Méthodes statistiques appliquées à la conduite d'un élevage de veaux de boucherie

Francois Bonnieux

Série : A

N° d'Ordre : 66

N° de Série : 7

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE RENNES

pour obtenir

le titre de Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Probabilités

par

François BONNIEUX

Licencié ès Sciences

Sujet : Méthodes statistiques appliquées à la conduite d'un élevage de veaux de boucherie.

Soutenue le 12 juillet 1968 devant la Commission d'Examen

MM. A. BRUNEL Président

D. BERGMANN
J. LEGOUPIL Examinateurs

UNIVERSITÉ DE RENNES

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. BOCLÉ J.

Assesseurs

M. MAILLET P.
M. PRIGENT J.

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.

Professeurs Honoraires

M. ANTOINE L.
M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. MENEZ J.L.
M. GRILLET L.

Mathématiques

Professeurs

Mlle CHARPENTIER M.
M. GUERINDON J.
M. BOCLE J.
Mlle DELAVAULT H.
M. METIVIER M.
M. CEA J.
M. GIORGIUTTI I.

Maîtres de Conférences et Chargés de Cours

M. RAVIART P.
M. LEGOUPIL J.
M. HOUDEBINE J.
M. COATMELEC C.
M. BRUNEL A.
M. TOUGERON J.C.
M. EUVRARD D.
M. GOULAOUIC C.
M. LAZARD D.
M. NIVAT M.

Physique

Professeurs	Maîtres de Conférences et Chargés de Cours
M. VACHER M.	M. GUIDINI J.
M. VIGNERON L.	M. LE ROUX E.
M. LE BOT J.	M. DUBOST G.
M. MONOD-HERZEN G.	M. LE FLOCH J.
Mme ROBIN née SALOMOND	M. HAEUSLER C.
M. ROBIN S.	
M. LE MONTAGNER S.	
M. MEVEL J.Y.	
M. MEINNEL J.	
M. REGENSTREIF E.	
M. BRUN P.	

Chimie

Professeurs	Maîtres de Conférences et Chargés de Cours
M. SALMON-LEGAGNEUR F.	M. LUCAS J.
M. VENE J.	M. DUVAL J.
M. LEVAS E.	
M. PELTIER D.	
M. VALLET P.	
M. PRIGENT J.	
M. JOUAN P.	
M. FOUCAUD A.	
M. LANG J.	
M. CARRIE R.	
M. GUERILLOT C.	
M. KERFANTO M.	
M. WEIGEL D.	
M. DABARD R.	

Zoologie

Professeurs	Maîtres de Conférences et Chargés de Cours
M. RICHARD G.	M. REBECQ J.
M. MAILLET P.	M. MANIEY J.
M. BOISTEL J.	M. JOLY J.
M. RAZET P.	
M. FOLLIOT R.	
M. ALLEGRET P.	
M. POSTEL (Professeur associé)	

Botanique

Professeurs	Maîtres de Conférences et Chargés de Cours
M. NICOLLON DES ABBAYES H.	M. MAGNE F.
M. VILLERET S.	Mlle GOAS G.
M. CLAUSTRES G.	
Mlle GOAS M.	

Géologie

Professeurs	Maîtres de Conférences et Chargés de Cours
M. MILON Y.	M. BOILLOT G.
Mlle RENAUD A.	
Mlle DURAND S.	
M. PHILIPPOT A.	

Le Conseiller Administratif des Services Universitaires

M. R. BOURDIGUEL

AVANT-PROPOS

Ce travail s'insère dans un projet de recherches mené à la Station d'Economie Rurale de Rennes (Institut National de la Recherch Agronomique). Il n'a été rendu possible que grâce aux renseignements statistiques fournis par un certain nombre de firmes coopératives que je remercie ici.

Il m'est agréable d'exprimer à Monsieur LEGOUPIL ma gratitu Je lui exprime ma reconnaissance pour ses conseils et sa peine qu'il m'a ménagée. Que Monsieur BRUNEL qui a bien voulu présider le Jury de cette thèse trouve ici l'expression de mes remerciements. J'exprime également ma gratitude à Monsieur BERGMANN qui m'a guidé bien des foi

Je remercie aussi ceux de mes collègues qui m'ont aidé de leurs conseils. Je remercie enfin Mme BECDELIEVRE qui a mené a bien la tâche ingrate de la frappe du manuscrit.

.˙.

- INTRODUCTION -

Après avoir situé le problème, nous analysons les différen tes décisions qui interviennent pendant la période d'engraissement d'u lot de veaux de boucherie, puis précisons le critère de choix adopté.

1 - Position du problème

Depuis quelques années, la production industrialisée de viande de veaux de boucherie a tendance à se développer dans l'Ouest d la France. Elle est en général pratiquée sous forme intégrée. Ce développement nous a conduit à étudier l'organisation des ateliers et leur relations au sein d'un ensemble intégré. Dans le cadre de cette étude, notre travail porte sur la conduite d'un élevage donné en avenir aléatoire.

Avant de considérer un atelier isolé, analysons brièvement le rôle de la firme intégratrice. Les liaisons entre la firme et les ateliers sont à la fois d'ordre technique et d'ordre économique. La firme approvisionne les éleveurs en lots de veaux d'une dizaine de jours, qu'elle se procure sur les marchés ou dans les exploitations. Ce achats se répartissent dans une aire géographique d'étendue variable selon les plus ou moins grandes difficultés du moment. Elle fournit aux éleveurs les aliments et divers services d'assistance technique : plan d'alimentation, contrôle sanitaire ... Elle se charge aussi de la comme cialisation des animaux et de la rémunération des éleveurs. Enfin, elle a autorité pour traiter des problèmes d'interdépendance des ateliers, d conflits éventuels qui peuvent surgir entre ateliers ou sous-ensembles d'ateliers. L'exercice de cette autorité est facilité par le fait que la firme dispose de toute l'information disponible quant au fonctionnem de chaque atelier.

D'une manière générale la firme intégratrice apparaît comme un centre de relations : d'une part entre les marchés de matières premières (veaux d'une dizaine de jours, aliments) et les ateliers intégrés d'autre part entre ces mêmes ateliers et les marchés où sont écoulés les animaux. Ce centre de relations se charge donc d'organiser les entrées et les sorties du système formé par les ateliers qu'il intègre, d'organiser le fonctionnement de ce même système en particulier la conduite de chaque élevage.

Remarquons, qu'un modèle organisant le fonctionnement du système des ateliers peut être opérationnel au niveau de chaque atelier c'est-à-dire en permettre la conduite. Mais, construire un si vaste modèle conduit à introduire systématiquement un très grand nombre de variables (Lesourne pages 29-31). La difficulté est augmentée par le fait que certaines d'entre elles sont très difficiles à définir où même à cerner. Aussi nous orientons nous vers la construction de modèles qui permettent de programmer le fonctionnement d'un atelier donné. Cette démarche est plus simple car on peut évaluer correctement la valeur de ce qui entre et de ce qui sort de chaque atelier.

Nous préconisons pour l'atelier considéré une conduite optimale en un certain sens. Elle ne l'est pas nécessairement pour la firme elle risque à ce niveau d'être simplement suboptimale (Churchman page (

2 - Les différentes décisions possibles

Les décisions intervenant pendant la période d'élevage d'un lot de veaux et que nous prenons en compte, concernent soit le plan d'alimentation, soit l'arrêt de l'engraissement. Nous ne possédons pas assez d'éléments pour introduire dans nos modèles les décisions qui sont motivées par des modifications du milieu ambiant, des accidents de croissance ....

2-1 Décisions concernant le plan d'alimentation

Bien qu'il soit techniquement possible (tout au moins dans un élevage en batterie (1)) d'individualiser le choix du plan d'alimentation, on ne le fait pas car une telle attitude entraînerait de réelles complications. Pour un lot donné de veaux, le choix du plan d' limentation se fait parmi un petit nombre de possibilités, après examen du lot, en fonction d'une durée d'engraissement souhaitée et du type de veaux que l'on désire obtenir. A tout instant, suivant l'état de la croissance du lot, on peut être amené à réviser ce choix en adoptant un autre plan. Supposons par exemple, que désirant obtenir des veaux petits et lourds (2) on ait adopté un plan court à démarrage rapide et qu'au bout de quatre semaines environ les veaux aient peu profité : on préfèrera alors éventuellement un plan plus long.

Les décisions concernant le plan d'alimentation sont des décisions d'ensemble au sens où les actes qu'elles impliquent concernent tous les veaux du lot.

2-2 Décisions concernant l'arrêt de l'engraissement

Le choix de la date de vente du lot (ou d'une partie du lot dans le cas de grands lots) se fait suivant des critères donnés lorsqu'on a atteint (ou tout au moins approché) les objectifs fixés. Dans un certain intervalle de temps, on doit choisir à chaque instant entre deux issues qui s'excluent mutuellement : vendre ou ne pas vendre. Il s'agit de décisions d'ensemble.

---

(1) Alimentation au seau et logement des animaux en cases individuelles

(2) Ces veaux sont très appréciés sur le marché.

Il existe d'autres décisions qui sont par contre des déci sions partielles, car elles ne s'appliquent qu'à une partie du lot, le plus souvent à un veau isolé. Signalons qu'elles ne concernent que moins de 2 % des animaux. Lorsqu'une partie du lot profite mal, on pe décider d'interrompre son engraissement pour soit l'abattre, soit l'é lever pour donner des vaches laitières, s'il s'agit de femelles, ou p donner des gros bovins. Remarquons d'ailleurs que les chances de réus site de l'élevage d'une vache laitière ou d'un gros bovin, lorsqu'un animal a été engraissé pour en faire un veau de boucherie, sont minim De ce fait, la décision partielle la plus fréquente est celle de l'a battage.

Au cours de la période d'engraissement d'un lot, on est donc conduit à prendre des décisions d'ensemble et des décisions partielles. Les effets de ces décisions sont immédiats. Leurs conséquences se font aussi sentir à plus long terme. En effet dans la mesure où la durée d'engraissement varie, le nombre de lots élevés pendant une durée donnée peut varier.

3 - Critères de décision

Les critères de décision utilisables varient selon les situations, aussi fixons tout d'abord le cadre dans lequel nous travaillons.

3-1 Hypothèses de travail

Nous nous plaçons en courte période. Dans chaque atelier l technique d'élevage est constante. Il s'agit de la technique en batterie. L'atelier n'est considéré ni par rapport à l'ensemble intégré, ni par rapport au reste de l'exploitation, mais est supposé constituer un unité économique. Enfin nous n'étudions pas la formation des prix, ils sont donnés, ou prévus suivant les cas.

3-2 Critère retenu

Nous adoptons le critère de la maximisation du revenu de l'atelier dans ce qui suit. Compte tenu des statistiques dont nous di posons, il s'agit d'une marge brute. Nous indiquons cependant comment faire intervenir les coûts fixes.

Pour chaque lot nous optimisons le critère adopté. Il sera bien sûr préférable de ne pas se limiter à une seule période d'élevage, mais d'en considérer une suite finie. Nous optimiserons alors le critère adopté sur un historique plus long de l'atelier. Mais, ceci nécessiterait la connaissance au moins en probabilité des lots futurs. Donc, d'une part des statistiques détaillées sur la composition du cheptel, d'autre part sur les achats de veaux d'une dizaine de jours. Malheureusement nous ne possédons aucune de ces données. En admettant que nous les ayons, pour appliquer le critère à un nombre quelconque d périodes il faudrait adopter une méthode d'actualisation (Massé Chapitre 1) de façon à privilégier les résultats économiques proches et à pénaliser les résultats éloignés. Le choix d'une méthode d'actualisati est délicat car il est difficile de trouver une pondération de l'aveni qui soit à la fois peu sensible aux accidents et aux changements de la loi d'évolution de certains paramètres importants.

La première partie est consacrée à un modèle d'évolution d'un lot de veaux et insiste sur l'étude statistique d'un tel formalisme, la seconde développe des méthodes permettant de programmer les différentes décisions.

° ° °

PREMIERE PARTIE : MODELE D'EVOLUTION D'UN LOT DE VEAUX

Après avoir abordé la construction du modèle, nous en déve loppons l'étude statistique. Nous posons ensuite le problème de sa vér fication, et nous terminons cette partie en déterminant sa limite continue.

1 - Construction du modèle

Nous nous proposons de décrire l'évolution d'un lot donné de veaux pendant son engraissement au moyen d'un modèle mathématique. Le but à atteindre est de trouver une formalisation suffisamment réali te qui permette toutefois l'utilisation des techniques d'analyse et de calcul dont on dispose. Il y a donc deux excès à éviter : celui de fournir une solution élaborée à un problème simplifié au point d'en perdre toute signification, celui de fournir un modèle compliqué au point d'en être inutilisable.

Après avoir défini ce que nous entendons par état d'un lot de veaux, nous étudions la loi d'évolution de cet état au cours du temps.

1-1 Définition de l'état d'un lot

Considérons tout d'abord un seul veau ω et définissons son vecteur d'état à chaque instant t. Si l'animal est vivant à l'instant t il est parfaitement défini par p paramètres, qui forment par définitior son vecteur d'état $\alpha(\omega,t)$ à cet instant (Rosentiehl pages 8-10). Si l'a nimal est mort à l'instant t, nous posons $\alpha(\omega,t) = 0$. En général $p = 4$, les paramètres retenus étant ; le poids, la conformation, l'indice d'en graissement et la couleur de la viande.

