



Distribution du maximum d'un champ aléatoire et applications statistiques

Céline Delmas

► To cite this version:

Céline Delmas. Distribution du maximum d'un champ aléatoire et applications statistiques. Probabilités [math.PR]. Université Paul Sabatier, 2001. Français. NNT : . tel-03394613

HAL Id: tel-03394613

<https://hal.inrae.fr/tel-03394613>

Submitted on 22 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

SPÉCIALITÉ: Mathématiques Appliquées

OPTION: Statistique

DISTRIBUTION DU MAXIMUM D'UN CHAMP ALEATOIRE ET APPLICATIONS STATISTIQUES

Céline DELMAS

Soutenue le 02 Mars 2001 devant le Jury composé de:

Jean-Marc AZAÏS	Directeur de thèse - Professeur Université Toulouse III
Corinne BERZIN-JOSEPH	Rapporteur - Professeur Université Grenoble II
Christine CIERCO-AYROLLES	Examineur - Chargée de recherche INRA Toulouse
Alain CROQUETTE	Examineur - Maître de conférences Université Toulouse III
Elisabeth GASSIAT	Rapporteur - Professeur Université Paris-Sud
Michel LEDOUX	Président - Professeur Université Toulouse III

Remerciements

JE REMERCIE TOUT PARTICULIÈREMENT JEAN-MARC AZAÏS, TOUT D'ABORD POUR M'AVOIR ACCORDÉ SA CONFIANCE ET M'AVOIR PROPOSÉ CE SUPERBE SUJET DE THÈSE, ENSUITE POUR TOUS LES MOMENTS PRIVILÉGIÉS QU'IL A SU RÉGULIÈREMENT M'ACORDER DEPUIS MON ANNÉE DE DEA ET GRÂCE AUXQUELS J'AI BEAUCOUP APPRIS ET PROGRESSÉ, ENFIN POUR TOUT SON ENTHOUSIASME, SA BONNE HUMEUR ET SA SYMPATHIE.

CORINNE BERZIN ET ELIZABETH GASSIAT M'ONT FAIT L'HONNEUR D'ACCEPTER DE RAPPORTER MA THÈSE. JE LES REMERCIE POUR TOUTE L'ATTENTION QU'ELLES ONT PORTÉ À MON TRAVAIL.

JE REMERCIE MICHEL LEDOUX POUR TOUTES SES REMARQUES ET POUR L'HONNEUR QU'IL ME FAIT EN ACCEPTANT DE PRÉSIDER MON JURY DE THÈSE.

UN GRAND MERCI À CHRISTINE CIERCO POUR M'AVOIR FAIT PARTAGER SES CONNAISSANCES EN GÉNÉTIQUE, POUR TOUTE SA GENTILLESSE ET POUR AVOIR SU M'ÉCOUTER, ME SOUTENIR ET M'ENCOURAGER TOUT AU LONG DE MA THÈSE.

JE REMERCIE ÉGALEMENT ALAIN CROQUETTE POUR TOUTE SA SYMPATHIE ET POUR TOUT CE QU'IL M'A APPORTÉ EN PROGRAMMATION SPLUS.

ENFIN UN MERCI PARTICULIER À TOUS LES DOCTORANTS DU LABORATOIRE DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉS QUI ONT PARTAGÉ AVEC MOI LE BUREAU 151 ET QUI ONT DÛ SUPPORTER MON CARACTÈRE DIFFICILE ET MON DÉSORDRE PERMANENT.

Résumé

De nombreux exemples d'applications issus de domaines très divers (Médecine, Astrophysique, Statistique, etc...) motivent particulièrement l'étude de la distribution du maximum d'un processus aléatoire. Après avoir rappelé les principaux résultats existants sur la distribution du maximum de processus aléatoires très généraux et face à leur manque évident de précision lorsqu'il s'agit de les utiliser en pratique, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à des méthodes permettant d'obtenir des résultats très précis au prix de conditions plus fortes sur le processus. Ces méthodes sont des méthodes de Rice. Les conditions qu'elles imposent sur le processus sont très souvent satisfaites dans les exemples pratiques. Lorsqu'elles ne le sont pas, on préfère en général modifier un peu la démarche scientifique pour s'y ramener et bénéficier de résultats précis. Après avoir fait un tour d'horizon des résultats existants dans ce domaine, nous proposons une méthode permettant de généraliser les méthodes de Rice pour des processus gaussiens en dimension un au cas de champs aléatoires gaussiens sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$. Notre méthode est basée d'une part sur l'utilisation du nombre de maxima locaux au-dessus d'un niveau du champ aléatoire gaussien et d'autre part sur une modification de cette variable aléatoire sur les différents bords du sous-ensemble compact. Notre méthode nous permet de redémontrer les principaux résultats existants dans ce domaine (souvent obtenus par des méthodes très diverses), d'en améliorer certains et d'en établir de nouveaux. Dans la deuxième partie de cette thèse (chapitres 4 et 5) nous nous sommes principalement intéressés à un aspect plus appliqué des méthodes de Rice. Dans un premier temps nous avons fait une implémentation Splus des principales méthodes de Rice étudiées et établies. Pour cela, en généralisant au cas non stationnaire et au cas de la valeur absolue d'un processus gaussien les résultats donnés dans Azaïs, Cierco et Croquette (1999), nous avons notamment établi des formules relativement bien adaptées au calcul numérique pour l'évaluation des moments factoriels d'ordre un et d'ordre deux apparaissant lors de l'étude de $P[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u]$ et $P[\max_{t \in [0, T]} |X(t)| \geq u]$ avec u fixé et X un processus gaussien réel vérifiant certaines conditions de régularité. Dans un deuxième temps, nous avons adapté les formules précédentes aux processus gaussiens particuliers intervenant lors de l'étude asymptotique des tests du rapport des maxima de vraisemblance d'une population gaussienne contre deux (Gosh et Sen (1985), Dacunha-Castelle et Gassiat (1997, 1999)). Nous obtenons alors pour ces problèmes des tables et des résultats de puissances. Cela nous permet de comparer ces tests à des tests de moments classiques. Des remarques et des conclusions sont alors tirées quant à l'optimalité de ces tests. En conclusion nous donnons plusieurs perspectives particulièrement intéressantes dégagées par ce travail.

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Modélisation par des champs aléatoires gaussiens	4
1.2	Résultats généraux dans l'étude des processus aléatoires	6
1.3	Méthodes plus spécifiques au processus étudié	9
2	Formules de Rice	18
2.1	Introduction	18
2.2	Le premier moment	19
2.2.1	Formule de Rice	19
2.2.2	Développement asymptotique	29
2.3	Le deuxième moment factoriel	29
2.3.1	Majoration par la formule de Rice	29
2.3.2	Développement asymptotique	30
3	Sur la distribution du maximum d'un champ gaussien	34
3.1	Introduction	35
3.2	The Rice method	37
3.3	Main results	41
3.4	Proofs	44
3.4.1	Proof of Theorem 3.1	44
3.4.2	Proof of Theorem 3.2	49
3.4.3	Proof of Theorem 3.3	50
3.4.4	Proof of Theorem 3.4	59
3.4.5	Proof of Theorem 3.5	60

3.5	References	65
4	Implémentation Splus des méthodes de Rice	67
4.1	Introduction	67
4.2	Méthode de Rice	71
4.2.1	Cas stationnaire	72
4.2.2	Cas non stationnaire	73
4.2.3	Estimation de l'erreur	78
4.3	Développement du programme	80
4.4	Discussion et directions de recherche	86
5	Applications aux tests de mélanges de distributions	88
5.1	Introduction	88
5.2	Résultats obtenus	91
5.2.1	Test de mélange simple gaussien	91
5.2.2	Test de une population contre deux (cas homoscedastique de variance connue) . .	100
5.2.3	Test de une population contre deux (cas homoscedastique de variance inconnue) .	106
5.3	Méthode	113
5.3.1	Test de mélange simple gaussien	113
5.3.2	Test de une population contre deux (cas homoscedastique de variance connue) . .	115
5.3.3	Test de une population contre deux (cas homoscedastique de variance inconnue) .	115
6	Conclusion générale et perspectives	116
	Références générales	120
	Annexe A - Note aux C.R.A.S. (Delmas C. (1998))	127
	Annexe B - Principales fonctions Splus	134

Chapitre 1

Introduction

1.1 Modélisation par des champs aléatoires gaussiens

Pourquoi étudier les champs aléatoires gaussiens et la distribution G de leur maximum? Tout d'abord parce que certaines données spatialement corrélées peuvent être correctement modélisées par des champs aléatoires gaussiens. Des tests statistiques peuvent ensuite être mis en oeuvre pour détecter des changements locaux dans ces données. Ainsi par exemple les images 3-dimensionnelles issues de la tomographie par émission de positron (PET) ou de l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (fMRI) sont souvent modélisées par des champs aléatoires gaussiens (cf. Worsley et al. (1992), Friston et al. (1991), Friston et al. (1994), Worsley et Friston (1995)). Ces images sont observées sur un ensemble $S \subset \mathbb{R}^N$, en général le cerveau humain. La réponse du cerveau à un stimulus est nulle dans une grande partie du cerveau sauf dans certaines zones où le signal s'accroît. Cependant ces accroissements sont très faibles et ne sont pas détectables à l'oeil nu. Par conséquent un test statistique doit être mis en oeuvre pour les détecter. Une image est construite à partir de la différence entre les images obtenues sur les individus, d'une part non soumis au stimulus, puis ensuite soumis au stimulus. Cette image est la statistique de test. Elle peut être modélisée, sous l'hypothèse nulle d'absence de réaction au stimulus, par un champ gaussien X centré de variance un (cf. Worsley et al. (1992)). La connaissance de la fonction G permet ensuite de déterminer la valeur seuil u du test au niveau α voulu. Les zones de l'image où la réponse est supérieure à cette valeur critique u sont alors déclarées significativement réactives au stimulus.

On peut noter que des études analogues ont été menées sur des images obtenues par les astrophysiciens pour détecter les zones de l'univers à forte densité de matière (cf. Hamilton et al. (1986)). De même dans

le but d'obtenir des résultats sur l'anisotropie de la surface de la mer, Ochi (1998) modélise celle-ci par un champ aléatoire gaussien.

On vient de voir que certains jeux de données peuvent être directement modélisés par des champs aléatoires gaussiens. Il arrive également que la modélisation de certains problèmes ne fasse en rien intervenir les champs aléatoires gaussiens mais que ces derniers apparaissent en aval de la modélisation, dans la résolution du problème déjà posé en termes mathématiques. C'est le cas par exemple dans les problèmes de tests de mélanges de populations qui font l'objet du chapitre 5. La loi des données observées peut être modélisée par un mélange de distributions. Des tests du rapport des maxima de vraisemblance peuvent être construits pour estimer le nombre de composants du mélange. Les statistiques de test obtenues suivent une loi qui, asymptotiquement, est celle du maximum d'un champ aléatoire gaussien de variance un (cf. Gosh et Sen (1985) puis Dacunha-Castelle et Gassiat (1997b, 1999)). Un autre exemple peut être trouvé dans la mise en oeuvre d'un test de normalité de données multidimensionnelles, établi à partir de résultats obtenus dans l'étude de la technique de "Projection Pursuit" (cf. Friedman (1987) et Sun (1991)). La technique de "Projection Pursuit" est une procédure automatique de sélection des projections des données qui présentent le plus de structure c'est-à-dire des projections où les données ont une densité qui s'éloigne le plus de la densité d'une loi normale (on considère que des données distribuées normalement sont des données distribuées au hasard qui ne présentent aucune structure particulière). Pour cela la technique de "Projection Pursuit" sélectionne les projections qui maximisent un index d'intérêt dont une expression a été établie par Friedman (1987). Cet index est une sorte de distance L^2 entre la densité des données projetées et la densité de la loi normale. Ainsi la direction qui réalise le maximum de l'index d'intérêt est la direction la plus intéressante (qui présente le plus de structure). Le maximum sur toutes les directions de l'index d'intérêt peut alors être utilisé comme statistique de test dans le test de normalité des données. Sun (1991) a montré que sa loi, sous l'hypothèse de normalité des données, pouvait être approchée par la loi du maximum d'un champ aléatoire gaussien centré de variance un sur le produit de deux sphères unités dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^j$, avec k et j entiers.

Pour plus d'exemples et de références sur l'utilisation pratique des champs aléatoires gaussiens on pourra consulter, en statistique paramétrique, Davies (1977, 1987); en statistique non-paramétrique, Chaudhuri et Sengupta (1993), Piterbarg et Tyurin (1993), Park et Sun (1998) et Chaudhuri et Marron (1999, 2000); en génétique, Cierco (1998) et Cierco et Azaïs (2000) (on parlera plus en détail de ces derniers travaux dans le chapitre 4).

Il n'existe pas, hélas, de formule simple et explicite pour calculer $G(u)$ dans le cas général où X est gaussien. Les techniques les plus générales utilisent les notions d'entropie métrique et de mesures majorantes. Elles donnent des bornes intéressantes d'un point de vue théorique mais qui sont inutilisables en pratique car elles se veulent trop générales et de ce fait manquent de précision. Nous faisons dans la section qui suit une revue de ces principaux résultats que l'on peut qualifier de généraux. Par la suite nous noterons φ la densité gaussienne standard et Φ sa fonction de répartition.

1.2 Résultats généraux dans l'étude des processus aléatoires

D. Slepian a établi (cf. Slepian (1962)), en 1962, une première inégalité pour une classe particulière de processus gaussiens. Son résultat, appelé "inégalité de Slepian", peut être formulé de la façon suivante:

Théorème 1.1 *Soient X_1 et X_2 deux processus gaussiens centrés séparables tels que, $\forall s$ et $t \in S$, avec S compact,*

$$E(X_1(s)X_1(t)) \geq E(X_2(s)X_2(t)) \text{ et } E(X_1^2(t)) = E(X_2^2(t)).$$

Alors pour tout u fixé, $u \in \mathbb{R}$,

$$P(\sup_S X_1(t) \geq u) \leq P(\sup_S X_2(t) \geq u). \quad (1.1)$$

La démonstration de ce résultat repose sur une inversion de Fourier. Ainsi, un processus qui est moins corrélé qu'un autre a une probabilité plus forte de dépasser un certain seuil fixé. Par conséquent, si nous connaissons la distribution du supremum d'un processus gaussien particulier, nous pouvons utiliser l'inégalité (1.1) pour obtenir des informations analogues pour des processus gaussiens dont la fonction de covariance est bornée par celle du processus particulier. Un exemple de cette procédure peut être trouvée dans Cabaña et Wschebor (1981). Intéressons-nous maintenant à un résultat de Landau et Shepp (1970), X. Fernique (1970) et Marcus et Shepp (1971). Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée de variance σ^2 . Par intégrations par parties on obtient pour $u > 0$:

$$(1 - \frac{\sigma^2}{u^2}) \frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2\sigma^2}) \leq P[X \geq u] \leq \frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2\sigma^2}). \quad (1.2)$$

Ainsi :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{-2} \log(P[X \geq u]) = -(2\sigma^2)^{-1}.$$

Or Landau et Shepp (1970), X. Fernique (1970) et Marcus et Shepp (1971) ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.2 *Soit X un processus gaussien centré séparable à trajectoires p.s. bornées, alors :*

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{-2} \log(P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u]) = -(2\sigma_S^2)^{-1}, \quad (1.3)$$

où $\sigma_S^2 = \sup_{t \in S} E(X(t)^2)$.

Ainsi on remarque que $\sup_{t \in S} X(t)$ se comporte en un certain sens comme une simple variable aléatoire gaussienne centrée dont la variance est le supremum de $\text{Var}(X(t))$ sur S . On peut également vérifier que toute expression de la forme $u^\alpha \exp[-\frac{u^2}{2\sigma_S^2}] \exp[Cu^\beta] \forall \alpha$ et C réels et $\beta < 2$ satisfait bien la relation (1.3). L'inégalité qui suit est due à Csirelson, Ibragimov et Sudakov (1975). Elle repose sur l'utilisation de la formule d'Itô.

Théorème 1.3 *Soit $\{X(t) : t \in S\}$ un processus gaussien centré séparable. Soit $X^* = \sup_{t \in S} X(t)$. Si $P(X^* < +\infty) = 1$ alors :*

$$E(X^*) < +\infty, \text{ et}$$

$$\forall u > 0 \quad P(X^* - E(X^*) > u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_S^2}\right) \quad , \quad (1.4)$$

$$P(|X^* - E(X^*)| > u) \leq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_S^2}\right) \quad , \quad (1.5)$$

où $\sigma_S^2 = \sup_{t \in S} \sigma^2(t)$ et $\sigma(t)^2 = E(X(t)^2)$.

Borell (1975), et indépendamment Csirelson et Sudakov (1974), démontrent une inégalité isopérimétrique qui implique les résultats du théorème précédent avec la médiane de X^* en lieu et place de la moyenne. Notons que sous les mêmes hypothèses, les travaux de Landau et Shepp (1970) et Fernique (1970, 1974) donnent l'inégalité suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists C_\epsilon, 0 \leq C_\epsilon < +\infty : P(X^* > u) \leq C_\epsilon \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_S^2 + \epsilon}\right) \quad \forall u > 0. \quad (1.6)$$

Ainsi, la queue de la loi de X^* est majorée, à une constante multiplicative près, par la queue d'une loi normale centrée dont la variance peut être prise arbitrairement proche de σ_S^2 . L'inégalité (1.4) et l'encadrement (1.2) permettent de déduire un encadrement pour $P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u]$:

$$\bullet P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u] \leq \exp\left(-\frac{(u - E(\sup_{t \in S} X(t)))^2}{2\sigma_S^2}\right). \quad (1.7)$$

$$\bullet P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u] \geq P[X(t^*) \geq u] \geq (1 - \frac{\sigma_S^2}{u^2}) \frac{\sigma_S}{u\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2\sigma_S^2}),$$

où t^* est le point où X atteint sa plus grande variance. On peut remarquer que l'encadrement obtenu vérifie la relation (1.3). Supposons que l'on puisse obtenir une estimation ou bien une borne pour $E(\sup_{t \in S} X(t))$ alors on obtiendrait pour la majoration (1.7) une borne intéressante pour $P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u]$. C'est l'objet

du théorème suivant dû à Dudley (1967, 1973). On suppose dans les deux prochains théorèmes que S est un espace métrique muni de la distance d telle que $d(s, t) = [E((X_s - X_t)^2)]^{1/2}$.

Théorème 1.4 *Soit $\{X_t, t \in S\}$ un processus stochastique dans L^2 . Soit $N_\epsilon = N(S, d, \epsilon)$ le nombre minimal de boules fermées de rayon ϵ avec lesquelles on peut recouvrir S . Supposons que $E(X_t) = 0 \quad \forall t \in S$ et*

$$P(|X_t - X_s| > u) \leq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{2d^2(s, t)}\right) \quad \forall s, t \in S, \quad \forall u > 0.$$

Alors,

$$E(\sup_S X_t) \leq K \int_0^\infty (\log N_\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

où K est une constante connue.

Des résultats plus récents basés sur les méthodes d'entropie permettent d'obtenir des bornes majorantes beaucoup plus précises que celle donnée par (1.7). Plusieurs théorèmes ont été établis donnant des bornes différentes en fonction de la croissance du nombre d'entropie $N_\epsilon = N(S, d, \epsilon)$. Ainsi Samorodnitsky (1991) et Talagrand (1994) obtiennent le théorème suivant :

Théorème 1.5 *Si pour un $A > \sigma_S$, un $\alpha > 0$ et un $\epsilon_0 \in [0, \sigma_S]$ on a :*

$$N(S, d, \epsilon) \leq (A/\epsilon)^\alpha$$

pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, alors pour $u \geq \sigma_S^2[(1 + \sqrt{\alpha})/\epsilon_0]$ on a :

$$P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u] \leq \left(\frac{KAu}{\sqrt{\alpha}\sigma_S^2}\right)^\alpha \bar{\Phi}\left(\frac{u}{\sigma_S}\right),$$

où K est une constante connue indépendante de X et de S .

Pour d'autres références et d'autres théorèmes de ce genre avec d'autres formes du nombre d'entropie $N(S, d, \epsilon)$ on pourra consulter Adler (2000).

Ces résultats très généraux sont très élégants et sont parfois suffisants dans l'étude de certains problèmes. Mais lorsqu'il s'agit de les utiliser en pratique ils manquent cruellement de précision. En effet considérons l'exemple du mouvement brownien sur $[0, 1]$. Nous savons que :

$$P[\sup_{t \in [0, 1]} X(t) \geq u] = 2\bar{\Phi}(u).$$

De plus $E[\sup_{t \in [0, 1]} X(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et $N([0, 1], d, \epsilon) = \epsilon^{-2}$. L'inégalité (1.7) donne donc :

$$P[\sup_{t \in [0, 1]} X(t) \geq u] \leq \sqrt{2\pi}\varphi(u - \sqrt{\frac{2}{\pi}}).$$

Le théorème 1.5 donne une majoration de la forme :

$$P\left[\sup_{t \in [0,1]} X(t) \geq u\right] \leq (\text{Const}) u^2 \bar{\Phi}(u).$$

Les deux majorations que nous venons d'obtenir et que nous notons de manière générique $f(u)$ sont telles que $2\bar{\Phi}(u) = o(f(u))$. Elles sont donc très grossières dans l'approximation de $P[\sup_{t \in [0,1]} X(t) \geq u]$.

1.3 Méthodes plus spécifiques au processus étudié

Face au développement des techniques vues dans la section précédente et face à leurs limites, des méthodes plus spécifiques à la nature du processus X considéré sont également étudiées dans la littérature afin d'obtenir plus de précision dans l'approximation de $G(u)$. Ainsi lorsque X est markovien plusieurs solutions au problème de l'approximation de $G(u)$ existent (cf. Siegmund). Lorsque le processus X a des trajectoires suffisamment régulières (p.s. de classe $\mathcal{C}^1$) sur un intervalle $[0, T] \subset \mathbb{R}$, un argument qui remonte aux travaux pionniers de Rice (1944-1945) consiste à utiliser le nombre de upcrossings du niveau u par le processus X sur $[0, T]$,

$$U_u^X[0, T] = \#\{t \in [0, T] : X(t) = u, X'(t) > 0\},$$

de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u\right] &= P[X(0) \geq u \cup U_u^X[0, T] \geq 1] \\ &\leq P[X(0) \geq u] + P[U_u^X[0, T] \geq 1] \\ &\leq P[X(0) \geq u] + E[U_u^X[0, T]]. \end{aligned}$$

Lorsque le processus est gaussien centré, stationnaire, de variance un :

$$E[U_u^X[0, T]] = \frac{T\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right),$$

où λ_2 est le deuxième moment spectral du processus X : $\lambda_2 = -r''(0)$; avec r la fonction de covariance de X . La borne majorante devient alors $\bar{\Phi}(u) + \frac{T\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \exp(-\frac{u^2}{2})$. Piterbarg (1981, 1982) montre que l'erreur commise par cette approximation est asymptotiquement super-exponentiellement faible :

$$\exists \delta > 0, |P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u\right] - \bar{\Phi}(u) - \frac{T\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \exp(-\frac{u^2}{2})| = o\left(\exp(-\frac{u^2}{2}(1 + \delta))\right) \text{ quand } u \rightarrow +\infty. \quad (1.8)$$

Comment faire pour développer, améliorer cette méthode, la généraliser à des processus moins spécifiques et à des champs aléatoires gaussiens définis sur des sous-ensembles compact de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$? Azaïs et

Wschebor (1997) utilisent la relation :

$$P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u\right] = P[X(0) \geq u] + P[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}} \geq 1]$$

et montrent, sous certaines conditions techniques et pour des processus à trajectoires $\mathcal{C}^\infty$, la convergence de la série de Rice :

$$G(u) = P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u\right] = P[X(0) \geq u] + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\tilde{\nu}_m}{m!}, \quad (1.9)$$

et la propriété enveloppante de cette série (bien connue depuis les travaux de Rice (1994-1945)) :

$$P[X(0) \geq u] + \sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m+1} \frac{\tilde{\nu}_m}{m!} \leq G(u) \leq P[X(0) \geq u] + \sum_{m=1}^{2n-1} (-1)^{m+1} \frac{\tilde{\nu}_m}{m!}, \quad (1.10)$$

où n est un entier strictement positif et $\tilde{\nu}_m$ est le m -ième moment factoriel de $U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}$. Ils proposent également une méthode pour calculer $G(u)$ dans le cas où le processus a seulement des trajectoires continues. Cette méthode est basée sur l'approximation de X par une famille de processus X_ϵ qui ont des trajectoires $\mathcal{C}^\infty$. L'inconvénient majeur de la relation (1.9) est que les moments factoriels $\tilde{\nu}_m$ sont très difficilement calculables car leurs expressions sont complexes et sous forme d'intégrales multiples (cf. Azaïs et Wschebor (1997)). Dans le cas d'un processus gaussien stationnaire à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$, Azaïs, Cierco et Croquette (1999) obtiennent des expressions simplifiées des deux premiers termes de la série de Rice (1.9) et en déduisent un encadrement de $G(u)$ par la relation (1.10) en prenant $n = 1$.

Notons que des résultats extrêmement fins sur la densité du maximum d'un processus gaussien stationnaire à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, T]$ peuvent être obtenus en utilisant le nombre de maxima locaux au-dessus d'un niveau u du processus :

$$M_u^X[0, T] = \#\{t \in [0, T] : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) < 0\}$$

au lieu de son nombre de upcrossings $U_u^X[0, T]$ (cf. Azaïs et Wschebor (2000)). De même, comme nous le verrons plus loin dans cette thèse en tant que cas particulier d'un théorème plus général, il est possible de redémontrer la relation (1.8) sans l'hypothèse de stationnarité, mais en supposant que le processus est de variance un, en utilisant la variable aléatoire $M_u^X[0, T]$. Pour cela il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u\right] &= P[M_u^X[0, T] \geq 1 \mid (X(0) \geq u \cap X'(0) < 0) \cup (X(T) \geq u \cap X'(T) > 0)] \\ &= P[A_1 \cup A_2 \cup A_3], \end{aligned}$$

L'inégalité de Bonferroni nous permet ensuite d'obtenir l'encadrement suivant :

$$\sum_{i=1}^3 P[A_i] - \sum_{i < j} P[A_i A_j] \leq P\left[\max_{t \in [0, T]} X(t) \geq u\right] \leq \sum_{i=1}^3 P[A_i].$$

La relation (1.8) se déduit immédiatement de l'encadrement précédent une fois que les quatre points suivants sont démontrés :

- 1) $P[X(0) \geq u, X'(0) < 0] = P[X(T) \geq u, X'(T) > 0] = \frac{1}{2}\bar{\Phi}(u)$. (évident).
 - 2) $\exists \delta > 0$ tel que $P[M_u^X[0, T] \geq 1] = E[M_u^X[0, T]] + o\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\delta)\right)\right) = \frac{\exp(-\frac{u^2}{2})}{2\pi} \int_0^T \sqrt{r_{1,1}(t, t)} dt + o\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\delta)\right)\right)$ quand $u \rightarrow +\infty$; où r est la fonction de covariance de X et $r_{1,1}(t, t) = \frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t \partial s} \Big|_{s=t} = \text{Var} X'(t)$.
 - 3) $\exists \delta > 0$ tel que $P[X(0) \geq u, X(T) \geq u, X'(0) < 0, X'(T) > 0] = o\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\delta)\right)\right)$ quand $u \rightarrow +\infty$. (évident).
 - 4) $\exists \delta > 0$ tel que $P[M_u^X[0, T] \geq 1, X(0) \geq u, X'(0) < 0] = o\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\delta)\right)\right)$ quand $u \rightarrow +\infty$.
- Par un même raisonnement on obtient un résultat analogue pour $P[M_u^X[0, T] \geq 1, X(T) \geq u, X'(T) > 0]$.

Les démonstrations des points 2 et 4 pourront être trouvées plus loin dans la thèse ou bien dans Azaïs et Delmas (2000). Elles sont basées sur des évaluations de formules de Rice dont les techniques ont d'abord été initiées par Adler (1981) puis Piterbarg (1996).

Ainsi on constate que l'étude de la variable aléatoire $M_u^X[0, T]$ permet d'obtenir des résultats vraiment très intéressants sur la loi du maximum d'un processus aléatoire gaussien défini sur un intervalle $[0, T]$ de $\mathbb{R}$. Un autre avantage de cette variable aléatoire est qu'elle permet de généraliser les raisonnements et les méthodes de Rice, discutés précédemment et utilisés pour les processus aléatoires gaussiens, aux champs aléatoires gaussiens définis sur des sous-ensembles compacts S de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$. Ceci est l'objet principal de la première partie de cette thèse (chapitres 2 et 3). Avant d'aller plus loin considérons les deux approches majeures abordées par certains auteurs (principalement Sun, Adler et Worsley) pour généraliser les méthodes de Rice utilisées en dimension un et obtenir des résultats pour la loi du maximum d'un champ aléatoire gaussien sur S compact de $\mathbb{R}^N$. Nous comparerons ensuite ces deux approches et notre méthode. Une première approche consiste à faire le lien entre le calcul de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ lorsque X est un champ aléatoire gaussien centré de variance un qui admet un développement de Karhunen Loève fini d'ordre K et le calcul du volume d'un tube sur la surface de la sphère unité S^{K-1} de $\mathbb{R}^K$. Ainsi Sun (1993), utilisant la formule de Weyl (1939) pour le calcul du volume d'un tube sans bord sur S^{K-1} , obtient le résultat suivant :

Théorème 1.6 *Soit X un champ aléatoire gaussien centré de variance un sur un ensemble Borélien $S \subset \mathbb{R}^N$ admettant un développement de Karhunen Loève fini d'ordre K : $X(t) = \sum_{l=1}^K \xi_l \gamma_l(t)$. Notons*

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_K(t))$. Si la variété engendrée par γ est sans bord et si la fonction de covariance de X est de classe $\mathcal{C}^3$ alors,

$$P[\sup_{t \in S} X(t) \geq u] = \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \Psi_{2j}(u) + o(\Psi_{2[N/2]}(u)) \text{ quand } u \rightarrow +\infty,$$

où

$$\Psi_{2j}(u) = \frac{1}{2^{1+j} \pi^{\frac{N+1}{2}}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{\infty} x^{\frac{N-2j-1}{2}} e^{-x} dx.$$

et les k_{2j} pour $j = 0, \dots, [N/2]$ sont les constantes qui apparaissent dans la formule de Weyl.

Notons que Sun (1993) a également établi une expression pour k_0 et k_2 qui ne fait intervenir que la fonction de covariance du champ aléatoire X . Les considérations géométriques nécessaires pour le calcul de k_0 et k_2 sont donc considérablement allégées. Les conditions les plus fortes pour l'utilisation pratique du théorème précédent sont l'hypothèse d'un développement de Karhunen Loève fini et l'hypothèse d'absence de bord pour la variété engendrée par γ . Pour pallier à la première de ces difficultés Sun (1993) a établi la majoration suivante :

$$P[\sup_{t \in S} X(t) > u] \leq k_0 \Psi_0(u) + k_2 \Psi_2(u) + o(\Psi_2(u)) \text{ quand } u \rightarrow +\infty,$$

dans le cas d'un champ aléatoire gaussien centré de variance un avec un développement de Karhunen Loève infini et sous certaines conditions techniques. Une autre condition permet d'avoir l'égalité au lieu de la majoration. Malheureusement cette condition est rarement vérifiée (cf. Adler (2000), Sun (1993)). Sun obtiendrait également, selon Adler (2000), un début de développement asymptotique pour $P[\sup_{t \in S} X(t) > u]$ dans le cas où la variété engendrée par γ n'est pas sans bord. Ce développement serait de la forme :

$$P[\sup_{t \in S} X(t) > u] = k_0 \Psi_0(u) + k_1 \hat{\Psi}_1(u) + (k_2 + C_1 + k_{11}) \Psi_2(u) + o(\Psi_2(u)), \text{ quand } u \rightarrow +\infty, \quad (1.11)$$

où

$$\hat{\Psi}_1(u) = \frac{1}{4\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{\infty} x^{(N-2)/2} e^{-x} dx$$

et k_1 , C_1 et k_{11} sont des constantes connues. Ce résultat n'étant pas publié, le meilleur moyen d'obtenir plus d'information sur ses hypothèses, sa démonstration ou sur les constantes k_1 , C_1 et k_{11} est de contacter directement J. Sun.

La seconde approche a été initiée par Adler (1981) puis Worsley dans les années 1990 et plus récemment Adler (2000). L'idée consiste à généraliser la notion de upcrossings à la base des méthodes de Rice en dimension un par la caractéristique d'Euler de l'ensemble d'excursion $A_u(X, S) = \{t \in S : X(t) \geq u\}$ en

dimension supérieure. Pourquoi choisissent-ils la caractéristique d'Euler? Car on a besoin d'un compteur du nombre de composantes connexes de $A_u(X, S)$ afin de pouvoir déterminer $G(u)$ donné par :

$$G(u) = P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] = P[\text{Nombre de composantes connexes de } A_u(X, S) \geq 1]. \quad (1.12)$$

Or le nombre de composantes connexes de $A_u(X, S)$ est un objet très difficile à étudier pour des dimensions strictement supérieures à un, contrairement à la caractéristique d'Euler de $A_u(X, S)$ qui est proche du nombre de composantes connexes de $A_u(X, S)$ mais pour laquelle il existe de nombreux outils (cf. Hadwiger (1957, 1959), Morse et Cairns (1969) ou Adler (1981, 2000)). En dimension un le nombre de composantes connexes est égal à la caractéristique d'Euler de $A_u(X, [0, T])$. Il est relié au nombre de upcrossings par l'intermédiaire de la variable aléatoire $X(0)$ de la façon suivante: Si $X(0) < u$ alors le nombre de upcrossings du niveau u et le nombre de composantes connexes de $A_u(X, [0, T])$ sont les mêmes, si $X(0) \geq u$ alors le nombre de upcrossings du niveau u est égal au nombre de composantes connexes de $A_u(X, [0, T])$ moins un. En dimension deux la caractéristique d'Euler de $A_u(X, S)$, supposé suffisamment régulier, est le nombre de composantes connexes de $A_u(X, S)$ moins le nombre de trous. En dimension supérieure la caractéristique d'Euler d'un ensemble $A_u(X, S)$, suffisamment régulier et inclus dans $\mathbb{R}^N$, est un objet mathématique plus difficile à visualiser qui se formalise comme étant la seule fonctionnelle vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\phi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{si } A \text{ est topologiquement équivalent à une } N\text{-sphère.} \end{cases}$
- $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$.

Elle apparaît donc comme une alternative mathématique possible au nombre de composantes connexes. De plus si on regarde les arguments de Kac et Slepian (1959), Slepian (1963) et Lindgren (1972), on constate qu'un processus suffisamment régulier a un comportement parabolöide au voisinage de ses hauts maxima locaux. Ainsi on peut penser intuitivement que, pour un niveau u suffisamment grand, chaque maximum local au-dessus de u engendre un ensemble d'excursion ellipsoïde dont la caractéristique d'Euler vaut un. La caractéristique d'Euler de $A_u(X, S)$ correspond alors, à des termes de bord près, à son nombre de composantes connexes. On est ainsi intuitivement amené à réécrire la relation (1.12), pour des processus (ou champs) suffisamment réguliers et lorsque $u \rightarrow +\infty$, en approchant le nombre de composantes connexes de $A_u(X, S)$ par $\phi(A_u(X, S))$:

$$\begin{aligned} G(u) = P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] &= P[\text{Nombre de composantes connexes de } A_u(X, S) \geq 1] \\ &\leq E[\text{Nombre de composantes connexes de } A_u(X, S)] \\ &\sim E[\phi(A_u(X, S))]. \end{aligned}$$

Worsley (1995a, b) a établi une expression exacte pour $E[\phi(A_u(X, S))]$ lorsque X est un champ aléatoire gaussien centré stationnaire isotrope et S est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est une variété de classe $\mathcal{C}^2$. S'appuyant fortement sur le théorème de Hadwiger (1957), Adler (2000) généralise cette expression de $E[\phi(A_u(X, S))]$ à des sous-ensembles S plus généraux. Utilisant ensuite un résultat de Piterbarg (1996) il déduit que l'erreur commise en approchant $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ par $E[\phi(A_u(X, S))]$ est asymptotiquement super-exponentiellement faible (toujours dans le cas où X est gaussien centré stationnaire et isotrope) :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } |P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] - E[\phi(A_u(X, S))]| = o\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1 + \delta)\right)\right) \text{ quand } u \rightarrow +\infty.$$

Siegmund et Worsley (1995) puis Worsley (1998) obtiennent une expression exacte pour $E[\phi(A_u(X, S))]$ lorsque X est un champ aléatoire gaussien centré de variance un défini par :

$$X(x, t) = t^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} g\left(\frac{y - x}{t}\right) W(dy),$$

où $x \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ ($\mathcal{C}$ relativement général), $t \in [t_0, t_1]$ avec t_0 et t_1 réels strictement positifs, W est un bruit blanc gaussien sur $\mathbb{R}^N$ (tel que $E[W(A)W(B)] = |A \cap B|$ pour A et $B \in \mathbb{R}^N$) et g est un noyau lisse tel que $\int g^2(x)dx = 1$. Ils utilisent ensuite les techniques introduites par Sun, que l'on a exposées précédemment, pour montrer que :

$$|P[\max_{s \in S} X(s) \geq u] - E[\phi(A_u(X, S))]| = o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u}\right),$$

où $S = \mathcal{C} \times [t_0, t_1]$ et $s = (x, t)$. Adler (2000) utilise le résultat de Sun (1.11) pour obtenir une expression pour $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ dans le cas où X est gaussien stationnaire et S est le rectangle de $\mathbb{R}^2$. Il obtient ensuite une expression pour $E[\phi(A_u(X, S))]$ et vérifie que :

$$|P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] - E[\phi(A_u(X, S))]| = o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u}\right).$$

L'inconvénient majeur de l'approximation de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ par $E[\phi(A_u(X, S))]$ est qu'il n'existe pas de lien direct entre ces deux objets. Dans les trois cas que nous venons de présenter (qui sont pour le moment les trois seuls cas traités dans la littérature), la démonstration doit se faire en deux étapes complètement différentes : tout d'abord évaluer $E[\phi(A_u(X, S))]$ et ensuite évaluer $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$. La comparaison des deux expressions permet alors de conclure sur la pertinence de l'approximation de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ par $E[\phi(A_u(X, S))]$. De sorte que si a priori on ne sait pas calculer $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$, on peut toujours tenter de l'approcher par $E[\phi(A_u(X, S))]$, mais rien ne nous permet de conclure sur l'erreur commise par cette approximation. Cette approche, à l'état actuel des travaux de recherche,

ne permet donc pas de résoudre de manière correcte et rigoureuse le problème de l'approximation de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$.

On propose dans la première partie de cette thèse (chapitres 2 et 3) de généraliser la notion de up-crossings à la base des méthodes de Rice en dimension un par le nombre de maxima locaux $M_u^X(S)$ (défini précédemment) en dimension supérieure. On propose de généraliser le raisonnement fait en dimension un de la manière qui suit. Pour un champ aléatoire X sur un sous-ensemble compact S de $\mathbb{R}^N$ composé de n bords différents suffisamment réguliers, notons $(\partial S)_{i=1, \dots, n}$ chacun de ces bords et $R_u^X((\partial S)_i)$ l'évènement :

$$R_u^X((\partial S)_i) = \{ \exists t \in (\partial S)_i / X(t) \geq u, X''(t)|_{(\partial S)_i} < 0, X'_T(t) = 0, X'_N(t) > 0 \},$$

où :

$X'_T(t)$ est le vecteur des dérivées tangentielles au bord $(\partial S)_i$,

$X'_N(t)$ est le vecteur des dérivées normales au bord $(\partial S)_i$ dans les sens sortant à S ,

$X''(t)|_{(\partial S)_i}$ est la matrice des dérivées secondes de X restreinte au bord $(\partial S)_i$.

Alors :

$$\begin{aligned} P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] &= P[(M_u^X(S) \geq 1) \bigcup_{i=1}^n R_u^X((\partial S)_i)] \\ &= P[\bigcup_{i=1}^{(n+1)} A_i]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Bonferroni nous permet ensuite d'obtenir l'encadrement suivant :

$$\sum_{i=1}^{(n+1)} P[A_i] - \sum_{i < j} P[A_i A_j] \leq P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] \leq \sum_{i=1}^{(n+1)} P[A_i].$$

On estime alors $\sum_{i=1}^{(n+1)} P[A_i]$ en utilisant des formules de Rice et en les évaluant. On majore ensuite les termes $P[A_i A_j]$ également par des formules de Rice. On les évalue ensuite pour montrer qu'elles sont négligeables (dans la plupart des cas super-exponentiellement négligeables) par rapport aux termes principaux $\sum_{i=1}^{(n+1)} P[A_i]$. Les techniques utilisées pour évaluer les formules de Rice que l'on obtient ont d'abord été initiées par Adler (1981) et Piterbarg (1996).

Notons que l'application de cette méthode en dimension un a été présentée précédemment et permet de redémontrer la relation (1.8). L'avantage de cette méthode que l'on propose par rapport à la méthode

introduite par Adler et Worsley est qu'elle nous permet de relier directement $M_u^X(S)$ et $R_u^X((\partial S)_i)$ avec $\max_{t \in S} X(t)$ de sorte que l'évaluation de $P[M_u^X(S) \geq 1]$, $P[R_u^X((\partial S)_i)]$, $P[(M_u^X(S) \geq 1) \cap R_u^X((\partial S)_i)]$ et $P[R_u^X((\partial S)_i) \cap R_u^X((\partial S)_j)]$ pour $i < j$, $i, j = 1, \dots, n$ nous permet d'obtenir directement une évaluation de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$. Notons que les résultats établis par Sun et ceux établis par Adler et Worsley sont complémentaires : ils traitent chacun de cas différents. Ils ont également été obtenus par des méthodes complètement différentes. Un autre avantage de notre méthode est qu'elle est relativement générale. Elle nous permet ainsi de redémontrer des résultats établis d'une part par Sun et d'autre part par Adler et Worsley. Elle unifie donc en une même méthode les méthodes de Sun et de Adler et Worsley. Elle nous permet également dans certains cas d'améliorer des résultats déjà connus c'est-à-dire d'obtenir des développements asymptotiques plus précis. Elle nous permet également d'obtenir de nouveaux résultats plus généraux sous des hypothèses moins restrictives.

Dans le chapitre 2, on commence par rappeler quelques éléments de probabilités indispensables, donnant des conditions suffisantes faciles à vérifier pour satisfaire les hypothèses de théorèmes déjà existants ou qui seront établis. On généralise ensuite au cas non stationnaire et au cas de la variable aléatoire $M_u^X(S)$ la démonstration de la formule de Rice donnée dans Adler (1981) (théorème 6.1.1 p.123). Nous avons publié en 1998 le développement asymptotique de la formule de Rice que nous obtenons dans une Note aux *C.R.A.S.* que l'on reproduit en annexe A. Dans la troisième partie de ce chapitre on s'intéresse au deuxième moment factoriel $E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)]$. Nous exposons les démonstrations de la majoration de ce deuxième moment par une formule de Rice (cf. Wschebor). Nous en donnons ensuite un développement asymptotique (Piterbarg (1996b)). Ces résultats et leurs démonstrations seront utilisés (sans être repris) dans les chapitres suivants pour établir des formules de Rice avec leur développement asymptotique pour des moments factoriels légèrement différents. Ces résultats sont aussi à la base d'un théorème également présenté dans la Note aux *C.R.A.S.*. Ce théorème porte sur l'évaluation de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ lorsque X est un champ aléatoire gaussien sans bord. Il sera repris dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 3 nous établissons nos principaux résultats pour l'évaluation de $P[\max_{t \in S} X(t) \geq u]$ où X est un champ aléatoire gaussien sur S sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$. Les techniques utilisées sont celles que nous avons brièvement présentées précédemment. Ce chapitre est constitué de la reproduction d'un article soumis à une revue internationale.

Les deux derniers chapitres (chapitre 4 et 5) constituent la deuxième partie de cette thèse où nous

nous sommes principalement intéressés à un aspect plus appliqué des méthodes de Rice. Dans un premier temps nous avons fait une implémentation Splus des principales méthodes de Rice étudiées et établies dans cette thèse. Pour cela, en généralisant les résultats données dans Azaïs, Cierco et Croquette (1999), nous avons établi des formules relativement bien adaptées au calcul numérique pour l'évaluation des moments factoriels d'ordre un et d'ordre deux apparaissant lors de l'étude de

$$P[\max_{t \in [0;T]} X(t) \geq u] \text{ et } P[\max_{t \in [0;T]} |X(t)| \geq u],$$

où X est un processus aléatoire gaussien réel à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;T]$ vérifiant la condition de non dégénérescence du vecteur aléatoire :

$$(X(t), X(s), X'(t), X'(s)) \quad \forall t \neq s \in [0, T].$$

Le programme réalisé est présenté dans le chapitre 4. Les principaux listings sont donnés en annexe B. Dans le chapitre 5 nous adaptons la méthode de Rice décrite dans le chapitre 4 pour des processus à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;T]$ au cas de processus X sur $[-T_2; T_1]$ à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-T_2; 0[$ et $]0; T_1]$ et tels que $X(0^+) = -X(0^-)$ p.s.. L'application aux tests de mélanges de distributions (Gosh et Sen (1985), Dacunha-Castelle et Gassiat (1997b, 1999)) nous permet alors d'obtenir des tables et des résultats de puissances pour les tests du rapport des maxima de vraisemblance asymptotiques d'une population gaussienne contre deux. Cela nous permet de comparer ces tests à des tests de moments classiques. Des conclusions sont alors tirées quant à l'optimalité de ces tests.

En conclusion de cette thèse nous donnons plusieurs perspectives particulièrement intéressantes dégagées par ce travail.

Chapitre 2

Formules de Rice

2.1 Introduction

Notons tout d'abord, pour commencer ce chapitre, qu'il existe des conditions suffisantes, aisées à vérifier, pour qu'un processus (ou un champ) aléatoire ait des trajectoires p.s. continues ou p.s. de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela on pourra consulter Cramér et Leadbetter (1967) et Adler (1981). Nous rappelons maintenant un théorème donnant une condition suffisante pour que l'hypothèse (2.4) du théorème 2.6 soit satisfaite.

Théorème 2.1 (Adler (1981) p.60) *Soit $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$, un champ aléatoire gaussien centré dont la fonction de covariance est continue. Alors, si il existe $0 < C < +\infty$ et $\epsilon > 0$ pour lesquels :*

$$E[|X(s) - X(t)|^2] \leq \frac{C}{|\log ||s - t|||^{1+\epsilon}}, \forall s, t \in [0, 1]^N,$$

X a des trajectoires p.s. continues sur $[0, 1]^N$. De plus $\forall \alpha > 0$,

$$\eta^{-N} P[\omega_X(\eta) > \alpha] \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0,$$

où $\omega_X(\eta)$ est le module de continuité de X .

Ce théorème nous montre que cette hypothèse (2.4) n'est finalement pas très chère à satisfaire.

L'objectif principal de ce chapitre est d'exposer la démonstration de la formule de Rice pour $E[M_u^X(S)]$, son développement asymptotique, la majoration par une formule de Rice du second moment factoriel $E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)]$ et son développement asymptotique. Le premier de ces quatre points consiste en une généralisation aisée au cas non stationnaire et au cas de la variable aléatoire $M_u^X(S)$ du théorème 6.1.1 p.123 de Adler (1981). Le second a fait l'objet d'une note aux *C.R.A.S.* que nous reproduisons en

annexe A; la démonstration complète pourra être trouvée dans le chapitre 3. Le troisième et le quatrième points sont dûs respectivement à Wschebor et Piterbarg (1996b). Nous exposons ces démonstrations car par la suite nous nous y référeront souvent, sans les reprendre, pour obtenir de manière analogue d'autres formules de Rice et développements asymptotiques. Notons que la formule de Rice exacte pour le deuxième moment factoriel $E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)]$ a été obtenue par V. Konakov dans sa thèse de doctorat.

Par la suite nous noterons:

- $X_i(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial t_i}$, $X_{ij}(t) = \frac{\partial^2 X(t)}{\partial t_i \partial t_j}$
- ω_j : module de continuité des X_j , ω_{ij} : module de continuité des X_{ij} .

