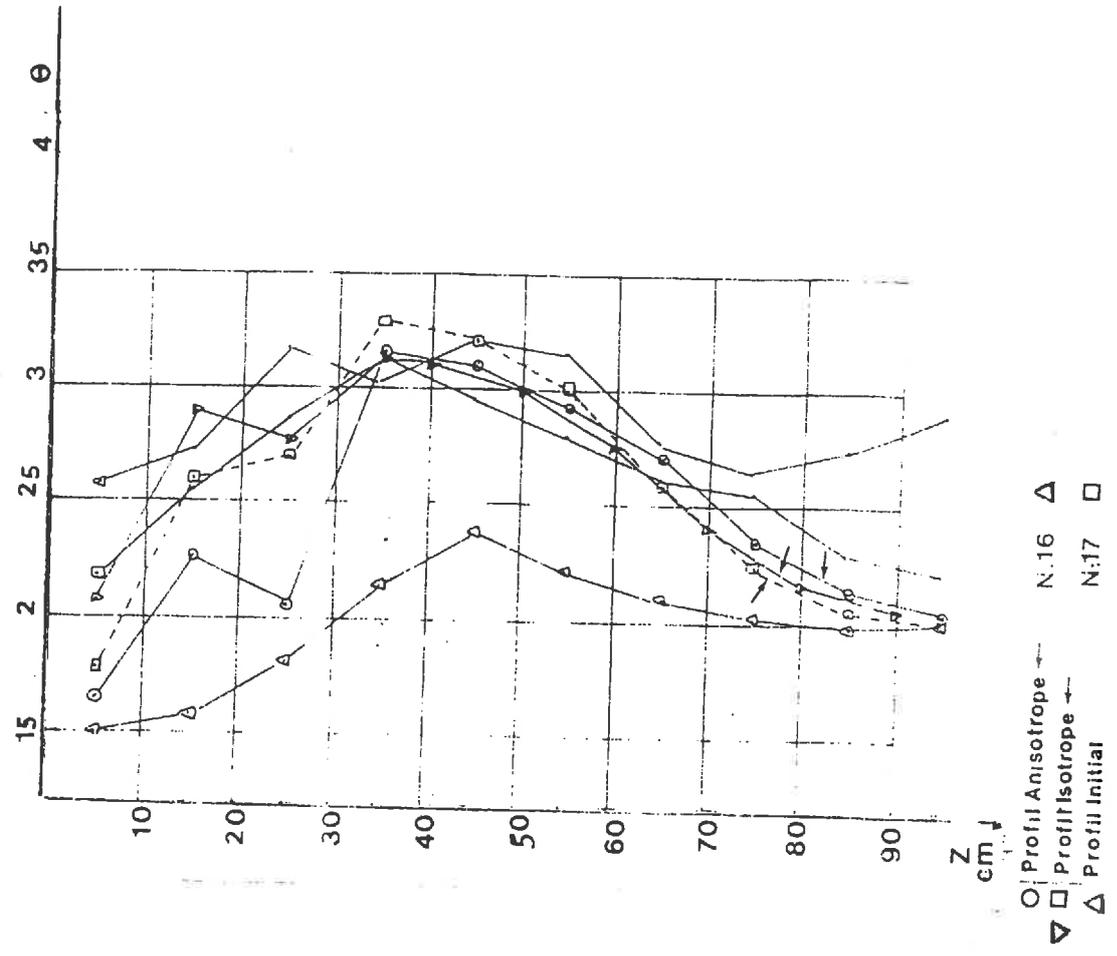


FIG. H3

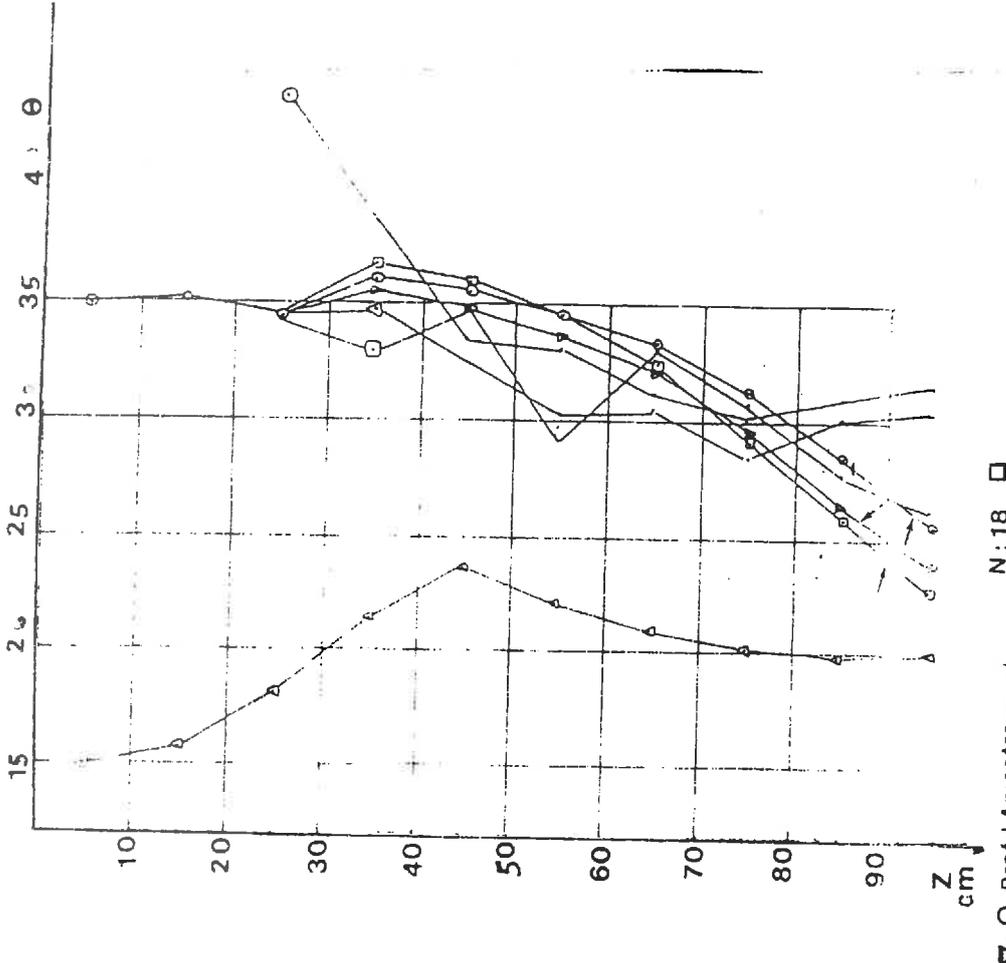
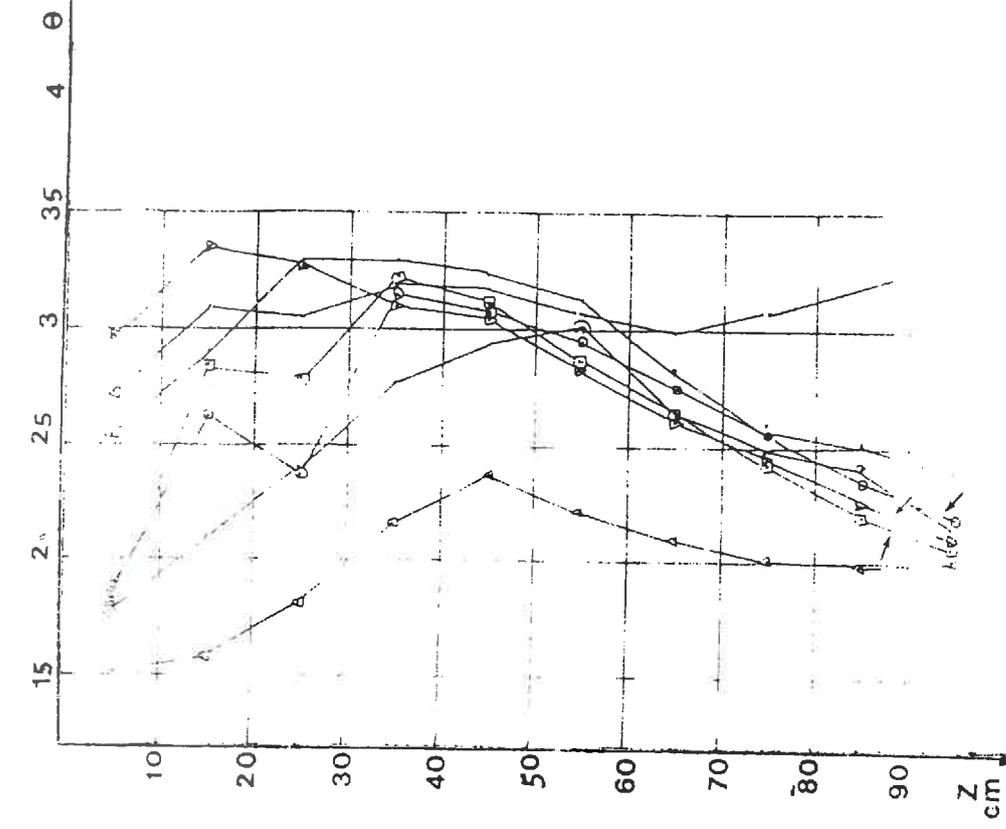
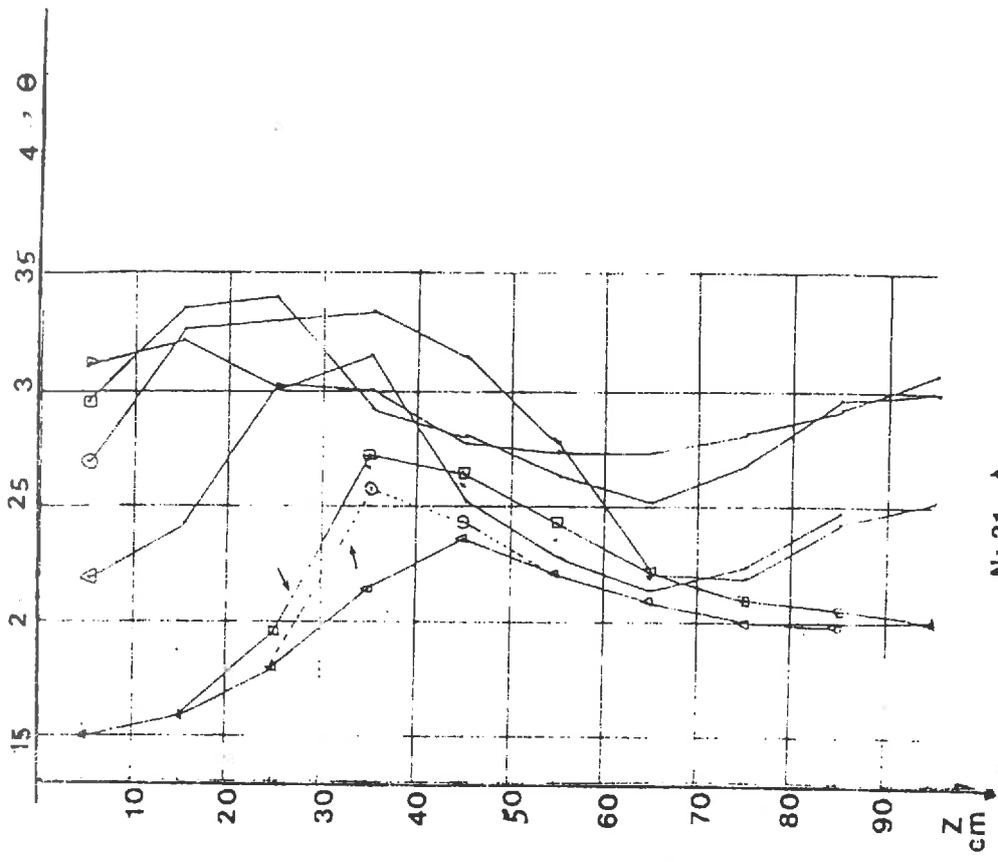