Mais les barêmes de notation adoptés sur les marchés ne permettent pas de distinguer deux veaux dont les vecteurs d'état sont voisins. On munit ainsi à chaque instant l'ensemble des veaux de bouche rie d'une relation d'équivalence dont le sens est technique et économique. Nous définissons alors à tout instant t, s classes d'équivalence

$\Delta_1(t) \ldots \Delta_i(t) \ldots\ldots \Delta_s(t)$:

$$\forall t,\ R^p = \bigcup_{i=1}^{s} \Delta_i(t) \text{ avec } \Delta_i(t) \cap \Delta_j(t) = \phi \text{ si } i \neq j$$

ce qui nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 1 : On dit que le veau ω est dans l'état i ($1 \leqslant i \leqslant s$) à l'instant t si et seulement si :

$\alpha(\omega,t) \in \Delta_i(t)$

Lorsque deux veaux ne sont pas équivalents, il y en a un de meilleur que l'autre ce qui définit une relation d'ordre strict. Il est possible de numéroter à chaque instant les états de telle sorte que la condition suivante soit réalisée ce que nous supposerons par la suite :

- soient deux veaux quelconques ω_1 et ω_2 ; si ω_1 est dans l'état i à l'instant t, si ω_2 est dans l'état j au même instant et si $j > i$ alors le veau ω_2 est meilleur que le veau ω_1 à l'instant t.

Considérons maintenant un lot de n veaux. Il est inutile d'identifier chaque veau et de lui donner une existence propre qui le rende indépendant du reste du lot. Aussi pour être renseigné sur le lot, il suffit à chaque instant de compter combien il y a de veaux dans chaque état. Si $n_i(t)$ ($1 \leqslant i \leqslant s$) désigne le nombre de veaux qui sont dans l'état i à l'instant t, nous posons la définition :

Définition 2 - L'état du lot L de n veaux, à l'instant t est défini par le vecteur :

$$X(t) = [n_1(t), \ldots n_i(t), \ldots n_s(t)]$$

$$\text{où } \sum_{i=1}^{s} n_i(t) = n$$

$X(t) \varepsilon R^s$, contient toute l'information dont on dispose sur le lot et va s'avérer suffisamment synthétique. On peut encore dire que X (t) mesure la distribution des veaux entre les différents états 1, 2 .... s.

1-2 Description de l'évolution d'un lot

L'état du lot n'est susceptible de nous intéresser qu'à intervalles de temps réguliers, puisque nous visons à prendre des décisions séquentielles, aussi supposons désormais que le temps est une variable à valeurs entières (l'unité de temps est égale à deux jours). Faisons d'autre part l'hypothèse qu'il n'y a qu'un seul plan d'alimentation en jeu.

Considérons le cas d'un seul veau. L'évolution du veau, c'est-à-dire la succession de ses états ne peut pas être décrite par un modèle déterministe. En effet nous ne contrôlons pas un grand nombre de paramètres (en particulier ceux du milieu ambiant), dont d'ailleurs nous ignorons l'influence exacte qui est cependant loin d'être négligeable. Si nous faisons intervenir le hasard sous la forme d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, p)$ le modèle mathématique cherché se présente sous la forme d'une application qui au couple (ω, t) fait correspondre l'état de ω à l'instant t que nous notons $x(\omega, t)$. Il ne s'agit pas pour l'instant de discuter le bien fondé d'un tel formalisme, nous en jugerons en confrontant à la réalité, les résultats auxquels conduit le modèle.

L'évolution d'un veau étant décrite par un processus stochastique à valeurs entières, précisons en les propriétés. Il s'avère que la loi aléatoire d'évolution d'un veau après un instant t, sachant le passé avant t, ne dépend en fait que de l'état du veau à l'instant t

Posons qu'il en est ainsi par hypothèse :

Hypothèse 1 - Etant donné l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, p)$, les variables aléatoires discrètes $x(\omega,t)$ à valeurs dans $[1, 2 \ldots s]$ forment une chaîne de Markov finie.

Rien ne permet de poser que cette chaîne est homogène dans le temps, nous ne le supposerons donc pas. Soient deux instants u et v, $u < v$. Posons :

$$p_{ij}(u,v) = \text{Prob}\left[x(\omega,v) = j / x(\omega,u) = i\right] \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant s$$

la probabilité de transition de l'état i à l'état j depuis l'instant u jusqu'à l'instant v. Et désignons par P (u,v) la matrice de transition associée :

$$P(u,v) = \left[p_{ij}(u,v)\right] \quad (1 \leqslant i,j \leqslant s) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{s} p_{ij}(u,v) = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$$

En appliquant à trois instant t,u,v, $(t \leqslant u \leqslant v)$ la relation de Chapman Kolmogorov on a :

$$P(t,v) = P(t,u) \times P(u,v).$$

Lorsque $u = t-1$ et $v = t$ nous posons :

$$p_{ij}(t-1,t) = p_{ij}(t) \quad \text{et} \quad P(t-1,t) = P(t)$$

Si enfin $a(\omega,t)$ désigne la distribution de probabilité de $x(\omega,t)$ on a pour $u \geqslant t$:

$$a(\omega,u) = a(\omega,t)P(t,u).$$

Remarquons que nous connaissons avec certitude $x(\omega,o)$.

Considérons désormais le lot L de n veaux, si nous suiv l'évolution de chaque veau nous avons n réalisations du même proce: Connaissant l'état de L à l'instant t, on obtient l'espérance mathémat: de son état à tout instant u qui est ultérieur en appliquant la rel tion :

$$E[X(u)] = X(t) \times P(t,u).$$

Nous connaissons $X(0)$, c'est-à-dire l'état de L au dépa de l'engraissement, nous pouvons donc calculer l'espérance mathémati de son état au cours de l'engraissement. Nous posons alors la défini tion suivante :

Définition 3 - On appelle état prévu du lot L à l'instant u, connais son état à un instant t précédent, le vecteur $\tilde{X}(u)$ d ni par :

$$\tilde{X}(u) = E\,[X(u)]$$

L'engraissement d'un lot ayant une durée finie T, nous c sidérons donc une chaîne de Markov non homogène de longueur T. Cette chaîne est parfaitement définie par la suite des matrices de transit

$$P(1),\ P(2)\ \ldots\ P(T)$$

A chaque plan d'alimentation correspond une suite de mat: ces stochastiques, nous avons donc la proposition :

Proposition 1 - Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) On connaît le plan d'alimentation $\mathcal{P}$;

(b) on connaît la suite $[P(t)]$ $(1 \leqslant t \leqslant T)$ des matrice stochastiques associées à $\mathcal{P}$.

Nous avons donc à considérer autant de chaînes de Markov qu'il y a de plans d'alimentation. Un changement de plan d'alimentati se traduit pour un lot, par un changement de la loi aléatoire de son évolution.

2 - Estimation et étude asymptotique des estimés

2-1 Estimation des paramètres

Nous nous proposons d'estimer par la méthode du maximum de vraisemblance les paramètres $p_{ij}(t)$ $(1 \leq i,j \leq s)$ des matrices $P(t)$ $(1 \leq t \leq T)$. Nous observons donc n réalisations du processus, de longue T. C'est-à-dire que l'on considère la succession des états de n veaux indépendants soumis au même plan d'alimentation, depuis l'instant zér jusqu'à l'instant T. La réalisation du processus correspondant à ω_i s'écrit :

$$[x(\omega_i,o)\ x(\omega_i,1)\ \ldots\ x(\omega_i,t)\ \ldots.\ x(\omega_i,T)]$$

posons pour simplifier les notations :

$$x(\omega_i,t) = i(t)$$

L'échantillon des n réalisations se compose donc des n sui tes indépendantes S_i :

$$S_i = [i(o),\ i(1) \ldots\ i(T)] \qquad (1 \leq i \leq n)$$

appelons S cet échantillon.

Désignons par $n_{ij}(t)$ le nombre de veaux qui effectuent la transition de i à j de l'instant t-1 à l'instant t. Et, comme dans le paragraphe précédent appelons $n_i(t)$ le nombre de veaux qui sont dans l'état i à l'instant t.

Généralisons la notion de compte des transitions (Billing ley a page 14) au cas d'une chaîne non homogène :

Définition 4 - On appelle compte des transitions de l'instant t-1 à l'instant t, la matrice :

$$N(t) = [n_{ij}(t)] \qquad (1 \leq i,j \leq s)$$

Etudions la statistique formée par les comptes de transit et l'état initial de S. Notons que nous avons s^{T+1} suites S_i possible c'est-à-dire autant d'évènements différents, donc S prend ses valeurs dans l'espace à n s^{T+1} dimensions. Nous avons :

$$P(S) = \prod_{i=1}^{n} P(S_i)$$

où :

$$P(S_i) = p_{i(o)}\, p(1)_{i(o)i(1)} \ldots\ldots p(T)_{i(T-1)i(T)}$$

$p_{i(o)}$ désignant la probabilité initial de l'état i(o).

Nous en déduisons que :

$$P(S) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} p_i^{n_i(o)} \, p(t)_{ij}^{n_{ij}(t)}$$

donc les comptes des transitions et l'état initial forme une statistique exhaustive. Enfin cette statistique est minimale (Kendall page 194

Proposition 2 - Les comptes de transition et l'état initial constituen une statistique exhaustive minimale.

Les estimés du maximum de vraisemblance s'obtiennent en maximisant :

$$L = \text{Log } P(S) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i,j=1}^{s} n_i(o) \text{ Log } p_i + n_{ij}(t) \text{ Log } p_{ij}(t)$$

sous les sT+1 contraintes :

$$\sum_{i=1}^{s} p_i - 1 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(t) - 1 = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant s \qquad \text{et} \quad 1 \leqslant t \leqslant T)$$

ne sachant rien sur la distribution des $n_i(o)$ supposons qu'ils sont donnés. Nous examinerons par la suite le cas où ils ont une distributi multinomiale. Remarquons que cette difficulté n'intervient pas lorsqu' estime les paramètres d'une chaîne homogène de grande longueur, en eff lorsque la longueur de la chaîne tend vers l'infini l'état initial appo te une information négligeable par rapport à la quantité d'information totale (Bartlett, Billingsley a) ce qui reste vrai dans des cas plus généraux (Billingsley b).

<u>Hypothèse 2</u> - | $n_i(o)$ est donné pour tout $i \in [1, 2, \ldots s]$

Cette hypothèse est assez naturel lorsque l'on considère un lot donné de veaux et que l'on cherche à caractériser le plan d'alimentation qui leur est appliqué. Dans ce cas :

$$P(S) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} p_{ij}(t)^{n_{ij}(t)}$$

Les comptes de transition constituent alors une statistique exhaustive minimale.

$$L = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} n_{ij}(t) \operatorname{Log} p_{ij}(t)$$

nous maximisons L sous lessT contraintes :

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(t)-1 = o \qquad (1 \leq i,j \leq s \ ; \ 1 \leq t \leq T)$$

Le problème admet une solution unique (Aitchison et Silv
il nous suffit de la calculer. Introduisons les sT multiplicateurs d
Lagrange $\lambda_i(t)$, on maximise :

$$L_1 = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i,j=1}^{s} n_{ij}(t) \text{ Log } p_{ij}(t) - \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(t) \left[\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(t)-1 \right]$$

En dérivant on obtient les s (s+1) T équations suivantes :

$$\frac{\partial L_1}{\partial p_{ij}(t)} = \frac{n_{ij}(t)}{p_{ij}(t)} - \lambda_i(t) = o \qquad (1 \leq i,j \leq s \text{ et } 1 \leq t \leq T)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_i(t)} = -\left[\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(t)-1 \right] = o \qquad (1 \leq i \leq s \text{ et } 1 \leq t \leq T)$$

on en déduit les estimés des $\lambda_i(t)$ et des $p_{ij}(t)$:

$$\widehat{\lambda_i}(t) = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}(t) = n_i(t-1) \qquad (1 \leq i \leq s \text{ et } 1 \leq t \leq T)$$

et

$$\widehat{p_{ij}}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)} \qquad (1 \leq i,j \leq s \text{ et } 1 \leq t \leq T)$$

<u>Proposition 3</u> - L'estimé du maximum de vraisemblance de $p_{ij}(t)$ s'écri

$$\widehat{p_{ij}}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)} \qquad (1 \leq i,j \leq s \text{ et } 1 \leq t \leq T)$$

Nous remarquons que ces estimés sont les mêmes que ceux que nous aurions obtenus, si pour tout t et tout i, nous avions considéré $n_i(t-1)$ observations d'une distribution multinomiale à s issues possibles, les probabilités de ces issues étant $p_{ij}(t)$ $(1 \leq j \leq s)$ et le nombre de cas observés $n_{ij}(t)$ $(1 \leq j \leq s)$. Ceci d'ailleurs est tout à fait normal, car la distribution conditionnelle des $n_{ij}(t)$ $(1 \leq j \leq s)$ sachant la valeur des $n_i(t-1)$ est multinomiale, on a :

$$P\left\{n_{i1}(t) \ldots n_{ij}(t) \ldots\ldots n_{is}(t)/n_i(t-1)\right\}$$

$$= \frac{n_i(t-1)!}{\prod_{j=1}^{s} n_{ij}(t)!} \prod_{j=1}^{s} p_{ij}(t)^{n_{ij}(t)}$$

$$\text{avec} \quad \sum_{j=1}^{s} n_{ij}(t) = n_i(t-1)$$

Nous avons d'autre part :

$$P\left\{[n_{ij}(t)] \quad 1 \leq j \leq s \Big/ [n_g(u)]\right\} \quad 1 \leq g \leq s, \quad 0 \leq u \leq t-1$$

$$= P\left\{[n_{ij}(t)] \quad 1 \leq j \leq s \;/\; n_i(t-1)\right\}$$

pour tout t et tout i.

Pour calculer les estimés $\widehat{p_{ij}}(t)$, on considère à chaque instant le compte $N(t)$ des transitions. L'estimé de $p_{ij}(t)$ s'obtient en divisant le terme de rang (i,j) de $N(t)$, par la somme des éléments de la ligne i.