2.2 Le premier moment

2.2.1 Formule de Rice

Soit V un voisinage ouvert de S sous-ensemble compact de R^N dont la frontière est de mesure de Lebesgue nulle.

Théorème 2.2 *Soit X un champ aléatoire sur V . Supposons que, avec une probabilité égale à un :*

- $X(t), X'(t), X''(t)$ sont continues sur V .
- Il n'y a pas de points $t \in S : (X'(t) = 0 \text{ et } X(t) = u)$ ou $(X'(t) = 0 \text{ et } \det X''(t) = 0)$.
- Il n'y a pas de points $t \in \partial S : X'(t) = 0$.
- Il n'y a qu'un nombre fini de points $t \in S : X'(t) = 0$.

Soit $M_u^X(S) = \#\{t \in S : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) < 0\}$. Soit A le sous-ensemble de R^K , $K = \frac{N(N+1)}{2} + 1$, où $X(t) > u$ et $X''(t) < 0$. Alors, avec une probabilité égale à un :

$$M_u^X(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S \delta_\epsilon(X'(t)) 1_A(X(t), X''(t)) |\det X''(t)| dt,$$

où $\delta_\epsilon(x')$ est une fonction sur R^N définie comme étant constante sur $\sigma(\epsilon) = \{x' \in R^N / \|x'\| < \epsilon\}$ et nulle ailleurs et normalisée de sorte que $\int_{\sigma(\epsilon)} \delta_\epsilon(x') dx' = 1$.

Preuve : La démonstration de ce théorème réside en l'utilisation du théorème d'inversion locale. On choisit une réalisation de X qui satisfait les conditions du théorème. On considère les points $t \in S$ pour

lesquels $X'(t) = 0$, $X(t) > u$ et $X''(t) < 0$. Comme il y en a un nombre fini, noté k , et qu'aucun ne se trouve sur ∂S , chacun peut être entouré d'une boule ouverte de rayon η de façon à ce que ces boules soient distinctes et n'aient pas d'intersection avec ∂S . De plus on choisit ces boules de rayon η suffisamment petit pour que à l'intérieur de chacune d'entre elles $(X(t), X''(t))$ appartienne à A . Par le théorème d'inversion locale, on sait qu'il existe k voisinages $U_1, U_2, \dots, U_k$ de $t_1, t_2, \dots, t_k$ dans S et k voisinages $V_1, V_2, \dots, V_k$ de 0 dans l'espace image de X' tels que X' réalise une bijection de U_i dans V_i . Choisissons ϵ suffisamment petit pour que $\sigma(\epsilon)$, la boule $\|X'\| < \epsilon$ dans l'espace image de X' , soit contenue dans l'intersection des k voisinages V_i . On sait alors qu'il existe k autres voisinages $U'_1, U'_2, \dots, U'_k$ de $t_1, t_2, \dots, t_k$ dans S tels que X' réalise une bijection de U'_i dans $\sigma(\epsilon)$. Le jacobien de la bijection X' de U'_i dans $\sigma(\epsilon)$ étant $|\det X''(t)|$, on en déduit que l'on peut choisir ϵ suffisamment petit pour que :

$$M_u^X(S) = \int_S \delta_\epsilon(X'(t)) 1_A(X(t), X''(t)) |\det X''(t)| dt.$$

Et en passant à la limite lorsque ϵ tend vers 0 on obtient le théorème.

Théorème 2.3 *Si X est un champ aléatoire gaussien centré, de variance un, avec une fonction de covariance de classe $\mathcal{C}^4$ sur V et à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^2$ sur V ; et si de plus $(X(t), X'(t), X''(t))$ est non-dégénéré $\forall t \in V$, alors avec une probabilité égale à un :*

- *Il n'y a pas de points $t \in S : (X'(t) = 0 \text{ et } X(t) = u) \text{ ou } (X'(t) = 0 \text{ et } \det X''(t) = 0)$.*
- *Il n'y a pas de points $t \in \partial S : X'(t) = 0$.*
- *Il n'y a qu'un nombre fini de points $t \in S : X'(t) = 0$.*

Et en utilisant les mêmes notations que celles du théorème précédent :

$$M_u^X(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S \delta_\epsilon(X'(t)) 1_A(X(t), X''(t)) |\det X''(t)| dt.$$

Preuve : Sous les hypothèses du théorème 2.3 nous allons établir les lemmes 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 qui nous conduiront à démontrer le théorème.

Lemme 2.1 *Pour tout $\epsilon > 0$, il est possible de trouver une fonction continue $\omega_\epsilon(h)$, telle que $\omega_\epsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, et une constante finie positive C_ϵ , telles que $P[E_\epsilon] > 1 - \epsilon$, où E_ϵ est l'évènement :*

$$\{ \max_{i,j} \sup_{t \in S} |X_{ij}(t)| < C_\epsilon, \omega_X(h) \leq NhC_\epsilon, \max_j \omega_j(h) \leq NhC_\epsilon, \max_{i,j} \omega_{ij}(h) \leq \omega_\epsilon(h) \text{ pour } 0 < h \leq 1 \}.$$

Preuve : Soit $\omega^*(h) = \max_{1 \leq i,j \leq N} \omega_{ij}(h)$. Comme les X_{ij} sont p.s. continues, nous avons : $\lim_{h \rightarrow 0} P(\omega^*(h) < c) = 1 \forall c > 0$ fixé. Soit $\{c_n\}$ une suite réelle, décroissant strictement vers 0. Alors pour tout $\epsilon > 0$ on

peut toujours trouver $h_n > 0$ tels que :

$$P[\omega^*(h_n) < c_n] > 1 - \frac{2^{-n}\epsilon}{6}.$$

Puisque $\omega^*(h)$ décroît en h , on peut écrire :

$$P[\omega^*(h) < c_n, 0 < h \leq h_n] > 1 - \frac{2^{-n}\epsilon}{6}.$$

On peut également supposer que les h_n forment une suite décroissant vers 0 et alors :

$$P[\omega^*(h) < c_n, 0 < h \leq h_n, n = 1, 2, \dots] > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}\epsilon}{6} = 1 - \frac{\epsilon}{6}.$$

Soit $\omega_\epsilon(h) = c_n$ pour $h_{n+1} < h \leq h_n$, nous avons :

$$P[\omega^*(h) < \omega_\epsilon(h), 0 < h \leq h_1] > 1 - \frac{\epsilon}{6}.$$

Si $h_1 < 1$ on pose simplement $\omega_\epsilon(h) = c_0$ pour $h_1 < h \leq 1$, où c_0 est suffisamment grand pour que :

$$P[\omega^*(h) < c_0, h_1 < h \leq 1] > 1 - \frac{\epsilon}{6}.$$

On obtient donc que : $P[\max_{1 \leq i, j \leq N} \omega_{ij}(h) \leq \omega_\epsilon(h)] > 1 - \frac{\epsilon}{3}$. Nous pouvons également dire qu'il existe une constante finie C_ϵ telle que :

$$P[\max_{i, j} \sup_{t \in S} |X_{ij}(t)| < C_\epsilon] > 1 - \frac{\epsilon}{3}.$$

En effet si cette constante C_ϵ n'existait pas alors on aurait que :

$$P[\max_{i, j} \sup_{t \in S} |X_{ij}(t)| = +\infty] \geq \frac{\epsilon}{3} > 0,$$

ce qui contredirait la continuité p.s. des X_{ij} sur le compact S . De plus, si nous avons : $\max_{i, j} \sup_{t \in S} |X_{ij}(t)| < C_\epsilon$, alors par N applications du théorème de la valeur moyenne, nous obtenons :

$$\max_j \sup_{||t-s|| < h} |X_j(t) - X_j(s)| < NhC_\epsilon, \text{ donc}$$

$$P[\max_{i, j} \sup_{t \in S} |X_{ij}(t)| < C_\epsilon, \max_j \omega_j(h) < NhC_\epsilon] > 1 - \frac{\epsilon}{3}.$$

En appliquant les mêmes arguments aux X_j et à X , il s'ensuit que :

$$P[\omega_X(h) < NhC_\epsilon] > 1 - \frac{\epsilon}{3}.$$

En combinant les inégalités obtenues, on établit le lemme.

Lemme 2.2 *Il n'y a pas, avec une probabilité égale à un, de points $t \in S$ tels que $X'(t) = 0$ et $X(t) = u$.*

Preuve : Soit $m = 1, 2, \dots$. Soit une décomposition de S en $M \times m^N$ cubes (ou portions de cubes) S_{mk} , $k = 1, 2, \dots, Mm^N$, dont les côtés sont de longueur m^{-1} . Soit t_{mk} le point milieu de S_{mk} lorsque S_{mk} est un cube et un point quelconque fixé dans S_{mk} lorsque S_{mk} est une portion de cube. Soit A_{mk} l'évènement qu'il existe un point $t \in S_{mk}$ pour lequel $X(t) = u$ et $X'(t) = 0$. Soit A l'évènement analogue pour $t \in S$. Nous voulons montrer que $P(A) = 0$. Puisque :

$$A = \bigcup_{k=1}^{Mm^N} A_{mk} \quad \forall m,$$

nous avons, pour $\epsilon > 0$ quelconque :

$$P(A) \leq \sum_{k=1}^{Mm^N} P(A_{mk} \cap E_\epsilon) + P(\bar{E}_\epsilon)$$

où $\bar{E}_\epsilon$ est le complémentaire de E_ϵ défini dans le lemme précédent. Supposons que A_{mk} et E_ϵ aient lieu en même temps. Alors pour un $t \in S_{mk}$:

$$X(t) - u = 0 \text{ et } X_j(t) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

Alors les bornes sur ω_X et ω_j dans E_ϵ nous permettent de dire que il existe une constante λ telle que :

$$|X(t_{mk}) - u| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon \text{ et}$$

$$|X_j(t_{mk})| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon \text{ pour } j = 1, 2, \dots, N.$$

Et donc sous les conditions du théorème il existe une constante K telle que :

$$\begin{aligned} P(A_{mk} \cap E_\epsilon) &\leq P[|X(t_{mk}) - u| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon, |X_j(t_{mk})| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon, j = 1, \dots, N] \\ &\leq K \lambda N m^{-1} C_\epsilon (\lambda N m^{-1} C_\epsilon)^N \\ &= K \lambda^{N+1} C_\epsilon^{N+1} N^{N+1} m^{-(N+1)}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $P[E_\epsilon] > 1 - \epsilon$, nous obtenons :

$$P(A) \leq m^{-1} (M K \lambda^{N+1} C_\epsilon^{N+1} N^{N+1}) + \epsilon.$$

En choisissant ϵ suffisamment petit et m suffisamment grand, $P(A)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. Ceci établit le lemme.

Lemme 2.3 *Il n'y a pas, avec une probabilité égale à un, de points $t \in S$ tels que $X'(t) = 0$ et $\det X''(t) = 0$.*

Preuve : Nous utilisons les mêmes notations générales que dans la preuve du lemme précédent. Soit B_{mk} l'évènement qu'il existe un $t \in S_{mk}$ pour lequel $X_j(t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$ et $\det X''(t) = 0$. Soit B l'évènement analogue pour $t \in S$. Nous devons donc montrer que $P(B) = 0$. Puisque :

$$B = \bigcup_{k=1}^{Mm^N} B_{mk} \quad \forall m,$$

nous avons :

$$P(B) \leq \sum_{k=1}^{Mm^N} P(B_{mk} \cap E_\epsilon) + P(\bar{E}_\epsilon).$$

Soit $t \in S_{mk}$, $X_{ij}(t_{mk})$ s'écrit également $X_{ij}(t_{mk}) = X_{ij}(t) + (X_{ij}(t_{mk}) - X_{ij}(t))$. En développant $\det(X''(t_{mk}))$ on obtient donc $\det X''(t)$ plus $N!(2^N - 1)$ extra-termes. Si l'évènement E_ϵ a lieu, chacun de ces extra-termes peut être majoré en valeur absolue par une expression de la forme : $C_\epsilon^{N-r} [\omega_\epsilon(\lambda m^{-1})]^r$ pour un r compris entre 1 et N et λ une constante fixée. Si B_{mk} a également lieu :

$$|\det X''(t_{mk})| \leq N!(2^N - 1)C_\epsilon^{N-1}\omega_\epsilon(\lambda m^{-1}) \quad \text{et}$$

$$|X_j(t_{mk})| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, N.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P[B_{mk} \cap E_\epsilon] &\leq P[|\det X''(t_{mk})| \leq N!(2^N - 1)C_\epsilon^{N-1}\omega_\epsilon(\lambda m^{-1}), |X_j(t_{mk})| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon, j = 1, \dots, N] \\ &= \int P[|\det X''(t_{mk})| \leq N!(2^N - 1)C_\epsilon^{N-1}\omega_\epsilon(\lambda m^{-1}) / X_j(t_{mk}) = x_j, j = 1, \dots, N] \times \\ &\quad \phi_{(X_j(t_{mk}))_{j=1, \dots, N}}((x_j)_{j=1, \dots, N}) dx_1 \dots dx_N, \end{aligned}$$

où $\phi_{(X_j(t_{mk}))_{j=1, \dots, N}}((x_j)_{j=1, \dots, N})$ est la densité jointe des $X_j(t_{mk})$ pour $j = 1, \dots, N$ au point $(x_j)_{j=1, \dots, N}$. L'intégrale est sur $(-\lambda N m^{-1} C_\epsilon, \lambda N m^{-1} C_\epsilon)$ pour chacun des $X_j(t_{mk})$. Sous les conditions du théorème, la densité jointe $\phi_{(X_j(t_{mk}))_{j=1, \dots, N}}((x_j)_{j=1, \dots, N})$ est bornée. De plus la probabilité conditionnelle est majorée par 1 et tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ pour tout $(x_j)_{j=1, \dots, N}$. Il s'ensuit par le théorème de convergence dominée que pour tout $\delta > 0$ et pour m suffisamment grand, $P[B_{mk} \cap E_\epsilon] \leq \delta m^{-N}$. En utilisant le fait que $P[E_\epsilon] > 1 - \epsilon$ on obtient que $P(B) < \delta + \epsilon$. Comme δ et ϵ peuvent être pris arbitrairement petits, le lemme est établi.

Lemme 2.4 *Il n'y a pas, avec une probabilité égale à un, de points $t \in \partial S$ tels que $X'(t) = 0$.*

Preuve : Puisque ∂S est de mesure de Lebesgue nulle, on peut recouvrir ∂S par une collection de cubes I_{mk} ayant chacun des côtés de longueur m^{-1} . Notons $M(m)$ le nombre de ces cubes. $M(m)$ peut être choisi de sorte que $M(m)m^{-N} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$. Soit ∂S_{mk} l'intersection de I_{mk} avec ∂S et $t_{mk} \in \partial S_{mk}$

un point fixé dans ∂S_{mk} . Soit C_{mk} l'évènement qu'il existe un $t \in \partial S_{mk}$ pour lequel $X_j(t) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, N$. Soit C l'évènement analogue pour $t \in \partial S$. Il nous faut montrer que $P(C) = 0$.

$$P(C) \leq \sum_{k=1}^{M(m)} P(C_{mk} \cap E_\epsilon) + P(\bar{E}_\epsilon).$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans le lemme 2.2 nous obtenons :

$$P[C_{mk} \cap E_\epsilon] \leq P[|X_j(t_{mk})| \leq \lambda N m^{-1} C_\epsilon, j = 1, 2, \dots, N].$$

En utilisant les conditions du théorème :

$$P(C) \leq K \lambda^N N^N C_\epsilon^N m^{-N} M(m) + \epsilon.$$

En choisissant m suffisamment grand et ϵ suffisamment petit on obtient le lemme.

Lemme 2.5 *Il n'y a, avec une probabilité égale à un, qu'un nombre fini de points $t \in S$ tels que $X'(t) = 0$.*

Preuve : Supposons qu'il existe une infinité de points $t \in S$ tels que $X'(t) = 0$. Alors on peut en extraire une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $X'(t_n) = 0$. Or $t_n \in S$ compact $\forall n \in \mathbb{N}$ donc il existe un point d'accumulation $a \in S$ tel que $t_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par continuité on obtient que $X'(a) = 0$. Or on sait que $\det(X''(a)) \neq 0$ donc par le théorème d'inversion locale, il existe U un voisinage de a et V un voisinage de 0 dans l'espace image de X' tel que X' réalise une bijection de U dans V . Or il existe n tel que $t_n \in U$ et $X'(t_n) = 0$ et $t_n \neq a$. On aboutit donc à une contradiction. Ceci établit le lemme.

Théorème 2.4 *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2.3 :*

$$E[M_u^X(S)] \leq \int_S \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx'' dx dt,$$

où $\mathcal{D}$ est la région de R^K , $K = \frac{N(N+1)}{2}$, où x'' est définie négative. $\Phi_t(x, x', x'')$ la densité jointe de $(X(t), X'(t), X''(t))$ au point (x, x', x'') .

Preuve : La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation du lemme de Fatou. Soit :

$$M_u^X(S)_\epsilon = \int_S \delta_\epsilon(X'(t)) 1_A(X(t), X''(t)) |\det X''(t)| dt.$$

Nous avons pour tout $\epsilon > 0$:

$$E[M_u^X(S)_\epsilon] = \int_S dt \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} \delta_\epsilon(x') |\det x''| \Phi_t(x, x', x'') dx' dx'' dx,$$

où l'intégrale la plus intérieure est sur tous les $x_1, x_2, \dots, x_N$, $\mathcal{D}$ est la région de R^K , $K = \frac{N(N+1)}{2}$, où x'' est définie négative. L'inversion de l'ordre d'intégration est justifiée par le théorème de Fubini. Par le lemme de Fatou on peut écrire :

$$E[M_u^X(S)] \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E[M_u^X(S)_\epsilon].$$

De plus :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \delta_\epsilon(x') |\det x''| \Phi_t(x, x', x'') dx' = |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'').$$

On peut montrer que $\int \delta_\epsilon(x') |\det x''| \Phi_t(x, x', x'') dx'$ est majorée par une fonction intégrable $\forall \epsilon > 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée on obtient donc que :

$$E[M_u^X(S)] \leq \int_S dt \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx'' dx.$$

Ceci établit le théorème.

Théorème 2.5 *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème précédent et en supposant que les modules de continuité des X_{ij} sur S vérifient :*

$$\forall \epsilon > 0 \ P[\max_{i,j} \omega_{ij}(h) > \epsilon] = o(h^N) \text{ quand } h \downarrow 0,$$

alors,

$$E[M_u^X(S)] = \int_S \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx'' dx dt.$$

Preuve : Montrons tout d'abord que sous les hypothèses du théorème nous avons :

$$\forall \epsilon > 0 \ P[\max[\omega_X(h), \max_{i,j} \omega_{ij}(h)] > \epsilon] = o(h^N) \text{ quand } h \downarrow 0.$$

Par N applications du théorème de la valeur moyenne, nous avons :

$$\omega_X(h) \leq Nh \max_i \sup_{t \in S} |X_i(t)|.$$

Donc si $\omega_X(h) > \epsilon$ alors $\max_i \sup_{t \in S} |X_i(t)| > \frac{\epsilon}{Nh}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} h^{-N} P[\omega_X(h) > \epsilon] &\leq h^{-N} P[\max_i \sup_{t \in S} |X_i(t)| > \frac{\epsilon}{Nh}] \\ &\leq h^{-N} \sum_{i=1}^N P[\sup_{t \in S} |X_i(t)| > \frac{\epsilon}{Nh}] \\ &\leq h^{-N} \sum_{i=1}^N (P[\sup_{t \in S} X_i(t) > \frac{\epsilon}{Nh}] + P[\sup_{t \in S} (-X_i(t)) > \frac{\epsilon}{Nh}]) \end{aligned}$$

Or X_i est p.s. continue sur S compact de R^N . Donc :

$$P[\sup_{t \in S} X_i(t) < +\infty] = 1 \text{ et } P[\sup_{t \in S} (-X_i(t)) < +\infty] = 1.$$

Ainsi X_i et $(-X_i)$ vérifient les hypothèses du théorème de l'inégalité de Borell et par conséquent on obtient aisément que :

$$h^{-N} P[\sup_{t \in S} X_i(t) > \frac{\epsilon}{Nh}] \xrightarrow{h \downarrow 0} 0 \text{ et } h^{-N} P[\sup_{t \in S} (-X_i(t)) > \frac{\epsilon}{Nh}] \xrightarrow{h \downarrow 0} 0$$

Donc $P[\omega_X(h) > \epsilon] = o(h^N)$ quand $h \downarrow 0$. Comme :

$$P[\max[\omega_X(h), \max_{i,j} \omega_{ij}(h)] > \epsilon] \leq P[\max_{i,j} \omega_{ij}(h) > \epsilon] + P[\omega_X(h) > \epsilon],$$

il s'ensuit que $P[\max[\omega_X(h), \max_{i,j} \omega_{ij}(h)] > \epsilon] = o(h^N)$ quand $h \downarrow 0$.

Montrons maintenant le théorème :

Soit, pour $n \geq 1$, $L_n = \{t \in R^N : t_j = i \cdot 2^{-n}, j = 1, \dots, N, i = 0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$. Soient :

$$\Delta_n(t) = \{s \in R^N : |s_j - t_j| \leq 2^{-(n+1)}, j = 1, \dots, N\} \text{ et}$$

$$\Delta_n^\epsilon(t) = \{s \in R^N : |s_j - t_j| \leq (1 - \epsilon)2^{-(n+1)}, j = 1, \dots, N\}.$$

Soit $t \in L_n$ et

$$I_{nt} = \begin{cases} 1 & \text{si } M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) > 0 \\ 0 & \text{si } M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) = 0 \end{cases}$$

avec par convention $M_u^X(\emptyset) = 0$. Soit $M_u^{X,n}(S) = \sum_{t \in L_n} I_{nt}$ une approximation de $M_u^X(S)$. D'après le

théorème 2.2, on sait que $P[M_u^X(\partial(S \cap \Delta_n(t))) = 0] = 1 \forall n$ et t . Donc $P[M_u^X(\bigcup_n \partial(S \cap \Delta_n(t))) = 0] = 1$.

Ainsi :

$$M_u^{X,n}(S) \xrightarrow{p.s.} M_u^X(S) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

$M_u^{X,n}(S)$ étant croissant en n , par le théorème de convergence monotone :

$$\begin{aligned} E[M_u^X(S)] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} E[M_u^{X,n}(S)] \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{t \in L_n, \Delta_n(t) \subset S} P[M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) > 0] \end{aligned}$$

Intéressons-nous à la minoration de $P[M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) > 0]$. Soient :

$$\omega_X^*(n) = \max[\omega_X(2^{-n}), \max_{i,j} \omega_{ij}(2^{-n})] \text{ et}$$

$$M_X = \max_{i,j} \sup_{t \in S} |X_{ij}(t)|.$$

Par hypothèse nous avons que $\forall \eta > 0, P[\omega_X^*(n) > \eta] = o(2^{-Nn})$. Choisissons :

$$\eta = \frac{\epsilon \delta}{2K^{N-1}N!(2^N - 1)} \text{ avec } \delta > 0 \text{ assez petit et } K > 0 \text{ assez grand.}$$

Choisissons un n fixé et un $t \in L_n$ fixé tel que $\Delta_n(t) \subset S$. On suppose que $\omega_X^*(n) \leq \eta$ et que l'évènement $G_{\delta K}$ a lieu; où :

$$G_{\delta K} = \{|\det X''(t)| > \delta, (X(t) - u) > \delta, M_X < K, X''(t) \text{ possède } N \text{ valeurs propres } < 0\}$$

Sur $\Delta_n(t)$, on approche X' par l'hyperplan passant par $X'(t)$ au point t et dont l'équation est $Y(x) = X'(t) + (x - t)X''(t)$ pour $x \in V$. Soit t^* le point de V solution de $Y(x) = 0$. Nous avons alors :

$$X'(t) = (t - t^*)X''(t). \quad (2.1)$$

Nous allons montrer que si $\omega_X^*(n) < \eta$, si $G_{\delta K}$ a lieu et si l'approximation Y de X' a son zéro t^* dans $\Delta_n^\epsilon(t)$ alors X' admet au moins un zéro τ dans $\Delta_n(t)$ qui vérifie $X''(\tau) < 0$ et $X(\tau) > u$. Ainsi on aura :

$$P[M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) > 0] \geq P[G_{\delta K} \cap [t^* \in \Delta_n^\epsilon(t)]] - o(2^{-nN}). \quad (2.2)$$

Soit $\tau \in \Delta_n(t) : X''(\tau) = X''(t) + X''(\tau) - X''(t)$. Par conséquent $\det X''(\tau)$ se réécrit sous la forme $\det X''(t)$ plus $N!(2^N - 1)$ extra-termes. Chacun de ces extra-termes peut se majorer en module par $K^{N-r}\eta^r$ pour un r compris entre 1 et N . Ainsi :

$$|\det X''(\tau) - \det X''(t)| \leq K^{N-1}\eta N!(2^N - 1) \leq \frac{\delta}{2}.$$

De même $|X(\tau) - X(t)| \leq \frac{\delta}{2}$. Par conséquent $(X(\tau) - u)$ reste supérieur ou égal à $\frac{\delta}{2}$ sur $\Delta_n(t)$, de même $|\det X''(\tau)|$ reste supérieur ou égal à $\frac{\delta}{2}$ sur $\Delta_n(t)$ avec $X''(\tau)$ qui a N valeurs propres < 0 . Supposons que $t^* \in \Delta_n^\epsilon(t)$, alors d'après (2.1) $X'(t)X''^{-1}(t) \in \Delta_n^\epsilon(0)$. De plus chaque terme de la matrice :

$$I + (X''(t) - X''(t^1, \dots, t^N))X''^{-1}(t^1, \dots, t^N)$$

est majorée en module par $1 + \epsilon$, $\forall (t^1, \dots, t^N) \in \Delta_n(t)$. Ainsi :

$$X'(t)X''^{-1}(t^1, \dots, t^N) = [X'(t)X''^{-1}(t)][I + (X''(t) - X''(t^1, \dots, t^N))X''^{-1}(t^1, \dots, t^N)]$$

appartient à $\Delta_n(0) \forall (t^1, \dots, t^N) \in \Delta_n(t)$. Soit $\tau \in \Delta_n(t)$. Par le théorème de la valeur moyenne il existe $(t^1, \dots, t^N) \in L(t, \tau)$ où $L(t, \tau) = \{s \in \Delta_n(t) : s = \theta t + (1 - \theta)\tau, 0 < \theta < 1\}$ tels que : $X'(\tau) - X'(t) = (\tau - t)X''(t^1, \dots, t^N)$ c'est-à-dire :

$$X'(\tau)X''^{-1}(t^1, \dots, t^N) = X'(t)X''^{-1}(t^1, \dots, t^N) + (\tau - t). \quad (2.3)$$

D'après ce qui précède $t - X'(t)X''^{-1}(t^1, \dots, t^N) \in \Delta_n(t) \forall (t^1, \dots, t^N) \in \Delta_n(t)$. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Brouwer, l'application continue de $\Delta_n(t)$ dans $\Delta_n(t)$ donnée par :

$$\tau \rightarrow t - X'(t)X''^{-1}(t^1, \dots, t^N),$$

admet au moins un point fixe. Donc il existe au moins un point $\tau \in \Delta_n(t)$ tel que $X'(\tau)X''^{-1}(t^1, \dots, t^N) = 0$ (d'après l'égalité (2.3)) c'est-à-dire tel que $X'(\tau) = 0$. L'inégalité (2.2) est ainsi vérifiée. On obtient alors :

$$P[M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) > 0] \geq \int_{G_{\delta K} \cap \{t^* \in \Delta_n^e(t)\}} |\det x''| \Phi_t(x, (t - t^*)x'', x'') dt^* dx dx'' - o(2^{-nN}),$$

où Φ_t est la densité jointe de $(X(t), X'(t), X''(t))$. Ainsi :

$$\sum_{t \in L_n / \Delta_n(t) \subset S} P[M_u^X(S \cap \Delta_n(t)) > 0] \geq \sum_{t \in L_n / \Delta_n(t) \subset S} \int_{G_{\delta K} \cap \{t^* \in \Delta_n^e(t)\}} |\det x''| \Phi_t(x, (t - t^*)x'', x'') dt^* dx dx'' - o(2^{-nN}).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, le second terme de l'inégalité a la même limite que :

$$\sum_{t \in L_n / \Delta_n(t) \subset S} 2^{-nN} (1 - \epsilon)^N \int_{G_{\delta K}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx dx'' - o(2^{-nN}),$$

qui est $\int_{S_\epsilon} \int_{G_{\delta K}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx dx'' dt$. En faisant tendre ϵ et δ vers 0 et K vers $+\infty$ et en appliquant le théorème de convergence monotone on obtient :

$$E[M_u^X(S)] \geq \int_S \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx dx'' dt.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème 2.6 *Si X est un champ aléatoire gaussien centré, de variance 1, avec une fonction de covariance de classe $\mathcal{C}^4$ sur V et à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^2$ sur V . Si de plus $(X(t), X'(t), X''(t))$ est non-dégénéré $\forall t \in V$ et si les modules de continuité des X_{ij} sur S vérifient :*

$$\forall \epsilon > 0 \ P[\max_{i,j} \omega_{ij}(h) > \epsilon] = o(h^N) \text{ quand } h \downarrow 0, \quad (2.4)$$

alors, en notant $M_u^X(S) = \#\{t \in S : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) < 0\}$,

$$E[M_u^X(S)] = \int_S \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| \Phi_t(x, 0, x'') dx dx'' dt,$$

où $\mathcal{D}$ est la région de R^K , $K = \frac{N(N+1)}{2}$, où x'' est définie négative et $\Phi_t(x, 0, x'')$ est la densité jointe de $(X(t), X'(t), X''(t))$ au point $(x, 0, x'')$.

2.2.2 Développement asymptotique

On renvoie à la Note aux *C.R.A.S.* donnée en annexe A et pour la démonstration au chapitre 3 suivant.

2.3 Le deuxième moment factoriel

2.3.1 Majoration par la formule de Rice

Soit V un voisinage ouvert de S sous-ensemble compact de R^N dont la frontière est de mesure de Lebesgue nulle.

Théorème 2.7 *Si X est un champ aléatoire gaussien centré, de variance 1, avec une fonction de covariance de classe $\mathcal{C}^4$ sur V et à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^2$ sur V . Si de plus le vecteur :*

$$(X(t), X(s), X'(t), X'(s), X''(t), X''(s))$$

est non-dégénéré $\forall t \neq s, (t, s) \in V^2$, alors, en notant $M_u^X(S) = \#\{t \in S : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) < 0\}$,

$$E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)] \leq \int_S \int_S dt ds \int_u^\infty \int_u^\infty dx dy \\ E[\tilde{\det}(-X''(t))\tilde{\det}(-X''(s))/X(t) = x, X(s) = y, X'(t) = 0, X'(s) = 0]p_{t,s}(x, y, 0, 0),$$

où $p_{t,s}(x, y, 0, 0)$ est la densité jointe de $(X(t), X(s), X'(t), X'(s))$ au point $(x, y, 0, 0)$ et $\tilde{\det}(-X''(t)) = \det(-X''(t))1_{(-X''(t) > 0)}$.

Preuve : Soit $C_u^X(S) = \{t \in S : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) < 0\}$, alors $M_u^X(S) = \#C_u^X(S)$. Définissons une mesure aléatoire ν sur les boréliens de S^2 . Pour tout borélien J de S^2 , $\nu(J) = \#(J \cap C_u^X(S)^2)$. Nous avons donc :

$$M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1) = \nu(S^2/D_2(S)),$$

$$\text{où } D_2(S) = \{(t_1, t_2) \in S^2 / t_1 = t_2\}.$$

On veut montrer que : $E[\nu(S^2/D_2(S))] \leq \int_S \int_S dt ds \int_u^\infty \int_u^\infty dx dy$

$$E[\tilde{\det}(-X''(t))\tilde{\det}(-X''(s))/X(t) = x, X(s) = y, X'(t) = 0, X'(s) = 0]p_{t,s}(x, y, 0, 0).$$

Pour cela considérons un rectangle compact $J \subset S^2/D_2(S)$, $J = J_1 \times J_2$ avec J_1 et J_2 deux rectangles compacts inclus dans S et disjoints.

$$\nu(J) = \nu(J_1 \times J_2) = M_u^X(J_1)M_u^X(J_2)$$

$$E[\nu(J)] = E[M_u^X(J_1)M_u^X(J_2)].$$

En utilisant les résultats de la première partie : $E[\nu(J)] = E[M_u^X(J_1)M_u^X(J_2)] =$

$$E[\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{J_1} dt \int_{J_2} ds \delta_{\epsilon_1}[X'(t)] \delta_{\epsilon_2}[X'(s)] 1_A(X(t), X''(t)) 1_A(X(s), X''(s)) |\det X''(t)| |\det X''(s)|].$$

En utilisant le lemme de Fatou on obtient que : $E[\nu(J)] \leq$

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0} E[\int_{J_1} dt \int_{J_2} ds \delta_{\epsilon_1}[X'(t)] \delta_{\epsilon_2}[X'(s)] 1_A(X(t), X''(t)) 1_A(X(s), X''(s)) |\det X''(t)| |\det X''(s)|].$$

Par le théorème de Fubini et en notant $p_{t,s}(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2)$ la densité jointe de :

$$(X(t), X(s), X'(t), X'(s), X''(t), X''(s))$$

au point $(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2)$:

$$E[\nu(J)] \leq \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0} [\int_{J_1} dt \int_{J_2} ds \int \int \int \delta_{\epsilon_1}[x'_1] \delta_{\epsilon_2}[x'_2] 1_A(x_1, x''_1) 1_A(x_2, x''_2) |\det x''_1| |\det x''_2| p_{t,s}(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2) dx'_1 dx'_2 dx''_1 dx''_2].$$

Or :

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0} \int \delta_{\epsilon_1}[x'_1] \delta_{\epsilon_2}[x'_2] 1_A(x_1, x''_1) 1_A(x_2, x''_2) |\det x''_1| |\det x''_2| p_{t,s}(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2) dx'_1 dx'_2 \\ &= 1_A(x_1, x''_1) 1_A(x_2, x''_2) |\det x''_1| |\det x''_2| p_{t,s}(x_1, x_2, 0, 0, x''_1, x''_2). \end{aligned}$$

De plus on peut montrer que cette intégrale dont on a obtenu la limite est majorée par une fonction intégrable $\forall \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$. Donc par application du théorème de convergence dominée on obtient que :

$$E[\nu(J)] \leq \int_{J_1} dt \int_{J_2} ds \int_u^\infty dx \int_u^\infty dy$$

$$E[\tilde{\det}(-X''(t)) \tilde{\det}(-X''(s)) / X(t) = x, X(s) = y, X'(t) = 0, X'(s) = 0] p_{t,s}(x, y, 0, 0).$$

Un argument de convergence monotone nous permet alors de passer de $J = J_1 \times J_2$ à $S^2 / D_2(S)$.

2.3.2 Développement asymptotique

Soit X un champ gaussien centré, de variance 1, à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^3$ et donc admettant une fonction de covariance de classe $\mathcal{C}^6$, défini sur S un sous-ensemble compact de R^N dont la frontière est de mesure de Lebesgue nulle. On notera $M_u^X(S)$ le nombre de maxima locaux de X au-dessus du niveau u dans S .

$$M_u^X(S) = \#\{t \in S : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) < 0\}.$$

Théorème 2.8 *Supposons que la loi jointe de $(X(t), X(s), X'(t), X'(s), X''(t), X''(s))$ est non-dégénérée $\forall t \neq s, (t, s) \in S \times S$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que :*

$$E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)] = o(e^{-\frac{u^2}{2}(1+\epsilon)}).$$

Preuve : On peut recouvrir S par un nombre fini de cubes ou de portions de cubes $S_i = K_i \cap S$ d'intérieurs disjoints et de diamètre suffisamment petit. Ainsi,

$$\begin{aligned} E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)] &= E[\sum_i M_u^X(S_i)(\sum_i M_u^X(S_i) - 1)] \\ &= E[\sum_i M_u^X(S_i)^2 + \sum_{i \neq j} M_u^X(S_i)M_u^X(S_j) - \sum_i M_u^X(S_i)] \\ &= \sum_i E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] + \sum_{i \neq j} E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)]. \end{aligned}$$

1. Considérons $E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)]$.

a. Supposons que S_i et S_j sont voisins.

$$\begin{aligned} E[(M_u^X(S_i) + M_u^X(S_j))(M_u^X(S_i) + M_u^X(S_j) - 1)] &= \\ E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] + E[M_u^X(S_j)(M_u^X(S_j) - 1)] + 2E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)]. \end{aligned}$$

Ainsi si S_i et S_j sont de diamètre suffisamment petit pour que la réunion de S_i et S_j (qui sont voisins) soit de diamètre suffisamment petit, on conclura que $\exists \epsilon > 0 / E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)] = o(e^{-\frac{u^2}{2}(1+\epsilon)})$ à partir du moment où on aura montré que $\exists \epsilon > 0 / E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] = o(e^{-\frac{u^2}{2}(1+\epsilon)})$ pour S_i de diamètre suffisamment petit.

b. Supposons que S_i et S_j sont disjoints.

Sous les conditions du théorème nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)] &\leq \int_{S_i} \int_{S_j} dt ds \int_u^\infty dx \int_u^\infty dy \\ E[\tilde{\det}(-X''(t))\tilde{\det}(-X''(s))/X(t) = x, X(s) = y, X'(t) = 0, X'(s) = 0] & p_{t,s}(x, y, 0, 0) \\ &\leq \int_{S_i} \int_{S_j} dt ds \int_u^\infty dx \int_u^\infty dy \\ E[|\det X''(t)||\det X''(s)|/X(t) = x, X(s) = y, X'(t) = 0, X'(s) = 0] & p_{t,s}(0, 0/x, y) p_{t,s}(x, y). \end{aligned}$$

Or sous l'hypothèse du théorème, les lois qui apparaissent dans cette expression sont uniformément non-dégénérées. On en conclut aisément que $\exists \epsilon > 0$ /

$$E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)] = o(e^{-\frac{\epsilon^2}{2}(1+\epsilon)}).$$

2. Considérons $E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)]$.

Sous les conditions du théorème, nous pouvons écrire :

$$E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] \leq \int_{S_i} \int_{S_i} dt ds \int_u^\infty dx$$

$$E[\tilde{\det}(-X''(t))\tilde{\det}(-X''(s))/X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0]p_{t,s}(x/0, 0)p_{t,s}(0, 0).$$

a. $p_{t,s}(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det \text{var}(X'(t), X'(s))}}$. Or $\det \text{var}(X'(t), X'(s)) = \det \text{var}(X'(t), X'(s) - X'(t))$. Par un développement de Taylor-Lagrange avec reste intégral on obtient :

$$\det \text{var}(X'(t), X'(s)) = \|s - t\|^{2N} \times$$

$$\det \text{var}(X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|} + \int_0^{\|t-s\|} \frac{(\|t-s\| - u)}{\|t-s\|} \sum_{j,k=1}^N \frac{(s-t)_j (s-t)_k}{\|s-t\| \|s-t\|} X_{ijk}(t + \frac{(s-t)}{\|s-t\|} u) du).$$

Et donc lorsque s et t tendent vers t_0 :

$$\det \text{var}(X'(t), X'(s)) = \|s - t\|^{2N} \det \text{var}(X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})(1 + o(1)).$$

Ainsi :

$$p_{t,s}(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det \text{var}(X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})}} \frac{(1 + o(1))}{\|s - t\|^N}.$$

De plus $\exists \eta > 0 / \det \text{var}(X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|}) \geq \eta$ uniformément en t et s .

b. De la même façon que précédemment, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t)/X'(t), X'(s)) &= \frac{\det \text{var}(X(t), X'(t), X'(s))}{\det \text{var}(X'(t), X'(s))} \\ &= \frac{\det \text{var}(X(t), X'(t), X'(s) - X'(t))}{\det \text{var}(X'(t), X'(s) - X'(t))}. \end{aligned}$$

Et donc lorsque s et t tendent vers t_0 :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t)/X'(t), X'(s)) &= \frac{\|s - t\|^{2N} \det \text{var}(X(t), X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})(1 + o(1))}{\|s - t\|^{2N} \det \text{var}(X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})(1 + o(1))} \\ &= \text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Donc :

$$p_{t,s}(x/0, 0) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})(1+o(1))}\right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|})(1+o(1))}}.$$

De plus $\exists \eta > 0 / \text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|}) \geq \eta$ uniformément en t et s

et $\exists \epsilon > 0 / \text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|}) \leq 1 - \epsilon$ uniformément en t et s .

c. Puisque pour A matrice $N \times N$ symétrique définie positive et $u = (u_1, \dots, u_N)$ base orthonormée de R^N nous avons :

$$\det(A) \leq (u_1^t A u_1) \det(A|_{u_1^\perp}),$$

en posant $e = \frac{(s-t)}{\|s-t\|}$, nous obtenons que :

$$E[\tilde{\det}(-X''(t))\tilde{\det}(-X''(s))/X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0] \leq$$

$$E[|X''_{e,e}(t)| |\det(X''(t)|_{e^\perp})| |\det X''(s)| / X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0].$$

Par un développement de Taylor-Lagrange avec reste intégral, sachant que $X'_e(s) = X'_e(t) = 0$, nous obtenons :

$$X''_{e,e}(t) = - \int_0^{\|t-s\|} \frac{(\|t-s\| - u)}{\|t-s\|} X_{e,e,e}(t + \frac{(s-t)}{\|s-t\|} u) du.$$

Et l'expression précédente se majore par :

$$\begin{aligned} & \|s-t\| E\left[\frac{1}{\|s-t\|} \left| \int_0^{\|s-t\|} \frac{(\|s-t\| - u)}{\|s-t\|} X_{e,e,e}(t + \frac{(s-t)}{\|s-t\|} u) du \right| \times \right. \\ & \left. |\det(X''(t)|_{e^\perp})| |\det X''(s)| / X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0 \right]. \end{aligned}$$

Par un autre développement de Taylor-Lagrange avec reste intégral, cette expression se réécrit :

$$\begin{aligned} & \|s-t\| E\left[\frac{1}{\|s-t\|} \left| \int_0^{\|s-t\|} \frac{(\|s-t\| - u)}{\|s-t\|} X_{e,e,e}(t + \frac{(s-t)}{\|s-t\|} u) du \right| \times \right. \\ & \left. |\det(X''(t)|_{e^\perp})| |\det X''(s)| / X(t) = x, X'(t) = 0, X''(t) \frac{(s-t)}{\|s-t\|} + \right. \\ & \left. \int_0^{\|t-s\|} \frac{(\|t-s\| - u)}{\|t-s\|} \sum_{j,k=1}^N \frac{(s-t)_j}{\|t-s\|} \frac{(s-t)_k}{\|t-s\|} X_{ijk}(t + \frac{(s-t)}{\|t-s\|} u) du \right| = 0]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E[\tilde{\det}(-X''(t))\tilde{\det}(-X''(s))/X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0] \leq (const) \|t-s\| P(x)$$

où $P(x)$ désigne un polynôme en x . L'intégrabilité de $\frac{1}{\|t-s\|^{N-1}}$ sur $S_i \times S_i$ permet alors de conclure.

Chapitre 3

Sur la distribution du maximum d'un champ gaussien

Asymptotic expansions for the distribution of the maximum of Gaussian random fields.

Jean-Marc Azaïs and Céline Delmas

Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C5583 Université Paul-Sabatier, 31062 Toulouse, France.

`azais@cict.fr`, `cdelmas@cict.fr`

Some asymptotic results are proved for the distribution of the maximum of a Gaussian random field centered with unit variance on a compact subset S of $\mathbb{R}^N$. They are obtained by a Rice method and the evaluation of some moments of the number of local maxima of the Gaussian field above an high level inside S and on the border ∂S . Depending on the geometry of the border we give up to $N + 1$ terms of the expansion with sometimes exponentially small remainder.

AMS classification (2000): 60G15 Gaussian processes, 60G70 Extreme value theory; extremal processes, 60E99 Distribution theory

Keywords: Asymptotic expansions, Gaussian fields, Maxima of random fields, Rice method.

Short title: On the distribution of the maximum of Gaussian fields.

3.1 Introduction

Let $X = \{X(t); t \in S \subset \mathbb{R}^N\}$ with S compact, be a Gaussian random field, centered with unit variance. Set $M(S) = \max\{X(t) : t \in S\}$ and $G(u) = P[M(S) \geq u]$. Many statistical problems can be reduced to the evaluation of $G(u)$ as $u \rightarrow +\infty$. It has, for example, direct applications to image processing (see Worsley and al. (1992) and Adler (2000) for more references). It also occurs in the calculation of the limit distribution of test statistics (see for examples Davies (1977), Sun (1991), Piterbarg and Tyurin (1993), Park and Sun (1998), Dacunha-Castelle and Gassiat (1997, 1999)).

When $N = 1$ there exists only a few cases of Gaussian processes for which the distribution $G(u)$ is known (see Azaïs and Wschebor (2000) for references and a formula based on the Rice series that converges for some processes). For the other cases, only approximate results are available.

In the present paper we are interested in random fields ($N > 1$). For this case no exact result is known. Since the initiating work of Brillinger (1972), Belyaev and Piterbarg (1972a, 1972b) and Adler (1981), the first term of the expansion of $G(u)$ as $u \rightarrow +\infty$ is known for smooth fields satisfying some conditions. A rather longer expansion is known only in some particular cases (Piterbarg (1996a), Sun (1993), Siegmund and Worsley (1995)). Lot of work has been devoted to the evaluation of the expectation of the differential topology (DT) characteristic and the Euler characteristic of the excursion set $A_u(X, S) = \{t \in S : X(t) \geq u\}$ (see Worsley (1994, 1995, 1997) for Gaussian and more general fields). A general conjecture is that the expectation of the Euler characteristic gives the behaviour of $G(u)$ but this is proved only in some particular cases. See the general Adler (2000) for a detailed review of this subject. In the present paper we give expansions for $G(u)$ with several terms depending on N and on the geometry of ∂S , in a rather general setting, in particular for non-homogeneous fields. Our method is the Rice method that will be described below. It has been introduced and studied especially by Kac (1943), Rice (1944-1945), Cramer and Leadbetter (1967), Wschebor (1985) and Azaïs and Wschebor (1997) for random processes and extended to random fields by Brillinger (1972), Adler (1981) and Piterbarg (1996b). Whereas Sun's results are obtained by some differential geometry arguments, those given by Piterbarg (1996b) and Adler (1981) are essentially based upon a Rice method. We propose in this paper to give further terms of the expansion of $G(u)$ through the evaluation of some moments of the number of local maxima of X above a level on some border of the set S . Our results demand sufficient differentiability of the field X and they depend on the geometry of the boundary of S .

The organization of the paper is as follows. In Section 2 we describe the Rice method and the gene-

ral framework of our results. In Section 3 we give our results. First we give, in Theorem 1, an asymptotic expansion for the expectation of the number of local maxima of a Gaussian random field above an high level. This result extends Hasofer's one (1976) and Theorem 6.3.1 of Adler (1981) to a much more accurate form. It was presented in Delmas (1998) without its proof. We give this proof in Section 4. This result has an intrinsic interest (See, for example, Adler (2000) for the link with the expectation of the DT characteristic of the excursion set $A_u(X, S)$ and other related results), but it is also the first step in the derivation of our other results. In Theorem 2 we give an asymptotic expansion for $G(u)$ when the Gaussian field X is "without boundary". In our point of view it extends the result by Sun (1993) though the hypothesis are not exactly comparable. Then we give some asymptotic results for $G(u)$ when S is with regular boundary (Theorem 3 and Theorem 4) and when S is a product of intervals (Theorem 5). Our Theorem 4 is in fact a refinement of our Theorem 3 to the particular case when $N = 2$ and S is the unit disc of $\mathbb{R}^2$. These results are based on some analogous arguments as those used by Adler (1981) and Piterbarg (1996b) for the evaluation of some Rice formulae. In Section 4 we give the proofs of our main results.