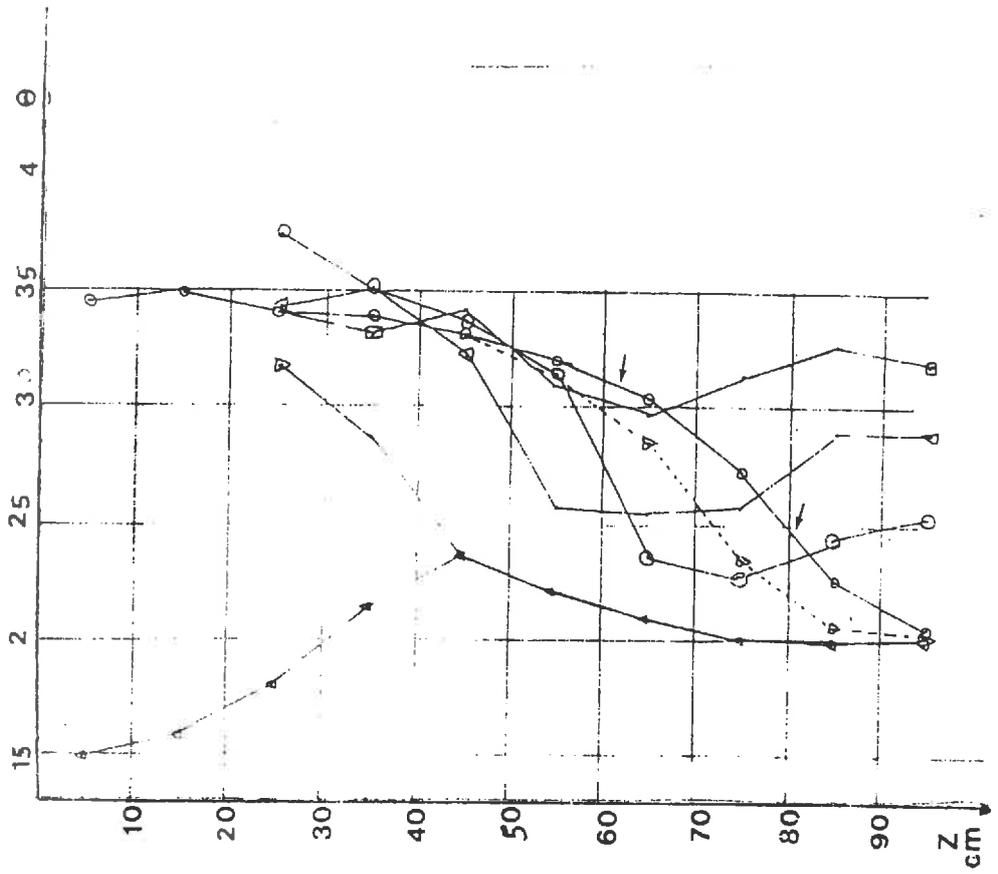
FIG. H4

Profils a 40 cm du Goutteur



- Profil Anisotrope N: 21 ▲
- Profil Isotrope N: 22 □
- ▲— Profil Initial N: 23 ▽
- N: 24 ○

Profils sous Goutteur



- Profil Anisotrope N: 21 □
- ▽--- Profil Isotrope N: 22 ▲
- ▲— Profil Initial N: 23 ▽
- N: 24 ○

FIG. H5

Un deuxième groupe (11 à 17) où la réduction choisie pour la couche de surface semble être assez appropriée et enfin un troisième groupe où elle est insuffisante.

Modifications des profils de teneur en eau. Bulbes 7 à 10 figures H1-H6

Les profils font apparaître que c'est surtout l'augmentation de la conductivité verticale qui a joué. Le décalage à droite du profil à 40 cm du goutteur atteint .01 % de teneur en eau au fond et .03 % au voisinage de l'interface. On sous-estime toutefois encore les profils mesurés.

La sur-estimation de R_{sat} transparait dans les profils obtenus pour la première couche.

Sous goutteur, le gain est plus important et plus constant sur toute la hauteur du profil. On remarquera que l'augmentation de conductivité se traduit par une légère diminution de la teneur en eau dans la couche [0,30 cm].

En ce qui concerne le profil horizontal, il a été translaté vers le haut (fig. **H6**) mais le désaccord est toujours de l'ordre de 2 à 3 points de teneur en eau.

Bulbes 11 à 15 figure H2

L'augmentation de conductivité verticale n'apporte pas grand chose pour les profils sous goutteur et conduit à sous estimer l'humidité pour les profils latéraux qui sont plus éloignés des valeurs expérimentales que dans le cas isotrope. On remarquera la disparition attendue du creux à 25 cm.

Pour calculer une extension latérale correcte, il faut probablement revenir au cas isotrope avec une conductivité globale de la deuxième couche plus élevée.

Bulbes 16 à 17 figures H3-H7

L'assez bon accord que l'on avait obtenu initialement est même amélioré, que ce soit sous goutteur ou pour les profils latéraux. Le profil horizontal est lui aussi bien amélioré. On note cependant un léger biais qui fait apparaître une décroissance trop rapide de la teneur en eau simulée en fonction de rayon. L'écart maximal est toutefois inférieur à 2 points de teneur en eau.