Signalons que ces résultats restent valables si l'on considère des réalisations du processus de longueurs différentes, pour une chaîne d'ordre supérieur à un (Thiebaux).

Calculons le biais de $\widehat{p_{ij}}(t)$:

$$E\left\{\widehat{p_{ij}}(t)\right\} = E\left\{E\left[\frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)}\right] / n_i(t-1)\right\}$$

$$. \; E\left\{n_{ij}(t)/n_i(t-1)\right\} = n_i(t-1)p_{ij}(t)$$

D'où :

$$E\left\{\widehat{p_{ij}}(t)\right\} = p_{ij}(t)$$

<u>Proposition 4</u> - L'estimé du maximum de vraisemblance $\widehat{p_{ij}}(t)$ est un es sans biais du paramètre $p_{ij}(t)$, pour tout i,j,t.

2-2 Distribution asymptotique des estimés

Nous nous proposons d'étudier la distribution conjointe limite des variables aléatoires $\sqrt{n}\left[\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)\right]$ $1\leq i,j\leq s$ et $1\leq t$ lorsque n tend vers l'infini. Notre démonstration est basée sur un thé orême du à Aitchison et Silvey (article cité, page 824) qui généralise des résultats classiques de Cramer.

Les variables aléatoires $\sqrt{n}\left[\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}(t)\right]$ $(1\leq i,j\leq s$ et $1\leq t\leq T)$ et $\widehat{\lambda_i}(t)$ $(1\leq i\leq s$ et $1\leq t\leq T)$ ont une distribution asymptotique normale centrée de matrice des variances-covariances de la forme

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

où la matrice A est la matrice des variances-covariances des variables $\sqrt{n}\left[p_{ij}(t) - p_{ij}(t)\right]$ et où B est la matrice des variances-covariances des variables $\widehat{\lambda_i}(t)$. Les variables $\widehat{\lambda_i}(t)$ et $\sqrt{n}\left[\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}(t)\right]$ sont donc asymptotiquement indépendantes (Métivier Chapitre IV proposition 7).

Déterminons les éléments de la matrice A, on écrit :

$$\sqrt{n}\,[\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)] = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}[n_{ij}(t)-n_i(t-1)p_{ij}(t)]}{\frac{1}{n}\,n_i(t-1)}$$

Etudions d'une part les variances et covariances du numérateur et leurs limites d'autre part la limite stochastique du dénominateur.

__Etude du numérateur__ :

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}[n_{ij}(t)-n_i(t-1)p_{ij}(t)] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{s}[n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)]$$

$n_{k;ij}(t)$ désignant le nombre de suites S_i d'état initial k, d'état i à l'instant t-1 et d'état j à t ; de façon analogue $n_{k;i}(t-1)$ désigne le nombre de S_i d'état initial k, d'état i à t-1, donc :

$$n_{k;i}(t-1) = \sum_{j=1}^{k} n_{k;ij}(t)$$

Les $n_k(o)$ $(1 \leq k \leq s)$ étant fixés, les variables aléatoires $n_{k;ij}(t)$ et $n_{l;gh}(t)$ sont indépendantes pour $k \neq l$; il suffit donc d'étudier les éléments de la matrice des variances-covariances des $n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)$ $(1 \leq i,j \leq s$ et $1 \leq t \leq T)$. La distribution de $n_{k;ij}(t)$ sachant $n_{k;i}(t-1)$ est multinomiale, le système de probabilités associées étant $p_{ij}(t)$ $(1 \leq j \leq l)$. Le calcul de la moyenne, des variances, des covariances est immédiat à partir de la fonction caractéristique. On obtient les résultats suivants :

$$E\left\{n_{k;ij}(t) \mid n_{k;i}(t-1)\right\} = n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)$$

d'où

$$E\left\{n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)\right\}$$

$$= E\ E\left\{[n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)] \mid n_{k;i}(t-1)\right\}$$

$$= 0$$

$$\operatorname{Var}\left\{n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)\right\}$$

$$= E\ E\left\{[n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)]^2 / n_{k;i}(t-1)\right\}$$

$$= E\left\{n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)\ [1-p_{ij}(t)]\right\}$$

$$= n_k(o)p_{ki}^{[t-1]}\ p_{ij}(t)\ [1-p_{ij}(t)]$$

en effet $n_{k;i}(t-1)$ est multinomiale pour l'échantillon de taille $n_k(o$
et les probabilités $p_{ki}^{[t-1]}$ $(1 \leq i \leq s)$ où $p_{ki}^{[t-1]}$ désigne la probabilité d'all
de k à i depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t-1 ; c'est le te
de rang (k,i) de la matrice P(o,t-1).

$$\operatorname{Cov}\left\{n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t), n_{k;ih}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ih}(t)\right\}$$

$$= E\left\{-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)p_{ih}(t)\right\}$$

$$= -\ n_k(o)p_{ki}^{[t-1]}\ p_{ij}(t)p_{ih}(t)$$

Enfin les variables aléatoires :

$$n_{k;ij}(t)-n_{k;i}(t-1)p_{ij}(t)$$

et

$$n_{k;gh}(u)-n_{k;g}(u-1)p_{gh}(u)$$

ne sont pas corrélées si $i\neq g$ ou $t\neq u$. Le calcul s'effectue comme précédemment en calculant tout d'abord la covariance sachant $n_{k;i}(t-1)$, $n_{k;g}(u-1)$ et $n_{k;ij}(t)$ lorsque $t\leqslant u$.

On en déduit alors :

$$E\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left[n_{ij}(t)-n_{i}(t-1)p_{ij}(t)\right]\right\} = 0$$

$$\operatorname{Var}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left[n_{ij}(t)-n_{i}(t-1)p_{ij}(t)\right]\right\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} n_k(o)p_{ki}^{[t-1]}\, p_{ij}(t)\left[1-p_{ij}(t)\right]$$

$$\operatorname{Cov}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left[n_{ij}(t)-n_{i}(t-1)p_{ij}(t)\right], \frac{1}{\sqrt{n}}\left[n_{gh}(u)-n_{g}(u-1)p_{gh}(u)\right]\right\}$$

$$= -\frac{\delta_{ig}(t-u)}{n}\sum_{k=1}^{s} n_k(o)p_{ki}^{[t-1]}\, p_{ij}(t)p_{gh}(u)$$

avec $\delta_{ii}(o) = 1$ et $\delta_{ig}(t-u) = o$ si $i \neq g$ ou $t-u \neq o$.

Les limites des variances et des covariances s'obtiennent facilement en posant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_k(o)}{n} = \eta_k \quad (\eta_k > o \text{ et } \sum_{k=1}^{s}\eta_k = 1)$$

La limite de la variance s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{s} n_k p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t) \left[1 - p_{ij}(t)\right]$$

$$= \phi_i(t-1) p_{ij}(t) \left[1 - p_{ij}(t)\right]$$

en posant :

$$\phi_i(t-1) = \sum_{k=1}^{s} n_k p_{ki}^{(t-1)}$$

$\phi_i(t-1)$ mesure la limite lorsque $n \to \infty$, du nombre moyen de veaux qui sont dans l'état i à l'instant t-1.

La limite de la covariance s'écrit alors :

$$- \delta_{ig}(t-u) \; \phi_i(t-1) \; p_{ij}(t) \; p_{gh}(u)$$

<u>Etude du dénominateur</u>

Nous avons :

$$\frac{n_i(t-1)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k,j=1}^{s} n_{k;ij}(t)$$

Les variables $n_{k;ij}(t)$ sont multinomiales, l'échantillon étant de taille $n_k(o)$ et les probabilités associées étant $p_{ki}^{[t-1]} \; p_{ij}(t)$. On a donc :

$$E\left\{n_{k;ij}(t)\right\} = n_k(o) \; p_{ki}^{[t-1]} \; p_{ij}(t)$$

D'après l'inégalité de Tschebyscheff $\forall \alpha > o$, on a :

$$P\left\{\left|\frac{n_{k;ij}(t)}{n} - \frac{n_k(o)}{n} p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t)\right| > \frac{\alpha}{n} \sqrt{Var\left[n_{k;ij}(t)\right]}\right\} < \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\text{avec } Var\left\{n_{k;ij}(t)\right\} = n_k(o) p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t) \left[1 - p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t)\right]$$

En posant : $\varepsilon = \frac{\alpha}{n} \sqrt{Var\left[n_{k;ij}(t)\right]}$; on trouve $\forall \varepsilon > o$:

$$P\left\{\left|\frac{n_{k;ij}(t)}{n} - \frac{n_k(o)}{n} p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t)\right| > \varepsilon\right\} < \frac{1}{n^2}$$

D'où :

$$\operatorname{st} \lim_{n \to \infty} \frac{n_{k;ij}(t)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n_k(o)}{n} p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t)$$

$$= \eta_k \, p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t)$$

Et enfin :

$$\operatorname{st} \lim_{n \to \infty} \frac{n_i(t-1)}{n} = \sum_{k,j=1}^{s} \eta_k \, p_{ki}^{[t-1]} p_{ij}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \eta_k \, p_{ki}^{[t-1]}$$

$$= \phi_i\left[t-1\right]$$

Si on ordonne les s^2 T paramètres $p_{ij}(t)$:

a) suivant les valeurs de t $(1 \leq t \leq T)$

b) pour une même valeur de t, suivant les valeurs de i $(1 \leq i \leq s)$,

c) pour une même valeur de (t,i), suivant les valeurs de j $(1 \leq j \leq s$

La matrice A est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & A_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_t & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & A_T \end{bmatrix}$$

A_t désigne la matrice des variances covariances des variables :

$$\sqrt{n}\,\left[\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}(t)\right] \qquad (1 \leq i,j \leq s)$$

donc ces variables sont asymptotiquement indépendantes pour deux valeurs différentes de t.

La matrice A_t $(1 \leq t \leq T)$ s'écrit :

$$A_t = \begin{bmatrix} A_{t1} & & & & & 0 \\ & A_{t2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{ti} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & A_{ts} \end{bmatrix}$$

A_{ti} est la matrice des variances covariances des variables

$\sqrt{n}\ [\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$ $(1 \leq j \leq s)$, donc ces variables sont asym

tiquement indépendantes pour deux valeurs différentes de i.

Finalement :

$$A_{ti} = [a_{ti}\ (j,k)] \qquad (1 \leq j,k \leq s)$$

Avec :

$$a_{ti}(j,j) = \frac{1}{\phi_i(t-1)}\ p_{ij}(t)\ [1-p_{ij}(t)]$$

et :

$$a_{ti}(j,k) = \frac{1}{\phi_i(t-1)}\ p_{ij}(t)p_{ik}(t)$$

La proprosition suivante résume ces résultats :

Proposition 5 - La distribution conjointe des variables aléatoires

$\sqrt{n}\ [\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$ $(1\leq i,j\leq s$ et $1\leq t\leq T)$

est asymptotiquement normale. La matrice des varia

covariances de la distribution limite est la matri

Ces variables sont donc asymptotiquement indépenda

pour deux valeurs différentes du couple (t,i).

On en déduit les corollaires suivants, qui nous seront utiles pour

tests d'hypothèses :

Corollaire 1 - Pour une valeur donnée du couple (t,i) les variabl

aléatoires $\sqrt{n\ \phi_i(t-1)}\ [\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$ $(1\leq j \leq s)$ et l

variables aléatoires $\sqrt{n_i\ (t-1)}\ [\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$ ont

même distribution limite lorsque n tend vers l'infi

Cette distribution limite est normale centrée, de variances $p_{ij}(t)\,[1-p_{ij}(t)]$ $(1 \leq j \leq s)$ et de covariances $p_{ij}(t)p_{ih}(t)$ $(1 \leq j,h \leq s)$.

Corollaire 2 - Les variables aléatoires $\sqrt{n\ \phi_i(t-1)}\ [\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$ sont asymptotiquement indépendantes pour deux valeurs différentes du couple (t,i). Il en est de même des variables aléatoires $\sqrt{n_i(t-1)}\ [\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$

On pourra donc étudier, pour une valeur donnée du couple (t,i), les variables $\widehat{p_{ij}}(t)$ $(1 \leq j \leq s)$ comme les estimés des probabilités d'une loi multinomiale, la taille de l'échantillon étant $n_i(t-1)$.
S se décompose alors en s X T échantillons asymptotiquement indépendant de tailles $n_i(t-1)$ $(1 \leq i \leq s$ et $1 \leq t \leq T)$.

Remarque : Nous aurions pu généraliser au cas non homogène la démonstration donnée par Anderson et Goodman dans le cas homogène. Nous aurions montré en utilisant la fonction caractéristique que la limite du numérateur était normale (généralisation du théorème de De Moivre Laplace), pour le dénominateur l'étude aurait été la même. Le théorème s'obtenait aussitôt (Legoupil pages 40-42).

2-3 Généralisation du modèle :

Abandonnons l'hypothèse suivant laquelle l'état initial de l'échantillon S est donné. La répartition des n veaux de l'échantillon se fait en s classes. Supposons donc que la distribution des variables aléatoires $n_i(o)$ $(1 \leq i \leq s)$ est multinomiale, les probabilités associées étant p_i $(1 \leq i \leq s)$. On obtient les estimés $\widehat{p_i}$ du maximum de vraisemblance des p_i, en maximisant la distribution marginale des $n_i(o)$, c'est-à-dire :

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{s} n_i(o)!} \prod_{i=1}^{s} p_i^{\,n_i(o)}$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{s} p_i - 1 = o$$

On obtient pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ l'estime :

$$\widehat{p_i} = \frac{n_i(o)}{n}$$

La théorie asymptotique précédente est très peu modifiée. En effet le variables aléatoires $n_{ij}(t)-n_i(t-1)p_{ij}(t)$ et $n_i(s)$ ne sont pas corré-lées. Comme $\frac{n_k(o)}{n}$ est un estimé correct de η_k, la distribution asymp tique des $\sqrt{n}\,[\widehat{p_{ij}}(t)-p_{ij}(t)]$ n'est pas changée.