Notations:

- λ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^N$, λ_d the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^d$, $d < N$, and σ is the surfacic measure on some manifold embedded in $\mathbb{R}^N$.
- $\mathcal{M}$ is the set of $N \times N$ symmetric matrices, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{P}$) is the set of negative (resp. positive) definite matrices. For $A \in \mathcal{M}$, $\tilde{\det}(A)$ will denote $|\det(A)| \mathbb{I}_{\{A \in \mathcal{N}\}}$.
- φ is the standard Gaussian density and Φ its distribution function. $p_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$ denotes, when it exists, the density of the random variables $(X_1, \dots, X_n)$. In the same way $p_{X_1}(x_1/X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ is the density of X_1 conditionally to $X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$.
- The notation (const) means some constant that is not needed to be denoted by a precise symbol. Its value may vary from one occurrence to another.
- The relation $f(u) \leq (\text{const}) \times g(u) \exp(-\delta u^2)$ for $\delta > 0$ and u sufficiently large will be denoted: $f(u) = o_\epsilon(g(u))$.
- We will note Var for the covariance matrix and M^T for the transpose of the matrix M .
- $\mathcal{F}_p(N)$ is the set of the parts of $\{1, 2, \dots, N\}$ of size p and $\mathcal{F}(N)$ the set of all the parts of $\{1, 2, \dots, N\}$. Let I and $J \in \mathcal{F}_p(N)$ and M an $N \times N$ matrix, we denote $\Delta_{I,J}(M)$ for $\det(M_{I,J})$ and $|M|$ for $\det(M)$. $\bar{I} = \{1, \dots, N\} \setminus I$ and $\bar{J} = \{1, \dots, N\} \setminus J$. σ_I is the permutation of $(1, 2, \dots, N)$ such that

$\sigma_I|_{(1,2,\dots,p)}$ (resp. $\sigma_I|_{(p+1,\dots,N)}$) is an increasing one-to-one mapping from $(1,2,\dots,p)$ on I (resp. from $(p+1,\dots,N)$ on $\bar{I}$). We note $\epsilon(p)$ the signature of a permutation p of $(1,2,\dots,N)$. We use the convention $\epsilon^2(\sigma_\emptyset) = \epsilon^2(\sigma_{\{1,2,\dots,N\}}) = 1$ and $\Delta_{\emptyset,\emptyset}(M) = 1$.

- We will write $X_i(t)$ for $\frac{\partial X(t)}{\partial t_i}$ and $X_{ij}(t)$ for $\frac{\partial^2 X(t)}{\partial t_i \partial t_j}$.
- In the sequel, except when mentioned, S is a subset of $\mathbb{R}^N$ relatively compact with zero Lebesgue measure boundary. $\dot{S}$ denotes the interior of S and $\bar{S}$ its closure. When it exists, the number of local maxima of a Gaussian field X above the level u in S : $M_u^X(S)$ is defined by $M_u^X(S) = \#\{t \in S : X(t) \geq u, X'(t) = 0, X''(t) \in \mathcal{N}\}$.

3.2 The Rice method

The Rice pioneer works with his famous formula for the intensity of level upcrossings by a trajectory of a random process (Rice (1944-1945)) are at the origin of the so-called Rice method. To define the Rice method we could say that it consists in the derivation of some information on the distribution of the maximum of a random field on a set S thanks to some moments of random variables that are number of solutions of systems of random equations in a set A . Thus, for example, when $S = [0, L]$, accurate results for the evaluation of the function $G(u)$ can be obtained thanks to the factorial moments of the random variable $U_u^X([0, L])$ (that is the number of upcrossings of the level u on $[0, L]$ by the Gaussian random process X): $U_u^X([0, L]) = \#\{t \in [0, L] : X(t) = u, X'(t) > 0\}$ (see Azaïs and Wschebor (1997)). Generally speaking we note that the Rice method is quite more accurate than other methods for the evaluation of the function $G(u)$. Now we shall describe roughly the Rice method used in the next sections to derive our results.

Assume that X is a Gaussian field that satisfies the **H1 a** hypothesis:

H1 a. The paths of X are, with probability one, of class $\mathcal{C}^2$ on $\bar{S}$.

Suppose, to simplify, that we know that the maximum of X is not attained on the boundary of S then:

$$P[M(S) \geq u] = P[M_u^X(\dot{S}) \geq 1].$$

Now the following inequality is easy:

$$E[M_u^X(\dot{S})] - \frac{E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)]}{2} \leq P[M_u^X(\dot{S}) \geq 1] \leq E[M_u^X(\dot{S})]. \quad (3.1)$$

Thus we will work towards three directions. In a first step we evaluate $E[M_u^X(\dot{S})]$ by a so-called Rice formula (see Proposition 3.1). We next study the asymptotic behaviour of $E[M_u^X(\dot{S})]$ as $u \rightarrow +\infty$. This is the subject of Theorem 3.1. In a second step, we evaluate $E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)]$ also by a so-called Rice formula (see Proposition 3.2) and show that it is negligible (see Proposition 3.3). In a third step we eventually have to study the field on the boundary ∂S , see Theorems 3.3, 3.4, 3.5.

Proposition 3.1 *Assume that X is a Gaussian centered field on $\bar{S}$ that satisfies **H1 a** and the following **H1 b** and **c** hypothesis:*

H1 b. *The distribution of $(X(t), X'(t), X''(t))$ is non-degenerate $\forall t \in \bar{S}$.*

H1 c. *The moduli of continuity ω_{ij} of the X_{ij} on $\bar{S}$ satisfy:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad P[\max_{i,j} \omega_{ij}(h) > \epsilon] = o(h^N) \text{ when } h \downarrow 0.$$

Then:

$$E[M_u^X(\dot{S})] = \int_S \int_u^{+\infty} \int_{\mathcal{N}} |\det x''| p_{X(t), X'(t), X''(t)}(x, 0, x'') dx'' dx dt.$$

Remarks:

- The **H1 c** hypothesis is met, for example, as soon as the paths of X_{ij} are locally Hölder with probability one for all $i, j = 1, N$.
- Under the hypothesis of Proposition 3.1 we have $E[M_u^X(\dot{S})] = E[M_u^X(S)] = E[M_u^X(\bar{S})]$.

Proposition 3.2 *Assume that X is a Gaussian centered field on $\bar{S}$ that satisfies **H1 a** and **b** and the following **H2 a** hypothesis:*

H2 a. *$\forall t \neq s \in \bar{S}$, $(X(s), X(t), X'(s), X'(t), X''(s), X''(t))$ has a non-degenerate distribution.*

Then:

$$E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)] \leq \int \int_{S^2} ds dt \int \int_{(u, +\infty)^2} dx dy p_{X(s), X(t), X'(s), X'(t)}(x, y, 0, 0) \times$$

$$E[\tilde{\det}(X''(s)) \tilde{\det}(X''(t)) / X(s) = x, X(t) = y, X'(s) = 0, X'(t) = 0]. \quad (3.2)$$

Proposition 3.3 below gives the asymptotic behaviour of $E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)]$ as $u \rightarrow +\infty$.

Proposition 3.3 *Assume that X is a Gaussian centered field with unit variance on $\bar{S}$ that satisfies the following **H2 b** and **c** hypothesis:*

H2 b. X has almost surely $\mathcal{C}^3$ sample paths on $\bar{S}$.

H2 c. $\forall t \neq s \in \bar{S}^2$ $(X(s), X(t), X'(s), X'(t), X''(s), X''(t))$ has a non-degenerate distribution.

Then as $u \rightarrow +\infty$:

$$E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)] = o_\epsilon(\varphi(u)). \quad (3.3)$$

Proposition 3.3 implies that $E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)]$ is negligible as $u \rightarrow +\infty$. As a consequence the expansion of $E[M_u^X(\dot{S})]$ gives the expansion of $P[M(S) \geq u]$.

Proofs of the propositions above: They are based upon the following proposition that gives us a tool to count the number of local maxima of a Gaussian random field above a level u in $\dot{S}$.

Proposition 3.4 *Assume that X is a Gaussian centered field on $\bar{S}$ that satisfies **H1 a** and **b**. Denote by A the subset $\{t \in S : X(t) > u; X''(t) \in \mathcal{N}\}$ then with probability one:*

$$M_u^X(\dot{S}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S \delta_\epsilon(X'(t)) \mathbb{I}_A(X(t), X''(t)) |\det X''(t)| dt,$$

where $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\lambda(\Sigma_\epsilon)} \mathbb{I}_{\Sigma_\epsilon}(x)$ with Σ_ϵ the sphere with radius ϵ .

Remark: Under the hypothesis of Proposition 3.4 we have with probability one that $M_u^X(\dot{S}) = M_u^X(S) = M_u^X(\bar{S})$.

Proposition 3.4 is an easy consequence of Theorem 5.1.1 of Adler (1981), Proposition 3.1 is a slight refinement of Theorem 6.1.1 of Adler (1981) and Proposition 3.2 is a consequence of Fatou's Lemma and Proposition 3.4.

Proposition 3.3 is an immediate consequence of a Piterbarg's result (Piterbarg (1996b)). Since it is a key point in the proofs of the next sections we give here the sketch of its proof:

$\bar{S}$ can be covered by a finite number of cubes or parts of cubes $S_i = K_i \cap S$ with disjoint interiors and with sufficiently small diameter. Thus:

$$\begin{aligned} E[M_u^X(\bar{S})(M_u^X(\bar{S}) - 1)] &= E\left[\sum_i M_u^X(S_i) \left(\sum_i M_u^X(S_i) - 1\right)\right] \\ &= \sum_i E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] + \sum_{i \neq j} E[M_u^X(S_i) M_u^X(S_j)]. \end{aligned}$$

Assume that S_i and S_j are at positive distance then by a proof analogous to that of Proposition 3.2:

$$\begin{aligned} E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)] &\leq \int \int_{S_i \times S_j} ds dt \int \int_{[u, +\infty)^2} p_{X'(s), X'(t)}(0, 0/X(s) = x, X(t) = y) p_{X(s), X(t)}(x, y) \\ &\quad E[\tilde{\det}(X''(s))\tilde{\det}(X''(t))/X(s) = x, X(t) = y, X'(s) = 0, X'(t) = 0] dx dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

By the non-degeneracy condition **H2 c** we easily check that $p_{X'(s), X'(t)}(0, 0/X(s) = x, X(t) = y)$ is bounded and that there exists two integers N_1 and N_2 such that:

$$E[\tilde{\det}(X''(s))\tilde{\det}(X''(t))/X(s) = x, X(t) = y, X'(s) = 0, X'(t) = 0] \leq (\text{const})[1 + x^{N_1} + y^{N_2}].$$

Since S_i and S_j are at positive distance, there exists $\epsilon > 0$ such that $|E[X(s)X(t)]| \leq 1 - \epsilon$ uniformly in s and t . Thus direct arguments lead to:

$$E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)] = o_e(\varphi(u)) \text{ as } u \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Assume that S_i and S_j are neighboring then since:

$$\begin{aligned} E[(M_u^X(S_i) + M_u^X(S_j))(M_u^X(S_i) + M_u^X(S_j) - 1)] = \\ E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] + E[M_u^X(S_j)(M_u^X(S_j) - 1)] + 2E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)], \end{aligned}$$

we will conclude that $E[M_u^X(S_i)M_u^X(S_j)] = o_e(\varphi(u))$ when $u \rightarrow +\infty$ as soon as we show that

$$E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] = o_e(\varphi(u)) \text{ when } u \rightarrow +\infty,$$

for S_i with sufficiently small diameter. To prove that we first remark, by Proposition 3.2, that:

$$\begin{aligned} E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] &\leq \int \int_{S_i^2} ds dt \int_u^{+\infty} E[\tilde{\det}(X''(t))\tilde{\det}(X''(s))/X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0] \times \\ &\quad p_{X(t)}(x/X'(t) = 0, X'(s) = 0) p_{X'(t), X'(s)}(0, 0) dx. \end{aligned}$$

Then, noting $e = \frac{s-t}{\|s-t\|}$, we can prove that, for S_i with sufficiently small diameter:

- $p_{X'(t), X'(s)}(0, 0) = (2\pi)^{-N} \|s - t\|^{-N} (\det \text{var}(X'(t), X''(t)e))^{-1/2} (1 + o(1))$
with $\det \text{var}(X'(t), X''(t)e) \geq \eta > 0$ uniformly in s and t .
- $p_{X(t)}(x/X'(t) = 0, X'(s) = 0) = \frac{\exp(-x^2/(2\text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t)e)(1 + o(1))))}{\sqrt{2\pi}(\text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t)e))^{1/2}(1 + o(1))}$

with $0 < \eta \leq \text{Var}(X(t)/X'(t), X''(t)e) \leq 1 - \epsilon < 1$ uniformly in s and t .

- There exists an integer N_1 such that:

$$E[\tilde{\det}(X''(t))\tilde{\det}(X''(s))/X(t) = x, X'(t) = 0, X'(s) = 0] \leq \|s - t\|K[1 + x^{N_1}].$$

The conclusion that $E[M_u^X(S_i)(M_u^X(S_i) - 1)] = o_e(\varphi(u))$ as $u \rightarrow +\infty$ follows from the integrability of $\|s - t\|^{-N+1}$ on $S_i \times S_i$.

3.3 Main results

This section presents the main results of the paper. The first theorem gives an asymptotic expansion for the expectation of $M_u^X(\dot{S})$. It generalizes Hasofer's result (1976) and Theorem 6.3.1 of Adler (1981) to a more general and accurate form.

Théorème 3.1 *If X is a Gaussian centered field with unit variance on $\bar{S}$ that satisfies **H1 a, b** and **c** then,*

$$E[M_u^X(\dot{S})] = \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \psi_{2j}(u) + o_e(\varphi(u)) \text{ as } u \rightarrow +\infty, \quad (3.6)$$

with:

$$\psi_{2j}(u) = \frac{1}{2^{1+j} \pi^{(N+1)/2}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{+\infty} x^{(N-1-2j)/2} e^{-x} dx.$$

a. When $X'(t)$ and $X''(t)$ are independent $\forall t \in \bar{S}$, we define $\Lambda = \text{Var}X'(t)$ that does not depend on t and we have:

$$k_{2j} = \lambda(S)(-1)^j |\Lambda|^{1/2} C_N^{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!}.$$

b. In the general case:

$$k_{2j} = \sum_{I, K \in \mathcal{F}_{2j}(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_K) \int_S |\Lambda(t)|^{-1/2} \Delta_{I, K}(\Lambda(t)) \gamma_{I, K}(t) dt,$$

where:

$$\Lambda(t) = \text{Var}(X'(t)),$$

$$\gamma_{I, K}(t) = \sum_{p \in \mathcal{S}_{2j}} \epsilon(p) \sum_{\sigma \in Q_j} \prod_{q=1}^j \mathcal{V}_{\sigma(2q-1), p \circ \sigma(2q-1), \sigma(2q), p \circ \sigma(2q)},$$

where:

Q_j is a subset of the symmetric group of permutations $\mathcal{S}_{2j}$ that allows to partition $2j$ elements

into j different pairs: $(\sigma(2k+1), \sigma(2k+2)); k = 0, j-1. (\#Q_j = \frac{(2j)!}{j! 2^j})$.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\alpha,\beta,\eta,\xi} &= E[X_{i_\alpha k_\beta}(t)X_{i_\eta k_\xi}(t)/X(t), X'(t)] \\ I &= (i_1, \dots, i_{2j}) \quad ; \quad K = (k_1, \dots, k_{2j})\end{aligned}$$

We take the convention that $\gamma_{\emptyset\emptyset}(t) = 1$.

Remark : For the link between Theorem 3.1 and the expectation of the DT characteristic of the excursion set $A_u(X, S) = \{t \in S : X(t) \geq u\}$ and other related results, see Adler (2000).

Theorem 3.1 is also the first step in the derivation of the next theorems.

Fields “without boundary”

Suppose that we know that the maximum cannot be attained on the boundary of S . In that case Theorem 3.1 gives the asymptotic behaviour of $G(u)$. This is the case, for example, if the field can be viewed, after reparametrization, as a field on a manifold without boundary. This is the object of Theorem 3.2.

Théorème 3.2 *Assume that:*

- $\{Y(t); t \in \mathcal{U}\}$ is a Gaussian field defined on $\mathcal{U}$ a compact smooth manifold of dimension N without boundary.
- Y is centered with unit variance and differentiable sample paths.
- There exists a unique (for simplicity) mapping $\Psi: \mathcal{U} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^N$, S is supposed relatively compact with zero Lebesgue's measure boundary.
- The field $X := Y \circ \Psi^{-1}$ can be extended by continuity to $\bar{S}$ and satisfies **H1 b** and **H2 b** and the following **H2 a'** hypothesis:

$(X(\Psi(u)), X(\Psi(u')), X'(\Psi(u)), X'(\Psi(u')), X''(\Psi(u)), X''(\Psi(u')))$ is non-degenerate $\forall u \neq u' \in \mathcal{U}^2$.

Then,

$$\begin{aligned}P[M(S) \geq u] &= E[M_u^X(\dot{S})] + o_\epsilon(\varphi(u)) \\ &= \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \psi_{2j}(u) + o_\epsilon(\varphi(u)) \text{ as } u \rightarrow +\infty,\end{aligned}$$

where k_{2j} and $\psi_{2j}(u)$ are the same as those given in Theorem 3.1.

Remarks :

- S cannot be supposed to be compact because even in the simplest case where $\mathcal{U}$ is the circle, there exists no compact parametrization.

- Examples of such processes are processes defined on spheres (Sun (1991)).
- The mapping $\Psi^{-1} : S \rightarrow \mathcal{U}$ can be defined by the Karhunen-Loève expansion $X(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_l^{-1}(t) \xi_l$ (see Adler (1990) and Sun (1993)).

Théorème 3.3 *Assume that S is convex and compact with a smooth boundary ∂S . Assume that X is a Gaussian centered field with unit variance on S that satisfies **H2 b** and **c** and such that $X'(t)$ and $X''(t)$ are independent for all t in S . Then, denoting $\tilde{X}$ the restriction of X to ∂S , as $u \rightarrow +\infty$:*

$$\begin{aligned} P[M(S) \geq u] &= E[M_u^X(S)] + \frac{1}{2}E[M_u^{\tilde{X}}(\partial S)] + o(u^{N-2}e^{-\frac{u^2}{2}}) \\ &= u^{N-1}e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{\lambda(S)|\Lambda|^{1/2}}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}} + u^{N-2}e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\partial S} |\Pi_t(\Lambda)|^{1/2} d\sigma(t) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

where $\Lambda = \text{Var}[X'(t)]$ and $\Pi_t(\Lambda)$ is the projection of Λ on the space tangent to ∂S at point $t \in \partial S$.

Theorem 3.4 below is a refinement of Theorem 3.3 to the particular case where $N = 2$ and S is the unit sphere.

Théorème 3.4 *Under the assumptions and the notations of Theorem 3.3, when $N = 2$ and S is the unit sphere, we have as $u \rightarrow +\infty$:*

$$P[M(S) \geq u] = ue^{-\frac{u^2}{2}} \frac{|\Lambda|^{1/2}}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{v^T(\theta)\Lambda v(\theta)} d\theta + \frac{\bar{\Phi}(u)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\Lambda|^{1/2}}{v^T(\theta)\Lambda v(\theta)} d\theta + o_e(\varphi(u))$$

where $\Lambda = \text{Var}[X'(t)]$ and $v^T(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Théorème 3.5 *Assume that S is a product of finite closed intervals $S = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$. Assume that X is a Gaussian centered field with unit variance on S that satisfies **H2 b** and **c** and such that $X'(t)$ and $X''(t)$ are independent for all t in S . Let $I \subset \{1, \dots, N\}$ then, denoting $\tilde{X}_I$ the restriction of X to $\prod_{i \in I} [a_i, b_i] \times \prod_{i \in \bar{I}} \{a_i\}$ (the choice of $\{a_i\}$ instead of $\{b_i\}$ is arbitrary), as $u \rightarrow +\infty$:*

$$\begin{aligned} P[M(S) \geq u] &= \sum_{n=1}^N \sum_{I \in \mathcal{F}_n(N)} E[M_u^{\tilde{X}_I}(\prod_{i \in I} [a_i, b_i] \times \prod_{i \in \bar{I}} \{a_i\})] + \bar{\Phi}(u) + o_e(\varphi(u)) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{[n/2]} \psi_{2j}^n(u) \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n(N)} k_{2j}^I \right) + \bar{\Phi}(u) + o_e(\varphi(u)), \end{aligned}$$

where:

$$\psi_{2j}^n(u) = \frac{1}{2^{1+j} \pi^{(n+1)/2}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{+\infty} x^{(n-1-2j)/2} e^{-x} dx,$$

$$k_{2j}^I = \left(\prod_{i \in I} |b_i - a_i| \right) (-1)^j \Delta_{I,I}^{1/2}(\Lambda) C_n^{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!},$$

with $\Lambda = \text{Var}[X'(t)]$.

As a consequence of Theorem 3.5, when S is the rectangle $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ we obtain that:

$$P[M(S) \geq u] = u e^{-\frac{u^2}{2} \frac{|b_1 - a_1| |b_2 - a_2| |\Lambda|^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}}} + e^{-\frac{u^2}{2} \left[\frac{|b_1 - a_1| \sqrt{\Lambda_{11}} + |b_2 - a_2| \sqrt{\Lambda_{22}}}{2\pi} \right]} + \bar{\Phi}(u) + o_e(\varphi(u)).$$

3.4 Proofs

3.4.1 Proof of Theorem 3.1

Lemme 3.1 *Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ a set of real centered random variables with a joint Gaussian distribution. Then for m integer:*

$$\begin{aligned} E[Y_1 Y_2 \dots Y_{2m+1}] &= 0 \\ E[Y_1 Y_2 \dots Y_{2m}] &= \sum_{\sigma \in Q_m} E[Y_{\sigma(1)} Y_{\sigma(2)}] \times \dots \times E[Y_{\sigma(2m-1)} Y_{\sigma(2m)}] \end{aligned}$$

where Q_m has been defined in the statement of Theorem 3.1.

The proof of this lemma can be found for example in Adler (1981) p. 108.

Définition 3.1 *Let us set Λ an $N \times N$ matrix. A random $N \times N$ matrix Γ is said to belong to the class $M(\Lambda)$ if:*

- Γ is a Gaussian matrix,
- $E[\Gamma] = 0$,
- $\exists (S_{ijkl})_{i,j,k,l}$ symmetric in i, j, k, l (that is to say $S_{ijkl} = S_{p(i)p(j)p(k)p(l)} \forall p$ permutation of i, j, k, l) such that:

$$E[\Gamma_{ij} \Gamma_{kl}] = S_{ijkl} - \lambda_{ij} \lambda_{kl},$$

where $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$.

Lemme 3.2 *For $\Gamma \in M(\Lambda)$ and m an integer:*

- 1) $B^T \Gamma B \in M(B^T \Lambda B)$, $\forall B$ a fixed $N \times N$ matrix.

2) $E[\Delta_{I,J}(\Gamma)] = 0$ when $\#I = \#J = 2m + 1$.

3) $E[\Delta_{I,J}(\Gamma)] = \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 2^m} \Delta_{I,J}(\Lambda)$ when $\#I = \#J = 2m$.

Proof: 1) Since Γ is a Gaussian matrix in $M(\Lambda)$, $B^T \Gamma B$ is Gaussian with $E[B^T \Gamma B] = 0$ and

$$\begin{aligned} E[(B^T \Gamma B)_{ij} (B^T \Gamma B)_{kl}] &= \sum_{m,n,s,p} (b_{mi} b_{sk} S_{mns p} b_{nj} b_{pl} - b_{mi} b_{sk} \lambda_{mn} \lambda_{sp} b_{nj} b_{pl}) \\ &= g_{ijkl} - (B^T \Lambda B)_{ij} (B^T \Lambda B)_{kl}, \end{aligned}$$

where g_{ijkl} is symmetric in i, j, k, l . Thus $B^T \Gamma B \in M(B^T \Lambda B)$.

2) The result 2) is an immediate consequence of the previous lemma.

3) Set $M_{k,l} = \Gamma_{i_k j_l}$ with $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{2m}\}$ and $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{2m}\}$. Then:

$$\Delta_{IJ}(\Gamma) = \sum_{p \in \mathcal{S}_{2m}} \epsilon(p) M_{1,p(1)} \times \dots \times M_{2m,p(2m)}.$$

Using the previous lemma:

$$E[Y_1 Y_2 \dots Y_{2m}] = \sum_{\sigma \in Q_m} E[Y_{\sigma(1)} Y_{\sigma(2)}] \times \dots \times E[Y_{\sigma(2m-1)} Y_{\sigma(2m)}],$$

we obtain:

$$E[\Delta_{IJ}(\Gamma)] = \sum_{p \in \mathcal{S}_{2m}} \epsilon(p) \sum_{\sigma \in Q_m} E[M_{\sigma(1), p \circ \sigma(1)} M_{\sigma(2), p \circ \sigma(2)}] \times \dots \times E[M_{\sigma(2m-1), p \circ \sigma(2m-1)} M_{\sigma(2m), p \circ \sigma(2m)}].$$

But we have:

$$E[M_{\alpha, \beta} M_{\eta, \xi}] = S_{i_\alpha j_\beta i_\eta j_\xi} - \lambda_{i_\alpha j_\beta} \lambda_{i_\eta j_\xi} \stackrel{\text{def}}{=} N_{\alpha, \beta, \eta, \xi} - L_{\alpha, \beta} L_{\eta, \xi}.$$

Thus:

$$\begin{aligned} E[\Delta_{IJ}(\Gamma)] &= \sum_{p \in \mathcal{S}_{2m}} \sum_{\sigma \in Q_m} \epsilon(p) (N_{\sigma(1), p \circ \sigma(1), \sigma(2), p \circ \sigma(2)} - L_{\sigma(1), p \circ \sigma(1)} L_{\sigma(2), p \circ \sigma(2)}) \times \dots \times \\ &\quad (N_{\sigma(2m-1), p \circ \sigma(2m-1), \sigma(2m), p \circ \sigma(2m)} - L_{\sigma(2m-1), p \circ \sigma(2m-1)} L_{\sigma(2m), p \circ \sigma(2m)}). \end{aligned}$$

Reverse the sums and consider a term of the product enclosing, for example:

$$N_{\sigma(2q+1), p \circ \sigma(2q+1), \sigma(2q+2), p \circ \sigma(2q+2)}.$$

We write the sum for $p \in \mathcal{S}_{2m}$ as the sum for $q \in \mathcal{A}_{2m}$ and $p = q, q \circ (\sigma(2q+1), \sigma(2q+2))$ to see that it vanishes. Thus only terms in L remains:

$$\begin{aligned} E[\Delta_{IJ}(\Gamma)] &= \sum_{\sigma \in Q_m} \sum_{p \in \mathcal{S}_{2m}} \epsilon(p) (-1)^m L_{\sigma(1), p \circ \sigma(1)} L_{\sigma(2), p \circ \sigma(2)} \times \dots \times L_{\sigma(2m), p \circ \sigma(2m)} \\ &= \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 2^m} \Delta_{IJ}(\Lambda), \end{aligned}$$

because the product above doesn't depend on σ .

The following lemma is trivial.

Lemme 3.3 *Let $\Lambda \in \mathcal{P}$, $\Gamma \in \mathcal{M}$ and $\|\cdot\|$ any norm on $\mathcal{M}$. Then there exists a constant c (depending only on N and Λ) such that for $x > 0$:*

$$\|\Gamma\| < \frac{x}{c} \Rightarrow (\Gamma - x\Lambda) \in \mathcal{N}.$$

Lemme 3.4 *Let E and L be two $N \times N$ matrices, then:*

$$\det(E + L) = \sum_{p=0}^N \sum_{I, J \in \mathcal{F}_p(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_J) \Delta_{I, J}(L) \Delta_{\bar{I}, \bar{J}}(E).$$

Proof: By definition we have:

$$\det(E + L) = \sum_{p \in \mathcal{S}_N} \epsilon(p) \prod_{j=1}^N (e_{jp(j)} + l_{jp(j)}).$$

Thus:

$$\begin{aligned} \det(E + L) = \det(E) &+ \sum_{j=1}^N \det(e_1, \dots, e_{j-1}, l_j, e_{j+1}, \dots, e_N) \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \det(e_1, \dots, e_{j_1-1}, l_{j_1}, e_{j_1+1}, \dots, e_{j_2-1}, l_{j_2}, e_{j_2+1}, \dots, e_N) \\ &+ \dots \\ &+ \det(L). \end{aligned}$$

And since for an $N \times N$ matrix D :

$$\det(D) = \sum_{I \in \mathcal{F}_p(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_J) \Delta_{I, J}(D) \Delta_{\bar{I}, \bar{J}}(D)$$

for any $J \in \mathcal{F}_p(N)$ fixed, we obtain:

$$\begin{aligned} \det(E + L) = \det(E) &+ \sum_{I, J \in \mathcal{F}_1(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_J) \Delta_{I, J}(L) \Delta_{\bar{I}, \bar{J}}(E) \\ &+ \sum_{I, J \in \mathcal{F}_2(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_J) \Delta_{I, J}(L) \Delta_{\bar{I}, \bar{J}}(E) \\ &+ \dots \\ &+ \det(L) \end{aligned}$$

Taking the convention that $\epsilon^2(\sigma_{\{1, \dots, N\}}) = \epsilon^2(\sigma_{\emptyset}) = 1$ and that $\Delta_{\emptyset, \emptyset}(D) = 1$ for any $N \times N$ matrix D , we obtain the lemma.

Now we can prove Theorem 3.1 a). Since the Gaussian field X is with unit variance on $\bar{S}$ and since $X'(t)$ and $X''(t)$ are independent $\forall t \in \bar{S}$, the expression of $E[M_u^X(\dot{S})]$ given in Proposition 3.1 becomes:

$$E[M_u^X(\dot{S})] = \int_S dt \int_u^\infty \varphi(x) p_{X'(t)}(0) \int_{\mathcal{N}} |\det x''| p_{X''(t)}(x''/X(t) = x) dx'' dx.$$

Let us set $\Lambda = \text{Var} X'(t)$ and $r_{ij,kl}(t, t) = E[X_{ij}(t) X_{kl}(t)]$. Since $X'(t)$ and $X''(t)$ are independent $\forall t \in \bar{S}$, $(r_{ij,kl}(t, t))_{i,j,k,l=1,N}$ are symmetric in i, j, k, l in the sense defined in Definition 3.1. $X''(t)/X(t) = x$ is Gaussian with mean $-x\Lambda$. Let us set $\Gamma = X''(t) + x\Lambda$. Conditionally to $X(t) = x$, Γ is Gaussian centered with variance $\text{Var}(X''(t)/X(t))$ and $E[\Gamma_{ij}\Gamma_{kl}/X(t) = x] = r_{ij,kl}(t, t) - \lambda_{ij}\lambda_{kl}$. Thus:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} |\det x''| p_{X''(t)}(x''/X(t) = x) dx'' &= \int_{\mathcal{N}} (-1)^N \det(x'') p_{X''(t)}(x''/X(t) = x) dx'' \\ &= \int_{\mathcal{D}_x} (-1)^N \det(\gamma - x\Lambda) p_{\Gamma}(\gamma/X(t) = x) d\gamma, \end{aligned}$$

where $\mathcal{D}_x$ is the subset of $\mathcal{M}$ where $\gamma - x\Lambda$ is negative definite. Let us set $\mathcal{S}(\frac{x}{c})$ the sphere of $\mathcal{M}$ with radius $\frac{x}{c}$. By Lemma 3.3 we know that for sufficiently large c , $\mathcal{S}(\frac{x}{c}) \subset \mathcal{D}_x$. Thus writing $\mathcal{A}(\gamma) = (-1)^N \det(\gamma - x\Lambda) p_{\Gamma}(\gamma/X(t) = x)$ we have:

$$\left| \int_{\mathcal{M}} \mathcal{A}(\gamma) d\gamma - \int_{\mathcal{D}_x} \mathcal{A}(\gamma) d\gamma \right| \leq \int_{\mathcal{S}^c(\frac{x}{c})} |\mathcal{A}(\gamma)| d\gamma. \quad (3.7)$$

Now for $M \in \mathcal{M}$ $|\det(M)| \leq N! \|M\|_\infty^N \leq (\text{const}) \|M\|^N$. Thus:

$$|\det(\gamma - x\Lambda)| \leq (\text{const}) \|\gamma - x\Lambda\|_2^N \leq (\text{const}) (\|\gamma\|_2 + x\|\Lambda\|_2)^N.$$

By compacity for $t \in \bar{S}$, $\det \text{Var}(X''(t)/X(t))$ is uniformly minorized by say $\detmin > 0$ and the greater eigenvalue of $\text{Var}(X''(t)/X(t))$ is uniformly majorized by say $\lambda max > 0$. Therefore:

$$p_{\Gamma}(\gamma/X(t) = x) \leq (\text{const}) (\detmin)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\|\gamma\|_2^2}{2\lambda max}\right).$$

Integrating by sphere, we get that the right hand member of (3.7) is majorized by:

$$(\text{const}) \int_{\frac{x}{c}}^\infty v^{N-1} (v + x\|\Lambda\|_2)^N (\detmin)^{-1/2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\lambda max}\right) dv.$$

Thus we easily check that:

$$\int_S dt \int_u^\infty \varphi(x) p_{X'(t)}(0) \int_{\mathcal{S}^c(\frac{x}{c})} |\mathcal{A}(\gamma)| d\gamma dx = o_e(\varphi(u)).$$

And by (3.7):

$$\int_{\mathcal{D}_x} \mathcal{A}(\gamma) d\gamma = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{A}(\gamma) d\gamma + o_e(\varphi(u)) = (-1)^N E[\det(\Gamma - x\Lambda)/X(t) = x] + o_e(\varphi(u)).$$

We conclude the proof of Theorem 3.1 a) by evaluating $E[\det(\Gamma - x\Lambda)/X(t) = x]$. Let B be an orthogonal matrix that diagonalizes Λ : $B^T \Lambda B = \Delta$.

$$\det(\Gamma - x\Lambda) = \det(B^T \Gamma B - x\Delta).$$

By Lemma 3.4 this expression becomes:

$$\begin{aligned} \det(\Gamma - x\Lambda) &= \sum_{j=0}^N \sum_{I \in \mathcal{F}_j(N)} \Delta_{II} (B^T \Gamma B) \Delta_{II} (-x\Delta) \\ &= \sum_{j=0}^N (-x)^{N-j} \sum_{I \in \mathcal{F}_j(N)} \Delta_{II} (B^T \Gamma B) \Delta_{II} (\Delta). \end{aligned}$$

By Lemma 3.2 we conclude that:

$$\begin{aligned} E[\det(\Gamma - x\Lambda)/X(t) = x] &= \sum_{j=0}^N (-1)^{N+j} x^{N-j} \sum_{I \in \mathcal{F}_j(N)} E[\Delta_{II} (B^T \Gamma B)/X(t) = x] \Delta_{II} (\Delta) \\ &= \sum_{j=0}^{[N/2]} (-1)^N x^{N-2j} \sum_{I \in \mathcal{F}_{2j}(N)} E[\Delta_{II} (B^T \Gamma B)/X(t) = x] \Delta_{II} (\Delta) \\ &= \sum_{j=0}^{[N/2]} (-1)^N x^{N-2j} (C_N^{2j} \frac{(-1)^j (2j)!}{j! 2^j} |\Lambda|). \end{aligned}$$

Direct calculations lead to Theorem 3.1 a).

Now we are going to prove Theorem 3.1 b). Since the Gaussian field X is with unit variance on $\bar{S}$, the expression of $E[M_u^X(\dot{S})]$ given by Proposition 3.1 becomes:

$$E[M_u^X(\dot{S})] = \int_S dt \int_u^\infty \varphi(x) p'_X(t)(0) \int_N |\det x''| p_{X''(t)}(x''/X(t) = x, X'(t) = 0) dx'' dx.$$

Let us set:

$$\Lambda(t) = \text{Var} X'(t) \quad r_{ij,kl}(t, t) = E[X_{ij}(t) X_{kl}(t)] \quad (3.8)$$

$$r_{ij,m}(t, t) = E[X_{ij}(t) X_m(t)] \quad r_{n,kl}(t, t) = E[X_n(t) X_{kl}(t)] \quad (3.9)$$

$X''(t)/X(t) = x, X'(t) = 0$ is Gaussian with mean $-x\Lambda(t)$. Let us set $\Gamma = X''(t) + x\Lambda(t)$. Conditionally to $X(t) = x$ and $X'(t) = 0$, Γ is Gaussian centered with variance $\text{Var}(X''(t)/X(t), X'(t))$ and:

$$E[\Gamma_{ij} \Gamma_{kl}/X(t) = x, X'(t) = 0] = r_{ij,kl}(t, t) - \sum_{m,n} r_{ij,m}(t, t) \Lambda_{m,n}^{-1}(t) r_{n,kl}(t, t) - \lambda_{ij}(t) \lambda_{kl}(t). \quad (3.10)$$

By the same arguments as those previously used and adding compacity arguments on $\bar{S}$ we obtain that:

$$E[M_u^X(\dot{S})] = \int_S dt \int_u^\infty \varphi(x) p'_X(t)(0) (-1)^N E[\det(\Gamma - x\Lambda(t))/X(t) = x, X'(t) = 0] dx + o_e(\varphi(u)).$$

Let us evaluate $E[\det(\Gamma - x\Lambda(t))/X(t) = x, X'(t) = 0]$. By Lemma 3.4 this expectation equals

$$\sum_{j=0}^N \sum_{I, K \in \mathcal{F}_j(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_K) (-1)^{N+j} x^{N-j} E[\Delta_{IK}(\Gamma)/X(t) = x, X'(t) = 0] \Delta_{\bar{I}\bar{K}}(\Lambda(t)).$$

Unfortunately $E[\Gamma_{ij}\Gamma_{kl}/X(t) = x, X'(t) = 0]$ is not of the form $S_{ijkl} - \lambda_{ij}\lambda_{kl}$ with $(S_{ijkl})_{i,j,k,l}$ symmetric in i, j, k, l . Lemma 3.2 can't enable us to reduce $E[\Delta_{IK}(\Gamma)/X(t) = x, X'(t) = 0]$ as previously. Anyway using the proof of Lemma 3.2: $E[\Delta_{IK}(\Gamma)/X(t) = x, X'(t) = 0] =$

$$\begin{aligned} & 0 && \text{when } j = 2m + 1, \\ & \sum_{p \in \mathcal{S}_{2m}} \epsilon(p) \sum_{\sigma \in Q_m} \prod_{q=1}^m \mathcal{V}_{\sigma(2q-1), p \circ \sigma(2q-1), \sigma(2q), p \circ \sigma(2q)} && \text{when } j = 2m, \end{aligned}$$

where Q_m is the same as in Lemma 3.1 and with (3.8), (3.9) and (3.10):

$$\mathcal{V}_{\alpha, \beta, \eta, \xi} = E[\Gamma_{i_\alpha k_\beta} \Gamma_{i_\eta k_\xi} / X(t) = x, X'(t) = 0] = E[X_{i_\alpha k_\beta} X_{i_\eta k_\xi} / X(t), X'(t)].$$

Then direct calculations lead to Theorem 3.1 b).

3.4.2 Proof of Theorem 3.2

Before proceeding to the proof of Theorem 3.2 we shall recall the following proposition whose proof can be found in Adler (1981).

Proposition 3.5 *Let X a Gaussian centered field on $\bar{S}$ satisfy **H1 a** and **b** and let S be relatively compact with zero measure boundary. Then, with probability one, there exists no point belonging to ∂S such that $X'(t) = 0$.*

To prove Theorem 3.2 consider a realization such that the maximum of Y on $\mathcal{U}$ is greater than u . Since Ψ is one-to-one the maximum of Y on $\mathcal{U}$ is equal to the maximum of X on $\bar{S}$ and is attained at a point that we denote $\tilde{t}_0 \in \mathcal{U}$. Consider $t_0 = \Psi(\tilde{t}_0)$. Assume that $t_0 \in \partial S$ then since $Y'(\tilde{t}_0) = 0$ we would have $X'(t_0) = 0$ which has been excluded by Proposition 3.5. Thus $t_0 \in \dot{S}$ and t_0 is the global maximum. We have proved that:

$$P[M(S) > u] \leq P[M_u^X(\dot{S}) > 0].$$

The reverse is trivial. Therefore $P[M(S) > u] = P[M_u^X(\dot{S}) > 0]$. Then Theorem 3.2 will be a direct consequence of relation (3.1) as soon as we prove that:

$$E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)] = o_e(\varphi(u)) \text{ as } u \rightarrow +\infty. \quad (3.11)$$

The proof of this last point is identical to that of Proposition 3.3 except that the compacity argument to prove (3.5) must be conducted on the manifold $\mathcal{U}$ using hypothesis **H2 a'**.

3.4.3 Proof of Theorem 3.3

Let $\tilde{X}$ be the restriction of X to ∂S . Let $n(t)$ be the unit normal vector to ∂S at point $t \in \partial S$ pointing outward S . Define:

$$R_u^{\tilde{X}}(\partial S) = \#\{t \in \partial S : X(t) > u, n(t) \cdot X'(t) \geq 0, t \text{ is a local maximum for } \tilde{X}\},$$

then we have:

$$\begin{aligned} P[M(S) > u] &= P[(M_u^X(\dot{S}) \geq 1) \cup (R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1)] \\ &= P[M_u^X(\dot{S}) \geq 1] + P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1] - P[M_u^X(\dot{S}) R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1]. \end{aligned}$$

We are going to evaluate each of these terms separately:

Evaluation of $P[M_u^X(\dot{S}) \geq 1]$

Assumptions on X imply that it satisfies the conditions of Proposition 3.3. Thus:

$$E[M_u^X(\dot{S})(M_u^X(\dot{S}) - 1)] = o_\epsilon(\varphi(u)) \text{ as } u \rightarrow +\infty.$$

Then using the inequality (3.1) and Theorem 3.1 we get that:

$$\begin{aligned} P[M_u^X(\dot{S}) \geq 1] &= \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \psi_{2j}(u) + o_\epsilon(\varphi(u)) \\ &= u^{N-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{\lambda(S) |\Lambda|^{1/2}}{(2\pi)^{(N+1)/2}} + o(u^{N-2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)). \end{aligned}$$

Evaluation of $P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1]$

We partition S into cubes of size ϵ with disjoint interiors: $H_1, \dots, H_m$. Since S is compact this number m is finite for all ϵ . Let n be the number of these cubes intersecting ∂S and set $V_1, \dots, V_n$ the corresponding $\partial S \cap H_{i_1}, \dots, \partial S \cap H_{i_n}$. For $i = 1, \dots, n$ choose a point $t_i \in V_i$ and define φ_i as the projection of V_i onto the tangent space T_{t_i} at t_i . By compactity ϵ can be chosen sufficiently small in order to φ_i being one-to-one with inverse $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty$ (as a function from T_{t_i} to $\mathbb{R}^N$) on the union of V_i with all other adjacent V_j 's ($\text{dist}(V_i, V_j) = 0$). Define $W_i = \varphi_i(V_i)$; $Y_i(\tilde{t}) = \tilde{X}(\psi_i(\tilde{t}))$, $\tilde{t} \in W_i$.

Applying Proposition 3.5 to the process Y_i we know that, with probability one:

$$R_u^{\tilde{X}}(\partial S) = \sum_{i=1}^n R_u^{\tilde{X}}(V_i).$$

Thus the inequality (3.1) becomes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)(R_u^{\tilde{X}}(V_i) - 1)] - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)R_u^{\tilde{X}}(V_j)] \\ \leq P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1] \leq \sum_{i=1}^n E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)]. \end{aligned}$$

Step 1: We prove that the extra-terms appearing in the lower-bound are negligible.

- Suppose that $\text{dist}(V_i, V_j) > 0$ then

$$E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)R_u^{\tilde{X}}(V_j)] \leq E[M_u^{\tilde{X}}(V_i)M_u^{\tilde{X}}(V_j)] = E[M_u^{Y_i}(W_i)M_u^{Y_j}(W_j)].$$

On account of the non degeneracy condition **H2 c**, for all $\tilde{s} \neq \tilde{t}$, $\tilde{s} \in \bar{W}_i$, $\tilde{t} \in \bar{W}_j$, the vector

$$(Y_i(\tilde{s}), Y_j(\tilde{t}), Y_i'(\tilde{s}), Y_j'(\tilde{t}), Y_i''(\tilde{s}), Y_j''(\tilde{t}))$$

is non-degenerated and using (3.4) and (3.5) we have:

$$\begin{aligned} E[M_u^{Y_i}(W_i)M_u^{Y_j}(W_j)] &\leq \int \int_{W_i \times W_j} d\tilde{s}d\tilde{t} \int \int_{(u, +\infty)^2} dx dy p_{Y_i(\tilde{s}), Y_j(\tilde{t}), Y_i'(\tilde{s}), Y_j'(\tilde{t})}(x, y, 0, 0) \times \\ &E[\tilde{\det}(Y_i''(\tilde{s}))\tilde{\det}(Y_j''(\tilde{t}))/Y_i(\tilde{s}) = x, Y_j(\tilde{t}) = y, Y_i'(\tilde{s}) = 0, Y_j'(\tilde{t}) = 0] = o_e(\varphi(u)). \end{aligned}$$

- Consider now $E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)(R_u^{\tilde{X}}(V_i) - 1)] \leq E[M_u^{Y_i}(W_i)(M_u^{Y_i}(W_i) - 1)] = o_e(\varphi(u))$ by the result of Proposition 3.3.
- Consider now the case $\text{dist}(V_i, V_j) = 0$, then

$$E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)R_u^{\tilde{X}}(V_j)] \leq E[M_u^{Y_i}(\varphi_i(V_i \cup V_j))(M_u^{Y_i}(\varphi_i(V_i \cup V_j)) - 1)] = o_e(\varphi(u)),$$

by the same argument than for the preceding case.

Step 2: We turn now to the evaluation of $\sum_{i=1}^n E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)]$.

$$E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)] = E[R_u^{Y_i}(W_i)].$$

Using the same arguments as those involved in the proof of Proposition 3.1, we get:

$$E[R_u^{Y_i}(W_i)] = \int_{W_i} d\tilde{t} \int_u^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dz \int_{\mathcal{N}} |\det y''| p_{Y_i''(\tilde{t}), Y_i(\tilde{t}), Y_i'(\tilde{t}), Z_i(\tilde{t})}(y'', y, 0, z) dy'',$$

where $Z_i(\tilde{t}) = n(\psi_i(\tilde{t})) \cdot X'(\psi_i(\tilde{t}))$. Forgetting the subscript i for short, we get:

$$E[R_u^Y(W)] = \int_W d\tilde{t} \int_u^{+\infty} \varphi(y) dy \int_0^{+\infty} dz p_{Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})}(0, z) \int_{\mathcal{N}} |\det y''| \times$$

$$p_{Y''(\tilde{t})}(y''/Y(\tilde{t}) = y, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z)dy''.$$

$Y(\tilde{t})$ and $(Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t}))$ are independent since $X(t)$ and $X'(t)$ are. Thus,

$$E[Y''(\tilde{t})/Y(\tilde{t}) = y, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z] = E[Y''(\tilde{t})/Y(\tilde{t}) = y] + E[Y''(\tilde{t})/Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z].$$

The derivative $\psi'(\tilde{t})$ of ψ at $\tilde{t}$ can be viewed as an $N \times (N-1)$ matrix and the second derivative $\psi''(\tilde{t})$ as a bilinear function $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Put $t = \psi(\tilde{t})$, then combination of derivation implies that:

$$\begin{aligned} Y'(\tilde{t}) &= (\psi'(\tilde{t}))^T X'(t) \\ Y''(\tilde{t}) &= (\psi'(\tilde{t}))^T X''(t) (\psi'(\tilde{t})) + A, \end{aligned}$$

where A is the bilinear function $(h, k) \rightarrow (\psi''(\tilde{t})(h, k))^T X'(t)$. Since $X'(t)$ and $Y(\tilde{t}) = X(t)$ are independent:

$$E[Y''(\tilde{t})/Y(\tilde{t}) = y] = E[(\psi'(\tilde{t}))^T X''(t) \psi'(\tilde{t})/X(t) = y] = -(\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}) y.$$

In conclusion, we have proved that conditionally to $(Y(\tilde{t}) = y, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z)$, the expectation of $Y''(\tilde{t})$ is:

$$-(\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}) y + z\alpha,$$

with $\alpha = E[Y''(\tilde{t})/Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = 1]$. Put $\Gamma(\tilde{t}) = Y''(\tilde{t}) + (\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}) y - z\alpha$. Under the condition $(Y(\tilde{t}) = y, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z)$, $E[R_u^Y(W)]$ can be written:

$$\int_W d\tilde{t} \int_u^{+\infty} \varphi(y) \int_0^{+\infty} p_{Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})}(0, z) \int_{\mathcal{M}} d\tilde{\det}(\gamma - y(\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}) + z\alpha) p_{\Gamma(\tilde{t})}(\gamma) d\gamma dz dy.$$

Set $y = u\tilde{y}$:

$$\begin{aligned} u^{1-N} \tilde{\det}(\gamma - y(\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}) + z\alpha) &= \tilde{\det}\left(\frac{\gamma}{u} - \tilde{y}(\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}) + \frac{\alpha}{u} z\right) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \\ &\tilde{y}^{N-1} \det((\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t})) \end{aligned}$$

Thus by a dominated convergence argument, as $u \rightarrow +\infty$ and since:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} p_{Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})}(0, z) dz &= \frac{(2\pi)^{\frac{1-N}{2}}}{\sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}))}} P[Z(\tilde{t}) > 0/Y'(\tilde{t}) = 0] \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{1-N}{2}}}{2\sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}))}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[R_u^Y(W)] &= \int_W d\tilde{t} \int_1^{+\infty} \tilde{y}^{N-1} u^N \varphi(u\tilde{y}) \frac{(2\pi)^{\frac{1-N}{2}}}{2} \sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}))} d\tilde{y} (1 + o(1)) \\ &= u^{N-2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_W \sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}))} d\tilde{t} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

In conclusion we have proved that as $u \rightarrow +\infty$:

$$P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1] = u^{N-2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{i=1}^n \int_{W_i} \sqrt{\det((\psi'_i(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'_i(\tilde{t}))} d\tilde{t} (1 + o(1)). \quad (3.12)$$

Step 3: We look for a better expression for the term:

$$T_n = \sum_{i=1}^n \int_{W_i} \sqrt{\det((\psi'_i(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'_i(\tilde{t}))} d\tilde{t}$$

appearing in formula (3.12).