Bulbes 18 à 20 figure H4

On peut remarquer que la diminution de la conductivité en surface a permis de mieux restituer les profils dans la couche [0,30] et n'a pas beaucoup d'influence sur [30,100]. Les profils [30,100] sont assez peu perturbés par l'anisotropie mais quand même améliorés.

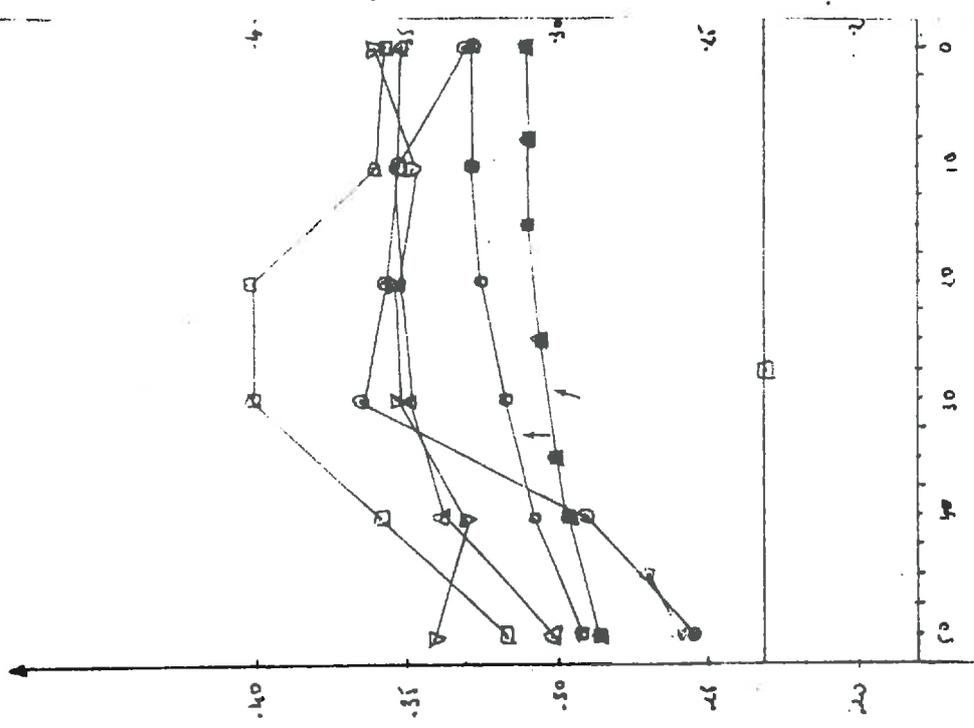


FIG. H6

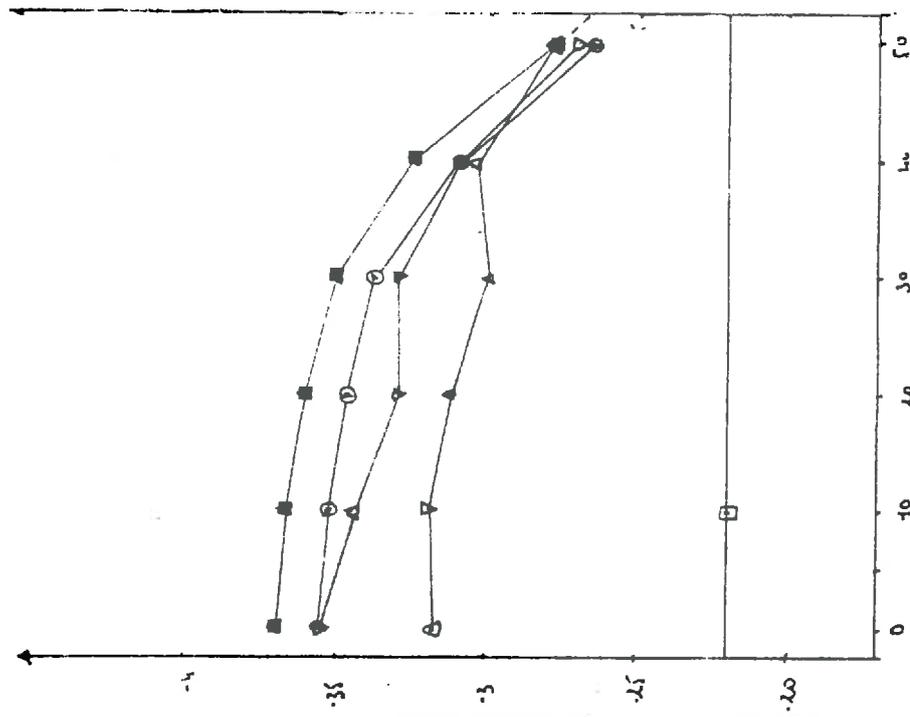


FIG. H7

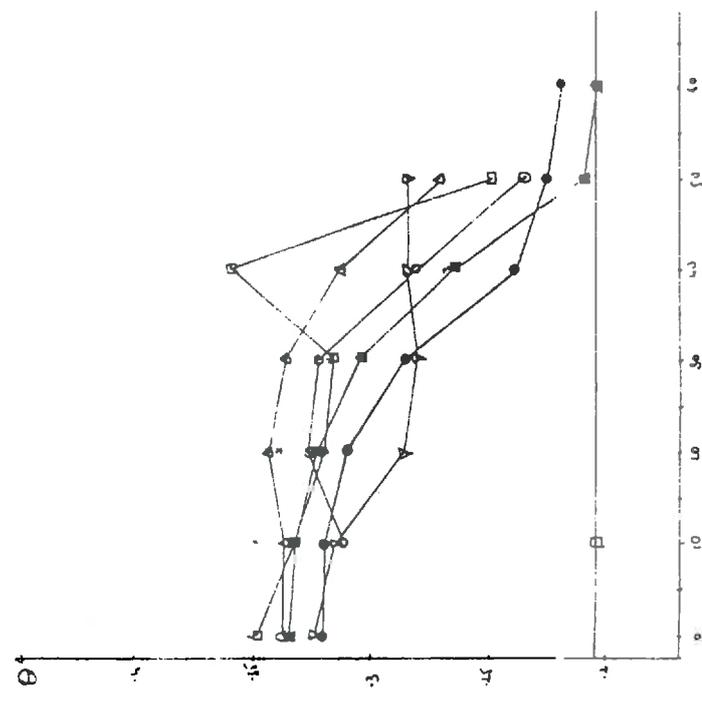


FIG. H8

Bulbes 21 à 24 figures H5-H8

Alors qu'on arrive à reproduire globalement assez bien ce qui se passe sous le goutteur, toutes les tentatives pour reproduire les profils latéraux restent vaines. Etant donné qu'il ne peut y avoir d'erreur sur la quantité d'eau apportée, ni sur le profil initial, la seule explication possible est à rechercher du côté du fonctionnement anisotrope et des hétérogénéités de structure et de circulation d'eau. De fait, celles-ci peuvent très bien avoir induit, pour des profils situés à une certaine distance du goutteur, un fonctionnement identique à celui existant sous celui-ci. Le fait qu'on ne puisse obtenir des résultats de simulations ressemblant à ceux de terrain, même en faisant varier de nombreux paramètres ($K_{s1,2}$, anisotropie, réduction de la conductivité de surface, ...) indique bien qu'on ne peut pas espérer simuler la phase d'établissement du bulbe sur un sol pouvant présenter des hétérogénéités structurales. A l'inverse comme on l'a indiqué, une fois la phase d'installation bien avancée, la simulation permet d'avoir une bonne approximation du volume occupé par le bulbe et de la répartition de l'eau. Il faut toutefois bien garder en mémoire qu'on ne sera pas capable d'estimer par exemple la quantité d'eau perdue par percolation dans la réalité. Dans notre cas, la phase d'installation constitue une sorte de période de fonctionnement assez mal rendue, mais dont seul le résultat final compte. Or, il ne semble pas absurde d'imaginer un fonctionnement réel constitué de phase de circulations rapides suivies de redistributions, conduisant à obtenir une humidité plus élevée dans tout le volume et à modifier progressivement les caractéristiques hydrodynamiques (fermeture de fissures, gonflement, etc...). On converge ainsi vers un état plus homogène et isotrope du point de vue de la circulation de l'eau. On peut alors raisonnablement utiliser un modèle reposant sur les caractéristiques hydrodynamiques mesurées sur le sol quand celui-ci présente un degré maximum d'homogénéité, c'est-à-dire par exemple après une irrigation. Ce modèle restituera au bout de quelques cycles apport-redistribution un état final pas très éloigné de la réalité, mais atteint par un chemin différent que nous avons schématisé ci-après (fig. 3-15).