3 - <u>Tests d'hypothèses</u>

3-1 Hypothèses fixant les probabilités de transition

a) Considérons tout d'abord, une hypothèse fixant à un in tant donné et pour un état donné les probabilités de transition corre pondantes. On teste donc H_o contre l'alternative H_1, ces hypothèses é définies par :

$$H_o \mid p_{ij}(t) = p^o_{ij}(t) \qquad (1 \leqslant j \leqslant s)$$

$$H_1 \mid p_{ij}(t) \quad (1 \leqslant j \leqslant s) \text{ quelconques.}$$

le couple (t,i) étant donné. Calculons le rapport de vraisemblance :

$$\lambda_i(t) = \prod_{j=1}^{s} \left[\frac{p^o_{ij}(t)}{\widehat{p_{ij}}(t)}\right]^{n_{ij}(t)}$$

On utilise le test asymptotique,

$$- 2 \text{ Log } \lambda_i(t) \to \chi^2 \quad (s-1) \ (n \to \infty)$$

s-1 étant le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre de paramètres indépendants. α étant le niveau du test, la région critiq est définie par :

$$\text{Prob} \left\{- 2 \text{ Log } \lambda_i(t) > \chi_o^2(s-1)\right\} = 1 - \alpha$$

la valeur χ_o^2 (s-1), se lisant dans la table du χ^2 à s-1 degrés de li- berté. Nous obtenons le même test, en calculant :

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{s} n_i(t-1) \frac{\left[\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}^o(t)\right]^2}{p_{ij}^o(t)}$$

dont la distribution asymptotique est la même que celle de

$- 2 \log \lambda_i(t)$.

Remarquons que nous avons supposé $p_{ij}(t) > o \quad (1 \leqslant j \leqslant s)$, c la réalité, il n'en est pas ainsi. Si $d_i(t)$ désigne le nombre d'éleme de l'ensemble :

$$D_i(t) = \left\{j / 1 \leqslant j \leqslant s \text{ et } p_{ij}(t) > o\right\}$$

nous avons $d_i(t)-1$ paramètres, on forme le rapport de vraisemblance comme précédemment et on obtient un χ^2 à $d_i(t)-1$ degrés de liberté.

Supposons que nous soyons conduits à rejeter H_o, on peut présumer que ce rejet est du à un écart important entre $p_{ij}(t)$ et $p_{ij}^o(t)$ pour une valeur déterminée de j. Pour s'en assurer, il suffit de tester la variable :

$$\sqrt{n_i(t-1)} \ \frac{\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}^o(t)}{\sqrt{p_{ij}^o(t) \left[1 - p_{ij}^o(t)\right]}}$$

comme une variable aléatoire normale centrée, réduite.

b) Soit H_o une hypothèse fixant toutes les probabilités transition à un instant donné soit H_1 l'alternative :

$$H_o \mid p_{ij}(t) = p^o_{ij}(t) \quad (1 \leqslant i,j \leqslant s)$$

$$H_1 \mid p_{ij}(t) \ (1 \leqslant i,j \leqslant s) \text{ quelconques.}$$

la valeur t étant fixé. On forme :

$$\lambda(t) = \prod_{i,j=1}^{s} \left[\frac{p^o_{ij}(t)}{\widehat{p_{ij}}(t)}\right]^{n_{ij}(t)}$$

et on remarque que l'on a :

$$- 2 \log \lambda(t) = \sum_{i=1}^{s} - 2 \log \lambda_i(t)$$

D'où :

$$- 2 \log \lambda(t) \to \chi^2 [s(s-1)] \quad (n \to \infty)$$

On peut encore procéder en calculant :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{s} S_i(t)$$

car les quantités $S_i(t)$ sont asymptotiquement indépendantes pour deux valeurs différentes de i.

$$S(t) \to \chi^2 [s(s-1)] \quad (n \to \infty)$$

Si certains $p_{ij}(t)$ sont nuls, on obtient un χ^2à d(t)-s degrés de liber où d(t) est le nombre d'éléments de l'ensemble :

$$D(t) = \left\{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq s \quad \text{et } p_{ij}(t) > o\right\}$$

$$d(t) = \sum_{i=1}^{s} d_i(t)$$

3-2 Tests quant à l'homogénéité de la chaîne :

a) Considérons l'hypothèse :

$H_o \mid p_{ij}(t) = p_{ij}$ $(1 \leq j \leq s)$ et $(1 \leq t \leq T)$, i étant fixé.

contre l'alternative

$H_1 \mid p_{ij}(t)$ quelconques.

Pour tester H_o contre H_1, on forme :

$$\lambda_i = \prod_{t=1}^{T} \prod_{j=1}^{s} \left[\frac{\widehat{p_{ij}}}{\widehat{p_{ij}(t)}}\right]^{n_{ij}(t)}$$

où $\widehat{p_{ij}}$ est l'estimé du maximum de vraisemblance de p_{ij}.

$$\widehat{p_{ij}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{T} n_{ij}(t)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{T} n_i(t-1)\widehat{p_{ij}}(t)$$

$- 2 \text{ Log } \lambda_i \rightarrow \chi^2\left[(s-1)(T-1)\right]$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On peut aborder le problème différemment, en considéran que pour tout i, l'ensemble $\widehat{p_{ij}}(t)$ à la même distribution asymptoti que les estimés des probabilités multinomiales $p_{ij}(t)$ pour T échant lons indépendants. Tester H_o contre H_1 est équivalent au test de l' mogénéité de ces échantillons. On forme donc :

$$S_i^2 = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{s} n_i(t-1) \frac{\left[\widehat{p_{ij}}(t)-\widehat{p_{ij}}\right]}{p_{ij}}$$

dont la distribution asymptotique est la même que celle de -2 log.

b) Testons l'hypothèse selon laquelle la chaîne est hom gène :

$$H_o \;|\; p_{ij}(t) = p_{ij} \quad (1 \leqslant i,j \leqslant s) \quad \text{et} \quad (1 \leqslant t \leqslant T)$$

$$H_1 \;|\; p_{ij}(t) \text{ quelconques.}$$

On forme :

$$\lambda = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} \left[\frac{\widehat{p_{ij}}}{\widehat{p_{ij}(t)}}\right]^{n_{ij}(t)}$$

$$-2 \log \lambda = \sum_{i=1}^{s} -2 \log \lambda_i$$

d'où :

$$-2 \log \lambda \to \chi^2\left[s(s-1)(T-1)\right] \text{ lorsque } n \to \infty.$$

On obtient le même résultat en formant :

$$S^2 = \sum_{i=1}^{s} S_i^2$$

qui tend vers un $\chi^2 \left[s(s-1)(T-1)\right]$ lorsque $n \to \infty$.

3-3 Test de l'hypothèse que plusieurs lots de veaux ont été tirés de la même population

Soient N ($N > 2$) lots, de taille $n^1 \ldots . n^h \ldots . n^N$. On pose

$$n = \sum_{h=1}^{N} n^h$$

Les notations sont les mêmes qu'auparavant, on met simplement l'indice h en exposant pour indiquer que la quantité considérée se rapporte au $h^{ième}$ lot. On teste H_o contre H_1 :

$$H_o | \; p_{ij}^h(t) = p_{ij}(t) \qquad (1 \leq i,j \leq 1) \quad \text{et} \quad (1 \leq t \leq T)$$

$$H_1 | \; p_{ij}^h(t) \text{ quelconques.}$$

Le rapport de vraisemblance s'écrit :

$$\lambda = \prod_{h=1}^{N} \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} \left[\frac{\widehat{p_{ij}(t)}}{\widehat{p_{ij}^h(t)}} \right]^{n_{ij}^h(t)}$$

avec :

$$\widehat{p_{ij}^h}(t) = \frac{n_{ij}^h(t)}{n_i^h(t-1)}$$

et :

$$\widehat{p_{ij}}(t) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{N} n_i^h (t-1) \, \widehat{p_{ij}^h}(t)$$

Le test s'obtient immédiatement, en effet :

$- 2 \log \lambda \to \chi^2 \left[s(s-1)(T-1)(H-1) \right]$ lorsque $n \to \infty$.

3-4 Test entre deux alternatives simples, spécifiant les probabilités de transition :

Supposons que nous ayons à choisir, entre deux alternative simples :

$$H_o \;|\; p_{ij}(t) = p^o_{ij}(t) \quad (1 \leqslant i,j \leqslant s) \text{ et } (1 \leqslant t \leqslant T)$$

$$H_1 \;|\; p_{ij}(t) = p^1_{ij}(t) \quad (1 \leqslant i,j \leqslant s) \text{ et } (1 \leqslant t \leqslant T)$$

Pour ce faire, nous disposons de résultats concernant différents lots de veaux, non nécessairement de même taille.

Soit :

$$P_{H_o}(h) \quad [\text{resp } P_{H_1}(h)]$$

la probabilité d'observer la réalisation correspondant au $h^{ième}$ lot lorsque H_o est vraie (resp. H_1).

$$R_k = \sum_{h=1}^{k} \frac{P_{H_1}(h)}{P_{H_o}(h)}$$

et on applique la procédure du test séquentiel du quotient des probabilités (Wald Chapitres 2 et 3). Deux constantes A et B, telles que $o < B < 1 < A < \infty$, étant choisies si :

$R_1 > A$ on rejette H_o et on accepte H_1.

$R_1 < B$ on accepte H_o et on rejette H_1.

$B < R_1 < A$, on considère un deuxième lot et on calcule R_2.

On itère de cette façon le procédé. Nous sommes certains d'aboutir après un nombre fini d'étapes presque sûrement. On choisit A et B en fonction des choix du niveau α et de la puissance β du test :

$$A \underset{-}{\sim} \frac{\beta}{1-\alpha} \quad B \underset{-}{\sim} \frac{1-\beta}{\alpha}$$

4 - Vérification du modèle

La suite $[P(t)]_{(1\leq t\leq T)}$ des matrices qui caractérisent plan d'alimentation ayant été déterminée, on se propose de vérifier le modèle particulier qui lui correspond en confrontant à la réalité les résultats auxquels il conduit. Appliquons le modèle, au vecteur d'état initial d'un lot de n veaux. On détermine la suite des états prévus :

$$[\tilde{X}(t)] \qquad (1\leq t\leq T)$$

avec :

$$\tilde{X}(t) = [\tilde{n}_1(t) \;....\; \tilde{n}_i(t) \;....\; \tilde{n}_s(t)]$$

D'autre part on observe la suite des états réalisés :

$$[X(t)] \quad (1 \leq t \leq T)$$

avec :

$$X(t) = [n_1(t) \;....\; n_i(t) \;....\; n_s(t)]$$

Pour chaque valeur de t, il s'agit de comparer $\tilde{X}(t)$ et $X(t)$. Une première méthode venant à l'esprit consiste à calculer le pourcentage de veaux qui se sont écartés des prévisions, c'est-à-dire :

$$\rho(t) = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^{s} |\tilde{n}_i(t) - n_i(t)|$$

malheureusement la loi de probabilité de $\rho(t)$ est compliquée, aussi e il plus simple d'utiliser un χ^2 pour tester la validité du modèle à chaque instant. On calcule alors :

$$\chi^2(t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{[\tilde{n}_i(t)-n_i(t)]^2}{\tilde{n}_i(t)}$$

qui suit la loi du χ^2 à s-1 degrés de liberté si tous les $\tilde{n}_i(t)$ sont non nuls.

Nous reprendrons ce problème en annexe, en examinant les modalités pratiques sur des exemples numériques.

5 - Limite continue du modèle

D'un instant à l'autre, nous constatons (les cas de morta- lité mis à part) que les seules transitions possibles sont locales ce qui nous conduit à poser l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3 - Si un veau est dans l'état i à l'instant t, à l'instant t+1, il sera en i-1, i ou i+1 si ($2 \leq i \leq s-1$). Si i=1, il sera en 1 ou 2 et si i=s il sera en s-1 ou s.