Let $\tilde{t} \in W_i$, $t = \psi_i(\tilde{t})$ and recall that $t_i \in V_i$ is the point defining the tangent space T_{t_i} and the projection φ_i . Then $\psi'(\tilde{t})$ is the projection $T_{t_i} \rightarrow T_t$ orthogonal to T_{t_i} viewed as a function $W \rightarrow \mathbb{R}^N$. Since ∂S is regular, the normal vector $n(t)$ to ∂S at point $t \in \partial S$ is a continuous function of t . Thus taking arbitrary small sets V_i we can impose:

$$|\sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}))} - \sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}_i))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}_i))}| \leq \epsilon.$$

Then we get that T_n , for sufficiently small set V_i , is arbitrary close to

$$T'_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\det((\psi'(\tilde{t}_i))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}_i))} \lambda_{N-1}(W_i).$$

Note that $(\psi'(\tilde{t}_i))^T \Lambda \psi'(\tilde{t}_i)$ is the projection $\Pi_{t_i}(\Lambda)$ of Λ on the tangent space T_{t_i} . We get

$$T'_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\det(\Pi_{t_i}(\Lambda))} \lambda_{N-1}(W_i),$$

which is a Riemann-type sum associated to the integral

$$\int_{\partial S} \sqrt{\det(\Pi_t(\Lambda))} d\sigma(t).$$

Since T_n does not depend on n and on the choice of $V_1, \dots, V_n$, we get:

$$T_n = \int_{\partial S} \sqrt{\det(\Pi_t(\Lambda))} d\sigma(t).$$

Proof that $P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S) M_u^X(\dot{S}) \geq 1] = o_e(\varphi(u))$.

Step 1: As in step 2 of the evaluation of $P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S) \geq 1]$ we define $H_1, \dots, H_m$ and $\forall i = 1, \dots, n$, $V_i, t_i, \varphi_i, \psi_i, W_i, Y_i(t)$. For $\tilde{t} \in W_i$ we define $Z_i(\tilde{t})$ by $X'(\psi_i(\tilde{t})) \cdot n(\psi_i(\tilde{t}))$. With probability one we have:

$$R_u^{\tilde{X}}(\partial S) = \sum_{i=1}^n R_u^{\tilde{X}}(V_i) \text{ and } M_u^X(\dot{S}) = \sum_{i=1}^m M_u^X(H_i).$$

Thus:

$$P[R_u^{\tilde{X}}(\partial S)M_u^X(\dot{S}) \geq 1] \leq E[R_u^{\tilde{X}}(\partial S)M_u^X(\dot{S})] = \sum_{i=1, \dots, n \ ; \ j=1, \dots, m} E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)M_u^X(H_j)].$$

By the same arguments as those used in the proof of Proposition 3.2:

$$\begin{aligned} & E[R_u^{\tilde{X}}(V_i)M_u^X(H_j)] \\ & \leq \int \int_{H_j \times W_i} dt d\tilde{t} \int \int_{[u, +\infty)^2} dx dy \int_0^\infty p_{X(t), Y_i(\tilde{t}), X'(t), Y_i'(\tilde{t}), Z_i(\tilde{t})}(x, y, 0, 0, z) \\ & E[\tilde{\det}(X''(t))\tilde{\det}(Y_i''(\tilde{t}))/X(t) = x, Y_i(\tilde{t}) = y, X'(t) = 0, Y_i'(\tilde{t}) = 0, Z_i(\tilde{t}) = z] dz \\ & \leq \int \int_{H_j \times W_i} dt d\tilde{t} \int_u^\infty dx \int_0^\infty p_{X(t), X'(t), Y_i'(\tilde{t}), Z_i(\tilde{t})}(x, 0, 0, z) \\ & E[\tilde{\det}(X''(t))\tilde{\det}(Y_i''(\tilde{t}))/X(t) = x, X'(t) = 0, Y_i'(\tilde{t}) = 0, Z_i(\tilde{t}) = z] dz \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \int \int_{H_j \times W_i} A(t, \tilde{t}) dt d\tilde{t} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Step 2: Suppose that $\text{dist}(H_j, V_i) > 0$. As in the preceding section and using the argument by Piterbarg we get:

$$E[M_u^X(H_j)R_u^{\tilde{X}}(V_i)] = o_e(\varphi(u)) \text{ as } u \rightarrow +\infty.$$

Suppose now that $\text{dist}(H_j, V_i) = 0$ but that V_i is distinct from $H_j \cap \partial S$. Define $\bar{H}_j$ as the union of H_j with adjacent H_l 's ($l = 1, \dots, m$) and $\bar{V}_j$ as $\bar{H}_j \cap \partial S$. Then:

$$E[M_u^X(H_j)R_u^{\tilde{X}}(V_i)] \leq E[M_u^X(\bar{H}_j)R_u^{\tilde{X}}(\bar{V}_j)].$$

Thus this case can be included into the next one.

Step 3: We suppose now that $V_i = H_j \cap \partial S$ and, for short, we forget the subscripts i and j . Define:

$$e_{t, \tilde{t}} = e = \frac{\psi(\tilde{t}) - t}{||\psi(\tilde{t}) - t||}, \quad R_{t, \tilde{t}} = R = \text{Var}[X''(t_0)e].$$

We divide the integral (3.13) into two domains:

$$\int \int_{H \times W} A(t, \tilde{t}) dt d\tilde{t} \leq \int \int_{D_1} A(t, \tilde{t}) dt d\tilde{t} + \int \int_{D_2} A(t, \tilde{t}) dt d\tilde{t},$$

where D_1 and D_2 are the two compact domains defined by:

$$D_1 = \{t \in H, \tilde{t} \in W / e^T \Lambda R^{-1} n(t_0) \geq \epsilon\}$$

$$D_2 = \{t \in H, \tilde{t} \in W / e^T \Lambda R^{-1} n(t_0) \leq \epsilon\},$$

with $\epsilon > 0$ that will be fixed below. We will use the following relations the proof of which is given in step

4. These relations are valid for $t \in H$, $\tilde{t} \in W$ and H being small enough.

1) There exists constants N_1 and N_2 such that:

$$E[|\det X''(t)| |\det Y''(\tilde{t})| / X(t) = x, X'(t) = 0, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z] \leq (\text{const}) [x^{N_1} + (\frac{z}{\|\psi(\tilde{t}) - t\|})^{N_2} + 1].$$

$$E[|\det X''(t)| |\det Y''(\tilde{t})| / X(t) = x, X'(t) = 0, Y'(\tilde{t}) = 0] \leq (\text{const}) [1 + x^{N_1}].$$

2) There exists a constant K , $0 < K < +\infty$ such that:

$$\text{Var}(Z(\tilde{t}) / X'(t), Y'(\tilde{t})) \leq K \|\psi(\tilde{t}) - t\|^2.$$

3) There exists a strictly positive constant such that:

$$\det \text{var}(X(t), X'(t), Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})) \geq (\text{const}) \|\psi(\tilde{t}) - t\|^{2N}.$$

$$\det \text{var}(X(t), X'(t), Y'(\tilde{t})) \geq (\text{const}) \|\psi(\tilde{t}) - t\|^{2(N-1)}.$$

4) There exists a constant K' , $0 < K' < +\infty$ such that:

$$\text{Var}(X(t) / X'(t), Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})) \leq K' < 1.$$

5) On D_1 : $E[X(t) / X'(t) = 0, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = 1] \leq 0$.

6) On D_2 : There exists a constant K'' , $0 < K'' < 1$ such that $\text{Var}(X(t) / X'(t), Y'(\tilde{t})) \leq K'' < 1$.

On D_1 write:

$$\begin{aligned} p_{X(t), X'(t), Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})}(x, 0, 0, z) &= p_{X(t)}(x / X'(t) = 0, Y'(\tilde{t}) = 0, Z(\tilde{t}) = z) p_{X'(t), Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})}(0, 0, z) \\ &\leq (\text{const}) (\det \text{var}(X(t), X'(t), Y'(\tilde{t}), Z(\tilde{t})))^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{2K'}) \exp(-\frac{z^2}{2\text{Var}(Z(\tilde{t}) / X'(t), Y'(\tilde{t}))}) \end{aligned}$$

by relations 4) and 5). Thus by relations 1), 2) and 3): $A(t, \tilde{t}) \leq$

$$(\text{const}) \int_0^{+\infty} dz \int_u^{+\infty} (x^{N_1} + (\frac{z}{\|\psi(\tilde{t}) - t\|})^{N_2} + 1) \|\psi(\tilde{t}) - t\|^{-N} \exp(-\frac{x^2}{2K'}) \exp(-\frac{z^2}{2K \|\psi(\tilde{t}) - t\|^2}) dx.$$

Using the change of variable $\tilde{z} = \frac{z}{\|\psi(\tilde{t}) - t\|}$ yields:

$$A(t, \tilde{t}) \leq (\text{const}) \int_0^{+\infty} dz \int_u^{+\infty} (x^{N_1} + z^{N_2} + 1) \|\psi(\tilde{t}) - t\|^{1-N} \exp(-\frac{x^2}{2K'}) \exp(-\frac{z^2}{2K}) dx.$$

The conclusion that

$$\int \int_{D_1} A(t, \tilde{t}) dt d\tilde{t} = o_e(\varphi(u))$$

follows directly from the integrability of $\|\psi(\tilde{t}) - t\|^{1-N}$ on $H \times W$.

On D_2 write:

$$A(t, \tilde{t}) \leq \int_u^\infty dx p_{X(t), X'(t), Y'(\tilde{t})}(x, 0, 0) E[\tilde{\det}(X''(t)) \tilde{\det}(Y''(\tilde{t})) / X(t) = x, X'(t) = 0, Y'(\tilde{t}) = 0].$$

Relations 1), 3) and 6) imply that:

$$A(t, \tilde{t}) \leq (\text{const}) \int_u^{+\infty} (1 + x^{N_1}) \|\psi(\tilde{t}) - t\|^{-N+1} \exp\left(-\frac{x^2}{2K''}\right) dx.$$

The integrability of $\|\psi(\tilde{t}) - t\|^{1-N}$ on $H \times W$ imply that:

$$\int \int_{D_2} A(t, \tilde{t}) dt d\tilde{t} = o_e(\varphi(u)),$$

which concludes the proof of Theorem 3.

Step 4: Proofs of the relations given in step 3 above.

Since the H_i are of arbitrary small size, by a compacity argument it is sufficient to prove all the relations for $(t_n, \psi(\tilde{t}_n))$ tending to (t_0, t_0) , with $t_0 \in V_i$ and for the point of projection t_i tending to t_0 also. In the following, the Landau symbol o refers to such an asymptotic framework. One key point is that since φ is the projection on the tangent space, $Y'(\tilde{t})$ is arbitrary close to the projection $\Pi_{t_0}(X'(\psi(\tilde{t})))$ of $X'(\psi(\tilde{t}))$ on the space tangent to t_0 .

$$Y'(\tilde{t}) = \Pi_{t_0}(X'(\psi(\tilde{t}))) + o(1).$$

The second key point is that the transformation

$$(\Pi_{\psi(\tilde{t})}(X'(\psi(\tilde{t})))^T, Z(\tilde{t}))^T \rightarrow X'(\psi(\tilde{t}))$$

is unitary thus with determinant 1.

• Relation 1). Put:

$$C = \{X(t_n) = x, X'(t_n) = 0, Y'(\tilde{t}_n) = 0, Z(\tilde{t}_n) = z\}.$$

We have:

$$E[X''(t_n)/C] = A_{t_n, \tilde{t}_n} x + B_{t_n, \tilde{t}_n} \frac{z}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|} \quad (3.14)$$

$$E[Y''(t_n)/C] = \tilde{A}_{t_n, \tilde{t}_n} x + \tilde{B}_{t_n, \tilde{t}_n} \frac{z}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|}. \quad (3.15)$$

Our aim is to prove that functions $A_{t_n, \tilde{t}_n}$, $B_{t_n, \tilde{t}_n}$, $\tilde{A}_{t_n, \tilde{t}_n}$ and $\tilde{B}_{t_n, \tilde{t}_n}$ are bounded as $(t_n, \psi(\tilde{t}_n))$ tends to (t_0, t_0) . We give the proof for $A_{t_n, \tilde{t}_n}$ and $B_{t_n, \tilde{t}_n}$. The proof for the two other cases is similar.

$$A_{t_n, \tilde{t}_n} = E[X''(t_n)/C_1]$$

with:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{X(t_n) = 1, X'(t_n) = 0, \frac{X'(\psi(\tilde{t}_n)) - X'(t_n)}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|} = 0\} \\ &= \{X(t_0) + o(1) = 1, X'(t_0) + o(1) = 0, X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n} + o(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Since the limit distribution of $(X(t_0), X'(t_0), X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n})$ is uniformly non-degenerate,

$$E[X''(t_n)/C_1] = E[X''(t_n)/X(t_0) = 1, X'(t_0) = 0, X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n} = 0] + o(1)$$

which gives the result.

In the same way:

$$\begin{aligned} B_{t_n, \tilde{t}_n} &= E[X''(t_n)/X(t_0) + o(1) = 0, X'(t_0) + o(1) = 0, X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n} + o(1) = n(t_0)] \\ &= E[X''(t_n)/X(t_0) = 0, X'(t_0) = 0, X''(t_0) = n(t_0)] + o(1). \end{aligned}$$

Now $\det(X''(t))$ for example can be written as the sum of $N!$ products of N terms. Thus $|\det(X''(t))|$ is bounded by the sum of the absolute value of these $N!$ terms. The same kind of relation is true for $\det(Y''(t))$. Thus $|\det(X''(t))\det(Y''(t))|$ is bounded by the sum of the absolute value of $N!(N-1)!$ products of $2N-1$ Gaussian variables with bounded variance and expectation bounded by $(\text{const})(x + \frac{z}{\|\psi(\tilde{t}) - t\|})$. Thus writing each variable as the sum of its expectation and a centered variable, making the product and then using Lemma 3.1 gives the result with in fact $N_1 = N_2 = 2N-1$.

In the same way we prove that:

$$E[|\det X''(t_n)| |\det Y''(\tilde{t}_n)| / X(t_n) = x, X'(t_n) = 0, Y'(\tilde{t}_n) = 0] \leq (\text{const})(1 + x^{N_1}).$$

• Relation 2).

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z(\tilde{t}_n)/X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n)] &= \frac{\det \text{var}[X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n), Z(\tilde{t}_n)]}{\det \text{var}[X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n)]} \\ &= \frac{\det \text{var}[X'(t_n), V_{\tilde{t}_n}(X'(\psi(\tilde{t}_n)) - X'(t_n))]}{\det \text{var}[X'(t_n), \psi'(\tilde{t}_n)(X'(\psi(\tilde{t}_n)) - X'(t_n))]} \\ &= \frac{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|^{2N} (\det \text{var}[X'(t_0), X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}] + o(1))}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|^{2(N-1)} (\det \text{var}[X'(t_0), \Pi_{t_0} X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}] + o(1))} \\ &= \|\psi(\tilde{t}) - t\|^2 \frac{\det \text{var}[X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}] + o(1)}{\det \text{var}[\Pi_{t_0} X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}] + o(1)} \\ &= \frac{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|^2 (1 + o(1))}{n^T(t_0) [\text{Var}[X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}]]^{-1} n(t_0) + o(1)}, \end{aligned}$$

where $V_{\tilde{t}}$ is the $N \times N$ matrix such that $V_{\tilde{t}}(X'(\psi(\tilde{t}))) = (Y'(\tilde{t})^T, Z(\tilde{t}))^T$. Since $n(t_0)$ and $e_{t_n, \tilde{t}_n}$ are unit vectors and $\text{Var}(X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n})$ is non-degenerate uniformly in t_n and $\tilde{t}_n$, relation 2) is proved.

• Relation 3). By the same arguments:

$$\det \text{var}[X(t_n), X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n), Z(\tilde{t}_n)] = \|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|^{2N} (\det \text{var}(X(t_0), X'(t_0), X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}) + o(1)).$$

Since $\det \text{var}(X(t_0), X'(t_0), X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n})$ is non-degenerate uniformly in t_n and $\tilde{t}_n$, relation 3) is established.

In the same way we prove that:

$$\det \text{var}[X(t_n), X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n)] \geq (\text{const}) \|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|^{2(N-1)}.$$

• Relation 4).

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t_n)/X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n), Z(\tilde{t}_n)) &= \text{Var}[X(t_0)/X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}] + o(1) \\ &= 1 - e_{t_n, \tilde{t}_n}^T \Lambda (\text{Var}[X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}])^{-1} \Lambda e_{t_n, \tilde{t}_n} + o(1). \end{aligned}$$

$\text{Var}[X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}]$ is non-degenerate uniformly in t_n and $\tilde{t}_n$ and $\|\Lambda e_{t_n, \tilde{t}_n}\|$ is uniformly strictly positive thus relation 4) is valid.

• Relation 5). It is easy to see that the condition

$$C_2 = \{X'(t_n) = 0, Y'(\tilde{t}_n) = 0, Z'(\tilde{t}_n) = 1\}$$

can be written:

$$\begin{aligned} C_2 &= \{X'(t_n) = 0, \frac{X'(\psi(\tilde{t}_n)) - X'(t_n)}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|} = \frac{n(\psi(\tilde{t}_n)) + o(1)}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|}\} \\ &= \{X'(t_0) + o(1) = 0, X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n} + o(1) = \frac{n(\psi(\tilde{t}_n)) + o(1)}{\|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|}\}. \end{aligned}$$

Thus:

$$E[X(t_0)/C_2] = \|\psi(\tilde{t}_n) - t_n\|^{-1} [-e_{t_n, \tilde{t}_n}^T \Lambda R^{-1} n(t_0) + o(1)]$$

and relation 5) is valid for any value of ϵ .

• Relation 6).

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t_n)/X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n)] &= \text{Var}[X(t_0)/\Pi_{t_0} X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}] + o(1) \\ &= 1 - (\Pi_{t_0} \Lambda e_{t_n, \tilde{t}_n})^T [\text{Var}(\Pi_{t_0} X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n})]^{-1} (\Pi_{t_0} \Lambda e_{t_n, \tilde{t}_n}) + o(1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Since $\Pi_{t_0} X''(t_0)e_{t_n, \tilde{t}_n}$ is non-degenerated uniformly in t_n and $\tilde{t}_n$, $\text{Var}[X(t_n)/X'(t_n), Y'(\tilde{t}_n)]$ may tend to zero only if:

$$\Pi_{t_0} \Lambda e_{t_n, \tilde{t}_n} \rightarrow 0$$

which implies that there exists constants $\alpha_{t_n, \tilde{t}_n}$ such that:

$$\begin{aligned}\Lambda e_{t_n, \tilde{t}_n} &= \alpha_{t_n, \tilde{t}_n} n(t_0) + o(1) \\ &= \alpha_{t_n, \tilde{t}_n} n(\psi(\tilde{t}_n)) + o(1).\end{aligned}$$

Since S is convex $e_{t_n, \tilde{t}_n}^T n(\psi(\tilde{t}_n)) \geq 0$. Therefore there exists a strictly positive constant α_0 such that $\alpha_{t_n, \tilde{t}_n} \geq \alpha_0$. Thus:

$$\begin{aligned}e_{t_n, \tilde{t}_n}^T \Lambda R^{-1} n(t_0) &= \alpha_{t_n, \tilde{t}_n} n^T(t_0) R^{-1} n(t_0) + o(1) \\ &\geq \alpha_0 n^T(t_0) R^{-1} n(t_0) + o(1).\end{aligned}\tag{3.17}$$

For each value ϵ , this is not possible on $\mathcal{D}_2$ for sufficiently small subset s . Thus we conclude that relation 6) is valid.

3.4.4 Proof of Theorem 3.4

The proof of Theorem 3.4 is just a refinement of the proof of Theorem 3.3. From this proof we know that:

$$P[M(S) > u] = u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{|\Lambda|^{1/2}}{2\sqrt{2\pi}} + E[R_u^{\tilde{X}}(\partial S)] + o_e(\varphi(u)).$$

We use the parametrization $Y(\theta) = X(\cos \theta, \sin \theta)$. We have:

$$\begin{aligned}Y'(\theta) &= (-\sin \theta, \cos \theta) X'(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\begin{array}{c} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right), X'(\cos \theta, \sin \theta) > \\ Y''(\theta) &= -(\cos \theta, \sin \theta) X'(\cos \theta, \sin \theta) + (-\sin \theta, \cos \theta) X''(\cos \theta, \sin \theta) (-\sin \theta, \cos \theta)^T.\end{aligned}$$

Let $Z(\theta)$ be the normal derivative: $Z(\theta) = \left(\begin{array}{c} \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right), X'(\cos \theta, \sin \theta) >$. We have:

$$\begin{aligned}E[\tilde{R}_u([0, 2\pi])] &= \int_0^{2\pi} d\theta \times \\ &\int_u^\infty dy \varphi(y) \int_0^\infty dz p_{Y'(\theta), Z(\theta)}(0, z) \int_{-\infty}^0 |y''| p_{Y''(\theta)}(y''/Y(\theta) = y, Y'(\theta) = 0, Z(\theta) = z) dy''.\end{aligned}$$

Since

$$E[Y''(\theta)/Y(\theta) = y, Y'(\theta) = 0, Z(\theta) = z] = -y[\Lambda_{11} \sin^2 \theta - 2\Lambda_{12} \cos \theta \sin \theta + \Lambda_{22} \cos^2 \theta] - z$$

which is bounded above by zero, it is easy to see using previous method that:

$$\begin{aligned}E[\tilde{R}_u([0, 2\pi])] &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_u^\infty dy \varphi(y) \int_0^\infty dz p_{Y'(\theta), Z(\theta)}(0, z) \int_{\mathbb{R}} -(\gamma - y v^T(\theta) \Lambda v(\theta) - z) p_\Gamma(\gamma) d\gamma \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{v^T(\theta) \Lambda v(\theta)} d\theta + \bar{\Phi}(u) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\Lambda|^{1/2}}{v^T(\theta) \Lambda v(\theta)} d\theta,\end{aligned}$$

where Γ is a Gaussian random variable centered with variance $\text{Var}(Y''(\theta)/Y(\theta), Y'(\theta), Z(\theta))$ and $v(\theta)$ is defined in the statement of Theorem 3.4. Thus Theorem 3.4 is established.

3.4.5 Proof of Theorem 3.5

A face of S can be indexed by:

- a set I of coordinates that are free in the face. This set defines a class of parallel faces. We denote V_I the vector space generated by these faces,
- a number i , $i \in \{1, \dots, 2^{N-|I|}\} = K_I$ that indexes the various faces in the preceding class.

So a face will be denoted by $S_{I,i}$, $I \in \mathcal{F}(N)$, $i = 1, \dots, 2^{N-|I|}$. When considering a unique face $S_{I,i}$, we will choose an orthonormal base $e_1, \dots, e_N$ with $e_1, \dots, e_n$ ($n = |I|$) parallel to $S_{I,i}$ and $e_{n+1}, \dots, e_N$ pointing outward S . Though this base depends on the considered face, to save notations it will always be denoted by the same symbol. We denote by $X'_1(t), \dots, X'_N(t)$ the coordinates of the gradient $X'(t)$ in this base, $X'_I(t) = \Pi_{V_I}(X'(t))$ and $X''_I(t)$ the restriction of $X''(t)$ to V_I . Let $\tilde{X}_{I,i}$ be the restriction of X to such a face, we define:

$$R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i}) = \#\{t \in S_{I,i} : X(t) \geq u, X'_I(t) = 0, X'_j(t) > 0, \forall j > |I|, X''_I(t) \in \mathcal{N}\}$$

Note, for example, that if $I = \emptyset$, $S_{\emptyset,i} = \{t_i\}$ for some point t_i .

$$R_u^{\tilde{X}_{\emptyset,i}}(S_{\emptyset,i}) = \mathbb{I}_{\{X(t_i) > u, X'_j(t_i) > 0, \forall j\}}$$

and if $I = \{1, \dots, N\}$, $R_u^{\tilde{X}_I}(S_I) = M_u^X(S)$. We have:

$$\begin{aligned} P[M(S) \geq u] &= P\left[\bigcup_{I \in \mathcal{F}(N)} \bigcup_{i \in K_I} (R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i}) \geq 1)\right] \\ &= P\left[\bigcup_{m=1}^d A_m\right] \end{aligned}$$

with $d = \sum_{n=0}^N 2^{N-n} \times C_N^n$ and $A_m = \{R_u^{\tilde{X}_{n,i}}(S_{n,i}) \geq 1\}$. We use the Bonferroni inequality:

$$\sum_{m=1}^d P[A_m] - \sum_{m < l} P[A_m A_l] \leq P[M(S) \geq u] \leq \sum_{m=1}^d P[A_m].$$

Relation (3.1) and Proposition 3.3 imply that as $u \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{m=1}^d P[A_m] = \sum_{I \in \mathcal{F}(N)} \sum_{i \in K_I} E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i})] + o_e(\varphi(u)).$$

Step 1: Evaluation of $\sum_{i \in K_I} E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i})]$.

- When $I = \emptyset$:

$$E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i})] = P[X(t_i) \geq u, X'_j(t_i) > 0].$$

Since the distribution of $(X(t_i), X'(t_i))$ is $N(0, 1) \times N(0, \Lambda)$, it does not depend on i . Let $O_1, \dots, O_{2^N}$ the 2^N orthants.

$$\sum_{i \in K_I} E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i})] = \bar{\Phi}(u) \sum_{i=1}^{2^N} P[X'(t_i) \in O_i] = \bar{\Phi}(u).$$

- When $I = \{1, \dots, N\}$, it is clear that $E[R_u^{\tilde{X}}(S_I)] = E[M_u^X(S)]$.
- When $\emptyset \subset I \subset \{1, \dots, N\}$, since $X'(t)$ and $X''(t)$ are independent:

$$E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i})] = \int_{S_{I,i}} dt \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_{N-n} \frac{p_{X'_1(t), \dots, X'_N(t)}(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{N-n})}{p_{X'_1(t), \dots, X'_n(t)}(0, \dots, 0)} \\ \int_u^\infty dx \int_{\mathcal{D}} |\det x''| p_{X''(t), X(t), X'_I(t)}(x'', x, 0) dx''.$$

By Theorem 3.1 we have that, as $u \rightarrow +\infty$:

$$\int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| p_{X''(t), X(t), X'_I(t)}(x'', x, 0) dx'' = \frac{1}{\lambda(S_{I,i})} \sum_{j=0}^{[n/2]} k_{2j}^I \Psi_{2j}^n(u) + o_e(\varphi(u)).$$

Thus:

$$\sum_{i=1}^{2^{N-n}} E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_{I,i})] = \sum_{j=0}^{[n/2]} k_{2j}^I \Psi_{2j}^n(u) + o_e(\varphi(u)).$$

Finally as $u \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{m=1}^d P[A_m] = \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{[n/2]} \Psi_{2j}^n(u) \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n(N)} k_{2j}^I \right) + \bar{\Phi}(u) + o_e(\varphi(u)).$$

Step 2: We now prove that as $u \rightarrow +\infty$:

$$P[A_m A_l] = o_e(\varphi(u)). \quad (3.18)$$

When A_m and A_l involve two faces at positive distance relation (3.18) is easy.

In the other case when A_m involves a face $S_{I,i}$ (S_I for short) of dimension $n \geq 1$ and A_l involves a face $S_{I',i'}$ of dimension n' , $0 \leq n' \leq n$, we choose a basis $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ such that:

- $(e_1, \dots, e_m)$ span $V_I \cap V_{I'}$,
- $e_{m+1}, \dots, e_{n'}$ are pointing outward S at S_I and span $V_{I'}$ with $(e_1, \dots, e_m)$,

- $e_{n'+1}, \dots, e_{n'+n-m}$ are pointing outward S at $S_{I'}$ and span V_I with $(e_1, \dots, e_m)$.

Then:

$$P[A_m A_l] = P[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_I) R_u^{\tilde{X}_{I',j}}(S_{I'}) \geq 1] \leq E[R_u^{\tilde{X}_{I,i}}(S_I) R_u^{\tilde{X}_{I',i'}}(S_{I'})].$$

By the same arguments as those involved in the proofs of Proposition 3.1 and Proposition 3.2 we obtain:

$$\begin{aligned} P[A_m A_l] &\leq \int \int_{S_I \times S_{I'}} dt ds \int_u^\infty dx \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dz_{m+1} \dots dz_{n'} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dy_{n'+1} dy_{n'+n-m} \\ p(x, 0, \dots, 0, z_{m+1}, \dots, z_{n'}, 0, \dots, 0, y_{n'+1}, \dots, y_{n'+n-m}) &E[\tilde{\det}(X_I''(t)) \tilde{\det}(X_{I'}''(s)) / X(t) = x, X_I'(t) = 0, \\ X'_{m+1}(t) = z_{m+1}, \dots, X'_{n'}(t) = z_{n'}, X'_{I'}(s) = 0, X'_{n'+1}(s) = y_{n'+1}, \dots, X'_{n'+n-m}(s) = y_{n'+n-m}], \end{aligned}$$

where p is the density of $(X(t), X_I'(t), X'_{m+1}(t), \dots, X'_{n'}(t), X'_{I'}(t), X'_{n'+1}(s), \dots, X'_{n'+n-m}(s))$. The right-hand term above will be denoted by:

$$\int \int_{S_I \times S_{I'}} A(t, s) dt ds. \quad (3.19)$$

Put $e_{t,s} = e = \frac{s-t}{||s-t||}$ and $\Lambda e = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$. Since there exists some $\alpha_0 > 0$ such that for all s and t $\langle e, \Lambda e \rangle \geq \alpha_0$ and since:

- $\langle e, e_k \rangle \leq 0$ for $m < k \leq n'$
- $\langle e, e_k \rangle \geq 0$ for $n' < k \leq n' + n - m$
- $\langle e, e_k \rangle = 0$ for $n' + n - m < k \leq N$

we can majorize the integral in (3.19) by the sum of $n + n' - 2m + 1$ integrals, namely:

$$P[A_m A_l] \leq \int \int_{\mathcal{D}_0} A(t, s) dt ds + \sum_{k=m}^{n+n'-m} \int \int_{\mathcal{D}_k} A(t, s) dt ds,$$

with:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{(t, s) \in S_I \times S_{I'} : \sum \alpha_k \langle e, e_k \rangle \geq \epsilon_0\}, \\ \mathcal{D}_k &= \{(t, s) \in S_I \times S_{I'} : \alpha_k \leq -\epsilon_k\}, & m < k \leq n', \\ \mathcal{D}_k &= \{(t, s) \in S_I \times S_{I'} : \alpha_k \geq \epsilon_k\}, & n' < k \leq n + n' - m, \end{aligned}$$

where the positive values $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n+n'-m}$ are such that:

$$\epsilon_0 + \sum_{k=m}^{n+n'-m} \epsilon_k < \alpha_0.$$

It is clear that if (t, s) would not belong to $\mathcal{D}_0$ nor to $\mathcal{D}_m, \dots, \mathcal{D}_{n+n'-m}$:

$$< e, \Lambda e > < \alpha_0.$$

Thus $\mathcal{D}_0 \bigcup \bigcup_{k=m}^{n+n'-m} \mathcal{D}_k$ is a covering of $S_I \times S_{I'}$.

- Let us prove that $\int \int_{\mathcal{D}_0} A(t, s) dt ds = o_e(\varphi(u))$ as $u \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{D}_0} A(t, s) dt ds &\leq \int \int_{\mathcal{D}_0} dt ds \int_u^\infty dx p_{X(t), X'_I(t), X'_{I'}(s)}(x, 0, 0) \\ &E[\tilde{\det}(X''_I(t)) \tilde{\det}(X''_{I'}(s)) / X(t) = x, X'_I(t) = 0, X'_{I'}(s) = 0]. \end{aligned}$$

By the same arguments as those used in step 4 of the proof of Proposition 3.3 we have:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t) / X'_I(t), X'_{I'}(s)] &\leq \text{Var}[X(t) / X'_k(t), X'_k(s) \quad \forall k = 1, \dots, m] \\ &\leq K < 1 \text{ on } \mathcal{D}_0 \end{aligned}$$

$$\det \text{var}[X(t), X'_I(t), X'_{I'}(s)] \geq (\text{const}) \|s - t\|^{2m}$$

$$E[\tilde{\det}(X''_I(t)) \tilde{\det}(X''_{I'}(s)) / X(t) = x, X'_I(t) = 0, X'_{I'}(s) = 0] \leq (\text{const}) [1 + x^{N_1}]$$

The conclusion that $\int \int_{\mathcal{D}_0} A(t, s) dt ds = o_e(\varphi(u))$ as $u \rightarrow +\infty$ follows from the integrability of $\|s - t\|^{-m}$ on $S_I \times S_{I'}$.

- Now we prove that $\int \int_{\mathcal{D}_k} A(t, s) dt ds = o_e(\varphi(u))$ as $u \rightarrow +\infty$ for $k = m + 1, \dots, n'$.

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{D}_k} A(t, s) dt ds &\leq \int \int_{\mathcal{D}_k} dt ds \int_u^\infty dx \int_0^\infty dz_k \\ &(\det \text{var}[X(t), X'_I(t), X'_k(t), X'_{I'}(s)])^{-1/2} \times (\text{const}) \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{z_k^2}{2\gamma^2}\right) \times \\ &E[\tilde{\det}(X''_I(t)) \tilde{\det}(X''_{I'}(s)) / X(t) = x, X'_I(t) = 0, X'_k(t) = z_k, X'_{I'}(s) = 0], \end{aligned}$$

where:

$$\begin{aligned} \mu &= E[X(t) / X'_k(t) = z_k, X'_{I'}(s) = 0] \\ \sigma^2 &= \text{Var}[X(t) / X'_k(t), X'_{I'}(s)] \\ \gamma^2 &= \text{Var}[X'_k(t) / X'_{I'}(s)]. \end{aligned}$$

By the same arguments as those used in step 4 of the proof of Proposition 3.3 we have:

$$\begin{aligned}
\mu &\leq 0 \text{ on } \mathcal{D}_k, \\
\sigma^2 &\leq K < 1 \text{ on } \mathcal{D}_k, \\
\det \text{var}[X(t), X'_I(t), X'_k(t), X'_{I'}(s)] &\geq (\text{const}) \|s - t\|^{2(m+1)}, \\
\gamma^2 &\leq K \|s - t\|^2 \text{ with } 0 < K < +\infty, \\
E[\det(X''_I(t)) \det(X''_{I'}(s)) / X(t) = x, X'_I(t) = 0, X'_k(t) = z_k, \\
X'_{I'}(s) = 0] &\leq (\text{const}) [x^{N_1} + (\frac{z_k}{\|s-t\|})^{N_2} + 1].
\end{aligned}$$

The conclusion that $\int \int_{\mathcal{D}_k} A(t, s) dt ds = o_e(\varphi(u))$ as $u \rightarrow +\infty$ for $k = m+1, \dots, n'$ follows from the change of variables $z = \frac{z_k}{\|s-t\|}$ and the integrability of $\|s - t\|^{-m}$ on $S_I \times S_{I'}$.

- The proof that $\int \int_{\mathcal{D}_k} A(t, s) dt ds = o_e(\varphi(u))$ as $u \rightarrow +\infty$ for $k = n' + 1, \dots, n + n' - m$ follows

the same lines as previously replacing $X'_k(t)$ by $X'_k(s)$, z_k by y_k and inverting $X'_I(t)$ and $X'_{I'}(s)$.

3.5 References

- ADLER, R. J., 1981. *The Geometry of Random Fields*. Wiley, New York.
- ADLER, R. J., 1990. *An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*. IMS, Hayward, CA.
- ADLER, R. J., 2000. On excursion sets, tube formulae, and maxima of random fields. *Annals of Applied Prob.* **10** to appear.
- AZAÏS, J. M. and WSCHEBOR, M., 1997. Une formule pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** 225–230.
- AZAÏS, J. M. and WSCHEBOR, M., 2000. The distribution of the maximum of a stochastic process and the Rice method. Submitted.
- BELYAEV, Yu. K. and PITERBARG, V. I., 1972a. The asymptotic formula for the mean number of A-points of excursions of Gaussian fields above high levels (in Russian). In *Bursts of Random Fields*, Moscow Univ. Press, Moscow. 62–89.
- BELYAEV, Yu. K. and PITERBARG, V. I., 1972b. Asymptotics of the average number of A-points of overshoot of a Gaussian field beyond a high level. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **203** 309–313.
- BRILLINGER, D. R., 1972. On the number of solutions of systems of random equations. *The Annals of Math. Statistics* **43** 534–540.
- CRAMER, H. and LEADBETTER, M. R., 1967. *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, New York.
- DACUNHA-CASTELLE, D. and GASSIAT, E., 1997. Testing in locally conic model and application to mixture models. *ESAIM: Probability and Statistics* **1** 285–317.
- DACUNHA-CASTELLE, D. and GASSIAT, E., 1999. Testing the order of a model using locally conic parametrization: population mixtures and stationary ARMA processes. *Annals of Stat.* **27** no 4 1178–1209.
- DAVIES, R. B., 1977. Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika* **64** 247–254.
- DELMAS, C., 1998. An asymptotic expansion for the distribution of the maximum of a class of Gaussian fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** 393–397.
- HASOFER, A. M., 1976. The Mean Number of Maxima Above High Levels in Gaussian Random Fields. *J. Appl. Prob.* **13** 377–379.
- KAC, M., 1943. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** 314–320.
- MIKHALEVA, T. L. and PITERBARG V. I., 1996. On the distribution of the maximum of a Gaussian field with constant variance on a smooth manifold. *Theor. Prob. Appl.* **41** 367–379.
- PARK, M. G. and SUN, J., 1998. Tests in projection pursuit regression. *Journal of Statistical Planning and Inference* **75** 65–90.
- PITERBARG, V. I., 1981. Comparison of Distribution Functions of Maxima of Gaussian Processes. *Th. Prob. Appl.* **26** 687–705.

- PITERBARG, V. I., 1996a. *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- PITERBARG, V. I., 1996b. Rice's Method for Large Excursions of Gaussian Random Fields. Technical Report No. 478, University of North Carolina. Translation of Rice's method for Gaussian random fields. *Fundamental and Applied Mathematics* **2** 187–204. (In Russian).
- PITERBARG, V. I. and TYURIN, Y. N., 1993. Testing for homogeneity of two multivariate samples: a Gaussian field on a sphere. *Mathematical Methods of Statistics* **2** 147–164.
- RICE, S. O., 1944–1945. Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell System Tech. J.* **23** 282–332; **24** 45–156.
- SIEGMUND, D. O. and WORSLEY, K. J., 1995. Testing for a signal with unknown location and scale in a stationary Gaussian random field. *Annals of Stat.* **23** 608–639.
- SUN, J., 1991. Significance levels in exploratory projection pursuit. *Biometrika* **78** 759–769.
- SUN, J., 1993. Tail Probabilities of the Maxima of Gaussian Random Fields. *Ann. Prob.* **21** 34–71.
- TALAGRAND, M., 1996. Majorising measures: the general chaining. *Annals of Probab.* **24** 1049–1103.
- WORSLEY, K. J., 1994. Local maxima and the expected Euler characteristic of excursion sets of χ^2 , F and t fields. *Adv. in Appl. Probab.* **26** 13–42.
- WORSLEY, K. J., 1995a. Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images. *Annals of Stat.* **23** 640–669.
- WORSLEY, K. J., 1995b. Boundary corrections for the expected Euler characteristic of excursion sets of random fields, with an application to astrophysics. *Adv. Appl. Probab.* **27** 943–959.
- WORSLEY, K. J., 1997. The geometry of random images. *Chance* **9(1)** 27–40.
- WORSLEY, K. J., EVANS, A. C., MARRET, S. and NEELIN, P., 1992. A Three-Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain. *Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism* **12** 900–918.
- WSCHEBOR, M., 1985. Surfaces aléatoires. Mesure géométrique des ensembles de niveau. *Lecture Notes in Mathematics*, **1147**, Springer-Verlag.

Chapitre 4

Implémentation Splus des méthodes de Rice

4.1 Introduction

Soit $X = \{X(t); t \in S\}$ un champ aléatoire gaussien sur S un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$. L'évaluation de la queue de probabilité :

$$P[\max_{t \in S} X(t) \geq u] \text{ ou } P[\max_{t \in S} |X(t)| \geq u] \text{ pour } u \text{ fixé dans } \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

est un point crucial dans de nombreux problèmes statistiques. Pour quelques exemples on pourra consulter, en Statistique Paramétrique, Davies (1977, 1987) et Dacunha-Castelle et Gassiat (1997, 1999); en Statistique Non Paramétrique, Sun (1991), Chaudhuri and Sengupta (1993), Piterbarg and Tyurin (1993), Park and Sun (1998) et Chaudhuri and Marron (1999, 2000); en traitement de l'image, Worsley and al. (1992) et Adler (2000); en génétique, Cierco (1998) et Cierco and Azaïs (2000). Dans la plupart des cas la queue de probabilité (4.1) apparaît dans des problèmes de tests. Deux principales méthodes classiques peuvent être utilisées pour évaluer (4.1) :

- (M1) Lorsque le processus est suffisamment régulier on peut travailler avec la borne de Davies lorsque $N = 1$ (voir Davies (1977, 1987)) ou bien avec l'équivalent asymptotique donné dans Adler (1981) et initialement dû à Belyaev et Piterbarg (1972) lorsque $N > 1$. Cet équivalent asymptotique est le premier terme du développement asymptotique de (4.1) quand $u \rightarrow +\infty$. La borne de Davies donne une borne majorante à (4.1) formée de deux termes d'approximation. Lorsque $N = 1$ le premier

terme d'approximation de la borne de Davies est le premier terme du développement asymptotique de (4.1) quand $u \rightarrow +\infty$. Lorsque le processus n'est pas suffisamment régulier, il faut travailler avec les résultats discutés dans le chapitre d'Introduction.

(M2) Des méthodes de type Monte-Carlo peuvent également être utilisées pour évaluer (4.1) par simulations successives. Les trajectoires du champ aléatoire X peuvent être simulées selon des méthodes classiques décrites par exemple dans Azaïs (1990) ou Dietrich and Newsam (1997).

Le Tableau 1 donne des résultats obtenus par ces méthodes dans le cadre d'un problème de détection de gènes influençant un trait quantitatif mais de manière trop faible pour être détecté qualitativement. De tels gènes sont appelés QTL. Plus précisément le problème d'intérêt est de tester l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, il n'y a pas de QTL sur le chromosome de longueur T , contre l'alternative $\mathcal{H}_1$, il y a un QTL à la position t_0 sur le chromosome de longueur T ayant un effet égal à $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ (n étant le nombre d'observations indépendantes du chromosome sur différents individus). Un tel problème a d'abord été introduit et étudié par Lander et Boststein (1989) puis généralisé par Feingold, Brown et Siegmund (1993), Cierco (1998) et Cierco et Azaïs (2000). Cierco (1998) a montré que le processus du test de détection converge en loi vers un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous $\mathcal{H}_0$ et vers le même processus d'Ornstein-Uhlenbeck décentré par une fonction moyenne sous $\mathcal{H}_1$. L'étude détaillée de Cierco et Azaïs (2000) propose de travailler avec la version lissée du processus de test de détection dont la limite en loi est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck lissé X^ϵ centré sous $\mathcal{H}_0$ et décentré sous $\mathcal{H}_1$ par la fonction moyenne :

$$m^\epsilon(t) = \frac{\delta}{2} \{ \exp[2(-t_0 + \epsilon^2 + t)] \Phi\left(\frac{t_0 - 2\epsilon^2 - t}{\epsilon}\right) + \exp[2(t_0 + \epsilon^2 - t)] \bar{\Phi}\left(\frac{t_0 + 2\epsilon^2 - t}{\epsilon}\right) \}.$$

Sa fonction de covariance r^ϵ est donnée par :

$$r^\epsilon(t) = \exp(2(2\epsilon^2 - t)) \Phi\left(\frac{t - 4\epsilon^2}{(2\epsilon^2)^{1/2}}\right) + \exp(2(2\epsilon^2 + t)) \bar{\Phi}\left(\frac{t + 4\epsilon^2}{(2\epsilon^2)^{1/2}}\right).$$

Ils proposent également une valeur optimale pour le paramètre de lissage ϵ . La loi asymptotique de la statistique de test est alors $\sup_{t \in [0, T]} |X^\epsilon(t)|$. La Tableau 1 résume quelques résultats (valeur seuil et puissance asymptotiques au niveau α) obtenus par **(M1)** et **(M2)** pour ce problème de test. Le Tableau 1 donne également quelques résultats obtenus par **(M1)** et **(M2)** pour l'évaluation de la queue de probabilité (4.1) lorsque X est un processus gaussien stationnaire centré sur $[0, T]$ avec une fonction de covariance donnée par $\exp(-t^2/2)$ et lorsque X est champ aléatoire gaussien centré sur $[0, T]^2$ dont la fonction de covariance est donnée par :

$$r(s, t) = \exp(-5\|s - t\|_2^2).$$

Valeur absolue du processus d'Ornstein-Uhlenbeck lissé avec $T = 1$			
	Valeurs critiques à 5%		Puissance à 5%
$\epsilon^2 = 10^{-2}$	(M1)	≤ 2.2912	(M2) 0.7137 ± 0.0088
	(Prog-S)	2.2813-2.2870	(Prog-S) 0.6983-0.7125
$\epsilon^2 = 10^{-3}$	(M1)	≤ 2.6444	(M2) 0.7253 ± 0.0087
	(Prog-S)	2.5989-2.6366	(Prog-S) 0.6906-0.8213
Processus gaussien stationnaire sur $[0, T]$ de fonction de covariance $\exp(-t^2/2)$			
	$P[\max_{t \in [0, T]} X(t) \leq 1]$		$P[\max_{t \in [0, T]} X(t) \leq 2]$
T=1	(M1)	≥ 0.7448	(M1) ≥ 0.9557
	(Prog-S)	0.7459 ($\leq 10^{-4}$)	(Prog-S) 0.9558 ($\leq 10^{-4}$)
T=4	(M1)	≥ 0.4552	(M1) ≥ 0.8911
	(Prog-S)	0.5085 ($2.6 \cdot 10^{-4}$)	(Prog-S) 0.8933 ($\leq 10^{-4}$)
Champ gaussien stationnaire sur $[0, T]^2$ de fonction de covariance $\exp(-5\ s - t\ _2^2)$			
	$P[\max_{t \in [0, T]^2} X(t) \leq 2]$		$P[\max_{t \in [0, T]^2} X(t) \leq 3]$
T=1	(M1)	0.8281	(M1) 0.9788
	(Prog-S)	0.6692	(Prog-S) 0.9663
T=2	(M1)	0.3126	(M1) 0.9154
	(Prog-S)	0.0174	(Prog-S) 0.8916

Tableau 1 : Comparaison des méthodes classiques (M1) et (M2) avec les méthodes de Rice décrites dans ce chapitre (Prog-S). Dans le premier cas les valeurs critiques ont d'abord été recherchées par la méthode de Davies (M1). Les puissances ont ensuite été calculées à partir de la borne inférieure obtenue par le programme Splus pour la valeur critique. Elles ont été calculées, pour $\delta = 6$ et $t_0 = 0.4$, par une méthode de Monte-Carlo en simulant 10^4 trajectoires du processus d'Ornstein-Uhlenbeck puis en les lisant par des méthodes classiques (cf. Cierco (1996) et Azaïs et Cierco (2001)). L'intervalle de confiance correspondant à 95% est donné. Les résultats obtenus par le programme S-plus sont également donnés. Ils permettent d'avoir un calcul de l'erreur commise. Dans le second cas nous nous sommes spécialement intéressé à un calcul de la fonction de répartition tout d'abord par une méthode de Davies puis par nos méthodes de Rice pour lesquelles nous avons noté entre parenthèses le calcul de l'erreur commise sur le résultat. Dans le cas du champ gaussien stationnaire notre programme donne à priori un calcul plus précis de la fonction de répartition que l'équivalent asymptotique initialement donné par Adler (M1) puisqu'il prend en compte les trois premiers termes du développement asymptotique et non pas seulement le premier. On remarque que dans le cas du champ gaussien il est absolument nécessaire d'avoir un déve-

loppement asymptotique suffisamment long pour espérer obtenir suffisamment de précision sur le résultat.