CONCLUSION

La localisation de notre dispositif expérimental ne nous a pas permis de disposer d'un sol homogène, sur lequel il aurait été possible de vérifier l'efficacité des algorithmes proposés. Toutefois, on peut noter la cohérence des résultats de simulations et des mesures de terrain à différents niveaux.

Tout d'abord en ce qui concerne l'extension de la zone saturée qui est trop petite sans la prise en compte de la formation de la croûte. Les mesures de la surface de cette zone et de la conductivité à saturation conduisent d'ailleurs à la même conclusion.

La comparaison des profils hydriques verticaux, sous le goutteur et à 40 cm de celui-ci, laisse apparaître un assez bon accord global, malgré certains écarts, probablement liés à la fois à la nature hétérogène du milieu et à la localisation dans un petit volume de la mesure gravimétrique qui peut ainsi inclure des zones de circulation convective plus humides. Des profils plus lisses et réguliers fournis par une sonde à neutrons auraient probablement laissé apparaître un meilleur accord entre mesures et simulations. Il en est de même pour les profils horizontaux qui permettent de constater que l'extension latérale du bulbe est assez bien rendue à la cote choisie.

On peut donc s'apercevoir que malgré les sources, nombreuses, d'erreurs et d'inadéquations entre le modèle et le milieu qu'il est censé représenter, l'outil mathématique et informatique permet de prévoir certaines caractéristiques du résultat de l'irrigation. Toutefois, dans un milieu hétérogène, l'utilisation des équations régissant les transferts en milieu poreux est limitante, du moins dans sa forme actuelle, quant à la prédiction de phénomènes tel que l'estimation des pertes par percolation, au-dessous de la zone racinaire, alors qu'elle ne semble pas constituer un obstacle majeur, du moins dans notre cas, à une prédiction acceptable de la géométrie du domaine humecté.

Entre autres conséquences, on peut s'apercevoir que le couplage des modèles de transferts hydriques et salins dans un tel milieu n'est pas envisageable.

Cette phase de comparaison des résultats du modèle et de l'expérimentation a permis de mettre en évidence divers problèmes qui peuvent surgir aux différents stades de la modélisation.

- L'adéquation entre les équations à appliquer au milieu poreux et le phénomène à simuler (remise en cause de l'applicabilité de la loi de DARCY dans notre cas).
- La dépendance, dans laquelle demeureront les modèles, de la mesure, souvent contraignante, des caractéristiques hydrodynamiques, tant qu'une prévision efficace de celles-ci (et surtout de la relation conductivité-teneur en eau) ne sera pas possible. Notre utilisation du modèle de MUALEM et les difficultés rencontrées illustrent bien ce problème.

- La nécessité de prendre le plus possible en compte les caractéristiques du milieu : différenciation fine des couches de différentes densités et intégration au modèle, prise en compte de la modification éventuelle des caractéristiques de la couche de surface au cours du temps.

Il serait intéressant, par la suite, d'essayer d'inclure, de façon aléatoire, dans le domaine d'intégration, des zones à circulation convectives pour juger de l'effet de la présence d'hétérogénéités sur le résultat de l'irrigation. Ce serait là un pas important vers la crédibilité, l'applicabilité de tels modèles, et peut être vers un couplage possible avec des modèles de transfert de sels en milieux fissurés.

CONCLUSION GENERALE

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous sommes attachés à dégager à travers l'étude mathématique et numérique proprement dite, les principales interactions de la résolution numérique avec la qualité des résultats. L'étude des problèmes d'intégration temporelle et de discrétisation spatiale, nous a permis de sélectionner quelques schémas et méthodes et de faire un choix quant à celles à employer pour la modélisation devant suivre, de façon à minimiser l'erreur de troncature spatiale, les oscillations, et à prendre en compte de façon correcte les non-linéarités. Cette étude nous a conduit à choisir un schéma implicite couplé avec des extrapolations de Richardson sur le temps et une méthode itérative de point fixe.

Dans la deuxième partie, nous avons développé des codes discrétisant l'équation de Richards par différences finies ou éléments finis. Nous avons apporté un soin particulier à la validation des programmes, tant aux conditions de flux que de charge et sur divers sols. Pour le traitement de la condition à la limite en surface (qui constitue un des principaux problèmes dans la simulation de l'irrigation localisée), nous avons, après avoir montré les limites des méthodes usuelles, développé deux algorithmes originaux. Ceux-ci donnent de meilleurs résultats que leurs prédécesseurs, quand on se place sur des sols à faible conductivité. Le cas de sols à conductivités élevées ne pose pas de problèmes.

Comme on l'a souligné dans la conclusion du troisième chapitre, la confrontation des résultats de simulation et des résultats expérimentaux ne permet pas de juger, du fait du site expérimental, de la justesse des algorithmes (Ceci avait quand même été fait dans la deuxième partie par comparaison avec des résultats disponibles dans la littérature).

Cette phase du travail a permis de mettre en évidence les problèmes plus spécifiquement liés à la modélisation et à l'applicabilité de la théorie des milieux poreux au sol dans certaines conditions. Elle fait bien ressortir que si on est capable de traiter efficacement le problème de l'imposition des bonnes conditions à la limite en surface, la difficulté est désormais constituée par le traitement et la prise en compte d'hétérogénéités dans les profils.

Nous avons montré qu'il était impossible de prévoir complètement la distribution de l'eau avec un modèle déterministe dans ce cas-là. L'utilisation d'un tel modèle devrait s'orienter vers une étude de l'influence de l'hétérogénéité en simulant une répartition aléatoire au moyen de droite de Poisson par exemple, de zone à circulations convectives dans le domaine. En conservant l'approche déterministe, il serait alors possible d'évaluer des risques de percolation, etc... Le couplage avec un modèle de circulation de solutions en milieux fissurés serait alors possible.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABABOU R., 1981** - Modélisation des transferts hydriques dans le sol en irrigation localisée. Thèse, Grenoble.
- APPEL, C.A., 1976** - A note on computing finite difference inter block transmissivities. *Water Res. Res.*, 12 (3), 561-563
- BEN-ASHER, J., LOMEN, D.O., WARRICK, A.W., 1978** - Linear and non linear models of infiltration from a point source. *Sol Sci. Soc. Am. J.*, 42, 3-6.
- BETTENCOURT, J.M., ZIENKIEWICZ, O.C., CANTIN, G., 1980** - Consistent use of finite elements in time and the performance of various recurrence schemes for the heat diffusion equations. *Inter. J. for Num. Meth. in Engineering*, 14, 931-938.
- BOOK, D.L., 1981** - Finite difference techniques for vectorized fluid dynamics calculations. Springer Series in Computational Physics.
- BRANDT, A., BRESLER, E., DINER, N., BEN-ASHER, I., HELLER, J., GOLDBERG, D., 1971** - Infiltration from a trickle source. I. Mathematical models *Soil Science Soc. Am. J.*, 35, 675-682.
- BRESLER, E. et al., 1971** - Infiltration from a trickle source. II. Experimental data and theoretical predictions. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 35, 683-689.
- CAUSSADE, B.H., DOURNES, G., RENARD, G., 1979** - A new numerical solution of insteady two-dimensional flow in unsaturated porous media. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 127, 193-201.
- CERMAK, L., ZLAMAL, M., 1980** - Transformation of dependent variables and the finite element solution of non linear evolution equations. *Int. J. for Num. Meth. in Engineering*, 15, 31-40.
- DEW, P.M., WALSH, J.E., 1981** - A set of library routines for solving parabolic equations in one space variable. *ACM Trans. on Math. Software*, 7 (3), 295-314.
- FAIRWEATHER, G., 1978** - Finite element Galerkin methods for differential equations. *Lecture notes in pure and applied mathematics.* 34, Dekker
- FIRDAOUSS, M., TA PHUOC-LOC, 1983** - Infiltration bidimensionnelle de l'eau dans les sols non saturés à partir de tranchées rectangulaires équidistantes.
- GASTINEL, N., 1978** - Introduction élémentaire aux méthodes numériques pour la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles. Cours à l'Institut de Mathématiques Appliquées et à l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