Donc si à l'instant t_o le veau considéré est en j, il n'y a que trois trajectoires possibles qui puissent le conduire en k à l'instant t+1, ce qui nous donne l'équation :

$$(1) p_{jk}(t_o,t+1) p_{jk-1}(t_o,t) p_{k-1k}(t+1) p_{jk}(t_o,t) p_{kk}(t+1) + p_{jk+1}(t_o,t) p_{k+1k}(t+1$$

en posant $p_{jo}(t_o,t) = p_{js+1}(t_o,t)$

Supposons que l'évolution du veau, se fasse par petits déplacements d'amplitude, Δx,o, ou Δx dans l'intervalle de temps Δt. Modifions les notations, soient $\theta(x,t)$ et $\phi(x,t)$ les probabilités partant de x à l'instant t d'être respectivement en $x - \Delta x$ et $x+\Delta x$ à l'instant $t+\Delta$ Soit $f(x_o,t_o; x,t)\, \Delta x$ la probabilité conditionnelle d'être en x à l' tant t sachant qu'on est parti de x_o à l'instant t_o. Les densités $f(x$ t_o; x t) satisfont à l'équation (2), qui s'obtient en réécrivant (1) dans ces nouvelles échelles. Posons pour simplifier l'écriture :

$$f(x_o,t_o;x,t) = f(x,t)$$

$$(2)\quad f(x,t+\Delta t)=f(x-\Delta x,t)\Theta(x-\Delta x,t)+f(x,t)\,\left[1-\Theta(x,t)-\phi(x,t)\right]$$

$$+\ f(x+\Delta x,t)\phi(x+\Delta x,t).$$

Nous allons étudier cette équation lorsque Δx et Δt tendent vers zér

Si le veau est en x à l'instant t, l'espérance d'un chang ment de position pendant Δt est :

$$\left[\Theta(x,t) - \phi(x,t)\right]\Delta x$$

ce qui donne si on introduit la moyenne instantannée $\beta(x,t)$ d'un char gement du processus :

$$\lim_{\Delta x,\Delta t\to o} \left[\Theta(x,t)-\phi(x,t)\right]\frac{\Delta x}{\Delta t} = \beta(x,t)$$

$$\text{où}\quad \beta(x,t) = \lim_{\Delta t\to o} E\left\{\frac{X(t+\Delta t)-X(t)/X(t) = x}{\Delta t}\right\}$$

$X(t)$ étant la valeur du processus, répérant le veau, à l'instant t. De même si $\alpha(x,t)$ désigne la variance instantanée d'un changement du processus, on obtient :

$$\lim_{\Delta x,\Delta t\to o}\left\{\Theta(x,t)+\phi(x,t)-\left[\Theta(x,t)-\phi(x,t)\right]^2\right\}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

$$= \alpha(x,t)$$

$$\text{où}\quad \alpha(x,t) = \lim_{\Delta t\to o} V\left\{\frac{X(t+\Delta t)-X(t)/X(t)=x}{\Delta t}\right\}$$

Posons :

$$(\Delta x)^2 = O(\Delta t),$$

et développons les deux membres de l'équation (2) jusqu'au 2ième ord par rapport à Δx, en supposant vérifiées les conditions de différent lité :

$$\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + o(\Delta t) = - \Delta x f(x,t)\left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right] - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}\left[\theta(x,t) - \phi(x,t)\right]$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2}{2} f(x,t)\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right] + (\Delta x)^2 \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\theta(x,t) + \phi(x,t)\right] + o(\Delta x^2)$$

Faisons tendre Δx et Δt vers zéro, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f(x,t)\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\beta(x,t) + \frac{1}{2} f(x,t)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha(x,t)$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2}\alpha(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \beta(x,t)\right]\frac{\partial f}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right] f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}$$

ou encore sous la forme :

$$(3) \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha(x,t)f(x,t)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\beta(x,t)f(x,t)\right] = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Par la même méthode en considérant au lieu de la relation (1) la relation :

$$p_{jk}(t_o,t)=p_{jj-1}(t_o+1)p_{j-1k}(t_o+1,t)+p_{ij}(t_o+1)p_{jk}(t_o+1,t)+p_{jj+1}(t_o+1)$$

$$+\ p_{j+1\ k}(t_o+1,t)$$

Nous aurions obtenu l'équation :

$$(4)\quad \frac{1}{2}\,\alpha(x_o,t_o)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2} + \beta(x_o,t_o)\,\frac{\partial f}{\partial x_o} = -\,\frac{\partial f}{\partial t_o}$$

Les équations (3) et (4) sont connues sous le nom d'équations de Kolmogorov et caractérisent les processus de diffusion. Elles admett une solution unique. La première permet de déterminer la distributio de $X(t)$ sachant $X(t_o)$, la seconde la distribution du premier temps de passage dans un état donné en fonction de $X(t_o)$. On trouvera une discussion des processus de diffusion et une bibliographie s'y rappo tant dans Bharucha-Reid (Chapitre 3). Nous avons obtenu la propositi

<u>Proposition 6</u> : La limite continue du modèle est un processus de dif fusion.

Après avoir construit un modèle décrivant l'évolution d'u lot de veaux, nous avons mis l'accent sur l'estimation des paramètre et sur les tests d'hypothèses. Cette étude est fondée pour l'essenti sur la proposition 5 (page 24). Accessoirement le modèle a été relié à un processus de diffusion.

DEUXIEME PARTIE : PROGRAMMATION DES DECISIONS

Nous présentons tout d'abord les principes de la méthode la programmation dynamique qui nous sont utiles. Nous réunissons un tain nombre d'éléments d'origine mathématique ou économique (Bellman, Bellman et Dreyfus, Fortet, Von Neumann et Morgenstern, Massé, Rosent et Ghouila-Houri). Puis nous nous attaquons au problème de la progran tion des décisions en utilisant deux types de critères. Nous montrons qu'il y a un double problème en effet certaines décisions arrêtent le processus d'évolution alors que d'autres le modifient simplement.

1 - Principes de la méthode

Après avoir donné quelques définitions, nous énonçons le principe d'optimalité (Bellman, Bellman et Dreyfus), puis une proposi tion fondamentale pour la suite, sous sa forme condensée (Pallu de la Barrière pages 324 et 325).

Revenons tout d'abord sur la distinction entre la décisio d'arrêt de l'engraissement et les décisions quant au choix du plan d' limentation. En effet, la première a pour résultat d'arrêter le proc sus d'évolution du lot, alors que les secondes en modifient uniquemen la loi aléatoire. Au début de l'étape t (qui va de l'instant t-1 à l' tant t), on choisit le plan d'alimentation parmi r plans possibles. C choix nous permet de définir la variable de décision y(t-1).

Définition 1: La variable de décision pour l'étape t ($1 \leq t \leq T$), est définie par :

$$y(t-1) = k \quad 1 \leq k \leq r$$

si et seulement si le plan $\mathcal{P}_k$ est adopté pour l'étape t.

De l'instant t-1 à l'instant t, deux sortes d'influences agissent sur l'évolution du lot, d'une part le choix de la décision, d'autre part le hasard. Nous pouvons séparer l'influence de ces deux phénomènes grâce au schéma théorique suivant. A l'instant t-1, le lot est dans l'état $X(t-1)$, on choisit $y(t-1)$ puis on attend que le hasard ait le temps de jouer. Cette position d'attente est entièrement définie par $X(t-1)$ et $y(t-1)$; nous la qualifierons d'état intermédiaire.

Définition 2 : On appelle état intermédiaire de l'étape $t(1 \leqslant t \leqslant T)$, l'état fictif qui résulte de l'état du lot au début de cette étape et du choix de la décision pour cette étape.

Donc pendant l'étape t, chaque état initial du lot est connecté à un certain nombre d'états intermédiaires, sans intervention du hasard. L'action de décider se ramène au choix de l'un d'entre eux. De même chaque état intermédiaire est connecté à l'état final du lot (pour l'étape), le hasard agissant seul. Le hasard détermine la connection effectivement réalisée, selon une loi de probabilité parfaitement définie par l'état intermédiaire en question.

Revenons à l'évolution du lot L ; celle-ci est régie par une équation de récurrence stochastique :

$$(1) \quad X(t) = F\left[X(t-1), y(t-1), t-1\right]$$

Cependant à chaque étape la variable de décision ne peut pas prendre n'importe laquelle des valeurs 1, 2, ... r. En effet on ne peut pas envisager d'adopter à chaque instant, un plan d'alimentation quelconque parmi tous ceux qui sont considérés. Nous introduisons donc le domaine $\Delta(t-1)$ des décisions permises à l'instant t-1 et nous avons :

$$y(t-1) \in \Delta(t-1) \text{ avec } \Delta(t-1) \subset [1, 2 \ldots r]$$

Définissons alors l'ensemble $H[t/X(t-1), y(t-1)]$ des états auxquels peut conduire à l'instant t, le couple $[X(t-1), y(t-1)]$, on a :

$$X(t) \in H\left[t/X(t-1), y(t-1)\right] \Longleftrightarrow \text{Prob}\left[X(t)/X(t-1), y(t-1)\right] > 0$$

Pour l'ensemble des décisions permises à l'instant t-1, l'ensemble des états possibles à l'instant t en partant de l'état X(t-1) sera :

$$H\,[t/X(t-1)] = \bigcup_{y(t-1)\varepsilon\Delta(t-1)} H\,[t/X(t-1),y(t-1)]$$

De proche en proche on définit l'ensemble des états possible à la date t, en fonction de l'état initial X(0). Si l'on suppose donné un ensemble des états initiaux, nous appelerons H(t) l'ensemble des états possibles à toute date t ultérieure ($t \geqslant 1$). Soit H un ensemble de référence contenant toutes les valeurs possibles de X(t) lorsque t varie de un à T :

$$\bigcup_{t=1}^{T} H(t) \subset H \subset R^{s}$$

Remarquons que la détermination du domaine des décisions permises, permet à chaque instant de tenir compte de préférences éventuelles ou de contraintes.

Nous considérons l'évolution du lot L, pendant T étapes.

<u>Définition 3</u> : Une suite y(0), y(1),... y(t),... y(T-1) telle que y(t) $\varepsilon\ \Delta$ (t) est appelée une stratégie.

Connaissant une stratégie et l'état initial du lot, les états ultérieurs sont déterminés par l'équation de récurrence (1). La suite X(0).... X(t)... X(T) est la trajectoire du lot associée à la stratégie y(0)... y(t) .... y(T-1).

Le problème est de rechercher pour un état initial donné, une stratégie optimale en un certain sens.

A chaque triplet [X(t-1), y(t-1), X(t)] on peut associer une valeur, qui est une variable aléatoire lorsque X(t) n'est pas connu. Cette remarque faite nous caractérisons chaque stratégie permise par la valeur d'un critère de la forme :

$$\sum_{t=1}^{T} v_{t-1}\left[X(t-1),y(t-1)\right] + V_T\left[X(T)\right]$$

Le critère permet de comparer deux stratégies et de choisir celles qui l'optimise (maximise ou minimise). Nous dirons que le critère est final lorsque l'on a :

$$v_{t-1}\left[X(t-1),y(t-1)\right] = 0 \qquad \forall\, t\in\left[1,2\,\dots\,T\right]$$

et que le critère est à composantes partielles si l'on a :

$$V_T\left[X(T)\right] = 0$$

Le lot ne pouvant prendre à chaque instant qu'un nombre fini d'états, on trace un graphe dont les sommets sont les états possibles du lot. Les arcs représentent les transitions permises. A chaque transition est attachée une valeur ainsi qu'une probabilité, et à chaque état final une valeur. Il s'agit alors de rechercher parmi tous les chemins menant de l'état initial à un des états finaux, un chemin dont l'espérance de la valeur soit optimale, ce qui du même coup nous donne une stratégie optimale. Une stratégie optimale est donc telle que, quelque soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une stratégie optimale par rapport à l'état résultant de la première décision. Cette assertion constitue le principe d'optimalité, dont nous donnons une version plus mathématique :

Principe d'optimalité :

Si une stratégie $\overline{y(0)}$, $\overline{y(1)}$ .... $\overline{y(T-1)}$ est optimale, il en est de même de la stratégie $\overline{y(t)}$ .... $\overline{y(T-1)}$ pour l'état initial $\overline{X(t)}$ et le critère :

$$\sum_{u=t+1}^{T} v_{u-1}\left[\overline{X}(u-1),y(u-1)\right] + V_T\left[X(T)\right]$$

$\overline{X(t)}$ étant l'état qui résulte de X(0) et de la stratégie $\overline{y(0)}$ .... $\overline{y(t-1)}$.

Introduisons la valeur optimale du critère depuis T-1 jusqu'à T :

$$V_{T-1}\left[X(T-1)\right] = \underset{y(t-1)\in\Delta(T-1)}{\text{opt}} v_{T-1}\left[X(T-1),y(T-1)\right] + V_T\left[X(T)\right]$$

et plus généralement sa valeur optimale de l'instant t $(0 \leqslant t \leqslant T-1)$ à l'instant T :

$$V_t\left[X(t)\right] = \underset{y(t)\ \in\Delta(t)}{\text{opt}} v_t\left[X(t),y(t)\right] + V_{t+1}\left[X_{t+1}\right]$$

Les conditions d'existence de ces maximums étant supposées remplies. Ces deux relations sont des équations d'actualisation. Nous pouvons alors énoncer la proposition fondamentale que nous avions annoncée. Pour la démonstration on se reportera à l'ouvrage de Pallu de la Barrière :

<u>Proposition 1</u> : On a :

$$V_t\left[X(t)\right] = \underset{y(t)\dots y(T-1)}{\text{opt}} v_t\left[X(t),y(t)\right] + \dots + v_{T-1}\left[X(T-1),y(T-1)\right] + V_T\left[X(T)\right]$$

où $y(t)\in\Delta(t)$ .... $y(T-1)\in\Delta(T-1)$.

Cette proposition admet deux corollaires :

Corollaire 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{y(0)}$.. $\overline{y(T-1)}$ soit optimale est que :

$$V_T\,[\overline{X(t)}] = v_t\,[\overline{X(t)},\overline{y(t)}] + V_{T+1}\,[\overline{X(t+1)}] \quad (0 \leq t \leq T-1)$$

$\overline{X(t)}$ et $\overline{X(t+1)}$ étant les états résultants de l'état initial et de la stratégie.

Corollaire 2 : Si une stratégie $\overline{y(0)}$ .... $\overline{y(T-1)}$ est optimale, la stratégie $\overline{y(0)}$ .... $\overline{y(t-1)}$ est optimale (l'état initial restant inchangé) pour le critère :

$$v_o\,[X(0),y(0)] + \ldots + v_{t-1}\,[X(t-1),y(t-1)] + V_t\,[X(t)]$$

Inversement si $\overline{y(0)}$ .... $\overline{y\ (t-1)}$ est optimale pour ce critère, elle peut se prolonger en une stratégie optimale pour le critère initial.