Les exemples développés dans le Tableau 1 illustrent un inconvénient majeur dans l'utilisation pratique des approximations classiques **(M1)** et **(M2)** pour (4.1) : leur manque de précision et l'absence d'une estimation précise de l'erreur. Dans ce chapitre nous proposons un programme S-plus qui présente trois avantages importants. Premièrement, nous proposons et implémentons une méthode plus précise que les méthodes classiques avec un coût en temps de calcul tout à fait raisonnable. Deuxièmement, notre programme donne une estimation précise de l'erreur commise sur le résultat. Troisièmement, même des utilisateurs non spécialistes des champs aléatoires peuvent se servir de notre programme pour obtenir des résultats précis dans l'approximation de la queue de probabilité (4.1) ou dans l'approximation de valeurs seuils relatives à (4.1). Notre approche est la méthode de Rice qui est généralement plus précise que les autres méthodes pour évaluer (4.1). Elle a été introduite et étudiée spécialement par Kac (1943), Rice (1944-1945), Cramer and Leadbetter (1967), Wschebor (1985), Azaïs et Wschebor (1997) et Azaïs and al. (1999) pour les processus aléatoires et étendue aux champs aléatoires par Brillinger (1972), Adler (1981), Piterbarg (1996), Delmas (1998) et Azaïs et Delmas (2000). Pour construire notre programme dans un cadre assez général, nous avons généralisé les méthodes et les résultats donnés dans Azaïs and al. (1999) pour un processus gaussien stationnaire au cas non stationnaire et au cas de la valeur absolue d'un processus gaussien. Nous obtenons, pour l'approximation de (4.1) et l'estimation de l'erreur, des formules précises relativement bien adaptées au calcul numérique mais qui sont soit impossibles soit trop difficiles à calculer sans implémentation informatique. Une analyse plus détaillée de notre méthode est donnée dans la section 2. Dans la section 3 notre programme S-plus est développé. Le principal objectif est d'étudier des statistiques de test basées sur les variables aléatoires

$$\max_{t \in S} X(t) \text{ ou } \max_{t \in S} |X(t)|.$$

Notre programme donne donc une approximation pour la queue de probabilité (4.1) pour tout $u > 0$ et pour la valeur seuil relative à (4.1) à tout niveau souhaité. Dans chaque cas une estimation de l'erreur commise sur le résultat est donnée. Notons que notre programme nécessite uniquement la donnée de la moyenne et de la fonction de covariance du processus (ou du champ) pour fonctionner et obtenir des résultats. Dans le Tableau 1 nous donnons également quelques résultats obtenus par notre programme S-plus pour les trois exemples explicités précédemment. Ces exemples démontrent la performance de notre programme S-plus.

4.2 Méthode de Rice

Soit X un processus gaussien sur $[0, T]$ à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$. Notons :

$$\begin{aligned} U_u^X[0, T] &= \#\{t \in [0, T] : X(t) = u, X'(t) > 0\} \\ D_{-u}^X[0, T] &= \#\{t \in [0, T] : X(t) = -u, X'(t) < 0\}. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$P\left[\sup_{t \in [0, T]} X(t) > u\right] = P[X(0) > u] + P[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}} \geq 1] \quad (4.2)$$

$$P\left[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > u\right] = P[|X(0)| > u] + P[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T]) \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}} \geq 1] \quad (4.3)$$

De plus si ξ est une variable aléatoire positive alors :

$$E[\xi] - \frac{1}{2}E[\xi(\xi - 1)] \leq P[\xi \geq 1] \leq E[\xi].$$

Notons $E[\xi^{[2]}]$ le deuxième moment factoriel $E[\xi(\xi - 1)]$ de ξ . En remarquant que :

$$\begin{aligned} E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}^{[2]}] &\leq E[U_u^X[0, T]^{[2]}] \\ E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T]) \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}^{[2]}] &\leq E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T])^{[2]}], \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} P[X(0) > u] + E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}] - \frac{1}{2}E[U_u^X[0, T]^{[2]}] \\ \leq P[\sup_{t \in [0, T]} X(t) > u] \leq \\ P[X(0) > u] + E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Et :

$$\begin{aligned} P[|X(0)| > u] + E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T]) \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}] - \frac{1}{2}E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T])^{[2]}] \\ \leq P[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > u] \leq \\ P[|X(0)| > u] + E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T]) \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De plus, sous certaines conditions, Azaïs et Wschebor (1997) ont montré la convergence de la série de Rice :

$$P\left[\sup_{t \in [0, T]} X(t) > u\right] = P[X(0) > u] + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\tilde{\nu}_m(u, T)}{m!},$$

et la propriété enveloppante de cette série pour $n > 0$; connues depuis les travaux de Rice (1944-1945) :

$$S_{2n} \leq P[\sup_{t \in [0, T]} X(t) > u] \leq S_{2n-1},$$

où $S_n = P[X(0) > u] + \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \frac{\dot{\nu}_m(u, T)}{m!}$ et $\dot{\nu}_m(u, T)$ est le m -ième moment factoriel $E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}^{[m]}]$.

En utilisant cette dernière propriété pour X (resp. $|X|$) on en déduit une majoration de l'erreur commise lorsque l'on approche $P[\sup_{t \in [0, T]} X(t) > u]$ (resp. $P[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > u]$) par le terme minorant de l'inégalité (4.4) (resp. (4.5)) :

$$\begin{aligned} & |P[\sup_{t \in [0, T]} X(t) > u] - P[X(0) > u] - E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}] + \frac{1}{2} E[U_u^X[0, T]^{[2]}]| \\ & \leq \frac{E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) > u\}}^{[2]}]}{2} + \frac{E[U_u^X[0, T]^{[3]}]}{6}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Et :

$$\begin{aligned} & |P[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > u] - P[X(0) > u] - E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T]) \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}] + \frac{1}{2} E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T])^{[2]}]| \\ & \leq \frac{E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T]) \mathbb{I}_{\{|X(0)| > u\}}^{[2]}]}{2} + \frac{E[(U_u^X[0, T] + D_{-u}^X[0, T])^{[3]}]}{6}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.1 Cas stationnaire

Soit X un processus gaussien stationnaire centré de variance un à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$ tel que :

$$(X(t), X(s), X'(t), X'(s)) \text{ est non dégénéré } \forall t \neq s, (t, s) \in [0, T]^2.$$

Azaïs et al. (1999) ont établi une expression très simple et bien adaptée au calcul numérique pour $E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}]$ et $E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$. Nous reprenons leur méthode et leurs démonstrations pour obtenir des résultats analogues pour $E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}]$ et $E[U_u^X[0, T] D_{-u}^X[0, T]]$. Puisque X et $(-X)$ ont même loi,

$$\begin{aligned} E[D_{-u}^X[0, T] \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}] &= E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}] \\ E[D_{-u}^X[0, T]^{[2]}] &= E[U_u^X[0, T]^{[2]}]. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, dans le cas stationnaire, les trois premiers termes d'approximation du développement asymptotique de $P[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \geq u]$ quand $u \rightarrow +\infty$. Ces trois premier termes présentent l'avantage

d'être très simples et par conséquent très bien adaptés au calcul numérique. Nous donnons maintenant les expressions obtenues et rappelons celles obtenues dans Azaïs et al. (1999). Soit r la fonction de covariance du processus. Nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
r &= r(t) ; r' = r'(t) ; \lambda_2 = \text{Var} X'(t) = -r''(0) \text{ et pour } x \geq 0, \Psi(x) = \int_0^x \varphi(y) dy = \Phi(x) - \frac{1}{2}. \\
\sigma^2 &= \text{Var}[X'(t)/X(0), X(t)] = \lambda_2 - \frac{r'^2}{1-r^2}; \rho = \text{corr}[X'(t), X'(0)/X(t), X(0)] = \frac{-r''(t)(1-r^2)-rr'^2}{\lambda_2(1-r^2)-r'^2}; \\
k &= \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}. \text{ Pour } b \geq 0, \sigma^2 J_{11}(b, \rho) = T_1(b, \rho, \sigma^2) + T_2(b, \rho, \sigma^2) + T_3(b, \rho, \sigma^2) \text{ avec :} \\
T_1(b, \rho, \sigma^2) &= \sigma^2 \sqrt{1-\rho^2} \varphi(b) \varphi(kb); T_2(b, \rho, \sigma^2) = (\sigma^2 \rho - \sigma^2 b^2) [\frac{1}{\pi} \arctan(k) - 2 \int_0^b \varphi(x) \Psi(kx) dx]; \\
T_3(b, \rho, \sigma^2) &= 2b\sigma^2 \Psi(kb) \varphi(b).
\end{aligned}$$

Alors :

Cas stationnaire	
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) > u\}}]$	$F(r, r') = \varphi(u) \int_0^T \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{2\pi}} \bar{\Phi}[\frac{u}{\sigma} \sqrt{\lambda_2} \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}] + \frac{r'}{\sqrt{1-r^2}} \varphi(u \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}) \bar{\Phi}[-\frac{ur'}{\sigma(1+r)}] dt$
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}]$	$\frac{T\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \exp(-\frac{u^2}{2}) - F(r, r')$
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{ X(0) \leq u\}}]$	$\frac{T\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \exp(-\frac{u^2}{2}) - F(r, r') - F(-r, -r')$
$E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$	$2 \int_0^T (T-t) \sigma^2 J_{11}(-\frac{r'u}{\sigma(1+r)}, \rho) \frac{\varphi^2(\frac{u}{\sqrt{1+r}})}{\sqrt{1-r^2}} dt$
$E[U_u^X[0, T] D_u^X[0, T]]$	$2 \int_0^T (T-t) \sigma^2 J_{11}(-\frac{r'u}{\sigma(1-r)}, -\rho) \frac{\varphi^2(\frac{u}{\sqrt{1-r}})}{\sqrt{1-r^2}} dt$

Programmation informatique

Des instabilités numériques apparaissent dans les expressions données dans le tableau précédent lorsque $t \downarrow 0$ dans les intégrands $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ et $I_4(t)$ relatifs à $F(r, r')$, $F(-r, -r')$, $E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$ et $E[U_u^X[0, T] D_u^X[0, T]]$. Des développements limités autour de 0 de ces intégrands montrent que leur équivalent est nul. Nous avons adopté une méthode de Simpson pour calculer ces expressions.

4.2.2 Cas non stationnaire

Soit X un processus gaussien non stationnaire à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$ tel que :

$$(X(t), X(s), X'(t), X'(s)) \text{ est non dégénéré } \forall t \neq s, (t, s) \in [0, T]^2. \quad (4.8)$$

Nous généralisons ici les méthodes et les démonstrations du cas stationnaire au cas non stationnaire afin d'obtenir dans ce cas là également les trois premier termes du développement asymptotique de

$P[\sup_{t \in [0, T]} X(t) \geq u]$ et $P[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \geq u]$ quand $u \rightarrow +\infty$ sous une forme adaptée au calcul numérique. Nous distinguons trois cas : le cas non stationnaire centré de variance un, le cas non stationnaire décentré de variance un, le cas non stationnaire général. Alors que dans le cas non stationnaire centré, X et $(-X)$ ont même loi et $E[D_{-u}^X[0, T] \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}] = E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{|X(0)| \leq u\}}]$ et $E[D_{-u}^X[0, T]^{[2]}] = E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$, ceci n'est plus vrai lorsque X est décentré. Soit r la fonction de covariance du processus et m sa fonction moyenne. Nous adoptons les notations suivantes :

$$r_{1,0}(t, s) = \frac{\partial}{\partial \alpha} r(\alpha, \beta) \Big|_{(t, s)} ; \quad r_{1,1}(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} r(\alpha, \beta) \Big|_{(t, s)}$$

$$r = r(s, t); \quad r_{0t} = r(0, t); \quad r_t = r(t, t); \quad \text{et } m_t = m(t); \quad \forall t \in [0, T].$$

$$v^2 = \text{Var}[X'(t)/X(0), X(t)] = r_{1,1}(t, t) + \frac{-r_t r_{1,0}^2(t, 0) + 2r_{0t} r_{1,0}(t, t) r_{1,0}(t, 0) - r_{0t} r_{1,0}^2(t, t)}{r_{0t} r_t - r_{0t}^2}.$$

$$\gamma_1(t) = \frac{r_{1,0}(t, 0) r_t - r_{1,0}(t, t) r_{0t}}{r_{0t} r_t - r_{0t}^2} \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = \frac{r_{1,0}(t, t) r_{0t} - r_{1,0}(t, 0) r_{0t}}{r_{0t} r_t - r_{0t}^2}.$$

$$M(m(t), m'(t)) = m'(t) + \frac{r_{1,0}(t, t)}{r_t} (u - m(t)) \quad \text{et} \quad V(t) = r_{1,1}(t, t) - \frac{r_{1,0}^2(t, t)}{r_t}.$$

$$J_{11}(a, b, \rho) = (\rho + ab) J_{00} + \sqrt{1 - \rho^2} \varphi(b) \varphi\left(\frac{-a + \rho b}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) + a \varphi(b) \bar{\Phi}\left[\frac{-a + \rho b}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] + b \varphi(a) \bar{\Phi}\left[\frac{-b + \rho a}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right],$$

avec pour (X, Y) couple de variables aléatoires gaussiennes centrées de variance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} J_{00} &= P[X > a, Y > b] = \int_{\Phi(-a)}^1 \Phi\left[\frac{b + \rho \Phi^{-1}(y)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] dy = \int_{\Phi(-b)}^1 \Phi\left[\frac{a + \rho \Phi^{-1}(y)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] dy \\ &= \Phi(a) \Phi(b) + \int_0^\rho \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - z^2}} \exp\left[-\frac{(a^2 + b^2 - 2zab)}{2(1 - z^2)}\right] dz \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\sqrt{\frac{1 + \rho}{1 - \rho}}\right) - \int_0^1 (a \varphi(av) \bar{\Phi}\left[\frac{b - \rho av}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] + b \varphi(bv) \bar{\Phi}\left[\frac{a - \rho bv}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right]) dv. \end{aligned}$$

Notons que:

$$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\sqrt{\frac{1 + \rho}{1 - \rho}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \rho = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \rho$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(t, s) &= \text{Var}[X'(t)/X(t), X(s)] \\ &= r_{1,1}(t, t) - \frac{r_{1,0}(t, t)(r_s r_{1,0}(t, t) - r r_{1,0}(t, s)) + r_{1,0}(t, s)(-r r_{1,0}(t, t) + r_t r_{1,0}(t, s))}{r_t r_s - r^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Corr}[X'(t), X'(s)/X(t), X(s)] \\ &= \frac{r_{1,1}(t, s)}{\sigma(t, s) \sigma(s, t)} - \frac{r_{1,0}(t, t)(r_s r_{1,0}(s, t) - r r_{1,0}(s, s)) + r_{1,0}(t, s)(-r r_{1,0}(s, t) + r_t r_{1,0}(s, s))}{\sigma(t, s) \sigma(s, t) (r_t r_s - r^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(t, s) &= \frac{m'(t)}{\sigma(t, s)} + (u - m_t) \frac{r_s r_{1,0}(t, t) - r r_{1,0}(t, s)}{\sigma(t, s)(r_t r_s - r^2)} + (u - m_s) \frac{r_t r_{1,0}(t, s) - r r_{1,0}(t, t)}{\sigma(t, s)(r_t r_s - r^2)}. \\
b'(t, s) &= \frac{m'(t)}{\sigma(t, s)} - (u + m_t) \frac{r_s r_{1,0}(t, t) - r r_{1,0}(t, s)}{\sigma(t, s)(r_t r_s - r^2)} - (u + m_s) \frac{r_t r_{1,0}(t, s) - r r_{1,0}(t, t)}{\sigma(t, s)(r_t r_s - r^2)}. \\
m_1(t, s) &= \frac{m'(t)}{\sigma(t, s)} + (u - m_t) \frac{r_s r_{1,0}(t, t) - r r_{1,0}(t, s)}{\sigma(t, s)(r_t r_s - r^2)} - (u + m_s) \frac{r_t r_{1,0}(t, s) - r r_{1,0}(t, t)}{\sigma(t, s)(r_t r_s - r^2)}. \\
m_2(s, t) &= -\frac{m'(s)}{\sigma(s, t)} - (u - m_t) \frac{r_s r_{1,0}(s, t) - r r_{1,0}(s, s)}{\sigma(s, t)(r_t r_s - r^2)} + (u + m_s) \frac{r_t r_{1,0}(s, s) - r r_{1,0}(s, t)}{\sigma(s, t)(r_t r_s - r^2)}.
\end{aligned}$$

On donne trois expressions différentes pour J_{00} . La première s'obtient de manière évidente. La seconde a été établie par Cramer et Leadbetter (1967) et la troisième s'obtient aisément à partir des travaux de Azaïs, Cierco et Croquette (1999). Notons que les expressions précédentes se simplifient lorsque le processus est de variance un ($r(t, t) = 1$ et $r_{1,0}(t, t) = 0 \forall t \in [0, T]$) et centré ($m(t) = 0 \forall t \in [0, T]$). On donne dans les tableaux suivants les résultats obtenus.

Cas non stationnaire centré de variance un	
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) > u\}}]$	$ \begin{aligned} &F(r(0, t), r_{1,0}(t, 0)) = \\ &\varphi(u) \int_0^T \frac{\sqrt{r_{1,1}(t, t)}}{\sqrt{2\pi}} \bar{\Phi}\left[\frac{u}{v} \sqrt{r_{1,1}(t, t)} \sqrt{\frac{1 - r(0, t)}{1 + r(0, t)}}\right] \\ &+ \frac{r_{1,0}(t, 0)}{\sqrt{1 - r^2(0, t)}} \varphi\left(u \sqrt{\frac{1 - r(0, t)}{1 + r(0, t)}}\right) \bar{\Phi}\left[-\frac{u r_{1,0}(t, 0)}{v(1 + r(0, t))}\right] dt \end{aligned} $
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \leq u\}}]$	$ \frac{\int_0^T \sqrt{r_{1,1}(t, t)} dt}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) - F(r(0, t), r_{1,0}(t, 0)) $
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{ X(0) \leq u\}}]$	$ \frac{\int_0^T \sqrt{r_{1,1}(t, t)} dt}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) - F(r(0, t), r_{1,0}(t, 0)) - F(-r(0, t), -r_{1,0}(t, 0)) $
$E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$	$ \int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(b(t, s), b(s, t), \rho) \frac{\varphi^2(u/(\sqrt{1 + r(s, t)}))}{\sqrt{1 - r^2(s, t)}} ds dt $
$E[U_u^X[0, T] D_u^X[0, T]]$	$ \int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(m_1(t, s), m_1(s, t), -\rho) \frac{\varphi^2(u/(\sqrt{1 - r(s, t)}))}{\sqrt{1 - r^2(s, t)}} dt $

Cas non stationnaire décentré de variance un	
$E[U_u^X[0, T]]$	$G(m(t), m'(t)) = \int_0^T \varphi(u - m(t)) [m'(t) \Phi\left(\frac{m'(t)}{\sqrt{r_{1,1}(t, t)}}\right) + \sqrt{r_{1,1}(t, t)} \varphi\left(\frac{m'(t)}{\sqrt{r_{1,1}(t, t)}}\right)] dt$
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) > u\}}]$	$\begin{aligned} & F(r(0, t), r_{1,0}(t, 0), m(0), m(t), m'(t)) = \\ & \int_0^T \sqrt{r_{1,1}(t, t)} \varphi(u - m(t)) \varphi\left(\frac{m'(t)}{\sqrt{r_{1,1}(t, t)}}\right) \\ & \Phi\left[\frac{r_{1,1}(t, t)[u - m(0) - r(u - m(t))] + m'(t)r_{1,0}(t, 0)}{v\sqrt{1 - r^2(0, t)}\sqrt{r_{1,1}(t, t)}}\right] dt \\ & + \int_0^T \frac{r_{1,0}(t, 0)}{\sqrt{1 - r^2(0, t)}} \varphi(u - m(t)) \varphi\left(\frac{u - m(0) - r(0, t)(u - m(t))}{\sqrt{1 - r^2(0, t)}}\right) \\ & \Phi\left[\frac{m'(t)(1 - r^2(0, t)) + r_{1,0}(t, 0)[u - m(0) - r(0, t)(u - m(t))]}{v(1 - r^2(0, t))}\right] dt \\ & + \int_0^T m'(t) \varphi(u - m(t)) \times \\ & \int_{\Phi\left(\frac{u - m(0) - r(0, t)(u - m(t))}{\sqrt{1 - r^2(0, t)}}\right)}^1 \Phi\left(\frac{m'(t)\sqrt{1 - r^2(0, t)} + r_{1,0}(t, 0)\Phi^{-1}(y)}{v\sqrt{1 - r^2(0, t)}}\right) dy. \end{aligned}$
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{ X(0) \leq u\}}]$	$G(m(t), m'(t)) - F(r(0, t), r_{1,0}(t, 0), m(0), m(t), m'(t)) - F(-r(0, t), -r_{1,0}(t, 0), -m(0), m(t), m'(t))$
$E[D_{-u}^X[0, T] \mathbb{I}_{\{ X(0) \leq u\}}]$	$G(-m(t), -m'(t)) - F(-r(0, t), -r_{1,0}(t, 0), m(0), -m(t), -m'(t)) - F(r(0, t), r_{1,0}(t, 0), -m(0), -m(t), -m'(t))$
$E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$	$\frac{\int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(b(t, s), b(s, t), \rho) \varphi(u - m(s)) \varphi((u - m(t) - r(u - m(s)))/(\sqrt{1 - r^2}))}{\sqrt{1 - r^2}} ds dt$
$E[D_{-u}^X[0, T]^{[2]}]$	$\frac{\int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(-b'(t, s), -b'(s, t), \rho) \varphi(u + m(s)) \varphi((u + m(t) - r(u + m(s)))/(\sqrt{1 - r^2}))}{\sqrt{1 - r^2}} ds dt$
$E[U_u^X[0, T] D_{-u}^X[0, T]]$	$\frac{\int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(m_1(t, s), m_2(s, t), -\rho) \varphi(u + m(s)) \varphi((u - m(t) + r(u + m(s)))/(\sqrt{1 - r^2}))}{\sqrt{1 - r^2(s, t)}} ds dt$

Cas non stationnaire général	
$E[U_u^X[0, T]]$	$G(m(t), m'(t)) = \int_0^T \frac{\varphi(\frac{u-m(t)}{\sqrt{r_t}})}{\sqrt{r_t}} [M(m(t), m'(t)) \Phi[\frac{M(m(t), m'(t))}{\sqrt{V(t)}}] + \sqrt{V(t)} \varphi(\frac{M(m(t), m'(t))}{\sqrt{V(t)}})] dt$
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) > u\}}]$	$\begin{aligned} & F(r_{0t}, \gamma_1(t), m(0), m(t), m'(t)) = \\ & \int_0^T \varphi(\frac{u-m(t)}{\sqrt{r_t}}) \left\{ \frac{\sqrt{r_t r_{1,1}(t, t) - r_{1,0}^2(t, t)}}{r_t} \varphi\left(\sqrt{1 - \frac{\gamma_1^2(t)(r_0 r_t - r_{0t}^2)}{r_t r_{1,1}(t, t) - r_{1,0}^2(t, t)}}\right) \right. \\ & \times \frac{(u - m_t)(\gamma_2(t) + \frac{r_{0t}}{r_t} \gamma_1(t)) + m'(t)}{v} \bar{\Phi}\left[\sqrt{\frac{r_t r_{1,1}(t, t) - r_{1,0}^2(t, t)}{v^2(r_0 r_t - r_{0t}^2)}}\right] \\ & (u - m_0 - \frac{r_{0t}}{r_t}(u - m_t) + \frac{(r_0 r_t - r_{0t}^2)\gamma_1(t)}{r_t r_{1,1}(t, t) - r_{1,0}^2(t, t)} \\ & [(u - m_t)(\gamma_2(t) + \frac{r_{0t}}{r_t} \gamma_1(t)) + m'(t)]) \\ & + \frac{\gamma_1(t)\sqrt{r_0 r_t - r_{0t}^2}}{r_t} \varphi\left[\sqrt{\frac{r_t}{r_0 r_t - r_{0t}^2}}(u - m_0 - \frac{r_{0t}}{r_t}(u - m_t))\right] \\ & \times \Phi\left(\frac{m'(t) + \gamma_1(t)(u - m_0) + \gamma_2(t)(u - m_t)}{\sqrt{r_t}}\right) + \\ & \frac{[m'(t) + (u - m_t)(\gamma_2(t) + \frac{r_{0t}}{r_t} \gamma_1(t))]}{\sqrt{r_t}} \times \int_0^1 \Phi\left(\sqrt{\frac{r_t}{r_0 r_t - r_{0t}^2}}(u - m_0 - \frac{r_{0t}}{r_t}(u - m_t))\right) \\ & \Phi\left[\frac{m'(t) + \gamma_1(t)\Phi^{-1}(z)\sqrt{\frac{r_0 r_t - r_{0t}^2}{r_t}} + (u - m_t)[\gamma_2(t) + \frac{r_{0t}}{r_t} \gamma_1(t)]}{v}\right] dz dt \Big\} \end{aligned}$
$E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{ X(0) \leq u\}}]$	$G(m(t), m'(t)) - F(r_{0t}, \gamma_1(t), m(0), m(t), m'(t)) - F(-r_{0t}, -\gamma_1(t), -m(0), m(t), m'(t))$
$E[D_{-u}^X[0, T] \mathbb{I}_{\{ X(0) \leq u\}}]$	$G(-m(t), -m'(t)) - F(-r_{0t}, -\gamma_1(t), m(0), -m(t), -m'(t)) - F(r_{0t}, \gamma_1(t), -m(0), -m(t), -m'(t))$
$E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$	$\frac{\int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(b(t, s), b(s, t), \rho) \varphi(\frac{u-m_s}{\sqrt{r_s}}) \varphi(\sqrt{\frac{r_s}{r_s r_t - r^2}}(u - m_t - \frac{r}{r_s}(u - m_s)))}{\sqrt{r_t r_s - r^2}} ds dt$
$E[D_{-u}^X[0, T]^{[2]}]$	$\frac{\int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(-b'(t, s), -b'(s, t), \rho) \varphi(\frac{u+m_s}{\sqrt{r_s}}) \varphi(\sqrt{\frac{r_s}{r_s r_t - r^2}}(u + m_t - \frac{r}{r_s}(u + m_s)))}{\sqrt{r_s r_t - r^2}} ds dt$
$E[U_u^X[0, T] D_{-u}^X[0, T]]$	$\frac{\int_0^T \int_0^T \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(m_1(t, s), m_2(s, t), -\rho) \varphi(\frac{u+m_s}{\sqrt{r_s}}) \varphi(\sqrt{\frac{r_s}{r_s r_t - r^2}}(u - m_t + \frac{r}{r_s}(u + m_s)))}{\sqrt{r_s r_t - r^2}} ds dt$

Programmation informatique

Des instabilités numériques apparaissent dans le calcul des intégrands relatifs à $E[U_u^X[0, T]\mathbb{I}_{\{X(0) > u\}}]$, $E[U_u^X[0, T]\mathbb{I}_{\{|X(0)| > u\}}]$ et $E[D_{-u}^X[0, T]\mathbb{I}_{\{|X(0)| > u\}}]$ lorsque $t \downarrow 0$. Des développements limités de ces intégrands en 0 montrent que leur équivalent est nul. Dans le cas non stationnaire décentré de variance un et le cas non stationnaire général, le calcul de ces intégrands nécessite le calcul d'une intégrale simple dont la borne inférieure dépend de t et la borne supérieure est 1. Par un changement de variables évident on se ramène à une intégrale sur $(0, 1)$ et on vectorise le calcul de l'intégrand en t en utilisant la méthode de Simpson pour le calcul de l'intégrale. L'intégration de cet intégrand sur $(0, T)$ se fait également par la méthode de Simpson. Le calcul des moments d'ordre 2 $E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$, $E[D_{-u}^X[0, T]^{[2]}]$ et $E[U_u^X[0, T]D_{-u}^X[0, T]]$ nécessite le calcul d'une intégrale double sur $[0, T]^2$ d'un intégrand fonction de $(t, s) \in [0, T]^2$. Cet intégrand est fonction de $J_{11}(a(t, s), b(t, s), \rho)$ qu'il s'agit de calculer pour différents couples (t, s) . Pour cela il faut calculer une intégrale simple. Ici encore on choisit l'expression de $J_{11}(a(t, s), b(t, s), \rho)$ pour laquelle les bornes de cette intégrale sont fixes et ne dépendent de (t, s) . On vectorise alors le calcul de l'intégrale en (t, s) (ceci nous évite d'avoir à calculer une intégrale à l'intérieur d'une boucle sur (t, s)). Le calcul de cette intégrale se fait par la méthode de Simpson. Des développements limités autour de la diagonale montrent que l'intégrand est nul sur la diagonale. De plus pour $E[U_u^X[0, T]D_{-u}^X[0, T]]$ dans le cas non stationnaire centré de variance un et pour $E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$ et $E[D_{-u}^X[0, T]^{[2]}]$ dans les trois cas, les intégrands sont symétriques en (t, s) . On les calcule donc uniquement pour $t < s$ et on les intègre sur $[0, T]^2$ par une méthode de Simpson en dimension 2 qui prend en compte la symétrie et la nullité sur la diagonale (cette méthode est appelée Simpson-sym). Les autres intégrands (pour $E[U_u^X[0, T]D_{-u}^X[0, T]]$ dans les cas non stationnaire décentré de variance un et non stationnaire général) ne présentent pas cette propriété de symétrie. On les calcule de la même façon pour $t < s$ puis pour $s > t$. On les additionne puis on les intègre sur $[0, T]^2$ par la méthode Simpson-sym. Le résultat est ensuite divisé par deux.

4.2.3 Estimation de l'erreur

Les résultats présentés dans les deux paragraphes précédents pour des processus gaussiens stationnaires et non stationnaires nous permettent d'obtenir un encadrement pour la queue de probabilité (4.1). Cet encadrement nous permet d'avoir un contrôle sur l'erreur commise dans l'approximation de (4.1). Cependant on peut penser que la borne inférieure de cet encadrement obtenue à partir des moments factoriels d'ordre un et d'ordre deux de $U_u^X[0, T]$ et $D_{-u}^X[0, T]$ est plus précise que la borne supérieure qui ne prend

en compte que les moments d'ordre un. En effet on sait par exemple que dans le cas stationnaire,

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \frac{E[U_u^X[0, T]^{[2]}]}{E[U_u^X[0, T]]} = o(e^{-\frac{u^2}{2}\delta}) \text{ quand } u \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent l'erreur commise en utilisant l'approximation basée uniquement sur le moment d'ordre un est exponentiellement faible par rapport à ce moment. Si les ordres de grandeur asymptotiques des moments factoriels décroissent ainsi lorsque leur ordre augmente, les erreurs commises dans l'approximation de (4.1) seront d'autant plus faibles que cette approximation sera basée sur un plus grand nombre de moments factoriels. Afin de conforter de telles conjectures une étude est actuellement en cours sur l'ordre de grandeur relative des différents moments factoriels entre eux. Ainsi, afin d'améliorer la précision de nos résultats, nous voudrions pouvoir obtenir une estimation des bornes majorantes données dans (4.6) et (4.7). Dans le cas d'un processus gaussien stationnaire des résultats numériques sont obtenus pour la borne majorante de (4.6). Une étude analogue à celle menée dans Azaïs, Cierco et Croquette (1999) montre que dans ce cas : $E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \geq u\}}^{[2]}] =$

$$\int_0^T \int_0^T \frac{\sigma(t, s) \sigma(s, t)}{2\pi \sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{u^2}{1+r}\right] \int_{\Phi[\frac{u-m(u)}{\gamma}]}^1 J_{11}(b(t, s, x(z), u), b(s, t, x(z), u), \rho) dz ds dt,$$

où

$$\begin{aligned} r &= r(s-t) ; \det \Gamma = 1 - r^2 - r(t)^2 + 2rr(t)r(s) - r(s)^2 ; \\ \sigma^2(t, s) &= -r''(0) - \frac{r'(t)^2(1-r^2) - 2r'(t)r'(s-t)(r(t)r-r(s)) + r'(s-t)^2(1-r(t)^2)}{\det \Gamma} ; \\ \rho \sigma(t, s) \sigma(s, t) &= -r''(s-t) - \\ &\frac{[r'(t)r'(s)(1-r^2) + r'(t)r'(s-t)(r(s)r-r(t)) - r'(s)r'(s-t)(r(t)r-r(s)) - r'(s-t)^2(r(t)r(s)-r)]}{\det \Gamma} ; \\ b(t, s, x(z), u) &= \\ \frac{r'(t)}{\sigma(t, s) \det \Gamma} [(1-r^2)x(z) + u(r(t)+r(s))(r-1)] &- \frac{r'(s-t)}{\sigma(t, s) \det \Gamma} [(r(t)r-r(s))x(z) + u(1-r(t)^2 + r(t)r(s)-r)] ; \\ \gamma^2 &= 1 - \frac{[r(t)^2 - 2rr(t)r(s) + r(s)^2]}{1-r^2} ; \\ m(u) &= \frac{u(r(t)+r(s))}{1+r} \text{ et } x(z) = \gamma \Phi^{-1}(z) + m(u). \end{aligned}$$

La programmation informatique de $E[U_u^X[0, T] \mathbb{I}_{\{X(0) \geq u\}}^{[2]}]$ se fait de manière analogue à celles décrites dans les deux paragraphes précédents. Une étude du troisième moment $E[U_u^X[0, T]^{[3]}]$ a été faite notamment dans Azaïs et Wschebor (2001). Elle est basée sur une méthode de Monte-Carlo et d'Importance Sampling

bien adaptée au cas où T est petit. En effet on peut montrer (cf. Azaïs et Wschebor (2000b)) que :

$$\begin{aligned} E[U_u^X[0, T]^{[3]}] &= \int_0^T \int_0^T \int_0^T A_{(t_2-t_1), (t_3-t_1)}(u, u, u) dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= 6 \int_0^T \int_0^T (T-s) A_{p,s}(u, u, u) dp ds \text{ pour } p < s, \end{aligned}$$

où $A_{p,s}(u, u, u) \approx (Const)p^4 s^4 (s-p)^4$ pour T dans un voisinage de 0. On choisit donc d'adopter une méthode d'Importance Sampling avec une densité proportionnelle à $p^4 s^4 (s-p)^4 (T-s)$. Par le changement de variables, $(p, s) \rightarrow (r = \frac{p}{s}, s)$, on peut montrer que cette densité est en fait le produit d'une loi Beta(5,5) avec une loi $S = TZ$ où Z suit une Beta(14,2). L'expression du troisième moment devient donc :

$$E[U_u^X[0, T]^{[3]}] = 6T^3 K_1^{-1} E \left[\frac{A_{TZR,TZ}(u, u, u)}{Z^{12} R^4 (1-R)^4} \right],$$

où $K_1 = 1.323 \times 10^5$. Des résultats numériques sont donnés dans le Tableau 1 de l'Introduction.

4.3 Développement du programme

L'objectif de notre programme est d'obtenir des valeurs numériques et des estimations d'erreur dans le cadre du calcul de valeurs seuils et de puissances relatives à (4.1). Il intègre les résultats obtenus et discutés dans la section précédente. On notera que la gestion des cas où la fonction de covariance stationnaire définie sur $]0, T]$ admet une limite continue en 0 est également assurée. Il inclut également la possibilité de travailler avec un champ gaussien stationnaire sur un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$. Le premier terme du développement asymptotique du théorème 3.5 établi dans le chapitre 3 a été programmé. Dans le cadre des processus gaussiens non stationnaires l'utilisateur a également la possibilité de travailler avec les processus qui apparaissent dans l'étude des tests de mélanges de distributions gaussiennes (cf. chapitre 5 suivant). Ces processus ne sont pas toujours à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition. Ils peuvent présenter un point de discontinuité t_0 tel que $X(t_0^+) = -X(t_0^-)$ p.s.. Ils méritent donc une attention particulière comme nous le verrons dans le chapitre 5 suivant.

Notre programme a été développé sous S-plus. Il est composé d'un ensemble de fonctions dont une fonction principale. Cette fonction principale fait le lien entre les différentes fonctions. Plus précisément elle permet, grâce à un système de menus, de guider l'utilisateur en fonction de ses choix et de faire appel aux fonctions désirées. En particulier elle demande à l'utilisateur de saisir au clavier les différents paramètres extérieurs du processus gaussien étudié dont notamment sa fonction de covariance et sa fonction moyenne. Un dérivateur automatique a été utilisé de façon à ce que notre programme sache calculer les dérivées successives, de la fonction de covariance et de la moyenne, nécessaires aux calculs.

Afin d'illustrer plus clairement le fonctionnement et les possibilités actuelles de notre programme, nous allons traiter et commenter un exemple.

Supposons que l'on veuille étudier le maximum sur $[0, T]$ du processus gaussien stationnaire centré dont la fonction de covariance est donnée par :

$$\Gamma(t) = (\sqrt{3}t)^{-1} \sin(\sqrt{3}t).$$

Notons que par stationnarité on peut toujours se ramener à un intervalle de la forme $[0, T]$. Le processus ainsi défini est à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait l'hypothèse (4.8). On peut donc lui appliquer nos résultats. Avant de lancer le programme principal, il est nécessaire de saisir l'expression de la fonction de covariance dans l'objet "fdcs5" lorsqu'il s'agit d'un processus gaussien stationnaire, "fdcs2" dans le cas d'un processus gaussien non stationnaire et "fdcs2" dans le cas d'un champ gaussien stationnaire. Le cas d'un champ gaussien non stationnaire n'a pas encore été traité. Dans le cas d'un processus gaussien stationnaire la fonction de covariance dépend d'une seule variable que l'on note $t1$; pour un processus gaussien non stationnaire elle dépend de deux variables notées $t1$ et $t2$ et pour un champ gaussien stationnaire elle dépend d'une seule variable multidimensionnelle dont les coordonnées sont notées $t1, t2$, etc..., TN (et ce $\forall N \leq 10$).

```
"fdcs5" <- expression((sin(sqrt(3)*t))/(sqrt(3)*t))
```

Lorsqu'on lance le programme principal par la commande `nummpcg()`, un message d'accueil présentant brièvement le programme est affiché à l'écran. Il est alors demandé à l'utilisateur s'il désire continuer.

```

      Bienvenue dans NUM-M-P-C-G !
      Calculs numeriques pour le maximum de
      processus et de champs gaussiens.
      Programme realise par
      Alain Croquette, Christine Cierco et Celine Delmas.
      -----
      Date de derniere modification : 31 Mai 2000.
      -----
      Voulez-vous continuer (oui : o / non : n)? :
```

Un message d'erreur est affiché lorsque l'utilisateur saisit une valeur qui n'est pas cohérente (dans ce cas une réponse différente de o ou n). Il lui est alors demandé de saisir à nouveau cette valeur tant que celle-ci n'est pas cohérente. Cette gestion de la cohérence des réponses données par l'utilisateur est assurée tout au long du programme. Lorsqu'il s'agira de saisir la valeur de T , le programme n'acceptera qu'un réel positif; lors de la saisie du nombre de valeurs u pour lesquelles l'utilisateur désire calculer la fonction de répartition, il n'acceptera qu'un entier etc...

```
Voulez-vous continuer (oui : o / non : n)? : ghj
Attention : NUM-M-P-C-G n'accepte pas votre choix !
Voulez-vous continuer (oui : o / non : n)? : n
Malheureusement vous quittez NUM-M-P-C-G !
```

Si l'utilisateur désire quitter le programme un message de fin est affiché. Par la suite cette possibilité de quitter le programme sera donné à l'utilisateur à chaque affichage de menu. Lorsque la réponse est o un deuxième menu est affiché à l'écran pour demander de saisir le type de processus ou de champ gaussien à étudier.

```
VOUS VOULEZ TRAVAILLER AVEC UN :
A1-Processus gaussien stationnaire.      B1-Champ gaussien stationnaire.
A2-Processus gaussien non-stationnaire.   B2-Champ gaussien non-stationnaire.
Q-Quitter.
Votre choix :
```

Dans notre cas il s'agit d'un processus gaussien stationnaire. Un troisième menu s'affiche alors afin de choisir la fonction de covariance du processus gaussien stationnaire que l'on veut étudier.

```
PROCESSUS GAUSSIEN STATIONNAIRE
SAISIE DE LA FONCTION DE COVARIANCE
1. r(t)= exp( - t/2) .
2. r(t)= 1/cosh(t) .
3. r(t)= (sin(sqrt(3) * t))/(sqrt(3) * t) .
4. Ornstein-Uhlenbeck lisse.
```

5. Autre (Objet `fdcs5`).

6. Quitter.

Votre choix :

Si la fonction de covariance à étudier ne fait pas partie de la liste affichée, l'utilisateur sélectionne la réponse 5 (il aura dû s'assurer au préalable, comme nous l'avons fait, que sa fonction de covariance est bien connue par Splus comme étant l'objet `fdcs5`). Si la fonction de covariance est dans la liste affichée, il est conseillé de sélectionner le numéro correspondant afin d'avoir à répondre à moins de questions par la suite. Nous choisissons l'option 5 de façon à rester le plus général possible. Il convient maintenant de savoir si notre dérivateur automatique pourra calculer les dérivées successives de la fonction de covariance en tout point de l'intervalle $[0, T]$. Pour cela le programme gère le cas des fonctions de covariance d'expressions analytiques courantes qui ne sont pas définies en 0.

`r(t)`, `r'(t)` ou `r''(t)` doivent-elles être prolongées par continuité en 0 ? (oui : o / non : n) :

Dans notre cas la fonction de covariance n'est pas définie en 0. Il est alors demandé à l'utilisateur de saisir les valeurs en 0 de la fonction de covariance, de sa dérivée et de sa dérivée seconde.

Entrer la valeur de `r(t)` en 0 : 1

Entrer la valeur de `r'(t)` en 0 : 0

Entrer la valeur de `r''(t)` en 0 : -1

Il convient également de savoir si l'utilisateur veut ou non travailler avec la valeur absolue du processus gaussien considéré.

PROCESSUS GAUSSIEN STATIONNAIRE

`r(t) = (sin(sqrt(3) * t))/(sqrt(3) * t)`

Voulez-vous travailler avec la valeur absolue du processus gaussien stationnaire ? (oui : o / non : n) : n

Un quatrième menu s'affiche alors pour choisir le type de calculs que l'on veut effectuer.

1. Calcul de la fonction de répartition en certains points u .
2. Estimation de l'erreur.
3. Détermination d'un quantile.
4. Quitter.

Votre choix :

Pour le calcul de la fonction de répartition en certains points ou bien pour la détermination d'un quantile (choix 1 ou 3 du Menu 4), un cinquième Menu s'affiche afin de choisir le type d'approximation que l'on veut utiliser pour faire les calculs.

CHOIX DE LA BORNE

1. Borne de Davies.
2. Terme 1 de la serie de Rice.
3. Terme 2 de la serie de Rice.
4. Quitter

Votre choix : 3

Ces méthodes ont été discutées en début de chapitre. Dans le cas de la détermination d'un quantile, il convient alors de demander le niveau souhaité et la valeur de T , longueur de l'intervalle $[0, T]$ sur lequel on étudie le processus :

DETERMINATION D'UN QUANTILE

SAISIE DES DONNEES

Entrer la valeur du niveau alpha : 0.01

Entrer la valeur de T : 1

Après quelques secondes de calculs le résultat s'affiche récapitulant les choix de l'utilisateur et donnant la durée du calcul :

AFFICHAGE DU RESULTAT

PROCESSUS GAUSSIEN STATIONNAIRE

```

r(t) = (sin(sqrt(3) * t))/(sqrt(3) * t)
Valeur seuil au niveau 0.01 : 2.6028595
Duree du calcul: 0 h 0 mn 7 s

```

Une méthode par dichotomie a été programmée pour la recherche d'un valeur seuil. Il est clair que ce point là peut être amélioré.

Dans le cas du choix d'un calcul de la fonction de répartition en certains points dans le Menu 4 et après avoir sélectionné le type d'approximation dans le Menu 5, le programme demande à l'utilisateur le nombre de points de calcul :

```

CALCUL DE LA FONCTION DE REPARTITION EN CERTAINS POINTS U
SAISIE DES DONNEES
Nombre de valeurs de u : 3

```

Il est alors demandé de saisir les différentes valeurs de u et la valeur de T , longueur de l'intervalle $[0, T]$ sur lequel on étudie le processus :

```

Entrer une valeur de u : 2
Entrer une valeur de u : 3
Entrer une valeur de u : 1
Entrer la valeur de T : 1

```

Après quelques secondes de calculs les résultats s'affichent, récapitulant les différents choix de l'utilisateur et affichant la durée du calcul.

```

AFFICHAGE DU RESULTAT
PROCESSUS GAUSSIEN STATIONNAIRE
r(t) = (sin(sqrt(3) * t))/(sqrt(3) * t)
u      1      2      3
Bornes 0.7450131 0.9557127 0.9968821
Duree du calcul: 0 h 0 mn 1 s

```

Dans le cas du choix de l'estimation de l'erreur dans le Menu 4 la borne supérieure de (4.6) est calculée. L'utilisateur doit saisir une valeur de u et de T de manière analogue au cas précédent. Le résultat s'affiche alors après une longue attente car dans ce cas les calculs sont très longs (de l'ordre de l'heure). L'exemple que nous avons traité nous a permis de parcourir l'ensemble des possibilités de notre programme dans le cas d'un processus gaussien stationnaire (choix A du Menu 2). Une gestion analogue est assurée pour les processus gaussiens non stationnaires (choix B du Menu 2) et les champs gaussiens stationnaires (choix C du Menu 2). Notons que dans le cas d'un processus gaussien non stationnaire, notre programme distingue trois cas différents: le cas non stationnaire centré de variance un, le cas non stationnaire décentré de variance un et le cas non stationnaire général. Lorsque le processus gaussien que l'on veut étudier n'est pas centré, il est nécessaire, avant de lancer le programme principal, de saisir en même temps que sa fonction de covariance, sa fonction moyenne dans l'objet Splus "mns2" :

```
"fdcons2" <- expression(exp(-5*t1*t2))
"mns2" <- expression(exp(-t1/2))
```

Nous complétons et améliorons notre programme en fonction des résultats que nous obtenons dans l'étude des processus et des champs gaussiens. Des sorties graphiques, pour obtenir par exemple des courbes de puissance ou des fonctions de répartition, ne sont pas encore disponibles à partir de ce programme. Une première version de ce programme est disponible à l'URL suivant : <http://www.lsp.ups-tlse.fr/Cdelmas/>

4.4 Discussion et directions de recherche

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps donné des formules relativement bien adaptées au calcul numérique pour les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 qui apparaissent dans les relations (4.6) et (4.7). Les travaux d'Azaïs et Wschebor (2000b, 2001) nous proposent une méthode de Monte-Carlo et d'Importance Sampling pour le calcul numérique du moment d'ordre 3. Ces méthodes déterministe et aléatoire nous paraissent bien adaptées au calcul numérique. Cependant d'autres études pourraient permettre de les améliorer que ce soit en temps de calcul ou en précision du résultat obtenu. Ainsi par exemple la méthode d'Importance Sampling utilisée pourrait être largement améliorée dans les cas où l'intervalle $[0, T]$ n'est pas petit. Les méthodes proposées dans le cadre de l'estimation de l'erreur ont été établies et programmées uniquement dans le cadre stationnaire. L'extension au cas non stationnaire et au cas de la valeur absolue du processus reste à faire.