- GAUDU, R., 1978** - Structures arborescentes et maillées en hydraulique et hydrologie. Thèse, Institut National Polytechnique, Toulouse.
- GODOUNOV, S., 1973** - Equations de la physique mathématique. Editions MIR.
- HANK-BOWERS, 1962** - Numerical solution of the moisture flow equation into layered soils. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 26, 530-534.
- HILLEL, D., RAGAB, FEYEN, 1984** - Simulating infiltration into sand from a trickle line source using the matrix flux potential concept. Soil Sci., 2, 120-127.
- JEPPSON, R.W., 1968** - Axisymmetric seepage through homogeneous and non homogeneous porous medium. Water Res. Res., 4 (6), 1277-1288.
- JURY, W.A., EARL, K.D., 1977** - Water movement in bare and cropped soil under isolated trickle emitters. Soil Sci. Soc. Am. J., 41, 852-856.
- LEES, M., 1966** - A linear three levels difference scheme for quasilinear parabolic equations. Math. of Comp., 20, 516-522.
- LEVIN, VAN ROYEN, 1979** - The effect of discharge rate and intermittent water application by point source irrigation on the soil moisture distribution pattern. Soil Sci. Soc. Am. J., 43, 8-17.
- MADSEN, K., SINCOVEC, F., 1979** - PECOL, general, collocation software for partial differential equations. ACM Trans. on Mathem. Software, 5 (3), 326-351.
- MARCHOUK, G., 1980** - Méthodes de calcul numérique. Editions MIR, 430p.
- MELGARD, K., SINCOVEC, F., 1981** - General software for two dimensional non linear partial differential equations. ACM Trans. on Math. Software, 7 (1), 106-125.
- MITCHELL, GRIFFITH, 1980** - The finite difference method in partial differential equations. J. Wiley and Sons.
- PHUC, L.V., MOREL-SEYTOUX, H.J., 1972** - Effect of soil air movement and compressibility on infiltration rates. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 36 (2), 237-241.
- RAVIART, P.A., 1981** - Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides. CEA-EDF-INRIA, Ecole d'été d'analyse numérique, Ed. Eyrolles, 136p.
- RICHMYER, MORTON, 1967** - Differences methods for initial-value problems. Abstracts in Mathematics, 4, J. Wiley.
- RUBIN, J., STEINHART, R., 1963** - Soil water relations during rain infiltrations. I. Theory. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 27 (3), 246-251.
- SELIM, H.M., KIRKHAM, D., 1973** - Unsteady two dimensional flow of water in unsaturated soil above an impervious barrier. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 83, 345-357.

- SMITH, I.M., SIEMIENIUCK, J.L., GLADWELL, I., 1977** - Evaluation of Norsett methods for integrating differential equations in time. *Int. J. for Num. and Anal. Methods in Geomechanics*, 1, 57-74.
- THIRRIOT, C., 1980** - Le devenir prochain de la pluie: infiltration ou ruissellement. *La Houille Blanche*, 4, 259-265.
- TURNER, N.C., PARLANGE, J.Y., 1974** - Lateral movement at the periphery of a one-dimensional flow of water. *Soil Sci.*, 118 (2), 70-77.
- VAN DER PLOEG, BENECKE, 1974** - Unsteady unsaturated n-dimensional moisture flow in soil: a computer simulation program. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 38, 881-885.
- VAUCLIN, M., HAVERKAMP, R., VACHAUD, G., 1979** - Résolution numérique d'une équation de diffusion non linéaire. P.U.G. Grenoble, 183p.
- WARMING, R.F., BEAM, R.M., 1978** - An extension of A-stability to alternating direction implicit methods. *BIT*, 19, 395-417.
- WARRICK, A.W., LOMEN, D.O., 1976** - Time-dependent linearized infiltration. III. Strip and disc sources. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 40, 639-643.
- WHISLER, F.D., KLUTE, A., 1965** - The numerical analysis of infiltration considering hysteresis into a vertical soil column at equilibrium under gravity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 29, 489-494.
- WOOD, W.L., LEWIS, R.W., 1975** - A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation. *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, 9, 679-689.
- WOODING, R.A., 1968** - Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Res. Res.*, 4 (6), 1259-1273.
- ZIENKIEWICZ, 1979** - La méthode des éléments finis. Mac Graw Hill, 3è ed.
- ZLATEV, Z., THOMSEN, P.G., 1979** - Application of backward differentiation methods to the finite element solution of time-dependent problems. *Int. J. for Num. Methods in Engin.*, 14, 1051-1061.
- ZYVOLOSKI, G., BRUCH, J.C., SLOSS, O.S., 1976** - Solution of equation for two dimensional infiltration problems. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 122, 65-70.

ANNEXE 1 - APPROXIMANTS DE NORSETT

Les polynomes de Laguerre sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1-x$$

$$L_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1-x}{n+1} \right) L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$$

On a donc besoin, pour implanter l'algorithme de Norsett, des polynomes de Laguerre jusqu'à $n = 5$ et de leurs dérivés.

L'application de la formule de récurrence ci-dessus conduit à :

$$L_0(x) = 1$$

$$L'_0(x) = 0$$

$$L_1(x) = 1-x$$

$$L'_1(x) = -1$$

$$L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

$$L'_2(x) = x-2$$

$$L_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x + 1$$

$$L'_3(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - 3$$

$$L_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

$$L'_4(x) = \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 6x - 4$$

$$L_5(x) = -\frac{x^5}{120} + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1$$

$$L'_5(x) = -\frac{x^4}{24} + \frac{5x^3}{6} - 5x^2 + 10x - 5$$

Les coefficients α pour les méthodes A-stables sont obtenus par résolution de $L'_{n+1}(1/\alpha) = 0$ (Pour un schéma d'ordre n). On obtient donc le tableau suivant :

$$n=1 \quad L'_2(1/\alpha) = 0 \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \quad L'_3(1/\alpha) = 0 \quad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = .788675 \\ \alpha_2 = .211344 \end{array}$$

$$n=3 \quad L'_4(1/\alpha) = 0 \quad \alpha = 1.068579018$$

$$\alpha_2 = .3045345772$$

$$\alpha_3 = .128864005$$

$$\begin{aligned}
n=4 \quad L'_5(1/\alpha) = 0 \quad \alpha_1 &= 1.34536642 \\
&\alpha_2 = .3888576712 \\
&\alpha_3 = .1744841757 \\
&\alpha_4 = .134536642
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$ et $n = 4$, on a utilisé une méthode Newton pour calculer les racines, celles-ci étant auparavant localisées par une méthode dichotomie.

Pour les schémas L-stables, on doit avoir : $L_n(1/\alpha) = 0$,

Les valeurs calculées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad L_1(1/\alpha) = 0 \quad \alpha &= 1 \\
n = 2 \quad L_2(1/\alpha) = 0 \quad \alpha_1 &= 1.7071067812 \\
&\alpha_2 = .2928932188 \\
n = 3 \quad L_3(1/\alpha) = 0 \quad \alpha_1 &= 2.405149579 \\
&\alpha_2 = .435866533 \\
&\alpha_3 = .1589839001 \\
n = 4 \quad L_4(1/\alpha) = 0 \quad \alpha_1 &= 3.100316736 \\
&\alpha_2 = .5728160625 \\
&\alpha_3 = .2204284103 \\
&\alpha_4 = .1064387921
\end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier, comme dit dans le texte du mémoire, que la méthode résultant de l'approximation de Norsett d'ordre 1 et A-stable est le schéma de Cranck-Nicholson habituel. En effet, l'algorithme pour les méthodes A-stables et pour $n = 1$, se réduit aux équations suivantes :

$$(a) \quad [[I] + \alpha \Delta t [K]] \cdot U_1(t) = \alpha \Delta t [[K] U(t) - f] \quad \text{et}$$

$$(b) \quad U(t + dt) = U(t) + \frac{1}{\alpha} L'_1(1/\alpha) U_1(t)$$

$$\text{or } L'_1 = -1 \quad \text{d'où} \quad (U(t + \Delta t) - U(t)) = -\frac{1}{\alpha} U_1(t)$$

En portant dans (a), on obtient :

$$[[I] + \alpha \Delta t [K]] (U(t + \Delta t) - U(t)) = - \Delta t [K] U(t) + \Delta t \{ f \}$$

$$\text{d'où } [[I] + \alpha \Delta t [K]] (U(t + \Delta t)) = [[I] - (1 - \alpha) \Delta t [K]] U(t) + \Delta t \{ f \}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient en particulier le schéma de Crank-Nicholson. Mais remarquons qu'on a la formule générale d'une méthode θ -stable avec ici $\theta = \alpha$ ($\theta \geq \frac{1}{2}$ pour la A-stabilité).

Par ailleurs, dans le cas L-stable et pour l'ordre 1, les équations se réduisent à $[[I] + \Delta t [K]] U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta t \{ f \}$

On obtient donc un schéma implicite.