La notion de stratégie constitue un outil conceptuel suffisant, en effet à mesure qu'au cours du temps l'aléatoire devient connu, elle n'a pas a être révisée. "La raison en est que, la stratégie est supposée spécifier chaque décision particulière comme une fonction du montant exact d'informations disponibles au moment où cette décision doit intervenir" (Von Neumann et Morgenstern). Si nous avons considéré que la décision optimale serait $y(t)$ si $X(t)$ se réalisait ; $y\ (t)$ reste optimale lorsque $X(t)$ se réalise. Le seul cas de révision de la stratégie est celui, où des écarts trop grands se produisent entre prévisions et réalisations.

2 - Emploi d'un critère final

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de déterminer le plan d'alimentation et la date de fin d'engraissement optimisant un critère final facilement accessible.

2-1 Définition du vecteur des revenus attendus

Nous disposons de fiches de résultats économiques qui nous renseignent sur la recette rapportée par veau ainsi que sur le montant des charges variables par animal. Caractérisons alors chaque état i ($1 \leq i \leq s$) à l'instant t ($1 \leq t \leq T$) par le revenu (il s'agit en fait d'un marge brute) que rapporterait un veau vendu à l'instant t et qui serait dans l'état i. Le calcul de la recette suppose uniquement connues des prévisions de trois mois en trois mois. Quand au calcul des charges variables il ne présente aucune difficulté. En effet le prix d'achat du veau et celui des aliments sont parfaitement connus, or ces deux élémen représentent la presque totalité des charges variables.

Si $V_i(t)$ désigne le revenu attendu de la vente à l'instant t d'un veau qui est dans i à cet instant, nous définissons le vecteur des revenus attendus à l'instant t par :

$$V(t) = \left[V_1(t) \ldots . \; V_i(t) \; \ldots . \; V_s(t)\right]$$

2-2 Détermination de la date de fin d'engraissement

On considère le lot L de n veaux et un plan d'alimentation unique. On détermine la durée d'engraissement qui maximise le revenu attendu de la commercialisation de L.

Le revenu attendu de la vente de L à la date T est défini par :

$$V(L,T) = \tilde{X}(T) \, x V'(T),$$

où $V'(T)$ désigne le transposé du vecteur $V(T)$ et où $\tilde{X}(T)$ est l'état prévu de L à la date T :

$$\tilde{X}(T) = X(0) \times P(0,T)$$

La durée T de l'engraissement peut varier pour des raisons d'ordre technique entre les valeurs de T_1 et T_2. On obtient donc la valeur optimale de T par :

$$V(L) = \max_{T_1 \leqslant T \leqslant T_2} V(L,T)$$

Pour faire le calcul il suffit donc de calculer les valeurs de V(L,T) pour $T_1 \leqslant T \leqslant T_2$ et de les comparer. Nous pouvons introduire des contraintes sur la valeur de T. En effet certaines valeurs de la durée d'engraissement, quoique comprises entre T_1 et T_2 peuvent être interdites pour des raisons extérieures à l'atelier considéré. Si $\widehat{T}$ désigne l'ensemble des valeurs permises de la durée, on détermine sa valeur optimale par :

$$V(L) = \max_{T \in \widehat{T}} V(L,T)$$

2-3 Détermination du plan d'alimentation

Soient r plans d'alimentations, on choisit par une valeur T de la durée celui qui maximise le revenu attendu. Il suffit de calculer :

$$V(L,T) = \max_{1 \leqslant k \leqslant r} V(L,T,k)$$

où V(L,T,k) désigne le revenu attendu de la commercialisation de L, à l'instant T si on lui applique le plan k.

Si maintenant on se propose de faire le double choix du plan d'alimentation parmi les r plans et de la durée d'engraissement. On détermine le couple optimal, c'est-à-dire celui qui maximise le revenu attendu ; ce dernier est donné par :

$$V(L) = \max_{T \in \widehat{T}} \max_{1 \leqslant k \leqslant r} V(L,T,k)$$

Modifions quelque peu le problème et supposons que nous ayons à déterminer le plan optimal lorsque T décrit $\hat{T}$. Mis à part le pl[illegible] qui assure le revenu maximum pour une valeur déterminé de T; nous avon[illegible] plusieurs solutions. Choisissons par exemple le plan donnant le meille[illegible] résultat moyen, c'est-à-dire celui qui maximise la somme des revenus lorsque T décrit $\hat{T}$, c'est-à-dire tel que :

$$\max_{1 \leq k \leq r} \left[\sum_{T \in \hat{T}} V(L,T,k) \right]$$

Si deux plans assurent le même revenu moyen, ou des résultats voisins, on préfèrera le plus régulier.

2-4 Révision des choix

Le couple (T,k) qui assure le revenu attendu maximum ayant été déterminé à l'instant initial, supposons qu'au cours du temps l'éta[illegible] du lot s'écarte des valeurs prévues, sur la base desquelles ont été fai[illegible] les choix de la durée d'engraissement et du plan d'alimentation. Nous devons réviser alors nos décisions sur la base de la valeur effectivement réalisée. Si cette révision se fait à l'instant t, il suffit de reprendre les calculs précédents en déterminant le couple (T,k) qui assure un revenu maximum depuis la date t jusqu'à la fin de l'engraissement. L'état initial étant X(t) et $\tilde{X}(T)$ étant donné par :

$$\tilde{X}(T) = X(t) \times P\,(t,T)$$

Nous voyons qu'il est capital de vérifier à chaque instant la concordance entre prévisions et réalisations.

Il se peut qu'accidentellement une partie l du lot (le plus souvent il s'agira d'un animal isolé) profite mal. Nous pouvons être amenés à prendre une décision partielle quant à l'avenir des veaux de l, consistant à arrêter leur période d'engraissement en tant que veaux de boucherie et à les retirer de l'atelier. Pour décider d'un choix éventuel nous calculons le revenu que l'on pourrait attendre de l'évolution ultérieure de l. Nous sommes ici dans le cas d'une révision partielle des choix.

Nous venons de donner des méthodes simples pour décider des choix du plan d'alimentation et de la date d'arrêt de l'engraissement, ainsi que de la révision de ces choix. Nous avons décidé en maximisant le revenu procuré par le lot. Remarquons que le choix du plan d'alimentation est fait une fois pour toute à l'instant initial et reste valable jusqu'à la fin de la période d'élevage (à moins d'un écart accidentel entre prévisions et réalisations). Mais il se peut que l'on obtienne un revenu supérieur en utilisant un premier plan, puis un autre ... Nous devons donc nous orienter vers les choix, assurant un revenu maximum, d'une stratégie $y(o)$ ... $y(t)$ .... $y(T-1)$ et d'une valeur de T. Cette nouvelle analyse affinée va être possible en utilisant un critère à composantes partielles. Les choix obtenus en utilisant le revenu final ne seront plus optimaux pour ce nouveau critère.

3 - Critère à composantes partielles

Après avoir montré comment obtenir un critère à composantes partielles en décomposant le revenu final, nous abordons les mêmes questions que dans le paragraphe précédent en utilisant ce nouveau critère.

3-1 Décomposition du revenu final

Supposons que nous ayons observé l'évolution du lot L de l'instant zéro à l'instant T. V(L,T) continuant à représenter le revenu attendu correspondant, nous avons :

$$V(L,T) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(0,T)$$

où $\rho_i(0,T)$ est le revenu final rapporté par le ième veau du lot.

Mais on peut écrire que :

$$\rho_i(0,T) = \sum_{t=1}^{T} \rho_i(t-1,t)$$

où $\rho_i(t-1,t)$ est le revenu partiel rapporté dans la transition qui s'est effectuée de l'instant t-1 à l'instant t :

ce revenu partiel s'obtient en appliquant la formule :

$$\rho_i(t-1,t) = a_i(t)-a_i(t-1)-b_i(t-1,t)$$

$a_i(t)$ étant la recette éventuelle rapportée par le veau s'il était vendu à l'instant t et b_i $(t-1,t)$ étant le montant des charges variables pour l'étape t. Cette optique consiste à considérer que le revenu se forme par étape. Nous pouvons alors écrire que :

$$V(L,T) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(t-1,t)$$

et

$$\rho(t-1,t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(t-1,t)$$

mesure le revenu partiel rapporté par le lot L, pendant l'étape t.

Par cette approche, nous considérons que chaque transition apporte sa contribution au revenu final. Nous avons donc déduit un critère à composantes partielles qui va nous permettre d'affiner notre analyse. Remarquons que l'emploi de ce critère nécessite beaucoup plus d'informations que l'emploi du critère final. En effet nous devons posséder en particulier des statistiques détaillées sur les charges variables en cours d'engraissement.

3-2 Détermination de la date de fin d'engraissement

Considérant un seul plan d'alimentation, résolvons le problème du choix de la date de fin d'engraissement qui maximise le reven en utilisant les revenus partiels que nous venons de mettre en évidenc Traitons, tout d'abord, le cas où le lot considéré ne compte qu'un seu veau. A la transition qui se produit de l'instant t-1 à l'instant t et qui conduit de l'état i à l'état j, nous associons le revenu partiel r (t). Nous définissons donc, la matrice des revenuspartiels qui correspondent à l'étape t :

$$R(t) = \left\{ r_{ij}(t) \right\} \quad (1 \leq i,j \leq s)$$

Si le veau est dans l'état i à l'instant t-1, l'espérance du revenu pa tiel qu'il procure pendant l'étape t est donnée par :

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{s} r_{ij}(t) p_{ij}(t)$$

D'autre part, désignons par $v_i(t-1,T)$ l'espérance du revenu que procurera ce même veau de l'instant t-1 à l'instant T s'il est dans l'état i à l'instant t-1. On a :

$$V_i(t-1,T) = \sum_{j=1}^{s} v_j(t,T) p_{ij}(t) + q_i(t),$$

avec la condition :

$$v_i(T,T) = 0$$

Ce qui définit une relation de récurrence rétrograde qui permet connaissant les matrices P(t) et R(t), de calculer $v_i(t,T)$ pour toute valeur de t comprise entre zéro et T. Si nous désirons choisir la date de fin d'engraissement à l'instant t-1, nous déterminons une valeur T_o

telle que :

$$v_i(t-1,T_o) = \max_{T \in \widehat{T}} v_i(t-1,T)$$

où $\widehat{T}$ continue à désigner l'ensemble des valeurs permises de T.

Définissant d'une part le vecteur des espérances des revenus pour l'étape t et d'autre part celui des espérances des revenus de l'instant à l'instant T, c'est-à-dire :

$$q(t) = [q_1(t) \ldots\ldots q_i(t) \ldots\ldots q_s(t)]$$

et,

$$v(t,T) = [v_1(t,T) \ldots\ldots v_i(t,T) \ldots\ v_s(t,T)]$$

on a la relation suivante :

$$v(t-1,T) = v(t,T)\, P(t) + q(t)$$

ainsi que la relation :

$$v(T,T) = 0$$

Si nous considérons maintenant le lot L de n veaux, la méthode se généralise. Supposons que nous désirions déterminer T, connaissant l'état X(t) de L à l'instant t.

$$X(t) = [n_1(t) \ldots\ldots n_i(t) \ldots\ldots n_s(t)]$$

l'espérance du revenu que procurera L de l'instant t à l'instant T est donné par :

$$V(L,t,T) = n_1(t)v_1(t,T)+\ldots+n_i(t)v_i(t,T)\ldots+n_s(t)v_s(t,T)$$

$$= X'(t) x v(t,T)$$

où $X'(t)$ est le transposé de $X(t)$.

La valeur de T choisit est une valeur qui maximise $V(L,t,T)$; soit T_o :

$$V(L,t,T_o) = \max_{T \in \hat{T}} V(L,t,T)$$

En pratique on désire déterminer la date de fin d'engraiss ment dès l'instant initial, sur la base de la connaissance de $X(0)$:

$$V(L,T_o) = \max_{T \in \hat{T}} V(L,T)$$

en posant : $V(L,0,T) = V(L,T)$

$$= X'(0) \times v(0,T)$$

Nous pourrions reprendre le problème de la comparaison de divers plans d'alimentation, dans la même optique que dans le cas de l'emploi des revenus finaux. Nous chercherions alors un plan optimisant $V(L,T)$ lors que T décrit $\hat{T}$. La méthode serait évidemment identique.

3-3 Détermination d'une stratégie et d'une durée d'engraissement optimales

Nous avons toujours r plans d'alimentation et nous proposo de déterminer une stratégie $y(0)$ .... $y(t)$ .... $y(T-1)$ optimale la dur d'engraissement T étant fixée. Raisonnons pour commencer sur le cas d'u seul veau.

Au plan k ($1 \leq k \leq r$) sont associées :

a) Les matrices de probabilité de transition,

$$P(t,k) = [p_{ij}(t,k)] \quad 1 \leqslant i,j \leqslant s$$

de l'instant t-1 à l'instant t ;

b) Les matrices de revenus partiels,

$$R(t,k) = [r_{ij}(t,k)] \quad 1 \leqslant i,j \leqslant s$$

de l'instant t-1 à l'instant t ;

c) le vecteur de l'espérance des revenus

$$q(t,k) = [q_1 (t,k) \ldots . \ q_i(t,k) \ \ldots . \ q_s(t,k)]$$

pour l'étape t,

d) le vecteur de l'espérance des revenus,

$$v(t,T,k) = [v_1(t,T,k) \ \ldots . \ v_i(t,T,k) \ \ldots . \ v_s(t,T,k)]$$

de l'instant t à l'instant T.