Dans ce chapitre on soulève également la question de l'étude des ordres de grandeur des différents moments factoriels entre eux. On pourrait en effet penser que de manière générale le moment d'ordre $(j+1)$ est exponentiellement faible par rapport au moment d'ordre j quand $u \rightarrow +\infty$.

Enfin on propose dans ce chapitre une implémentation Splus des méthodes développées, en première partie de ce chapitre, dans le chapitre 3 et dans le chapitre 5 qui suit, pour le calcul de queues de probabilités et de valeurs critiques relatives à (4.1). Nous avons illustré par un exemple le fonctionnement de notre programme. Ce dernier est en constante évolution. La gestion des sorties graphiques reste à faire.

Chapitre 5

Applications aux tests de mélanges de distributions

5.1 Introduction

La loi d'une variable aléatoire ne peut pas toujours être correctement modélisée par une loi classique (loi normale, loi gamma, etc...). Il s'avère souvent nécessaire de rechercher des modèles plus complexes. Deux approches sont alors possibles : la modélisation non-paramétrique ou des modèles paramétriques plus complexes comme des modèles de mélange de lois. Ainsi, par exemple, en génétique, un caractère quantitatif peut être modélisé par un mélange de trois populations gaussiennes de même variance et de moyennes différentes sous l'hypothèse de l'existence d'un gène majeur sans effet de dominance codant pour ce caractère. Le modèle devient un mélange de deux populations gaussiennes sous l'hypothèse de l'existence d'un gène majeur avec effet de dominance et il se réduit à une seule population gaussienne sous l'hypothèse d'absence de gène majeur. Des tests de mélanges de distributions peuvent alors être mis en oeuvre pour détecter un gène majeur dans une population (cf. Goffinet et al. (1992) et Loisel et al. (1994)). On peut citer d'autres exemples d'application où le mélange fini de lois apparaît également comme modèle. C'est le cas en reconnaissance de caractère où il est utilisé pour modéliser chaque composante principale d'un caractère donné de l'alphabet (cf. Robert (1996) et Stuchlik et al. (1994)).

Par la suite on s'intéressera toujours à des modèles de mélange identifiables au sens faible.

Définition 5.1 Soit $\mathcal{F} = (f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille de densités de probabilité avec Γ un sous-ensemble compact

de $\mathbb{R}^k$, k entier. Le modèle général des p -mélanges est :

$$\mathcal{G}_p = \{g_{\pi, \alpha} = \sum_{i=1}^p \pi_i f_{\gamma_i} : \pi = (\pi_1, \dots, \pi_p), \alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \text{ et } \forall i = 1, \dots, p, \gamma_i \in \Gamma, \pi_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^p \pi_i = 1\}.$$

La famille $\mathcal{G}_p$ est identifiable au sens faible si pour tous $g_{\pi, \alpha}$ et $g_{\pi', \alpha'}$ dans $\mathcal{G}_p$ on a :

$$g_{\pi, \alpha} = g_{\pi', \alpha'} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \pi_i \delta_{\gamma_i} = \sum_{i=1}^p \pi'_i \delta_{\gamma'_i}.$$

Teicher (1965) ou Yakowitz et Spragins (1968) donnent des conditions suffisantes pour une telle identifiabilité au sens faible. Elle a lieu par exemple pour des mélanges finis de lois normale ou de lois gamma.

Remarquons que l'estimateur à noyau usuel d'une densité est de la forme :

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

Il s'écrit donc comme un mélange particulier de densités K avec différents paramètres de position et un même paramètre d'échelle. Le nombre de composants du mélange est égal au nombre d'observations. De même pour l'estimateur spline et l'estimateur par ondelettes. Pourquoi donc choisir un modèle de mélange fini plutôt qu'un modèle non-paramétrique ? Plusieurs arguments peuvent être avancés (cf. Robert (1996)). Notamment, il existe de nombreux problèmes où chaque composant du modèle de mélange fini possède sa signification propre contrairement aux modèles non-paramétriques. De plus le modèle de mélange fini est souvent plus simple et ses paramètres sont plus faciles à estimer que dans le modèle non-paramétrique. Ainsi une fois que l'on a décidé de modéliser la loi d'une variable aléatoire par un modèle de mélange fini, deux questions majeures se posent : Comment estimer le nombre de composants du mélange et comment en estimer ses paramètres ? Une littérature particulièrement riche existe pour répondre à ces deux questions. On retiendra dans chacun des deux problèmes trois approches majeures : l'approche par la méthode des moments, l'approche par maximum de vraisemblance et l'approche bayésienne. Dans le cas de l'estimation des paramètres, lorsque le nombre de composants p du mélange est fixé, la méthode la plus ancienne est la méthode des moments qui a été introduite par Pearson (1894). Malheureusement cette méthode s'avère très peu performante et a été abandonnée. La méthode la plus souvent utilisée consiste à résoudre les équations de vraisemblance. Dans le cas d'un modèle paramétrique suffisamment régulier, l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) possède des propriétés d'optimalité asymptotiques qui justifient sa très courante utilisation. Il est en effet consistant et asymptotiquement efficace. Les démonstrations classiques de ces deux principales propriétés sont dues à Cramer (1946), Wald (1949) et Wolfowitz (1949). Ces résultats peuvent également se redémontrer par des méthodes d'entropie (cf.

Pollard (1984)). Dans le cas particulier où la vraie valeur du paramètre est sur la frontière de l'espace des paramètres (cas qui n'est pas inclus dans les hypothèses des théorèmes classiques), on peut noter que Self and Liang (1987) prouvent un résultat de consistance et de convergence faible pour l'EMV. Dans le cas d'un modèle paramétrique où il existe des paramètres non identifiables (par exemple le modèle général des p -mélanges $\mathcal{G}_p$), les hypothèses des théorèmes classiques ne sont pas non plus vérifiées. Redner (1981) apporte une première solution à ce problème en montrant que dans ce cas là et lorsque l'espace des paramètres Γ est compact, l'EMV est consistant dans l'espace quotient relatif à Γ (en quotientant par rapport aux classes identifiables). Mais il n'obtient pas de résultat de convergence faible pour l'EMV. Une solution plus complète à ce problème est apportée par Dacunha-Castelle et Gassiat (1997-1999). Ils proposent de reparamétriser le modèle sous la forme (θ, β) où θ est un paramètre identifiable et β un paramètre non identifiable. Ils prouvent la consistance de l'EMV de θ uniformément en β et obtiennent un résultat de convergence faible uniforme en β pour l'EMV de θ . Ce dernier est asymptotiquement efficace uniformément en β . Les algorithmes les plus efficaces pour résoudre les équations de vraisemblance sont des algorithmes itératifs de type E.M. et S.E.M. (cf. Dempster, Laird and Rubin (1977); Celeux and Diebolt (1984, 1986)). D'autres procédures d'estimation très compétitives utilisent des méthodes bayésiennes (cf. Robert (1995, 1996)). Pour une étude plus complète des méthodes d'estimation dans les modèles de mélange on pourra consulter Titterington et al. (1985), Lindsay (1995) et McLachlan (2000). Dans le cadre de l'estimation du nombre de composants d'un mélange et en parallèle avec la méthode des moments, des méthodes performantes, basées sur les propriétés des matrices de Hankel de mesures de probabilité discrètes, ont été développées par Lindsay (1989) et Dacunha-Castelle et Gassiat (1997). Un test basé sur une approche bayésienne a été proposé par Mergensen and Robert (1995) et Robert (1995). L'approche par maximum de vraisemblance consiste à étudier de manière séquentielle (ou en complément par exemple de la méthode de type moments développée par Lindsay (1989) et Dacunha-Castelle et Gassiat (1997)) le test du rapport des maximums de vraisemblance (TRMV) de q populations contre p . Malheureusement la loi asymptotique de la statistique λ du TRMV est difficile à établir dans le cas des modèles de mélange. En effet les hypothèses classiques de régularité ne sont pas vérifiées pour que $-2 \ln \lambda$ soit asymptotiquement distribué sous l'hypothèse nulle comme un χ^2 dont le nombre de degrés de liberté correspond à la différence du nombre de paramètres dans les deux hypothèses. Ainsi Gosh and Sen (1985) ont donné la loi asymptotique de la statistique du TRMV, dans le cas de une population contre deux, sous une condition de séparation des paramètres du mélange. Hartigan (1985) a montré que la statistique du TRMV, dans le cas du mélange simple gaussien à paramètre non borné, tend vers l'infini en probabilité sous l'hypothèse nulle; Bickel and Chernoff (1993) en donne le comportement asymptotique

précis. De nombreuses études numériques ont été réalisées afin d'approcher la distribution de la statistique du TRMV (cf. Wolfe (1971), Everitt (1981), McLachlan (1987), Thode and al. (1988), Mendell and al. (1991, 1993), Soromenho (1994)). Récemment Dacunha-Castelle et Gassiat (1997, 1999) ont proposé une solution complète au problème général de test d'hypothèses par la statistique du TRMV dans les modèles non identifiables. Son application au problème du test de une population gaussienne contre deux révèle que la statistique du TRMV se comporte asymptotiquement comme le maximum d'un processus gaussien de variance un. Le problème de détermination de valeurs seuil et d'étude de la puissance de tels tests reste irrésolu. C'est l'objet principal de ce chapitre. Plus précisément, dans ce chapitre, nous adaptons la méthode de Rice décrite dans le chapitre 4 précédent pour des processus à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$ au cas de processus X sur $[-T_2; T_1]$ à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-T_2; 0[$ et sur $]0; T_1]$ et tels que $X(0^+) = -X(0^-)$ p.s.. Ceci nous permet d'obtenir des Tables et des résultats de puissance pour le TRMV de une population gaussienne contre deux. Trois cas majeurs sont distingués : le test de mélange simple, le test de une population contre deux homoscédastiques de variance connue et le test de une population contre deux homoscédastiques de variance inconnue. Nos résultats présentent l'énorme avantage de se présenter sous forme d'encadrement; ce qui nous permet d'avoir une estimation déterministe de l'erreur commise sur le résultat. Dans la plupart des cas on appréciera la précision de nos méthodes par rapport à celles trouvées dans la littérature. Nos résultats nous permettent de comparer le TRMV avec certains tests de moments tout à fait classiques. Nous mettons ainsi en évidence plusieurs cas où le TRMV présente un manque flagrant de puissance par rapport à ces tests de moments. Cette étude des tests de mélange de distributions nous permet également de soulever plusieurs questions sur lesquelles nous travaillons actuellement.

5.2 Résultats obtenus

5.2.1 Test de mélange simple gaussien

Considérons le problème de mélange de distributions suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{H}_1 : & (1 - p_0)\mathcal{N}(0, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_0, 1) \end{cases}$$

où $p_0 \in]0, 1[$ et $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_0 \in \Gamma = [-T, T]$. La théorie établie par D. Dacunha-Castelle et E. Gassiat (1997-1999) montre que la statistique du TRMV converge en loi vers $\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} X^2(\gamma) \mathbb{I}_{\{X(\gamma) \geq 0\}}$ sous $\mathcal{H}_0$ et vers $\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} (X(\gamma) + m_{\delta^2}(\gamma, \gamma_0))^2 \mathbb{I}_{\{X(\gamma) + m_{\delta^2}(\gamma, \gamma_0) \geq 0\}}$ sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ avec $\theta = p_0 \sqrt{e^{\gamma_0^2} - 1} =$

$\frac{c}{\sqrt{n}}$, $c > 0$ et γ_0 fixé dans Γ . X est un processus gaussien centré de variance un dont la fonction de covariance est donnée par :

$$r(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{(e^{\gamma_1 \gamma_2} - 1)}{\sqrt{e^{\gamma_1^2} - 1} \sqrt{e^{\gamma_2^2} - 1}}.$$

La fonction moyenne $m_{\delta^2}(\cdot, \gamma_0)$ est donnée par :

$$m_{\delta^2}(\gamma, \gamma_0) = \frac{c(e^{\gamma \gamma_0} - 1)}{\sqrt{e^{\gamma^2} - 1} \sqrt{e^{\gamma_0^2} - 1}} = \frac{\delta^2(e^{\gamma \gamma_0} - 1)}{\sqrt{e^{\gamma^2} - 1}},$$

où δ^2 est tel que $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$. Intéressons-nous donc au problème de test de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et γ_0 fixé dans $\Gamma = [-T, T]$. Un programme S-plus a été mis en oeuvre afin d'obtenir numériquement un encadrement pour la valeur critique au niveau α souhaité. Il permet également de calculer un encadrement pour la puissance du test en fonction de δ^2 et γ_0 souhaités. Les méthodes utilisées pour mettre en oeuvre un tel programme seront exposées dans la section suivante. Les Tables 1 et 2 suivantes donnent un exemple des résultats que l'on obtient.

Remarques :

- 1) La Proposition 5.1 qui suit nous permet de minorer la valeur critique asymptotique au niveau α du TRMV par celle obtenue en remplaçant X par Y dans la statistique de test asymptotique; où Y est un processus gaussien stationnaire centré de fonction de covariance $\exp(-\frac{\gamma^2}{4})$. Par la suite nous n'utiliserons pas ce résultat car nos méthodes s'avèrent bien plus précises. Par exemple on constate numériquement que ce résultat fournit une approximation de la valeur seuil avec une erreur absolue inférieure à 0.4 lorsque $T = 1$. En effet il donne les minoration suivantes pour les valeurs critiques aux niveaux 1%, 5% et 10% et pour $T = 1$: 3.5795; 2.0555; 1.4197 (à comparer avec les résultats donnés dans les Tables 1 et 2).

Proposition 5.1

$$P[\sup_{\gamma \in \Gamma} X(\gamma) \leq u] \leq P[\sup_{\gamma \in \Gamma} Y(\gamma) \leq u] \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

où Γ , X et Y sont donnés ci-dessus.

Preuve : Cette Proposition est une conséquence immédiate du lemme de Slepian. Pour la démontrer, il suffit de prouver que $\forall \gamma_1$ et $\gamma_2 \in \Gamma$, $E[X(\gamma_1)X(\gamma_2)] \leq E[Y(\gamma_1)Y(\gamma_2)]$. Or en posant $\Phi(x) = \exp(\frac{x}{2}) - \exp(-\frac{x}{2})$, nous avons :

$$\frac{(\exp(\gamma_1 \gamma_2) - 1) \exp(\frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{4})}{\sqrt{\exp(\gamma_1^2) - 1} \sqrt{\exp(\gamma_2^2) - 1}} = \frac{\exp(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2}) - \exp(-\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2})}{\sqrt{\exp(\frac{\gamma_1^2}{2}) - \exp(-\frac{\gamma_1^2}{2})} \sqrt{\exp(\frac{\gamma_2^2}{2}) - \exp(-\frac{\gamma_2^2}{2})}} = \frac{\Phi(\gamma_1 \gamma_2)}{\sqrt{\Phi(\gamma_1^2)} \sqrt{\Phi(\gamma_2^2)}}.$$

Dans le cas où $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$, on pose $\gamma_1 = \exp(\frac{\gamma'_1}{2})$, $\gamma_2 = \exp(\frac{\gamma'_2}{2})$ et $H(x) = \exp(\frac{\exp(x)}{2}) - \exp(-\frac{\exp(x)}{2})$. Alors,

$$\frac{\Phi(\gamma_1 \gamma_2)}{\sqrt{\Phi(\gamma_1^2)} \sqrt{\Phi(\gamma_2^2)}} = \frac{H(\frac{\gamma'_1 + \gamma'_2}{2})}{\sqrt{H(\gamma'_1)} \sqrt{H(\gamma'_2)}}.$$

Il faut donc montrer que $\forall \gamma'_1$ et γ'_2 réels,

$$\ln H(\frac{\gamma'_1 + \gamma'_2}{2}) - \frac{1}{2}[\ln H(\gamma'_1) + \ln H(\gamma'_2)] \leq 0.$$

Par une simple étude de fonction de la dérivée seconde de $\ln H(x)$, on montre que la fonction $x \rightarrow \ln H(x)$ est convexe, ce qui prouve la relation précédente.

Dans le cas où $\gamma_1 \gamma_2 < 0$, $\exp(\gamma_1 \gamma_2) < 1$ donc $r(\gamma_1, \gamma_2) < 0$ donc $r(\gamma_1, \gamma_2) \leq \exp(-\frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{4})$. Les études des autres cas se font de manière évidente.

- 2) Les résultats de puissance donnés dans Dacunha-Castelle et Gassiat (1997, 1999) ne permettent d'étudier qu'un certain type d'alternatives. Ainsi dans notre problème de test nous pouvons uniquement étudier le problème de la détection de valeurs aberrantes c'est à dire le cas où p tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ avec γ_0 fixé dans Γ . L'extension des résultats donnés p.291 de Dacunha-Castelle et Gassiat (1997) à des alternatives plus générales se fait sans problème particulier. Ainsi pour le problème de la détection de deux groupes c'est à dire lorsque l'alternative considérée $\mathcal{H}_1$ est telle que $\gamma_0 = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ et p_0 est fixé dans $]0; 1[$, la statistique du TRMV converge en loi vers :

$$\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} (X(\gamma) + m_\delta(\gamma, p_0))^2 \mathbb{I}_{\{X(\gamma) + m_\delta(\gamma, p_0) \geq 0\}}$$

où X est donné ci-dessus et $m_\delta(\gamma, p_0)$ est donnée par :

$$m_\delta(\gamma, p_0) = \frac{p_0 \gamma \delta}{\sqrt{\exp(\gamma^2) - 1}}.$$

Dans ce qui suit nous n'avons pas étudié plus en profondeur ce problème de la détection de deux groupes. Nous nous sommes principalement intéressés au problème de la détection de valeurs aberrantes.

Légende pour les Tables 1 et 2 : Quelques résultats obtenus par notre programme *Splus* pour le TRMV de l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, les X_i sont iid $\mathcal{N}(0, 1)$, contre l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$, les X_i sont iid $(1 - p_0)\mathcal{N}(0, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_0, 1)$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et γ_0 fixé dans $\Gamma = [-T; T]$. La Table 2 donne des exemples de valeurs seuils asymptotiques obtenues aux niveaux 1%, 5% et 10% pour différentes valeurs de T . La Table 1 donne des résultats de puissances asymptotiques aux niveaux 1%, 5% et 10% pour différentes valeurs de T et différentes alternatives c'est à dire différentes valeurs pour γ_0 et δ^2 . En ligne nous lisons des

résultats de puissance pour γ_0 qui varie ($\gamma_0 = 0.25, \dots$) et en colonne pour δ^2 qui varie ($\delta^2 = 1$ ou 3). Nos résultats se présentent sous forme d'encadrement ce qui nous permet d'avoir une estimation de l'erreur commise sur le résultat. Lorsqu'une seule valeur apparaît c'est que la borne supérieure et inférieure de l'encadrement sont les mêmes. On notera que les méthodes de Rice que l'on utilise ici donnent des résultats relativement précis. Ces derniers sont d'autant plus précis que l'erreur de première espèce est faible et que T est petit. Ceci est tout à fait naturel car dans ces cas là les moments d'ordre deux qui apparaissent dans les formules de Rice sont plus petits.

			Niveau 1%		Niveau 5%		Niveau 10%	
T=0.5	Val.seuil		3.6368		2.1743		1.5710	
	Puis.	$\gamma_0 \delta^2$	1	3	1	3	1	3
		0.25	1.25	3.50	5.79	11.84	11.18	19.67
		0.5	2.12	15.74	8.31	34.89	14.86	47.17
T=1	Val.seuil		3.9015		2.3984		1.7707-1.7713	
	Puis.	$\gamma_0 \delta^2$	1	3	1	3	1	3
		0.25	1.25	3.34	5.79	11.48	11.20-11.21	19.24-19.26
		0.5	2.13	15.51	8.40	34.59	15.06-15.08	46.93-46.96
		1	9.01	88.81	23.73-23.74	96.62-96.63	34.94-34.99	98.39-98.43
T=2	Val.seuil		4.3432-4.3438		2.7908-2.7942		2.13-2.1378	
	Puis.	$\gamma_0 \delta^2$	1	3	1	3	1	3
		0.25	1.20	2.80	5.64-5.69	10.18-10.24	10.96-11.13	17.54-17.77
		1	8.50-8.51	87.35-87.39	22.93-23.09	95.99-96.19	34.11-34.65	98.04-98.42
		2	100	100	100	100	100	100
T=3	Val.seuil		4.6784-4.6798		3.1002-3.1075		2.4209-2.4350	
	Puis.	$\gamma_0 \delta^2$	1	3	1	3	1	3
		0.25	1.15-1.16	2.40-2.41	5.49-5.57	9.17-9.28	10.69-11	16.14-16.54
		1	7.17-7.19	84.86-84.98	20.21-20.50	94.76-95.17	30.77-31.61	97.30-97.95
		1.5	51.70-51.85	100	74.04-75.02	100	83.09-85.18	100
		3	100	100	100	100	100	100
T=5	Val.seuil		5.1357-5.1384		3.5353-3.5478		2.839-2.8635	
	Puis.	$\gamma_0 \delta^2$	1	3	1	3	1	3
		0.25	1.10-1.11	1.99-2.00	5.31-5.44	8.02-8.20	10.36-10.88	14.47-15.12
		1	5.60-5.63	81.11-81.34	16.76-17.18	92.66-93.53	26.32-27.61	95.89-97.29
		1.5	45.82-46.07	100	68.34-69.99	99.99-100	78.18-81.71	99.96-100
		2.5	100	100	100	100	99.98-100	99.99-100

Table 1 : Le test de mélange simple gaussien. Quelques résultats obtenus par le programme Splus.

Niveau	1%	5%	10%
T=0.5	3.6368	2.1743	1.5710
T=1	3.9015	2.3984	1.7707-1.7713
T=2	4.3432-4.3438	2.7908-2.7942	2.1300-2.1378
T=3	4.6784-4.6798	3.1002-3.1075	2.4209-2.4350
T=5	5.1357-5.1384	3.5353-3.5478	2.8390-2.8635
T=10	5.7903-5.7940	4.1736-4.1921	3.4641-3.5013
T=15	6.1837-6.1879	4.5621-4.5828	3.8480-3.8908
T=20	6.4657-6.4703	4.8414-4.8636	4.1253-4.1712
T=30	6.8658-6.8705	5.2392-5.2627	4.5212-4.5698
T=50	7.3725-7.3774	5.7443-5.7688	5.0245-5.0758

Table 2: Valeurs seuil pour le test de mélange simple gaussien.

Tout d'abord notons que puisque $m_{\delta^2}(\gamma, \gamma_0) = m_{\delta^2}(-\gamma, -\gamma_0)$ et $r(\gamma_1, \gamma_2) = r(-\gamma_1, -\gamma_2)$, la statistique asymptotique est la même sous $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_0 = \xi$ fixé que sous $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_0 = -\xi$ fixé. La puissance du test est donc symétrique en γ_0 autour de 0. Deuxièmement on remarque que la valeur critique est d'autant plus grande que T est grand. Ceci est évident puisque lorsque la longueur de l'intervalle Γ augmente la queue de probabilité $P[\max_{t \in \Gamma} X(t) \geq u]$ augmente également. Une troisième remarque est que le TRMV est asymptotiquement d'autant plus puissant pour $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ que $|\gamma_0|$ croît et pour γ_0 fixé que δ^2 croît. Ceci semble également naturel puisque dans chacun des cas la “distance” entre la densité gaussienne standard et la densité du mélange $(1 - p_0)\mathcal{N}(0, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_0, 1)$ croît. Dans le premier cas les deux composants du mélange sont plus séparés et dans le second cas la contamination est plus grande; la puissance asymptotique est donc naturellement plus grande.

Nous allons maintenant nous attarder un peu plus longuement sur deux points particulièrement intéressants :

- La comparaison asymptotique du TRMV avec deux tests de moments classiques.
- Le comportement asymptotique quand $T \rightarrow +\infty$ de la statistique asymptotique du TRMV sous $\mathcal{H}_0$ et sous l'alternative; comportement des valeurs critiques et de la puissance.

Comparaison du TRMV avec deux tests de moments classiques

Nous comparons ici la puissance du TRMV avec celle de deux tests de moments classiques :

- Le test du $\bar{X}_n$. Considérons $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Sous l'hypothèse nulle d'homogénéité,

$$\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ avec $p_0\gamma_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$,

$$\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\alpha, 1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

- Le test du S_n^2 . Considérons $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Sous l'hypothèse nulle d'homogénéité,

$$\sqrt{n} \frac{S_n^2 - 1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ avec $p_0(1-p_0)\gamma_0^2 = \frac{\beta^2}{\sqrt{n}}$ et $\beta_n^2 \rightarrow \beta^2$ quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n} \frac{S_n^2 - 1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\frac{\beta^2}{\sqrt{2}}, 1\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Les tests effectués sont bilatéral pour $\bar{X}_n$ et unilatéral pour S_n^2 .

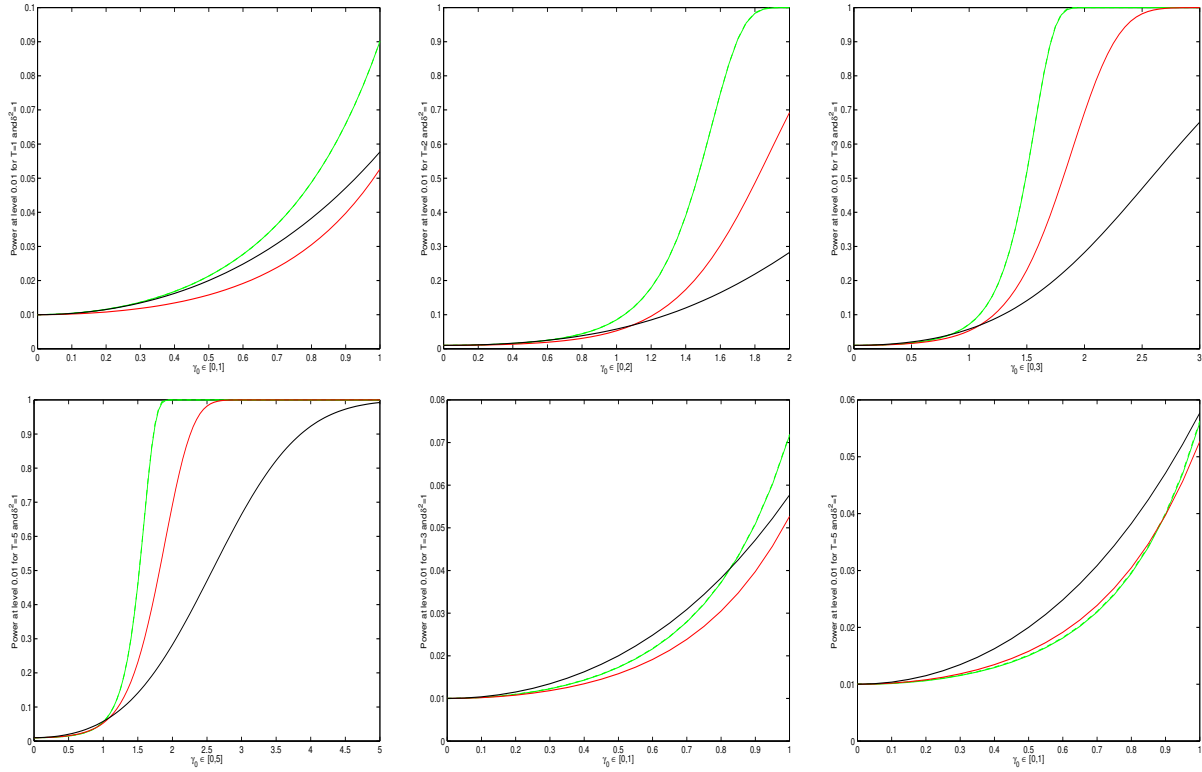


Figure 1 : Résultats de puissance au niveau $\alpha = 0.01$ pour $\delta^2 = 1$.

Légende pour les Figures 1, 2, 3 et 4 : Courbes de puissance asymptotique comparées pour le TRMV (vert), le test du S_n^2 (rouge) et le test du $\bar{X}_n$ (noir). L'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est l'hypothèse de mélange $(1-p_0)\mathcal{N}(0, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_0, 1)$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et γ_0 fixé dans $\Gamma = [-T, T]$. Le programme *S-plus* réalisé pour calculer la puissance asymptotique du TRMV donne un encadrement pour cette puissance. La borne

supérieure de cet encadrement est représentée en pointillés et la borne inférieure en trait plein. Lorsque la précision de l'encadrement obtenu est supérieure à la précision des graphes donnés dans les Figures 1, 2, 3 et 4, les deux courbes en pointillés et en trait plein se confondent, c'est le cas par exemple sur la Figure 1.

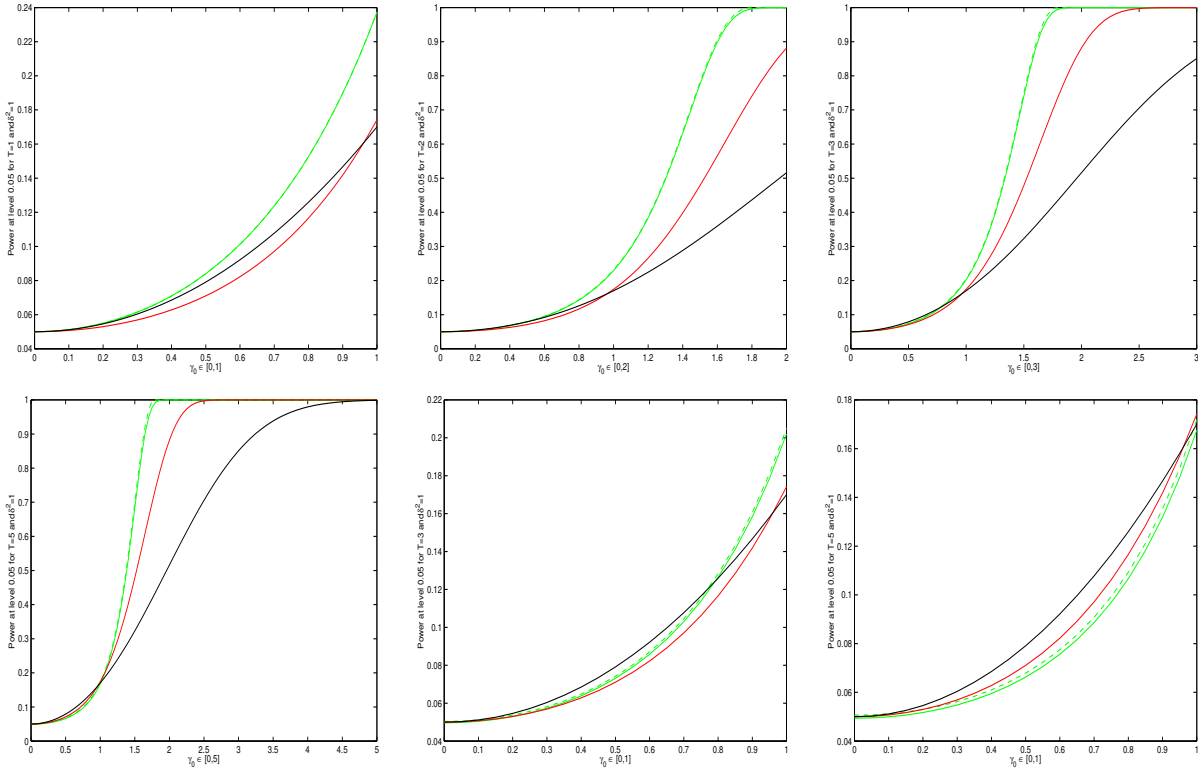


Figure 2: Idem Figure 1 sauf $\alpha = 0.05$.

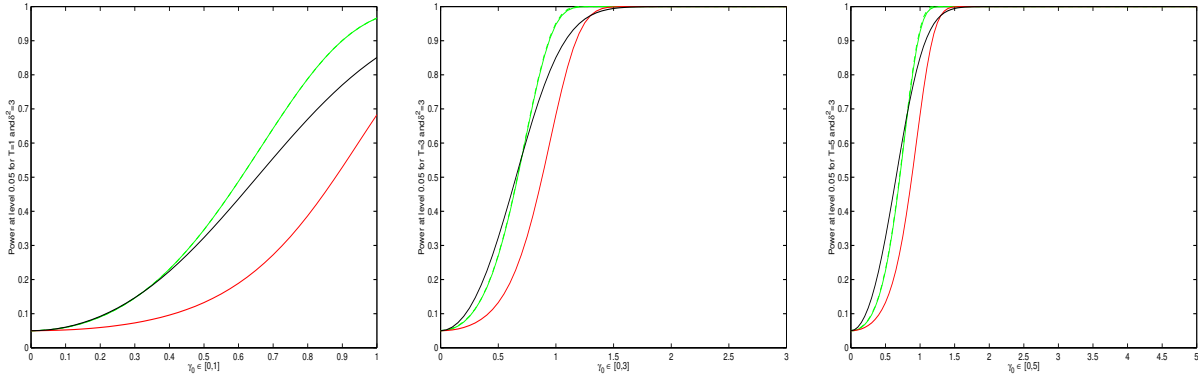


Figure 3: Idem Figure 2 sauf $\delta^2 = 3$.

On remarque que lorsque T est petit ($T = 1$ par exemple), le TRMV est le test uniformément le plus puissant parmi les trois tests étudiés. On peut donc penser que dans ce cas il présente certaines propriétés

d'optimalité. Malheureusement la puissance de ce test, bien que supérieure à celle des deux autres, reste faible. Dans la pratique il faudra donc rester vigilant lorsqu'il s'agira de conclure que les données sont issues d'un mélange $(1-p_0)\mathcal{N}(0, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_0, 1)$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_0 \in [-1; 1]$. Lorsque $T \geq 2$, on remarque que le TRMV n'est plus uniformément le plus puissant même parmi les tests sans biais puisqu'il existe des alternatives pour lesquelles le test du $\bar{X}_n$ est plus puissant. Cependant ces alternatives sont obtenues pour γ_0 proche de 0. Lorsque γ_0 est assez éloigné de 0 et assez proche de T , le TRMV a une puissance bien meilleure que celle des deux autres tests. On remarque également que lorsque γ_0 se rapproche de 0 et lorsque δ^2 augmente, (on se rapproche alors du problème de la détection de deux groupes), le test du $\bar{X}_n$ devient le plus puissant des trois tests.

Comportement asymptotique quand $T \rightarrow +\infty$

Contrairement aux deux tests classiques du $\bar{X}_n$ et du S_n^2 étudiés précédemment, le TRMV dépend de l'intervalle $\Gamma = [-T, T]$ sur lequel sont supposées se trouver les moyennes des composants du mélange. Il semblerait, par les résultats donnés dans les Tables 1 et 2, que la puissance asymptotique de ce test diminue lorsque T augmente. Les Figures 4.1 et 4.2 illustrent un peu mieux ce phénomène.

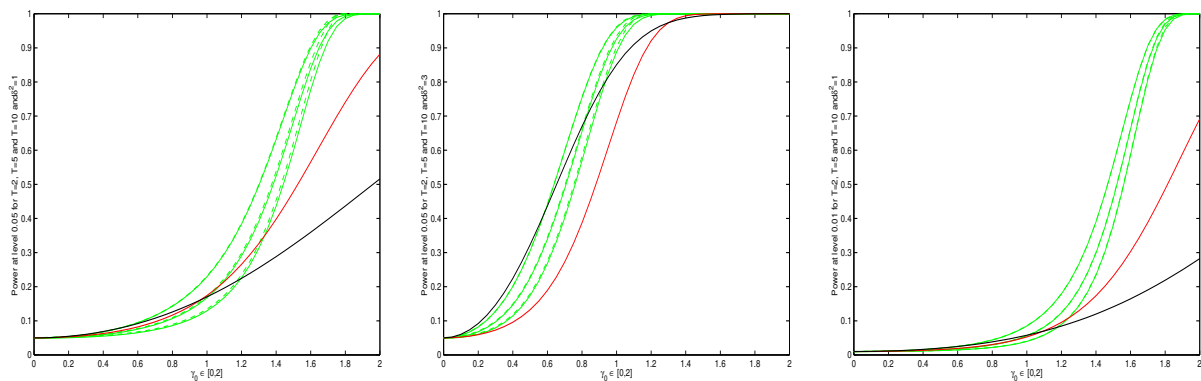


Figure 4.1: (cf. Légende Figure 1). Variation de la puissance en fonction de γ_0 . Les courbes de puissances sont représentées en noir pour le test du $\bar{X}_n$, en rouge pour le test du S_n^2 et en vert pour le TRMV. De haut en bas, pour le TRMV les bornes pour la puissance sont données pour $T = 2, 5$ et 10 .

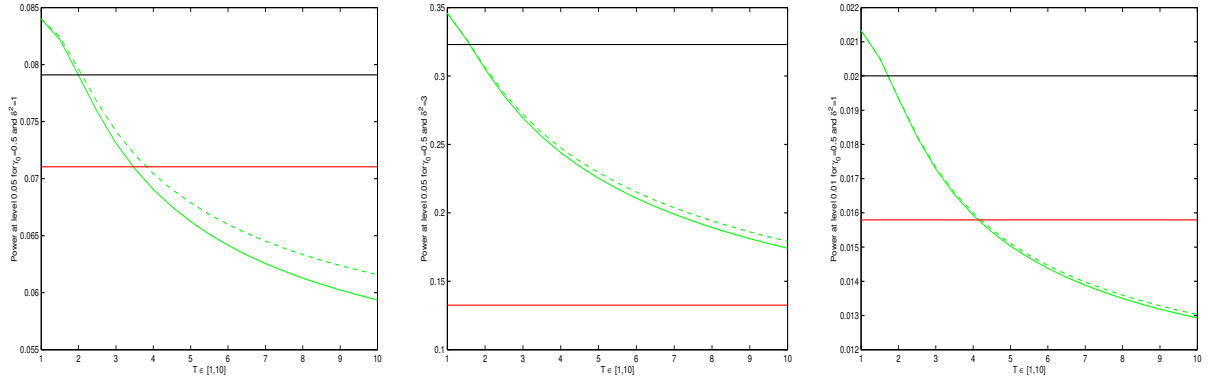


Figure 4.2 : Idem Figure 4.1 sauf que la puissance est représentée en fonction de T .

De manière un peu plus générale on constate qu'il existe une fonction f_α (qui est la racine carrée de deux fois la valeur seuil) croissante en T et une fonction L_{α, δ^2} (la puissance pour $T \rightarrow +\infty$) croissante en γ_0 telles que :

$$P\left[\max_{\gamma \in [-T, T]} X(\gamma) \geq f_\alpha(T)\right] = \alpha,$$

et

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P\left[\max_{\gamma \in [-T, T]} (X(\gamma) + m_{\delta^2}(\gamma, \gamma_0)) \geq f_\alpha(T)\right] \downarrow L_{\alpha, \delta^2}(\gamma_0).$$

On constate numériquement (cf. Figure 5.1) que $f_\alpha(T)$ peut être correctement approchée, lorsque T est grand, par :

$$f_\alpha(T) \approx g(T) = \sqrt{2 \log(2T)} + \frac{-\log(-\log(1 - \alpha)) + \log\left(\frac{\int_0^1 \sqrt{r_{1,1}(t, t)} dt}{2\pi}\right)}{\sqrt{2 \log(2T)}}.$$

Par contre il s'avère plus difficile d'approcher $L_{\alpha, \delta^2}(\gamma_0)$. Un calcul numérique de $P[\max_{\gamma \in [-T, T]} (X(\gamma) + m_{\delta^2}(\gamma, \gamma_0)) \geq f_\alpha(T)]$ pour $T = 100$, $\delta = 1$ et $\alpha = 0.01$ donne la courbe représentée Figure 5.2. On est donc amené à penser que le théorème 5.1 suivant, initialement dû à Cramer (1965) en dimension un puis généralisé par Piterbarg (1972), Bickel and Rosenblatt (1973), Leadbetter and al. (1983), peut se reformuler pour des champs aléatoires gaussiens plus généraux.

Théorème 5.1 Soit X un champ aléatoire gaussien centré stationnaire sur $\mathbb{R}^N$ dont la fonction de covariance satisfait 1) et 2).

1) $\exists \Sigma$ matrice symétrique définie positive et C_1, C_2 strictement positifs tels que :

$$r(t) = 1 - t\Sigma t^T + o(\|t\|^2),$$

$$\text{et pour } \epsilon \text{ suffisamment petit } C_1 \leq \frac{1 - r(t)}{\|t\|^2} \leq C_2 \text{ pour } \|t\| < \epsilon.$$

2)

$$\lim_{\|t\| \rightarrow +\infty} r(t) \log(t) = 0 \text{ ou } \int_{\mathbb{R}^N} |r(t)|^2 dt < \infty.$$

Alors :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P\left[\frac{M(S(T)) - B(T)}{A(T)} \leq u\right] = \exp[-\exp(-u)],$$

où

$$M(S(T)) = \max_{t \in S(T)} X(t) \text{ avec } S(T) = [0, T]^N, \quad A(T) = (2N \log T)^{-1/2}$$

et

$$B(T) = (2N \log T)^{1/2} + \frac{\frac{1}{2}(N-1)(\log \log T) + \log[|\Lambda|^{1/2}(N/\pi)^{(N-1)/2}(2\pi)^{-1}]}{(2N \log T)^{1/2}}.$$

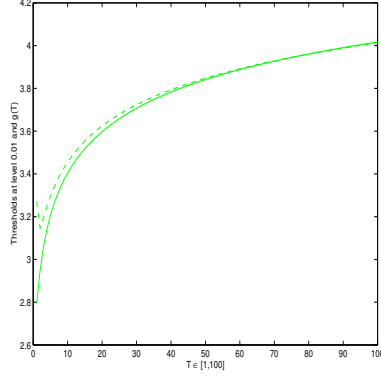


Figure 5.1 :

La fonction f_α est représentée en trait plein et la fonction g en pointillés.

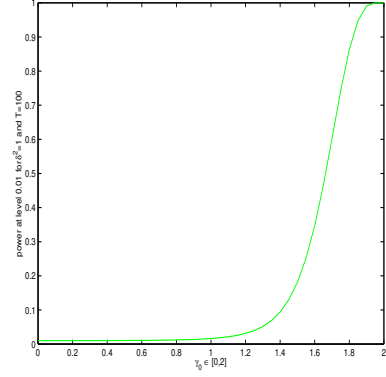


Figure 5.2

Une question se pose donc maintenant naturellement : les résultats obtenus dans Dacunha-Castelle et Gassiat (1997, 1999) pour le test de $\mathcal{H}_0$, les X_i sont iid $\mathcal{N}(0, 1)$, contre $\mathcal{H}_1$, les X_i sont iid $(1-p_0)\mathcal{N}(0, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_0, 1)$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_0 \in [-T, T]$, peuvent-ils s'étendre au cas où $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ n'est plus borné ? Pour cela il faudrait montrer des résultats d'uniformité sur une classe de fonctions indexées par un paramètre réel qui n'est pas borné ; ce qui est loin d'être évident.

5.2.2 Test de une population contre deux (cas homoscedastique de variance connue)

Considérons le problème de test de mélanges de distributions suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \mathcal{N}(\gamma, 1) \\ \mathcal{H}_1 : & (1-p_0)\mathcal{N}(\gamma_1, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_2, 1) \end{cases}$$

où $p_0 \in]0, 1[$, $\gamma \in \Gamma = [0, T]$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \Gamma$. Notons γ_0 la vraie valeur de γ sous $\mathcal{H}_0$. Selon Dacunha-Castelle and Gassiat (1997, 1999), la statistique du TRMV converge en loi vers $\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} X_{\gamma_0}^2(\gamma) \mathbb{I}_{\{X_{\gamma_0}(\gamma) \geq 0\}}$ sous

l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et vers $\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} (X_{\gamma_0}(\gamma) + m_{\gamma_0, \delta^2}(\gamma, \gamma_{2,0}))^2 \mathbb{I}_{\{X_{\gamma_0}(\gamma) + m_{\gamma_0, \delta^2}(\gamma, \gamma_{2,0}) \geq 0\}}$ sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_2 = \gamma_{2,0} \neq \gamma_1$ fixé dans $\Gamma = [0, T]$. X_{γ_0} est un processus gaussien centré de variance un dont la fonction de covariance est donnée par :

$$r_{\gamma_0}(\gamma, \gamma') = R((\gamma - \gamma_0), (\gamma' - \gamma_0)) = \frac{e^{(\gamma - \gamma_0)(\gamma' - \gamma_0)} - 1 - (\gamma - \gamma_0)(\gamma' - \gamma_0)}{\sqrt{e^{(\gamma - \gamma_0)^2} - 1 - (\gamma - \gamma_0)^2} \sqrt{e^{(\gamma' - \gamma_0)^2} - 1 - (\gamma' - \gamma_0)^2}}.$$

La fonction moyenne m_{γ_0, δ^2} est donnée par :

$$m_{\gamma_0, \delta^2}(\gamma, \gamma_{2,0}) = M_{\delta^2}((\gamma - \gamma_0), (\gamma_{2,0} - \gamma_0)) = \frac{\delta^2 (e^{(\gamma_0 - \gamma_{2,0})(\gamma_0 - \gamma)} - 1 - (\gamma_0 - \gamma_{2,0})(\gamma_0 - \gamma))}{\sqrt{e^{(\gamma_0 - \gamma)^2} - 1 - (\gamma_0 - \gamma)^2}}.$$

Remarque : Il serait également intéressant d'étudier le TRMV sous la même alternative que précédemment mais avec $\gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\alpha}{n^\beta}$ avec $0 < \beta \neq \frac{1}{2}$; ou bien sous l'alternative $\mathcal{H}_1$ avec p_0 fixé dans $]0, 1[$, $\gamma_1 = \gamma_0$ et $\gamma_2 - \gamma_0 = \frac{\alpha}{n^\beta}$, $\beta > 0$ (problème de la détection de deux groupes). C'est un point sur lequel nous travaillons actuellement et qui n'apparaît pas dans la suite.

Intéressons-nous donc au problème de la détection de valeurs aberrantes c'est à dire au test de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$, $\gamma_1 = \gamma_0$ et $\gamma_2 = \gamma_{2,0} \neq \gamma_0$ fixé dans $\Gamma = [0, T]$. Un programme Splus a été mis en oeuvre afin d'obtenir un encadrement numérique pour la valeur critique au niveau souhaité avec γ_0 fixé.

Niveau		1%	5%	10%
T=1	$\gamma_0=0.5$	3.1524	1.6925	1.0991
	$\gamma_0=0.25$	3.1561	1.6956	1.1018
	$\gamma_0=0$	3.1676	1.7049	1.1097
T=2	$\gamma_0=1$	3.4921-3.4924	1.9779-1.9782	1.3487-1.3490
	$\gamma_0=0.5$	3.5137-3.5139	1.9967-1.9970	1.3658-1.3661
	$\gamma_0=0$	3.5712	2.0475-2.0477	1.4120-1.4121
T=4	$\gamma_0=2$	4.0424-4.0439	2.4733-2.4772	1.8048-1.8106
	$\gamma_0=1$	4.0904-4.0915	2.5189-2.5220	1.8486-1.8532
	$\gamma_0=0$	4.1876-4.1884	2.6108-2.6141	1.9362-1.9420
T=6	$\gamma_0=3$	4.4663-4.4688	2.8738-2.8826	2.1869-2.2018
	$\gamma_0=1.5$	4.4863-4.4882	2.8934-2.9009	2.2059-2.2194
	$\gamma_0=0$	4.5756-4.5776	2.9797-2.9879	2.2897-2.3048
T=10	$\gamma_0=5$	5.0092-5.0126	3.3994-3.4137	2.6975-2.7252
	$\gamma_0=2.5$	5.0100-5.0132	3.4001-3.4142	2.6981-2.7254
	$\gamma_0=0$	5.0746-5.0778	3.4636-3.4779	2.7608-2.7886

Table 3 : Valeurs seuils pour le test de une population contre deux ayant même variance égale à un.