ANNEXE 2 - DIFFERENCES FINIES

En reprenant les notations définies dans le mémoire, l'équation discrète en un noeud (i, j) s'écrit :

$$C_{i,j} \frac{dh_{ij}}{dt} = \frac{1}{(r'_{i+1} - r'_i)} \left[\frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{r_{i+1} - r_i} * b_H(r'_{i+1}, y_r) - \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{r_i - r_{i-1}} * b_H(r'_i, y_r) \right]$$

$$+ \frac{1}{(y'_{j+1} - y'_j)} \left[\frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} * b_V(r_i, y'_{j+1}) - \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} * b_V(r_i, y'_j) \right]$$

Cette expression est valable pour les noeuds intérieurs, c'est-à-dire pour : $i = 2, n_{r0}-1$ et $j = 2, n_{j}-1$

En numérotant les noeuds du maillage ligne par ligne, on obtient l'équation discrète suivante, avec $k = (j-1) * n_{r0} + i$ et $k_1 = (j-1) * (n_{r0}+1) + i$

$$C_k \frac{dh_k}{dt} = h(k-n_{r0}) \left(\frac{\alpha b_V(k)}{dz_p(j) \cdot dz(j-1)} \right) + h(k-1) * \left(\frac{\alpha b_H(k_1)}{dr_p(i) \cdot dr(i-1)} \right)$$

$$+ h(k+1) \left(\frac{\alpha b_H(k_1+1)}{dr_p(i) \cdot dr(i)} \right) + h(k+n_{r0}) \left(\frac{\alpha b_V(k+n_{r0})}{dz_p(j) + dz(j)} \right)$$

$$- h(k) \left(\frac{1}{dr_p(i)} \left(\frac{\alpha b_H(k_1+1)}{dr(i)} + \frac{\alpha b_H(k_1)}{dr(i-1)} \right) + \frac{1}{dz_p(j)} \left(\frac{\alpha b_V(k+n_{r0})}{dz(j)} + \frac{\alpha b_V(k)}{dz(j-1)} \right) \right)$$

(Les tableaux dz, dzp, dr, drp, ayant été définis dans le mémoire).

On introduit naturellement les conditions aux limites sur l'axe de symétrie en éliminant l'inconnue au moyen de l'équation discrète résultant de la condition de flux nul.

Il en est de même sur la frontière verticale extérieure et la frontière plancher. Quand on a une condition de type Dirichlet, l'équation correspondant à ce noeud là est enlevée du système différentiel.

Enfin, quand on a une condition de flux non nul, cela se traduit par l'introduction d'un vecteur contrainte. Par exemple, au noeud i_s où est imposé le flux résiduel, on aura :

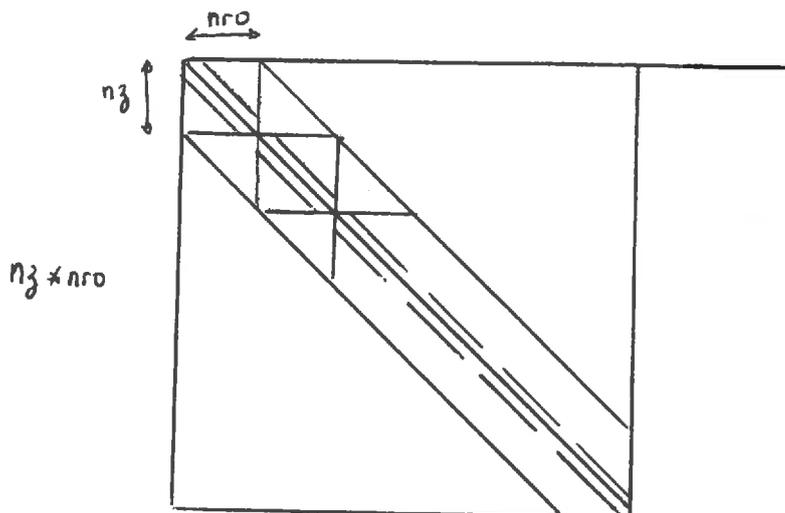
$$\begin{aligned}
 C_{i_s} \frac{dh_{i_s}}{dt} = & h_{i_{s-1}} \left(\frac{\alpha_b h(i_s)}{drp(i_s) \cdot dr(i_{s-1})} \right) + h_{i_{s+1}} \left(\frac{\alpha_b h(i_{s+1})}{drp(i_s) \cdot dr(i_s)} \right) \\
 & + h_{i_{s+nro}} \left(\frac{1}{dzp(z)} \left(\frac{\alpha_{br}(i_{s+nro})}{dz(z)} + \frac{\alpha_{br}(i_s)}{dz(z)} \right) \right) \\
 & - h_{i_s} \left(\left(\frac{\alpha_b h(i_{s+1})}{dr(i_s)} + \frac{\alpha_b h(i_s)}{dr(i_{s-1})} \right) \frac{1}{drp(i_s)} + \frac{1}{dzp(z)} \left(\frac{\alpha_{br}(i_{s+nro})}{dz(z)} + \frac{\alpha_{br}(i_s)}{dz(z)} \right) \right) \\
 & + \frac{1}{dzp(z)} \left(2 \cdot (Q_r + E_{i_s}) \cdot \alpha_{br}(i_s) / \alpha_b(i_s) \right)
 \end{aligned}$$

On remarque donc que $h_{i_{s+nro}}$ a vu son coefficient modifié à partir de l'introduction de :

$$h_{i_{s+nro}} = h_{i_{s+nro}} + 2 \cdot dz(z) \cdot (Q_r + E_{i_s}) / \alpha_b(i_s)$$

Il apparaît aussi un terme de sollicitation qui sera passé au second membre.

On récupère donc, à la fin, une matrice penta-diagonale, très facile à stocker et à manipuler. On voit clairement apparaître le découpage naturel en blocs.



ANNEXE 3 - ELEMENTS FINIS

Nous avons montré comment on pouvait ramener le problème à une seule équation pour les deux symétries.

$$(1) \quad L(h) = c(\psi) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(k(\psi) \frac{\partial h}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{où } h = \psi - z$$

$$\text{et } h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Omega \in \mathbb{R}^2, \Omega: \text{compact}$$

On note M le sous-espace vectoriel de $C^1(\Omega)$ défini par :

$$M = \left\{ f \in C^1(\Omega) / f|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ est défini par $(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g \, dw$

En projetant L(h) sur M selon le produit scalaire défini avant, on a :

$$(2) \quad (L(h), f) = \int_{\Omega} k(\psi) (\text{grad } h \cdot \text{grad } f) \, dw + \int_{\Omega} c(\psi) \frac{\partial h}{\partial t} \cdot f \, dw - \int_{\partial\Omega} f \cdot k(\psi) \frac{\partial h}{\partial n} \, ds$$

$(\text{grad } h \cdot \text{grad } f)$ désignant le produit scalaire sur \mathbb{R}^2

On se donne un sous-espace vectoriel \tilde{V} du complété de M (cf. page)

On note $(f_i)_{i=1, N}$ une base de \tilde{V} ($\dim \tilde{V} = N$)

On a alors h qui s'écrit dans cette base $h = \sum_{i=1}^N h_i \cdot f_i$
et on peut donc écrire :

$$(L(h), f_i) = 0 \quad \forall i=1, N$$

En portant dans les équations $(L(h), f_i) = 0$ la forme $h = \sum_{i=1}^N h_i \cdot f_i$

on obtient : $\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial t} \cdot f_i \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{i=1}^N h_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sum_{i=1}^N h_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial z}$

En portant dans (2), on obtient :

$$(3) \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial t} \cdot f_i \right) \cdot f_j \cdot c(h) \, d\omega = - \int_{\Omega} k(h) \left(\left[\sum_{i=1}^N h_i \frac{\partial f_i}{\partial r} \right] \frac{\partial f_j}{\partial r} + \left[\sum_{i=1}^N h_i \frac{\partial f_i}{\partial s} \right] \frac{\partial f_j}{\partial s} \right) d\omega$$

$$+ \int_{\partial\Omega} k(h) \cdot f_j \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \, ds \quad \forall j=1, N$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme suivante, en remarquant que les h_i sont des fonctions du temps uniquement :

$$(4) \sum_{i=1}^N \frac{dh_i}{dt} \int_{\Omega} f_i \cdot f_j \cdot c(h) \, d\omega = - \sum_{i=1}^N h_i \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{\partial f_j}{\partial r} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial f_j}{\partial y} \right] k(h) \, d\omega$$

$$+ \int_{\partial\Omega} k(h) \cdot f_j \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \, ds \quad \forall j=1, N$$

Si le tenseur de conductivité est anisotrope, on a :

$$(5) \sum_{i=1}^N \frac{dh_i}{dt} \int_{\Omega} f_i \cdot f_j \cdot c(h) \, d\omega = - \sum_{i=1}^N h_i \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{\partial f_j}{\partial r} k_u(h) + \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial f_j}{\partial y} k_r(h) \right] d\omega$$

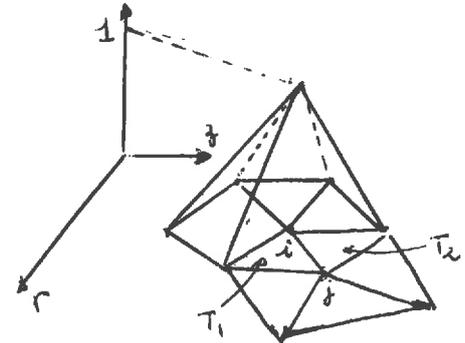
$$+ \int_{\partial\Omega} (k_u(h), k_r(h)) \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \cdot f_j \, ds \quad \forall j=1, n$$

La méthode des éléments finis consiste alors à choisir des fonctions de base (f_j) à supports compacts, de façon à ce que seul un petit nombre d'intégrales du type rencontré dans (5) soit non nulle. On a ainsi un système différentiel avec des matrices relativement creuses.