Si le veau est dans l'état i, à l'instant t-1 l'espérance du revenu partiel moyen perçu lors de la transition qui s'effectue de l'instant t-1 à l'instant t est :

$$q_i(t,k) = \sum_{j=1}^{s} r_{ij}(t,k) p_{ij}(t,k)$$

si l'on applique le plan k. Si v_i (t-1,T) désigne le maximum de l'espérance du revenu perçu de l'instant t-1 à l'instant T, si le veau est dans l'état i à l'instant t-1, on a :

$$(1)\quad v_i(t-1,T) = \max_{1\leqslant k\leqslant r}\left[\sum_{j=1}^{s} v_j(t,T)p_{ij}(t,k)+q_i(t,k)\right]$$

ainsi que la condition :

$$v_i(T,T) = 0$$

Ces deux relations permettent de calculer $v_i(t,T)$ pour tout t. Remarquons que, nous laissons k décrire tout l'ensemble 1,2 .... r ce qui suppose que :

$$\left\{1,2 \ldots\ldots r\right\} = \Delta(t-1)$$

S'il n'en est pas ainsi on cherche le maximum de :

$$\sum_{j=1}^{s} v_j(t,T)p_{ij}(t,k)+q_i(t,k)$$

la variable de décision y (t-1) décrivant l'ensemble $\Delta(t-1)$ des choix permis.

A l'instant t-1, le veau étant dans l'état i, il est alors facile de choisir une décision optimale. On construit ainsi une stratégie optimale par étape.

Si nous considérons le lot L de n veaux, nous ne désirons pas individualiser chaque veau mais, prendre à chaque instant une décision valable pour le lot entier. La méthode de calcul valable pour un veau se généralise mais conduit à des calculs d'un volume assez considérable. En effet à chaque instant on doit considérer tous les vecteurs d'états possibles.

Introduisons l'espérance du revenu partiel moyen perçu dan la transition qui s'effectue de l'instant t-1 à l'instant t et qui con duit le le lot de l'état X(t-1) à l'état X(t), soit Q $[X(t-1),t,k]$ sa valeur lorsque y (t-1) = k, nous avons :

$$Q\,[X(t-1),t,k] = \sum_{i,j=1}^{s} n_i(t-1)r_{ij}(t,k)p_{ij}(t,k)$$

$$= X'(t-1)q(t,k),$$

en introduisant le transposé X'(t-1) de X(t-1). Nous obtenons une formule analogue à la formule (1) :

$$(2)\quad V\,[X(t-1),t-1,T] = \max_{1 \leqslant k \leqslant r} \left\{ \sum_{X(t)} V[X(t),t,T]\; P\,[X(t)/X(t-1),k] + Q[X(t-1),t,k] \right\}$$

où $V[X(t),t,T]$ désigne le maximum de l'espérance du revenu que procure L de l'instant t à l'instant T, lorsqu'il est en X(t) à l'instant t et où P $[X(t)/X(t-1),k]$ est la probabilité de la transition de l'état X(t-1) à l'état X(t) lorsque y (t-1) = k. On remarque que :

$$X(t) = [n_1\,(t) \;\ldots.\; n_j(t) \;\ldots.\; n_s(t)]$$

$$= \sum_{i=1}^{s} [n_{i1}\,(t) \;\ldots\; n_{ij}(t) \;\ldots.\; n_{is}(t)]$$

or la variable aléatoire $[n_{ij}(t)]$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ est multinomiale sachant

X(t-1) (première partie, 2-1). On en déduit donc que :

$$P\left[X(t)/X(t-1),k\right] = \frac{\prod_{i=1}^{s} n_i(t-1)!}{\prod_{i,j=1}^{s} n_{ij}(t)!} \prod_{i,j=1}^{s} p_{ij}(t,k)^{n_{ij}(t)}$$

sous les conditions :

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(t,k) = 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant s)$$

$$n_i(t-1) = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}(t) \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$$

$$\sum_{i=1}^{s} n_i(t-1) = n.$$

L étant en X(t-1), la formule (2) permet donc le calcul de V $\left[X(t-1),t-1,T\right]$ et la détermination d'une valeur optimale de y(t-1 L'application de cette méthode permet donc d'appliquer à chaque lot un plan optimal. Il est possible de construire des tables, donnant ce pla pour différentes valeurs de n et de T.

La détermination de la durée d'engraissement n'introduit guère de difficultés supplémentaires. Si l'on prend la décision d'arrê à l'instant t, il suffit de comparer les valeurs de V $\left[X(t-1),t-1,T\right]$ lorsque T décrit l'ensemble des valeurs permises. La valeur adoptée maximisant cette quantité.

3-4 La méthode exposée au paragraphe précédent permet de résoudre un autre problème important. Supposons fixées les valeurs de T et de n et calculons V [X(0),0,T] pour les différentes valeurs possibles de X(0). Il est alors naturel de choisir le lot L, tel que son état ini tial maximise V [X(0),0,T]. Nous résolvons donc le problème du choix optimal d'un lot L de n veaux, la durée d'engraissement étant fixée. Remarquons qu'il peut être important pour le centre intégrateur de pouvoir fixer T, en effet c'est un moyen pour assurer un ajustement priori entre son offre et la demande qui émane des circuits de distri bution.

Il est possible de modifier quelque peu le critère emplo Introduisons les charges fixes journalières, la durée d'engraissemen est optimale lorsque le revenu marginal journalier est égal aux char fixes journalières et non lorsqu'il est nul. Cette modification abou à un critère économique classique.

Il est donc possible de programmer simplement, puisqu'on fait appel qu'à des calculs itératifs, les différentes décisions int venant pendant l'engraissement d'un lot de veaux de façon à maximise le revenu. L'emploi des revenus partiels permet de composer une alim tation optimale pour chaque lot. Nous disposons ainsi d'un éventail de méthodes plus ou moins élaborées pour faire face à l'ensemble des tuations rencontrées.

- Annexe -

Il s'agit de presenter quelques résultats numériques sur la vérification du modèle. Les données que nous indiquons corresponden à la phase expérimentale de notre travail.

Nous ne disposons pas actuellement de données sur l'évolution de la qualité en cours d'engraissement. Nous nous plaçons donc dans le cas simple où l'état d'un veau est défini uniquement par son poids. On poursuit dès maintenant, des mesures systématiques de la couleur, qui est déterminée à partir du taux d'hémoglobine. Nous espérons pouvoir bientôt tenir compte de ce paramètre important.

Nous devons tout d'abord définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des veaux. Il suffit de déterminer les états à chaque instant. Leur nombre est fonction de l'aptitude que nous avons à séparer deux veaux, donc de la précision des mesures et surtout des grilles de notations adoptées.

A chaque instant t, il n'est pas nécessaire de distinguer deux veaux dont la différence des poids est supérieure à a(t). Nous désignerons a(t), sous le nom d'intervalle de séparation à l'instant t. Nous indiquons dans le tableau 1, les valeurs de a(t) à différents instants. Ces valeurs ont été obtenues à partir de considérations techniques et économiques.

Tableau 1 - Valeurs de l'intervalle de séparation

t en jours	0	14	28	42	56	70	84
a(t) en kg	3	4	4	4	4	5	5

Les différents états, pour un plan d'alimentation donné, se déterminent à partir des résultats d'un échantillon aléatoire. L'état 1 étant réservé aux veaux morts. Nous définissons à chaque instant un poids critique inférieur $\alpha_{inf}(t)$ et un poids critique supérieur $\alpha_{sup}(t)$ tels que si :

a) $\alpha(\omega,t) \leq \alpha_{inf}(t)$ alors ω est dans l'état 2

b) $\alpha(\omega,t) > \alpha_{sup}(t)$ alors ω est dans l'état s

$\alpha(\omega,t)$ étant le poids du veau ω à l'instant t.

La valeur du poids critique inférieur est telle qu'il y ait environ 5 % des veaux dans les états 1 et 2, celle du poids critique supérieure est telle qu'il y ait environ 3 % des veaux dans l'état s.

A chaque instant t on divise le range $\alpha_{sup}(t) - \alpha_{inf}(t)$ par l'intervalle de séparation a(t). Le quotient nous donne sensiblement la valeur de s-3. Il suffit alors de modifier les valeurs des poids critiques pour obtenir un quotient exact.

Nous obtenons à la fois le nombre d'états correspondant à notre aptitude à séparer deux veaux et leurs définitions. Pour un échantillon de 112 veaux, nous avons obtenu s = 10. Le tableau 2, indique la définition des états à différents instants. Dans chaque case, nous indiquons l'intervalle de variations du poids.

Tableau 2 - Définition des états

t en jours / états	0	14	28	42	56	70	84
1	0	0	0	0	0	0	0
2	[0,43]	[0,40]	[0,50]	[0,70]	[0,90]	[0,100]	[0,110]
3	[43,46]	[40,44]	[50,54]	[70,74]	[90,94]	[100,105]	[110,115]
4	[46,49]	[44,48]	[54,58]	[74,78]	[94,98]	[105,110]	[115,120]
5	[49,52]	[48,52]	[58,62]	[78,82]	[98,102]	[110,115]	[120,125]
6	[52,55]	[52,56]	[62,66]	[82,86]	[102,106]	[115,120]	[125,130]
7	[55,58]	[56,60]	[66,70]	[86,90]	[106,110]	[120,125]	[130,135]
8	[58,61]	[60,64]	[70,74]	[90,94]	[110,114]	[125,130]	[135,140]
9	[61,64]	[64,68]	[74,78]	[94,98]	[114,118]	[130,135]	[140,145]
10	]64,+∞[	]68,+∞[	]78,+∞[	]98,+∞[	]118,+∞[	]135,+∞[	]145,+∞[

Nous établissons ensuite les matrices des comptes de transition. Il est alors facile de déterminer les matrices de transition (première partie 2-1). Nous en tabulons quelques unes ci-dessous. Elles vont nous servir d'illustration.

$P(0,14) =$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}1250 & 0{,}3750 & 0{,}5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7647 & 0{,}2353 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0313 & 0 & 0{,}0313 & 0{,}4062 & 0{,}3750 & 0{,}1562 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0800 & 0 & 0 & 0{,}0400 & 0{,}5200 & 0{,}2800 & 0{,}0800 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1579 & 0{,}6842 & 0{,}1053 & 0{,}0526 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}3333 & 0{,}3334 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5000 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5000
\end{bmatrix}$$

$P(0,28) =$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}0938 & 0{,}5413 & 0{,}2389 & 0{,}1260 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}0493 & 0{,}5449 & 0{,}3470 & 0{,}0588 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0369 & 0{,}0078 & 0{,}0340 & 0{,}3575 & 0{,}3696 & 0{,}1775 & 0{,}0111 & 0{,}0056 & 0 & 0 \\
0{,}0900 & 0 & 0{,}0026 & 0{,}1495 & 0{,}3767 & 0{,}2801 & 0{,}0822 & 0{,}0189 & 0 & 0 \\
0{,}0244 & 0 & 0 & 0{,}0590 & 0{,}2911 & 0{,}4060 & 0{,}1308 & 0{,}0361 & 0{,}0263 & 0{,}0263 \\
0{,}0119 & 0 & 0 & 0{,}0119 & 0{,}1693 & 0{,}1785 & 0{,}5424 & 0{,}0860 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0370 & 0 & 0{,}2592 & 0{,}0370 & 0{,}1667 & 0{,}5001 \\
0{,}0179 & 0 & 0 & 0{,}0179 & 0{,}1428 & 0{,}2678 & 0{,}0357 & 0{,}0179 & 0{,}5000 & 0
\end{bmatrix}$$

$P\ (0,42) =$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}0938 & 0{,}2318 & 0{,}5038 & 0{,}1496 & 0{,}0175 & 0{,}0035 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}1351 & 0{,}3739 & 0{,}4025 & 0{,}0712 & 0{,}0173 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0369 & 0{,}0078 & 0{,}0931 & 0{,}2819 & 0{,}4122 & 0{,}1257 & 0{,}0384 & 0{,}0040 & 0 & 0 \\
0{,}0900 & 0 & 0{,}0412 & 0{,}1657 & 0{,}4025 & 0{,}1985 & 0{,}0835 & 0{,}0186 & 0 & 0 \\
0{,}0244 & 0 & 0{,}0199 & 0{,}1003 & 0{,}3936 & 0{,}2574 & 0{,}1192 & 0{,}0326 & 0{,}0263 & 0{,}0263 \\
0{,}0119 & 0 & 0{,}0071 & 0{,}0479 & 0{,}2264 & 0{,}3344 & 0{,}2690 & 0{,}1033 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0{,}0010 & 0{,}0093 & 0{,}0391 & 0{,}1203 & 0{,}1162 & 0{,}0473 & 0{,}1667 & 0{,}5501 \\
0{,}0179 & 0 & 0{,}0075 & 0{,}0441 & 0{,}2223 & 0{,}1405 & 0{,}0548 & 0{,}0129 & 0{,}5000 & 0
\end{bmatrix}$$

$P(0{,}56) =$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}1517 & 0{,}1764 & 0{,}3982 & 0{,}2129 & 0{,}0434 & 0{,}0148 & 0{,}0026 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}0338 & 0{,}1124 & 0{,}3210 & 0{,}3411 & 0{,}1275 & 0{,}0512 & 0{,}0130 & 0 & 0 \\
0{,}0369 & 0{,}0311 & 0{,}0804 & 0{,}2527 & 0{,}3339 & 0{,}1540 & 0{,}0782 & 0{,}0328 & 0 & 0 \\
0{,}0900 & 0{,}0103 & 0{,}0405 & 0{,}1642 & 0{,}3124 & 0{,}1841 & 0{,}1173 & 0{,}0812 & 0 & 0 \\
0{,}0244 & 0{,}0050 & 0{,}0220 & 0{,}1160 & 0{,}3012 & 0{,}2081 & 0{,}1487 & 0{,}1352 & 0{,}0263 & 0{,}0131 \\
0{,}0119 & 0{,}0018 & 0{,}0093 & 0{,}0594 & 0{,}2020 & 0{,}2025 & 0{,}2081 & 0{,}3050 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5000 & 0{,}5000 \\
0 & 0{,}0003 & 0{,}0016 & 0{,}0109 & 0{,}0455 & 0{,}0628 & 0{,}0777 & 0{,}2178 & 0{,}3334 & 0{,}2500 \\
0{,}0179 & 0{,}0019 & 0{,}0090 & 0{,}0565 & 0{,}1663 & 0{,}1154 & 0{,}0790 & 0{,}3040 & 0{,}2500 & 0
\end{bmatrix}$$