Notons tout d'abord que les processus $X_{\frac{T}{2}-\lambda}(\cdot)$ et $X_{\frac{T}{2}-\lambda}(T-\cdot) = Y(\cdot)$ avec $0 \leq \lambda \leq \frac{T}{2}$ ont le même maximum sur $\Gamma = [0, T]$. Or Y et $X_{\frac{T}{2}+\lambda}$ sont égaux en loi. Donc $\max_{\gamma \in [0, T]} X_{\frac{T}{2}-\lambda}(\gamma)$ et $\max_{\gamma \in [0, T]} X_{\frac{T}{2}+\lambda}(\gamma)$ ont même loi. Ainsi les valeurs seuils, fonction de $\gamma_0 \in [0, T]$, sont symétriques par rapport à $\gamma_0 = \frac{T}{2}$. On remarque numériquement (cf. Table 3 et Figure 6) que les valeurs seuils semblent être fonction décroissante de γ_0 sur $[0, \frac{T}{2}]$. Ceci suppose donc que pour u fixé dans $\mathbb{R}$ (ou du moins pour u grand) et $\forall \lambda_1 \geq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \frac{T}{2}]$:

$$P[\max_{\gamma \in [0, T]} X_{\lambda_1}(\gamma) \geq u] \leq P[\max_{\gamma \in [0, T]} X_{\lambda_2}(\gamma) \geq u]. \quad (5.1)$$

Malheureusement le lemme de Slepian ne permet pas de démontrer cette remarque. Il existe en effet $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \frac{T}{2}]$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, T]$ (par exemple pour $T = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\gamma_1 = 0.1$ et $\gamma_2 = 0.5$) tels que $E[X_{\lambda_1}(\gamma_1)X_{\lambda_1}(\gamma_2)] \leq E[X_{\lambda_2}(\gamma_1)X_{\lambda_2}(\gamma_2)]$; ce qui contredit les hypothèses du lemme de Slepian.

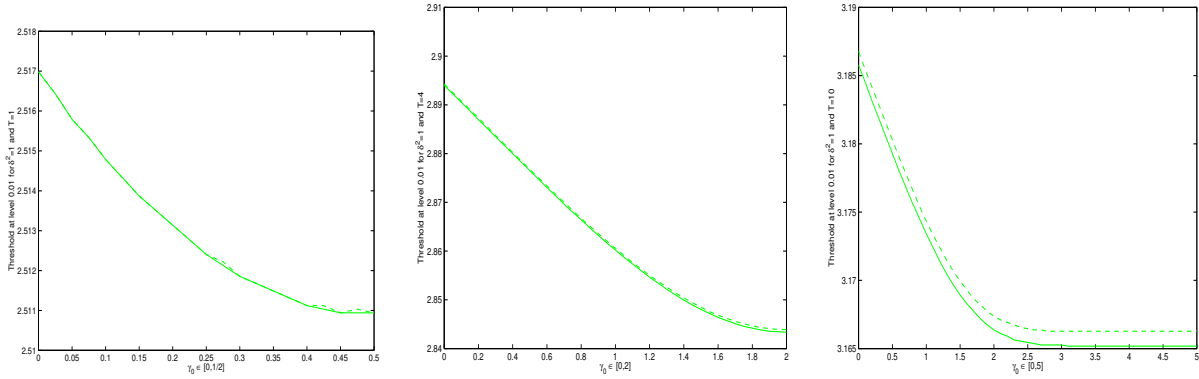


Figure 6 : Valeurs seuils fonctions de $\gamma_0 \in [0; \frac{T}{2}]$ pour le test de une population contre deux ayant même variance égale à un .

Le TRMV décrit précédemment dépend de la vraie valeur γ_0 de γ sous l'hypothèse nulle qui est inconnue en pratique. Ainsi, pour mettre ce test en pratique, nous avons besoin d'un encadrement $[v_1, v_2]$ pour la valeur seuil de sorte que quel que soit γ_0 la valeur seuil correspondante se trouve toujours dans cet intervalle. On conclura au rejet de l'hypothèse nulle lorsque la statistique du TRMV se trouvera au delà de v_2 . On ne saura pas conclure lorsque cette statistique sera dans l'intervalle $[v_1, v_2]$ et on acceptera l'hypothèse nulle lorsqu'elle sera en deçà de v_1 . L'erreur de première espèce effective du test sera donc toujours inférieure au niveau fixé initialement. La puissance se calcule à partir de v_2 . Malheureusement elle dépend également de γ_0 . Nous faisons donc varier γ_0 sur l'intervalle $[0, T - \lambda]$ avec $\lambda = |\gamma_{2,0} - \gamma_0|$ et calculons les puissances correspondantes pour $\gamma_{2,0} = \gamma_0 + \lambda$. La plus petite et la plus grande puissance sont alors conservées. Elles nous donnent un encadrement effectif de la puissance de ce test. Notons que cet encadrement de la puissance reste le même lorsque l'on veut tester $\gamma_{2,0} = \gamma_0 - \lambda$ car dans ce cas γ_0

varie sur l'intervalle $[\lambda; T]$ et $R((\gamma - \gamma_0), (\gamma' - \gamma_0)) = R(-(\gamma - \gamma_0), -(\gamma' - \gamma_0))$ et $M_{\delta^2}((\gamma - \gamma_0), (\gamma_{2,0} - \gamma_0)) = M_{\delta^2}(-(\gamma - \gamma_0), -(\gamma_{2,0} - \gamma_0))$. Il dépend donc uniquement de $|\gamma_{2,0} - \gamma_0|$ (et bien entendu de δ^2). Nous donnons dans la Table 4 quelques résultats obtenus. Remarquons que notre programme ne nous donne pas les vraies valeurs de v_1 , v_2 et de la puissance à γ_0 fixé mais uniquement des encadrements. Ces encadrements nous permettent d'avoir une estimation de l'erreur commise sur le résultat. Dans notre problème ils s'avèrent être très précis; ce qui signifie que les moments d'ordre deux apparaissant dans la méthode de Rice utilisée sont faibles.

Niveau		1%	
T=1	Val.seuil		3.1524 ; 3.1676
	Puis.	$ \gamma_{2,0} - \gamma_0 \delta^2$	<i>1</i> <i>3</i>
		<i>0.25</i>	1.10 ; 1.12 1.38 ; 1.40
		<i>0.5</i>	1.55 ; 1.60 3.55 ; 3.73
T=4	Val.seuil		4.0424-4.0439 ; 4.1876-4.1884
	Puis.	$ \gamma_{2,0} - \gamma_0 \delta^2$	<i>1</i> <i>3</i>
		<i>0.25</i>	0.94 ; 1.06 1.12-1.13 ; 1.20
		<i>0.5</i>	1.22-1.23 ; 1.31 2.22-2.23 ; 2.58
		<i>1</i>	3.69-3.71 ; 4.49-4.50 40.73-40.89 ; 44.45-44.52
		<i>1.5</i>	39.01-39.17 ; 42.73-42.79 100
T=10	Val.seuil		5.0092-5.0126 ; 5.0746-5.0778
	Puis.	$ \gamma_{2,0} - \gamma_0 \delta^2$	<i>1</i> <i>3</i>
		<i>0.25</i>	0.97-0.98 ; 1.02-1.03 1.06-1.07 ; 1.09
		<i>0.5</i>	1.10-1.11 ; 1.14 1.58-1.59 ; 1.78-1.80
		<i>1</i>	2.36-2.38 ; 2.81-2.84 30.02-30.30 ; 33.22-33.50
		<i>1.5</i>	28.51-28.78 ; 31.65-31.92 100
S_n^2	Val.seuil		2.3263
	Puis.	$ \gamma_{2,0} - \gamma_0 \delta^2$	<i>1</i> <i>3</i>
		<i>0.25</i>	1.12 1.41
		<i>0.5</i>	1.58 3.62
		<i>1</i>	5.27 41.88
		<i>1.5</i>	23.11 99.28

Table 4 : Quelques résultats obtenus par le programme S-plus pour le TRMV. Comparaison avec le test du S_n^2 .

Comparaison du TRMV avec un test de moment

La Table 4 précédente et la Figure 7 suivante donnent une comparaison des résultats de puissance que nous obtenons pour le TRMV avec ceux donnés par le test du S_n^2 déjà présenté précédemment dans

le cadre du test de mélange simple. Tout d'abord nous remarquons que la dépendance du TRMV par rapport à γ_0 est vraiment faible (les encadrements obtenus pour les puissances asymptotiques s'avèrent être très précis). Nous remarquons ensuite, comme dans le cas du test de mélange simple, que lorsque T est petit, le TRMV semble avoir de meilleures propriétés que celui du S_n^2 ; mais dans ces cas les puissances restent vraiment faibles ce qui remet en question l'utilisation de ces tests pour la détection d'un mélange. Lorsque T est grand ($T \geq 4$), pour des alternatives obtenues pour $|\gamma_{2,0} - \gamma_0|$ proches de 0, le test du S_n^2 est plus puissant que le TRMV mais les puissances restent faibles; la tendance s'inverse lorsque $|\gamma_{2,0} - \gamma_0|$ grandit et alors le TRMV s'avère être le test vraiment le plus intéressant (les puissances sont grandes et la différence avec le test du S_n^2 est importante). Lorsque δ^2 croît et que $|\gamma_{2,0} - \gamma_0|$ se rapproche de 0 (on se rapproche alors du cas de la détection de deux groupes), le test du S_n^2 devient le plus puissant des deux tests même pour des puissances importantes (autour de 40% par exemple). Le TRMV et le test du S_n^2 ne peuvent-ils pas présenter, chacun dans leur domaine, des propriétés d'optimalité?

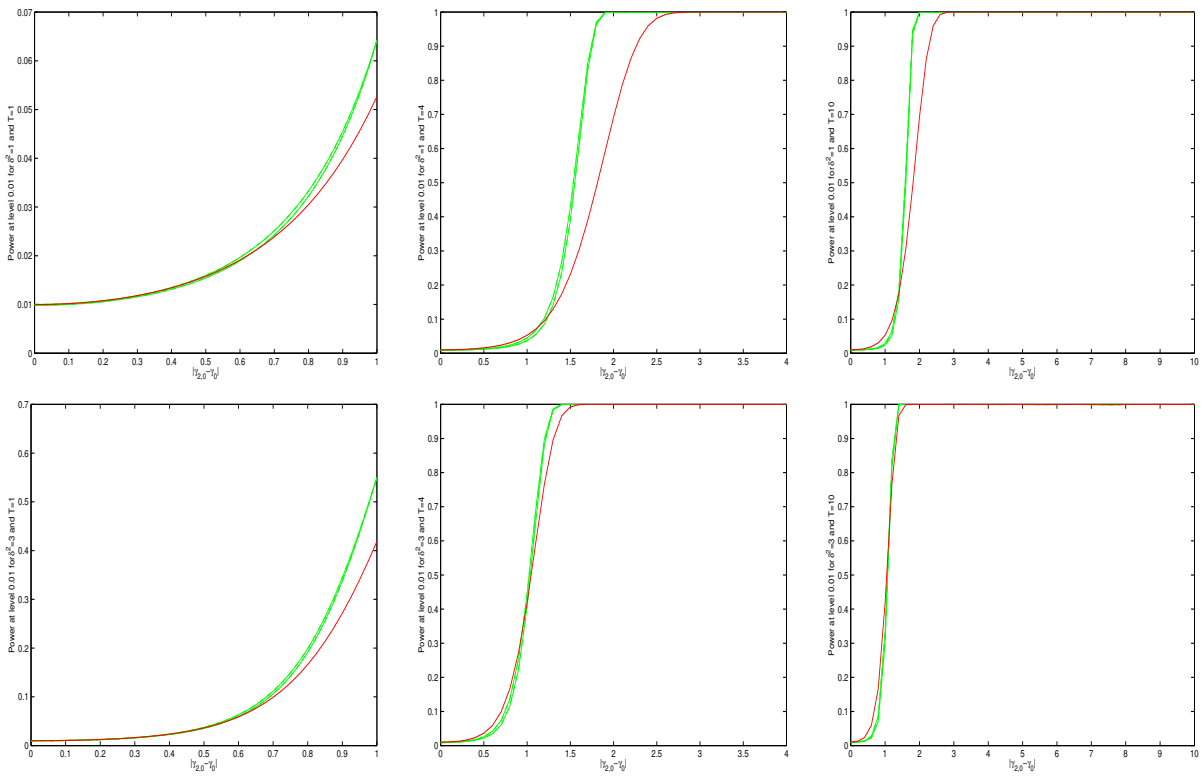


Figure 7

Légende pour les Figures 7 et 8 : Courbes de puissance asymptotique comparées pour le TRMV (vert) et le test du S_n^2 (rouge). L'hypothèse nulle est l'hypothèse d'homogénéité $\mathcal{N}(\gamma, 1)$ avec $\gamma \in [0, T]$. L'hypothèse alternative est l'hypothèse de mélange $(1 - p_0)\mathcal{N}(\gamma_1, 1) + p_0\mathcal{N}(\gamma_2, 1)$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$, $\gamma_1 = \gamma_0$ (γ_0 est la vraie valeur de γ sous l'hypothèse nulle) et $\gamma_2 = \gamma_{2,0}$ fixé dans $[0, T]$. Le programme S-plus

réalisé fournit un encadrement pour la puissance asymptotique du TRMV dont les bornes supérieure et inférieure ne sont pas données exactement mais également sous forme d'encadrement : $[[i_1, i_2], [s_1, s_2]]$. On a représenté les bornes extérieures i_1 et s_2 de cet encadrement en trait plein et les bornes intérieures i_2 et s_1 en pointillés. Dans de nombreux cas la précision des encadrements obtenus est supérieure à la précision des graphes donnés et les courbes en trait plein et en pointillés se confondent. Parfois même les deux courbes en trait plein se confondent. Notons que sur la Figure 8, l'encadrement pour le TRMV obtenu pour $T = 4$ majore celui pour $T = 10$ qui majore celui pour $T = 15$. La borne inférieure de l'encadrement pour $T = 10$ se confond sur la Figure 8 avec la borne supérieure de l'encadrement pour $T = 15$.

Comportement asymptotique quand $T \rightarrow +\infty$

Comme dans le cas du TRMV pour le problème de mélange simple gaussien, le TRMV pour le problème de mélange de une population gaussienne contre deux de même variance connue, dépend de l'intervalle $[0, T]$ sur lequel sont supposées se trouver les moyennes des composants du mélange. Nous constatons également numériquement que la puissance asymptotique de ce test diminue lorsque T augmente : cf. Table 4, Figures 7 et 8.

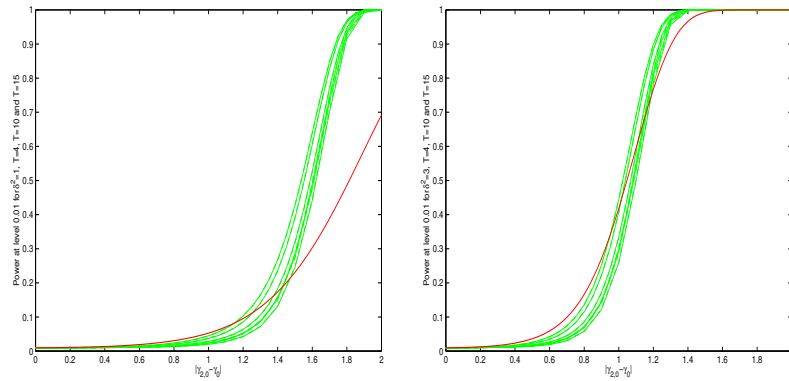


Figure 8

De manière générale on constate qu'il existe une fonction $f_{\gamma_0, \alpha}$ croissante en T , telle que :

$$P\left[\max_{\gamma \in [0, T]} X_{\gamma_0}(\gamma) \geq f_{\gamma_0, \alpha}(T)\right] = \alpha.$$

On remarque numériquement que cette fonction peut être correctement approchée, lorsque T est grand, par :

$$g_{\gamma_0, \alpha}(T) = \sqrt{2 \log(T)} + \frac{-\log(-\log(1 - \alpha)) + \log\left[\frac{\int_0^1 \sqrt{r_{1,1}^{\gamma_0}(t, t)} dt}{2\pi}\right]}{\sqrt{2 \log T}}.$$

Ce qui suppose donc que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P[\max_{\gamma \in [0, T]} X_{\gamma_0}(\gamma) \geq g_{\gamma_0, \alpha}(T)] = \alpha. \quad (5.2)$$

On remarque également qu'il existe une fonction $L_{\gamma_0, \gamma'_0, \delta^2, \alpha}(\gamma_{2,0})$ telle que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P[\max_{\gamma \in [0, T]} (X_{\gamma_0}(\gamma) + m_{\gamma_0, \delta^2}(\gamma, \gamma_{2,0})) \geq f_{\gamma'_0, \alpha}(T)] = L_{\gamma_0, \gamma'_0, \delta^2, \alpha}(\gamma_{2,0}). \quad (5.3)$$

Hélas de tels résultats limites (5.2) et (5.3) ne sont établis que dans le cadre de champs aléatoires gaussiens stationnaires (théorème 5.1). Il serait donc intéressant de pouvoir les élargir à des cas plus généraux afin de pouvoir prouver un résultat de type (5.2) et de type (5.3) et obtenir ainsi une expression pour $L_{\gamma_0, \gamma'_0, \delta^2, \alpha}(\gamma_{2,0})$ (qui serait la puissance asymptotique quand $T \rightarrow +\infty$). Ceci serait une première réponse à la question de l'extension du TRMV de une population gaussienne contre deux de même variance connue au cas de paramètres non bornés.

5.2.3 Test de une population contre deux (cas homoscédastique de variance inconnue)

Considérons à présent le problème de test de mélanges de distributions plus général :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \mathcal{N}(\gamma, \sigma^2) \\ \mathcal{H}_1 : & (1 - p_0)\mathcal{N}(\gamma_1, \sigma^2) + p_0\mathcal{N}(\gamma_2, \sigma^2) \end{cases}$$

avec $p_0 \in]0, 1[$, $\gamma \in \Gamma = [T_1, T_2]$, $\sigma^2 \in [S_1, S_2]$ avec $0 < S_1 < S_2 < +\infty$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \Gamma$. Notons γ_0 et σ_0^2 les vraies valeurs de γ et σ^2 sous $\mathcal{H}_0$. Selon Dacunha-Castelle et Gassiat (1997-1999), la statistique du TRMV converge en loi vers $\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} X_{(\gamma_0, \sigma_0^2)}^2(\gamma) \mathbb{I}_{\{X_{(\gamma_0, \sigma_0^2)}(\gamma) \geq 0\}}$ sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et vers $\frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} (X_{(\gamma_0, \sigma_0^2)}(\gamma) + m_{(\gamma_0, \sigma_0^2, \delta^2)}(\gamma, \gamma_{2,0}))^2 \mathbb{I}_{\{X_{(\gamma_0, \sigma_0^2)}(\gamma) + m_{(\gamma_0, \sigma_0^2, \delta^2)}(\gamma, \gamma_{2,0}) \geq 0\}}$ sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$, $\gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, $\sigma^2 - \sigma_0^2 = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$ et $\gamma_2 = \gamma_{2,0} \neq \gamma_0$ fixé dans Γ . $X_{(\gamma_0, \sigma_0^2)}$ est un processus gaussien centré de variance un dont la fonction de covariance est donnée par :

$$\begin{aligned} r_{(\gamma_0, \sigma_0^2)}(\gamma, \gamma') &= R\left(\left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\sigma_0}\right), \left(\frac{\gamma' - \gamma_0}{\sigma_0}\right)\right) \\ &= \frac{e^{\frac{(\gamma - \gamma_0)(\gamma' - \gamma_0)}{\sigma_0^2}} - 1 - \frac{(\gamma - \gamma_0)(\gamma' - \gamma_0)}{\sigma_0^2} - \frac{(\gamma - \gamma_0)^2(\gamma' - \gamma_0)^2}{2\sigma_0^4}}{\sqrt{e^{\frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{\sigma_0^2}} - 1 - \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{\sigma_0^2} - \frac{(\gamma - \gamma_0)^4}{2\sigma_0^4}} \sqrt{e^{\frac{(\gamma' - \gamma_0)^2}{\sigma_0^2}} - 1 - \frac{(\gamma' - \gamma_0)^2}{\sigma_0^2} - \frac{(\gamma' - \gamma_0)^4}{2\sigma_0^4}}}. \end{aligned}$$

La fonction moyenne $m_{(\gamma_0, \sigma_0^2, \delta^2)}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} m_{(\gamma_0, \sigma_0^2, \delta^2)}(\gamma, \gamma_{2,0}) &= M_{\delta^2} \left(\left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\sigma_0} \right), \left(\frac{\gamma_{2,0} - \gamma_0}{\sigma_0} \right) \right) \\ &= \frac{\delta^2 \left[e^{\frac{(\gamma - \gamma_0)(\gamma_{2,0} - \gamma_0)}{\sigma_0^2}} - 1 - \frac{(\gamma - \gamma_0)(\gamma_{2,0} - \gamma_0)}{\sigma_0^2} - \frac{(\gamma - \gamma_0)^2(\gamma_{2,0} - \gamma_0)^2}{2\sigma_0^4} \right]}{\sqrt{e^{\frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{\sigma_0^2}} - 1 - \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{\sigma_0^2} - \frac{(\gamma - \gamma_0)^4}{2\sigma_0^4}}}. \end{aligned}$$

Remarque : Notons qu'une étude est actuellement en cours pour tester la même alternative que précédemment mais avec $\gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\alpha}{n^{\epsilon_1}}$ et $\sigma^2 - \sigma_0^2 = \frac{\beta}{n^{\epsilon_2}}$, ϵ_1 et ϵ_2 strictement positifs différents de $\frac{1}{2}$ et pour tester l'alternative $\mathcal{H}_1$ avec p_0 fixé dans $]0, 1[$, $\gamma_1 = \gamma_0$, $\gamma_2 - \gamma_0 = \frac{\alpha}{n^{\epsilon_1}}$ et $\sigma^2 - \sigma_0^2 = \frac{\beta}{n^{\epsilon_2}}$, ϵ_1 et ϵ_2 strictement positifs; ces cas n'étant pas inclus dans les résultats donnés p.291 de Dacunha-Castelle et Gassiat.

Intéressons-nous donc au problème de test de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$, $\gamma_1 = \gamma_0$, $\sigma^2 = \sigma_0^2$ et $\gamma_2 = \gamma_{2,0} \neq \gamma_0$ fixé dans $\Gamma = [T_1, T_2]$. Il est évident que cette étude peut se ramener sur $\Gamma = [\frac{T_1 - \gamma_0}{\sigma_0}, \frac{T_2 - \gamma_0}{\sigma_0}]$ en considérant le processus gaussien centré $X_{(0,1)}$ dont la fonction de covariance est

$$r_{(0,1)}(\gamma, \gamma') = \frac{e^{\gamma\gamma'} - 1 - \gamma\gamma' - \frac{\gamma^2\gamma'^2}{2}}{\sqrt{e^{\gamma^2} - 1 - \gamma^2 - \frac{\gamma^4}{2}} \sqrt{e^{\gamma'^2} - 1 - \gamma'^2 - \frac{\gamma'^4}{2}}},$$

et qui, sous l'alternative $\mathcal{H}_1$, est décéntré par la fonction moyenne :

$$m_{(0,1,\delta^2)}(\gamma, \gamma_{2,0}) = \frac{\delta^2 \left[e^{\gamma\gamma_{2,0}} - 1 - \gamma\gamma_{2,0} - \frac{\gamma^2\gamma_{2,0}^2}{2} \right]}{\sqrt{e^{\gamma^2} - 1 - \gamma^2 - \frac{\gamma^4}{2}}},$$

où $\gamma_{2,0}$ désigne maintenant par abus de notations $\frac{\gamma_{2,0} - \gamma_0}{\sigma_0}$. Nous donnons dans la Table 5 qui suit quelques résultats obtenus par notre programme S-plus. La méthode utilisée pour implémenter notre programme sera décrite dans la section suivante. Notons que les résultats numériques que nous donnons par la suite sont obtenus uniquement à partir des moments d'ordre un de la méthode de Rice utilisée.

Niveau	1%	5%	10%
$\Gamma=[-2;2]$	≤ 4.1533	≤ 2.6209	≤ 1.9755
$\Gamma=[-5;5]$	≤ 5.0390	≤ 3.4514	≤ 2.7688
$\Gamma=[-8;8]$	≤ 5.5168	≤ 3.9183	≤ 3.2296
$\Gamma=[-1;3]$	≤ 4.2076	≤ 2.6687	≤ 2.0180
$\Gamma=[-2.5;7.5]$	≤ 5.0413	≤ 3.4532	≤ 2.7707
$\Gamma=[-4;12]$	≤ 5.5168	≤ 3.9183	≤ 3.2296
$\Gamma=[0;4]$	≤ 4.3092	≤ 2.7594	≤ 2.1002
$\Gamma=[0;10]$	≤ 5.1242	≤ 3.5330	≤ 2.8477
$\Gamma=[0;16]$	≤ 5.5708	≤ 3.9714	≤ 3.2814

Table 5: Valeurs seuils pour le test de une population contre deux ayant même variance inconnue.

La Table 5 se découpe en trois sous-tableaux. Chacun correspond à une position particulière de γ_0 à l'intérieur de l'intervalle $[T_1; T_2]$. Le premier correspond à γ_0 centré dans $[T_1; T_2]$. Le second à γ_0 positionné au quart de l'intervalle et le dernier à γ_0 tendant vers le bord de l'intervalle. Les trois lignes de chacun de ces sous-tableaux correspondent à des valeurs différentes de σ_0 . (Les résultats numériques donnés ici correspondent par exemple aux cas où $[T_1; T_2] = [5; 15]$, $\sigma_0 = 5/2, 1, 5/8$ et $\gamma_0 = 10, 7.5$ et 5^+ . Notons que les valeurs seuils, pour une longueur d'intervalle donnée et une valeur de σ_0 fixée (par exemple ligne 1 des sous-tableaux), sont fonction uniquement de γ_0 . Il est immédiat qu'elles sont symétriques par rapport à $\gamma_0 = \frac{T_1+T_2}{2}$. (On ne donne donc pas les résultats numériques pour γ_0 positionné au trois-quart de l'intervalle puisque ce sont les mêmes que ceux pour γ_0 au quart de l'intervalle). On remarque, comme dans le problème de mélange de une population gaussienne contre deux ayant même variance connue, que les valeurs seuils sont fonction décroissante de γ_0 . Dans ce cas également cette remarque ne peut pas s'expliquer par le lemme de Slepian dont les hypothèses ne sont pas satisfaites. Lorsque l'on fixe γ_0 et que l'on fait varier σ_0 , les valeurs seuils sont fonction décroissante de σ_0 . Ceci est évident puisque lorsque σ_0 croît, la longueur de l'intervalle Γ diminue et donc les queues de probabilité diminuent de même que les valeurs seuils. Dans ce cas également le TRMV n'est pas libre des vraies valeurs des paramètres γ_0 et σ_0 sous l'hypothèse nulle. Pour mettre ce test en pratique, nous avons donc besoin d'un encadrement $[v_1; v_2]$ pour la valeur seuil de sorte que $\forall \gamma_0 \in [T_1; \frac{T_1+T_2}{2}]$ et $\forall \sigma_0^2 \in [S_1; S_2]$ la valeur seuil correspondante se trouve toujours dans cet intervalle. Ici encore on conclura au rejet de l'hypothèse nulle lorsque la statistique du TRMV se trouvera au delà de v_2 . On ne saura pas conclure lorsqu'elle se trouvera dans $[v_1; v_2]$ et on acceptera l'hypothèse nulle lorsqu'elle sera en deçà de v_1 . Le test ainsi construit est uniformément de

niveau α . La puissance se calcule à partir de v_2 . Elle va dépendre de γ_0 et σ_0 , vraies valeurs inconnues des paramètres γ et σ sous l'hypothèse nulle. Pour éliminer cette dépendance nous faisons varier γ_0 sur $[T_1; T_2 - \lambda^2 \sigma_0]$ avec $\lambda^2 = \frac{|\gamma_{2,0} - \gamma_0|}{\sigma_0}$ et σ_0^2 sur $[S_1; S_2]$ et calculons les puissances correspondantes pour $\gamma_{2,0} = \gamma_0 + \lambda^2 \sigma_0$. La plus petite et la plus grande puissance obtenue sont alors conservées. Elles nous fournissent un encadrement de la puissance de ce test. Notons que cet encadrement reste le même lorsqu'il s'agit de tester $\gamma_{2,0} = \gamma_0 - \lambda^2 \sigma_0$. Le test ainsi construit dépendra donc uniquement de $\lambda^2 = \frac{|\gamma_{2,0} - \gamma_0|}{\sigma_0}$ et de δ^2 . Nous donnons dans la Table 6 qui suit quelques exemples de résultats de puissance obtenus par notre programme.

	$\left \frac{\gamma_{2,0} - \gamma_0}{\sigma_0} \right $			
	1	1.25	1.5	1.75
	<i>0.75</i>	<i>0.9</i>	<i>1</i>	<i>1.25</i>
TRMV à 1%	0.42-1.14	1.44-2.70	9.71-12.30	61.59-65.24
	1.40-1.94	3.86-5.18	18.77-21.99	75.91-78.59
	<i>0.48-1.44</i>	<i>1.37-2.64</i>	<i>3.47-5.19</i>	<i>39.39-43.29</i>
Test de moments à 1%	1.69	3.38	9.8	34.02
	<i>1.65</i>	<i>2.71</i>	<i>4.33</i>	<i>20.29</i>
TRMV à 5%	1.93-6.22	5.02-10.19	22.20-29.18	79.49-84.63
	<i>2.16-6.56</i>	<i>4.84-9.99</i>	<i>10.03-15.98</i>	<i>60.17-66.33</i>
Test de moments à 5%	7.48	12.58	27.04	60.63
	<i>7.34</i>	<i>10.69</i>	<i>15.09</i>	<i>44.05</i>
TRMV à 10%	3.75-12.02	8.58-18.01	30.90-41.77	86.19-92.82
	<i>4.13-12.57</i>	<i>8.31-17.68</i>	<i>15.61-25.75</i>	<i>69.91-77.55</i>
Test de moments à 10%	14.06	21.68	40.20	73.66
	<i>13.83</i>	<i>18.95</i>	<i>25.17</i>	<i>58.45</i>

Table 6 : Quelques résultats de puissance obtenus par notre programme pour le test de une population gaussienne contre deux de même variance inconnue.

Légende pour la Table 6 : Quelques résultats de puissance obtenus. En caractères droits on trouve les résultats pour $\delta^2 = 1$ et en italique les résultats pour $\delta^2 = 3$. Les puissances obtenues pour σ_0 variant de $\frac{5}{8}$ à $\frac{5}{2}$, et donc calculées à partir de $v_2 = 3.3379; 2.8183; 2.5618$ pour les résultats aux niveaux 1%, 5% et 10%, sont en caractère de taille normale. En petits caractères nous avons donné les résultats de puissance pour $\sigma_0 = \frac{5}{2}$ fixé. Notons que puisque les résultats sont obtenus uniquement en utilisant les moments d'ordre un de la méthode de Rice, la borne inférieure des encadrements de puissances donnés

est légèrement supérieure à la vraie valeur de cette borne inférieure.

Comparaison du TRMV avec un test de moments

Comme la variance σ^2 des composants du mélange est ici inconnue, nous ne pouvons plus utiliser le test du S_n^2 . Ce test est construit à partir de l'équation de la variance :

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 + p_0(1 - p_0)(\gamma_2 - \gamma_1)^2,$$

où σ^2 est la variance intra classes et $p_0(1 - p_0)(\gamma_2 - \gamma_1)^2$ est la variance inter classes. $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ est un estimateur consistant de $\text{Var}(X)$ et donc, lorsque σ^2 est connu et supposé égal à un, $S_n^2 - 1$ est un estimateur consistant de la variance inter classes $p_0(1 - p_0)(\gamma_2 - \gamma_1)^2$. Cette variance inter classes est nulle sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ (les X_i suivent une loi $\mathcal{N}(\gamma_0, \sigma_0^2)$ avec $\sigma_0 > 0$) et strictement positive sous l'alternative $\mathcal{H}_1$ (les X_i suivent une loi $(1 - p_0)\mathcal{N}(\gamma_1, \sigma_0^2) + p_0\mathcal{N}(\gamma_2, \sigma_0^2)$ avec $\sigma_0 > 0$). Pour construire un test analogue dans le cas où σ^2 est inconnue, nous avons besoin d'un estimateur (consistant) $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 . Pour cela, et puisque nous voulons détecter des valeurs aberrantes (c'est à dire tester l'alternative $\mathcal{H}_1$ avec p_0 qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$), nous pouvons considérer que l'échantillon est issu d'un modèle $\mathcal{N}(\gamma_1, \sigma^2)$ contaminé par des valeurs aberrantes et estimer σ^2 par un estimateur robuste de la variance. Pour cela nous pouvons utiliser les L-statistiques et prendre par exemple comme estimateur :

$$\frac{1}{n - 2[\alpha n]} \sum_{i=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} (X_{n(i)} - \hat{m}_n)^2,$$

ou bien :

$$\frac{1}{n} \left[[\alpha n] (X_{n([\alpha n])} - \hat{m}_n)^2 + \sum_{i=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} (X_{n(i)} - \hat{m}_n)^2 + [\alpha n] (X_{n(n-[\alpha n]+1)} - \hat{m}_n)^2 \right],$$

où $X_{n(1)}, \dots, X_{n(n)}$ sont les statistiques d'ordre du n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ et $\hat{m}_n$ est un estimateur robuste de la moyenne que l'on peut par exemple prendre égal à :

$$\frac{1}{n - 2[\alpha n]} \sum_{i=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{n(i)},$$

ou bien à :

$$\frac{1}{n} \left[[\alpha n] X_{n([\alpha n])} + \sum_{i=[\alpha n]+1}^{n-[\alpha n]} X_{n(i)} + [\alpha n] X_{n(n-[\alpha n]+1)} \right].$$

Les propriétés asymptotiques des L-statistiques peuvent être trouvées par exemple dans Shorack et Wellner (1986) ou dans van der Vaart (1999). Des tests peuvent donc être réalisés à partir de ces statistiques.

A côté des L-statistiques, il existe des estimateurs robustes plus simples à utiliser (cf. Gnanadesikan et Kettenring (1972), Huber (1985), Caussinus et Ruiz (1990; 1992, 1994)) que nous allons considérer maintenant. Notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, K une fonction strictement positive et décroissante et β un paramètre dont nous discuterons dans la suite. Soit :

$$S_n(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 K\left(-\frac{\beta(X_i - \bar{X}_n)^2}{V_n^2}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(-\frac{\beta(X_i - \bar{X}_n)^2}{V_n^2}\right)}.$$

Considérons la statistique suivante introduite par Caussinus et Hakkam (2001) :

$$\mathcal{N}_n(\beta) = \sqrt{n} \left(\frac{(\beta + 1)S_n(\beta)}{V_n^2} - 1 \right).$$

$S_n(\beta)$ est un estimateur robuste de la variance σ^2 pour un échantillon issu d'un modèle $\mathcal{N}(\gamma_1, \sigma^2)$ contaminé par des valeurs aberrantes. Ainsi la statistique $\mathcal{N}_n(\beta)$ peut être interprétée, dans notre problème de test de mélange gaussien, comme une généralisation au cas où la variance σ^2 est inconnue de la statistique $\sqrt{n} \frac{S_n^2 - 1}{\sqrt{2}}$ discutée dans les sections précédentes lorsque σ^2 était connue. Cette statistique de test $\mathcal{N}_n(\beta)$ est invariante par translation et par changement d'échelle. Sa loi asymptotique sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ (les X_i suivent une loi $\mathcal{N}(\gamma_0, \sigma_0^2)$ avec $\sigma_0 > 0$) ne dépendra donc pas de γ_0 ni σ_0 . De plus sa loi asymptotique sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ (les X_i suivent une loi $(1 - p_0)\mathcal{N}(\gamma_1, \sigma_0^2) + p_0\mathcal{N}(\gamma_2, \sigma_0^2)$ avec $\sigma_0 > 0$) dépendra uniquement de p_0 et de $|\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\sigma_0}|$. Prenons $K(x) = \exp(-x/2)$ et renormalisons $\mathcal{N}_n(\beta)$ de façon à ce que sa variance asymptotique soit égale à un. Considérons donc :

$$\mathcal{V}_n(\beta) = \frac{\mathcal{N}_n(\beta)}{\sqrt{\frac{(\beta+1)(3\beta^2+4\beta+2)}{(2\beta+1)^{5/2}} - \frac{2}{(\beta+1)^2}}}.$$

Des développements limités classiques permettent de montrer que sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ $\mathcal{V}_n(\beta)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0, 1)$ et sous l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ avec $p_0 = \frac{\delta^2}{\sqrt{n}}$, $|\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\sigma_0}| = \lambda^2$, $\mathcal{V}_n(\beta)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(f(\beta, \lambda^2, \delta^2), 1)$ avec :

$$f(\beta, \lambda^2, \delta^2) = \frac{\delta^2(\lambda^2)^2(\exp(-\frac{\beta(\lambda^2)^2}{2(1+\beta)}) - 1)}{\sqrt{\frac{(\beta+1)^3(3\beta^2+4\beta+2)}{(2\beta+1)^{5/2}} - 2}}.$$

Une étude de la fonction $f(\cdot, \lambda^2, \delta^2)$ montre que cette fonction est croissante et que $f(0, \lambda^2, \delta^2) = -\frac{\delta^2(\lambda^2)^4}{2\sqrt{6}}$. Ainsi le test proposé sera le plus puissant pour $\beta \rightarrow 0$. L'équivalent de la statistique de test $\mathcal{V}_n(\beta)$ en 0 est :

$$\mathcal{V}_n(0) = \sqrt{n} \left(\frac{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^4 + 3(V_n^2)^2}{2\sqrt{6}(V_n^2)^2} \right).$$

Cette statistique est une estimation du coefficient γ_2 de Pearson appelé "*kurtosis*" qui mesure l'aplatissement d'une loi. Nous comparerons le TRMV au test basé sur cette statistique. Ce dernier peut être

amélioré en utilisant comme estimateur de la moyenne non plus $\bar{X}_n$ mais un estimateur robuste comme la médiane, les L-statistiques ou bien :

$$\mu_n(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(-\frac{\beta(X_i - \bar{X}_n)^2}{V_n^2}\right) X_i}{\sum_{i=1}^n K\left(-\frac{\beta(X_i - \bar{X}_n)^2}{V_n^2}\right)}.$$

Des estimateurs robustes construits de manière itérative à partir de l'expression de $S_n(\beta)$ dans laquelle on remplace $\bar{X}_n$ et V_n^2 par $\mu_n(\beta)$ et $S_n(\beta)$ peuvent également être envisagés (cf. Ruiz (1996) et Fekri et Ruiz (2000)). Dans le cas de la détection de deux groupes c'est à dire lorsque l'alternative $\mathcal{H}_1$ considérée est un mélange de deux distributions gaussiennes dont les deux composants ont un certain poids et se rapprochent l'une de l'autre à une vitesse proportionnelle à $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 0$, on préférera utiliser $T_n(\beta)$ au lieu de $S_n(\beta)$.

$$T_n(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n K\left(-\frac{\beta(X_i - \bar{X}_n)^2}{V_n^2}\right) (X_i - X_j)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n K\left(-\frac{\beta(X_i - \bar{X}_n)^2}{V_n^2}\right)}.$$

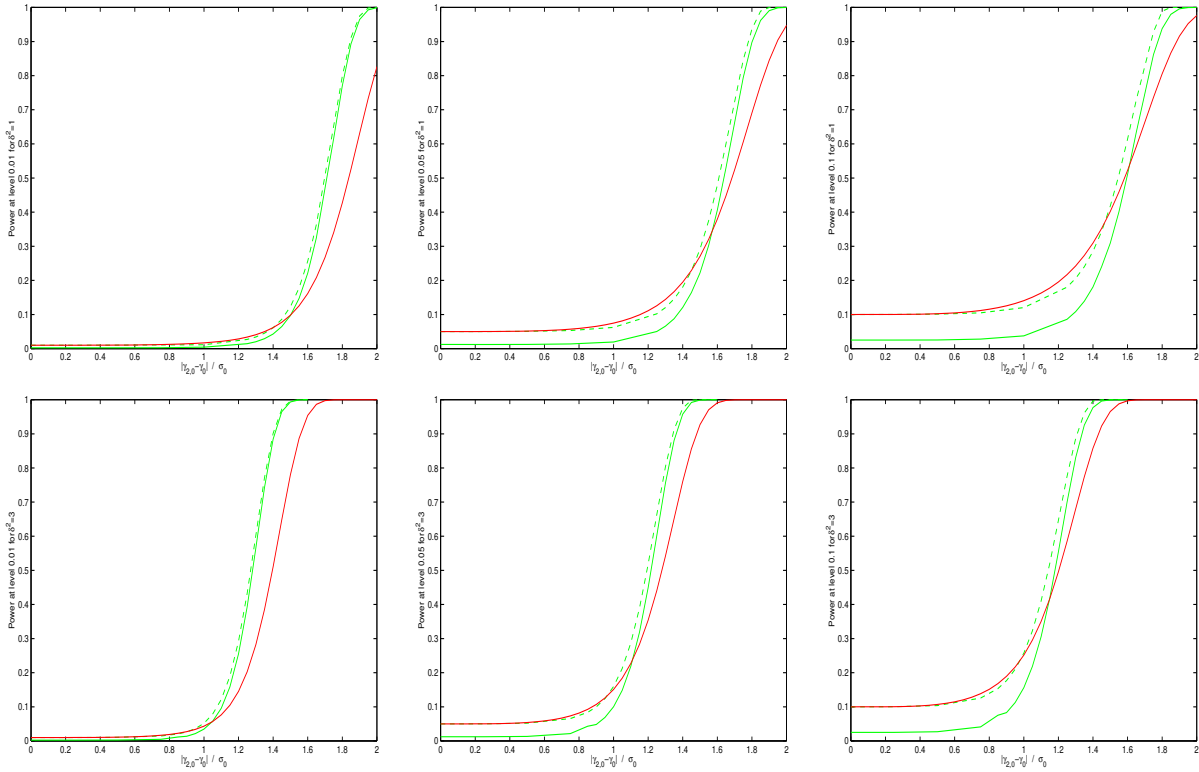


Figure 9: Comparaison du TRMV (vert) avec le test de moments basé sur $v_n(0)$ (rouge) pour le problème de test de une population gaussienne contre deux de même variance inconnue. Pour le TRMV nous obtenons un encadrement de la puissance dont la borne supérieure est représentée en pointillés et la borne inférieure en trait plein. Comme nous l'avons

déjà remarqué la borne inférieure est légèrement supérieure à sa vraie valeur puisque nous l'avons calculée uniquement à partir des moments d'ordre un de la méthode de Rice.

Le principal inconvénient du TRMV est qu'il dépend des vraies valeurs γ_0 et σ_0 des paramètres sous l'hypothèse nulle. Nous avons mis en oeuvre un test uniformément de niveau α et de ce fait la puissance peut être inférieure au niveau pour de petites valeurs de $\frac{|\gamma_{2,0}-\gamma_0|}{\sigma_0}$. Dans ces cas là il est évident qu'il est préférable d'utiliser un test de moments. Par contre lorsque $\frac{|\gamma_{2,0}-\gamma_0|}{\sigma_0}$ croît la puissance du TRMV croît et devient supérieure à celle du test de moments. De plus sa dépendance vis-à-vis de γ_0 et σ_0 diminue. Il apparaît donc comme étant le test le plus intéressant.

Notons que le test de moments considéré pourrait être amélioré par des arguments discutés ci-dessus.

5.3 Méthode

La méthode de Rice décrite dans le chapitre précédent pour des processus à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$ peut être adaptée et employée dans le cas d'un processus X sur $[-T_2, T_1]$ à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-T_2, 0[$ et sur $]0, T_1]$ et tel que $X(0^+) = -X(0^-)$ p.s. . Pour cela il suffit de remarquer que :

$$P\left[\sup_{t \in [-T_2, T_1]} X(t) \geq u\right] = P[|X(0)| \geq u] + P[(U_u^X[0, T_1] + D_u^X[-T_2, 0])\mathbb{I}_{\{|X(0)| < u\}}].$$

Par le même raisonnement que dans le chapitre précédent nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} P[|X(0)| \geq u] + E[(U_u^X[0, T_1] + D_u^X[-T_2, 0])\mathbb{I}_{\{|X(0)| < u\}}] - \frac{1}{2}E[(U_u^X[0, T_1] + D_u^X[-T_2, 0])^2] \\ \leq P\left[\sup_{t \in [-T_1, T_2]} X(t) \geq u\right] \leq \\ P[|X(0)| \geq u] + E[(U_u^X[0, T_1] + D_u^X[-T_2, 0])\mathbb{I}_{\{|X(0)| < u\}}]. \end{aligned}$$

5.3.1 Test de mélange simple gaussien

Le processus gaussien X considéré est à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-T, 0[$ et $]0, T]$ et $X(0^+) = -X(0^-)$ p.s. .

Sous l'hypothèse nulle

L'intervalle $[-T, T]$ étant symétrique autour de 0 et $X(\cdot)$ et $X(-\cdot)$ ayant même loi on en déduit que :

$$E[D_u^X[-T, 0]\mathbb{I}_{\{|X(0)| < u\}}] = E[U_u^X[0, T]\mathbb{I}_{\{|X(0)| < u\}}]$$

$$E[D_u^X[-T, 0]^{[2]}] = E[U_u^X[0, T]^{[2]}].$$

Leurs expressions sont les mêmes que celles obtenues dans le chapitre précédent pour le cas non stationnaire centré de variance un. L'expression du moment croisé $E[U_u^X[0, T]D_u^X[-T, 0]]$ devient :

$$\begin{aligned} E[U_u^X[0, T]D_u^X[-T, 0]] &= \int_0^T dt \int_{-T}^0 ds \sigma(t, s) \sigma(s, t) J_{11}(b(t, s), -b(s, t), -\rho(t, s)) \frac{\varphi^2\left[\frac{u}{\sqrt{1+r(s, t)}}\right]}{\sqrt{1-r^2(s, t)}} \\ &= \int_0^T dt \int_0^T ds \sigma(t, -s) \sigma(-s, t) J_{11}(b(t, -s), -b(-s, t), -\rho(t, -s)) \frac{\varphi^2\left[\frac{u}{\sqrt{1+r(-s, t)}}\right]}{\sqrt{1-r^2(-s, t)}}. \end{aligned}$$

Une difficulté numérique apparaît dans le calcul de l'intégrand relatif à $E[U_u^X[0, T]D_u^X[-T, 0]]$ lorsque s et t tendent vers 0. Un développement limité autour de ce point montre que l'intégrand tend vers 0 lorsque s et t tendent vers 0. Une méthode de Simpson en dimension deux est utilisée pour calculer l'intégrale double sur $[0, T]^2$.