On associe donc à un découpage en éléments, généralement triangulaires, les éléments triangulaires étant les plus pratiques pour paver un domaine quelconque .

On peut alors définir les fonctions f_i , sur ce maillage, de façon simple. Si elles sont choisies linéaires, elles vaudront 1 au sommet i et 0 sur tous les autres. On a alors ce qui est habituellement appelé des fonctions chapeau. Le support de la fonction f_i est donc constitué par tous triangles ayant le noeud i en commun.

On voit donc que sur chaque triangle, on peut définir trois fonctions f_i correspondant aux trois sommets et valant 1 en chacun d'eux.



Il s'en suit que quand on considère des intégrales de la forme :

$\int_{\Omega} f_i \cdot f_j \, dw$ elles sont en fait réduite à l'interaction des supports

et donc réduite à $\int_{T_1 \cup T_2} f_i \cdot f_j \, dw$ où T_1 et T_2 sont deux triangles ayant \mathcal{E} coté (i, j) en commun (cf. figure)

Il en est de même pour les intégrales de la forme :

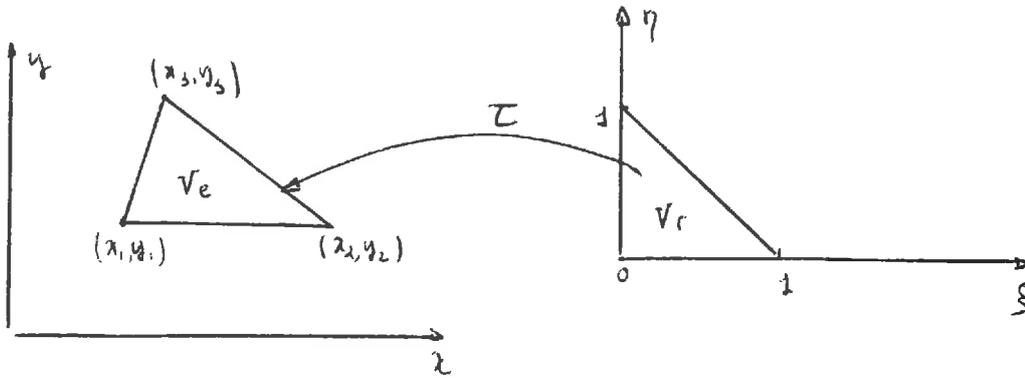
$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{\partial f_j}{\partial r} + \frac{\partial f_i}{\partial s} \frac{\partial f_j}{\partial s} \right) dw$$

On pourrait donc très bien calculer pour chaque sommet i de la triangulation, les intégrales du type défini ci-dessus, puisqu'il est relativement aisé de disposer de l'expression analytique des fonctions f_i et f_j .

En fait, on peut remarquer que chaque triangle peut être ramené à un triangle de référence à travers une transformation linéaire, facile à obtenir. Si on note (x, y) les coordonnées du système réel et (ξ, η) les coordonnées du système de référence, on a la transformation \mathcal{T} qui permet de passer de l'élément de référence à l'élément réel qui est donnée par :

$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

(cf. page suivante)



La deuxième remarque à faire est que les fonctions f_1, f_2, f_3 définies aux trois sommets du triangle V_e , admettent des expressions extrêmement simples sur le triangle V_r . En effet, on a :

au point (0,0)	$f_1 = 1 - \xi - \eta$
au point (1,0)	$f_2 = \xi$
au point (0,1)	$f_3 = \eta$

Enfin, on peut remarquer que pour établir les matrices du système différentiel, il est plus facile de travailler triangle par triangle que de boucler sur les noeuds. On peut facilement en étant sur un triangle, calculer les contributions de chaque noeud du triangle aux différentes intégrales. Ceci revient à établir des matrices de masse et de rigidité "élémentaires" pour chaque triangle. Il suffit ensuite de les expander, c'est-à-dire de reporter chaque élément de la matrice élémentaire et de le sommer avec ceux correspondant à la même position dans la matrice générale.

On voit donc qu'il suffit de savoir calculer des intégrales sur chaque élément. Le passage par l'élément de référence facilite grandement la tâche.

a) Intégrales du type
$$\int_{\Omega} f_i \cdot f_j C(h) dw = \sum_{V_e \in \mathcal{T}} \int_{V_e} f_i \cdot f_j C(h) dw$$

Si on note $[J]$, la matrice jacobienne de la transformation τ , on a :

$$\int_{V_e} f_i \cdot f_j C(h) dw = \int_{V_r} f_i \cdot f_j C(h) \det[J] d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f_i \cdot f_j \det[J] C(h) d\xi d\eta$$

Donc, si on considère un triangle de sommet i, j, k , la matrice de masse élémentaire de dimension (3.3) et symétrique, s'écrira :

$$\begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} & m_{i,k} \\ & m_{j,j} & m_{j,k} \\ & & m_{k,k} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad m_{i,i} = \int_0^i \int_0^{1-\eta} c f_1^2 d\xi d\eta$$

$$m_{i,j} = \int_0^i \int_0^{1-\eta} c f_1 f_2 d\xi d\eta$$

$$m_{i,k} = \int_0^i \int_0^{1-\eta} c f_1 f_3 d\xi d\eta$$

$$m_{j,k} = \int_0^i \int_0^{1-\eta} c f_2 f_3 d\xi d\eta$$

$$m_{j,j} = \int_0^i \int_0^{1-\eta} c f_2^2 d\xi d\eta$$

$$m_{k,k} = \int_0^i \int_0^{1-\eta} c f_3^2 d\xi d\eta$$

avec les définitions déjà fournies pour f_1, f_2, f_3 .

On a, en toute rigueur, la capacité capillaire qui s'écrit sur le triangle de référence :

$$C(h) = C(h, f_1 + h, f_2 + h, f_3)$$

c'est-à-dire qu'on a une fonction $C(s, \eta)$. En faisant l'hypothèse que le gradient de pression sur un élément n'est pas trop fort, c'est-à-dire que la variation de capacité est linéaire, on peut écrire :

$$C(h) = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 \quad C_i = C(h_i)$$

On a donc

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \det[J] \int_0^i \int_0^{1-\eta} f_i f_j f_k c_k d\xi d\eta \quad \begin{matrix} i=1,3 \\ j=1,3 \end{matrix}$$

On peut aisément calculer ces intégrales à la main. On obtient alors la matrice de masse élémentaire suivante :

$$[m] = \frac{\det[J]}{60} \begin{bmatrix} 3C_1 + C_2 + C_3 & C_1 + C_2 + C_3 & C_1 + C_2 + C_3 \\ & C_1 + 3C_2 + C_3 & C_1 + C_2 + C_3 \\ & & C_1 + C_2 + 3C_3 \end{bmatrix}$$

a) Intégrales du type :
$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} k_u(\mathbf{h}) + \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial f_j}{\partial y} k_v(\mathbf{h}) d\omega$$

En se plaçant sur un élément V_e de la triangulation (\mathcal{T}), on peut écrire sous forme matricielle l'expression suivante, donnant la matrice de rigidité élémentaire :

$$[k] = \int_{V_e} \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_j}{\partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x} \\ \frac{\partial f_j}{\partial y} \end{Bmatrix} d\omega$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$ désignant des vecteurs ligne et colonne).