$P(0{,}70) =$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}0505 & 0{,}0315 & 0{,}1924 & 0{,}3832 & 0{,}2450 & 0{,}0782 & 0{,}0132 & 0{,}0060 & 0 \\
0 & 0{,}0113 & 0{,}0261 & 0{,}0927 & 0{,}3269 & 0{,}3024 & 0{,}1739 & 0{,}0427 & 0{,}0240 & 0 \\
0{,}0369 & 0{,}0104 & 0{,}0213 & 0{,}0755 & 0{,}2672 & 0{,}2806 & 0{,}1999 & 0{,}0614 & 0{,}0468 & 0 \\
0{,}0900 & 0{,}0034 & 0{,}0150 & 0{,}0419 & 0{,}1884 & 0{,}2450 & 0{,}2298 & 0{,}0913 & 0{,}0952 & 0 \\
0{,}0244 & 0{,}0017 & 0{,}0120 & 0{,}0285 & 0{,}1479 & 0{,}2399 & 0{,}2549 & 0{,}1188 & 0{,}1457 & 0{,}0262 \\
0{,}0119 & 0{,}0006 & 0{,}0073 & 0{,}0150 & 0{,}0884 & 0{,}1534 & 0{,}2523 & 0{,}1771 & 0{,}2940 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2500 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7500 \\
0 & 0{,}0001 & 0{,}0016 & 0{,}0029 & 0{,}0191 & 0{,}2024 & 0{,}0795 & 0{,}0871 & 0{,}1906 & 0{,}4167 \\
0{,}0179 & 0{,}0006 & 0{,}0062 & 0{,}0136 & 0{,}0753 & 0{,}2480 & 0{,}1399 & 0{,}1155 & 0{,}2580 & 0{,}1250
\end{bmatrix}$$

P (0,84) =

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}0275 & 0{,}0157 & 0{,}1224 & 0{,}2254 & 0{,}3044 & 0{,}1778 & 0{,}0893 & 0{,}0346 & 0{,}0029 \\
0 & 0{,}0132 & 0{,}0130 & 0{,}0587 & 0{,}1728 & 0{,}2849 & 0{,}2137 & 0{,}1563 & 0{,}0780 & 0{,}0094 \\
0{,}0370 & 0{,}0108 & 0{,}0106 & 0{,}0513 & 0{,}1459 & 0{,}2455 & 0{,}2082 & 0{,}1855 & 0{,}0916 & 0{,}0136 \\
0{,}0900 & 0{,}0060 & 0{,}0075 & 0{,}0323 & 0{,}1051 & 0{,}1894 & 0{,}2022 & 0{,}2378 & 0{,}1094 & 0{,}0203 \\
0{,}0244 & 0{,}0041 & 0{,}0060 & 0{,}0264 & 0{,}0872 & 0{,}1660 & 0{,}2129 & 0{,}2950 & 0{,}1516 & 0{,}0264 \\
0{,}0119 & 0{,}0021 & 0{,}0036 & 0{,}0155 & 0{,}0563 & 0{,}1028 & 0{,}2116 & 0{,}4178 & 0{,}1391 & 0{,}0393 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}0173 & 0{,}0173 & 0{,}0948 & 0{,}0862 & 0{,}0344 & 0{,}7500 & 0 \\
0 & 0{,}0004 & 0{,}0008 & 0{,}0149 & 0{,}0248 & 0{,}0864 & 0{,}1417 & 0{,}2413 & 0{,}4703 & 0{,}0194 \\
0{,}0179 & 0{,}0019 & 0{,}0031 & 0{,}0216 & 0{,}0531 & 0{,}1322 & 0{,}1959 & 0{,}3370 & 0{,}2116 & 0{,}0257
\end{bmatrix}
$$

Remarquons que si l'échantillon est de plus grande taille, il y a peu de chances pour que les poids critiques soient notablement différents, donc nous obtenons le même nombre d'états. Nous avons estimé les matrices de transition caractérisant deux plans d'alimentation. Pour le deuxième plan comme pour le premier nous avons utilisé un échantillon de 112 veaux.

Appliquons les matrices tabulées à un lot de 28 veaux dont on connaît l'état initial, et comparons les valeurs prévues de son état aux jours 14, 28, 42, 56, 70, 84 avec les valeurs réalisées. Pour faire la comparaison nous calculons à chaque instant la valeur de $\rho(t)$ (première partie 4). Nous avons :

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous calculons :

$$\tilde{X}(14) = \begin{bmatrix} 0{,}7304 & 0{,}2500 & 1{,}0004 & 7{,}5484 & 7{,}8507 & 7{,}0172 & 2{,}6732 & 0{,}5963 & 0{,}3334 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}(28) = [0{,}9810 \quad 0{,}2500 \quad 1{,}5674 \quad 6{,}7332 \quad 8{,}6881 \quad 5{,}7228 \quad 2{,}5800 \quad 0{,}5477 \quad 0{,}2982 \quad 0{,}6316]$$

$$\tilde{X}(42) = [0{,}9810 \quad 0{,}2500 \quad 2{,}1107 \quad 6{,}3592 \quad 10{,}0817 \quad 4{,}5925 \quad 2{,}1346 \quad 0{,}5605 \quad 0{,}2982 \quad 0{,}6316]$$

$$\tilde{X}(56) = [0{,}9810 \quad 0{,}7781 \quad 1{,}8188 \quad 5{,}769 \quad 8{,}2913 \quad 4{,}4417 \quad 2{,}8012 \quad 2{,}3106 \quad 0{,}4649 \quad 0{,}3155]$$

$$\tilde{X}(70) = [0{,}9810 \quad 0{,}2596 \quad 0{,}5040 \quad 1{,}7864 \quad 6{,}2774 \quad 7{,}1231 \quad 5{,}6886 \quad 2{,}2715 \quad 2{,}5607 \quad 0{,}5477]$$

$$\tilde{X}(84) = [0{,}9818 \quad 0{,}2553 \quad 0{,}2512 \quad 1{,}2617 \quad 3{,}5132 \quad 5{,}9708 \quad 5{,}7186 \quad 6{,}2665 \quad 3{,}2769 \quad 0{,}5040]$$

Les valeurs des états réalisés sont données par :

$$X(14) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 7 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$X(28) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 7 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$X(42) = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 10 \quad 5 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

$$X(56) = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0]$$

$$X(70) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \quad 1]$$

$$X(84) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \quad 1]$$

En appliquant la formule :

$$\rho(t) = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^{n} [\tilde{n}_i(t) - n_i(t)]$$

Nous obtenons :

$\rho(14) = 8{,}21\ \%$ $\rho(28) = 11{,}88\ \%$ $\rho(42) = 8{,}79\ \%$

$\rho(56) = 9{,}71\ \%$ $\rho(70) = 10{,}25\ \%$ $\rho(84) = 9{,}37\ \%$

ce qui nous renseigne sur le pourcentage des veaux qui se sont écartés des prévisions. D'autre part en applicant la formule :

$$\chi^2\ (t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{[\tilde{n}_i(t)-n_i(t)]^2}{\tilde{n}_i(t)}$$

on obtient :

$\chi^2(14) = 1{,}0388$ $\chi^2(28) = 1{,}6201$ $\chi^2(42) = 1{,}1794$

$\chi^2(56) = 1{,}1302$ $\chi^2(70) = 1{,}3022$ $\chi^2(84) = 1{,}1568$

ce qui nous conduit à accepter l'hypothèse selon laquelle le modèle correspondant aux matrices tabulées est vérifié, avec un degré de confiance supérieur à 99 %.

Nous avons d'autre part regroupé 168 veaux ayant tous été élevés pendant 84 jours, nous avons obtenus :

$\tilde{X}\ (84) = [6{,}0 \quad 0{,}0 \quad 0{,}0 \quad 6{,}0 \quad 25{,}8 \quad 35{,}4 \quad 34{,}8 \quad 36{,}0 \quad 19{,}2 \quad 4{,}8]$

et nous avons observé :

$X(84) = [6 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 24 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 18 \quad 6]$

on trouve alors :

$\rho(84) = 3{,}56\ \%$ et $\chi^2(84) = 0{,}5521$

Le pourcentage des veaux s'écartant des prévisions semble donc être d'autant plus faible que le lot considéré est plus grand, ce qui est d'ailleurs normal.

Disposant donc, des matrices caractérisant deux plans d'alimentation nous les avons appliqués à la résolution à postériori du problème du choix du plan d'alimentation et de la date de fin d'engraissement maximisant le revenu final. Le plan que nous aurions préconisé a été effectivement adopté. Par contre nous avons déterminé une durée optimale variant de 80 jours à 88 jours suivant les lots, alors que tous les lots ont été élevés pendant 84 jours. Pour les lots ayant été gardés moins de 84 jours nous avons pu comparer le revenu réellement obtenu, au revenu qui aurait été obtenu en vendant le lot à la date indiquée. Dans tous les cas, la durée que nous avons déterminée est meilleure que la durée adoptée. Le tableau 3 présente quelques résultats pour des lots, pour lesquels nous avons déterminé une durée optimale de 80 jours. Le revenu est exprimé sous la forme de la marge brute moyenne par veau V(80) et V(84) sont respectivement les valeurs de la marge brute moyenne au bout de 80 jours et de 84 jours. Elles sont exprimées en francs.

Tableau 3 - Comparaison des marges brutes

Taille du lot	V(80)	V(84)
12	50,25	46,95
14	105,25	93,25
15	77,60	60,00
20	92,15	83,75
9	145,00	120,90
12	166,30	165,42
12	172,55	158,95
28	55,60	39,66

On observe de très fortes variations du revenu pour des variations de la durée d'engraissement inférieures à une semaine. Leur amplitude est souvent beaucoup plus élevée que dans le tableau 3. Pou un premier lot de 356 veaux élevés pendant 80 jours, nous avons une marge moyenne de 67,71 F et pour un deuxième lot de 431 veaux élevés dans les mêmes conditions pendant 78 jours nous avons une marge moyen de 82,03 F.

Ce dernier exemple achève de montrer l'importance économique du problème de la conduite d'un élevage. Le modèle étant vérifié, il s'agit maintenant de passer à une phase complètement opérationnell

. : .

- BIBLIOGRAPHIE -

AITCHISON (J.) SILVEY (S.D.) : "Maximum likelihood estimation of parameters subjet to restaints". Ann. Math Stat. Vol.29 n°3 (1958) pages 813-828.

ANDERSON (T.W.) GOODMAN (L.A.): "Statistical inference about markov chains" Ann. Math. Stat. Vol.28 - n°1 (1957) pages 89-110.

BARTLETT (M.S.) : "The frequency goodness of fit test for probability chains" Proceed Cambridge philo. Soc. Vol.47 (1951) pages 86-95.

BELLMAN (R.E.) : "Dynamic programming" - Princeton University press. (1957) - 337 pages.

BELLMAN (R.E.) DREYFUS (S.E.) :"La programmation dynamique et ses applications" - Dunod Paris (1965) - 385 pa

BHARUCHA - REID (A.T.) : "Elements of the theory of markov processes a their applications". Mc. Graw Hill(196 468 pages.

BILLINGSLEY (P.)(a) : "Statistical methods in markov chains". Ann. Mat Stat. Vol.32 n°1 (1961) pages 12-40.

BILLINGSLEY (P)(b) : "Statistical inference for Markov processes". The University of Chicago press(1961)- 74 pages.

CHURCHMAN (C.W.) ACKOFF (R.L.) ARNOFF (E.L.) : "Eléments de recherche opérationnelle" - Dunod Paris (1961) - 572 pages.

CRAMER (H.) : "Mathematical methods of statistics" - Princeton University press 10ième éd. (1963) - 574 pages.

FORTET (R.) : "Propriétés des applications de transition des programmations dynamiques" - Metra Vol.2 n°1 (1963) pages 79-97.

KENDALL (M.G.) STUART (A) : "The advanced theory of statistics" - Vol.2 Charles Griffin London (1961) 676 pages.

LEGOUPIL (J.) : "Cours de statistiques". 1ère partie - Faculté des Sciences de Rennes (1965-1966) - 147 pages.

LESOURNE (J.) "Technique économique et gestion industrielle" - Dunod Paris (1960) - 627 pages.

MASSE (P.) : "Le choix des investissements" - Dunod Paris (1959) - 489 pages.

METIVIER (M.) : "Cours de probabilité 1" - Faculté des Sciences de Renn (1966-1967).

NEUMANN (J.Von) MORGENSTERN (O) : "Theory of games and economic behaviour" - Princeton University Press (1953) 3ème édition.

PALLU DE LA BARRIERE : " Cours d'automatique théorique" - Dunod Paris (1966). 404 pages.

ROSENTIEHL (P.) GHOUILA-HOURI (A) : "Les choix économiques, décisions séquentielles et simulation" - Dunod Paris (1960) - 355 pages.

THIEBAUX (J.) : "Testing a markov hypothesis with independance of inte
mediate states and restricted order". Biometrika Vol.54 (décember 1967) - pages 605-614

WALD (A) : "Sequential analysis" - Wiley (1963) - 212 pages.

∴

- TABLE DES MATIERES -

VU :

Le Président de la Thèse

VU :

Le Directeur de Thèse

VU et APPROUVE

RENNES, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. BOCLÉ