Sous l'hypothèse alternative

Les expressions de $E[U_u^X[0, T]\mathbb{I}_{\{|X(0)|<u\}}]$ et $E[U_u^X[0, T]^{[2]}]$ sont les mêmes que celles obtenues dans le chapitre précédent pour le cas non stationnaire décentré de variance un. Pour les autres termes nous obtenons (en utilisant les mêmes notations que dans le cas non stationnaire décentré de variance un du chapitre précédent) :

Mélange simple gaussien sous l'alternative	
$E[D_u^X[-T, 0]]$	$G(m(-t), -m'(-t))$
$E[D_u^X[-T, 0]\mathbb{I}_{\{ X(0) <u\}}]$	$G(m(-t), -m'(-t)) - F[r(0^-, -t), -r_{1,0}(-t, 0^-), m(0^-), m(-t), -m'(-t)]$ $- F[-r(0^-, -t), r_{1,0}(-t, 0^-), -m(0^-), m(-t), -m'(-t)]$
$E[D_u^X[-T, 0]^{[2]}]$	$\int_0^T \int_0^T dt ds \sigma(-t, -s) \sigma(-s, -t) J_{11}(-b(-t, -s), -b(-s, -t), \rho(-t, -s))$ $\frac{\varphi(u-m(-s))}{\sqrt{1-r^2(t, s)}} \varphi\left(\frac{u-m(-t)-r(t, s)(u-m(-s))}{\sqrt{1-r^2(t, s)}}\right)$
$E[U_u^X[0, T]D_u^X[-T, 0]]$	$\int_0^T \int_0^T dt ds \sigma(t, -s) \sigma(-s, t) J_{11}(b(t, -s), -b(-s, t), -\rho(t, -s))$ $\frac{\varphi(u-m(-s))}{\sqrt{1-r^2(t, -s)}} \varphi\left(\frac{u-m(t)-r(t, -s)(u-m(-s))}{\sqrt{1-r^2(t, -s)}}\right)$

Les difficultés numériques et les remarques pour le calcul de $E[D_u^X[-T, 0]\mathbb{I}_{\{|X(0)|<u\}}]$ et $E[D_u^X[-T, 0]^{[2]}]$ sont les mêmes que dans le chapitre précédent. Pour $E[U_u^X[0, T]D_u^X[-T, 0]]$, la seule difficulté est lorsque s et t tendent vers 0 dans l'intégrand. Un développement limité montre que cet équivalent est nul. Les calculs peuvent donc se faire. Une méthode de Simpson en dimension deux est utilisée pour calculer l'intégrale double sur $[0, T]^2$.

5.3.2 Test de une population contre deux (cas homoscédastique de variance connue)

Le processus gaussien X considéré est à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$. La méthode employée dans ce cas là est donc exactement celle décrite dans le chapitre précédent dans le cas non stationnaire centré de variance un sous l'hypothèse nulle et le cas non stationnaire décentré de variance un sous l'alternative.

5.3.3 Test de une population contre deux (cas homoscédastique de variance inconnue)

Le processus gaussien X considéré est à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-T_2; 0[$ et $]0; T_1]$ et $X(0^+) = -X(0^-)$ p.s.. Les modifications à apporter aux formules obtenues dans le cas du test de mélange simple gaussien pour obtenir celles qui nous intéressent ici sont immédiates. Les intégrales doubles sur $[0, T_1] \times [0, T_2]$ sont calculées par une méthode de Simpson en dimension deux.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons commencé par motiver l'étude du maximum d'un processus aléatoire par la donnée de plusieurs exemples d'applications issus de domaines très divers (Médecine, Astrophysique, etc...) faisant appel aux Statistiques et Probabilités. Nous avons ensuite rappelé les principaux résultats généraux existants dans l'étude du maximum d'un processus aléatoire. Ces résultats valables pour une très large classe de processus sont établis pour l'essentiel par des méthodes d'entropie. Face au manque de précision évident de ces résultats très élégants et très puissants lorsqu'il s'agit de les utiliser en pratique, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à des méthodes permettant d'obtenir des résultats très précis au prix de conditions plus fortes sur le processus. Ces méthodes sont des méthodes de Rice. Elles demandent au processus d'être suffisamment régulier. Cette régularité est très souvent satisfaite dans les exemples pratiques. Lorsqu'elle ne l'est pas, on préfère en général modifier un peu la démarche scientifique pour s'y ramener et bénéficier de résultats précis. Après avoir fait un tour d'horizon des résultats déjà existants dans ce domaine, nous avons rappelé certains éléments de Probabilités indispensables, donnant des conditions suffisantes faciles à vérifier pour satisfaire les hypothèses des théorèmes établis et déjà existants.

Notre principale contribution dans ce domaine a été de proposer une méthode permettant de généraliser les méthodes de Rice pour des processus gaussiens en dimension un au cas de champs aléatoires gaussiens sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$. Notre méthode est basée d'une part sur l'utilisation du nombre de maxima locaux au-dessus d'un niveau du champ aléatoire gaussien et d'autre part sur un raisonnement sur les dérivées premières et secondes de ce champ aléatoire permettant d'en modifier correctement son nombre de maxima locaux au-dessus d'un niveau sur les différents bords du sous-ensemble

compact de $\mathbb{R}^N$. Notre méthode nous permet de redémontrer les principaux résultats existants dans ce domaine (souvent obtenus par des méthodes très diverses), d'en améliorer certains et d'en obtenir de nouveaux.

Dans la deuxième partie de cette thèse (chapitres 4 et 5) nous nous sommes principalement intéressés à un aspect plus appliqué des méthodes de Rice. Dans un premier temps nous avons fait une implémentation *Spplus* des différentes méthodes et formules de Rice étudiées et établies dans cette thèse. Pour cela, en généralisant les résultats donnés dans Azaïs, Cierco et Croquette (1999), nous avons établi des formules relativement bien adaptées au calcul numérique pour les moments d'ordre un et d'ordre deux intervenant lors de l'étude des queues de probabilités de type (4.1). L'application et l'adaptation de nos méthodes aux tests de mélanges de distributions (Gosh et Sen (1985), Dacunha-Castelle et Gassiat (1997b, 1999)) fait l'objet du dernier chapitre. Des Tables et des résultats de puissances sont donnés pour les tests du rapport des maximums de vraisemblance asymptotiques de une population gaussienne contre deux. Cela nous permet de comparer ces tests à des tests de moments classiques. Des conclusions sont alors tirées quant à l'optimalité de ces tests.

Cette thèse a soulevé de nombreuses questions à la fois au niveau théorique et appliqué.

En ce qui concerne l'étude des tests de mélange de distributions, il serait intéressant de réécrire les théorèmes relatifs à la puissance des tests du rapport des maximums de vraisemblance donnés p.291 dans Dacunha-Castelle et Gassiat (1997) de manière plus générale c'est à dire pour des alternatives générales pouvant correspondre à la fois au problème de la détection de valeurs aberrantes et à la fois au problème de la détection de plusieurs groupes. En effet les théorèmes tels qu'ils sont écrits actuellement permettent de traiter uniquement le problème de la détection de valeurs aberrantes. A la suite de notre étude il semblerait également que le test du rapport des maximums de vraisemblance et le test du $\bar{X}_n$ ou du S_n^2 pourraient présenter certaines propriétés d'optimalité. L'estimation robuste de la variance semble également être une voie prometteuse pour obtenir des tests vraiment intéressants pour la détection de mélange de distributions (H. Caussinus, A. Ruiz et S. Hakkam en autres travaillent dans ce domaine).

En ce qui concerne l'étude du maximum d'un champ aléatoire, dans un premier temps il est évident, vu les démonstrations, que les résultats établis dans le chapitre 3 sous l'hypothèse d'indépendance des dérivées premières et secondes du champ aléatoire gaussien peuvent se réécrire en éliminant cette hypothèse; ce qui nous permet alors d'être dans un cadre non stationnaire plus général. Dans un deuxième temps il serait intéressant de regarder un peu plus en détails les applications relatives aux résultats que nous obtenons pour les champs aléatoires gaussiens sur des variétés sans bord. Dans un troisième temps on peut

regarder ce que donnent nos méthodes sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$ autres que le rectangle et le compact convexe dont la frontière est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut également essayer d'améliorer la précision de nos résultats en regardant peut-être ce que donnent à la fois les moments d'ordre un et d'ordre deux. Dans la deuxième partie de cette thèse nous avons également soulevé la question de l'étude de l'ordre de grandeur des différents moments factoriels entre eux. Nous remarquons également que les hypothèses du lemme de Slepian semblent un peu fortes puisqu'il existe des processus gaussiens centrés qui satisfont la conclusion de ce lemme sans en satisfaire les hypothèses. Une autre question de recherche très intéressante a été soulevée lors de l'étude des tests de mélange de distributions à savoir l'étude de théorèmes limites pour la variable aléatoire $\sup_{t \in S} X(t)$ lorsque $T \rightarrow +\infty$ et que X n'est plus stationnaire. Ceci consisterait à généraliser au cas non stationnaire le théorème 5.1, discuté dans le chapitre 5, initialement dû à Cramer (1965) et dont la démonstration repose fortement sur le théorème de Volkonski et Rozanov (1961). Ce dernier théorème traduit le comportement poissonien du nombre de upcrossings au-dessus d'un niveau u d'un processus gaussien stationnaire sur un intervalle dont la longueur croît avec u . Il a été généralisé en dimension supérieure par Piterbarg (1972). L'extension au cas non stationnaire et au cas du nombre de maxima locaux reste à faire. Dans ce même cadre des théorèmes limites, un autre point intéressant que nous n'avons pas étudié dans cette thèse mais qui mérite d'être commenté est l'étude de théorèmes centraux limites et centraux limites uniformes pour le nombre de maxima locaux au-dessus d'un niveau d'un champ aléatoire gaussien. En dimension un il existe des résultats de normalité asymptotique pour

$$\frac{N_u^X(T) - E[N_u^X(T)]}{\sqrt{T}} \text{ et } \frac{M_u^X([0, T]) - E[M_u^X([0, T])]}{\sqrt{T}} \text{ quand } T \rightarrow +\infty,$$

où $M_u^X([0, T]^N)$ est le nombre de maxima locaux au-dessus du niveau u et $N_u^X(T)$ est le nombre de upcrossings du niveau u d'un processus gaussien stationnaire X sur $[0; T]$ (cf. Cuzik (1976), Malevich (1969), Kratz et León (1998, 2000)). Des questions intéressantes se posent encore à ce niveau là à savoir l'existence de théorèmes centraux limites en dimension supérieure pour :

$$\frac{M_u^X([0, T]^N) - E[M_u^X([0, T]^N)]}{f(u, T, N)} \text{ quand } T \rightarrow +\infty,$$

où $f(u, T, N)$ est une fonction de normalisation; l'existence de théorèmes centraux limites uniformes pour :

$$\sup_{u \in [U_1, U_2]} \frac{M_u^X([0, T]^N) - E[M_u^X([0, T]^N)]}{f(u, T, N)} \text{ quand } T \rightarrow +\infty,$$

et l'extension de ces théorèmes au cas non stationnaire.

Tout au long de cette thèse nous avons raisonné pour des champs aléatoires gaussiens. L'extension aux

champs aléatoires χ^2 (qui sont assez proches des champs aléatoires gaussiens) aurait également de nombreuses applications (cf. Adler (1981), Worsley(1994), Cao(2000)).

Références générales

- ADLER, R. J., 1981. *The Geometry of Random Fields*. Wiley, New York.
- ADLER, R. J., 1990. *An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*. IMS, Hayward, CA.
- ADLER, R. J., 2000. On excursion sets, tube formulae, and maxima of random fields. *Annals of Applied Prob.* **10** 1–74.
- AZAÏS, J. M., 1990., Simulation de Processus Gaussiens. *Rapport de la Station de Biométrie, INRA, Versailles*.
- AZAÏS, J. M., CIERCO-AYROLLES, C., and CROQUETTE, A., 1999. Bounds and asymptotic expansions for the distribution of the maximum of a smooth stationary Gaussian process. *ESAIM: Probability and Statistics* **3** 107–129.
- AZAÏS, J. M., and DELMAS, C., 2001. Asymptotic expansions for the distribution of the maximum of Gaussian random fields. *Publication du Laboratoire de Statistique et Probabilités*.
- AZAÏS, J. M. and WSCHEBOR, M., 1997. Une formule pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** 225–230.
- AZAÏS, J. M. and WSCHEBOR, M., 2000a. On the regularity of the distribution of the maximum of one-parameter Gaussian processes. *Probability Theory and Related Fields* to appear.
- AZAÏS, J. M. and WSCHEBOR, M., 2000b. Computing the distribution of the maximum of Gaussian processes. Preprint
- AZAÏS, J. M. and WSCHEBOR, M., 2001. Preprint.
- BECKER, R. A., CHAMBERS, J. M. and WILKS, A. R., 1988. *The new S langage, a programming environnement for data analysis and graphics*. Wadsworth and Brooks / Cole, Pacific Grove.
- BELYAEV, Yu. K. and PITERBARG, V. I., 1972a. The asymptotic formula for the mean number of A-points of excursions of Gaussian fields above high levels (in Russian). In *Bursts of Random Fields*, Moscow Univ. Press, Moscow. 62–89.
- BELYAEV, Yu. K. and PITERBARG, V. I., 1972b. Asymptotics of the average number of A-points of overshoot of a Gaussian field beyond a high level. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **203** 309–313.
- BICKEL, P., and CHERNOFF, H., 1993. Asymptotic distribution of the likelihood ratio statistic in a prototypical non regular problem. In *Statistics and Probability: A Raghu Raj Bahadur Festschrift*.

- BICKEL, P., and ROSENBLATT, M., 1973. Two-dimensional random fields. In *P. R. Krishnaiah (Ed.), Vol III. Academic Press, New-York*. pp. 3–15.
- BORELL C., 1975. The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.* **30** 207–216.
- BRILLINGER, D. R., 1972. On the number of solutions of systems of random equations. *The Annals of Math. Statistics* **43** 534–540.
- CABAÑA, E. M., and WSCHEBOR, M., 1981. An estimate for the tails of the distribution of the supremum for a class of stationary multiparameter Gaussian processes. *J. Appl. Prob.*, **18**, 536–541.
- CAO, J., 2000. The size of the connected components of excursion sets of χ^2 , t , and F fields. *Adv. Appl. Probability*. In press.
- CAUSSINUS, H., and RUIZ, A., 1990. Interesting projections of multidimensional data by means of Generalized Principal Component Analysis. *COMPSTAT 90, Physica-Verlag, Heidelberg* 121–126.
- CAUSSINUS, H., and RUIZ-GAZEN, A., 1993. Projection Pursuit and Generalized Principal Component Analyses. *New Directions in Statistical Data Analysis and Robustness, Monte Verita* 35–46.
- CAUSSINUS, H., and RUIZ-GAZEN, A., 1995. Metrics for Finding Typical Structures by means of Principal Component Analysis. *Data Science and Its Application* 117–192.
- CELEUX, G. and DIEBOLT, J., 1984. Reconnaissance de mélange de densités et classification; un algorithme d'apprentissage probabiliste: l'algorithme SEM. *Rapport de Recherche no 349, INRIA, Rocquencourt*.
- CELEUX, G. and DIEBOLT, J., 1986. L'algorithme SEM: un algorithme d'apprentissage probabiliste pour la reconnaissance de mélange de densités. *Revue de Statistiques Appliquées*.
- CHAUDHURI, P., and MARRON, J. S., 1999. SiZer for exploration of structures in curves. *Journal of the American Statistical Association* **74** 829–836.
- CHAUDHURI, P., and MARRON, J. S., 2000. Scale space view of curve estimation. *Annals of Stat.* **28** 2 408–428.
- CHAUDHURI, P., and SENGUPTA, D., 1993. Sign tests in multidimension: inference based on the geometry of the data cloud. *Journal of the American Statistical Association* **88** 1363–1370.
- CIERCO, C. 1996. *Problèmes statistiques liés à la détection et à la localisation d'un gène à effet quantitatif*. Thèse de l'Université Toulouse III, France.
- CIERCO, C. 1998. Asymptotic distribution of the maximum likelihood ratio test for gene detection. *Statistics*, **31**, 3, 261–285.
- CIERCO, C., AZAÏS, J. M., Testing for quantitative gene detection in dense map, submitted.
- CRAMER, H., 1946. *Mathematical methods of statistics*. Princeton.
- CRAMER, H., 1965. A limit theorem for the maximum values of certain stochastic processes. *Theor. Prob. Appl.*, **10**, 126–128.
- CRAMER, H. and LEADBETTER, M. R., 1967. *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, New York.
- CSIRELSON, B. S., IBRAGIMOV, I. A., and SUDAKOV, V. N., 1975. Norms of Gaussian sample functions. *Proceedings of the Third Japan-USSR Symposium on Probability Theory (Tashkent, 1975), Lecture Notes in Math.*, **550**, Springer, Berlin, (1976), 20–41.

- CUZIK, J. 1976. A central limit theorem for the number of zeros of a stationary Gaussian process. *Annals of Prob.* **4** 547–556.
- DACUNHA-CASTELLE, D. and GASSIAT, E., 1997a. The estimation of the order of a mixture model. *Bernoulli*, **3**, 279–299.
- DACUNHA-CASTELLE, D. and GASSIAT, E., 1997b. Testing in locally conic model and application to mixture models. *ESAIM: Probability and Statistics* **1** 285–317.
- DACUNHA-CASTELLE, D. and GASSIAT, E., 1999. Testing the order of a model using locally conic parametrization: population mixtures and stationary ARMA processes. *Annals of Stat.* **27** no **4** 1178–1209.
- DAVIES, R. B., 1977. Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika* **64** 247–254.
- DAVIES, R. B., 1987. Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika* **74** 33–43.
- DELMAS, C., 1998. An asymptotic expansion for the distribution of the maximum of a class of Gaussian fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** 393–397.
- DEMPSTER, A. P., LAIRD, N. M. and RUBIN, D. B., 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. With discussion. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **1** 1–38.
- DIETRICH, C. R. and NEWSAM, G. N., 1997. Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix. *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, **4**, 1088–1107.
- DUDLEY, R. M., 1967. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. *J. Funct. Anal.* **1** 290–330.
- DUDLEY, R. M., 1973. Sample functions of the Gaussian process. *Ann. Prob.* **1** 66–103.
- EVERITT, B. P., 1981. A Monte Carlo investigation of the likelihood ratio test for the number of components in a mixture of normal distributions. *Multiv. Behav. Res.*, **16**, 171–180.
- FEINGOLD, E., BROWN, P. O. and SIEGMUND, D., 1993. Gaussian models for genetic linkage analysis using complete high-resolution maps of identity by descent. *American Journal of Human Genetics*, **53**, 234–251.
- FEKRI, M., and RUIZ-GAZEN, A. 2000. Propriétés asymptotiques et fonction d’influence d’un estimateur simple et robuste de matrice de dispersion. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* **330** **6** 505–508.
- FERNIQUE, X. M., 1970. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. *C. R. A. S. Paris* **270** 19698–1699.
- FERNIQUE, X. M., 1974. *Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes*. Ecole d’été de Probabilités IV. Lecture Note in Mathematics no 480. Springer Berlin.
- FRIEDMAN, J. H., 1987. Exploratory projection pursuit. *J. Am. Statist. Assoc.*, **82**, 249–266.
- FRISTON, K. J., FRITH, C. D., LIDDLE, P. F. and FRACKOWIAK, R. S. J., 1991. Comparing functional (PET) images: the assessment of significant change. *J. Cereb. Blood Flow Metab.*, **11**, 690–699.
- FRISTON, K. J., WORSLEY, K. J., FRACKOWIAK, R. S. J., MAZZIOTTA, J. C. and EVANS, A. C., 1994. Assessing the Significance of Focal Activations Using Their Spatial Extent. *Human Brain Mapping*, **1**, 210–220.

- GNANADESIKAN and KETTENRING, 1972. Robust Estimates, Residuals, and Outliers Detection with Multiresponse Data. *Biometrics* **28** 81–124.
- GOFFINET, B., LOISEL, P. and LAURENT, B., 1992. Testing in normal mixture models when the proportions are known. *Biometrika* **79**, 4, 842–846.
- GOSH, J. K., and SEN, P. K., 1985. On the asymptotic performance of the log-likelihood ratio statistic for the mixture model and related results. *Proc. Berkeley Conf. in Honor of Jersey Neyman and Jack Kiefer (vol. II)*, L. M. Le Cam and R. A. Olshen (eds), Monterey, Wadsworth. 789–806.
- HADWIGER, H., 1957. *Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer Verlag Berlin.
- HADWIGER, H., 1959. Normale Körper im euklidischen Raum und ihre topologischen und metrischen Eigenschaften. *Math. Zeitschrift*, **71**, 124–140.
- HAMILTON, A. J. S., GOTT III, J. R. and WEINBERG, D., 1986. The topology of the large-scale structure of the universe. *The Astrophysical Journal*, **309**, 1–12.
- HARTIGAN, J. A., 1985. A failure of likelihood ratio asymptotics for normal mixtures. In *Proceedings of the Berkeley conference in honor of Jerzy Neyman and Jack Kiefer*. Le Cam, L. M. and Olshen, R. A. eds.
- HASOFER, A. M., 1976. The Mean Number of Maxima Above High Levels in Gaussian Random Fields. *J. Appl. Prob.* **13** 377–379.
- HUBER, P. J., 1985. Projection Pursuit (with discussion). *Annals of Statistics* **13** 435–525.
- KAC, M., 1943. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** 314–320.
- KAC, M., and SLEPIAN, D., 1959. Large excursions of Gaussian processes. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 1215–1228.
- KRATZ, M. and LEÓN, J., 1998. Central limit theorems for the number of maxima and some estimator of the second spectral moment of a stationary Gaussian process. Applications in hydroscience. *Extremes* to appear.
- KRATZ, M. and LEÓN, J., 2000. Central limit theorems for level functionals of stationary Gaussian processes and fields. Preprint.
- LANDAU, H. and SHEPP, L. A., 1970. On the supremum of a Gaussian process. *Sankya* **32** 369–378.
- LANDER, E. S. and BOSTSTEIN, D., 1989. Mapping Mendelian Factors Underlying Quantitative Traits Using RFLP Linkage Maps. *Genetics*, **121**, 185–199.
- LEADBETTER, M. R., LINDGREN, G. and ROOTZEN, H., 1983. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer Verlag, New-York.
- LINDGREN, G., 1972. Local maxima of Gaussian fields. *Ark. Math.*, **10**, 195–218.
- LINDSAY, B. G., 1989. Moment matrices: application in mixtures. *Ann. Statist.*, **17**, 722–740.
- LINDSAY, B. G., 1995. *Mixture models: Theory, Geometry and Applications*.
- LOISEL, P., GOFFINET, B., MONOD, H. and MONTES DE OCA, G., 1994. Detecting a major gene in an F2 population. *Biometrics* **50** 512–516.
- MALEVICH, T. L., 1969. Asymptotic normality of the number of crossings of level zero by a Gaussian process. *Theor. Prob. Appl.* **14** 287–295.

- MARCUS, M. B., and SHEPP, L. A., 1971. Sample behaviour of Gaussian processes. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, **2**, 423–442.
- MCLACHLAN, G. J., 1987. On bootstrapping the likelihood ratio test statistic for the number of components in a Normal Mixture. *Appl. Stat.*, **3**, 318–324.
- MCLACHLAN, G. J. and PEEL, D., 2000. *Finite Mixture Models*. New York: Wiley.
- MENDELL, N. R., FINCH, S. J. and THODE, H. C. 1993. Where is the likelihood ratio test powerful for detecting two component normal mixtures? *Biometrics*, **49**, 907–915.
- MENDELL, N. R., THODE, H. C. and FINCH, S. J. 1992. The likelihood ratio test for the two-component normal mixture problem: power and sample size analysis. *Biometrics*, **47**, 1143–1148.
- MERGENSEN, K. L., and ROBERT, C. P., 1995. Testing for mixture via entropy distance and Gibbs sampling. In *Bayesian Statistics 5* (eds J. O. Berger, J. M. Bernardo, A. P. Dawid, D. V. Lindley and A. F. M. Smith). Oxford: Oxford University Press, (in press).
- MIKHALEVA, T. L. and PITERBARG V. I., 1996. On the distribution of the maximum of a Gaussian field with constant variance on a smooth manifold. *Theor. Prob. Appl.* **41** 367–379.
- OCHI, M., 1998. Ocean Waves. *Cambridge Ocean Technology Series. Cambridge University Press. Cambridge U. K.*
- PARK, M. G. and SUN, J., 1998. Tests in projection pursuit regression. *Journal of Statistical Planning and Inference* **75** 65–90.
- PEARSON, K., 1894. Contributions to the mathematical theory of evolution. *Phil. Trans. A.* **185** 71–110.
- PITERBARG, V. I., 1972. The asymptotic Poisson character of the number of high excursions and the distribution of the maximum of homogeneous Gaussian fields (in Russian). In *Bursts of Random Fields*, Moscow Univ. Press, Moscow. pp 90–118.
- PITERBARG, V. I., 1981. Comparison of Distribution Functions of Maxima of Gaussian Processes. *Th. Prob. Appl.* **26** 687–705.
- PITERBARG, V. I., 1982. Large deviations of random processes close to Gaussian ones. *Th. Prob. Appl.* **27** 504–524.
- PITERBARG, V. I., 1996a. *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- PITERBARG, V. I., 1996b. Rice's Method for Large Excursions of Gaussian Random Fields. Technical Report No. 478, University of North Carolina. Translation of Rice's method for Gaussian random fields. *Fundamental and Applied Mathematics* **2** 187–204. (In Russian).
- PITERBARG, V. I. and TYURIN, Y. N., 1993. Testing for homogeneity of two multivariate samples: a Gaussian field on a sphere. *Mathematical Methods of Statistics* **2** 147–164.
- POLLARD, D., 1984. *Convergence of stochastic processes*. Springer Series in Statistics. Springer Verlag, New-York Berlin.
- REDNER, R., 1981. Note on the consistency of the maximum likelihood estimate for nonidentifiable distributions. *Annals of Stat.* **9**, 225–228.
- RICE, S. O., 1944–1945. Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell System Tech. J.* **23** 282–332; **24** 45–156.

- ROBERT, C. P., 1992. *L'analyse statistique bayésienne* Editions Economica, Paris.
- ROBERT, C. P., 1996. Mixtures of distributions: inference and estimation. In *Practical Markov Chain Monte Carlo* (eds W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter), ch. 24, pp. 441–464. London: Chapman and Hall.
- RUIZ-GAZEN, A., 1996. A very simple Robust estimator of a dispersion matrix. *Computational Statistics and Data Analysis* **21** 149–162.
- SAMORODNITSKY, G., 1991. Probability tails of Gaussian extrema. *Stochastic Processes and their Applications*, **38**, 55–84.
- SELF, S. G. and LIANG, K. L., 1987. Asymptotic properties of maximum likelihood and maximum ratio tests under non standard conditions. *J. Amer. Stat. Assoc. (Theory and Method)*, **82**, 605–610.
- SIEGMUND, D. O. and WORSLEY, K. J., 1995. Testing for a signal with unknown location and scale in a stationary Gaussian random field. *Annals of Stat.* **23** 608–639.
- SLEPIAN, D., 1962. The one-sided barrier problem for Gaussian noise. *Bell System Tech. J.* **42** 463–501.
- SLEPIAN, D., 1963. On the zeroes of Gaussian noise. In *Time series Analysis*, Ed. M. Rosenblatt, New-York, Wiley, 104–115.
- SOROMENHO, G., 1994. Comparing Approaches for Testing the Number of Components in a Finite Mixture Model. *Computational Statistics*, **9**, 65–78.
- STUCHLIK, J. B., ROBERT, C. P. and PLESSIS, B., 1994. Character recognition through Bayes theorem. *Working Paper URA CNRS 1378*, University of Rouen.
- SUDAKOV, V. N. and CSIRELSON, B. S., 1974. Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. (Russian) Problems in the theory of probability distributions, II. *Zap. Nau. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **41**, 14–24.
- SUN, J., 1991. Significance levels in exploratory projection pursuit. *Biometrika* **78** 759–769.
- SUN, J., 1993. Tail Probabilities of the Maxima of Gaussian Random Fields. *Ann. Prob.* **21** 34–71.
- TALAGRAND, M., 1994a. Sharper bounds for Gaussian and empirical processes. *Annals of Prob.* **22** 28–76.
- TALAGRAND, M., 1994b. The supremum of some canonical processes. *Amer. J. Math.* **116** 283–325.
- TALAGRAND, M., 1996. Majorising measures: the general chaining. *Annals of Proba.* **24** 1049–1103.
- TEICHER, H., 1965. Identifiability of finite mixtures. *Ann. of Math. Stat.*, **36**, 423–439.
- THODE, H. C., FINCH, S. J. and MENDELL, N. R., 1988. Simulated percentage points for the null distribution of the likelihood ratio test for a mixture of two normals. *Biometrics*, **44**, 1195–1201.
- TITTERINGTON, D. M., SMITH, A. F. M. and MAKOV, U. E., 1985. *Statistical analysis of finite mixture distributions*. Wiley Series.
- VOLKONSKI, V. A. and ROZANOV, Yu. A., 1961. Some limit theorems for random functions, II. *Theor. Prob. Appl.*, **6**, 186–198.
- WALD, A., 1949. Note on the consistency of the maximum likelihood estimate. *Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 595–601.

- WEYL, H., 1939. On the volumes of tubes. *Amer. J. Math.*, **61**, 461–472.
- WOLFE, J. H., 1971. Pattern clustering by multivariate mixture analysis. *Multiv. Behav. Res.*, **5**, 329–350.
- WOLFOWITZ, J., 1949. On Wald's proof of the consistency of the maximum likelihood estimate. *Annals of Mathematical Statistics*, **20**, p.601.
- WORSLEY, K. J., 1994. Local maxima and the expected Euler characteristic of excursion sets of χ^2 , F and t fields. *Adv. in Appl. Probab.* **26** 13–42.
- WORSLEY, K. J., 1995a. Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images. *Annals of Stat.* **23** 640–669.
- WORSLEY, K. J., 1995b. Boundary corrections for the expected Euler characteristic of excursion sets of random fields, with an application to astrophysics. *Adv. Appl. Probab.* **27** 943–959.
- WORSLEY, K. J., 1997. The geometry of random images. *Chance* **9(1)** 27–40.
- WORSLEY, K. J., 1998. Testing for signals with unknown location and scale in a χ^2 random field, with an application to fMRI. Preprint.
- WORSLEY, K. J., EVANS, A. C., MARRET, S. and NEELIN, P., 1992. A Three-Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain. *Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism* **12** 900–918.
- WORSLEY, K. J., FRISTON, K. J., 1995. Analysis of fMRI Time-Series Revisited Again. *Neuroimage*, **2**, 173–181.
- WSCHEBOR, M., 1985. Surfaces aléatoires. Mesure géométrique des ensembles de niveau. *Lecture Notes in Mathematics*, **1147**, Springer-Verlag.
- YAKOWITZ, S. J., and SPRAGINS, J. D., 1968. On the identifiability of finite mixtures. *Annals of Math. Stat.*, **39**, 209–214.

Annexe A

Note aux C.R.A.S. (Delmas C. (1998))

An asymptotic expansion for the distribution of the maximum of a class of Gaussian fields¹

Céline DELMAS : Laboratoire de Statistique et Probabilités,

Université Paul-Sabatier, 31062 Toulouse, France.

E-mail: cdelmas@cict.fr

Tél : 05 61 55 77 13 - Fax : 05 61 55 60 89

Abstract- *We give an asymptotic expansion for the distribution of the maximum of a class of Gaussian fields. Our method is based on the number of local maxima of a field above a level.*

Un développement asymptotique pour la distribution du maximum d'une classe de champs gaussiens.

Résumé- *Nous donnons un développement asymptotique pour la distribution du maximum d'une classe de champs gaussiens. Notre méthode est basée sur le nombre de maxima locaux d'un champ au-dessus d'un niveau.*

Version Française abrégée.

1. Probabilités : Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Soit $X = \{X(t) : t \in S \subset \mathbb{R}^N\}$ un champ gaussien, centré, à paramètre N -dimensionnel et à valeurs réelles; où S est un compact de $\mathbb{R}^N$. Posons $M(S) = \max\{X(t) : t \in S\}$. De nombreux problèmes statistiques conduisent au calcul de la fonction :

$$G(u) = P[M(S) \geq u].$$

On ne connaît l'expression exacte de $G(u)$ que pour un nombre très réduit de processus gaussiens (voir introduction de [4]). Dans tous les autres cas on ne sait obtenir que des résultats approchés de $G(u)$, c'est-à-dire des bornes supérieures ou inférieures ou des approximations asymptotiques quand $u \rightarrow +\infty$. Adler [1] donne un terme d'approximation à $G(u)$ quand $u \rightarrow +\infty$ pour des champs gaussiens stationnaires. Mais ce premier terme d'approximation est souvent très imprécis (notamment quand N est grand) et d'autres termes sont nécessaires si l'on veut obtenir suffisamment de précision. Sun [10] s'appuie sur des éléments de géométrie différentielle pour donner deux termes d'approximation à $G(u)$ quand $u \rightarrow +\infty$ pour une classe de champs gaussiens à variance constante et "périodiques" (dans le sens où ils admettent un développement de Karhunen-Loève qui engendre une variété sans bord).

Dans cette Note nous améliorons la précision de l'approximation de $G(u)$. Nous donnons un développement asymptotique précis de $G(u)$, formé de $[N/2] + 1$ termes ($[N/2]$ désigne la partie entière de $N/2$), au lieu de deux uniquement dans la méthode de Sun, et ceci pour une classe analogue de champs gaussiens à variance constante et "périodiques". Plus précisément, nous montrons que si le champ gaussien X , de variance constante σ^2 sur S , est suffisamment régulier, à trajectoires p.s. de classe $\mathcal{C}^2$, si son développement de Karhunen-Loève $X(t) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(t)\xi_l$ (où les ξ_l sont des v.a. i.i.d. $N(0,1)$) est tel que $F = \{f(t) : t \in S\}$ est une variété différentielle sans bord, alors $P[M(S) \geq u]$ s'écrit :

$$P[M(S) \geq u] = \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \Psi_{2j}(u) + o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{u^\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0.$$

Les expressions de k_{2j} et $\Psi_{2j}(u)$ sont données dans la proposition 3 de la section 2. Notre méthode est basée sur le nombre de maxima locaux d'un champ au-dessus d'un niveau.

Introduction

Let $X = \{X(t) : t \in S \subset \mathbb{R}^N\}$ be a Gaussian field, centered, with N -dimensional parameter and real values; where S is a compact subset of $\mathbb{R}^N$. Let us set $M(S) = \max\{X(t) : t \in S\}$. Various statistical problems can be reduced to calculating the function :

$$G(u) = P[M(S) \geq u].$$

There are only a very reduced number of Gaussian processes for which exact expressions for $G(u)$ are known (see introduction in [4]). For other cases we can only obtain approximate results for $G(u)$ that is

to say upper or lower bounds or asymptotic approximations when $u \rightarrow +\infty$. Adler [1] gives a one-term approximation for $G(u)$ when $u \rightarrow +\infty$ for homogeneous Gaussian fields. But this one-term approximation is frequently inaccurate (especially when N is large) and more terms are needed if we want to get sufficient accuracy. Sun [10] uses differential geometry results to give a two-term approximation for $G(u)$ when $u \rightarrow +\infty$ for a class of “periodic” Gaussian fields with constant variance (we say “periodic” Gaussian fields in the sense that they admit a Karhunen-Loève expansion that generates a manifold without boundary).

In this paper we improve the accuracy of the approximation of $G(u)$. We give an accurate asymptotic expansion for $G(u)$, made up of $[N/2] + 1$ terms ($[N/2]$ stands for the entire part of $N/2$), instead of two only with the Sun’s method, and that for a similar class of “periodic” Gaussian fields with constant variance. Our method is based on the number of local maxima of a field above a level.

In the following, S is a compact subset of $\mathbb{R}^N$ whose boundary has zero Lebesgue measure; V is an open neighbourhood of S ; X is a Gaussian field on V , centered, with constant variance σ^2 , with a.s. $\mathcal{C}^2$ paths on V thus with covariance function of class $\mathcal{C}^4$; $X_i(t)$ and $X_{ij}(t)$ for $i, j = 1, N$ are the first and the second order partial derivatives of $X(t)$. Let us set $X'(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ and $X''(t) = (X_{ij}(t), j \geq i, i, j = 1, N)$. We write $M_u^X(S)$ for the number of local maxima of X above the level u in S :

$$M_u^X(S) = \text{card}\{t \in S : X'(t) = 0; X(t) \geq u; (X_{ij}(t))_{i,j=1,N} \text{ is negative definite}\}.$$

Results

Let $X(t) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(t)\xi_l$ be the Karhunen-Loève expansion of X , where ξ_l are $N(0, 1)$ i.i.d. r.v.; X is said to satisfy $\mathcal{H}1, \mathcal{H}2, \mathcal{H}2', \mathcal{H}3, \mathcal{H}3'$ or $\mathcal{H}4$ when it satisfies respectively :

$\mathcal{H}1$ $F = \{f(t) : t \in S\}$ is a smooth manifold without boundary;

$\mathcal{H}2$ the joint distribution of $(X(t), X'(t), X''(t))$ is non-degenerate, $\forall t \in V$;

$\mathcal{H}2'$ $\forall t \neq s \in V$, the vector $(X(s), X'(s), X''(s), X(t), X'(t), X''(t))$ is non-degenerate;

$\mathcal{H}3$ the moduli of continuity ω_{ij} of the X_{ij} on S satisfy :

$$\forall \epsilon > 0 \quad P[\max_{i,j} \omega_{ij}(h) > \epsilon] = o(h^N) \text{ when } h \downarrow 0;$$

$\mathcal{H}3'$ there exists α and $L > 0$: $\forall t, s \in V, \quad \forall i, j = 1, N, \quad E(X_{ij}(t) - X_{ij}(s))^2 \leq L||t - s||^{2\alpha}$;

$\mathcal{H}4$ $X_i(t)$ and $X_{kl}(t)$ are independant $\forall i, k, l = 1, N, \forall t \in S$.

Remark: Sufficient conditions for $\mathcal{H}3$ to be satisfied can be found, for example, in [1]. Note that $\mathcal{H}3'$ implies $\mathcal{H}3$.

Proposition 1 *If X satisfies $\mathcal{H}1$ then :*

$$E[M_u^X(S)] - \frac{E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)]}{2} \leq P[M(S) \geq u] \leq E[M_u^X(S)].$$

Proof:

Let Y be defined from F to $\mathbb{R}$ by $Y(f) = \langle f, \xi \rangle = X(t)$. Let $M(F)$ denote $\max\{Y(f) : f \in F\}$. Then $M(S) = M(F)$. We write $M_u^Y(F)$ for the number of local maxima of Y above the level u in F . We can show that $(M_u^X(S) > 0) \Leftrightarrow (M_u^Y(F) > 0)$. So we can write :

$$P[M(S) \geq u] = P[M(F) \geq u] = P[M_u^Y(F) > 0] = P[M_u^X(S) > 0]. \quad (6.1)$$

And we easily check that :

$$E[M_u^X(S)] - \frac{E[M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)]}{2} \leq P[M_u^X(S) > 0] \leq E[M_u^X(S)].$$

Using (1) we obtain the result given in Proposition 1.

Proposition 2 *If X satisfies $\mathcal{H}2$ and $\mathcal{H}3$, then :*

$$E[M_u^X(S)] = \int_S dt \int_u^\infty \int_{\mathcal{D}} |\det x''| \Psi_t(x, 0, x'') dx'' dx$$

$\mathcal{D}$ is the region in $\mathbb{R}^{N(N+1)/2}$ in which x'' is negative definite and $\Psi_t(x, x', x'')$ is the joint density of $(X(t), X'(t), X''(t))$ (we consider x'' also as an $N \times N$ matrix).

Proposition 2 is an easy generalization to the non-homogeneous case of Theorem 6.1.1 p.123 of [1]. It gives an exact expression for $E[M_u^X(S)]$. We have to give an approximation for $E[M_u^X(S)]$ in order to have a result well adapted to numerical calculation. Hasofer [6] and Adler [1] give a one-term approximation for $E[M_u^X(S)]$ when $u \rightarrow +\infty$ for homogeneous Gaussian fields. In Proposition 3, we give a more accurate asymptotic expansion for $E[M_u^X(S)]$ for a wider class of Gaussian fields.

Let A be an $N \times N$ matrix, let I and J be subsets of $\{1, N\}$ with $\text{card}(I) = \text{card}(J) = r$. We write $\Delta_{I,J}(A)$ for the determinant of the $r \times r$ sub-matrix $A_{I,J}$ of A . Let us set $\bar{I} = \{1, N\}/I$ and $\bar{J} = \{1, N\}/J$. Let $\mathcal{F}_p(N)$ denote the set of the parts of size p of $\{1, N\}$. If $I \in \mathcal{F}_p(N)$ and $p \in \{1, N-1\}$, σ_I is the permutation of $(1, \dots, N)$ such that $\sigma_I|_{\{1,p\}}$ (and $\sigma_I|_{\{p+1,N\}}$) is a growing bijection from $\{1,p\}$ to I (and from $\{p+1, N\}$ to $\bar{I}$).

Let $r(s, t)$ be the covariance function of X . Let us set :

$$r_{i,0}(t, t) = \frac{\partial r(t, s)}{\partial t_i} \Big|_{t=s}, \quad r_{ij,0}(t, t) = \frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t_i \partial t_j} \Big|_{t=s}, \quad r_{ij,k}(t, t) = \frac{\partial^3 r(t, s)}{\partial t_i \partial t_j \partial s_k} \Big|_{t=s}, \quad etc.$$

Proposition 3 *If X satisfies $\mathcal{H}2$ and $\mathcal{H}3$, then :*

$$E[M_u^X(S)] = \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \Psi_{2j}(u) + o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{u^\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0,$$

with :

- $\Psi_{2j}(u) = \frac{1}{2^{1+j} \pi^{(N+1)/2}} \int_{\frac{u^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} v^{(N-1-2j)/2} e^{-v} dv,$
- $k_{2j} = \frac{1}{\sigma^{N-2j}} \sum_{I, K \in \mathcal{F}_{2j}(N)} \epsilon(\sigma_I) \epsilon(\sigma_K) \int_S |\Lambda(t)|^{-1/2} \Delta_{\bar{I}, \bar{K}}(\Lambda(t)) \gamma_{I, K}(t) dt.$

- $|\Lambda(t)|$ is the determinant of $\Lambda(t) = \text{Var}(X'(t))$.
- $\gamma_{I, K}(t) = \sum_p \epsilon(p) \sum_Q V_{i_1 k_1 i_2 k_2} \times \cdots \times V_{i_{2j-1} k_{2j-1} i_{2j} k_{2j}},$ with :

$$\begin{aligned} V_{ijkl} &= \text{Var}(X''(t) | X(t), X'(t)) \\ &= r_{ij, kl}(t, t) - \sum_{s, n=1}^N r_{ij, s}(t, t) \Lambda_{s, n}^{-1}(t) r_{n, kl}(t, t) - \frac{\lambda_{ij}(t) \lambda_{kl}(t)}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Q is the set of the $\frac{(2j)!}{j! 2^j}$ ways of grouping $(1, \dots, 2j)$ into pairs without regard to order. p is a permutation of $(k_1, \dots, k_{2j})$.

- $\epsilon(q)$ is the signature of the permutation q . We take the convention that $\epsilon^2(\sigma_\emptyset) = \epsilon^2(\sigma_{\{1, N\}}) = 1$ and $\Delta_{\emptyset, \emptyset}(\Lambda) = \gamma_{\emptyset, \emptyset}(t) = 1$.

Remark : If $\mathcal{H}4$ is satisfied, $k_{2j} = \lambda(S) (-1)^j \frac{|\Lambda|^{1/2}}{\sigma^N} C_N^{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!}$, where $\lambda(S)$ is the Lebesgue measure of S .

The main idea of the proof of Proposition 3 is to show that :

$$E[M_u^X(S)] = \int_S dt \int_u^\infty \int_{\mathbb{R}^{N(N+1)/2}} (-1)^N \det(x'') \Psi_t(x, 0, x'') dx'' dx + o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{u^\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0.$$

Proposition 4 (Piterbarg [8]) *If X satisfies $\mathcal{H}2'$ and $\mathcal{H}3'$ then :*

$$E(M_u^X(S)(M_u^X(S) - 1)) = o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{u^\alpha}\right) \quad \forall \alpha > 0.$$

As a consequence of the previous results, we give the main result of this paper :

Theorem 1 *If X satisfies $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2'$ and $\mathcal{H}3'$ then :*

$$P(M(S) \geq u) = \sum_{j=0}^{[N/2]} k_{2j} \Psi_{2j}(u) + o\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{u^\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0.$$

where k_{2j} and $\Psi_{2j}(u)$ are the same as those in proposition 3.

Remarks :

- When $\mathcal{H}4$ is satisfied, the expression of k_{2j} is simpler (see the previous remark). This hypothesis is weaker than the hypothesis of homogeneity for X . It means that $r_{ij,k}(t, t) = 0$, $\forall i, j, k = 1, N$, $\forall t \in S$. So it implies that the covariance matrix of $X'(t)$ doesn't depend on t and especially that $r_{ij,kl}(t, t)$ is a symmetric function of i, j, k, l .
- In the very special case of a finite Karhunen-Loève expansion for X , the Sun's method cited in introduction gives a $([N/2] + 1)$ -term approximation for $G(u)$ (cf. [10]). However, even in this special case, our asymptotic expansion is more accurate than the Sun's method because our remainder is smaller.
- $\mathcal{H}1$ is the most important hypothesis in Theorem 1. Some examples, where this hypothesis is satisfied, can be found in [9] and [10].

Bibliographie

- [1] ADLER, R. J. (1981). *The Geometry of Random Fields*. Wiley, New York.
- [2] ADLER, R. J. (1990). *An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*. IMS, Hayward, CA.
- [3] AZAÏS, J. -M. and WSCHEBOR, M. (1997). Une formule pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique. *C. R. A. S. Paris*, t.324, Sér. 1, 225–230.
- [4] AZAÏS, J. -M. and WSCHEBOR, M. (1998). The Distribution of the Maximum of a Stochastic Process and the Rice Method. Preprint.
- [5] CRAMER, H. and LEADBETTER, M. R. (1967). *Stationary and Related Stochastic Processes*. J. Wiley & Sons, New York.
- [6] HASOFER, A. M. (1976). The Mean Number of Maxima Above High Levels in Gaussian Random Fields. *J. Appl. Prob.* **13** 377–379.
- [7] PITERBARG, V. I. (1981). Comparison of Distribution Functions of Maxima of Gaussian Processes. *Th. Prob. Appl.* **26** 687–705.
- [8] PITERBARG, V. I. (1996). Rice's Method for Large Excursions of Gaussian Random Fields. Technical Report No. 478, University of North Carolina. Translation of Rice's method for Gaussian random fields. *Fundamental and Applied Mathematics* **2** 187–204. (In Russian).
- [9] SUN, J. (1991). Significance levels in exploratory projection pursuit. *Biometrika* **78** 759–769.
- [10] SUN, J. (1993). Tail Probabilities of the Maxima of Gaussian Random Fields. *Ann. Prob.* **21** 34–71.

Annexe B

Principales fonctions Splus

Nous donnons ici les principales fonctions Splus de base utilisées pour obtenir les résultats donnés dans la thèse. D'autres fonctions peuvent aisément se construire à partir de ces fonctions de base. Ainsi par exemple lorsqu'une fonction calcule une valeur seuil à un niveau ALPHA donné, la sous fonction REPARTITION correspondante permet de calculer la fonction de répartition associée en un point.

On trouvera également sur les listings suivants les développements limités utilisés pour effectuer les calculs numériques notamment dans les problèmes de tests de mélange de populations.

Fonctions utilisées pour la dérivation automatique

"D"	p.i
"deriv3"	p.i
"deriv3.default"	p.i
"deriv3.formula"	p.ii
"derivformel.txt"	p.ii

Fonctions utilisées pour des processus ou champs gaussiens réguliers

Processus gaussien stationnaire

cseuil	p.ii
vcseuil	p.v

Processus gaussien non stationnaire centré de variance un

pseuilnscvu	p.viii
vpseuilnscvu	p.x

Processus gaussien non stationnaire décentré de variance un

pseuilnsdvu	p.xiii
vpseuilnsdvu	p.xv

Processus gaussien non stationnaire général

pseuilns	p.xviii
vpseuilns	p.xxi

Champ gaussien stationnaire

scgsgseuil	p.xxiv
------------	--------

Fonctions utilisées dans le cadre du test de mélange simple

pseuil	p.xxv
pseuilb	p.xxix
pseuilts14	p.xxx
pseuilts14b	p.xxxvii
ppuissance	p.xxxix

Fonctions utilisées dans le cadre du test d'une population gaussienne contre deux de variance connue

pop2seuil	p.xlv
pop2seuilb	p.l
popnsdvu	p.lii

Fonctions utilisées dans le cadre du test d'une population gaussienne contre deux de variance inconnue

pop3seuil1bdef	p.lix
dercourb1	p.lxi