En remarquant que
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x} \\ \frac{\partial f_j}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

et que
$$\left\langle \frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_j}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial \xi}, \frac{\partial f_j}{\partial \eta} \right\rangle ([J]^{-1})^T$$

on a :
$$[k]_{i,j} = \int_{V_e} \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial \xi}, \frac{\partial f_j}{\partial \eta} \right\rangle [J^{-1}]^T [k] [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \det [J] d\xi d\eta \quad \begin{matrix} i=1,3 \\ j=1,3 \end{matrix}$$

Remarquons que les fonctions $\frac{\partial f_1}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial \eta}$ sont constantes sur V_T

Posons
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité élémentaire s'écrit alors :

$$[k] = \int_{V_r} [B]^T [J^{-1}]^T [k] [J^{-1}] [B] \det [J] d\xi d\eta$$

Etant donné que l'inverse de la matrice Jacobienne est donné par :

$$[J^{-1}] = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & -(y_3 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

on a :

$$[k] = \frac{1}{\det[J]^2} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} k_H (y_3 - y_1)^2 + k_V (x_3 - x_1)^2 & k_H (y_3 - y_2)(y_2 - y_1) & k_H (y_3 - y_2)(y_1 - y_3) \\ & + k_V (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & + k_V (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ k_H (y_2 - y_1)^2 + k_V (x_1 - x_3)^2 & k_H (y_1 - y_3)(y_2 - y_1) & \\ & + k_V (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) & \\ & & k_H (y_1 - y_3)^2 + k_V (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix}$$

En écrivant : $k_H = k_{H1} f_1 + k_{H2} f_2 + k_{H3} f_3$

on a :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} k_H d\xi d\eta = \frac{1}{3} (k_{H1} + k_{H2} + k_{H3}) = \bar{k}_H \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^{1-\eta} k_V d\xi d\eta = \bar{k}_V$$

d'où :

$$[k] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} k_{H1} (y_3 - y_1)^2 & \bar{k}_H (y_3 - y_2)(y_2 - y_1) & \bar{k}_H (y_3 - y_2)(y_1 - y_3) \\ & \bar{k}_H (y_1 - y_1)^2 & \bar{k}_H (y_1 - y_3)(y_2 - y_1) \\ & & \bar{k}_H (y_1 - y_3)^2 \end{bmatrix} + \frac{\bar{k}_V}{\det[J]} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & \\ & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ & & (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix}$$

c) Intégrales de contour

L'utilisation du théorème de GREEN a fait apparaître des intégrales de la forme :

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot k(\psi) (\text{grad } h \cdot \vec{n}) ds$$

La frontière $\partial\Omega$ est naturellement découpée en éléments linéaires, constitués par les traces des triangles sur la frontière.

En notant $Q(s)$ le flux fonction de l'abscisse curviligne s , on a :

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot Q(s) ds$$

En reprenant les définitions de la page (), on a :

sur T_1 et T_2 $Q(s)=0$ et donc $\int_{T_1 \cup T_2} f \cdot k(\psi) (\text{grad } h \cdot \vec{n}) ds = 0$

sur T_3 $Q(x)=0$ si flux nul et donc $\int_{T_3} f \cdot k(\psi) (\text{grad } h \cdot \vec{n}) ds = 0$

Sur les morceaux de frontière où on n'a pas la condition de flux nul, soit on connaît la distribution du flux $Q(s)$, soit on a la condition de Dirichlet. La condition de Dirichlet s'introduit aisément en éliminant le degré de liberté correspondant dans le système linéaire.

Quand $Q(s) \neq 0$, on a :

$$\int_{\Pi} f \cdot Q(s) ds = \sum_e \int_{T_e} f \cdot Q(s) ds \quad \text{où } \Pi = \bigcup_e T_e$$

Sur un élément linéaire, les fonctions de base sont très simples et données par $f_1 = 1-x$ $f_2 = x$. Le concept d'élément de référence est là aussi très pratique et très simple.

On a : $\int_{V_e} f(s)Q(s) ds = \Delta l \int_0^1 Q(x)f(x) dx$ où Δl est la longueur de V_e .

En écrivant $Q(x)$ sous la forme : $Q(x) = Q_1 f_1(x) + Q_2 f_2(x)$

on a : $\int_{V_e} f(s)Q(s) ds = \Delta l \int_0^1 (Q_1 f_1(x) + Q_2 f_2(x)) f_i(x) dx \quad i=1,2$

La contribution de l'élément V_e est donc le vecteur élémentaire suivant :

$$\Delta l \begin{bmatrix} \int_0^1 f_1^2 & \int_0^1 f_1 f_2 \\ \int_0^1 f_1 f_2 & \int_0^1 f_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_e \end{Bmatrix}$$

d'où $\begin{Bmatrix} S_e \end{Bmatrix} = \frac{\Delta l}{6} \begin{bmatrix} 2Q_1 + Q_2 \\ Q_1 + 2Q_2 \end{bmatrix}$

L'expression de ces vecteurs conduit au vecteur sollicitation global, du second membre.

Le flux $Q(s)$ dans le cas de l'irrigation localisée est donné soit par l'évaporation à la surface : $Q(s) = -ETP$ sur \mathcal{T}_6 soit par $Q(s) = Q_{res} - ETP$ sur \mathcal{T}_5

-Application de la méthode des éléments finis à l'espace temps

Soit le système différentiel : $[c] \frac{dU}{dt} + [K]U - S = 0$ à intégrer sur l'intervalle $[0, T]$.

On applique un découpage à $[0, T]$ en éléments $[t_i, t_{i+1}] = V_i$.

Sur chaque élément, on se donne les deux fonctions de bases linéaires :

$N_i = 1-t$ et $N_{i+1} = t$. On cherche la solution sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i$$

On projette sur l'espace engendré par les fonctions de base N_i , et on a :

$$\int_0^T L(u) N_i dt = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(u) N_j dt = 0 \quad \forall j=1, N_f+1$$

Il est évident que si $j \neq i$ ou $j \neq i+1$ $\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(u) N_j dt = 0$

On peut donc considérer pour chaque élément $[t_i, t_{i+1}]$ sa contribution aux noeuds t_i et t_{i+1} .

Au noeud i , on a :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(u) N_i dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [C] \frac{d}{dt} (N_i u_i + N_{i+1} u_{i+1}) N_i + [K] (u_i N_i + u_{i+1} N_{i+1}) N_i - S N_i dt = 0$$

et au noeud $i+1$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(u) N_{i+1} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [C] \frac{d}{dt} (N_i u_i + N_{i+1} u_{i+1}) N_{i+1} + [K] (u_i N_i + u_{i+1} N_{i+1}) N_{i+1} - S N_{i+1} dt = 0$$

On a : $N_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}$ $N_{i+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ $\frac{dN_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta t}$ $\frac{dN_{i+1}}{dt} = \frac{1}{\Delta t}$

En introduisant ces expressions dans les intégrales précédentes, on obtient après calcul :

pour le noeud i : $-[C] \frac{u_i}{2} + [C] \frac{u_{i+1}}{2} + [K] \frac{u_i \Delta t}{3} + [K] u_{i+1} \frac{\Delta t}{6} + (2S_i + S_{i+1}) \frac{\Delta t}{2} = 0$

et pour le noeud $i+1$: $-[C] \frac{u_i}{2} + [C] \frac{u_{i+1}}{2} + [K] \frac{u_i \Delta t}{6} + [K] \frac{u_{i+1} \Delta t}{3} + \left(\frac{S_i + 2S_{i+1}}{6}\right) \Delta t = 0$

ce qui se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -\frac{[C]}{2} + \frac{[K] \Delta t}{3} & \frac{[C]}{2} + \frac{[K] \Delta t}{6} \\ -\frac{[C]}{2} + \frac{[K] \Delta t}{6} & \frac{[C]}{2} + \frac{[K] \Delta t}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2S_i + S_{i+1}}{6} \\ \frac{S_i + 2S_{i+1}}{6} \end{bmatrix} = 0$$

Si on prend sur $[t_i, t_{i+1}]$ des fonctions de pondération telles que :

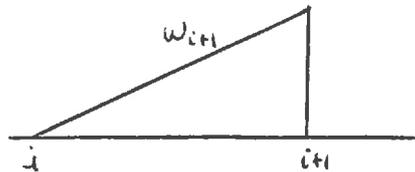
$w_i = 0$ et $w_{i+1} = 1$ alors, on a :

$$\left(-\frac{[c]}{2} + \frac{[k]\Delta t}{6}\right) u_i + \left(\frac{[c]}{2} + \frac{[k]\Delta t}{3}\right) u_{i+1} = -\frac{5c_i + 2S_{i+1}}{6}$$

c'est-à-dire étant donné qu'on connaît u_i :

$$\left([c] + 2\frac{[k]\Delta t}{3}\right) u_{i+1} = -\left[\frac{[k]\Delta t}{3} u_i + [c]\right]$$

C'est-à-dire qu'on retrouve le schéma implicite sur deux points, classique θ -stable, avec $\theta = \frac{2}{3}$



Si on prend sur $[t_i, t_{i+1}]$ des fonctions de pondération égales aux fonctions de base, on a un schéma sur trois points.